Analyse von Algorithmen

Sortieralgorithmen (Teil 1)

SoSe 2020

Prof. Dr. Margarita Esponda
Freie Universität Berlin

Sortieren

Effizientes Sortieren ist ein zentraler Bestandteil vieler Algorithmen.

Sortierproblem

Eingabe: Folge von Objekten $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Ausgabe: Folge von sortierten Objekten $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$

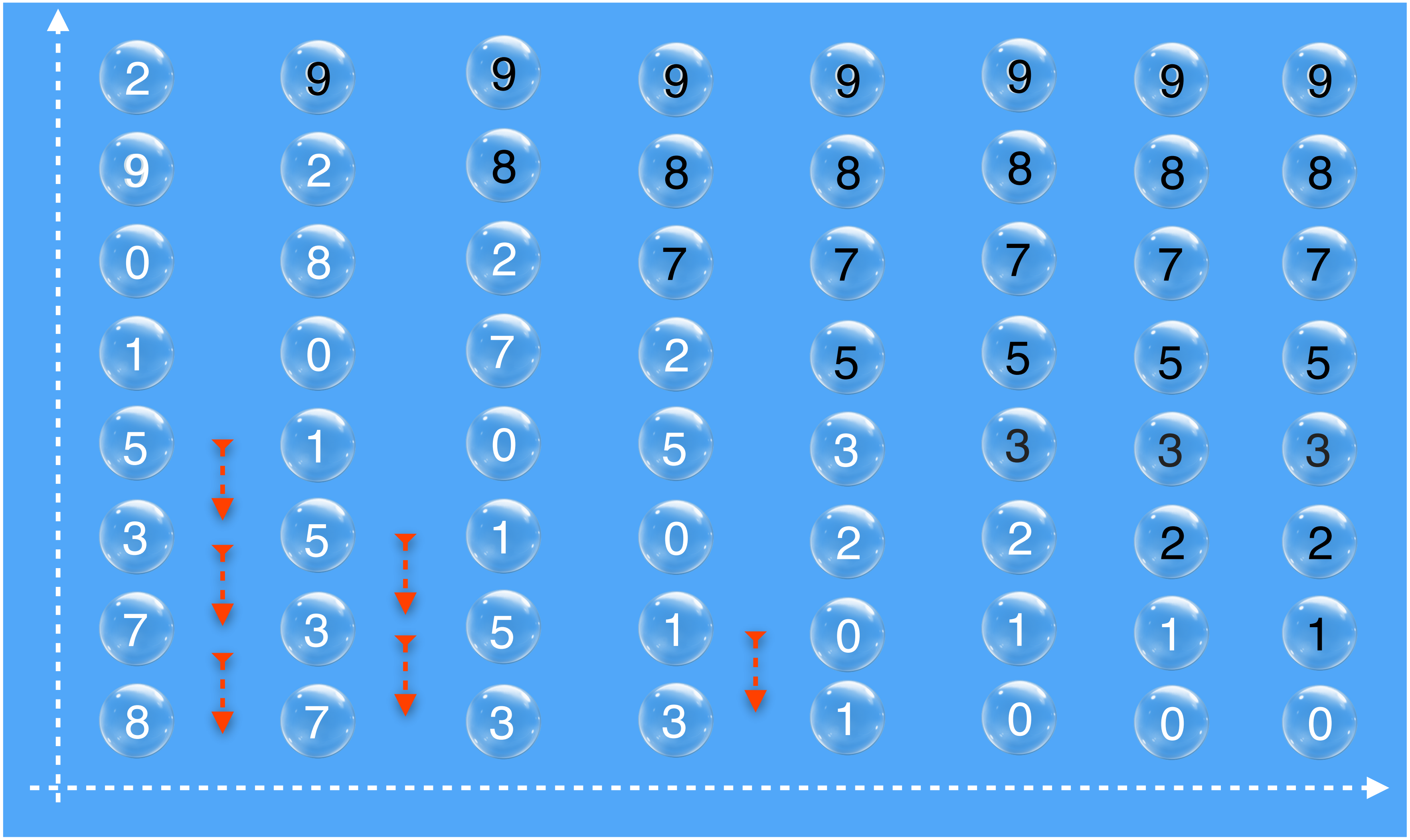
mit $a'_1 \leq a'_2 \leq a'_3, \ldots, \leq a'_n$

Sortieralgorithmen

Vergleichsalgorithmen
- Bubble-Sort
- Insert-Sort
- Selection-Sort
- Shell-Sort
- Quicksort
- Mergesort
- Heap-Sort

Ohne Vergleiche
- Counting-Sort
- Radix-Sort
- Bucket-Sort

Bubble-Sort



Vergleiche 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1

bereits sortiert!

Bubble-Sort

```
def  bubblesort (A):
     swap = True
     stop = len(A)-1
     while swap:
          swap = False
          for i in range(stop):
               if A[i]>A[i+1]:
                    A[i], A[i+1] = A[i+1], A[i]
                    swap = True
          stop = stop-1
```

Hilfsvariable für einen linearen Aufwand, wenn die Daten sortiert sind.

Hier wird die Stabilitätseigenschaft des Algorithmus garantiert

Bubble-Sort

Einfachster und ältester Sortieralgorithmus

- **In-Place**

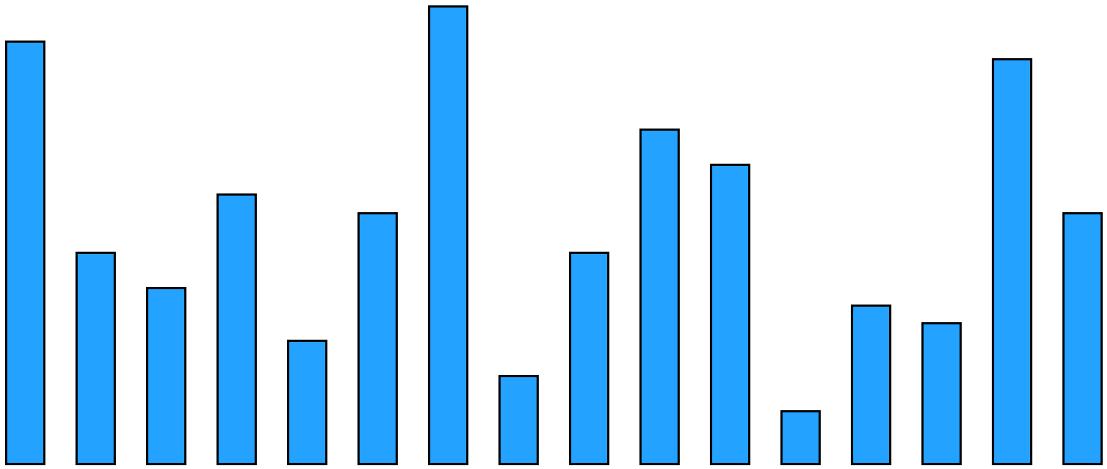
  minimaler zusätzlicher konstanter Speicherplatz **O(1)**

- **Stabil**

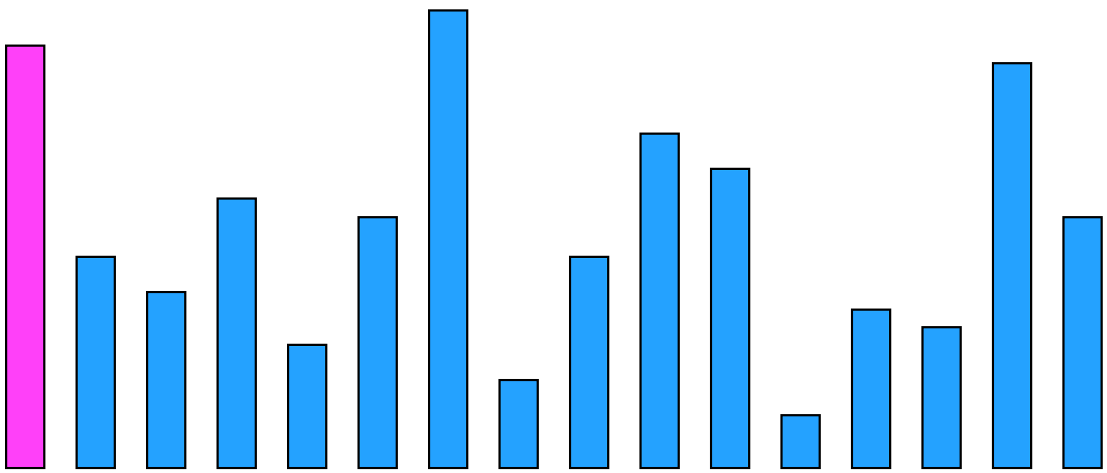
  die Reihenfolge von gleichen Daten bleibt unverändert

- **zu naiv** und **ineffizient** für das Sortieren von im Speicher zusammenhängenden Informationen
- jedoch eignet er sich für das Sortieren innerhalb **verketteter Listen**.
- quadratischer Aufwand **O(n²)**

