Óscar Santiago Almeyda Nesgea

Taller 1

Ejercicio 3

• Sean las transformaciones $a^{i'} = A^{i'}_{k} a^{k}$ y $a^{j} = \tilde{A}^{j}_{i'} a^{i'}$

$$\Rightarrow a^{j} = \tilde{A}^{j}_{i'} a^{i'}$$

$$a^{j} = \tilde{A}^{j}_{i'} (A^{i'}_{k} a^{k})$$

$$a^{j} = (\tilde{A}^{j}_{i'} A^{i'}_{k}) a^{k}$$

$$// \text{como} \quad a^{j} = \delta^{j}_{k} a^{k}$$

$$\boxed{\Rightarrow \tilde{A}^{j}_{i'} A^{i'}_{k} = \delta^{j}_{k} a^{k}}$$

• Sean los sistemas de cordenadas $\hat{e}_i$ y $\hat{e}_i'$ ortonormales de tal forma que cada vector de $\hat{e}_i'$ se puede escribir en función de $\hat{e}_i$

$$a^{i'} = A^{i'}_{i} a^{i}$$

Como las bases son ortonormales entonces

$$\hat{e}_1' = \cos\alpha\, \hat{e}_1 + \cos\beta\, \hat{e}_2 + \cos\gamma\, \hat{e}_3 \rightarrow \text{Primera fila de } A^{i'}_{i}$$

Partiendo de que $\hat{e}_1' \cdot \hat{e}_1' = 1$

$$\Rightarrow \hat{e}_1' \cdot \hat{e}_1' = (\cos\alpha\, \hat{e}_1 + \cos\beta\, \hat{e}_2 + \cos\gamma\, \hat{e}_3) \cdot (\cos\alpha\, \hat{e}_1 + \cos\beta\, \hat{e}_2 + \cos\gamma\, \hat{e}_3) = 1$$

$$\Rightarrow \hat{e}_1' \cdot \hat{e}_1' = \boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

Ejercicio 4

- $(x,y) \to (-y,x) \Rightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad det(A) = 1$, $A^T A = I$

A es una rotación, por tanto los componentes son verdaderas

- $(x,y) \to (x,-y) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad det(A) = -1$, $A^T A = I$

A e una reflexión, es ortogonal por lo tanto las componentes son verdaderas

- $(x,y) \to (x-y, x+y) \Rightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad det(A) = 2$, $A^T A \neq I$

A no es ortogonal por lo tanto las componentes NO son verdaderas

- $(x,y) \to (x+y, x-y) \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad det(A) = -2$, $A^T A \neq I$

A no es ortogonal por lo tanto las componentes NO son verdaderas

Óscar Santiago Almeyda Neiga

Taller 2

Ejercicio 2a

Demostrar $\nabla(\phi\psi) = \phi\,\nabla(\psi) + \psi\,\nabla\phi$

$\nabla(\phi\psi) = \partial^i \phi(x_i)\,\psi(x_i)\,\hat{e}_i$ ⇒ usando la regla del producto de derivadas

$= \phi\,\partial^i \psi(x_i)\,\hat{e}_i + \psi\,\partial^i \phi(x_i)\,\hat{e}_i$

$= \phi\,\nabla(\psi) + \psi\,\nabla(\phi)$

Ejercicio 2d

$\nabla\cdot(\nabla\times a) = \partial^i \epsilon_{ijk}\,\partial^j a^k = \epsilon_{ijk}\,\partial^i\partial^j a^k =$

$= \partial^1(\partial^2 a^3 - \partial^3 a^2) + \partial^2(\partial^3 a^1 - \partial^1 a^3) + \partial^3(\partial^1 a^2 - \partial^2 a^1)$

$= \partial^1\partial^2 a^3 - \partial^1\partial^3 a^2 + \partial^2\partial^3 a^1 - \partial^2\partial^1 a^3 + \partial^3\partial^1 a^2 - \partial^3\partial^2 a^1$

$= \cancel{\partial^1\partial^2 a^3 - \partial^1\partial^2 a^3} + \cancel{\partial^1\partial^3 a^2 - \partial^1\partial^3 a^2} + \cancel{\partial^2\partial^3 a^1 - \partial^2\partial^3 a^1}$

$= 0$ // La divergencia del rotacional es nula

~~[illegible]~~ Qué puedo decir de $\nabla\times(\nabla\cdot a)$?

