

## Funktion kuvaaja

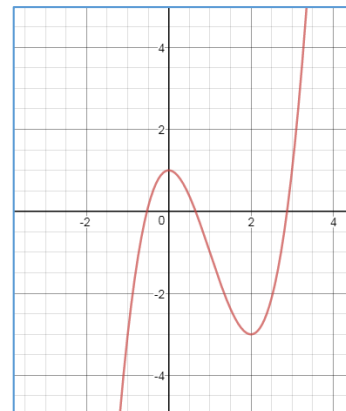
Funktio on aidosti kasvava, jos  $x$ :n arvojen suuretessa myös funktion arvot suurenevät. Jos  $b > a$ , niin  $f(b) > f(a)$

Funktio on aidosti vähenevä, jos  $x$ :n arvojen suuretessa funktion arvot pienenevät. Jos  $b > a$ , niin  $f(b) < f(a)$

68. A. Päättelä kuvaajasta, millä  $x$ :n arvoilla funktio on aidosti kasvava ja aidosti vähenevä, kun  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ . Ks. kuva.

Polynomifunktion kuvaaja voi vaihtaa useamman kerran kulkusuuntaansa (kasvava / vähenevä). Tiedetään, että polynomifunktion käyttäytyminen lukusuoran äärilaidoilla ts. suurimman ja pienimmän arvon olemassaolo, riippuu ainoastaan funktion lausekkeen korkeimman asteen termistä.

68. B. Piirrä Desmoksella erilaisia toisen, kolmannen, neljännen jne. asteen funktioiden kuvaajia ja tarkastele funktioiden suurimpia ja pienimpiä arvoja. Kiinnitä huomiota, missä funktio on kasvava ja missä vähenevä.



## Ääriarvot

Derivaatta ilmaisee funktion muutos-/kasvunopeuden. Täten derivaatan avulla voidaan selvittää funktion kuvaajan kulku.

Jos derivaatan arvo on negatiivinen, niin käyrälle piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen (laskeva suora). Tällöin funktio on vähenevä.

Jos derivaatan arvo on positiivinen, niin käyrälle piirretyn tangentin kulmakerroin on positiivinen (nouseva suora). Tällöin funktio on kasvava.

Jos derivaatan arvo on nolla, niin funktio ei ole tässä pisteessä kasvava eikä vähenevä. Tällöin tangentin kulmakerroin on nolla.

## Kulkukaavio

Derivaatafunktion  $g'$  merkkikaavio esittää derivaatafunktion merkit nollakohtien rajaamilla lukusuoran osaväleillä. Funktion  $g$  kulku voidaan päätellä suoraan derivaatan merkeistä.

69. Ks. kuva.

a. Tarkastele kuvaajien avulla funktion  $f(x) = x^2 + x - 6$  ja sen derivaatafunktion välistä yhteyttä.

Tutki, missä derivaatafunktion arvot ovat positiivisia ja missä negatiivisia.

b. Piirrä kulkukaavio.

TEHTÄVÄ VAIHEITTAIN:

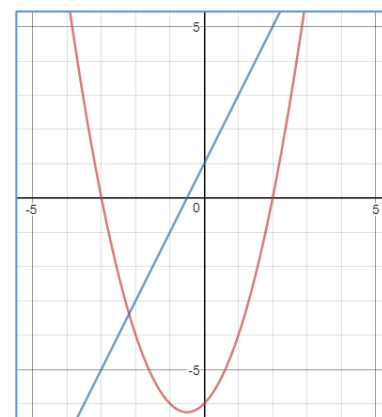
i. Derivoi funktio.

ii. Laske derivaatan nollakohdat. (Derivaatafunktion merkki voi vaihtua ainoastaan derivaatafunktion nollakohdissa.)

iii. Selvitä derivaatafunktion merkit laskemalla jokaiselta väliltä yksi derivaatafunktion arvo. (Negatiivinen merkki tarkoittaa laskevaa käyrää. Positiivinen arvo tarkoittaa kasvavaa käyrää.) Merkitse derivaatafunktion merkit kulkukaavioon (1. rivi)

iv. Hahmottele funktion kuvaaja derivaatafunktion merkkien perusteella (2. rivi)

Derivaatafunktion kulkukaavio



$f'(x)$		
$f(x)$		

70.

a. Tarkastele funktion  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 1$  ja sen derivaatafunktion välistä yhteyttä.

