Freie Universität Berlin

Programmverifikation

{V} P {N}

SoSe 2020

Prof. Dr. Margarita Esponda

Assertions oder Zusicherungen

Das Konzept der Zusicherungen kommt aus dem Gebiet der Programmverifikation und Softwarequalität.

Assertions sind Anweisungen, die mit Hilfe eines logischen Ausdrucks Bedingungen eines Programms überprüfen.

Wann?
- vor Ausführung des Programms (statisch)
- während der Entwicklungsphase (Testphase)
- bei jeder Ausführung (Produktionsphase)

Assertions oder Zusicherungen

Bei Assertions geht der Programmierer davon aus, dass diese immer erfüllt sind, überprüft aber trotzdem diese Behauptungen, um zu garantieren, dass Programme immer korrekt ablaufen.

Diese Art der Programmierung nennt man

defensives Programmieren.

Design by Contract (DBC)

Zusicherungen sind kein neues Konzept.

Assertions kommen aus dem DBC-Konzept, der seit Jahren in mehreren Programmiersprachen eingeführt ist.

Die Idee ist, dass die Software nur nach einem bestimmten Vertrag (Spezifikation) zwischen Softwareentwickler und Kunden entworfen wird.

Fast alle wichtigen modernen Programmiersprachen unterstützen das DBC-Konzept

Beispiel:

C, C++, C#, Java, Pearl, PHP, Python, usw.

Design by Contract (DBC)

Nach dem DBC-Konzept gibt es drei Sorten von Assertions:

Vorbedingungen (Preconditions)

Bedingungen, die vor der Ausführung eines Programmsegments oder vor einer Funktion (Methode) erfüllt werden sollten.

Nachbedingungen (Postconditions)

Bedingungen, die nach der Ausführung von Programmsegmenten, Funktionen (Methoden) gelten sollten.

Invariante (Invariante)

Bedingungen, die innerhalb eines Programmsegments immer wahr sein müssen. Zum Beispiel innerhalb einer for-Schleife, Funktion oder Klasse.

assert-Anweisung in Python

Syntax:

assert *condition*$_1$

assert *condition*$_1$ [, *expression*$_2$]

Beispiele:

```
>>> assert  1 == True
>>> assert  1 == False, "That can't be right."
```

Nutzlose assert-Anweisung

```
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
AssertionError: That can't be right.
```

Freie Universität Berlin

assert-Anweisung in Python

Beispiel:

```
myList = [1,2]

assert len(myList)>0
print(myList.pop())

assert len(myList)>0
print(myList.pop())

assert len(myList)>0
myList.pop()
```

```
>>>
2
1
Traceback (most recent call last):
  File "assert_stm.py", line 11, in <module>
    assert len(myList)>0
AssertionError
>>>
```

```
$ python -O assert_stm.py
2
1
Traceback (most recent call last):
  File "assert_stm.py", line 12, in <module>
    myList.pop()
IndexError: pop from empty list
```

Freie Universität Berlin

Programmverifikation

Motivation

Wie können wir wissen, dass ein Programm korrekt funktioniert?

- Viel testen ist keine Lösung!
- Sicherheitskritische Softwarebereiche können sich keine Fehler erlauben.

Beispiele:

- Steuerungssysteme für Medizingeräte oder Flugzeuge
- Überwachungssysteme für Verkehr (z.B. Zug-Verkehr)
- Software für Weltraumprojekte
- usw.

Freie Universität Berlin

Programmverifikation

Imperative Programmiersprachen

Ziel Grundsätzliches Verständnis von Verifikationsmethoden zu erwerben und mit Hilfe dieser Denkweise eine Verbesserung in der Entwicklung von Software zu erreichen.

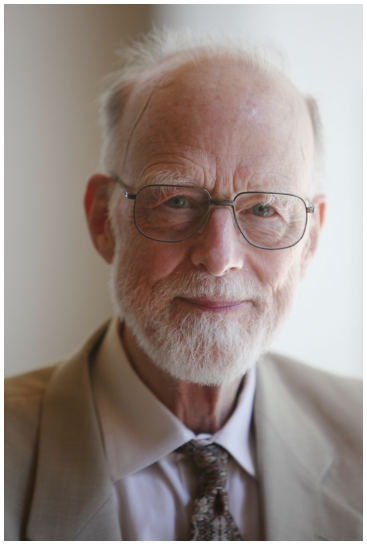
Programmverifikation ist leider nicht immer einsetzbar und das systematische Testen bleibt als einzige Alternative zur Analyse der Korrektheit eines Programms.

