OAMK Tekniikan ja luonnonvara-alan yksikkö / Susanna Kujanpää
T055803 LAITETEKNIIKAN MATEMATIIKKA 1

TEHTÄVÄT:

1. Derivoi
a) 2x + 3 b) x^9 c) $2x^4 + x^3 - 2x - 1$ d) $-x^{-2}$ e) $2\sqrt{x}$ f) $\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2}$ g) $\frac{1}{x^6}$
h) $x^2\sqrt{x}$ i) $(x - 5)(x^3 + 2x^2)$ j) $(x^2 + 1)(1 - 2x^2)$ k) (1 - 2x)(3x + 3) l) $\frac{x+2}{x}$ m) $\frac{2x-1}{x^3}$
n) $\frac{x-3}{x^2-3}$ o) $\frac{3x-1}{3x} + \frac{x}{3}$ p) $\frac{1}{x^2+1}$

2. Derivoi
a) $\frac{1}{\sin x}$ b) $\frac{\tan x}{2}$ c) $\frac{1}{2}\sin 2x$ d) $\frac{x}{2}$ sin2x e) $\sin^2$x + x f) $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x}$
g) $\frac{\cos^2 x}{x}$ h) $\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}$ i) tan2x

3. Derivoi
a) $(2 + 3x)^3$ b) $(1 - 4x)^3$ c) $\sqrt{2x + 3}$ d) $\sqrt{5 - x}$ e) $\sqrt{2 - x^2}$
f) $\frac{2}{(1-x)^2}$ g) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ h) $(2x - 5)(x + 3)^2$

4. Derivoi
a) $\frac{e^x}{x}$ b) $e^x \cdot e^x$ c) e^{x^2} d) $(e^x)^3$ e) x lnx f) $(\ln x)^2$
g) $\ln x^3$ h) $\ln\sqrt{x}$ i) $\ln\left(\frac{x}{3}\right)$ j) $\ln(x^2 - 1)$ k) $\frac{\ln x}{x}$

5. Laske f ' (1) ja f ' (2), kun $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$

6. Olkoot f(x) = x - 3 ja g(x) = 2 - x. Derivoi funktiot a) f + g b) f·g c) $\frac{f}{g}$

7. Määritä käyrälle $y = \sqrt{x^2 + 3}$ kohtaan x = 1 piirretyn tangentin kulmakerroin.

8. Määritä käyrän $y = x^2$ pisteeseen (2, 4) piirretyn tangentin yhtälö.

9. Käyrän $y = \frac{x^2}{2x+1}$ pisteeseen (1, 1) on piirretty tangentti. Määritä tangentin yhtälö.

10. Paraabelin $y = 2x^2 + x - 1$ pisteeseen (-1, 0) on piirretty tangentti. Laske tangentin ja koordinaattiakselien muodostaman kolmion ala.

11. Käyrälle $y = x^2$ piirretään tangentit eräästä pisteestä (0, -1). Muodosta tangenttien yhtälöt.

12. Määritä paraabelien a) $y = x^2 + x + 1$ b) $y = -3x^2 + 2$ huipun koordinaatit.

13. Olkoon funktio $f(x) = 2x^2 - 2$. Mikä on funktion suurin ja pienin arvo, kun $-1 \le x \le 1$?

14. Määritä funktion suurin ja pienin arvo välillä [-2, 4], kun
a) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 1$ b) $f(x) = x^3 + x^2 + 10x$

15. Määritä funktion suurin ja pienin arvo, kun
a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 2$ b) $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$

16. Pallo heitetään 1,4m korkeudelta ylöspäin. Pallo kulkee paraabelin h(t) = 1,4 + 10t - 3,8t^2 muotoista rataa. Suure h ilmoittaa pallon korkeuden maan pinnasta metreinä hetkellä t.
a) Määritä pallon lähtönopeus.
b) Kuinka kauan pallo nousee ylöspäin ?
c) Milloin pallo on lähtökorkeudella ?
d) Milloin pallo osuu maahan ?

17. Mikä on suurin suorakaiteen muotoinen alue, joka saadaan rajattua 100m määrällä piikkilankaa, kun yhdelle sivulle halutaan kaksinkertainen lanka ?

18. Uima-altaan tilavuuden tulee olla 25 m^3. Pohja on neliön muotoinen ja seinät pystysuorat. Suunnittele altaan mitoitus niin, että kaakelia menee mahdollisimman vähän, kun seinät ja pohja kaakeloidaan.

