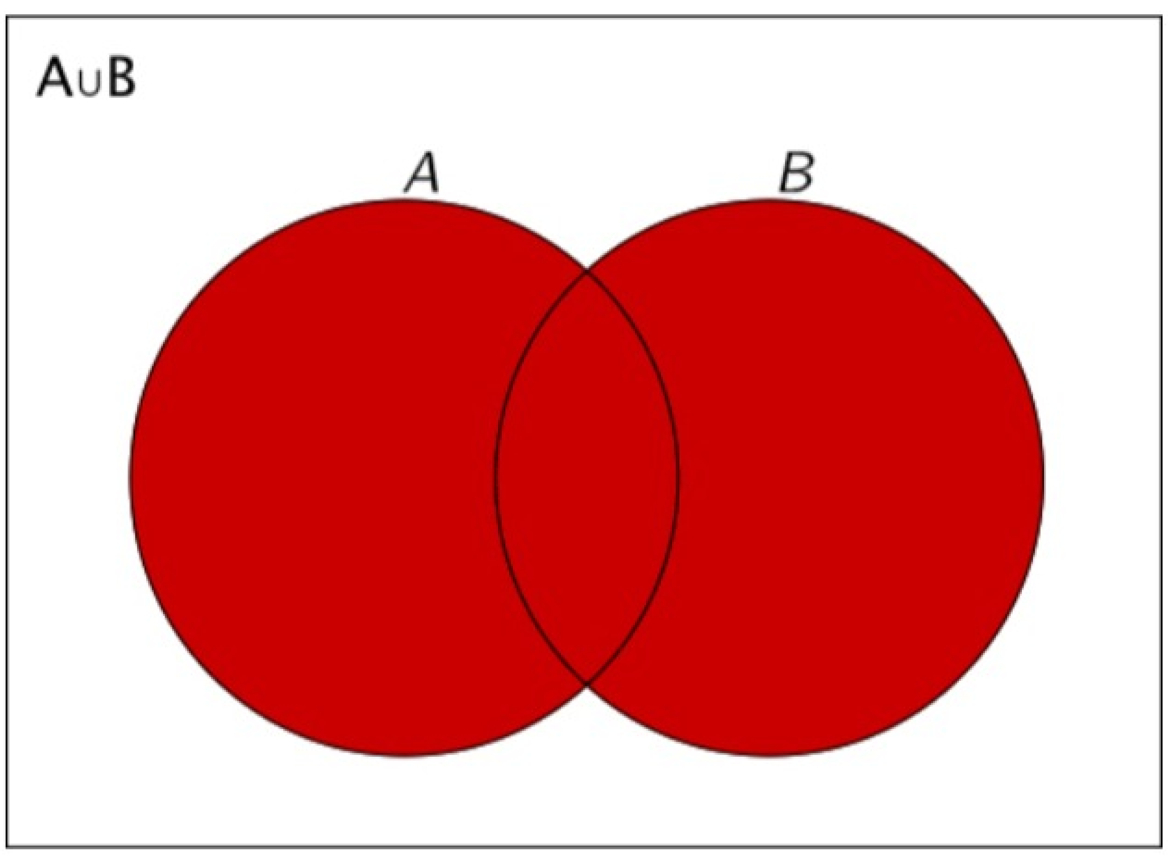
Műveletek halmazokkal

Kulcsszavak: halmazok úniója, halmazok metszete, halmazok különbsége, halmazok szimetrikus különbsége, részhalmaz, kiegészítő komplementer halmaz