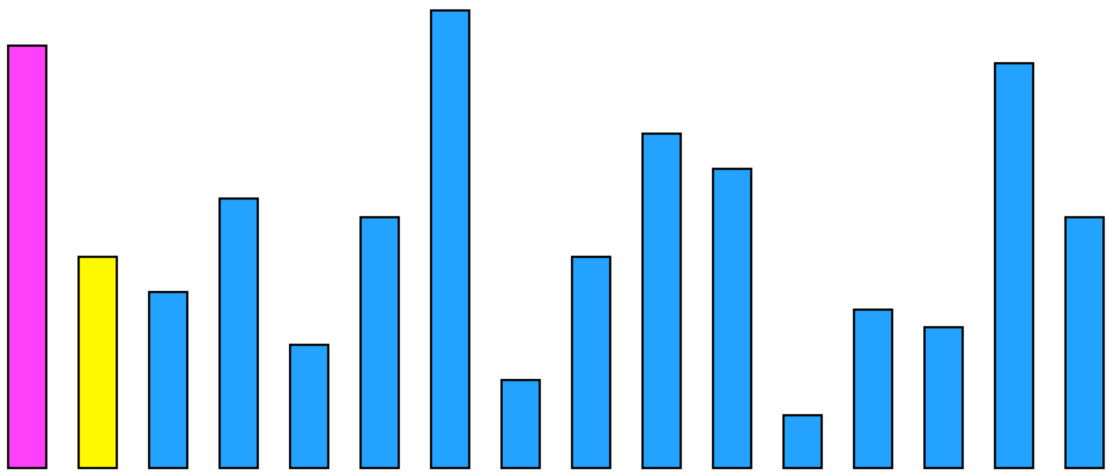
Insertion-Sort



Insertion-Sort

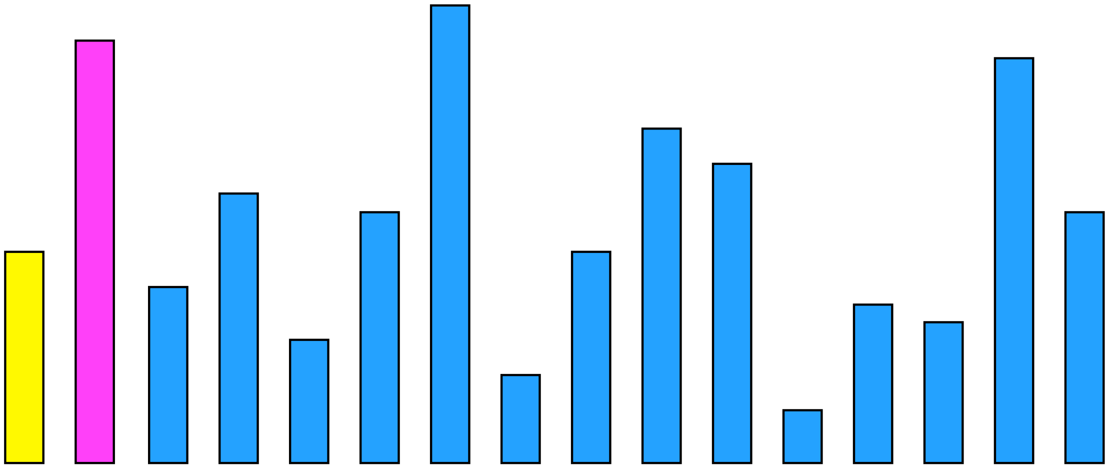


Insertion-Sort

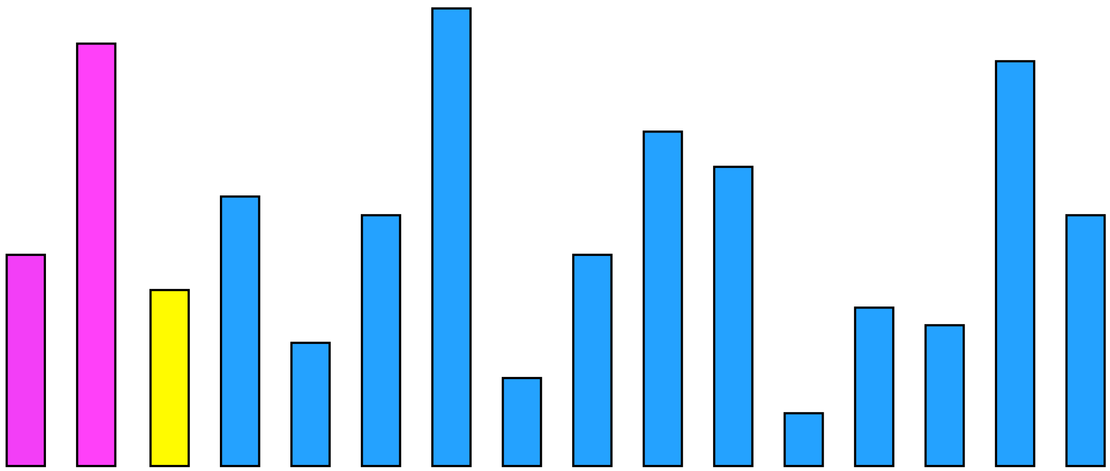


Freie Universität Berlin

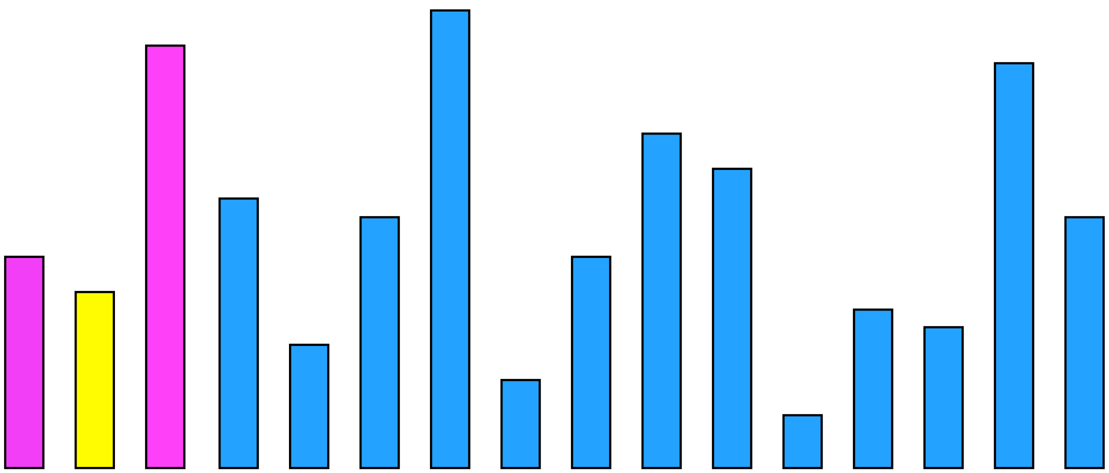
Insertion-Sort



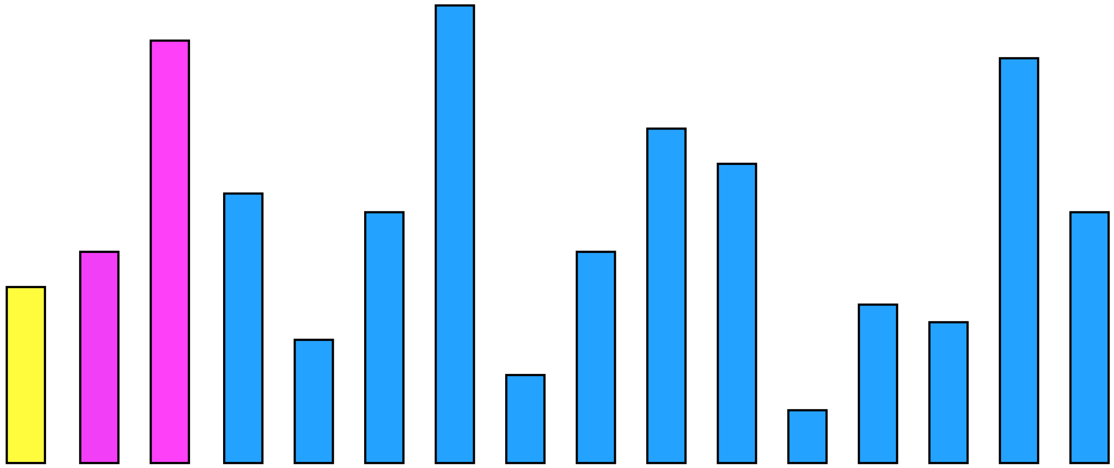
Insertion-Sort



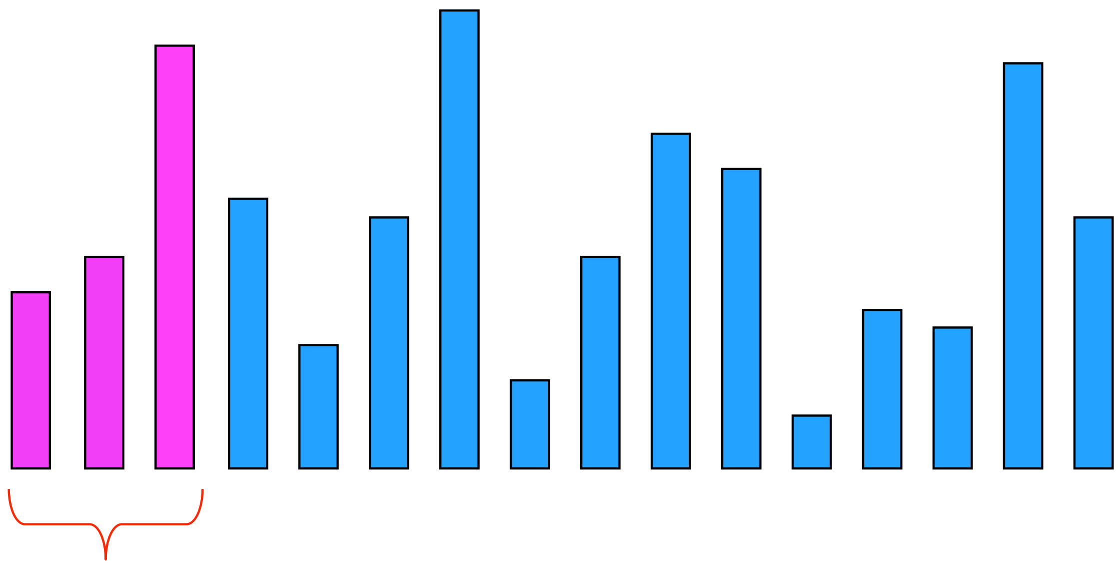
Insertion-Sort



Insertion-Sort

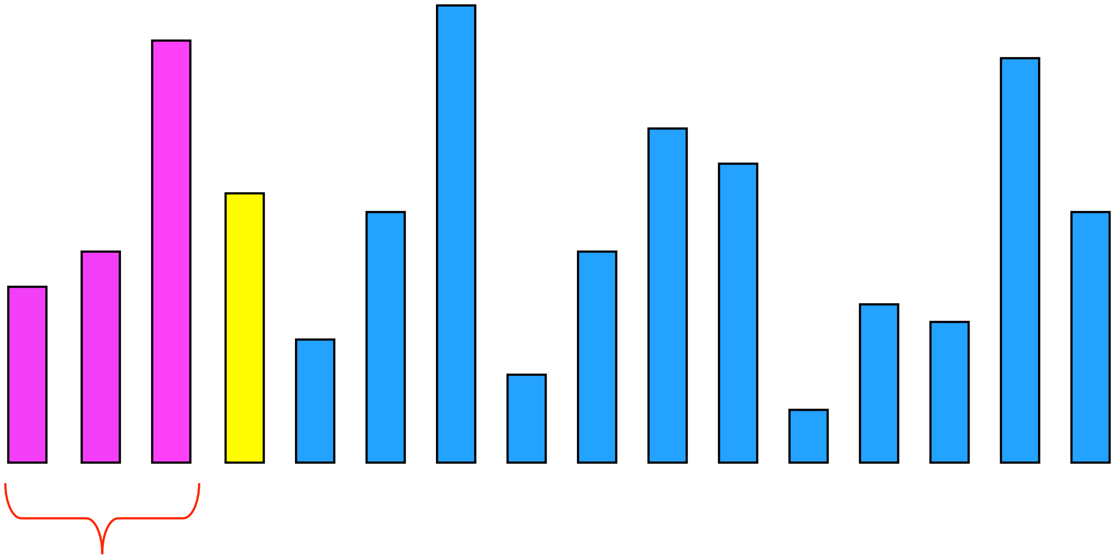


Insertion-Sort



Sortierte Bereich

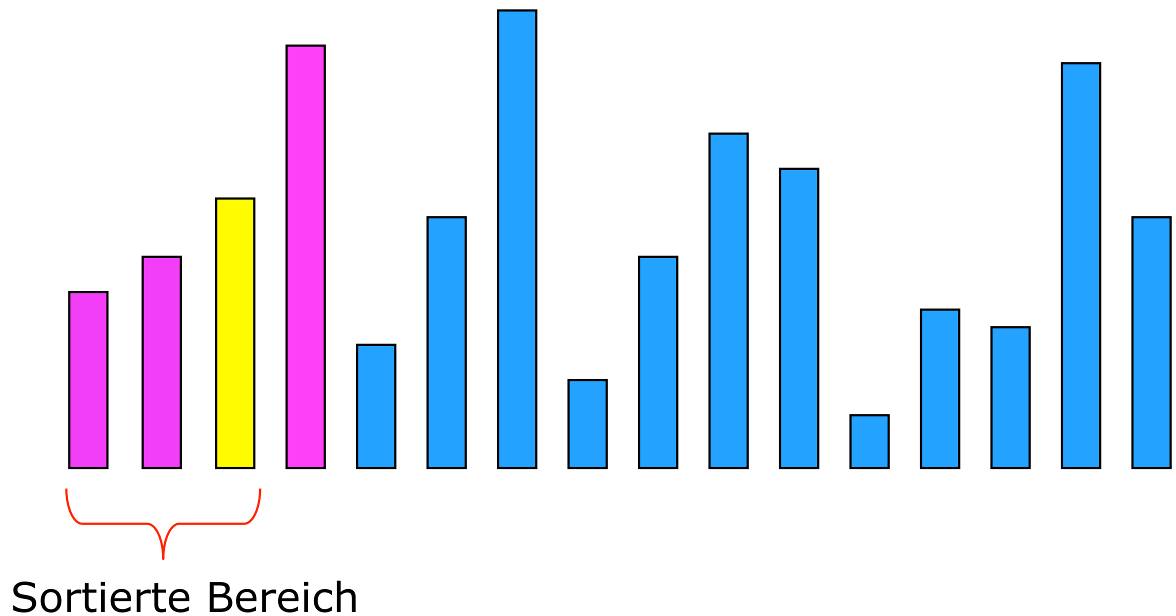
Insertion-Sort



Sortierte Bereich

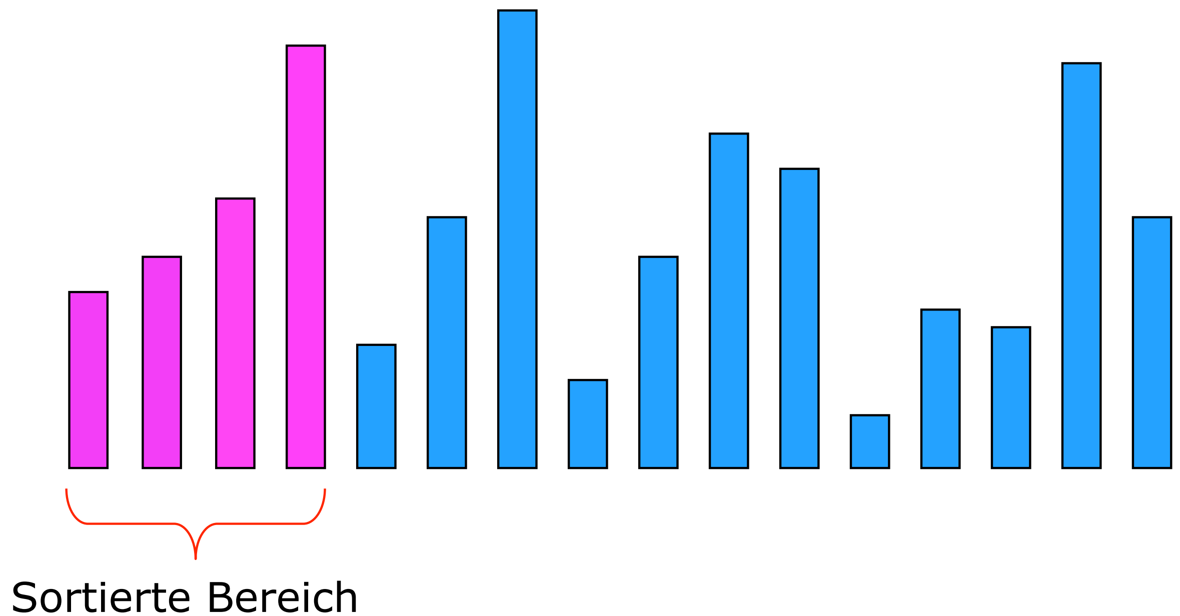
Freie Universität Berlin

Insertion-Sort

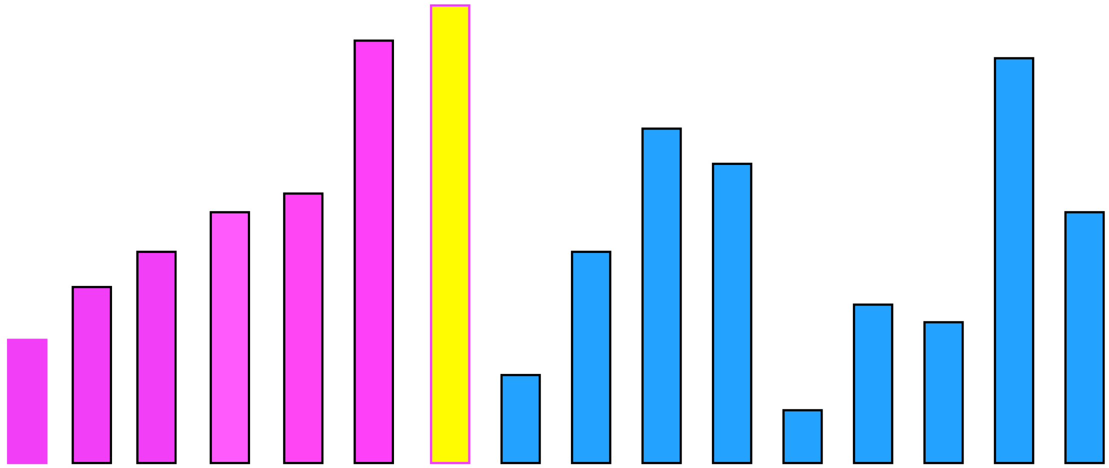


Freie Universität Berlin

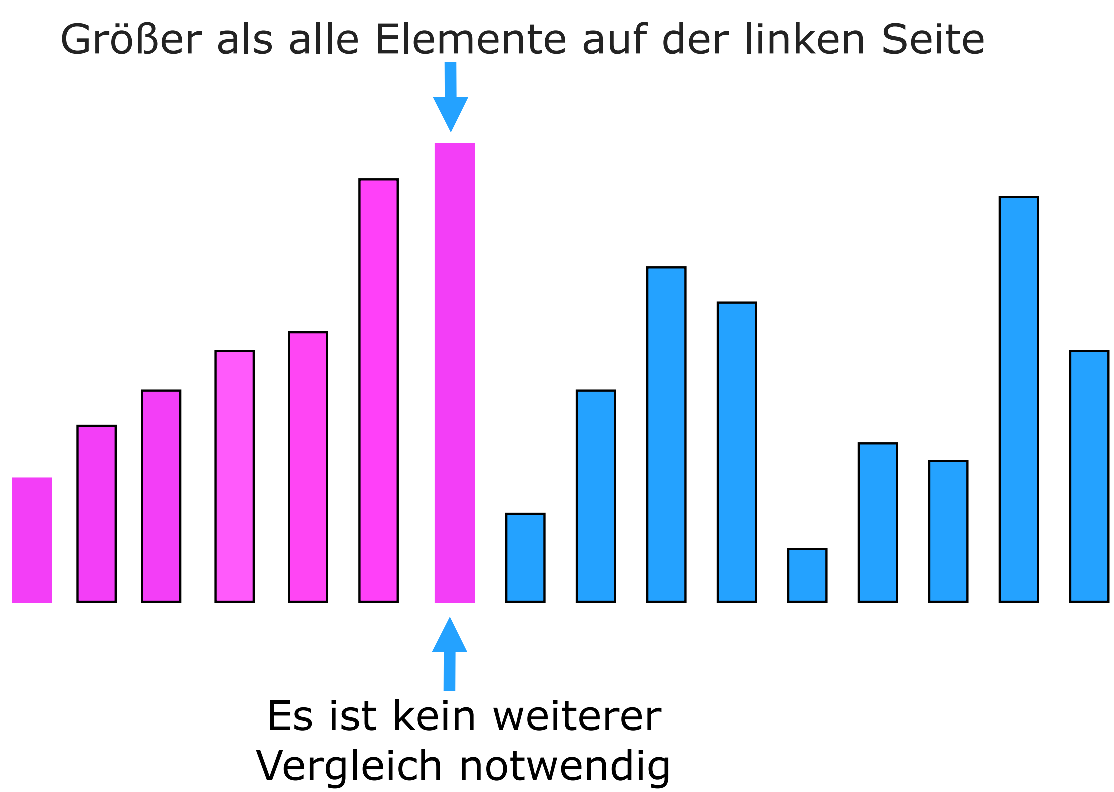
Insertion-Sort



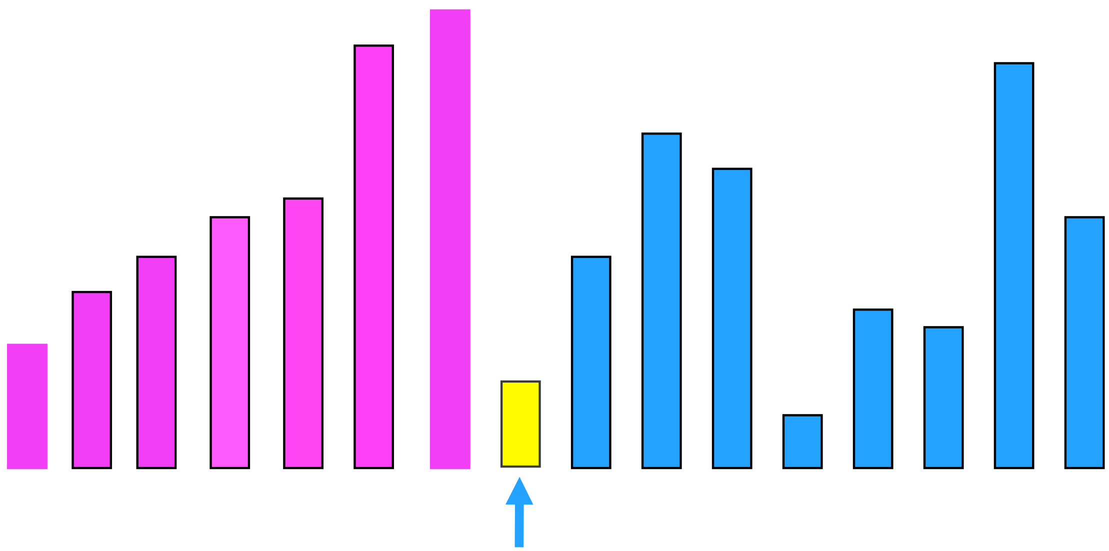
Insertion-Sort



Insertion-Sort



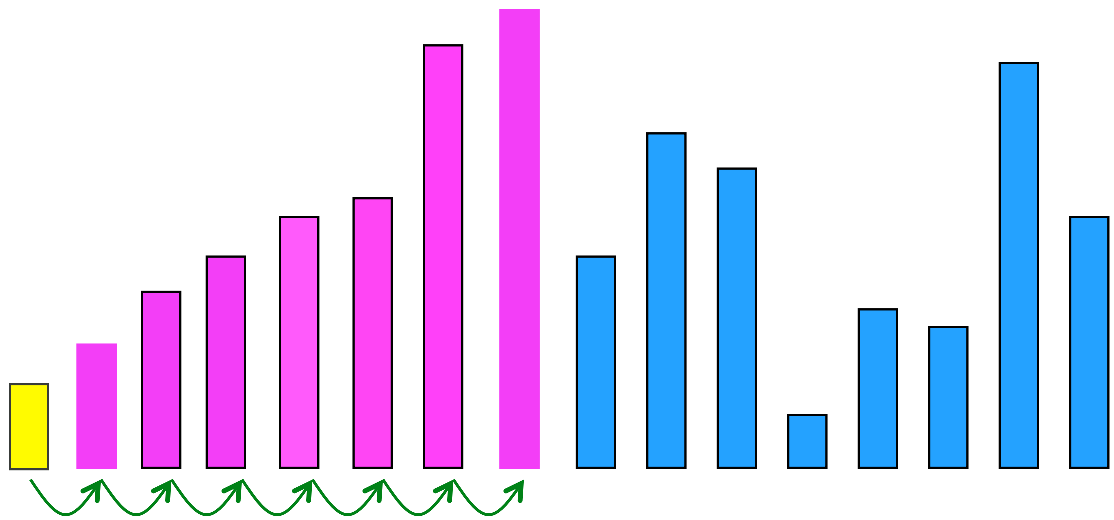
Insertion-Sort



Kleiner als alle Elemente
der linken Seite

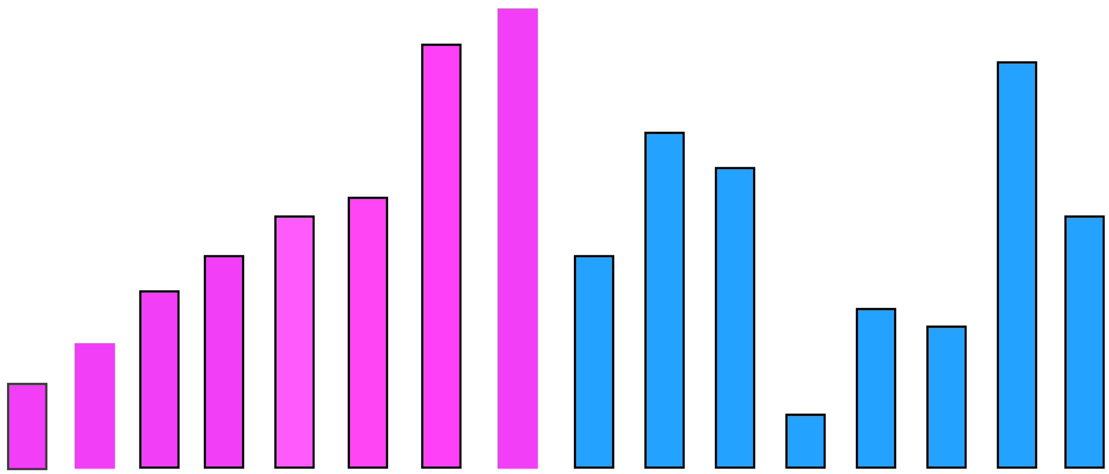
Schlimmster Fall

Insertion-Sort



Alle Elemente müssen verschoben werden

Insertion-Sort



Einfacher Sortieralgorithmus

- **In-Place** (zusätzlicher Speicherbedarf **O(1)**)
- **Stabil**
- **gut für kleine Mengen** oder **leicht unsortierte Daten**

Freie Universität Berlin

Insertion-Sort

```
def insertsort(seq):
    for j in range(1, len(seq)):
        key = seq[j]
        k = j-1
        while k>=0 and seq[k]>key:
            seq[k+1] = seq[k]
            k = k-1
        seq[k+1] = key
```

Eine geeignete Position wird gesucht und die Elemente des sortierten Bereichs verschoben

Die einzusortierende Zahl wird in den gefundenen Platz kopiert

Laufzeit

```
def insertsort (seq):
    for j in range(1, len(seq)):
        key = seq[j]