Um ein Programm zu verifizieren, brauchen wir einen mathematischen Formalismus.

Freie Universität Berlin

Zwei Formalismen

Hoare-Kalkül



Sir Charles Antony Hoare

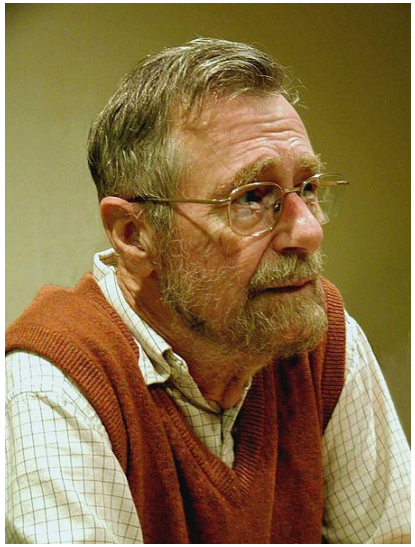
- 1930
- University of Oxford, Michrosoft Research Cambridge
- 1980 Turing Award
- Einige wichtige Leistungen sind:
    - CSP (Communicating Sequential Processes)
    - Monitor-Konzept
    - Hoare-Kalkül
    - usw.

Die Verifikation eines Programms besteht aus zwei Schritten:

- Beweis der partiellen Korrektheit
- Beweis der Terminierung

Zwei Formalismen

wp-Kalkül



Edsger W. Dijkstra

- 1930
- 1972. Turing Award
- Dijkstra's Algorithms
- Semaphore-Konzept
- Guarded Command Language
- Die Methode der schwächsten Vorbedingung wp-Kalkül
- *usw.*

Die Methode der schwächsten Vorbedingung. *weakest precondition (wp)*

- Die totale Korrektheit wird in einem einzigen Arbeitsgang bewiesen

Hoare-Kalkül

Grundlegende Definitionen:

Definition von Programmformeln

{P} S {Q} wird als Programmformel bezeichnet, wenn S ein Programm ist und P und Q Prädikate (über Variablen und Konstanten von S) sind.

Gültigkeit von Programmformeln

Eine Programmformel {P} S {Q} ist gültig, wenn vor Ausführung von S das Prädikat P wahr ist und nach Beendigung von S das Prädikat Q wahr ist, gilt.

Hoare-Kalkül

Programmformeln können als

Programmspezifikation für Programme benutzt werden, wenn diese erst geschrieben werden sollen. *DBC Design By Contract*

oder als Programmdokumentation, um die Wirkung eines Programms formal zu beschreiben

Probleme:

- Es existieren beliebig viele Formeln für ein Programm
- Die Formeln können zu ungenau oder zu schwach sein

Beispiel:

{True} S {True} gilt immer für alle Programme **S**

Freie Universität Berlin

Partielle Korrektheit eines Programms

Definition:

Sei {P} S {Q} eine Programmspezifikation. Jedes Programm S' ist partiell korrekt in Bezug auf diese Spezifikation, wenn eine Programmformel {P'} S' {Q'} mit $P \Rightarrow P'$ und $Q' \Rightarrow Q$ existiert.

Die partielle Korrektheit eines Programms S ist bewiesen,

wenn die Vorbedingung P der Spezifikation die Vorbedingung P' einer gültigen Programmformel von S' impliziert und die Nachbedingung Q' die Nachbedingung Q der Spezifikation impliziert.

$P \Rightarrow P'$ und $Q' \Rightarrow Q$

gleich oder schwächer als P

mindestens so stark wie Q

Axiomatische Semantik

für einfache Anweisungen

Leeranweisungsaxiom

Die leere Anweisung hat keine Auswirkung auf den Zustand irgendeiner Programmvariablen und wird durch folgendes Axiom definiert:

Für jedes Prädikat P ist {P} {P} eine gültige Programmformel.

Axiomatische Semantik

für einfache Anweisungen

Zuweisungsaxiom

Sei **x = *expr*** eine Zuweisung (in C, C++, Java, Python, usw.), die den Wert der Variablen ***x*** durch den Wert des Ausdrucks ***expr*** ersetzt, dann wird die Semantik durch das Zuweisungsaxiom wie folgt definiert.

