Práctica 7: Funciones parcialmente computables

Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad, FCEN-UBA

Primer Cuatrimestre 2025

Ejercicio 1. Definir macros en el lenguaje $\mathcal{S}++$ para las siguientes pseudo-instrucciones:

a. $V = 0$

b. $V = V + k$

c. $V = k$

d. $V_1 = V_2$

e. $V_1 = V_1 + V_2$

f. **If** $V \neq 0$ **then** P_1 **else** P_2

g. **loop** (loop infinito)

h. $V = \Psi_P^n(V_1, ..., V_n)$

Ejercicio 2.

a. Dar un pseudo-programa en el lenguaje $\mathcal{S}++$ que compute la función de dos variables $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Se pueden usar las macros definidas en el ejercicio 1.

b. Dar el programa que resulta de expandir todas las macros utilizadas en el inciso anterior. Prestar especial atención a la instanciación de variables frescas.

c. Sea P el programa obtenido en el ejercicio anterior. Determinar cuáles son las siguientes tres funciones computadas por P según la cantidad de argumentos que recibe:

$$\Psi_P^1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \Psi_P^2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \qquad \Psi_P^3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$$

Ejercicio 3. Sea $p : \mathbb{N}^n \to \{0, 1\}$ un predicado computable. Definir macros en el lenguaje $\mathcal{S}++$ para las siguientes pseudo-instrucciones:

a. **While** $p(x_1, ..., x_n)$ **do** P

b. **If** $p(x_1, ..., x_n)$ **then** P_1 **else** P_2

Ejercicio 4. Dadas las funciones parciales computables $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x=3} \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases} \qquad\qquad g(x) = 2x$$

Demostrar que la siguiente función es parcial computable:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 5 \vee x = 3 \\ g(x) & \text{si no} \end{cases}$$

Ejercicio 5.

a. Sea $r : \mathbb{N}^{n+1} \to \{0, 1\}$ un predicado computable. Mostrar que la siguiente función es parcialmente computable:

$$\mu_r(x_1, ..., x_n, y) = \begin{cases} min\{t \mid t \geq y \wedge r(x_1, ..., x_n, t)\} & \text{si existe tal } t \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

b. Usando el resultado anterior, demostrar que si una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es biyectiva y computable, su inversa f^{-1} también es computable.

Ejercicio 6. Demostrar que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ son dos funciones computables, entonces $f \circ g$ también es computable.

Ejercicio 7. Usando las funciones computables STP^n y $SNAP^n : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ vistas en clase, demostrar que las siguientes funciones son parcialmente computables:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{Dom } \Phi_x^{(1)} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si Dom } \Phi_x^{(1)} \neq \emptyset \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \text{Im } \Phi_x^{(1)} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_4(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si Dom } \Phi_x^{(1)} \cap \text{ Dom } \Phi_y^{(1)} \neq \emptyset \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ tiene un punto fijo} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_6(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si existe algún } z \text{ tal que } \Phi_x^{(1)}(z) = \Phi_y^{(1)}(z) \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_7(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) \text{ es primo} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_8(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si existe algún } t \leq y \text{ tal que } \Phi_x^{(1)}(t) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$