Maquina de Turing

Una MT es una forma de simular una maquina computacional compuesta por estados y transiciones que seguir. La MT está formada por una cinta, un conjunto de estados, un alfabeto de entrada, un alfabeto para la cinta, una función de transición; un estado inicial y unos estados finales. El funcionamiento es muy sencillo. Dada una palabra de entrada, formada por símbolos del alfabeto de entrada; el objetivo de la MT es responder entre dos opciones. "Si" si la palabra es aceptada, y "No" en caso contrario.

Llamamos máquinas de Turing, a $M=(Q,\Sigma,T,\delta,q_0,B,F)$

Donde: Q es el conjunto finito de estados que denotaremos por $q_0, q_1, q_2, \dots,$

- Σ es el alfabeto: el conjunto finito de símbolos de entrada.
- T es el conjunto de símbolos de cinta. El alfabeto es un subconjunto de T.
- q_0 es el estado inicial: es el estado en el que se encuentra inicialmente la MT.
- B es un elemento de Σ: el símbolo en blanco. Se encuentra en todas las casillas de la cinta que no tiene un símbolo de entrada.
- F es el conjunto de estados finales.
- δ es la función de transiciones.

La expresión: $\delta(q,x)=(p,y,')$

Ejemplos:

Queremos construir una máquina que verifique si el número de 0s en una palabra es par: $M=(Q,\Sigma,T,q_0,\delta,F)$

$Q=\{q_0,q_1\}$

$\Sigma=\{0,1\}$

$T=\{0,1,\vdash,B\}$

$F=\{q_0\}$

δ es definido como:

$\delta(q_0,0)=(q_1,B,\rightarrow)$

$\delta(q_0,1)=(q_0,B,\rightarrow)$

$\delta(q_1,0)=(q_0,B,\rightarrow)$

$\delta(q_1,1)=(q_1,B,\rightarrow)$

Ejecución.

Supongamos que $W=00010$:

inicio

$\vdash$	0	0	0	1	0	B	B	...	...	...

$\uparrow q_0$

Paso 1

⊢	B	0	0	1	0	B	B	...
		↑ q_1						

Paso 2

⊢	B	B	0	1	0	B	B	...
			↑ q_0					

Paso 3

⊢	B	B	B	1	0	B	B	...
				↑ q_1				

Paso 4

⊢	B	B	B	B	0	B	B	...
					↑ q_1			

Paso 5

⊢	B	B	B	B	B	B	B
						↑ q_0	

La máquina acepta $W = 00010$

Ejemplo 2: Diseñar una máquina de Turing que calcule el número consecutivo de un número dado en binario.

Si el número es Par, su último bit es 0. La máquina sólo tiene que cambiar este 0 por un 1.

Si el número es impar, su último bit es 1. En este caso, se tiene que cambiar por 0's todos los 1's seguidos que haya escrito de derecha a izquierda hasta llegar al primer 0, que se cambia por un 1. Si no hay ningún 0, entonces se tiene que añadir un 1 delante del número (añadir un bit). Es decir, escribir un 1 en la casilla en blanco (B) a la izquierda del número.

Vamos a considerar tres estados: q_0, q_1, q_2

→ Inicialmente, la MT está en el estado q_0 con la cabeza señalando la primera cifra del número.

La MT recorre todo el número para ver si es par o impar sin modificar su cinta. $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$ $\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$

→ Notemos que, por ahora, la MT se detiene al llegar al primer símbolo en blanco a la derecha del número.

La MT vuelve a la anterior casilla (último número). Si es un 0, lo cambia por un 1 y pasa al estado final que es q_2. Para hacer esto usaremos el estado q_1: $\delta(q_0, B) = (q_1, B, L)$ $\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, R)$

→ Si el número es impar, la MT no ha cambiado el último número, pero está en el estado q_1. Tiene que cambiar todos los 1's consecutivos que haya de derecha a izquierda. $\delta(q_1, 1) = (q_1, 0, L)$

→ Por ahora, la MT se Para cuando llega al Primer 0 (de derecha a izquierda) ó en un símbolo en blanco. Si es un 0, lo cambia Por un 1 y el Proceso finaliza: $\delta(q_1,0)=(q_2,1,L)$

(Hemos escrito un desplazamiento a la izquierda, Pero esto no tiene importancia ya que la MT ha llegado al estado final).

