Freie Universität Berlin

Funktionale Programmierung

Bäume (kurze Einführung)

WS 2019/2020

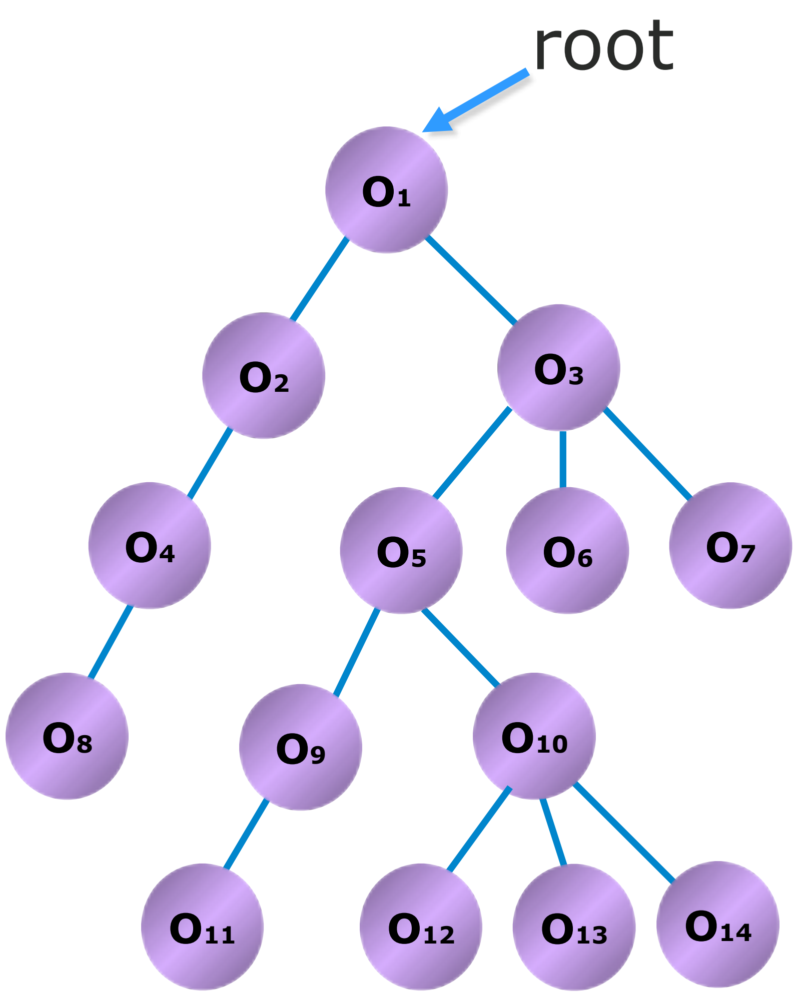
Prof. Dr. Margarita Esponda

© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Freie Universität Berlin

Was ist ein Baum?

