

Дедуктивные рассуждения

Все страны Южной Америки – республики

Бразилия – страна Южной Америки

∴ Бразилия – республика

Дедуктивные рассуждения

Все страны Южной Америки – республики

Бразилия – страна Южной Америки

∴ Бразилия – республика

$$\frac{A, B}{?}$$

Дедуктивные рассуждения

Если страна находится в Южной Америке, то она республика
Бразилия находится в Южной Америке

∴ Бразилия – республика

Дедуктивные рассуждения

Если страна находится в Южной Америке, то она республика
Бразилия находится в Южной Америке

∴ Бразилия – республика

$$\frac{A \rightarrow B, C}{?}$$

Модель

$$\mathfrak{M} = (M, P_1, \dots, P_n)$$

Модель

$$\mathfrak{M} = (M, P_1, \dots, P_n)$$

$$P_i : M^{k_i} \rightarrow \{0, 1\}$$

Модель



$$\mathfrak{M} = (M, P_1, \dots, P_n)$$

$$P_i : M^{k_i} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P(x, y), C(x, y)$$

Модель



$$\mathfrak{M} = (M, P_1, \dots, P_n)$$

$$P_i : M^{k_i} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P(x, y), C(x, y)$$

$$\triangleright P(\text{Tywin}, \text{Cersei})$$

Модель



$$\mathfrak{M} = (M, P_1, \dots, P_n)$$

$$P_i : M^{k_i} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P(x, y), C(x, y)$$

- ▶ $P(\text{Tywin}, \text{Cersei})$
- ▶ $C(\text{Tommen}, \text{Cersei})$

Модель



$$\mathfrak{M} = (M, P_1, \dots, P_n)$$

$$P_i : M^{k_i} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P(x, y), C(x, y)$$

- ▶ $P(\text{Tywin}, \text{Cersei})$
- ▶ $C(\text{Tommen}, \text{Cersei})$
- ▶ $C(\text{Tyrion}, \text{Cersei})$

Модель



$$\mathfrak{M} = (M, P_1, \dots, P_n)$$

$$P_i : M^{k_i} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P(x, y), \quad C(x, y)$$

- ▶ $P(\text{Tywin}, \text{Cersei})$
- ▶ $C(\text{Tommen}, \text{Cersei})$
- ▶ $C(\text{Tyrion}, \text{Cersei})$
- ▶ $\forall x, y \ P(x, y) \rightarrow C(y, x)$

Модель



$$\mathfrak{M} = (M, P_1, \dots, P_n)$$

$$P_i : M^{k_i} \rightarrow \{0, 1\}$$

$P(x, y), C(x, y)$

- ▶ $P(\text{Tywin}, \text{Cersei})$
- ▶ $C(\text{Tommen}, \text{Cersei})$
- ▶ $C(\text{Tyrion}, \text{Cersei})$
- ▶ $\forall x, y \ P(x, y) \rightarrow C(y, x)$
- ▶ $\exists u, x, y, z \ C(u, x) \wedge C(u, y) \wedge C(x, z) \wedge C(y, z)$

Модель



$$\mathfrak{M} = (M, P_1, \dots, P_n)$$

$$P_i : M^{k_i} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P(x, y), C(x, y)$$

- ▶ $P(\text{Tywin}, \text{Cersei})$
- ▶ $C(\text{Tommen}, \text{Cersei})$
- ▶ $C(\text{Tyrion}, \text{Cersei})$
- ▶ $\forall x, y \ P(x, y) \rightarrow C(y, x)$
- ▶ $\exists u, x, y, z \ C(u, x) \wedge C(u, y) \wedge C(x, z) \wedge C(y, z)$
- ▶ $\forall x \exists y \ P(y, x)$

Модель

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, Eq, P, S)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$S(x, y, z) \Leftrightarrow x + y = z$$

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow xy = z$$

Модель

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, Eq, P, S)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$S(x, y, z) \Leftrightarrow x + y = z$$

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow xy = z$$

Свойство единицы

$$\forall x \ P(x, 1, x) \wedge P(1, x, x)$$

Коммутативность
сложения

$$\forall x, y, z \ S(x, y, z) \rightarrow S(y, x, z)$$

Отображение

$$\forall x, y, z, u \quad (P(x, y, u) \wedge P(x, y, v)) \rightarrow Eq(u, v)$$

Тотальное отображение

$$\forall x, y \ \exists z \ S(x, y, z)$$

Вычитание

$$\forall x, y \ \exists z \ S(x, z, y)$$

Вывод в логике предикатов

$$\frac{\begin{array}{l} (\forall x P(x)) \rightarrow (\forall x Q(x)) \\ (\forall x P(x)) \end{array}}{A = (\forall x P(x)), B = (\forall x Q(x))} \\ \therefore \forall x Q(x)$$