→ Si lo que señala la cabeza es un blanco en vez de un 1, tiene que cambiarlo Por un 1 y finalizar el Proceso. $\delta(q_1,B)=(q_2,1,L)$

Vamos a simular la MT Para Varias entradas, Mostraremos el estado final de la cinta y la Posición de la cabeza.

Entrada: 000; Resultado esperado: 001

B	B	B	B	B	0	0	1	B	B	B	B	B	...

Entrada: 0011; Resultado esperado: 0100.

B	B	B	B	0	1	0	0	B	B	B	B	B	...

Entrada: 111; Resultado esperado: 1000.

B	B	B	B	B	B	1	0	0	0	B	B	B	B	...

Entrada: 1; Resultado esperado: 10.

B	B	B	B	B	B	1	0	B	B	B	B	B	...

Funcionamiento de la MT Multicinta.

La máquina de turing multicinta tiene Varias cintas, cada una de las cuales tiene su Propia cabeza de lectura/escritura. Las cabezas de L/E se controlan independientemente (es decir, al mismo tiempo, no tienen que moverse en la misma dirección, ni realizar el mismo número de movimientos, ni incluso, hacer nada a la vez).

→ Cambia de estado dependiendo del estado actual y del contenido de las celdas de todas las cintas, que están analizando actualmente las de lectura/escritura.

→ Escriben un nuevo símbolo en cada una de las celdas barridas Por sus cabezas de lectura/escritura.

→ Mueve cada una de sus cabezas hacia la izquierda o hacia la derecha (de forma independiente al resto de las cabezas.)

Esemplo

Sea una MT de dos cintas, que reconoce el lenguaje $L=\{a^i b^i c^i : i \geq 0\}$
Se coloca la cadena de entrada en la primera cinta, la idea es copiar en la segunda cinta una X por cada "a" y cuando encuentre la primera "b", se detiene en la primera cinta, luego se avanza a la derecha en la primera "c" las dos cintas avanzan hacia la derecha.
La función de transición es la siguiente, sea $T=\{q_3\}$.