Bedeutet, dass alle Vorkommen der Variablen **x** in **Q** durch den Ausdruck ***expr*** zu ersetzen sind

Für jedes Prädikat **Q** ist **{Q [x*expr*]}** **x = *expr*** **{Q}** eine gültige Programmformel.

Zuweisungsaxiom

Beispiel:

Folgende Programmformel

$$\{\ z>0 \wedge y>1 \ \vee \ z==0 \wedge y \geq 1\ \} \equiv Q\ [y \setminus y-1]$$

y = y - 1

$$\{\ z>0 \wedge y>0 \ \vee \ z==0 \wedge y \geq 0\} \equiv Q$$

ist gültig, weil nach Anwendung der Substitution *Q [y\y-1]* in der Nachbedingung diese vor der Ausführung der Zuweisung gültig ist und somit die Nachbedingung auch.

Zuweisungsaxiom

In den Programmformeln verwenden wir (==) für die logischen Vergleichsoperationen innerhalb von Prädikaten, um diese von dem Zuweisungsoperator (=) innerhalb von Programmen zu unterscheiden.

Beispiel:

Folgende Programmformeln sind gültig:

$$\{z>0\} \quad x = 0 \quad \{z>x\}$$

$$\{x==1\} \quad x = x-1 \quad \{x==0\}$$

$$\{y \geq 1 \wedge y \leq 5\} \quad x = y+1 \quad \{x \geq 2 \wedge y \leq 5\}$$

Das Hoare-Kalkül

Das Hoare-Kalkül stellt eine Reihe von Ableitungsregeln zur Verfügung, die den Nachweis partieller oder totaler Korrektheit ermöglichen.

Die Ableitungsregeln haben folgende allgemeine Form:

$$\frac{H_1, \ldots, H_n}{H}$$

und bedeuten, dass, wenn H_1 bis H_n erfüllt sind, dann auch H erfüllt ist.

Manche Regeln haben zusätzliche Bedingungen, die festlegen, wann sie angewendet werden dürfen.

Freie Universität Berlin

Ableitungsregeln

Sequenzregel

Besteht eine Sequenz aus den Anweisungen S_1 und S_2, und sind die Programmformeln $\{P\}\ S_1\ \{R\}$ und $\{R\}\ S_2\ \{Q\}$ gültig, dann ist auch $\{P\}\ S_1, S_2\ \{Q\}$ gültig.

$$\frac{\{P\}\ S_1\ \{R\},\ \{R\}\ S_2\ \{Q\}}{\{P\}\ S_1\ ,\ S_2\ \{Q\}}$$

"," als Verallgemeinerung der Trennzeichen zwischen Anweisungen

Freie Universität Berlin

Ableitungsregeln

Sequenzregel

C, C++, Java, usw.

$$\frac{\{P\}\ S_1\ \{R\},\ \{R\}\ S_2\ \{Q\}}{\{P\}\ S_1;\ S_2\ \{Q\}}$$

Python

$$\frac{\{P\}\ S_1\ \{R\},\ \{R\}\ S_2\ \{Q\}}{\begin{array}{l}\{P\}\ \ S_1\\ \qquad S_2\ \ \{Q\}\end{array}}$$

Induktiv lässt sich diese Regel von zwei Anweisungen auf endlich viele aufeinanderfolgende Anweisungen erweitern.

Freie Universität Berlin

Sequenzregel

Nehmen wir an, wir möchten die Gültigkeit folgender Programmformel beweisen

```
{ x > y }
 y  = x - y
 y  = x + y
{ x < y }        . . . . . .      (1)
```

Nach der Sequenzregel ist die Programmformel (1) gültig, wenn wir eine Bedingung **R** finden können, so dass die beiden Programmformeln

```
      {x>y} y = x - y  {R}        . . . . . .   (2)
und   {R}   y = x+y    {x<y}     . . . . . .   (3)
```

gültig sind.

Sequenzregel

{x>y} y = x - y **{R}** . . . . . (2)

{R} y = x+y **{x<y}** . . . . . (3)

Wenn wir das Zuweisungsaxiom auf (3) anwenden, erhalten wir als Vorbedingung **{R}** ≡ **{x<x+y}**,

{R} ≡ **{x<x+y}** y = x+y **{x<y}** . . . . (3)

und wenn wir wiederum das Prädikat **R** in (2) einsetzen, erhalten wir mit dem Zuweisungsaxiom die Vorbedingung **x<x+x-y**, die äquivalent zu **x>y** ist.

