Derivaatta

funktion raja-arvo

Oletetaan, että funktio f on määritelty kohdan a läheisyydessä kohdan a molemmilla puolilla. Funktiolla f on kohdassa a raja-arvo b, jos muuttujan arvojen lähestyessä lukua a kummalta puolen tahansa funktion arvot lähestyvät lukua b.

Jos funktiolla f on kohdassa a raja-arvo b, niin merkitään $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Voidaan myös merkitä f(x) →b, kun x→ a.

Funktion jatkuvuus

Olkoon a jokin luku funktion f määrittelyjoukossa. Funktio f on jatkuva kohdassa a, jos

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(Jatkuvuuden ehdot: funktio määritelty kohdassa a, funktiolla raja-arvo kohdassa a, ja funktion raja-arvo ja funktion arvo ovat samoja kohdassa a.)

Polynomifunktio on kaikkialla jatkuva.
Rationaalifunktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

Jos funktio f on polynomi- tai rationaalifunktio, joka on määritelty kohdassa a, niin funktion raja-arvo kohdassa a on sama kuin funktion arvo kohdassa a eli

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

43. Määritä funktion f(x)=2x+5 raja-arvo kohdassa 2. Onko funktio jatkuva? Mikä on funktion määrittelyjoukko?
Funktio on määritelty kohdassa 2, joten

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 2x + 5 =$

Taulukko.
Funktion arvot lähestyvät kohtaa 2 alapuolelta.

x	f(x)
1,5	
1,9	
1,99	
1,999	

Taulukko.
Funktion arvot lähestyvät kohtaa 2 yläpuolelta.

x	f(x)
2,5	
2,1	
2,01	
2,001	

44. Määritä funktion f(x)=$\frac{x^2-4}{x-2}$ raja-arvo kohdassa 2. Onko funktio jatkuva?
Funktiota f(x) ei ole määritelty kohdassa 2, joten lause pyritään supistamaan muotoon, joka on määritelty kohdassa 2.

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

Tällöin $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$

Taulukko.

x	f(x)
1,5	
1,9	
1,99	
1,999	

Taulukko.

x	f(x)
2,5	
2,1	
2,01	
2,001	

45. Määritä funktion f(x)=$\frac{3x}{x-2}$ raja-arvo kohdassa 2. Piirrä kuvaaja (Desmos).
Funktiota f(x) ei ole määritelty kohdassa 2. Funktion lauseke ei myöskään supistu.

Taulukko

x	f(x)
1,5	
1,9	
1,99	
1,999	

Taulukko

x	f(x)
2,5	
2,1	
2,01	
2,001	

Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa 2.

Rationaalifunktiolla on raja-arvo kohdassa a silloin kun nimittäjän arvo on 0: Jos osoittajana olevan polynomin arvo kohdassa a on eri suuri kuin 0, niin funktiolla ei ole raja-arvoa. Funktiolla r(x)=$\frac{p(x)}{s(x)}$ on raja-arvo kohdassa a, jos p(a)=0 ja s(a)=0.

Trigonometriset funktiot

46. Mikä on funktioiden sin x ja cos x määrittelyjoukko? (Desmos) Mikä on funktioiden sin x ja cos x arvojoukko?

Sin x ja cos x funktiot ovat kaikkialla jatkuvia.

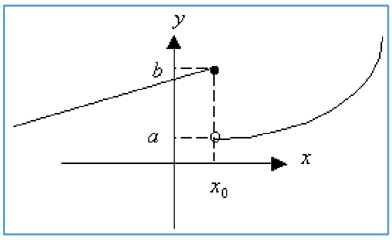
47. Mikä on funktion tan x määrittelyjoukko?

Tan x on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

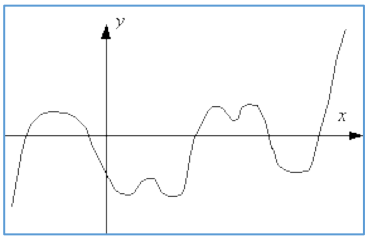
Jatkuvuus ja funktion kuvaaja

Jos funktio on jatkuva jollakin lukusuoran välillä, niin funktion kuvaaja tällä välillä on katkeamaton käyrä.

Kuva. Ei jatkuva funktio. Ei raja-arvoa.

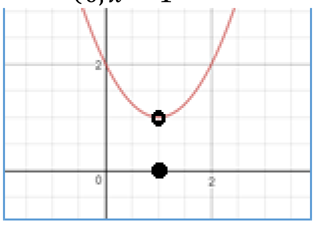


Kuva. Jatkuva funktio



Kuva. Paloittain määritelty funktio. Funktiolla on raja-arvo kohdassa 1. Funktio ei ole jatkuva.

f(x)=$\begin{cases} x^2 - 2x + 2, x \neq 1 \\ 0, x = 1 \end{cases}$



Jatkuvan funktion arvot

Jos funktio on määritelty ja jatkuva välillä [a, b], niin se saa välillä]a, b[ainakin kerran jokaisen arvon, joka on päätepistearvojen f(a) ja f(b) välissä.

