Логика высших порядков

P является биекцией из A в B

$$\forall x \forall y \forall z\ P(x, y) \wedge P(x, z) \rightarrow Eq(y, z)$$

$$\forall x \exists y\ A(x) \wedge B(y) \wedge P(x, y)$$

$$\forall y \exists x\ A(x) \wedge B(y) \wedge P(x, y)$$

$$\forall x \forall y\ \forall z P(x, z) \wedge P(y, z) \rightarrow Eq(x, y)$$

Логика высших порядков

P является биекцией из A в B

$$\forall x \forall y \forall z \; P(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow Eq(y,z)$$

$$\forall x \exists y \; A(x) \wedge B(y) \wedge P(x,y)$$

$$\forall y \exists x \; A(x) \wedge B(y) \wedge P(x,y)$$

$$\forall x \forall y \; \forall z P(x,z) \wedge P(y,z) \rightarrow Eq(x,y)$$

Равномощность A и B:

$$\exists P \, [\forall x \forall y \forall z \; P(x,y) \wedge P(x,z) \rightarrow Eq(y,z)] \wedge \ldots$$

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$
- Предположим, что $\forall x \neg P(x)$

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$
- Предположим, что $\forall x \neg P(x)$
- Придем к противоречию

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$
- Предположим, что $\forall x \neg P(x)$
- Придем к противоречию
- Следовательно, $\exists x P(x)$

Принцип доказательства от противного

- Необходимо доказать, что $\exists x P(x)$
- Предположим, что $\forall x \neg P(x)$
- Придем к противоречию
- Следовательно, $\exists x P(x)$

Но чему равен x?

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	Принцип объективности знания	$KA \to A$
A2	Дистрибутивность знания и конъюнкции	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	Принцип познаваемости мира	$A \to \diamond KA$

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	Принцип объективности знания	$KA \to A$
A2	Дистрибутивность знания и конъюнкции	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	Принцип познаваемости мира	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	Принцип объективности знания	$KA \to A$
A2	Дистрибутивность знания и конъюнкции	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	Принцип познаваемости мира	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$
- По A3, $\diamond K(A \wedge \neg KA)$

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	Принцип объективности знания	$KA \to A$
A2	Дистрибутивность знания и конъюнкции	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	Принцип познаваемости мира	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$
- По A3, $\diamond K(A \wedge \neg KA)$
- По A2, $\diamond(KA \wedge K(\neg KA))$

Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	Принцип объективности знания	$KA \to A$
A2	Дистрибутивность знания и конъюнкции	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	Принцип познаваемости мира	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$
- По A3, $\diamond K(A \wedge \neg KA)$
- По A2, $\diamond(KA \wedge K(\neg KA))$
- По A1, $\diamond(KA \wedge \neg KA)$

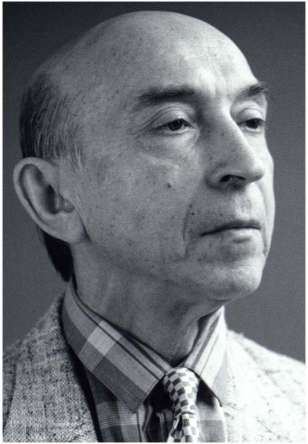
Модальная логика

Модальные операторы:

- KA – известно
- $\diamond A$ – A возможно

A1	Принцип объективности знания	$KA \to A$
A2	Дистрибутивность знания и конъюнкции	$K(A \wedge B) \to KA \wedge KB$
A3	Принцип познаваемости мира	$A \to \diamond KA$

- Предположим, $A \wedge \neg KA$
- По A3, $\diamond K(A \wedge \neg KA)$
- По A2, $\diamond(KA \wedge K(\neg KA))$
- По A1, $\diamond(KA \wedge \neg KA)$
- Противоречие. Все уже познано.