        k = j-1;
        while k>=0 and seq[k]>key:
            seq[k+1] = seq[k]
            k = k-1
        seq[k+1] = key
```

Anzahl der Operationen

	Max	Min
c_2	n	n
c_3	n-1	n-1
c_4	n-1	n-1
c_5	1+2+...+n	n-1
c_6	1+2+...+n-1	0
c_7	1+2+...+n-1	0
c_8	n-1	n-1

Maximale Laufzeit ("worst case")

$$T(n)= c_2 n + (c_3+c_4+c_8)(n-1) + c_5\,\underbrace{(1+2+..+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (c_6+c_7)\underbrace{(1+2+...+(n-1))}_{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$\boxed{1+2+3+...+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$T(n) = \mathbf{c_2 n} + (\mathbf{c_3+c_4+c_8})(\mathbf{n}-1) + \mathbf{c_5\, n} + (c_5+c_6+c_7)(\mathbf{1+2+...+(n-1)})$$

$$T(n) = - c_3 - c_4 - c_8 + (c_2 + c_3 + c_4 + c_8 + c_5)n + (c_5+ c_6+c_7)\left(\frac{\mathbf{(n-1)n}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$T(n) = \underbrace{-(c_3+c_4+c_8)}_{c} + \underbrace{\left(c_2+c_3+c_4+c_8+\frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2}\right)}_{b}\mathbf{n} + \underbrace{\left(\frac{c_5}{2}+\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{2}\right)}_{a}\mathbf{n^2}$$

$$T(n) = \underline{an^2} + bn + c$$

$$\boxed{T(n) = \mathbf{O(n^2)}}$$

Minimale Laufzeit ("best case")

$$T(n) = c_1 + c_2 n + (c_3 + c_4 + c_5 + c_8)(n-1)$$

$$T(n) = \underbrace{(c_1 - c_3 - c_4 - c_5 - c_8)}_{a} + \underbrace{(c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_8)}_{b}(n)$$

$$\mathbf{T(n) = a + b\, n}$$

$$\boxed{T(n) = \mathbf{O(n)}}$$

Freie Universität Berlin

Insertion-Sort

```
def insertsort(seq):
    for j in range(1, len(seq)):
        key = seq[j]
        k = j-1;
        while k>=0 and seq[k]>key:
            seq[k+1] = seq[k]
            k = k-1