Eine spezielle Graph-Struktur ohne Zyklen



1. Er hat eine Wurzel.

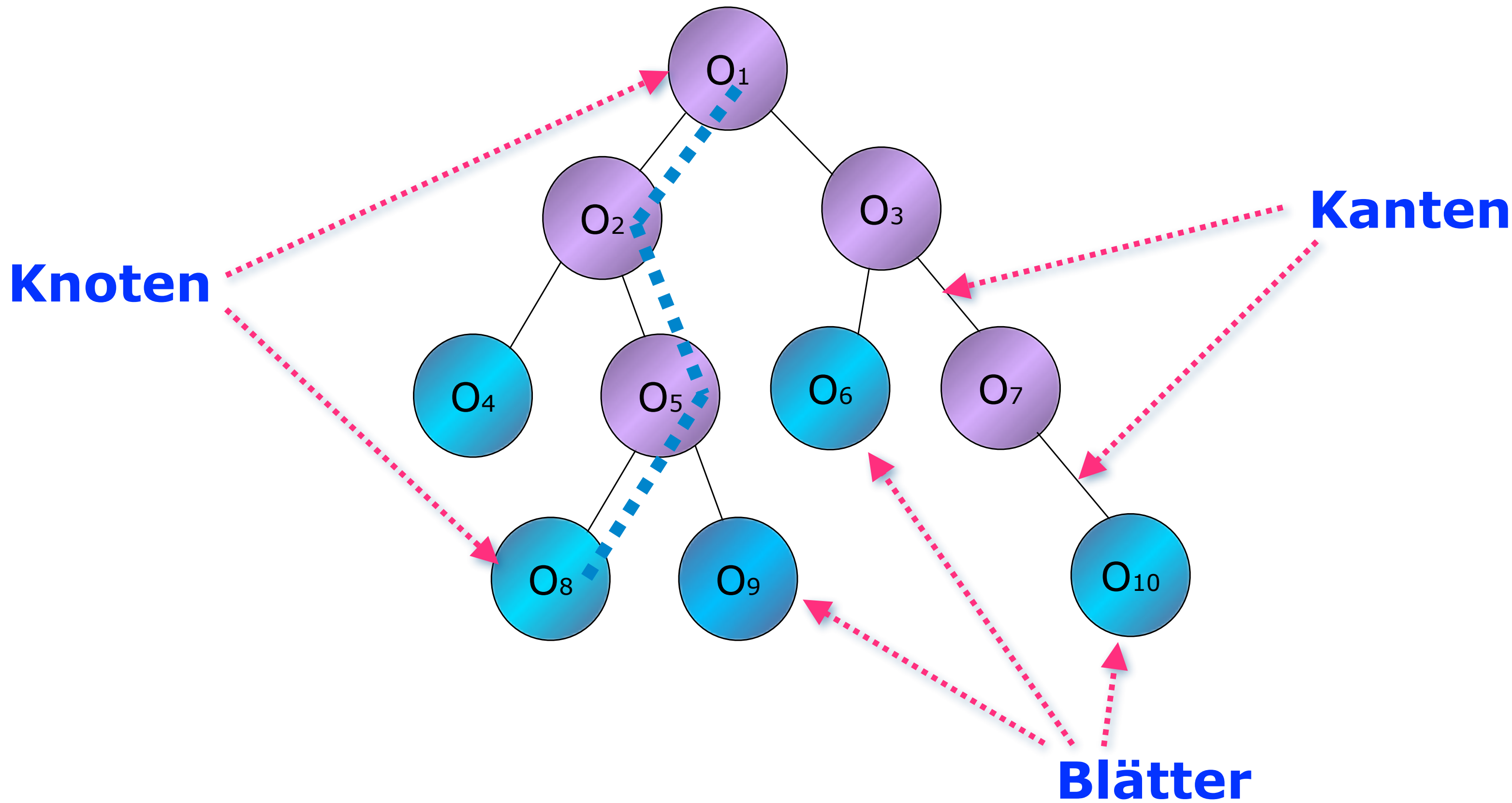
2. Alle Knoten ausser der Wurzel haben genau eine Verbindung mit einem Vorfahren.

3. Es existiert genau ein Weg zwischen der Wurzel und jedem beliebigen Knoten.

© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Eigenschaften von Bäumen

Zwischen zwei beliebigen Knoten in einem Baum existiert genau ein Pfad, der sie verbindet.



Ein Baum mit **N** Knoten hat **N-1** Kanten.

© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Eigenschaften von Bäumen?

Nehmen wir an, wir haben einen Baum **t**, dann gilt:

- ***|t|*** bezeichnet die Größe des Baumes ***t*** oder die gesamte Anzahl seiner Knoten.
- Die **Tiefe** (*Level*) eines Knotens ist sein Abstand zur Wurzel. Die Tiefe der Wurzel ist gleich **0**.
- die Höhe ***h(t)*** ist der maximale Abstand zwischen der Wurzel und den Knoten.
- Blätter sind Knoten ohne Kinder.
- Die Pfadlänge des Baumes sei definiert als die Summe der Tiefen aller Knoten des Baumes.

© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Freie Universität Berlin

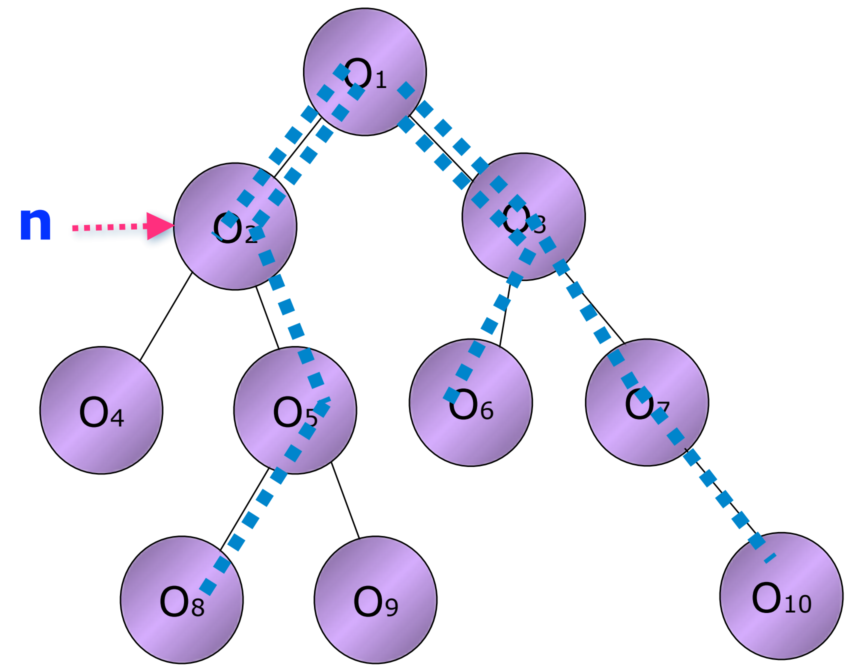
Eigenschaften von Bäumen

|*t*| = gesamte Anzahl seiner Knoten = **10**

***h*(*t*) = 3**

***Tiefe(n)* = 1**

***Pfadlänge(t)* = 19**

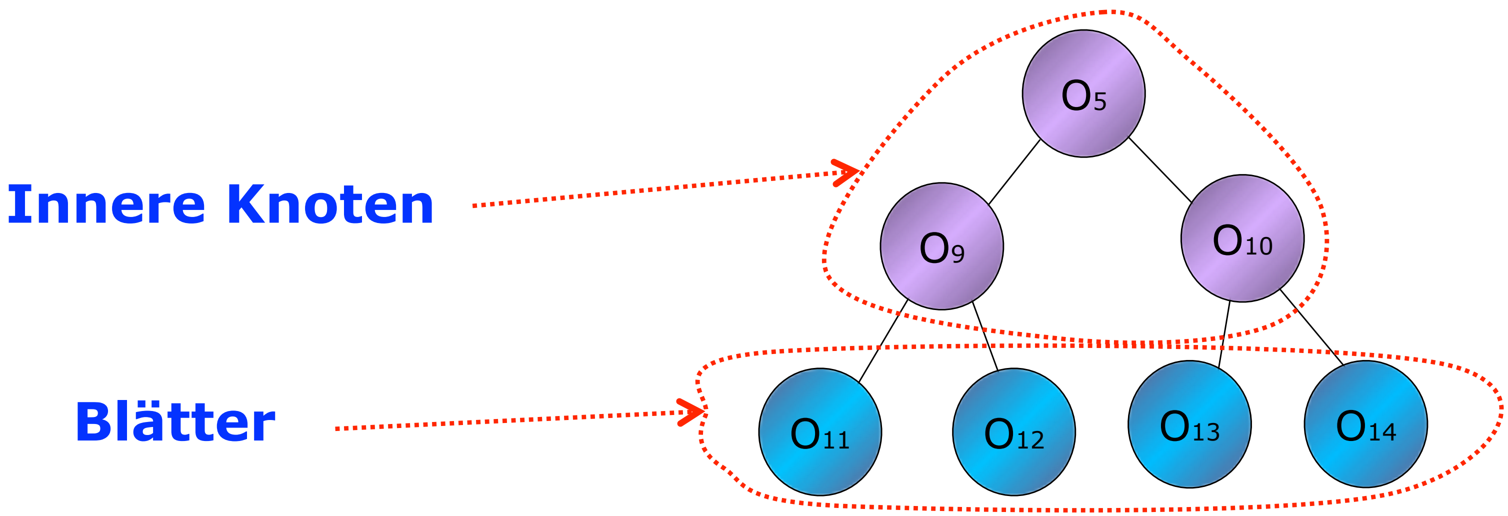


© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Binärbäume

Bäume, in dem jeder Knoten höchstens zwei Kinder hat.