$\delta(q_0,(a,B)) = (q_0,(a,X),(D,D))$

$\delta(q_0,(b,B)) = (q_1,(b,B),(N,D))$

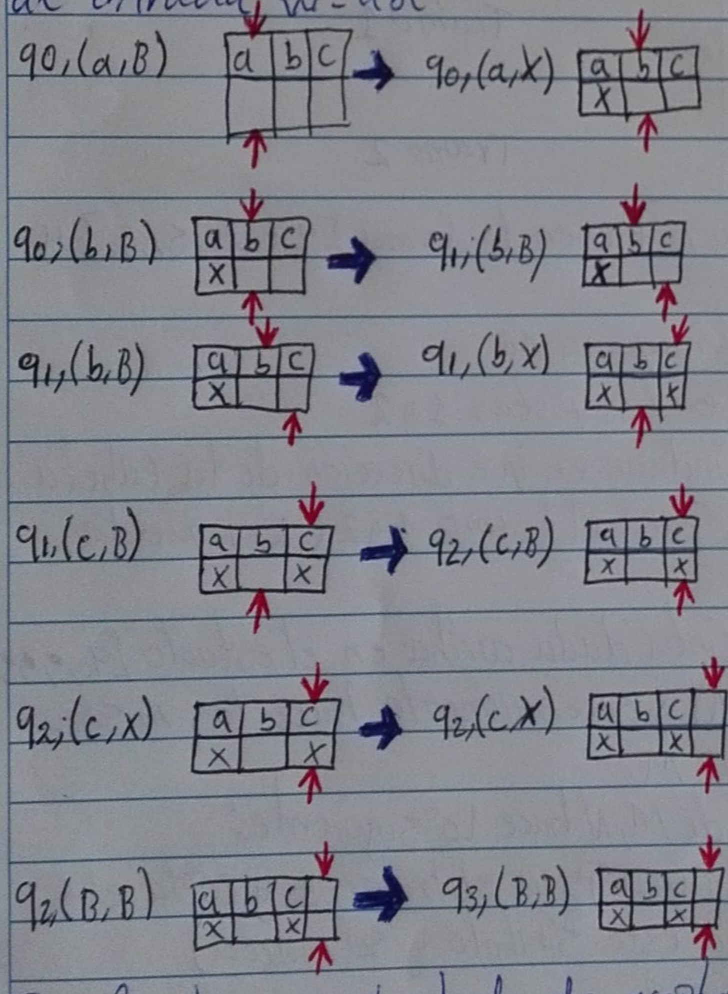
$\delta(q_1,(b,B)) = (q_1,(b,X),(D,I))$

$\delta(q_1,(c,B)) = (q_2,(c,B),(N,D))$

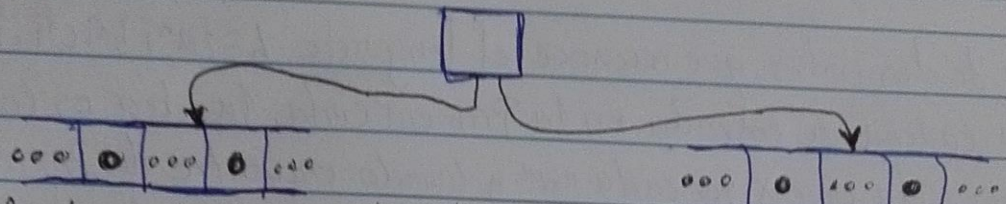
$\delta(q_2,(c,X)) = (q_2,(c,X),(D,D))$

$\delta(q_2,(B,B)) = (q_3,(B,B),(D,D))$

Se muestra el funcionamiento de la MT multicinta, con la cadena de entrada, $w=abc$



Se finaliza en el estado de aceptacion.



1.- Cada máquina estándar es una maquina con dos cintas que usa la segunda cinta.

2.- Simular la máquina M de dos cintas en una máquina N con cinta:

- M transita en función del estado actual y de los dos símbolos leídos ($f(q,a,b)=(P,e,c,L,R)$) y escribe dos nuevos símbolos en las cintas y mueve las dos cabezas de lectura/escritura.
- ¿Cómo se pueden simular los movimientos de la máquina M?

idea: Representar el contenido de dos (o más) cintas en la máquina N en una cinta con varios tramos o pistas.

...	•	i_0	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	•	...	Tramo 1
...	1	•	•	•	•	•	•	•	•	...	
...	•	K_0	K_1	K_2	K_3	•	•	•	•	...	
...	•	1	•	•	•	•	•	•	•	...	Tramo 2

Los estados de la máquina N tienen la forma $[q, t_1, t_2, S_1, S_2]$ y almacenan: ↑

- q: el estado actual de la máquina M
- t_1 y t_2: los símbolos leídos en las pistas 1 y 2
- S_1 y S_2: Unos símbolos que indican en que dirección de la cabeza se encuentran las marcas para el tramo 1 y 2 (L - izquierda, R - derecha, • - en esta)

Inicialmente N arranca con la cinta dada arriba en el estado $[q_0, •, •, •, •]$ (q_0 es el estado inicial de M) y sucesivamente hace los mismos movimientos que la máquina M.

Para simular un movimiento de M, N hace lo siguiente:

- en función de S_1 busca la marca para el tramo 1 y copia el símbolo marcado en t_1 (deja este símbolo y su marca)
- hace lo mismo para el tramo 2.
- Suponemos que N está en estado $[r, a, b, ?, ?]$ entonces se simula el movimiento $f(r,a,b)=(P,e,c,X,Y)$ de M

- busca el simbolo marcado en el tramo 1, lo cambia Por la e.
- quita la marca de este tramo y lo Pone en la Posición que indica X (a la derecha o a la izquierda)
- hace lo mismo Para el tramo 2 (cambiando b Por c)
- Cambia el estado de r a P (si P es final -> Para)