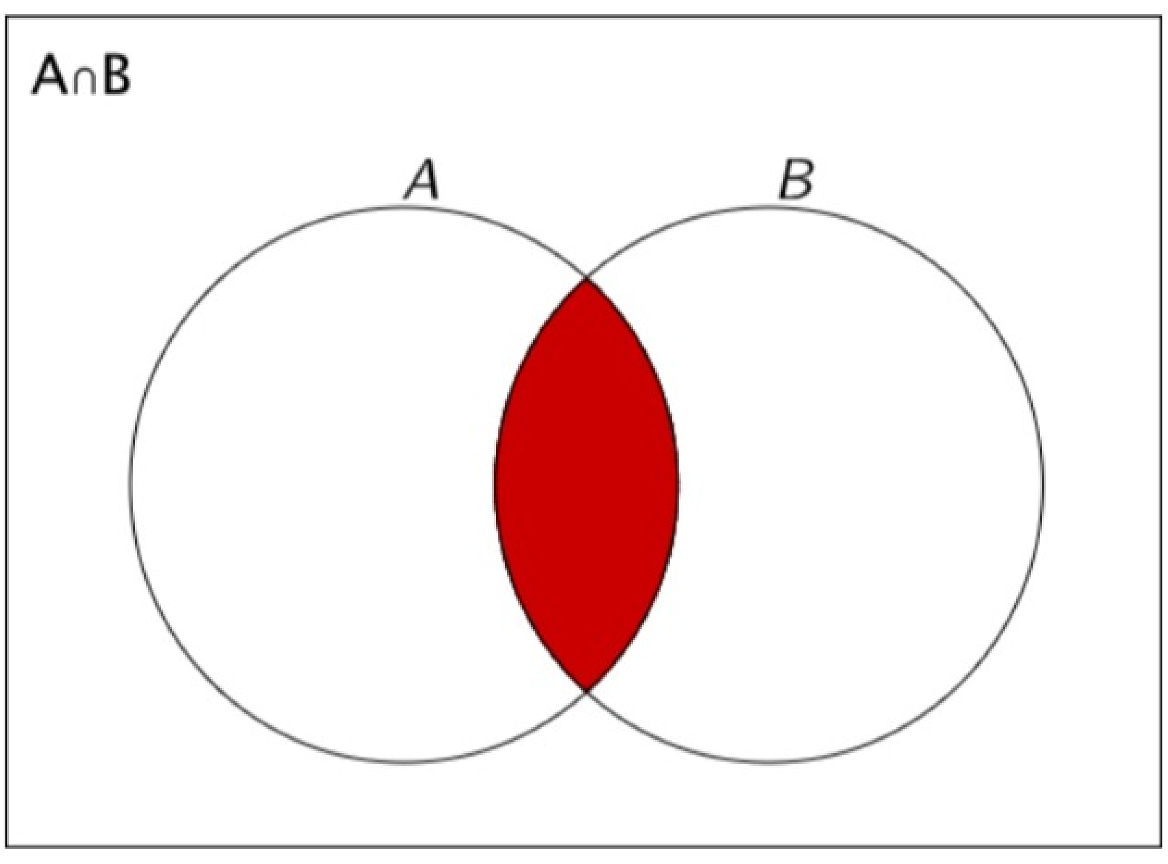
Halmazok úniója

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



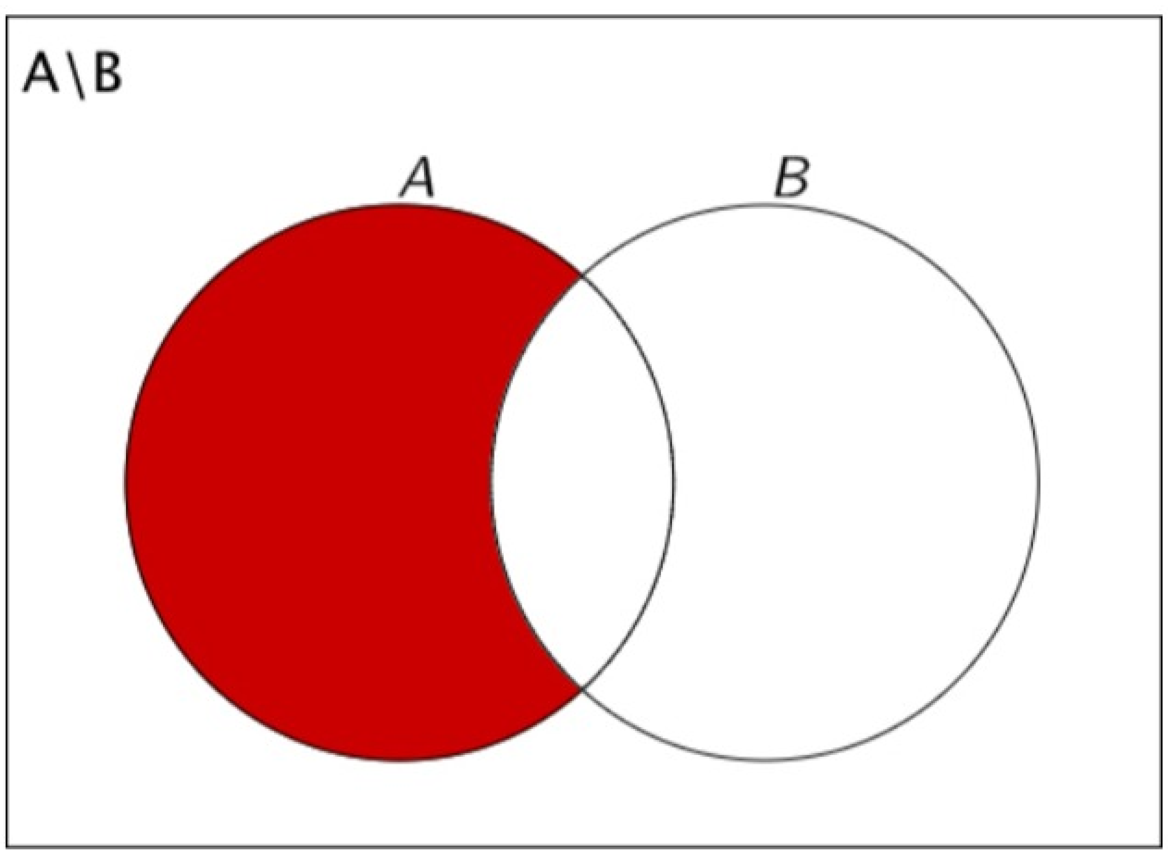
Halmazok metszete

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



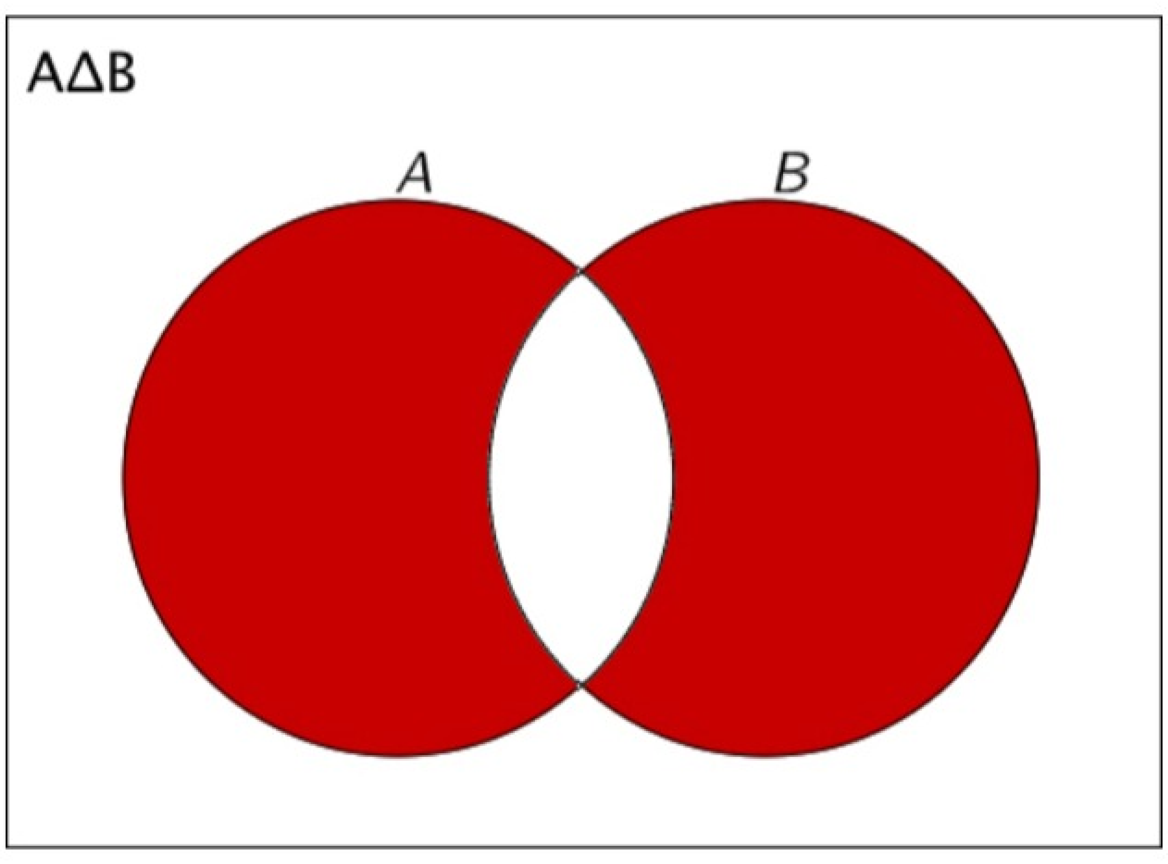
Halmazok különbsége

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



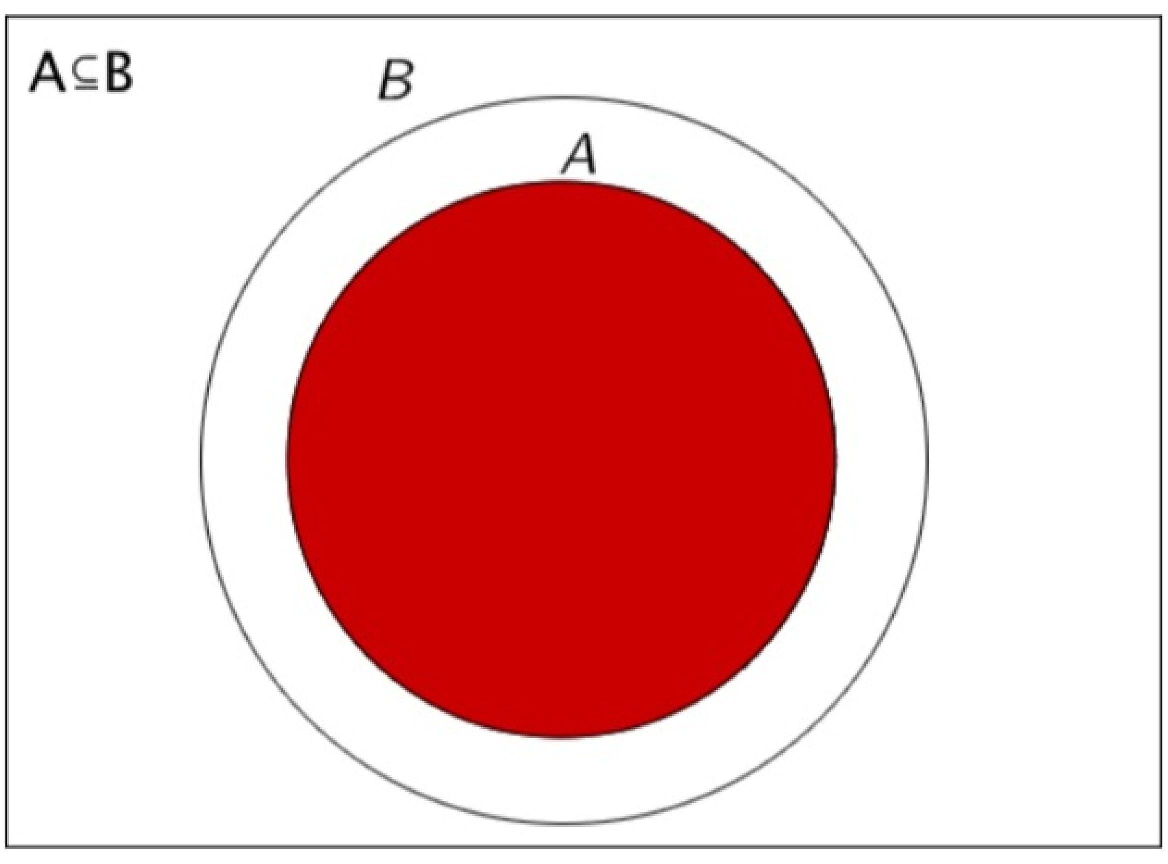
Halmazok szimetrikus különbsége

$$A \Delta B = \{A \setminus B\} \cup \{B \setminus A\}$$



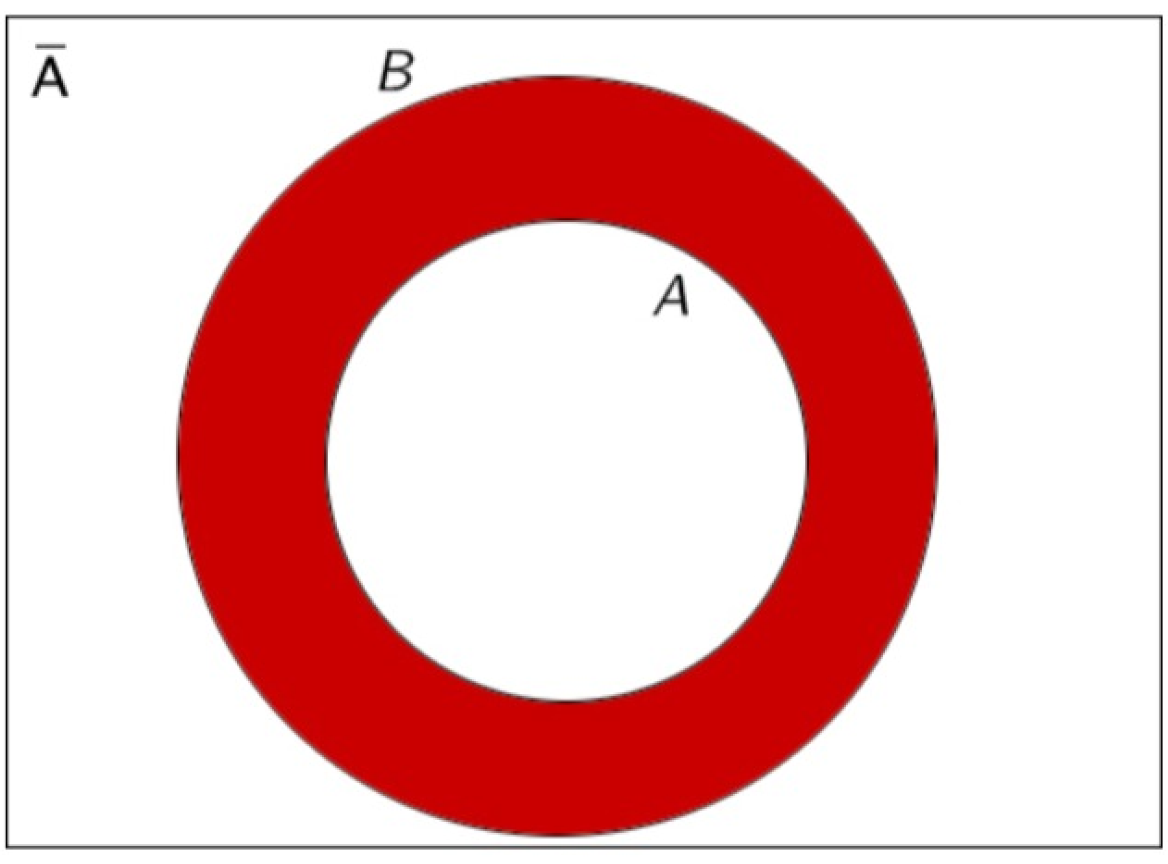
Halmazok részhalmaza

$$A \subseteq B$$



Részhalmaz kiegészítő (komplementer) halmaza

$$\bar{A} = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$$



Halmazműveletek azonosságai

Kulcsszavak:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\bar{\emptyset} = \Omega$$

$$\overline{\Omega} = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cap \emptyset = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Kommutativitás

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Asszociativitás

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Disztributivitás

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

Adjunktivitás
(abszorpciós szabály)

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

Idempotencia

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

De Morgan-szabályok

Logikai szita formula

Kulcsszavak:

Szita formula két halmaz esetén

$$A, B \subseteq \Omega$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\Omega \setminus (A \cup B)| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

Szita formula három halmaz esetén

$$A, B, C \subseteq \Omega$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|\Omega \setminus (A \cup B \cup C)| = |\Omega| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Descartes-szorzat

Kulcsszavak: halmazok, Descartes-szorzat, Descartes-négyzet

Descartes-szorzat

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$$

Az a halmaz, mely azokat az **(a,b)** rendezett elempárokat tartalmazza, amiknek az első **a** komponense az **A**-halmaznak, második **b** komponense pedig a második **B** halmaznak eleme.