        seq[k+1] = key
```

Eingabe: n Zahlen

$$\overbrace{\boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{9}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{0}\ \boxed{8}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{5}}^{\mathbf{n}}$$

Berechnungsschritte: Vergleichsoperationen

Komplexitätsanalyse: T(n) = 1+2+3+...+(n-1) + **n**

$$= \frac{(n+1)n}{2}$$

Im schlimmsten Fall

$$T(n) = an^2 + bn = O(n^2)$$

Im besten Fall

$$T(n) = an + b = O(n)$$

Teile und Herrsche

"Divide und Conquer"

Viele Probleme lassen sich nicht mit trivialen Schleifen lösen und haben gleichzeitig den Vorteil, dass eine rekursive Lösung keine überflüssigen Berechnungen verursacht.

Solche Probleme lassen sich in Teilprobleme zerlegen, deren Lösung keine überlappenden Berechnungen beinhalten.

Lösungsschema:

Divide:

Teile ein Problem in zwei oder mehrere kleinere ähnliche Teilprobleme, die (rekursiv) isoliert behandelt werden können.

Conquer:

Löse die Teilprobleme auf dieselbe Art (rekursiv).

Merge:

Füge die Teillösung zur Gesamtlösung zusammen.

Quick-Sort-Algorithmus

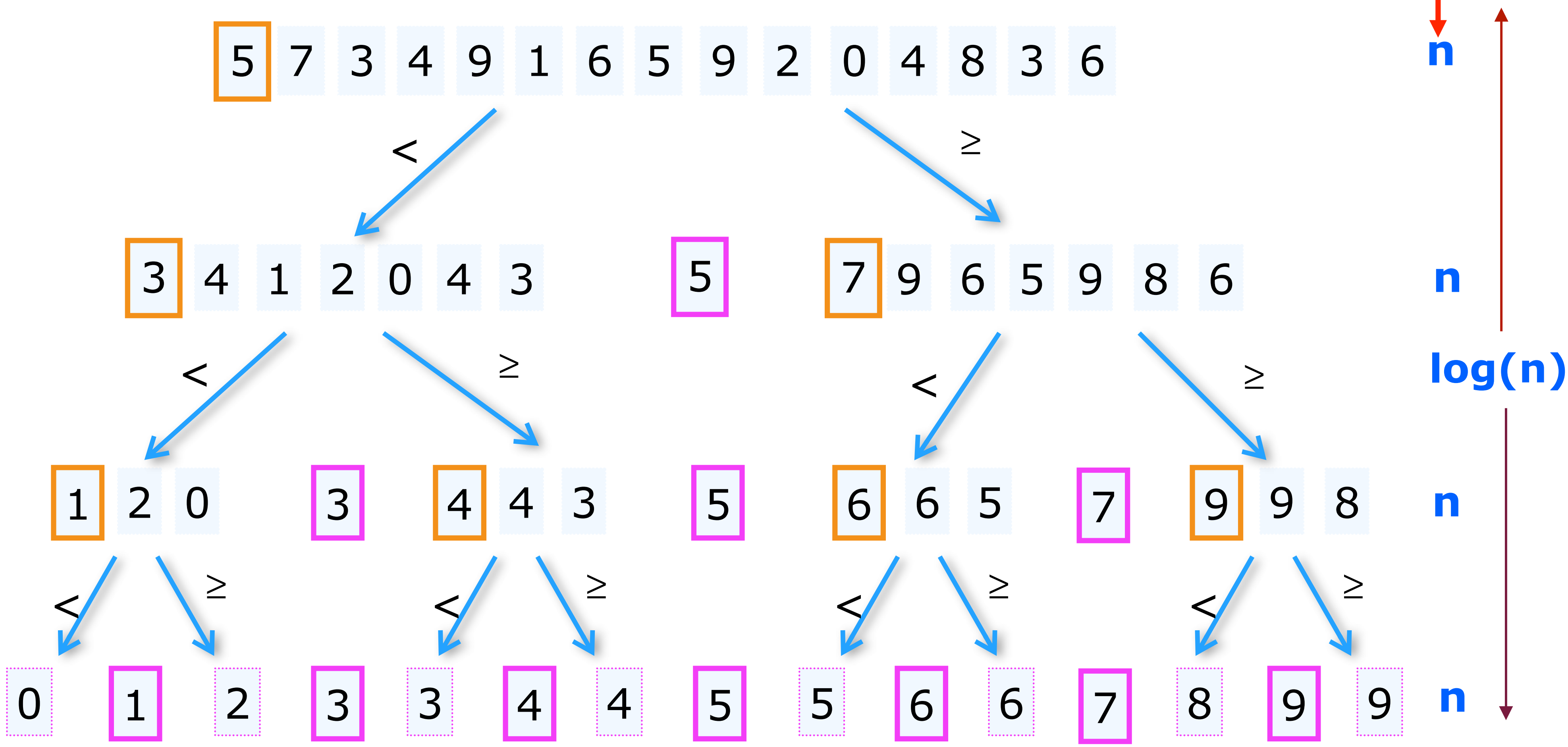
Grundidee:

1) Ein Element (**Pivot**) aus dem Array wird gewählt

2) Alle Zahlen des Arrays werden mit dem Pivot-Element verglichen und während des Vergleichsdurchlaufs in zwei Bereiche umorganisiert (**Partitionierung**). Der erste Bereich beinhaltet die Zahlen, die kleiner als das Pivot-Element sind und der zweite alle, die größer oder gleich sind. Am Ende des Durchlaufs wird das Pivot-Element zwischen beider Bereichen positioniert.

3) Nach jeder Partitionierung wird der Quicksort-Algorithmus rekursiv mit beiden Teilbereichen ausgeführt (solange die Teilbereiche mehr als ein Element beinhalten).