19. Paperiarkin (25cm × 20cm) kulmista leikataan neliöt pois ja sen jälkeen paperista taitellaan laatikko nostamalla reunapalat ylös. Laske neliön koko, kun laatikolla on suurin mahdollinen tilavuus.

20. Pahvilaatikon tilavuuden tulee olla 72 litraa ja pohjasärmien suhde on 1 : 2. Laatikko on umpinainen. Määritä laatikon sivujen mitat, kun pahvin kulutus minimoidaan.

21. Teltta on säännöllisen neliöpohjaisen pyramidin muotoinen. Sivusärminä olevat telttakepit ovat 3m pituiset. Kuinka korkean teltan tulee olla, jotta sen tilavuus olisi suurin mahdollinen ?

22. Laske ensimmäisen kertaluvun osoittaisderivaatat
a) f(x, y) = xy^2 + 5x b) f(x, y) = 4x^5 + 6$x^2 y^3$ + 3y

23. Laske funktion f(x, y) = 3x^2y - xy^4 ensimmäiset osittaisderivaatat pisteessä (-1, 3).

24. Laske toisen kertaluvun osittaisderivaatat f(x, y) = 5x^2 + 3y^2 - 7xy + 8x - 3y + 2

25. Arvioi differentiaalin avulla, kuinka suuri virhe funktion f(x) = $\sqrt[3]{2x}$ arvoon saattaa korkeintaan tulla, kun muuttujan arvoksi on arvioitu x = 1,5 ± 0,1.

26. Pallon halkaisijaksi mitattiin d = 12,35cm ± 0,05cm. Arvioi differentiaalin avulla, millä tarkkuudella pallon pinta-alan voi laskea. Entä tilavuuden ?

27. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituudeksi tiedettiin c = 17mm (tarkka arvo). Toisen kateetin pituudeksi saatiin mittaamalla a = 10,2mm ± 0,1mm. Laske toisen kateetin pituus virherajoineen.

28. Teltta on suoran ympyräkartion muotoinen. Teltan pohjan säde on r = 1,75m (tarkka) ja korkeus h = 2,8m ± 0,1m. Arvioi teltan tilavuus virherajoineen.

29. Määritä funktion f(x) = -3x + 2 se integraalifunktio F, joka täyttää ehdon F(0) = -2.

30. Määritä funktion f(x) = e^{-x} + 2x + 3 se integraalifunktio F, joka täyttää ehdon
a) F(2) = 10 b) F(-3) = e^3 c) F($\frac{-1}{2}$) = $\frac{1}{4}$.

31. Laske

a) $\int x^{20}\, dx$ b) $\int \frac{1}{4} x^{-3}\, dx$ c) $\int \sqrt{x}\, dx$ d) $\int \frac{4}{x^4}\, dx$ e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

f) $\int (x + 2x^2)\, dx$ g) $\int (2x^3 - 3x + 2))\, dx$ h) $\int \left(2 + 3x^2 - \frac{x^4}{2}\right) dx$ i) $\int (x^2 - 1)^2\, dx$

j) $\int (2 - 2x)^3\, dx$ k) $\int (4x - 2)^4\, dx$ l) $\int \sqrt{3 - 3x}\, dx$

32. Laske

a) $\int (\sin x + x)\, dx$ b) $\int \left(\frac{2\sin x}{3}\right) dx$ c) $\int \sin 4x\, dx$ d) $\int \cos 2x\, dx$

e) $\int (\cos x - \sin 2x)\, dx$ f) $\int 2\cos 3x\, dx$ g) $\int 3\sin 3x\, dx$ h) $\int 2e^x\, dx$

i) $\int e^{\frac{x}{2}}\, dx$ j) $\int \frac{x}{2} e^{-x^2}\, dx$

33. Laske

a) $\int x(4x^2 + 5)^3\, dx$ b) $\int \frac{2x}{x^2 - 4}\, dx$ c) $\int \frac{1}{1 - 3x}\, dx$ d) $\int \frac{3x}{x^2}\, dx$

e) $\int \frac{5t}{t^2 - 1}\, dt$ f) $\int \frac{t}{1 - 3t^2}\, dt$ g) $\int \frac{-1}{2x + 1}\, dx$