Jatkuvan funktion nollakohdat

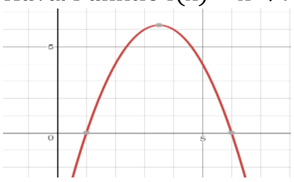
Jos funktio f on määritely ja jatkuva välillä [a, b] ja jos funktion f arvot f(a) ja f(b) ovat erimerkkiset, niin funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä]a, b[.

48. Osoita, että funktiolla $x^3 - 5x^2 + 11$ on nollakohta välillä]4, 5[.

(Funktiolla on kolme nollakohtaa.) Laske funktion arvot f(-2), f(0) ja f(2).

Funktion kasvunopeus

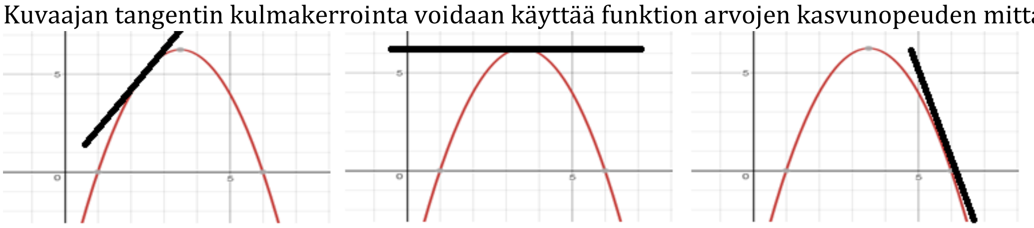
Kuva. Funktio f(x)=-x²+7x-6



Funktion käyrästä saadaan selville kasvunopeus piirtämällä kasvukäyrää sivuava suora l. tangentti. Kasvunopeuden ilmaisee tangentin kulmakerroin:

$$\frac{y{:}n\ muutos}{x{:}n\ muutos}$$

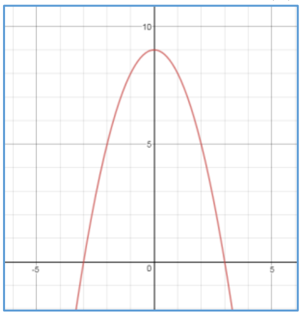
Kuvaajan tangentin kulmakerrointa voidaan käyttää funktion arvojen kasvunopeuden mittana.

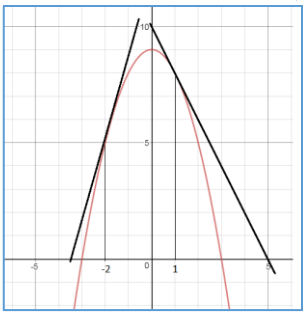


Funktion derivaatta
Jos funktion f kuvaajalle voidaan piirtää yksikäsitteisesti tangentti muuttujan arvon a kohdalle ja jos tangentti ei ole pystysuora, niin funktio on derivoituva kohdassa a.

Tangentin kulmakerroin on funktion derivaatta kohdassa a ja merkitään $f'(a)$.

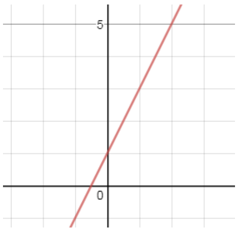
49. Päättele funktion $f(x)=-x^2+9$ derivaatat kohdassa -2 ja 1.





Jos funktiolle voidaan piirtää yksikäsitteinen tangentti kaikkialle → tällöin funktio on derivoituva kaikkialla.

50. Päättele funktion $f(x)=2x+1$ derivaatta kohdassa 0.



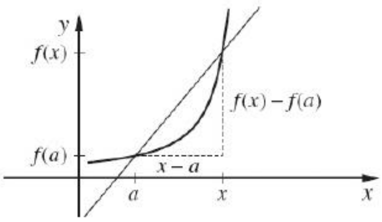
Jos funktio on derivoituva kohdassa a, niin funktio on jatkuva kohdassa a.
Huom! Kaikki jatkuvat funktiot eivät ole derivoituvia, esim. $|x|$ ei ole derivoituva kohdassa 0, koska toispuoleiset derivaatat eivät ole samat.