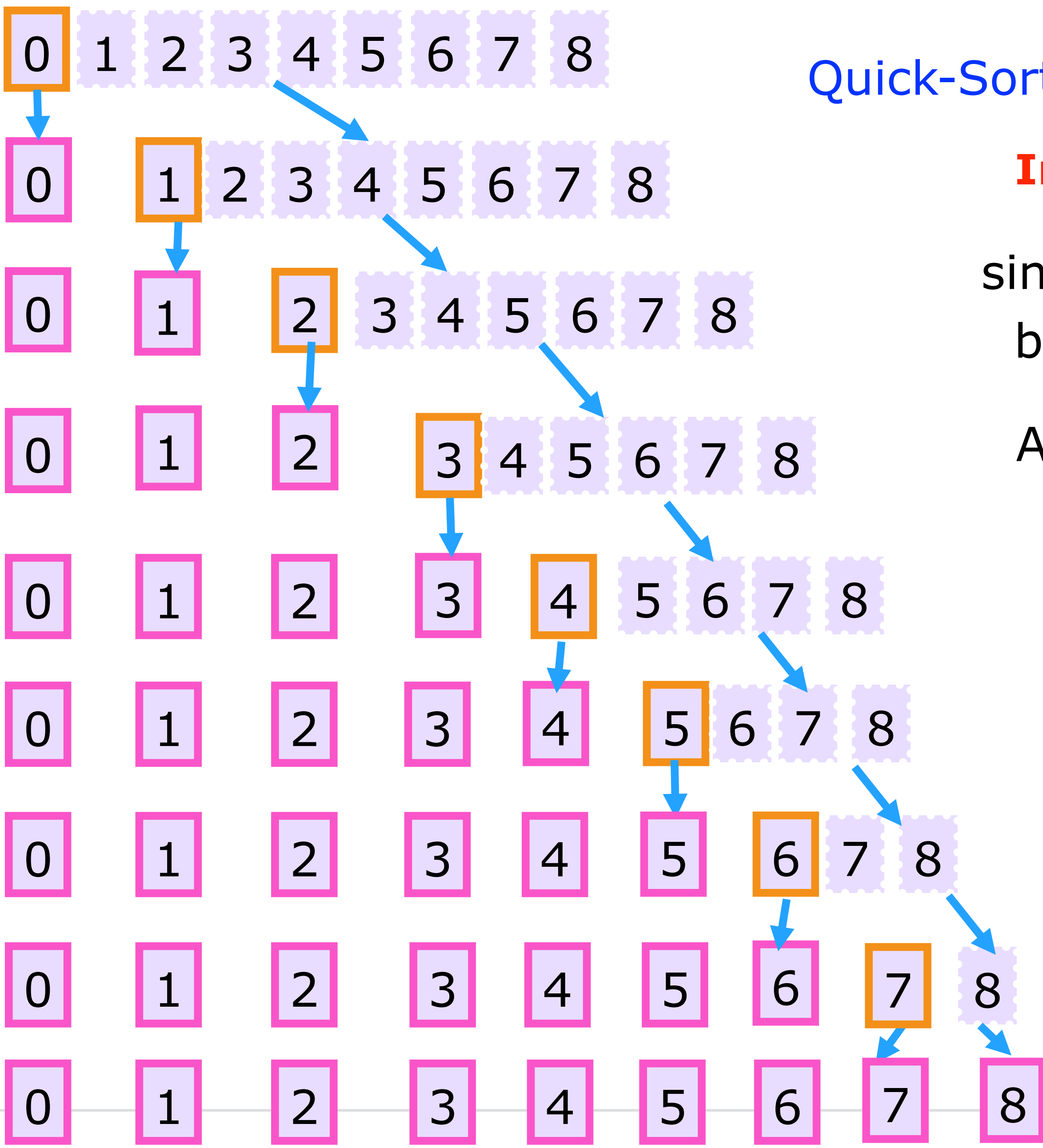
Quick-Sort-Algorithmus



Der Quicksort-Algorithmus funktioniert am besten, wenn die Teillisten fast gleich gross sind.

im besten Fall!

T(n) = n (log (n))



Quick-Sort-Algorithmus

Im schlimmsten Fall!

sind alle Elemente bereits sortiert.

Anzahl der Vergleiche

⇩

$$T(n) = (n-1) + \ldots 2 + 1$$

$$T(n) = (n-1)*(n-2)/2$$

$$T(n) = 1/2*n^2 - 3/2*n + 2$$

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n + c_3$$

$$T(n) = \mathbf{O}(\ n^2\ )$$

Quick-Sort-Algorithmus

```
quicksort  ::  [Integer] -> [Integer]
quicksort [] = []
quicksort (x:xs) =   quicksort [ y | y <- xs, y <= x ]
                     ++ [x]
                     ++ quicksort [ y | y <- xs, y > x ]
```

Das **Problem** in Haskell ist der Speicherverbrauch und die Komplexität der Verkettungsfunktion (++).

Quick-Sort-Algorithmus á la Haskell

```
def quick_sort(seq):
    if len(seq)>1:
        q1 = [s for s in seq[1:] if s<seq[0]]
        q2 = [s for s in seq[1:] if s>=seq[0]]
        return quick_sort(q1) + [seq[0]] + quick_sort(q2)
    else:
        return seq
```

Speicherverbrauch?

Quicksort-Algorithmus

imperativ!

Rekursive Implementierung

```
def quicksort (A, low, high ):
      if  low<high:
            m = partition(A, low, high )
            quicksort ( A,  low,  m-1  )
            quicksort ( A,  m+1,  high )
```

	low														high
A	5	7	3	4	9	1	6	5	9	2	0	4	8	3	6

Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus

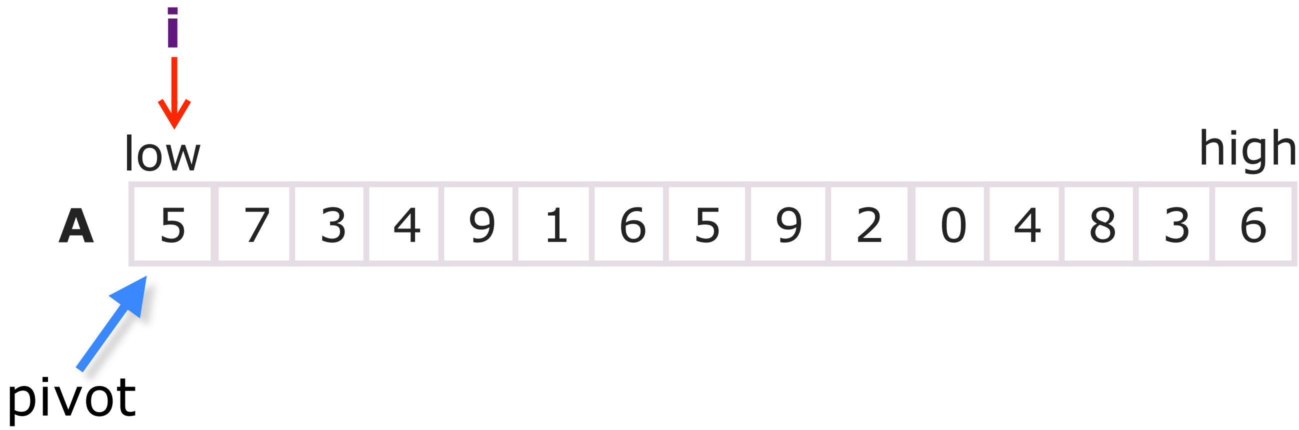
	low														high
A	5	7	3	4	9	1	6	5	9	2	0	4	8	3	6

pivot

Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus



Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus

i j

low high

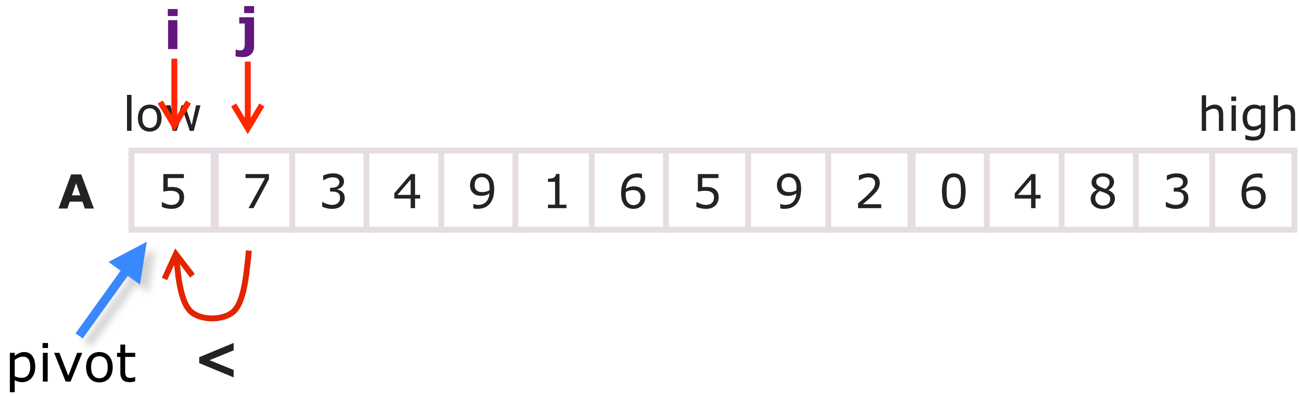
A															
	5	7	3	4	9	1	6	5	9	2	0	4	8	3	6