34. Määritä funktion $\int x e^{-x^2}\, dx$ se integraalifunktio, joka toteuttaa ehdon $F(0) = \frac{7}{2}$.

35. a) $\int_0^2 x^3\, dx$ b) $\int_{-2}^3 (x + x^2)\, dx$ c) $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\, dx$ d) $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$

e) $\int_0^{\pi} \frac{-1}{2} \cos x\, dx$ f) $\int_{-1}^0 \frac{e^x}{2}\, dx$ g) $\int_{-4}^{-1} \left(t^2 - t + \frac{1}{t}\right) dt$

36. Laske

a) $\int x e^{2x}\, dx$ b) $\int x \sin x\, dx$ c) $\int x^2 \sin x\, dx$ d) $\int x \ln x\, dx$ e) $\int \ln x\, dx$

f) $\int_1^4 \frac{\ln x}{x}\, dx$ g) $\int_{-2}^2 x e^{-2x}\, dx$

37. Määritä likiarvo integraalille $\int_1^4 \frac{\sin x}{x}\, dx$ Simpsonin menetelmällä käyttämällä 4 osaväliä.

38. Auton nopeus kasvaa seuraavan taulukon mukaisesti. Määritä likiarvo integraalille $\int_0^2 f(x)\, dx$ eli määritä kuinka pitkän matkan auto kulkee aikavälillä [0s, 2s].

$t(s)$	0	0, 5	1, 0	1, 5	2, 0
$v(m/s)$	0	5, 0	8, 56	11, 18	13, 23

39. Laske käyrän y = x^2 - x^4 ja x-akselin välisen alueen pinta-ala.

40. Laske käyrän y = cosx ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala välillä $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

41. Laske käyrän y = x^3 - 3x ja x-akselin välisen alueen pinta-ala.

42. Laske käyrien y = x^2 - 2 ja y = $\frac{5}{2}$ määrittämän alueen ala.

43. Laske paraabelien y = x^2 - 2x ja y = 6x - x^2 välisen alueen ala.

44. Laske käyrän y = $\frac{-x^2}{2}$ + x + 2 ja suoran y = $\frac{x}{2}$ + 1 rajaaman alueen pinta-ala.

45. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy, kun käyrä y = $2x^2$ - 1 pyörähtää x-akselin ympäri välillä [1, 4].

46. Määritä sen kappaleen tilavuus, joka syntyy, kun käyrä y = sinx välillä $[0, \pi]$ pyörähtää x-akselin ympäri.

47. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy, kun käyrän y = $\sqrt{x}$, x-akselin ja suoran y = 2 rajoittama ala pyörähtää y -akselin ympäri.

48. Laske tilavuus, kun käyrän y^2 = 4x ja suoran y = x välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri.

49. Käyrät y = x^2 ja y = $\frac{4}{3}x^2 + 1$ rajoittavat alueen välillä [0,2]. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy kappaleen pyörähtäessä x-akselin ympäri.

50. Maljamaisen kappaleen sisä- ja ulkopinta ovat pyörähdysparaboloideja. Käyrä y = $\frac{3}{4}x^2$ rajaa ulkopinnan ja y = $x^2 + 1$ sisäpinnan. Maljan korkeus on 4. Laske kappaleen tilavuus.

51. Suoraviivaisessa liikkeessä olevan kappaleen nopeus v ajan t funktiona on v = 5 + 2t. Hetkellä t = 0s kappale on kohdassa s = 4m. Mikä on kappaleen sijainti ajan funktiona ?

52. Jarruttavan auton nopeus v(m/s) on v(t) = 15 - 0,1$\cdot t^2$, missä t on aika sekunteina jarruttamisen aloittamisesta.
a) Kuinka pitkän matkan auto liikkuu ensimmäisen 5 sekunnin aikana jarrutuksen aloittamisesta ?
b) Kuinka pitkään jarrutus kestää ?
c) Kuinka pitkän matkan auto liikkuu jarrutuksen aikana ?

53. Kondensaattorin virta milliampeereina on i = -2t^2 + 4t, kun 0 ≤ t ≤ 2s. Esitä jännite (u = $\frac{i}{C}$) ajan funktiona, kun kondensaattorin kapasitanssi on 4,0mF ja jännite hetkellä t = 0s on 4V.

54. Laske käyrän y = $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ pituus, kun x ϵ [1, 5].

55. Mitkä seuraavista differentiaaliyhtälöistä ovat
1) y ' + 2y = 0 2) $(y')^2$ + y = 2 3) y '' + ty = 2y '
4) y ' + 3y = sint 5) y ' + 3y = siny 6) y ''' - sin(t)y ' = t 7) y ''' - sin ($\frac{\pi}{2}$)y ' = t
a) lineaarisia
b) homogeenisia
c) ensimmäistä kertalukua
d) vakiokertoimisia
e) kaikkea edellä mainittua ?