Tutki, missä derivaatafunktion arvot ovat positiivisia ja missä negatiivisia.

b. Piirrä kulkukaavio.

$f'(x)$			
$f(x)$			

## Paraabeli

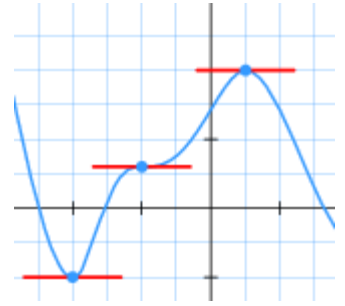
Paraabelin huippuun piirretyn tangentti on  $x$ -akselin suuntainen ja tangentin kulmakerroin on 0. Paraabelin huipun kohdalla funktion  $f$  derivaatta on nolla.

71. Missä pisteessä on paraabelin  $-x^2+9$  huippu. Ratkaise derivaatan nollakohta.

72. Missä pisteessä on paraabelin  $x^2-2x+1$  huippu.

### Funktion terassikohta.

Derivaatta on nolla aidosti kasvavan tai aidosti vähenevän välin erillisissä pisteissä.



### Funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot

Funktion maksimikohdassa derivaatta on nolla ja derivaattafunktion merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi.

Funktion minimikohdassa derivaatta on nolla ja derivaattafunktion merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi.

Minimi- ja maksimikohdat ovat funktion ääriarvokohtia.

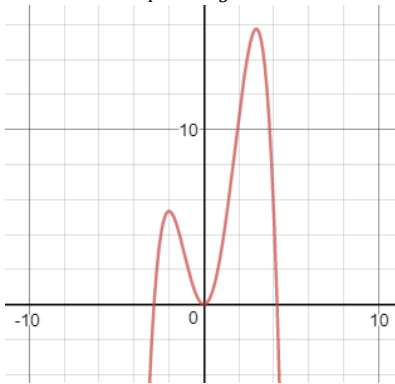
Funktion arvot maksimikohdissa ovat funktion maksimi-arvoja.

Funktion arvot minimikohdissa ovat funktion minimi-arvoja.

Maksimi- ja minimi-arvot ovat funktion ääriarvoja.

Funktiolla voi olla useita maksimi- ja minimikohtia.

73.  $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2$  Millä väleillä funktio on kasvava ja vähenevä? Määritä funktion ääriarvokohdat ja ääriarvot.



### Polynomifunktion suurin ja pienin arvo

Kaikilla funktiolla ei voi määrittää suurinta ja pienintä arvoa. Funktion arvot voivat kasvaa tai pienentyä rajatta.

74. Määrittele funktion  $f(x)=x^2+4$  suurin ja pienin arvo.

75. Määrittele funktion  $f(x) = 2x^3$  suurin ja pienin arvo?

### Suljetun välin suurimmat ja pienimmät arvot

Suljetulla välillä  $[a, b]$  derivoituva funktio voi saada suurimman ja pienimmän arvon derivaattafunktion nollakohdissa välillä  $]a, b[$  tai välin päätepisteissä  $a$  ja  $b$ .

76. Mikä on suurin arvo, jonka funktio  $f(x) = 6x-x^2$  saa välillä

a.  $]-\infty, 2]$

b.  $]-\infty, 5]$

### Sovelluksia

77. Suorakulmion muotoisen alueen aitaamiseen on käytettävissä 60 metriä aita. Kuinka aitauksen mitat on valittava, jotta sen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri? Kuinka suuri aitauksen pinta-ala tällöin on?

78. Vajarakennukselle, jonka päädyt ovat neliöitä, rakennetaan kuvion muotoinen kehikko teräsputkesta. Putkea on käytettävissä 36 metriä. Määritä vajan mitat niin, että vajan

a. tilavuus on mahdollisimman suuri

b. lattiapinta-ala on mahdollisimman suuri