Lotfi Zadeh
Fuzzy sets (1965)

Нечеткие логические связки

$$x, y \in \{0, 1\}$$

Нечеткие логические связки

$$x, y \in \{0, 1\} \qquad\qquad u, v \in [0, 1]$$

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$ $\qquad$ $u, v \in [0, 1]$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

$u, v \in [0, 1]$

$\neg u = (1 - u)$

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

$u, v \in [0, 1]$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

$\neg u = (1 - u)$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Нечеткие логические связки

$x, y \in \{0, 1\}$

x	$\neg x = \overline{x}$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$u, v \in [0, 1]$

$$\neg u = (1 - u)$$

$$u \widetilde{\wedge} v = \min(u, v)$$
$$u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$
$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \min(u, v) = \min(u, v)$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \min(u, v) = \min(u, v)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w)$$

Нечеткие логические связки

$$
\begin{aligned}
&x \vee y && u \widetilde{\vee} v = \max(u, v) \\
&x \wedge y && u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v) \\
&x \vee y = y \vee x && \max(u, v) = \max(v, u) \\
&x \wedge y = y \wedge x && \min(u, v) = \min(u, v) \\
&x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z && \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w) \\
&x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z && \min(u, \min(v, w)) = \min(\min(u, v), w)
\end{aligned}
$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \min(u, v) = \min(u, v)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w)$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad \min(u, \min(v, w)) = \min(\min(u, v), w)$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad 1 - \max(u, v) = \min(1 - u, 1 - v)$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = \max(u, v)$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = \max(u, v)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \max(u, v) = \max(v, u)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \min(u, v) = \min(u, v)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \max(u, \max(v, w)) = \max(\max(u, v), w)$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad \min(u, \min(v, w)) = \min(\min(u, v), w)$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad 1 - \max(u, v) = \min(1 - u, 1 - v)$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} \qquad 1 - \min(u, v) = \max(1 - u, 1 - v)$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \mathbin{\widetilde{\vee}} v = u + v - uv$$
$$x \wedge y \qquad u \mathbin{\widetilde{\wedge}} v = uv$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad\qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad\qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad\qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad\qquad uv = vu$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} &u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ &= u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \tilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \tilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} &u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ &= u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad u(vw) = (uv)w$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) &= \\ = u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad u(vw) = (uv)w$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad \begin{aligned} 1 - (u + v - vw) = 1 - u - v + vw &= \\ = (1 - u)(1 - v) \end{aligned}$$

Нечеткие логические связки

$$x \vee y \qquad u \widetilde{\vee} v = u + v - uv$$

$$x \wedge y \qquad u \widetilde{\wedge} v = uv$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad u + v - uv = v + u - vu$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad uv = vu$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \begin{aligned} &u + (v + w - vw) - u(v + u - vw) = \\ &= u + v + w - uv - uw - vw + uvw \end{aligned}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad u(vw) = (uv)w$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \qquad \begin{aligned} &1 - (u + v - vw) = 1 - u - v + vw = \\ &= (1 - u)(1 - v) \end{aligned}$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} \qquad \begin{aligned} &(1 - u) + (1 - v) - (1 - u)(1 - v) = \\ &= 1 - u + 1 - v - 1 + u + v + uv = \\ &= 1 - uv \end{aligned}$$

Нормы и конормы

Функции $T, S : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ называют нормой и конормой, если они:

1. монотонны;
2. ассоциативны;
3. коммутативны;
4. связаны соотношениями де Моргана $1 - T(u,v) = S(1-u, 1-v)$ и $1 - S(u,y) = T(1-u, 1-v)$;
5. удовлетворяют граничным условиям $T(0,0) = T(0,1) = T(1,0) = 0$, $T(1,1) = 1$, $S(1,1) = S(0,1) = T(1,0) = 1$, $S(0,0) = 0$

