Események, műveletek eseményekkel, teljes eseményrendszer

Kulcsszavak:

Események

Az Ω-val jelölt eseménytér részhalmazait eseményeknek nevezzük (A)

$$\Omega,\ A$$

Lehetetlen esemény

$$\emptyset$$

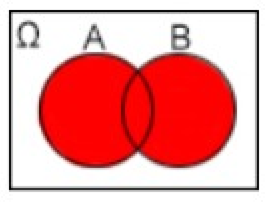
Biztos esemény

$$\Omega$$

Műveletek eseményekkel

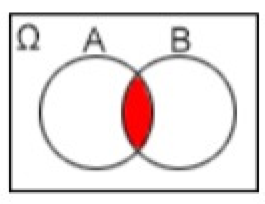
Az az esemény, amely akkor és csak akkor következik be, amikor az A és B események legalább egyike bekövetkezik.

$$A \cup B = A + B$$



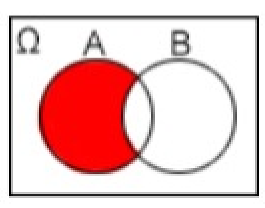
Az az esemény, amely akkor és csak akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik.

$$A \cap B = A \cdot B$$



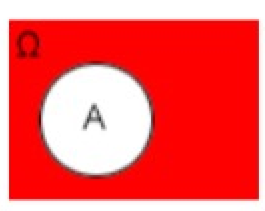
Az az esemény, amely akkor és csak akkor következik be, amikor az A bekövetkezik de B nem.

$$A \setminus B$$



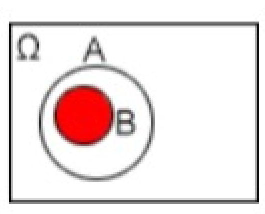
Az az esemény, amely akkor és csak akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be.

$$\overline{A}$$

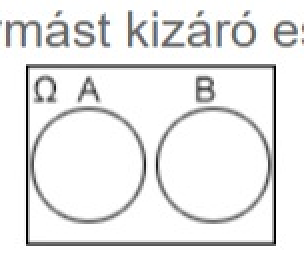


B esemény maga után vonja A eseményt

$$B \subset A$$



A és B egymást kizáró események.



Teljes eseményrendszer

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = \Omega$$

Két esemény nem történhet meg egyidejűleg.

$$A_i \cdot A_j = \emptyset,\ \forall\,(i \neq j)$$

Események valószínűsége

Kulcsszavak: események valószínűsége, biztos esemény, lehetetlen esemény, független események

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

|A| - kedvező események száma

|Ω| - összes lehetséges esemény száma

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Lehetetlen esemény valószínűsége

$$P(\emptyset) = 0$$

Biztos esemény valószínűsége

$$P(\Omega) = 1$$

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

A és B események függetlensége esetén

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Feltételes valószínűség

Kulcsszavak:

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}\ ;\ P\left(B\right)\neq 0$$

Amennyiben A esemény független B eseménytől:

$$P\left(A|B\right)=P\left(A\right)\ \Rightarrow\ P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)$$

Teljes valószínűség tétele

Kulcsszavak:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

illetve

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

ahol

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$$

teljes eseményrendszert alkot.

Bayes-Tétel

Kulcsszavak:

$$P\left(B_i|A\right) = \frac{P\left(A|B_i\right) \cdot P\left(B_i\right)}{P\left(A\right)}$$

illetve

$$P\left(B_i|A\right) = \frac{P\left(A|B_i\right) \cdot P\left(B_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(A|B_i\right) \cdot P\left(B_i\right)}$$

illetve

$$P\left(B_i|A\right) = \frac{P\left(A|B_i\right) \cdot P\left(B_i\right)}{P\left(A|B_1\right) \cdot P\left(B_1\right) + P\left(A|B_2\right) \cdot P\left(B_2\right) + \ldots + P\left(A|B_n\right) \cdot P\left(B_n\right)}$$

ahol

$$\sum_{i=1}^{n} B_i = B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$$

teljes eseményrendszert alkot.

Amenyiben i=1

$$P\left(B|A\right) = \frac{P\left(A|B\right) \cdot P\left(B\right)}{P\left(A\right)}\ ;\ i = 1,\ B_1 = B$$

Diszkrét valószínűségi változó - Eloszlásfüggvény

Kulcsszavak: diszkrét valószínűségi változó, eloszlásfüggvény

Valószínűségi változó ξ

Ha az eseménytér elemeihez egy-egy számértéket rendelünk, az így kapott véletlentől (véletlen elemi eseményektől) függő változót valószínűségi változónak (véletlen, sztochasztikus változónak) nevezzük.

Példa : Dobáljunk fel két kockát! Adjuk össze a dobott számokat!
Eseménytér:
lehetséges kimenetelek, összesen 6x6=36:
{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),
(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
Valszínűségi változó ξ:
a kockapár által dobott számok összege, melynek lehetséges értékei:
ξ ϵ{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