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x P(x) \rightarrow Q(x) \\ P(a) \end{array}}{\therefore Q(a)}$$

Предваренная нормальная форма

1. Оставить только \wedge , \vee , \neg

Предваренная нормальная форма

1. Оставить только \wedge , \vee , \neg
2. Протаскивание отрицаний: законы де Моргана и

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

Предваренная нормальная форма

1. Оставить только \wedge , \vee , \neg
2. Протаскивание отрицаний: законы де Моргана и

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

3. Вытаскивание кванторов

Предваренная нормальная форма

1. Оставить только \wedge , \vee , \neg
2. Протаскивание отрицаний: законы де Моргана и

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

3. Вытаскивание кванторов

$$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

Предваренная нормальная форма

1. Оставить только \wedge , \vee , \neg
2. Протаскивание отрицаний: законы де Моргана и

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

3. Вытаскивание кванторов

$$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

Предваренная нормальная форма

1. Оставить только \wedge , \vee , \neg
2. Протаскивание отрицаний: законы де Моргана и

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

3. Вытаскивание кванторов

$$\begin{aligned}(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) &\Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \\ (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) &\Leftrightarrow \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))\end{aligned}$$

Предваренная нормальная форма

1. Оставить только \wedge , \vee , \neg
2. Протаскивание отрицаний: законы де Моргана и

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

3. Вытаскивание кванторов

$$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$$

$$(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

Предваренная нормальная форма

1. Оставить только \wedge , \vee , \neg
2. Протаскивание отрицаний: законы де Моргана и

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

3. Вытаскивание кванторов

$$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$$

$$(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

$$(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$$

Предваренная нормальная форма

1. Оставить только \wedge , \vee , \neg
2. Протаскивание отрицаний: законы де Моргана и

$$\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

3. Вытаскивание кванторов

$$(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$$

$$(\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

$$(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Leftrightarrow \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$$

4. Результат: предваренная нормальная форма

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 F$$

Предваренная нормальная форма

► $(\forall x P(x)) \oplus (\exists x Q(x))$

Предваренная нормальная форма

- ▶ $(\forall x P(x)) \oplus (\exists x Q(x))$
- ▶ $\left[\overline{(\forall x P(x))} \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge \overline{(\exists x Q(x))} \right]$

Предваренная нормальная форма

- ▶ $(\forall x P(x)) \oplus (\exists x Q(x))$
- ▶ $\left[\overline{(\forall x P(x))} \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge \overline{(\exists x Q(x))} \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge \overline{(\exists x Q(x))} \right]$

Предваренная нормальная форма

- ▶ $(\forall x P(x)) \oplus (\exists x Q(x))$
- ▶ $\left[\overline{(\forall x P(x))} \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge \overline{(\exists x Q(x))} \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge \overline{(\exists x Q(x))} \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x \overline{Q(x)}) \right]$

Предваренная нормальная форма

- ▶ $(\forall x P(x)) \oplus (\exists x Q(x))$
- ▶ $\left[\overline{(\forall x P(x))} \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge \overline{(\exists x Q(x))} \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge \overline{(\exists x Q(x))} \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x \overline{Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[\exists x \exists y \overline{P(x)} \wedge Q(y) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x \overline{Q(x)}) \right]$

Предваренная нормальная форма

- ▶ $(\forall x P(x)) \oplus (\exists x Q(x))$
- ▶ $\left[(\overline{\forall x P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\overline{\exists x Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\overline{\exists x Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x \overline{Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[\exists x \exists y \overline{P(x)} \wedge Q(y) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x \overline{Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[\exists x \exists y \overline{P(x)} \wedge Q(y) \right] \vee \left[\forall x P(x) \wedge \overline{Q(x)} \right]$

Предваренная нормальная форма

- ▶ $(\forall x P(x)) \oplus (\exists x Q(x))$
- ▶ $\left[\overline{(\forall x P(x))} \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge \overline{(\exists x Q(x))} \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge \overline{(\exists x Q(x))} \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x \overline{Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[\exists x \exists y \overline{P(x)} \wedge Q(y) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x \overline{Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[\exists x \exists y \overline{P(x)} \wedge Q(y) \right] \vee \left[\forall x P(x) \wedge \overline{Q(x)} \right]$
- ▶ $\left[\exists x \exists y \overline{P(x)} \wedge Q(y) \right] \vee \left[\forall z P(z) \wedge \overline{Q(z)} \right]$