Нечеткие множества

$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A$

$\mathbb{M},\ M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ m \widetilde{\in} M$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\;\; A \subset \mathbb{A},\;\; a \in A$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\}$$

$$\mathbb{M},\;\; M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\;\; m \widetilde{\in} M$$

$$(m, M) \xrightarrow{\widetilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\;\; \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A \qquad \mathbb{M},\ M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ m \widetilde{\in} M$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\} \qquad (m, M) \xrightarrow{\widetilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\ \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \qquad M = \left(\frac{\mu(m_1)}{m_1} + \frac{\mu(m_2)}{m_2} + \ldots + \frac{\mu(m_n)}{m_n}\right)$$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A \qquad \mathbb{M},\ M \tilde{\subset} \mathbb{M},\ m \tilde{\in} M$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\} \qquad (m, M) \xrightarrow{\tilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\ \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \qquad M = \left(\frac{\mu(m_1)}{m_1} + \frac{\mu(m_2)}{m_2} + \ldots + \frac{\mu(m_n)}{m_n}\right)$$

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall b\ (b \in B \to b \in A) \qquad N \tilde{\subset} M \Leftrightarrow \forall m\ \mu_N(m) \leq \mu_M(m)$$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\}$$

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall b\ (b \in B \to b \in A)$$

$$c \in A \cap B \Leftrightarrow c \in A \wedge c \in B$$

$$\mathbb{M},\ M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ m \widetilde{\in} M$$

$$(m, M) \xrightarrow{\widetilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\ \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

$$M = \left(\frac{\mu(m_1)}{m_1} + \frac{\mu(m_2)}{m_2} + \ldots + \frac{\mu(m_n)}{m_n} \right)$$

$$N \widetilde{\subset} M \Leftrightarrow \forall m\ \mu_N(m) \le \mu_M(m)$$

$$\mu_{M \widetilde{\cap} N}(m) = \mu_M(m) \widetilde{\wedge} \mu_N(m) = T(\mu_M(m), \mu_N(m))$$

Нечеткие множества

$$\mathbb{A},\ A \subset \mathbb{A},\ a \in A$$

$$\mathbb{M},\ M \tilde{\subset} \mathbb{M},\ m \tilde{\in} M$$

$$(a, A) \xrightarrow{\in} \{0, 1\}$$

$$(m, M) \xrightarrow{\tilde{\in}} [0, 1]$$

$$\mu_M(m),\ \mu_M : \mathbb{M} \to [0, 1]$$

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

$$M = \left(\frac{\mu(m_1)}{m_1} + \frac{\mu(m_2)}{m_2} + \ldots + \frac{\mu(m_n)}{m_n}\right)$$

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall b\ (b \in B \to b \in A)$$

$$N \tilde{\subset} M \Leftrightarrow \forall m\ \mu_N(m) \le \mu_M(m)$$

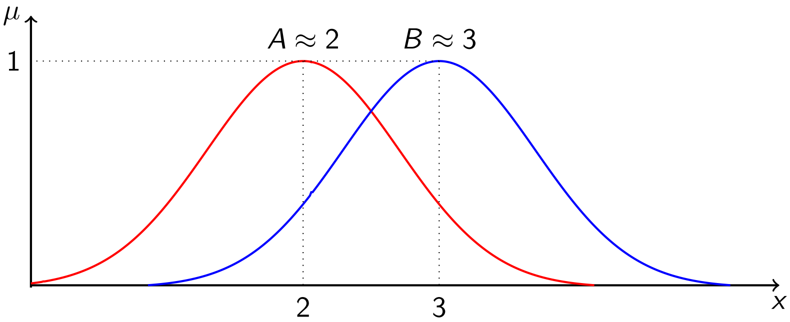
$$c \in A \cap B \Leftrightarrow c \in A \wedge c \in B$$

$$\mu_{M \tilde{\cap} N}(m) = \mu_M(m) \tilde{\wedge} \mu_N(m) = T(\mu_M(m), \mu_N(m))$$