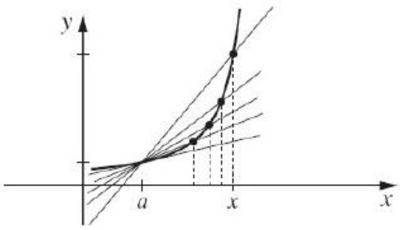
Derivaatan määritelmä
Jos funktion f erotusosamäärällä kohdassa a on raja-arvo kohdassa a, niin funktio f on derivoituva kohdassa a. Raja-arvoa kutsutaan funktion f derivaataksi kohdassa a ja merkitään f'(a).

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Erotusosamäärä
Suora leikkaa funktion f kuvaajan muuttujan arvojen a ja x kohdalla pisteissä
(a, f(a)) ja (x, f(x)). Suoran kulmakerroin l. erotusosamäärä on

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$





Kun leikkauskohta x lähestyy kohtaa a, leikkaava suora kiertyy kuvaajan tangentiksi pisteeseen (a, f(a)). Leikkaavan suoran kulmakerroin on funktion f derivaatta kohdassa a.

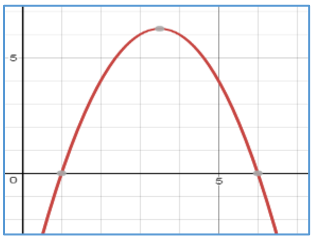
51. Määritä funktion $f(x)=x^2$ derivaatta f'(2), f'(0) ja f'(1). Tehtävän ratkaisu vaiheittain:
   a. Määrittele ensin funktion erotusosamäärä kohdassa 2.
      Määrittele seuraavaksi erotusosamäärän raja-arvo kohdassa 2 eli f'(2).
      (Erotusosamäärän raja-arvon hyödyntäminen yksittäiselle kohdalle.)
   b. Määrittele ensin funktion erotusosamäärä kohdassa a.
      Määrittele seuraavaksi erotusosamäärän raja-arvo kohdassa a.
      (Yleinen ratkaisu)
   c. Ratkaise f'(0) ja f'(1). (Hyödynnä kohtaa b.)

52. Määritä f'(1), kun $f(x)=-2x^2+x+2$.

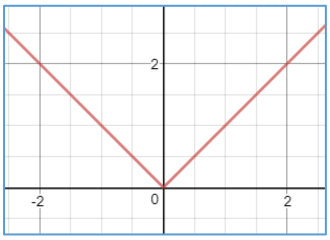
Derivoituvuus ja jatkuvuus.

Kuvat.

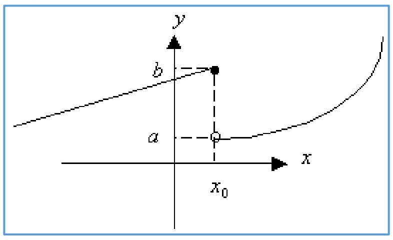
Jatkuva ja derivoituva.



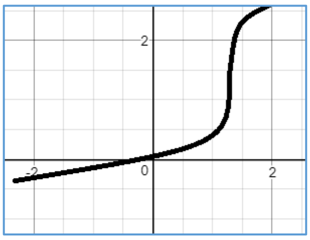
Jatkuva, ei derivoituva



Ei jatkuva, ei derivoituva



Jatkuva, ei derivoituva



53. Funktio f(x)=|x|.
    a. Osoita, että funktio f(x)=|x| on jatkuva laskemalla funktion raja-arvot kohdassa 0.
    (Laske funktion toispuoleiset raja-arvot kohdassa 0. Laske funktion arvo kohdassa 0.)
    b. Osoita, että funktio f(x)=|x| ei ole derivoituva kohdassa 0.
    (Laske funktion toispuoleiset derivaatat erotusosamäärän raja-arvona kohdassa 0.)

Derivaattafunktio f'

Funktio f' on funktion f derivaatta funktio. Derivaattafunktion arvo on funktion f derivaatta jokaisessa kohdassa, jossa funktio on derivoituva. Derivointi = derivaattafunktion määrittäminen

Merkintätapoja.

Funktion f derivaatta:

f'

Df

$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}$ (korostetaan, minkä muuttujan suhteen derivoidaan)

Derivointisääntöjä

D k=0, jos k on vakio

D x = 1

D $x^n = nx^{n-1}$

Vakiolla kerrotun funktion derivaatta D kf(x) = k f'(x), k vakio

Summan derivaatta D (f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)

Tulon derivaatta D (f(x) · g(x)) = f'(x) ·g(x) + g'(x) ·f(x)

Osamäärän derivaatta $D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Funktion potenssin derivaatta D $(f(x))^r = r\cdot f(x)^{r-1}\cdot f'(x)$

Yhdistetyn funktion derivaatta D (g o f(x)) = D (g(f(x)))= g'(f(x)) ·f'(x)