pivot

Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

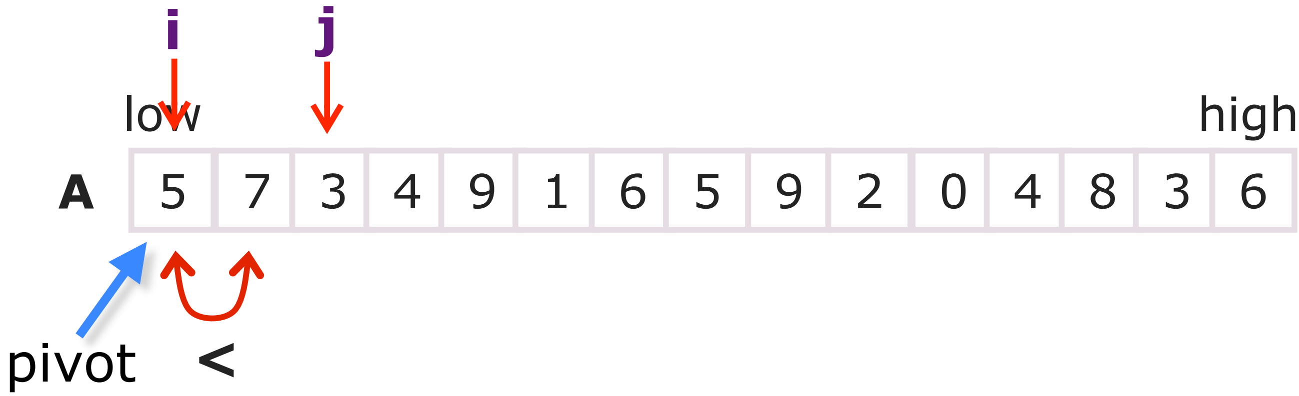
Quicksort-Algorithmus



Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

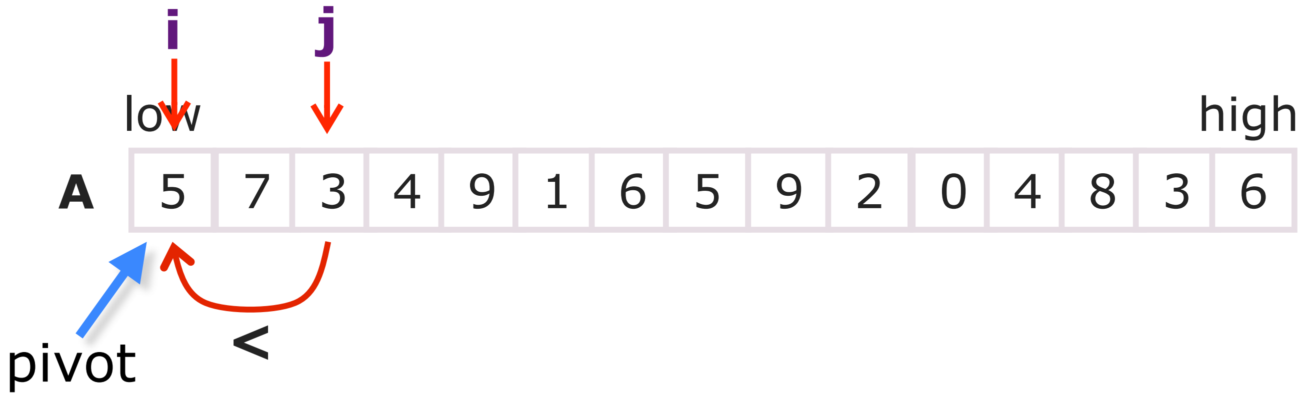
Quicksort-Algorithmus



Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

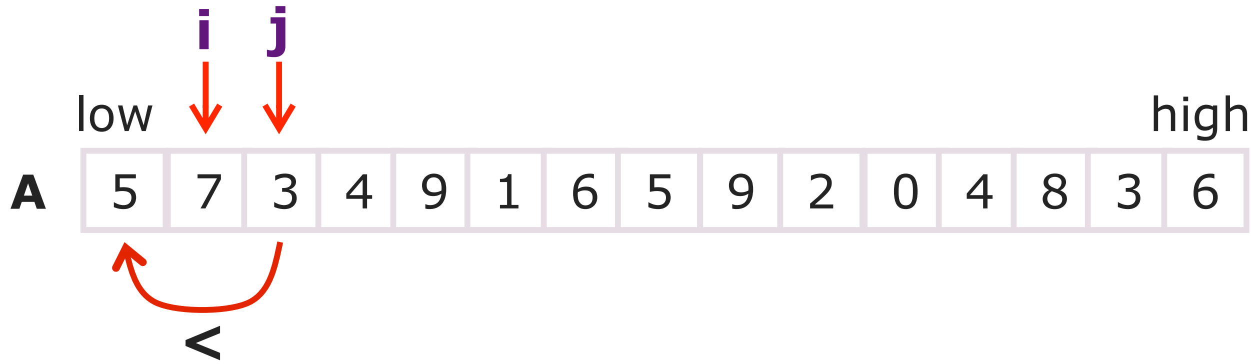
Quicksort-Algorithmus



Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

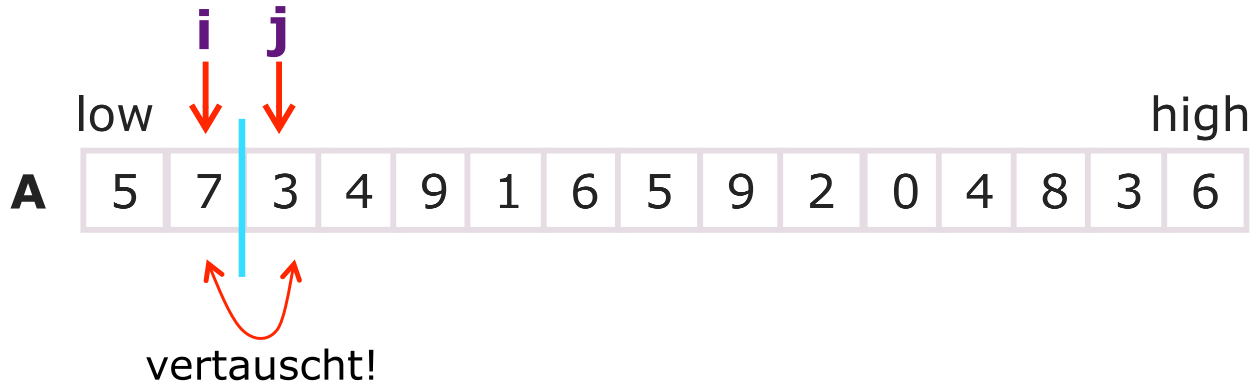
Quicksort-Algorithmus



Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

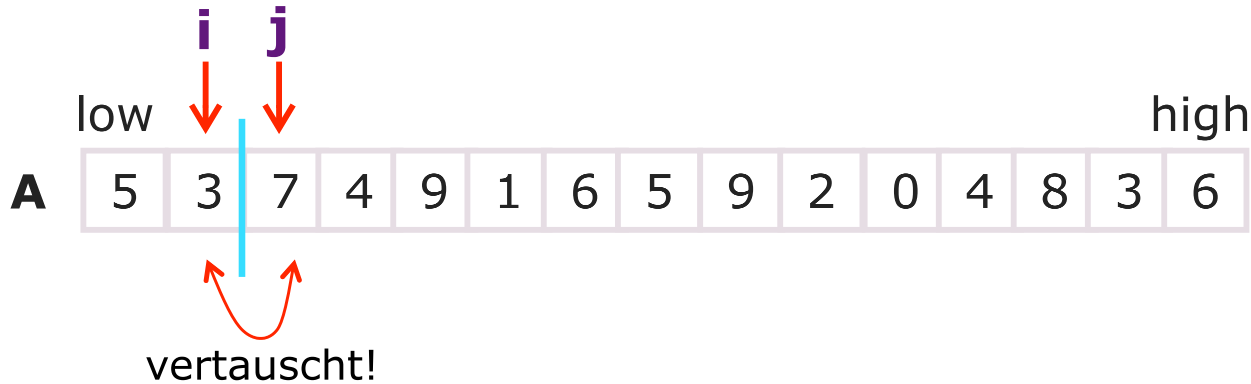
Quicksort-Algorithmus



Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

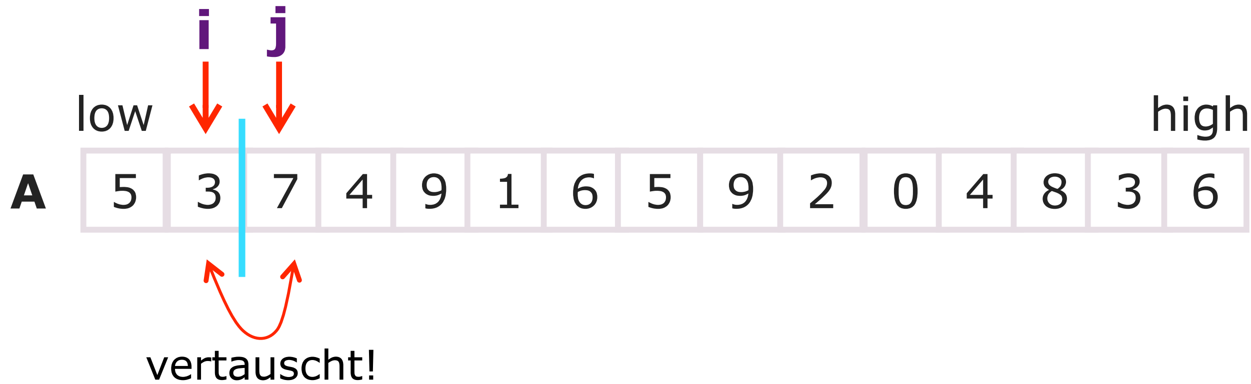
Quicksort-Algorithmus



Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus



Sortieren am Ort

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus

i j

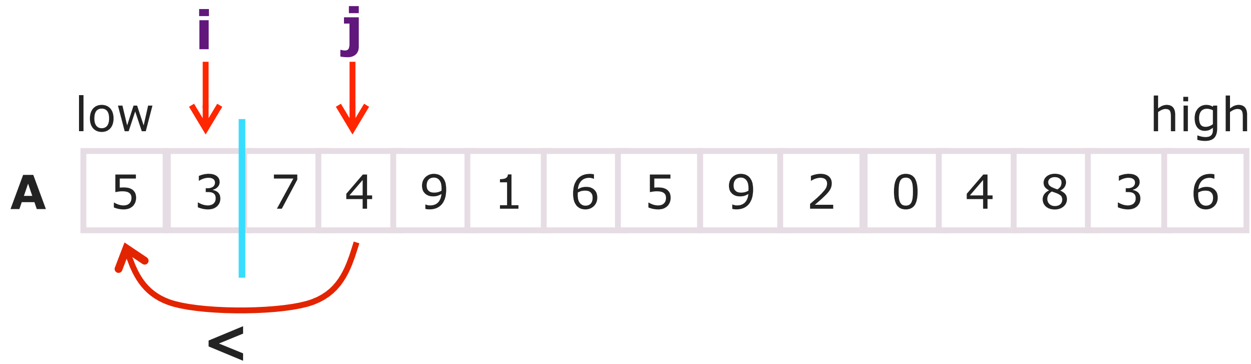
low high

A	5	3	7	4	9	1	6	5	9	2	0	4	8	3	6

Sortieren am Ort

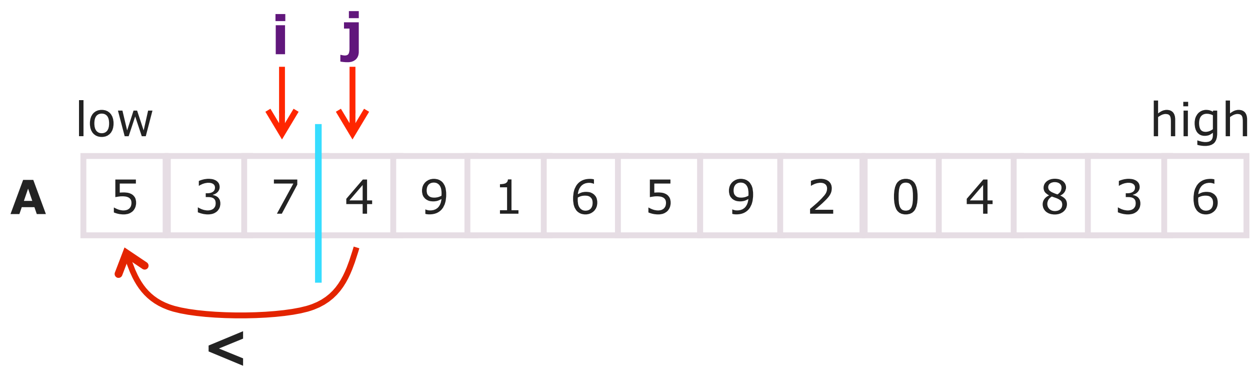
```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus



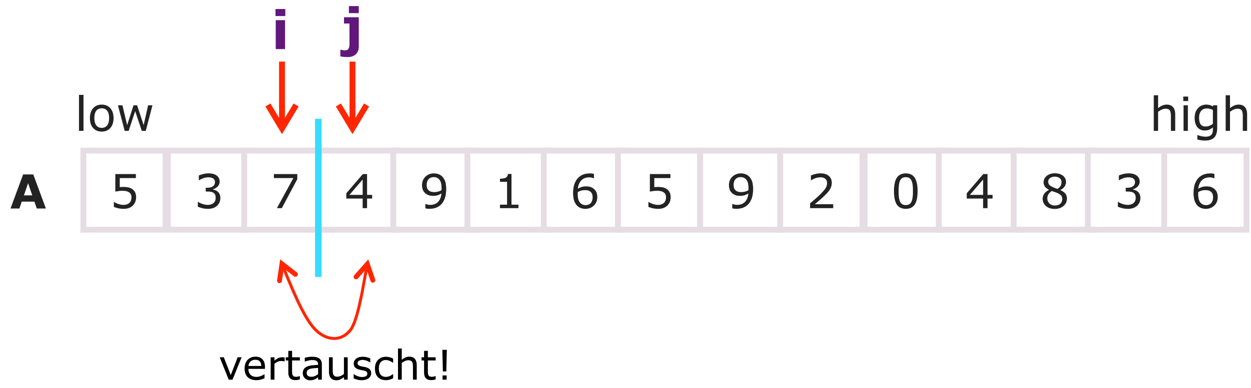

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus



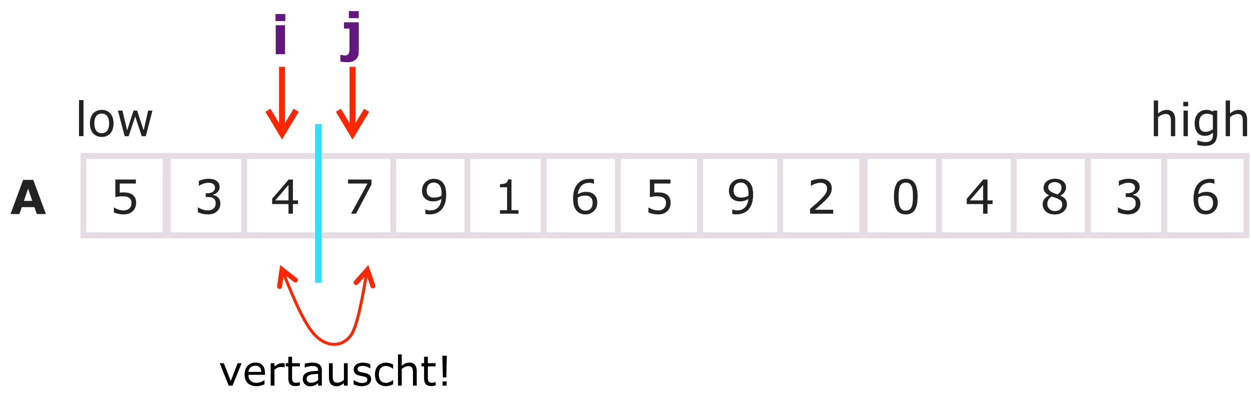