No es posible hallar el rotacional de la divergencia ya que es un escalar y no es posible aplicar el producto vectorial

$$\underbrace{\nabla}_{\text{Vector}}\times\underbrace{(\nabla\cdot a)}_{\text{Escalar}}$$

Ejercicio 2f Demostrar $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$

$$\nabla \times (\nabla \times a) = \epsilon^{ijk} \partial_j \epsilon_{kmn} \partial^m a^n = \epsilon^{ijk} \epsilon_{kmn} \partial_j \partial^m a^n$$

$$= \epsilon^{ijk} \epsilon_{mnk} \partial_j \partial^m a^n = (\delta^i_m \delta^j_n - \delta^j_m \delta^i_n) \partial_j \partial^m a^n$$

$$= \delta^i_m \partial^m \delta^j_n \partial_j a^n - \delta^j_m \partial_j \partial^m \delta^i_n a^n$$

$$= \partial^i \partial_n a^n - \partial_m \partial^m a^n = \boxed{\nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a}$$

Ejercicio 2

$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

$z^3 = (e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3$

$z^3 = e^{i3\theta} = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 \Rightarrow \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3$

$\Rightarrow \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta - i\,\text{sen}^3\theta$

$\Rightarrow \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta) + i(3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta)$

Igualando

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta \\ \text{sen}\,3\theta &= 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta \end{aligned}}$$

Ejercicio 5

a) $\sqrt{2i}$ $\qquad 2i = 2e^{i\pi/2}$

$\Rightarrow \sqrt{2e^{i\pi/2}} = (2e^{i\pi/2})^{1/2} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{2k\pi + \pi/2}{2}\right)} : k = \{0,1\}$

$\boxed{\text{Raiz } 1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \; ; \; \text{Raiz } 2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}}$

b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i} \Rightarrow 1-\sqrt{3}i = 2e^{i5\pi/3}$

$\Rightarrow (2e^{i5\pi/3})^{1/2} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{2k\pi + 5\pi/3}{2}\right)} : k = \{0,1\}$

$\boxed{\text{Raiz } 1 = \sqrt{2}e^{i5\pi/6} \; ; \; \text{Raiz } 2 = \sqrt{2}e^{i11\pi/6}}$

c) $(-1)^{1/3} \Rightarrow -1 = e^{i\pi}$

$\Rightarrow (e^{i\pi}) = e^{i\left(\frac{2k\pi + \pi}{3}\right)} : k = \{0,1,2\}$

$\boxed{\text{Raiz } 1 = e^{i\pi/3} \; ; \; \text{Raiz } 2 = e^{i\pi} \quad \text{Raiz } 3 = e^{i5\pi/3}}$

d) $(8)^{1/6} \Rightarrow 8 = 8e^{i\cdot 0}$

$\Rightarrow (8)^{1/6} = \sqrt{2}e^{i\frac{k\pi}{3}} : k = \{0,1,2,3,4,5\}$

Raiz 1 $= \sqrt{2}$ $\qquad$ Raiz 4 $= \sqrt{2}e^{i\pi}$
Raiz 2 $= \sqrt{2}e^{i\pi/3}$ $\qquad$ Raiz 5 $= \sqrt{2}e^{i4\pi/3}$
Raiz 3 $= \sqrt{2}e^{i2\pi/3}$ $\qquad$ Raiz 6 $= \sqrt{2}e^{i5\pi/3}$ //

e) $\sqrt[4]{-(8+8\sqrt{3}i)} \Rightarrow -(8+8\sqrt{3}i) = 16e^{i4\pi/3}$

$\Rightarrow (16e^{i4\pi/3})^{1/4} = 2e^{i\left(\frac{2k\pi + 4\pi/3}{4}\right)} : k = \{0,1,2,3\}$

Raiz 1 $= 2e^{i\pi/3}$ $\qquad$ Raiz 3 $= 2e^{i4\pi/3}$
Raiz 2 $= 2e^{i5\pi/6}$ $\qquad$ Raiz 4 $= 2e^{i11\pi/6}$ //

Ejercicio 6

a)

$$\log(-ie) = \log\left(e^{1+i(-\pi/2+2n\pi)}\right) = \boxed{1 - i\pi/2} \quad \text{para } n=0$$

b)

$$\log(1-i) = \log\left(\sqrt{2}\, e^{i(-\pi/4+2n\pi)}\right)$$

$$\log(1-i) = \ln(\sqrt{2}) + i(\pi/4 + 2n\pi) : n \in \mathbb{Z}$$

$$\log(1-i) = \boxed{\tfrac{1}{2}\ln(2) - i\pi/4} \quad \text{para } n=0$$

c)

$$\log(e) = \log\left(e^{1+i2n\pi}\right) = \boxed{1 + i2n\pi} : \text{para } n \in \mathbb{Z}$$

d)

$$\log(i) = \log\left(e^{i(\pi/2+2n\pi)}\right) = i(\pi/2 + 2n\pi)$$

$$\log(i) = i\pi(1/2 + 2n) : n \in \mathbb{Z}$$