Предваренная нормальная форма

- ▶ $(\forall x P(x)) \oplus (\exists x Q(x))$
- ▶ $\left[(\overline{\forall x P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\overline{\exists x Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\overline{\exists x Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[(\exists x \overline{P(x)}) \wedge (\exists x Q(x)) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x \overline{Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[\exists x \exists y \overline{P(x)} \wedge Q(y) \right] \vee \left[(\forall x P(x)) \wedge (\forall x \overline{Q(x)}) \right]$
- ▶ $\left[\exists x \exists y \overline{P(x)} \wedge Q(y) \right] \vee \left[\forall x P(x) \wedge \overline{Q(x)} \right]$
- ▶ $\left[\exists x \exists y \overline{P(x)} \wedge Q(y) \right] \vee \left[\forall z P(z) \wedge \overline{Q(z)} \right]$
- ▶ $\exists x \exists y \forall z \left[(\overline{P(x)} \wedge Q(y)) \vee (P(z) \wedge \overline{Q(z)}) \right]$

Предваренная нормальная форма

► $\exists x \exists y \forall z \left[(\overline{P(x)} \wedge Q(y)) \vee (P(z) \wedge \overline{Q(z)}) \right]$

Предваренная нормальная форма

- ▶ $\exists x \exists y \forall z \left[(\overline{P(x)} \wedge Q(y)) \vee (P(z) \wedge \overline{Q(z)}) \right]$
- ▶ $\exists x \exists y \forall z \left[(\overline{P(x)} \vee P(z)) \wedge (\overline{P(x)} \vee \overline{Q(z)}) \wedge \right.$
 $\left. \wedge (Q(y) \vee P(z)) \wedge (Q(y) \vee \overline{Q(z)}) \right]$

Предваренная нормальная форма

- ▶ $\exists x \exists y \forall z \left[(\overline{P(x)} \wedge Q(y)) \vee (P(z) \wedge \overline{Q(z)}) \right]$
- ▶ $\exists x \exists y \forall z \left[(\overline{P(x)} \vee P(z)) \wedge (\overline{P(x)} \vee \overline{Q(z)}) \wedge \right.$
 $\left. \wedge (Q(y) \vee P(z)) \wedge (Q(y) \vee \overline{Q(z)}) \right]$
- ▶ $\exists x \exists y \forall z \left[(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(z)}) \wedge (Q(y) \vee P(z)) \right]$

Сколемовская нормальная форма

► $\exists t \forall u \exists v \forall x \forall y \exists z P(t, u, v) \vee P(x, y, z)$

Сколемовская нормальная форма

- ▶ $\exists t \forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(t, u, v) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(a, u, v) \vee P(x, y, z)$

Сколемовская нормальная форма

- ▶ $\exists t \forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(t, u, v) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(a, u, v) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \forall x \forall y \exists z \ P(a, u, f(u)) \vee P(x, y, z)$

Сколемовская нормальная форма

- ▶ $\exists t \forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(t, u, v) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(a, u, v) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \forall x \forall y \exists z \ P(a, u, f(u)) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \forall x \forall y \ P(a, u, f(u)) \vee P(x, y, g(u, x, y))$

Сколемовская нормальная форма

- ▶ $\exists t \forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(t, u, v) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(a, u, v) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \forall x \forall y \exists z \ P(a, u, f(u)) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \forall x \forall y \ P(a, u, f(u)) \vee P(x, y, g(u, x, y))$
- ▶ $P(a, u, f(u)) \vee P(x, y, g(u, x, y))$

Сколемовская нормальная форма

- ▶ $\exists t \forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(t, u, v) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \exists v \forall x \forall y \exists z \ P(a, u, v) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \forall x \forall y \exists z \ P(a, u, f(u)) \vee P(x, y, z)$
- ▶ $\forall u \forall x \forall y \ P(a, u, f(u)) \vee P(x, y, g(u, x, y))$
- ▶ $P(a, u, f(u)) \vee P(x, y, g(u, x, y))$
- ▶ $P(a, u, f(u)), \ P(x, y, g(u, x, y))$

Правило резолюций в логике предикатов

$$\frac{\neg P(x) \vee Q(x) \quad P(a)}{\quad}$$

Правило резолюций в логике предикатов

$$\frac{\begin{array}{l} \neg P(x) \vee Q(x) \\ P(a) \end{array}}{\begin{array}{l} x := a \\ \neg P(a) \vee Q(a) \\ P(a) \end{array}}$$