```python
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus



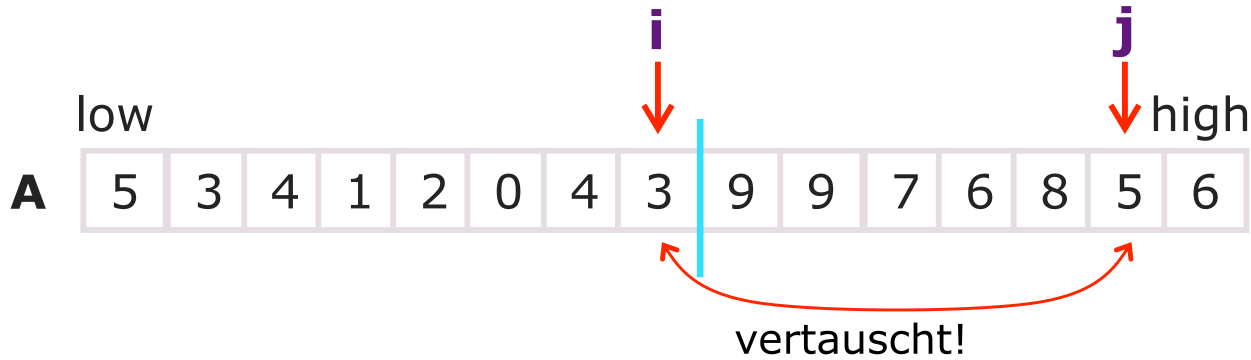

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus



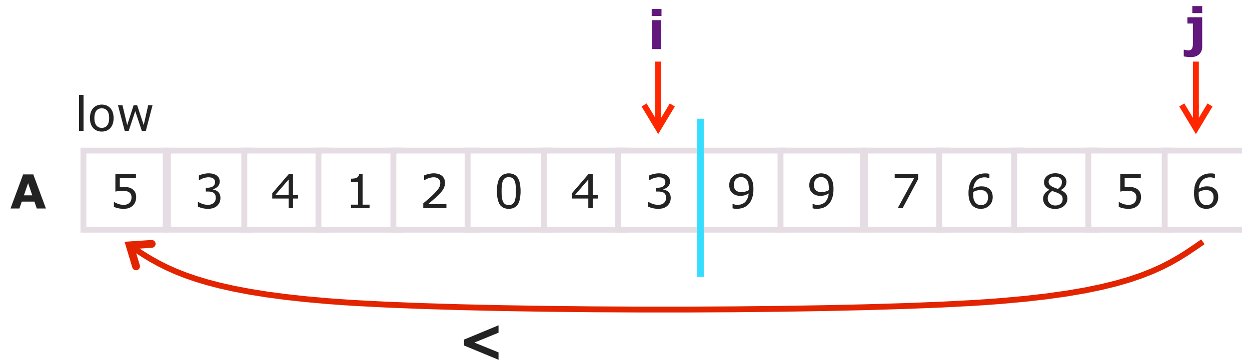

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus



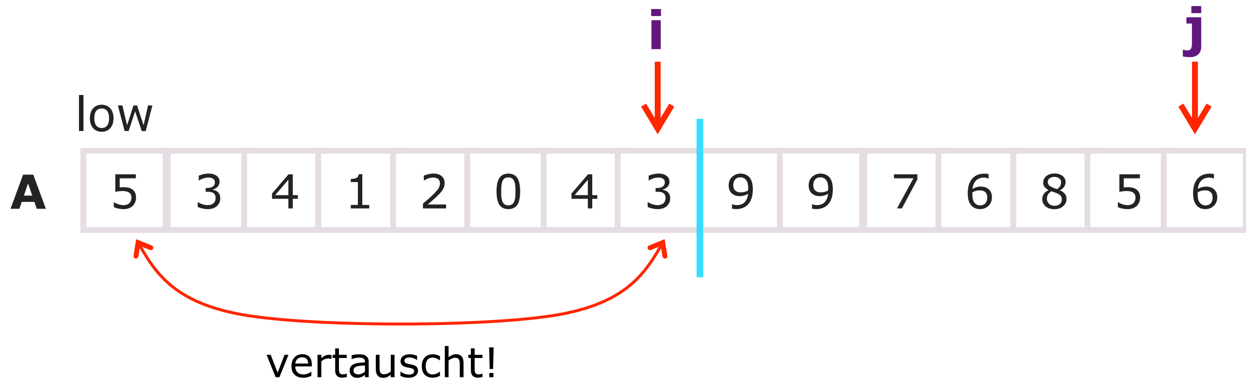

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus




```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus




```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus

i j

low

A	3	3	4	1	2	0	4	5	9	9	7	6	8	5	6

vertauscht!

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus

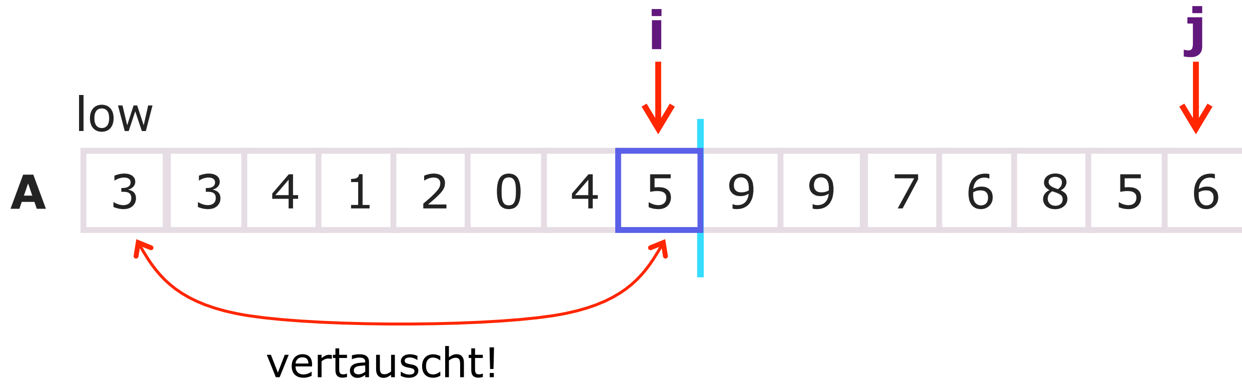
i j

low

A															
A	3	3	4	1	2	0	4	5	9	9	7	6	8	5	6

```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

Quicksort-Algorithmus

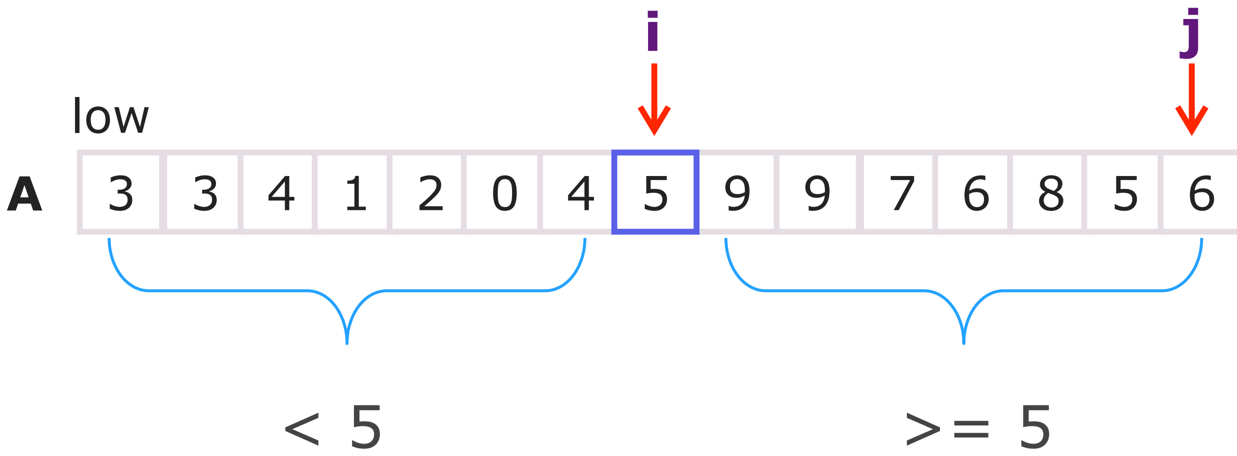