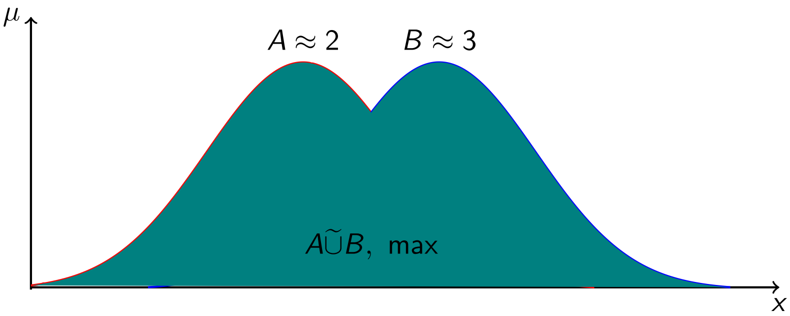
$$c \in A \cup B \Leftrightarrow c \in A \vee c \in B$$

$$\mu_{M \tilde{\cup} N}(m) = \mu_M(m) \tilde{\vee} \mu_N(m) = S(\mu_M(m), \mu_N(m))$$

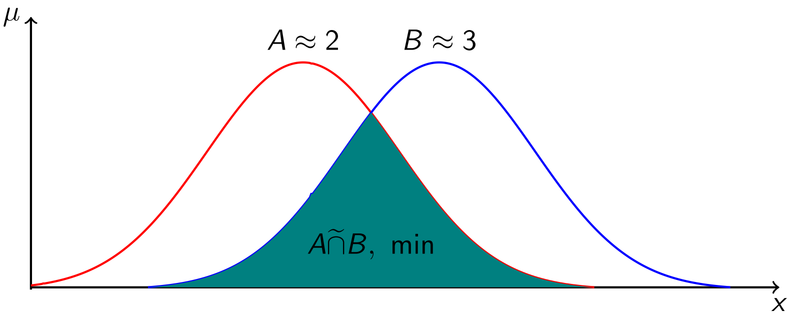
Объединение и пересечение



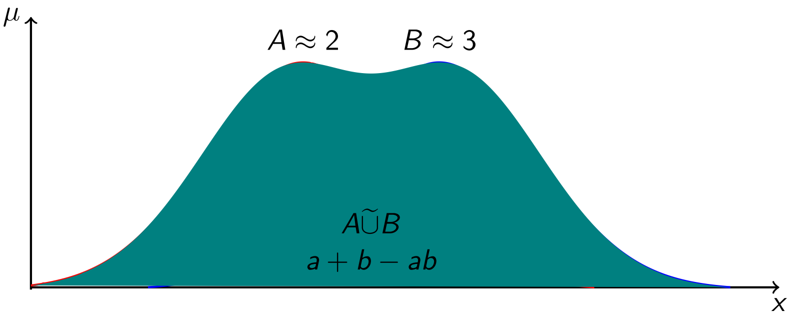
Объединение и пересечение



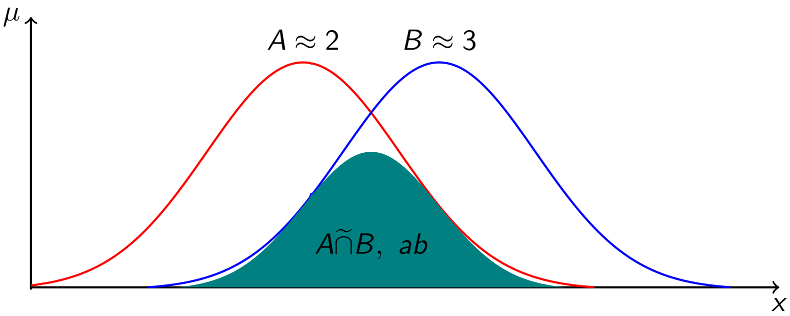
Объединение и пересечение



Объединение и пересечение



Объединение и пересечение



Отношения и отображения

$$A = \{a_1, a_2, a_3\},$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3\},$$
$$C = \{c_1, c_2\}$$

$$\rho \subset A \times B = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\sigma \subset B \times C = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 1 \end{array}$$