Правило резолюций в логике предикатов

$$\frac{\frac{\neg P(x) \vee Q(x)}{P(a)}}{x := a}$$
$$\frac{\neg P(a) \vee Q(a)}{P(a)}$$
$$\therefore Q(a)$$

Удачные и неудачные унификации

$$\begin{aligned} &P(f(x)) \vee Q(x) \\ &\neg P(f(a)) \end{aligned}$$

Удачные и неудачные унификации

$$\begin{array}{l} P(f(x)) \vee Q(x) \\ \neg P(f(a)) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x := a \\ Q(a) \end{array}$$

Удачные и неудачные унификации

$$\begin{array}{l} P(f(x)) \vee Q(x) \\ \neg P(f(a)) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x := a \\ Q(a) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P(x, a) \vee Q(x) \\ \neg P(b, c) \end{array}$$

Удачные и неудачные унификации

$$\frac{P(f(x)) \vee Q(x)}{\neg P(f(a))} \Rightarrow \frac{x := a}{Q(a)}$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, c)} \Rightarrow \times$$

Удачные и неудачные унификации

$$\frac{P(f(x)) \vee Q(x)}{\neg P(f(a))} \Rightarrow \frac{x := a}{Q(a)}$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, c)} \Rightarrow \times$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, x)}$$

Удачные и неудачные унификации

$$\frac{P(f(x)) \vee Q(x)}{\neg P(f(a))} \Rightarrow \frac{x := a}{Q(a)}$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, c)} \Rightarrow \times$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, x)} \Rightarrow \frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, y)}$$

Удачные и неудачные унификации

$$\frac{P(f(x)) \vee Q(x)}{\neg P(f(a))} \Rightarrow \frac{x := a}{Q(a)}$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, c)} \Rightarrow \times$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, x)} \Rightarrow \frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, y)} \Rightarrow \frac{x := b}{y := a, Q(b)}$$

Удачные и неудачные унификации

$$\frac{P(f(x)) \vee Q(x)}{\neg P(f(a))} \Rightarrow \frac{x := a}{Q(a)}$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, c)} \Rightarrow \times$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, x)} \Rightarrow \frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, y)} \Rightarrow \frac{x := b}{y := a, Q(b)}$$

$$\frac{P(a, y) \vee Q(g(y))}{\neg P(x, f(x))}$$

Удачные и неудачные унификации

$$\frac{P(f(x)) \vee Q(x)}{\neg P(f(a))} \Rightarrow \frac{x := a}{Q(a)}$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, c)} \Rightarrow \times$$

$$\frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, x)} \Rightarrow \frac{P(x, a) \vee Q(x)}{\neg P(b, y)} \Rightarrow \frac{x := b}{y := a, Q(b)}$$

$$\frac{P(a, y) \vee Q(g(y))}{\neg P(x, f(x))} \Rightarrow \frac{x := a}{y := f(a), Q(g(f(b)))}$$

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

► $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

- ▶ $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- ▶ $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

- ▶ $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- ▶ $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- ▶ $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

- ▶ $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- ▶ $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- ▶ $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- ▶ $\forall x \exists y \ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

- ▶ $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- ▶ $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- ▶ $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- ▶ $\forall x \exists y \ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

- ▶ $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- ▶ $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- ▶ $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- ▶ $\forall x \exists y \ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

- ▶ $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- ▶ $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- ▶ $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- ▶ $\forall x \exists y \ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$

Доказательство

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

- ▶ $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- ▶ $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- ▶ $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- ▶ $\forall x \exists y \ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$

Доказательство

- ▶ $(i \cdot e) = i$

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

- ▶ $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- ▶ $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- ▶ $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- ▶ $\forall x \exists y \ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$

Доказательство

- ▶ $(i \cdot e) = i$
- ▶ $(i \cdot e) = e$

Аксиомы теории групп

$$\mathcal{G} = (\mathbb{G}, \cdot)$$

- ▶ $\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$
- ▶ $\forall x, y, z \ (x \cdot (y \cdot z)) = ((x \cdot y) \cdot z)$
- ▶ $\exists e \forall x \ (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$
- ▶ $\forall x \exists y \ (x \cdot y) = (y \cdot x) = e$

Доказать единственность единицы:

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$

Доказательство

- ▶ $(i \cdot e) = i$
- ▶ $(i \cdot e) = e$
- ▶ $\therefore e = i$

Формализация аксиом

$$\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, Eq, G)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$G(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$$

$$\forall x, y, z, u (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$$

► $\forall x \forall y \forall z \forall u G(x, y, z) \wedge G(x, y, u) \rightarrow Eq(z, u)$