Ein Binärbaum mit **N** inneren Knoten hat **N+1** äußere Knoten oder Blätter.

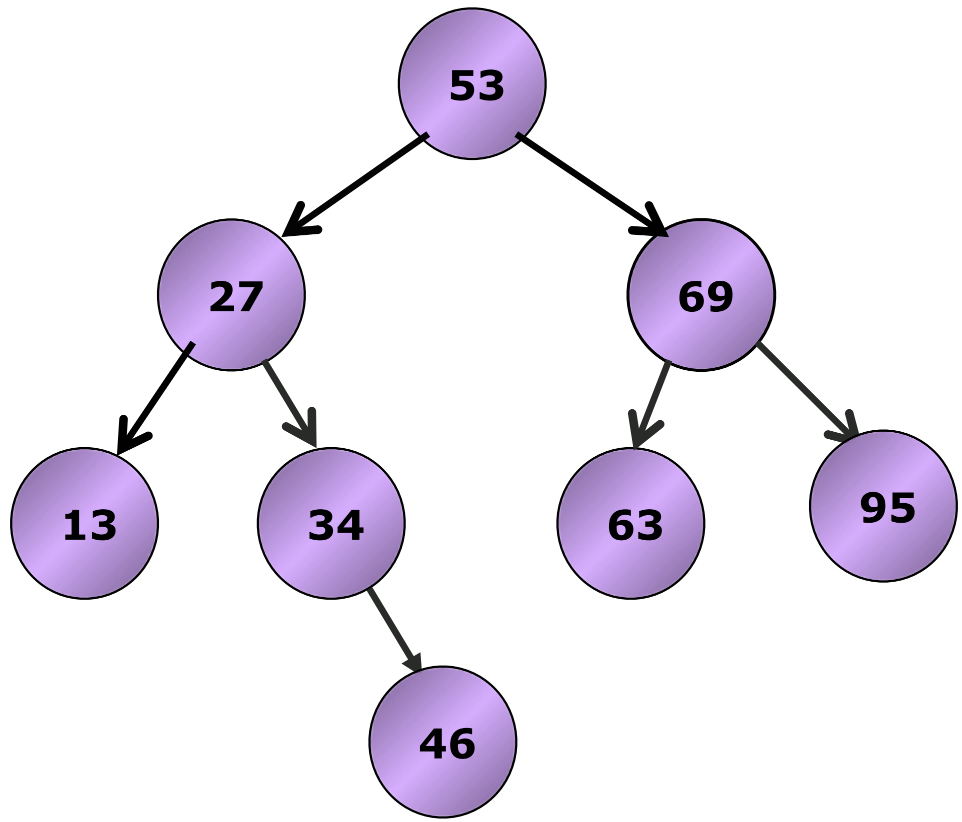


© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Binäre Suchbäume

Binäre Suchbäume sind sortierte Binärbäume, d.h. die gespeicherten Elemente im Baum werden nach bestimmten Regeln einsortiert.

Beispiel:



© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Eigenschaften von Binär-Bäumen

Rekursive Definitionen:

Anzahl der inneren Knoten

$$|t| = |t_l| + |t_r| + 1$$

Höhe des Baumes

$$h(t) = 1 + \max(h(t_l), h(t_r))$$

Innere Pfadlänge des Baumes
(Summe der Tiefen aller inneren Knoten)

