

Рассмотрим процесс построения кучи за $O(n \log n)$.

Для каждого элемента из списка, будем вставлять его в конец кучи и просеивать вверх. В худшем случае для каждого нового элемента выполняем h итераций, где h - текущая высота кучи. $h = \log_2(n)$, где n - количество элементов. Тогда общая сложность построения кучи будет $\sum_{i=1}^n \log_2(i) = \log_2(n!)$. По формуле Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, тогда $\log_2(n!) \approx n \log_2(n) - n \log_2(e) + \frac{1}{2} \log_2(2\pi n)$. Таким образом, сложность $O(n \log n)$.

В случае inplace построения кучи тоже самое, но h не высота дерева, а уровень текущего элемента.

Процесс построения кучи за $O(n)$.

Для каждого элемента начиная с предпоследнего уровня и до корня будем просеивать его вниз.

Максимальное количество итераций для элемента на уровне h равно $\log_2(n) - h$. Количество элементов на уровне h равно 2^h . Тогда общее количество операций: $\sum_{h=0}^{\log_2(n)} 2^h (\log_2(n) - h)$. Пусть $k = \log_2(n) - h$, тогда $h = \log_2(n) - k$, и сумма превращается в: $\sum_{k=0}^{\log_2(n)} 2^{\log_2(n)-k} k = n \sum_{k=0}^{\log_2(n)} \frac{k}{2^k}$.
 $n \sum_{k=0}^{\log_2(n)} \frac{k}{2^k} < n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2$, поскольку $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$, теперь пусть $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$.

Тогда общее количество операций в данном методе меньше чем $2n$ и сложность алгоритма $O(n)$.