56. Laske integroimisvakion C arvo
a) y = Ce^{-2t}, y (0) = 2 b) y = C_1sin2t + C_2cos2t, y(0) = 0 ja y ' ($\frac{\pi}{2}$) = 1

57. Ratkaise a) y ' = 2y b) y ' = $\frac{2}{y}$ c) y ' = y cost

58. Ratkaise
a) y ' + 3y = 0; y (0) = 2 b) y ' - 8y = 3; y (0) = 0 c) 4y ' + 2y = 2t + 1

59. Ratkaise
a) y ' + 3y = e^{-4t} b) y ' + y = 3sin2t c) y ' - y = x^2 + x
d) y ' - 3y = 2x + 3x^3 e) y ' + 2y = -2cosx f) y ' + 3y = e^{-3x}; y(0) = 1

60. Ratkaise
a) y '' - 2y ' - 8y = 0 b) y '' + 9y= 0 c) y '' + y ' = 0 d) y '' - 4y = 0
e) y '' + y = 0 f) y '' - 2y ' + y = 0

61. Radioaktiivisen aineen massa toteuttaa differentiaaliyhtälön $\frac{dm}{dt} = -km$, $m(o) = m_0$, $k > 0$ on hajoamisvakio.
Määritä radioaktiivisen aineen massa ajan funktiona. Milloin aineesta on jäljellä puolet ?

VASTAUKSET:

1. a) 2 b) $9x^8$ c) $8x^3 + 3x^2 - 2$ d) $2x^{-3}$ e) $x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ f) $-4x^{-3} + x$ g) $-6x^{-7}$
h) $\frac{5}{2}x^{3/2}$ i) $4x^3 - 9x^2 - 20x$ j) $-8x^3 - 2x$ k) $-12x - 3$ l) $\frac{-2}{x^2}$ m) $\frac{-4x^3+3x^2}{x^6}$ n) $\frac{-x^2+6x-3}{(x^2-3)^2}$
o) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)$ p) $\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

2. a) $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ b) $\frac{1}{2\cos^2 x}$ c) $\cos 2x$ d) $\frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x$ e) $\sin 2x + 1$ f) $\frac{-1}{x^2}$
g) $\frac{-x\sin 2x - \cos^2 x}{x^2}$ h) $\frac{-1}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$ i) $\frac{2}{\cos^2(2x)}$

3. a) $9(2 + 3x)^2$ b) $-12(1 - 4x)^2$ c) $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ d) $\frac{-1}{2}(5 - x)^{-1/2}$ e) $-x(2 - x^2)^{-1/2}$
f) $\frac{-4+4x}{(1-x)^4}$ g) $\frac{-1}{2}(x + 1)^{-3/2}$ h) $2(x + 3)^2 + (2x - 5)(2x + 6) = 6x^2 + 14x - 12$

4. a) $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ b) $2e^{2x}$ c) $2x\,e^{x^2}$ d) $3e^{3x}$ e) $\ln x + 1$ f) $\frac{2\ln x}{x}$ g) $\frac{3}{x}$ h) $\frac{1}{2x}$
i) $\frac{1}{x}$ j) $\frac{2x}{x^2-1}$ k) $\frac{1-\ln x}{x^2}$

5. -2 ja $\frac{-1}{4}$ **6.** a) 0 b) $-2x + 5$ c) $\frac{-1}{(2-x)^2}$ **7.** 1/2 **8.** y = 4x - 4

9. $y = \frac{4}{9}x + \frac{5}{9}$ **10.** A = 3/2 **11.** y = 2x - 1 ja y = -2x - 1 **12.** a) (-1/2, 3/4) b) (0, 2)

13. suurin 0 ja pienin -2 **14.** a) suurin 1 ja pienin -127 b) suurin 120 ja pienin -24

15. a) ei arvoja b) suurin 0 ja pienin $-\frac{4}{27}$ **16.** a) 10m/s b) 1,3s c) 2,6s d) 2,8s

17. 416,5 m^2 **18.** 3,7m × 3,7 m × 1,8 m **19.** 3,7 cm **20.** (3 × 6 × 4) dm **21.** $\sqrt{3}$ m