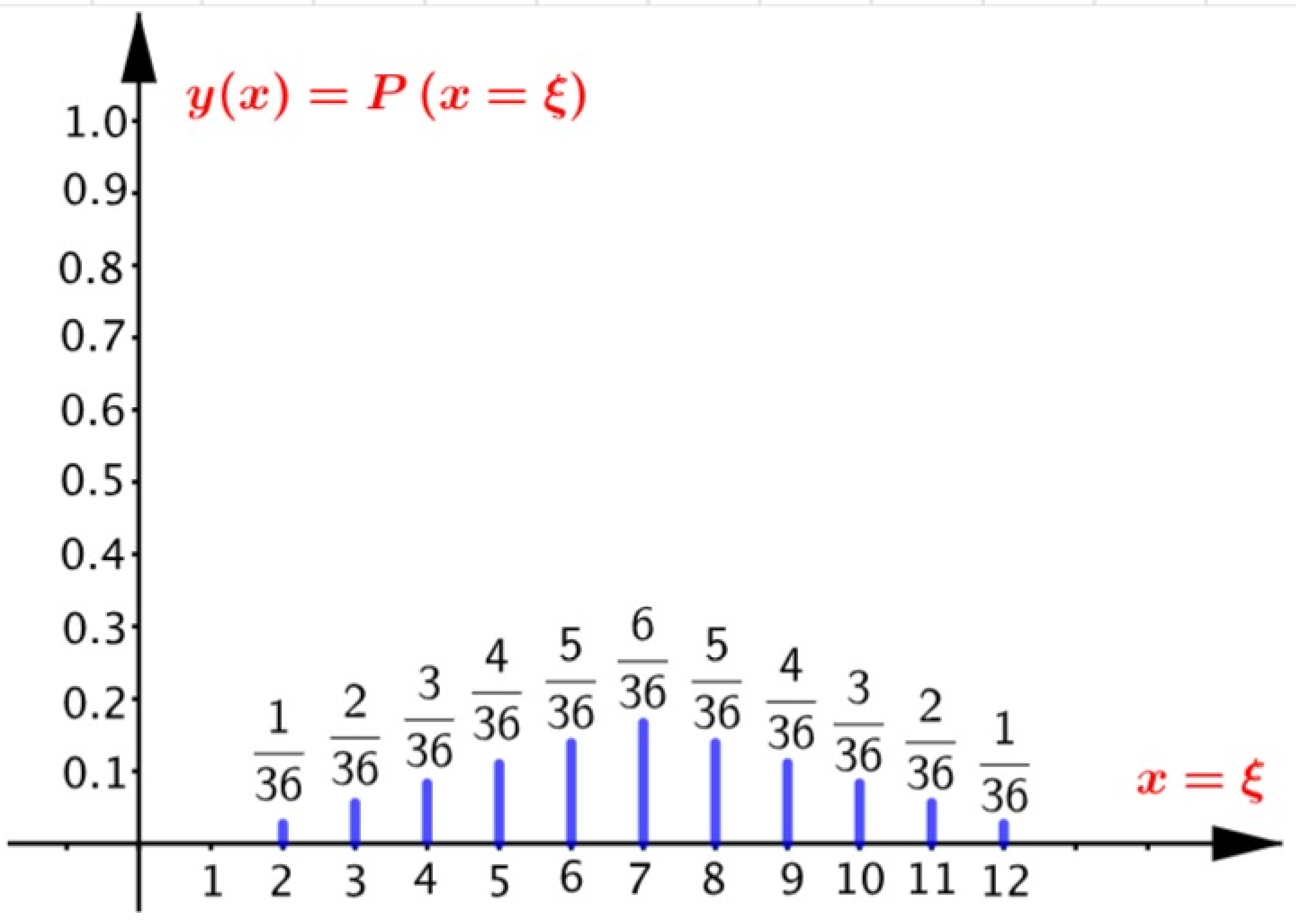
Eloszlásfüggvény

Egy valószínűségi változó **ξ** eloszlásfüggvényének nevezzük azt a F(x) függvényt, amely minden valós x értékhez hozzárendeli annak valószínűségét, hogy az valószínűségi változó **ξ** milyen valószínűséggel vesz fel x-nél kisebb értékeket:

$$F(x) = P(\xi < x)$$

A valószínűségi változó ξ értékeinkek megfelelő események:
ξ=2: {(1,1)}, összesen 1 eset
ξ=3: {(1,2),(2,1)}, összesen 2 eset
ξ=4: {(1,3),(3,1),(2,2)}, összesen 3 eset
ξ=5: {(1,4),(4,1),(2,3),(2,3)}, összesen 4 eset
ξ=6: {(1,5),(5,1),(2,4),(4,2), (3,3)}, összesen 5 eset
ξ=7: {(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)}, összesen 6 eset
ξ=8: {(2,6),(6,2),(3,5),(5,3), (4,4)}, összesen 5 eset
ξ=9: {(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)}, összesen 4 eset
ξ=10: {(4,6),(6,4),(5,5)}, összesen 3 eset
ξ=11: {(5,6),(6,5)}, összesen 2 eset
ξ=12: {(6,6)}, összesen 1 eset

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(ξ)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



Az eloszlásfüggvény **F(x)** nagysága **x** különféle értékeire:

$$F(x=1) = P(\xi < 1) = 0$$

$$F(x=2) = P(\xi < 2) = 0$$

$$F\left(x=3\right) = P\left(\xi < 3\right) = \frac{1}{36} = 0.03$$

$$F\left(x=4\right) = P\left(\xi < 4\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} = 0.08$$

$$F\left(x=5\right) = P\left(\xi < 5\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = 0.17$$

$$F\left(x=6\right) = P\left(\xi < 6\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} = 0.28$$

$$F\left(x=7\right) = P\left(\xi < 7\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36} = 0.42$$

$$F\left(x=8\right) = P\left(\xi < 8\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36} = 0.58$$

$$F\left(x=9\right) = P\left(\xi < 9\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{26}{36} = 0.72$$

$$F\left(x=10\right) = P\left(\xi < 10\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{30}{36} = 0.83$$

$$F\left(x=11\right) = P\left(\xi < 11\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = 0.92$$

$$F\left(x=12\right) = P\left(\xi < 12\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{35}{36} = 0.97$$

$$F\left(x=13\right) = P\left(\xi < 13\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F(x)	0	0	0.03	0.08	0.17	0.28	0.42	0.58	0.72	0.83	0.92	0.97	1