{x>y}≡ **{x<x+(x-y)}** y = x - y **{R**≡**x<x+y}** . . (2)

Freie Universität Berlin

Regel für Blockanweisungen

Eine Anweisungsfolge S kann durch begin und end in Pascal oder geschweifte Klammern in C oder Java eingeschlossen werden, ohne dass sich die Semantik von S ändert.

Pascal

$$\frac{\{P\}\ S\ \{Q\}}{\{P\}\ \text{begin S end}\ \{Q\}}$$

C, C++, Java, usw.

$$\frac{\{P\}\ S\ \{Q\}}{\{P\}\ \{S\}\ \{Q\}}$$

Ableitungsregeln

Bedingungsregel

wenn wir folgende Programmformel betrachten

{P}
if *Bedingung*:
S_1
else:
S_2
{Q}

müssen wir zwischen zwei Fällen unterscheiden

1. Fall *Bedingung==True*

dann ist **{P**$\wedge$Bedingung**}** **S_1** **{Q}** eine gültige Formel

2. Fall *Bedingung==False*

dann ist **{P**$\wedge\neg$Bedingung**}** **S_2** **{Q}** eine gültige Formel

Freie Universität Berlin

Ableitungsregeln

Bedingungsregel bzw.

Inferenz-Schema für Fallunterscheidung

$$\frac{\{P \wedge B\}\ S_1\ \{Q\},\ \{P \wedge \neg B\}\ S_2\ \{Q\}}{\{P\}\ \text{if (B)}\ S_1\ \text{else}\ \ S_2\ \{Q\}}$$

C, C++, Java, usw.

Python

$$\frac{\{P \wedge B\}\ S_1\ \{Q\},\ \{P \wedge \neg B\}\ S_2\ \{Q\}}{\begin{array}{l}\{P\}\\ \text{if B:}\\ \quad S_1\\ \text{else:}\\ \quad S_2\\ \{Q\}\end{array}}$$

Konsequenz-Regeln

Regel der Schwächeren Nachbedingung

Wenn nach der Ausführung einer Anweisungsfolge **S** die Bedingung **R** erfüllt ist, dann ist auch jede Nachbedingung **Q** erfüllt, die aus **R** impliziert werden kann.

$$\frac{\{P\}\ S\ \{R\},\quad R \Rightarrow Q}{\{P\}\ S\ \{Q\}}$$

Konsequenz-Regeln

Beispiel:

Nehmen wir an, dass folgende Programmformel gilt:

$$\{x>0 \wedge y>0\}\ S\ \{z+a\cdot y == x\cdot y \wedge a==0\}$$

aber

$$(z+a\cdot y == x\cdot y) \wedge a==0 \Rightarrow z == x\cdot y$$

dann folgt aus der Regel der schwächeren Nachbedingung:

$$\{x>0 \wedge y>0\}\ \ S\ \ \{\ z==x\cdot y\ \}$$

ist eine gültige Programmformel.

Konsequenz-Regeln

Regel der stärkeren Vorbedingung

Wenn {R} S {Q} eine gültige Programmformel ist, dann ist für jede Bedingung P, die R impliziert, auch die Programmformel {P} S {Q} gültig.

$$\frac{P \Rightarrow R, \quad \{R\}\ S\ \{Q\}}{\{P\}\ S\ \{Q\}}$$

Anwendung der Konsequenz-Regeln

Wenn wir die Regel der schwächeren Nachbedingungen zweimal verwenden, können wir folgendes Inferenz-Schema aus der Bedingungsregel ableiten:

Python

$\{P \wedge B\}\ S_1\ \{Q\},\ \{P \wedge \neg B\}\ S_2\ \{R\}$

$\{P\}$

```
    if B:
        S1
    else:
        S2
```

$\{Q \vee R\}$

weil

$Q \Rightarrow Q \vee R$

und

$R \Rightarrow Q \vee R$

und in beiden oberen Programmformeln angewendet werden kann.

while-Regel

$$\frac{\{P \wedge B\}\ S\ \{P\}}{\{P\}\ \text{while } B\text{: } S\ \ \{P \wedge \neg B\}}$$

Die Vorbedingung **P** ist nach jedem Schleifen-Durchlauf wahr.

P wird als Schleifen-Invariante bezeichnet.