22. a) $y^2 + 5$ ja $2xy$ b) $20x^4 + 12xy^3$ ja $18x^2y^2 + 3$ **23.** -99 ja 111 **24.** 10, -7, -7 ja 6

25. virhe ≈ 0,03 **26.** A = (479,2 ± 3,9) cm^2 ja V = (986 ± 12) cm^3 **27.** b = (13,6 ± 0,075) mm

28. V = (8,98 ± 0,32) m^3 **29.** $F(x) = \frac{-3}{2}x^2 + 2x - 2$

30. a) $F(x) = -e^{-x} + x^2 + 3x + e^{-2}$ b) $F(x) = -e^{-x} + x^2 + 3x + 2e^3$ c) $F(x) = -e^{-x} + x^2 + 3x + \sqrt{e} + \frac{3}{2}$

31. a) $\frac{1}{21}x^{21} + C$ b) $\frac{-1}{8}x^{-2} + C$ c) $\frac{2}{3}x^{3/2} + C$ d) $\frac{-4}{3}x^{-3} + C$ e) $2\sqrt{x} + C$
f) $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + C$ g) $\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$ h) $2x + x^3 - \frac{x^5}{10} + C$ i) $\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x + C$
j) $\frac{-1}{8}(2 - 2x)^4 + C$ k) $\frac{1}{20}(4x - 2)^5 + C$ l) $\frac{-2(3-3x)^{3/2}}{9} + C$

32. a) $-\cos x + \frac{x^2}{2} + C$ b) $\frac{-2}{3}\cos x + C$ c) $\frac{-1}{4}\cos 4x + C$ d) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$ e) $\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$
f) $\frac{2}{3}\sin 3x + C$ g) $-\cos 3x + C$ h) $2e^x + C$ i) $2e^{x/2} + C$ j) $\frac{-1}{4}e^{x^2} + C$

33. a) $\frac{1}{32}(4x^2) + 5^4 + C$ b) $\ln|x^2 - 4| + C$ c) $\frac{-1}{3}\ln|1 - 3x| + C$ d) $3\ln x + C$ e) $\frac{5}{2}\ln|t^2 - 1| + C$
f) $\frac{-1}{6}\ln|1 - 3t^2| + C$ g) $\frac{-1}{2}\ln|2x + 1| + C$ **34.** $F(x) = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + 4$

35. a) 4 b) $\frac{85}{6}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 0 e) 0 f) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ g) ≈27,1

36. a) $\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$ b) $-\cos x + \sin x + C$ c) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$ d) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$
e) $x\ln x - x + C$ f) $\frac{1}{2}(\ln 4)^2$ g) $\frac{-5}{4}e^{-4} - \frac{3}{4}e^4$

37. 0,8 **38.** 15,84m **39.** $\frac{4}{15}$ **40.** $\sqrt{2}$ **41.** $\frac{9}{2}$ **42.** $9\sqrt{2}$

43. $\frac{64}{3}$ **44.** $\frac{9}{4}$ **45.** 2318 **46.** $\frac{\pi^2}{2}$ **47.** $\frac{32\pi}{5}$ **48.** $\frac{32\pi}{3}$ **49.** 44,3

50. 19,4 **51.** $s = 5t + t^2 + 4$ **52.** a) 70,83m b) 12,25s c) 122,5m

53. $u = \frac{-1}{6}t^3 + \frac{t^2}{2} + 4$V **54.** 7,91 **56.** a) 2 b) $C_1 = \frac{-1}{2}$ ja $C_2 = 0$

57. a) $y = Ce^{2t}$ b) $y^2 = 4x + C$ c) $y = Ce^{\sin t}$

58. a) $y = 2e^{-3x}$ b) $y = \frac{3}{8}e^{8x} - \frac{3}{8}$ c) $y = Ce^{-1/2\,t} + t - \frac{3}{2}$

59. a) $y = Ce^{-3t} - e^{-4t}$ b) $y = Ce^{-t} + \frac{3}{5}\sin 2t - \frac{6}{5}\cos 2t$ c) $y = Ce^x - x^2 - 3x - 3$
d) $y = Ce^{3x} - x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}$ e) $y = Ce^{-2x} - \frac{2}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x$ f) $y = xe^{-3x} + e^{-3x}$

60. a) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}$ b) $y = C_1\sin 3x + C_2\cos 3x$ c) $y = C_1 + C_2e^{-x}$ d) $y = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t}$
e) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ f) $y = C_1e^x + C_2xe^x$ **61.** 69 vrk