Példa:

$$A = \{1, 3, 6\},\ B = \{x, y\}\ \Rightarrow AxB = \{(1, x), (1, y), (3, x), (3, y), (6, x), (6, y)\}$$

Descartes-négyzet

$$A^2 = AxA = \{(a, b) :\ a \in A,\ b \in B\}$$

Az a halmaz, mely azon **(a,b)** rendezett elempárokból áll, amiknek mindkét komponense **a** és **b** is az **A** halmaz eleme.

Példa:

$$A = \{1, 3, 6\} \Rightarrow AxA = \{(1, 1), (1, 3), (1, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 6)\}$$

Descartes-szorzat tulajdonságai

$$|A| = m,\ |B| = n\ \Rightarrow |AxB| = m \cdot n$$

$$A = \emptyset\ \vee B = \emptyset\ \Rightarrow AxB = \emptyset$$

Relációk és azok tulajdonságai

Kulcsszavak: reláció, refelxiv, tranzitív, szimetrikus, aszimetrikus, ekvivalencia, részbenrendezés, dichotóm, rendezés

Definíció

$$A^2 = A \times A = \{(a,b) : a \in A, b \in A\}$$

$$\rho \subseteq A^2$$

Rendezett párok halmazát, amelyet az **AxA** Descartes-négyzet részhalmazaként kapunk **ρ** relációknak nevezzük.

Példa:

$$A = \{1,3,6\}$$

$$AxA = \{(1,1),(1,3),(1,6),(3,1),(3,3),(3,6),(6,1),(6,3),(6,6)\}$$

$$\rho = \Big\{(1,1),(1,3),(1,6),(3,3),(3,6),(6,6)\Big\}\Big|\rho \subseteq A^2,$$

A **ρ** ebben az esetben a kissebb vagy egyenlő **≤** relációnak felel meg: (1≤1), (1≤3), (1≤6), (3≤3), (3≤6), (6≤6).

Relációk tulajdonságai

Reflexív

$$(a \in A) : a\rho a$$

IRÁNYÍTOTT GRÁFKÉNT ÁBRÁZOLVA: a gráf minden pontjában van hurokél.

Példa:ρ **reflexív**, mert az A halmaz minden tagjára érvényes hogy

$$(1 \leq 1), (3 \leq 3), (6 \leq 6)$$

Szimetrikus

$$(a, b \in A) : a\rho b \Rightarrow b\rho a$$

IRÁNYÍTOTT GRÁFKÉNT ÁBRÁZOLVA: ha a gráf minden éle kétirányú.

Példa:ρ **nem szimetrikus**, mert például abból hogy 3 ≤ 6 [azaz (3, 6) ∊ ρ], nem következik, hogy 6 ≤ 3 [azaz (6, 3) ∊ ρ].

Tranzitív

$$(a, b, c \in A) : a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$$

IRÁNYÍTOTT GRÁFKÉNT ÁBRÁZOLVA: ha létezik út két pont között, akkor létezik 1 hosszú út is közöttükl.

Példa:ρ **tranzitív**, mert például ha 1 ≤ 3 és 3 ≤ 6 akkor ebből az következik hogy 1 ≤ 6.

Antiszimetrikus

$$(a, b \in A) : a\rho b \Rightarrow b\rho a$$

IRÁNYÍTOTT GRÁFKÉNT ÁBRÁZOLVA: ha bármely két különböző pont között 0 vagy 1 irányban megy él.

Példa:ρ **antiszimetrikus**, mert minden szám csak önmagánál kisebb vagy egyenlő.

Relációk tipusai

- **Ekvivalenciareláció:** reflexív, szimetrikus és tranzitív
- **Részbenrendezés:** reflexív, antiszimetrikus és tranzitív
- **Dichotóm:** ha bármely a, b ∊ A-ra teljesül, hogy (a, b) ∊ ρ vagy (b, a) ∊ ρ
  IRÁNYÍTOTT GRÁFKÉNT ÁBRÁZOLVA:a gráf bármely két pontja között megy él.
- **Rendezés:**, részbenrendezés és dichotóm