$$\pi(t) = \pi(t_l) + \pi(t_r) + |t| - 1$$

© 2009-2020 Prof. M. Esponda

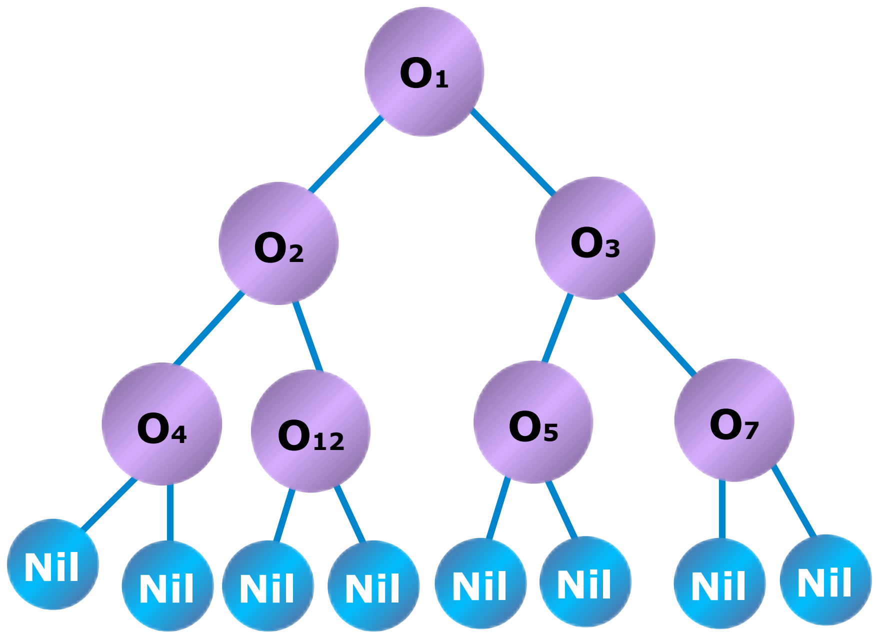
Eigenschaften von Binär-Bäumen

Rekursive Definitionen:

$$|t| = |t_l| + |t_r| + 1 \qquad = 3 + 3 + 1 = 7$$

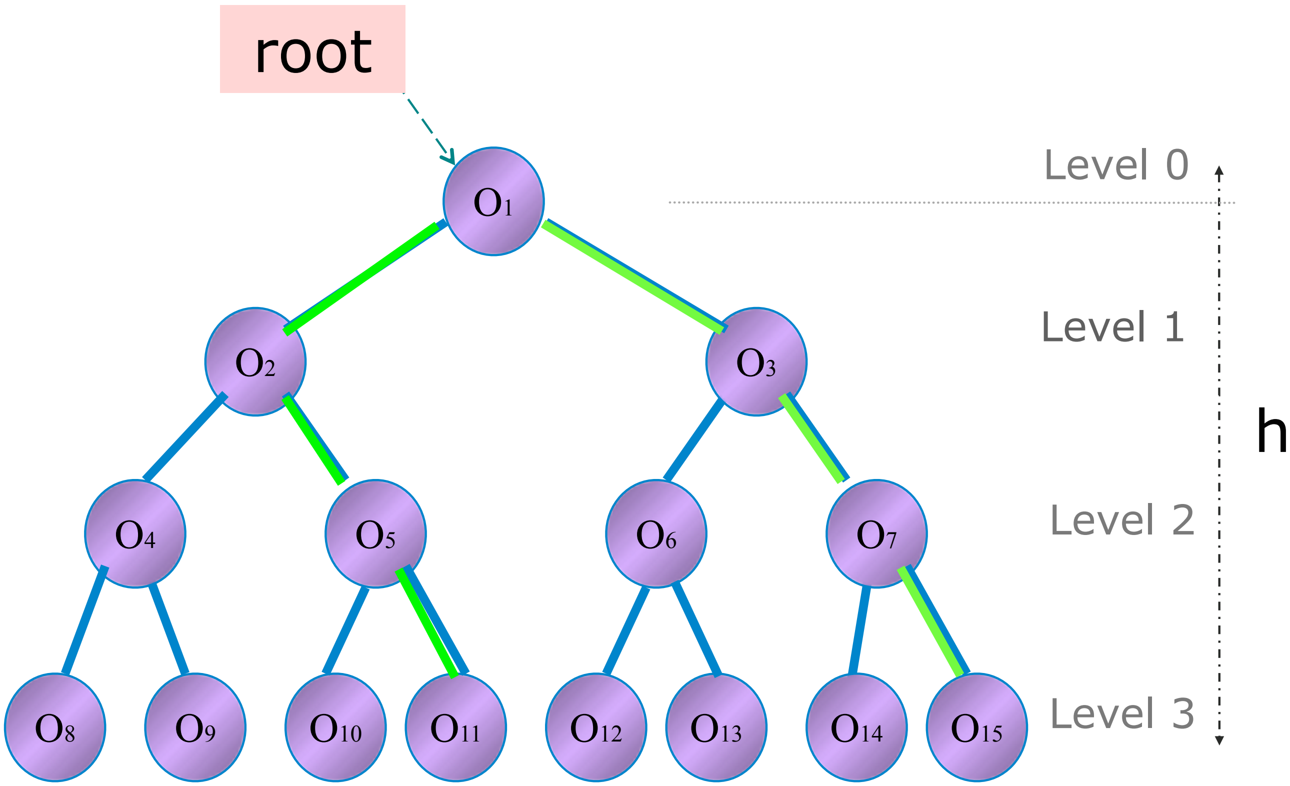
$$h(t) = 1 + \max(h(t_l), h(t_r)) \qquad = 2$$

