

Рассмотрим процесс построения кучи за  $O(n \log n)$ .

Для каждого элемента из списка, будем вставлять его в конец кучи и просеивать вверх. В худшем случае для каждого нового элемента выполняем  $h$  итераций, где  $h$  - текущая высота кучи.  $h = \log_2(n)$ , где  $n$  - количество элементов. Тогда общая сложность построения кучи будет  $\sum_{i=1}^n \log_2(i) = \log_2(n!)$ . По формуле Стирлинга  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , тогда  $\log_2(n!) \approx n \log_2(n) - n \log_2(e) + \frac{1}{2} \log_2(2\pi n)$ . Таким образом, сложность  $O(n \log n)$ .

В случае *inplace* построения кучи тоже самое, но  $h$  не высота дерева, а уровень текущего элемента.

Процесс построения кучи за  $O(n)$ .

Для каждого элемента начиная с предпоследнего уровня и до корня будем просеивать его вниз.

Максимальное количество итераций для элемента на уровне  $h$  равно  $\log_2(n) - h$ . Количество элементов на уровне  $h$  равно  $2^h$ . Тогда общее количество операций:  $\sum_{h=0}^{\log_2(n)} 2^h (\log_2(n) - h)$ . Пусть  $k = \log_2(n) - h$ , тогда  $h = \log_2(n) - k$ , и сумма превращается в:  $\sum_{k=0}^{\log_2(n)} 2^{\log_2(n)-k} k = n \sum_{k=0}^{\log_2(n)} \frac{k}{2^k}$ .  
 $n \sum_{k=0}^{\log_2(n)} \frac{k}{2^k} < n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$ , поскольку  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ ,  $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ , теперь пусть  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$ .

Тогда общее количество операций в данном методе меньше чем  $2n$  и сложность алгоритма  $O(n)$ .