Отношения и отображения

$A = \{a_1, a_2, a_3\},$
$B = \{b_1, b_2, b_3\},$
$C = \{c_1, c_2\}$

$$\rho \subset A \times B = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\sigma \subset B \times C = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\rho(a) = \{b \ : \ (a, b) \in \rho\}$$

$\rho(a_1) = \{b_2\}$
$\rho(a_2) = \{b_1, b_3\}$
$\rho(a_3) = \emptyset$

$\sigma(b_1) = c_1$
$\sigma(b_2) = c_2$
$\sigma(b_3) = c_2$

$\rho \neq \rho : A \to B$
$\sigma = \sigma : B \to C$

Отношения и отображения

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$,
$B = \{b_1, b_2, b_3\}$,
$C = \{c_1, c_2\}$

$$\rho \subset A \times B = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\sigma \subset B \times C = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\sigma^{-1} = \{(c, b) \;:\; (b, c) \in \sigma\}$$

$$\sigma^{-1}(c_1) = b_1$$
$$\sigma^{-1}(c_2) = \{b_2, b_3\}$$

$$\rho^{-1}(b_1) = a_2$$
$$\rho^{-1}(b_2) = a_1$$
$$\rho^{-1}(b_3) = a_2$$

$$\rho^{-1} = \rho^{-1} : B \to A$$
$$\sigma^{-1} \neq \sigma^{-1} : C \to B$$

Отношения и отображения

$$A = \{a_1, a_2, a_3\},$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3\},$$
$$C = \{c_1, c_2\}$$

$$\rho \subset A \times B = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\sigma \subset B \times C = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\rho \circ \sigma = \{ \quad (a, c) \ : \ \exists b \ (a, b) \in \rho, \ (b, c) \in \sigma\}$$

$$\rho \circ \sigma = \begin{array}{c|cc} & c_1 & c_2 \\ \hline a_1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 0 \end{array}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A}, \ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A}, \;\; \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B} \;:\; \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \{\underbrace{b,\ \ a \in A \wedge (a, b) \in \rho}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}\}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a,b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \{\underbrace{b,\ \ a \in A \wedge (a,b) \in \rho}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}\}$$

$$b \in \rho(A/a) \Leftrightarrow a \in A\ \wedge\ (a,b) \in \rho$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A}, \;\; \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B} \;:\; \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \{\underbrace{b, \;\; a \in A \wedge (a, b) \in \rho}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}\}$$

$$b \in \rho(A/a) \Leftrightarrow a \in A \;\wedge\; (a, b) \in \rho$$

$$M \widetilde{\subset} \mathbb{M}, \;\; \sigma \widetilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\;\; \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B} \;:\; \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \{\underbrace{b,\;\; a \in A \wedge (a, b) \in \rho}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}\}$$

$$b \in \rho(A/a) \Leftrightarrow a \in A \;\wedge\; (a, b) \in \rho$$

$$M \tilde{\subset} \mathbb{M},\;\; \sigma \tilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$n \tilde{\in} \sigma(M/m) = m \tilde{\in} M \;\tilde{\wedge}\; (m, n) \tilde{\in} \sigma$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \underbrace{\{b,\ a \in A \wedge (a, b) \in \rho\}}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}$$

$$b \in \rho(A/a) \Leftrightarrow a \in A\ \wedge\ (a, b) \in \rho$$

$$M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ \sigma \widetilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$n \widetilde{\in} \sigma(M/m) = m \widetilde{\in} M\ \widetilde{\wedge}\ (m, n) \widetilde{\in} \sigma$$

$$\mu_{\sigma(M/m)}(n) = T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \{\underbrace{b,\ \ a \in A \wedge (a, b) \in \rho}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}\}$$

$$M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ \ \sigma \widetilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$\mu_{\sigma(M/m)}(n) = T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)$$

$$\sigma(M) = \widetilde{\bigcup_{m \in \mathbb{M}}} \sigma(M/m)$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \{\underbrace{b,\ \ a \in A \wedge (a, b) \in \rho}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}\}$$

$$M \widetilde{\subset} \mathbb{M},\ \ \sigma \widetilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$\mu_{\sigma(M/m)}(n) = T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)$$

$$\sigma(M) = \widetilde{\bigcup_{m \in \mathbb{M}}} \sigma(M/m)$$

$$\mu_{\sigma(M)}(n) = \underset{m \in \mathbb{M}}{S}\left[T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)\right]$$