```
def partition( A, low, high ):
    pivot = A[low]
    i = low
    for j in range(low+1,high+1):
        if ( A[j] < pivot ):
            i=i+1
            A[i], A[j] = A[j], A[i]
    A[i], A[low] = A[low], A[i]
    return i
```

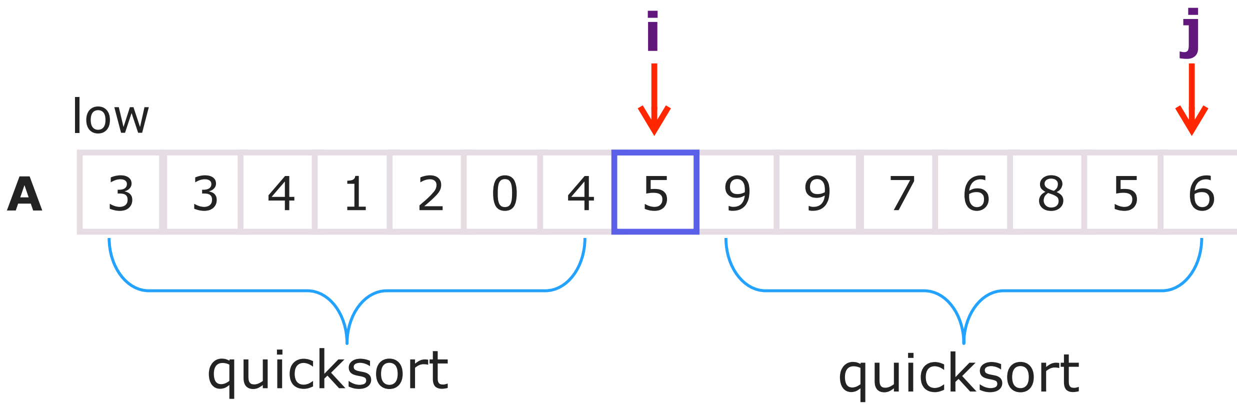
Quicksort-Algorithmus

Freie Universität Berlin

Quicksort -Algorithmus



Quicksort -Algorithmus



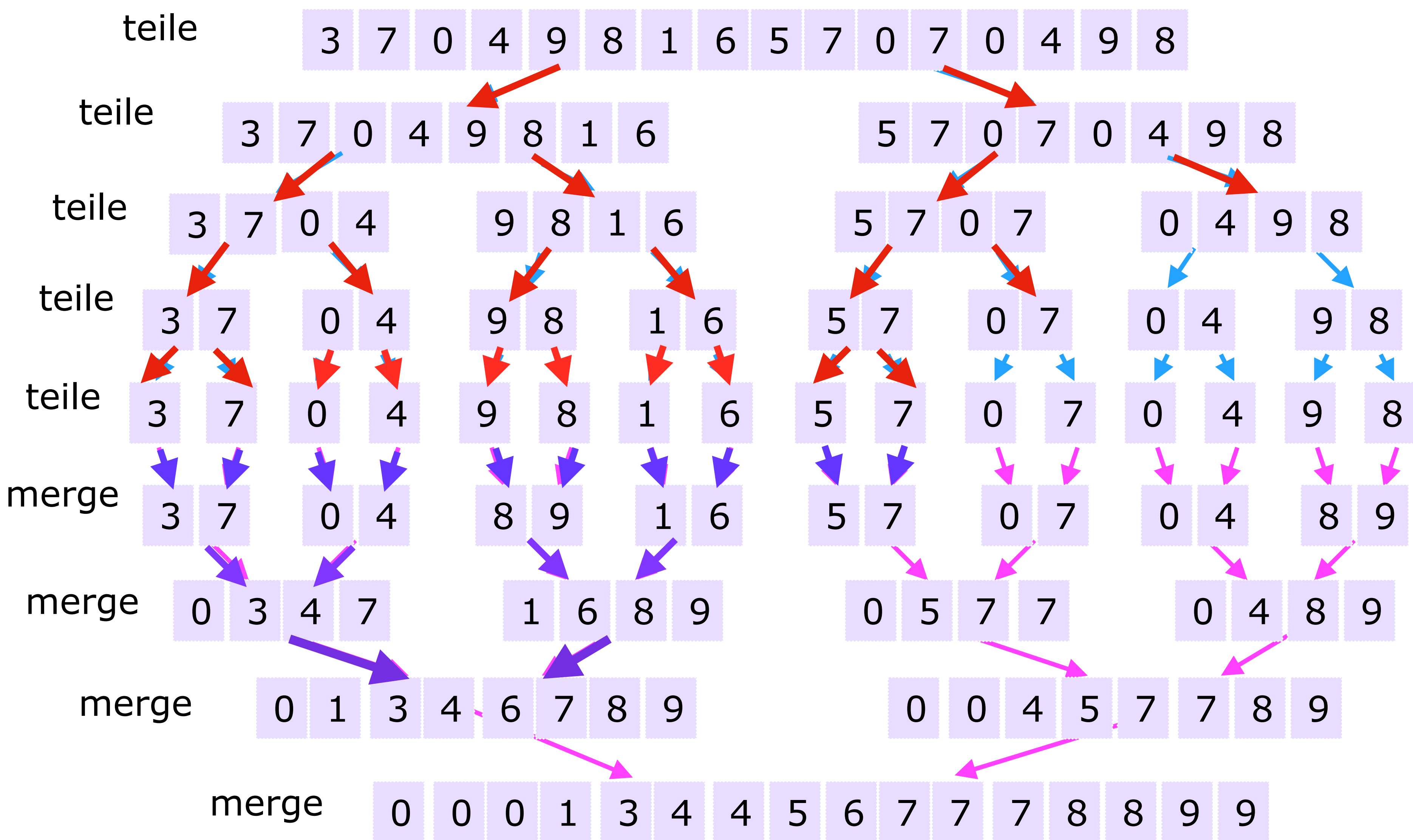

```
def quicksort (A, low, high ):
    if  low<high:
        m = partition(A, low, high )
        quicksort ( A,  low,  m-1 )
        quicksort ( A,  m+1,  high )
```

Quicksort-Algorithmus

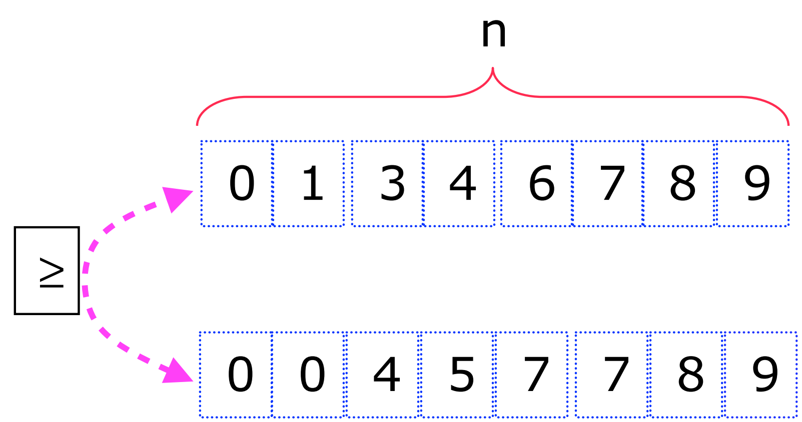
- **1962** von **Hoare** entwickelt
- ist einer der beliebtesten Sortieralgorithmen
- **einfache** Implementierung
- **in-place**
- Komplexität
  - **$O(n \cdot \log(n))$** im Durchschnitt
  - **$O(n^2)$** im schlimmsten Fall
- **nicht stabil!**

Merge-Sort-Algorithmus

Freie Universität Berlin



Merge-Algorithmus



Merge-Algorithmus

$$\overbrace{\boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{7}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{9}}^{2*n}$$

Sortierte Zahlen

Wir hatten ursprünglich zwei sortierte Mengen mit Länge **n.**

Nach jedem Vergleich wird eine Zahl sortiert,

d.h. im schlimmsten Fall haben wir **2*n** Vergleiche.

$$T(n) = 2n = O(n)$$

Merge-Algorithmus

Hilfsarray

res

[]

0	1	3	4	6	7	8	9

$\geq$

0	0	4	5	7	7	8	9

Merge-Sort-Algorithmus

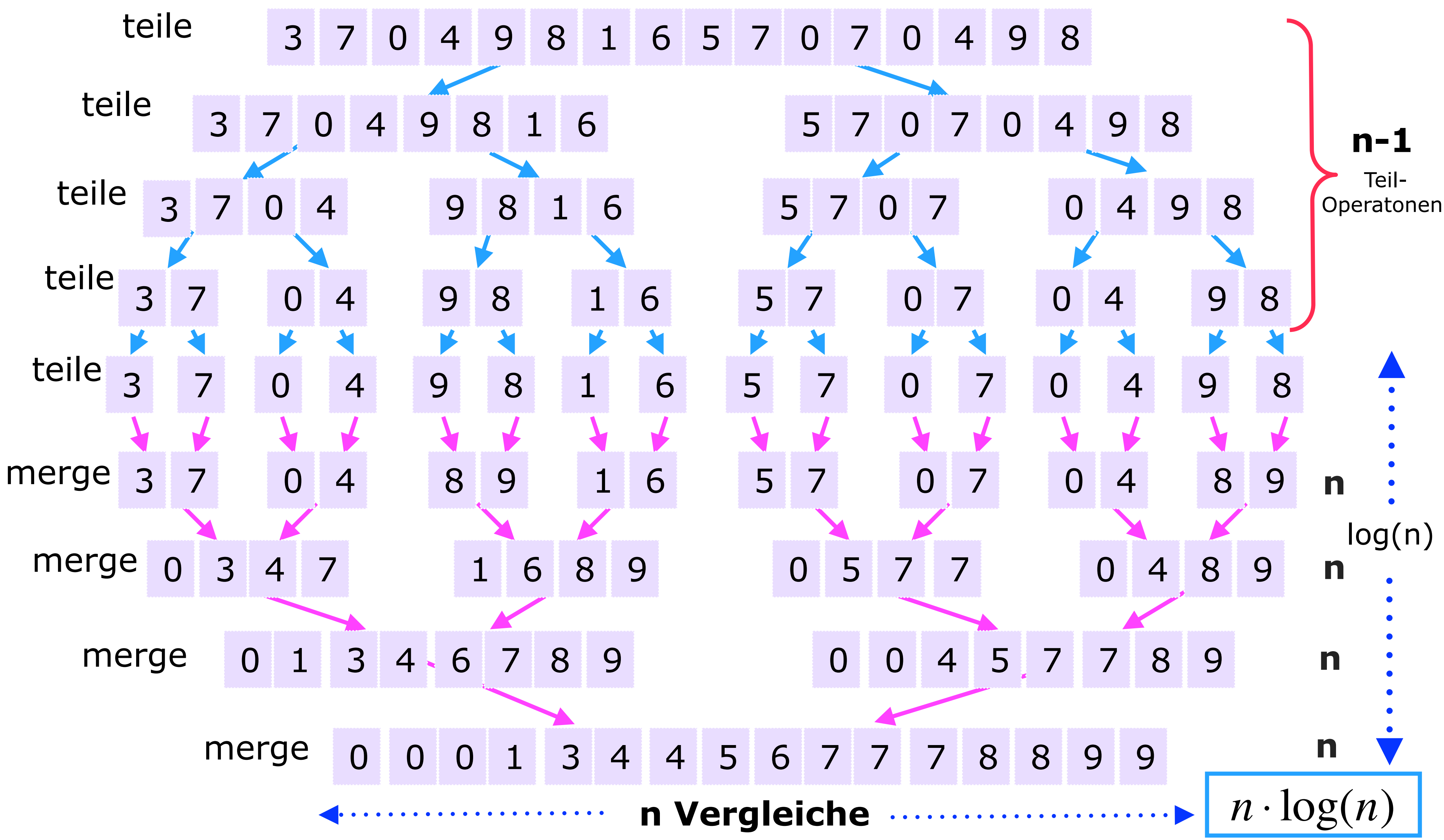
```
def merge(low, high):
        res = []
        i, j = 0, 0
        while i<len(low) and j<len(high):
                if low[i] <= high[j]:
                        res.append(low[i])
                        i = i+1
                else:
                        res.append(high[j])
                        j = j+1
        res = res + low[i:]
        res = res + high[j:]
        return res
```

Speicherverbrauch?

Rekursiv

```
def mergesort(A):
    if len(A) < 2:
        return A
    else:
        m = len(A) // 2
        return merge( mergesort(A[:m]), mergesort(A[m:]) )
```

Merge-Sort-Algorithmus



Merge-Sort-Algorithmus

Eine Teilung kostet c_1

Ein Vergleich kostet c_2

$$T(n) = \underbrace{c_1(n-1)}_{\text{Teiloperationen}} + \underbrace{c_2 \cdot n \cdot \log(n)}_{\text{Vergleiche}}$$

$$\boxed{T(n) = O(n \cdot \log(n))}$$