54. Derivoi funktio f(x)= x^3
55. Derivoi funktio $2x^2+4x-5$
56. Derivoi funktio $\frac{1}{2}x^4 - 5x^2$
57. Derivoi funktio f(x)=x^2. Laske f'(2), f'(0) ja f'(1). (Vrt. Aiempi tehtävä)
58. Derivoi funktio f(x)=$-2x^2+x+2$. Laske f'(1). (Vrt- aiempi tehtävä.)
59. Merkintätapoja:
    a. Funktio f(x) = x + 2t, kun t on vakio.
    b. Derivoi f(t)=x+2t, kun x on vakio.
    c. $\frac{d}{dx}(x+2t)$
    d. $\frac{d}{dt}(x+2t)$
60. Derivoi (Derivoimiskaavat Tekniikan kaavastossa!)
    a. x^7
    b. 4x-3
    c. $9-x^2$
    d. x^{-3}
    e. $\frac{5}{x^4}$
    f. $(4x-3)(9-x^2)$
    g. $\sqrt{x}(2-x)$
    h. $\frac{3x+3}{1-x}$
    i. $(9-2x^3)^3$
    j. $\sqrt{3x}$
    k. $\sqrt[3]{x}$
    l. sin x
    m. cos x
    n. tan x
    o. 3 cos x
    p. $\cos^3 x$
    q. $\frac{1}{2}\cdot\cos 6x$
    r. 2x + sin 2x
    s. $\frac{1}{\sin^2 x}$.
    t. e^x
    u. e^{2x}
    v. ln x
    w. ln (2x+2)
61. Laske f'(2), kun f(x)= $(9-2x)^3$.
62. Laske f'($\frac{\pi}{4}$), kun f(x)=$\cos 2x - \sin^2 x$.

DERIVOIMISSÄÄNTÖJÄ

Vakion derivaatta	$Dk = 0, \quad k$ vakio	1
Vakiolla kerrotun funktion derivaatta	$D[kf(x)] = kf'(x)$	2
Summan derivaatta	$D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$	3
Tulon derivaatta	$D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	4
Funktion potenssin derivaatta	$D[f(x)]^r = r\cdot[f(x)]^{r-1}\cdot f'(x)$	5
Osamäärän derivaatta	$D\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$	6
Yhdistetyn funktion derivaatta	$D[g\circ f(x)] = Dg[f(x)] = g'[f(x)]\cdot f'(x)$ tai $\dfrac{d\,g[f(x)]}{dx} = \dfrac{d\,g(f)}{d\,f}\cdot\dfrac{d\,f(x)}{dx}$	7
Käänteisfunktion derivaatta	$Df(x) = \dfrac{1}{Df^{-1}(y)}$ tai $\dfrac{d\,f(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy}$	8

DERIVOIMISKAAVOJA

Funktio $f(x)$	Derivaattafunktio $f'(x)$	Huom!	
x^r	rx^{r-1}	$x\in\mathbb{R}_+ \wedge r\in\mathbb{R}$	9
$\dfrac{1}{x^r} = x^{-r}$	$-rx^{-r-1} = -\dfrac{r}{x^{r+1}}$	$x\in\mathbb{R}_+ \wedge r\in\mathbb{R}$	10
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\in\mathbb{R}_+$	11
$\sqrt[r]{x} = x^{1/r}$	$\dfrac{1}{r}x^{\frac{1-r}{r}} = \dfrac{1}{r\sqrt[r]{x^{r-1}}}$	$x\in\mathbb{R}_+ \wedge r\in\mathbb{R}$	12
$[\sqrt{x}]^r$	$r[\sqrt{x}]^{r-1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x\in\mathbb{R}_+ \wedge r\in\mathbb{R}$	13

Tekniikan kaavasto, Tammertekniikka.

Funktio $f(x)$	Derivaattafunktio $f'(x)$	Huom!	
e^x	e^x		1
e^{ax}	$a e^{ax}$		2
$k^x = e^{x\ln k}$	$k^x \ln k$	$k>0$	3
$\ln x$	$1/x$	$x>0$	4
$\log_k x$	$\dfrac{1}{x\ln k}$	$x>0$	5
$\ln f(x)$	$f'(x)/f(x)$		6
$\sin x$	$\cos x$		7
$\sin(ax+b)$	$a\cdot\cos(ax+b)$		8
$\cos x$	$-\sin x$		9
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$	10
$\cot x$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1-\cot^2 x$	$x \neq n\pi$	10
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$	12
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$	13
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$		14
$\operatorname{arccot} x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$		15
$\sinh x$	$\cosh x$		16
$\cosh x$	$\sinh x$		17
$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x$		18
$\coth x$	$\dfrac{-1}{\sinh^2 x} = 1-\coth^2 x$	$x \neq 0$	19
$\operatorname{arsinh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		20
$\operatorname{arcosh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x>1$	21
$\operatorname{artanh} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$	22
$\operatorname{ar\,coth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert > 1$	23