Нечеткие отношения

$$A \subset \mathbb{A},\ \ \rho \subset \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

$$\rho(A) = \{b \in \mathbb{B}\ :\ \exists a \in A, (a, b) \in \rho\}$$

$$= \bigcup_{a \in \mathbb{A}} \underbrace{\{b,\ \ a \in A \wedge (a, b) \in \rho\}}_{\rho(A/a) \neq \rho(a)}$$

$$M \tilde{\subset} \mathbb{M},\ \ \sigma \tilde{\subset} \mathbb{M} \times \mathbb{N}$$

$$\mu_{\sigma(M/m)}(n) = T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)$$

$$\sigma(M) = \widetilde{\bigcup_{m \in \mathbb{M}}} \sigma(M/m)$$

$$\mu_{\sigma(M)}(n) = \underset{m \in \mathbb{M}}{S} \left[T\left(\mu_M(m), \mu_\sigma(m, n)\right)\right]$$

$$\mu_{\sigma(M)}(n) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_M(m) \mu_\sigma(m, n)\right]$$

Нечеткие отношения

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \widetilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \widetilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c) \mu_\rho(c, m)]$$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho\Big($ $\frac{1}{\;}$  $\Big) = \Big($ $\frac{0.8}{\;}$  $+$ $\frac{0.2}{\;}$  $\Big)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} \left[\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)\right]$$

$\rho \Big(\frac{1}{\ }$  $\Big) = \Big(\frac{0.8}{\ }$  $+ \frac{0.2}{\ }$  $\Big)$

$\rho \Big(\frac{1}{\ }$  $\Big) = \Big(\frac{0.8}{\ }$  $+ \frac{0.8}{\ }$  $\Big)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho\left(\frac{1}{\text{icon}}\right)$ with 1 over  $= \left(\frac{0.8}{\cdot} + \frac{0.2}{\cdot}\right)$ with 0.8 over , 0.2 over 

$\rho\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ with 1 over  $= \left(\frac{0.8}{\cdot} + \frac{0.8}{\cdot}\right)$ with 0.8 over , 0.8 over 

$\rho\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ with 1 over  $= \left(\frac{0.2}{\cdot} + \frac{0.2}{\cdot}\right)$ with 0.2 over , 0.2 over 

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subset} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} \left[\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)\right]$$

$\rho \Bigg(\dfrac{0.7}{\ }$  $+ \dfrac{0.3}{\ }$  $\Bigg) =$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} \left[\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)\right]$$

$\rho\Big(\, 0.7 /$  $+\; 0.3 /$  $\Big) =$

$\Big(\, \max(0.7 \cdot 0.2, 0.3 \cdot 0.2) /$ 

$\max(0.7 \cdot 0.2, 0.3 \cdot 0.8) /$  $\Big)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho \Big($ 0.7 /  $+$ 0.3 /  $\Big) =$

$\Big($ $\max(0.7 \cdot 0.2, 0.3 \cdot 0.2)$ / 

$\max(0.7 \cdot 0.2, 0.3 \cdot 0.8)$ /  $\Big)$

$= \Big($ 0.16 /  $+$ 0.24 /  $\Big)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} \left[\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)\right]$$