$$\pi(t) = \pi(t_l) + \pi(t_r) + |t| - 1 \qquad = 10$$



© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Balancierter Binärbaum



$1 = 2^0$

$2 = 2^1$

$2 \cdot 2 = 2^2$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

Wenn $h = 3$ dann $n = 2^4 - 1$

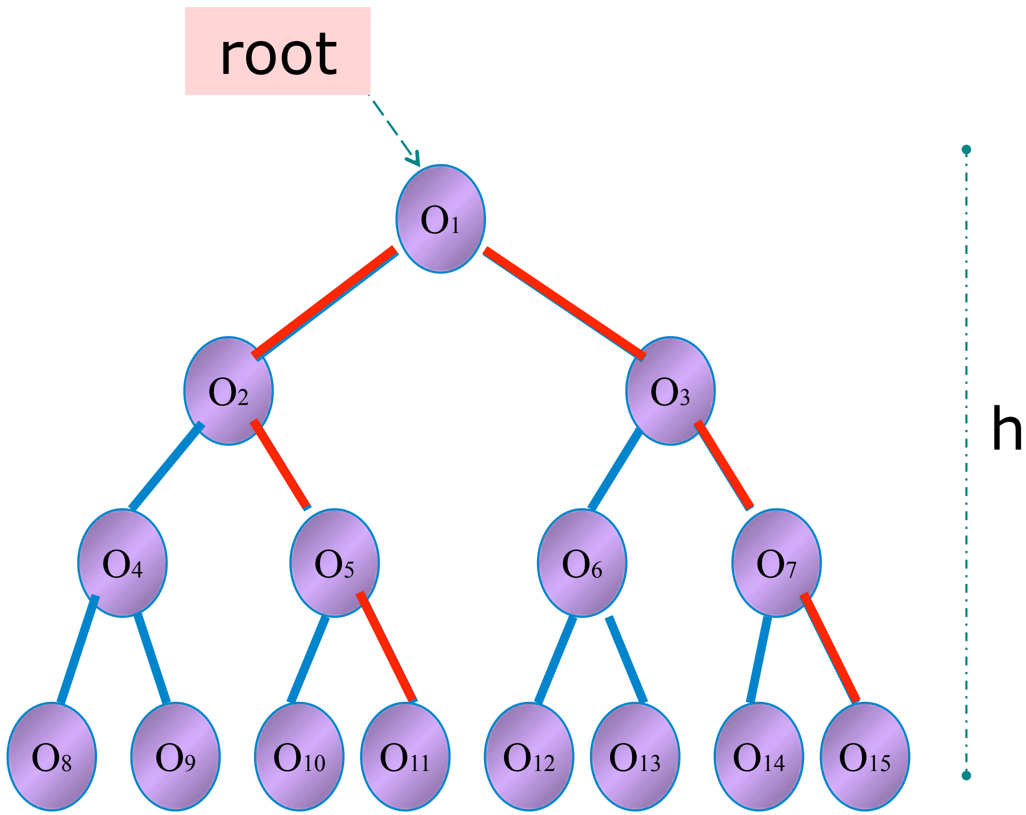
Maximale Anzahl von Objekten, die gespeichert werden können

© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Vollständige Binärbäume

Ein vollständiger binärer Baum hat $2^h - 1$ innere Knoten und 2^h Blätter

Mit **h** = Tiefe des Baumes



$$\mathbf{n = 2^{h+1} - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{n + 1 = 2^{h+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{\log_2(n+1) = \log_2(2^{h+1})}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{\log_2(n+1) = h+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{h = \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1}}$$

© 2009-2020 Prof. M. Esponda

Freie Universität Berlin

Suchen (Bäume vs. Listen)

Ein vollständiger binärer Baum hat $2^h - 1$ innere Knoten und 2^h Blätter

$$n = 2^{h+1} - 1$$

$$\Downarrow$$

$$n + 1 = 2^{h+1}$$

$$\Downarrow$$

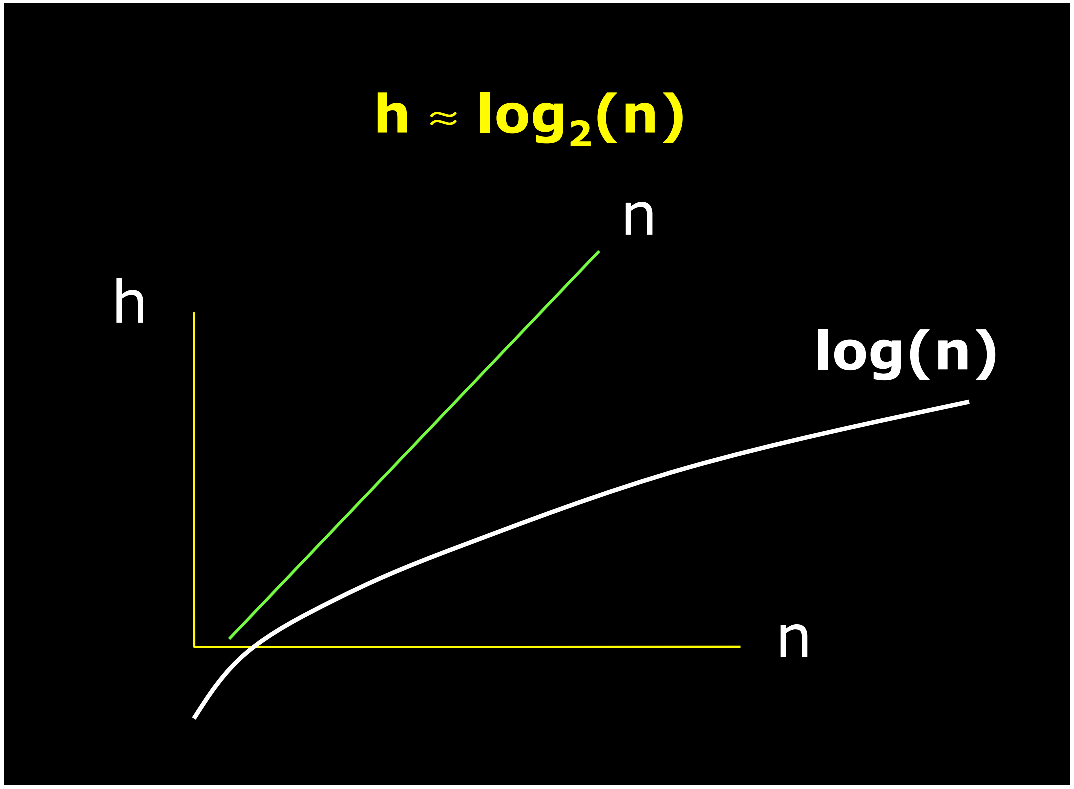
$$\log_2(n+1) = \log_2(2^{h+1})$$

$$\Downarrow$$

$$\log_2(n+1) = h+1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h = \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1}$$



© 2009-2020 Prof. M. Esponda