Die Festlegung von Schleifen-Invarianten spielt eine zentrale Rolle in der Korrektheitsanalyse von Programmen.

Aus der Gültigkeit von $\{P \wedge B\}\ S\ \{P\}$ kann nicht abgeleitet werden, dass jemals $\neg B$ erfüllt wird, d.h. wir wissen nicht, ob die Schleife terminiert.

Freie Universität Berlin

Ableitungsregeln

while-Regel

Formen von while-Anweisungen →

Java und C	Pascal	Python
while (B) **S**	while B do **S**	while B: **S**

Nehmen wir an, dass {P∧B} S {P} eine gültige Programmformel für den Schleifen-Block S ist

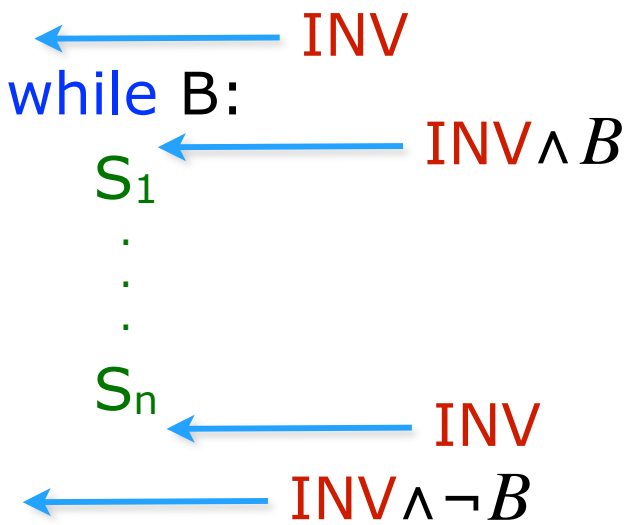
wenn **B** nach einem Schleifen-Durchlauf noch erfüllt wird, dann gilt die Vorbedingung **{P∧B}**

wenn **B** nicht mehr erfüllt wird, dann gibt es keinen Schleifen-Durchlauf mehr und es gilt **{P∧¬B}**

Freie Universität Berlin

while-Regel

$$\frac{\{INV \wedge B\}\ S\ \{INV\}}{\{INV\}\ \text{while } B\text{: } S\ \ \{INV \wedge \neg B\}}$$



while-Regel

Beispiel:

Nehmen wir an, wir möchten die Gültigkeit folgender Programmformel beweisen:

```
{ x≥0 }
while  x != 0:
          x = x-1
{ x==0 }
```

wir wählen **P ≡ x≥0** und wissen, dass **B ≡ x≠0**.

Weil **P∧¬B ⇔x==0**, können wir unsere Programmformel wie folgt schreiben:

```
{ P }
while  x!=0:
          x = x-1
{ P∧¬B }
```

Freie Universität Berlin

while-Regel

… weiter mit dem Beispiel:

Nach der while-Regel ist unsere Programmformel gültig, wenn

$$\{P \wedge B\}$$

$$x=x-1$$

$$\{P\}$$

mit anderen Worten, wir müssen nur die Gültigkeit folgender Programmformel beweisen

$$\{x \geq 0 \wedge x \neq 0\}$$

$$x=x-1$$

$$\{x \geq 0\}$$

Freie Universität Berlin

while-Regel

… weiter mit dem Beispiel:

Diese ergibt sich aus dem Zuweisungsaxiom

$$(x \geq 0 \wedge x \neq 0)$$
$$\Downarrow$$
$$x \geq 1$$
$$\Downarrow$$
$$\{x-1 \geq 0\}$$
$$x = x-1$$
$$\{x \geq 0\}$$

Zuweisungsaxiom

```
{ x≥0 }
while  x!=0:
          x = x-1
{ x==0 }          √
```

mit **P ≡ x≥0** (Schleifeninvariante)

Ableitungsregeln

do-while-Regel

Pascal

$$\frac{\{P\}\ S\ \{Q\},\ \ \{Q \wedge \neg B\} \Rightarrow \{P\}}{\{P\}\ \text{repeat } S \text{ until } B;\ \{P \wedge B\}}$$

C und Java

$$\frac{\{P\}\ S\ \{Q\},\ \ \{Q \wedge B\} \Rightarrow \{P\}}{\{P\}\ \text{do } S \text{ while } (B);\ \{P \wedge \neg B\}}$$