$\rho\Big($ $0.8/$  $+\ 0.2/$  $\Big) =$

$\Big($ $\max(0.8 \cdot 0.2, 0.2 \cdot 0.2)/$ 

$\max(0.8 \cdot 0.2, 0.2 \cdot 0.8)/$  $\Big)$

$= \Big($ $0.16/$  $+\ 0.16/$  $\Big)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \underset{c \in \mathbb{C}}{S} \left[\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)\right]$$

$\rho\Big($ $\frac{0.8}{}$  $+$ $\frac{0.2}{}$  $\Big) =$

$\Bigg($ $\dfrac{0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 - \\ -0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2}{}$ 

$\dfrac{0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.8 - \\ -0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2}{}$  $\Bigg)$

$= \Big($ $\frac{0.1936}{}$  $+$ $\frac{0.2944}{}$  $\Big)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \,\tilde{\subset}\, \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} \left[\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)\right]$$

$\rho \Big(\frac{0.4}{}$  $+ \frac{0.5}{}$  $\Big) =$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} [\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)]$$

$\rho\,($ 0.4 /  $+$ 0.5 /  $) =$

$($ $\max(0.4 \cdot 0.2, 0.5 \cdot 0.8)$ / 

$\max(0.4 \cdot 0.8, 0.5 \cdot 0.2)$ /  $)$

Нечеткие отношения

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$$\mu_{\rho(C)}(m) = \max_{c \in \mathbb{C}} \left[\mu_C(c)\mu_\rho(c, m)\right]$$

$\rho\Big(\frac{0.4}{\cdot}$  $+ \frac{0.5}{\cdot}$  $\Big) =$

$\Big(\frac{\max(0.4 \cdot 0.2, 0.5 \cdot 0.8)}{\cdot}$ 

$\frac{\max(0.4 \cdot 0.8, 0.5 \cdot 0.2)}{\cdot}$  $\Big)$

$= \Big(\frac{0.4}{\cdot}$  $+ \frac{0.32}{\cdot}$  $\Big)$

Композиция нечетких отношений

$\mathbb{M} = \{$  ,  $\}$

$\mathbb{C} = \{$  ,  ,  ,  $\}$

$\mathbb{H} = \{$  ,  ,  $\}$

$\rho \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{M}$

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

$\sigma \tilde{\subseteq} \mathbb{M} \times \mathbb{H}$

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$\tau = \rho \circ \sigma, \ \tau \tilde{\subseteq} \mathbb{C} \times \mathbb{H}$

τ			
			
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} [\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)]$$

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)\right]$$

$\mu_\tau\Big($  ,  $\Big) =$

$\max\left[0.8 \cdot 0.7, 0.2 \cdot 0.3\right] = 0.56$

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} [\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)]$$

$\mu_\tau\Big($  ,  $\Big) =$

$\max[0.8 \cdot 0.7, 0.2 \cdot 0.3] = 0.56$

$\mu_\tau\Big($  ,  $\Big) =$

$\max[0.8 \cdot 0.3, 0.2 \cdot 0.7] = 0.24$

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c, m) \mu_\sigma(m, h) \right]$$

τ			
			
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)\right]$$

τ			
			
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} [\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)]$$

τ			
	0.4		
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)\right]$$

τ			
	0.4	0.56	
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)\right]$$

τ			
	0.4	0.56	0.56
			
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)\right]$$

τ			
	0.4	0.56	0.56
	0.4	0.58	0.24
			
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)\right]$$

τ			
	0.4	0.56	0.56
	0.4	0.58	0.24
	0.4	0.24	0.58
			

Композиция нечетких отношений

ρ		
	0.8	0.8
	0.8	0.2
	0.2	0.8
	0.2	0.2

σ			
	0.5	0.7	0.3
	0.5	0.3	0.7

$$\tau = \rho \circ \sigma$$

$$\mu_\tau(c, h) = \max_{m \in \mathbb{M}} \left[\mu_\rho(c, m)\mu_\sigma(m, h)\right]$$

τ			
	0.4	0.56	0.56
	0.4	0.58	0.24
	0.4	0.24	0.58
	0.1	0.14	0.14