Формализация аксиом

$$\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, Eq, G)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$G(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$$

$$\forall x, y, z, u \ (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$$

- ▶ $\forall x \forall y \forall z \forall u \ G(x, y, z) \wedge G(x, y, u) \rightarrow Eq(z, u)$
- ▶ $\forall x \forall y \forall z \forall u \ \frac{G(x, y, z) \wedge G(x, y, u)}{Eq(z, u)}$

Формализация аксиом

$$\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, Eq, G)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$G(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$$

$$\forall x, y, z, u (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$$

- ▶ $\forall x \forall y \forall z \forall u G(x, y, z) \wedge G(x, y, u) \rightarrow Eq(z, u)$
- ▶ $\forall x \forall y \forall z \forall u \overline{G(x, y, z) \wedge G(x, y, u)} \vee Eq(z, u)$
- ▶ $\forall x \forall y \forall z \forall u \neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$

Формализация аксиом

$$\mathfrak{G} = (\mathbb{G}, Eq, G)$$

$$Eq(x, y) \Leftrightarrow x = y$$

$$G(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$$

$$\forall x, y, z, u (x \cdot y = z) \wedge (x \cdot y = u) \rightarrow (z = u)$$

- ▶ $\forall x \forall y \forall z \forall u G(x, y, z) \wedge G(x, y, u) \rightarrow Eq(z, u)$
- ▶ $\forall x \forall y \forall z \forall u \overline{G(x, y, z) \wedge G(x, y, u)} \vee Eq(z, u)$
- ▶ $\forall x \forall y \forall z \forall u \neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$
- ▶ $\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$

Формализация аксиом

$$\exists e \forall x (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$$

► $\exists e \forall x G(x, e, x) \wedge G(e, x, x)$

Формализация аксиом

$$\exists e \forall x (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$$

- ▶ $\exists e \forall x G(x, e, x) \wedge G(e, x, x)$
- ▶ $G(x, e, x) \wedge G(e, x, x)$

Формализация аксиом

$$\exists e \forall x (x \cdot e) = (e \cdot x) = x$$

- ▶ $\exists e \forall x G(x, e, x) \wedge G(e, x, x)$
- ▶ $G(x, e, x) \wedge G(e, x, x)$
- ▶ $G(t, e, t), G(e, t, t)$

Формализация теоремы

$$\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

► $\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$

Формализация теоремы

$$\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$
- ▶ $\frac{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)}$

Формализация теоремы

$$\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$
- ▶ $\frac{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)}{\quad}$
- ▶ $\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)$

Формализация теоремы

$$\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$
- ▶ $\frac{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)}{\quad}$
- ▶ $\frac{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)}{\quad}$
- ▶ $\exists i \ \overline{[\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)}$

Формализация теоремы

$$\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$
- ▶ $\overline{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)}$
- ▶ $\overline{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)}$
- ▶ $\exists i \ \overline{\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)} \vee Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \ \overline{\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)} \wedge \neg Eq(e, i)$

Формализация теоремы

$$\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$
- ▶ $\overline{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)}$
- ▶ $\overline{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)}$
- ▶ $\exists i \ \overline{\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)} \vee Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \ \overline{\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)} \wedge \neg Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \wedge \neg Eq(e, i)$

Формализация теоремы

$$\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$
- ▶ $\overline{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)}$
- ▶ $\overline{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)}$
- ▶ $\exists i \ \overline{\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)} \vee Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \ \overline{\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)} \wedge \neg Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \wedge \neg Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x) \neg Eq(e, i)$

Формализация теоремы

$$\forall i [\forall x (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- ▶ $\forall i [\forall x G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$
- ▶ $\overline{\forall i [\forall x G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)}$
- ▶ $\overline{\forall i [\forall x G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)}$
- ▶ $\exists i \overline{\overline{[\forall x G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)}}$
- ▶ $\exists i \overline{[\forall x G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \wedge \neg Eq(e, i)}$
- ▶ $\exists i [\forall x G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \wedge \neg Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \forall x G(x, i, x) \wedge G(i, x, x) \neg Eq(e, i)$
- ▶ $G(x, i, x) \wedge G(i, x, x) \wedge \neg Eq(e, i)$

Формализация теоремы

$$\forall i \ [\forall x \ (x \cdot i) = (i \cdot x) = x] \rightarrow (e = i)$$

- ▶ $\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)$
- ▶ $\frac{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \rightarrow Eq(e, i)}{\quad}$
- ▶ $\frac{\forall i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)}{\quad}$
- ▶ $\exists i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \vee Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \wedge \neg Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \ [\forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x)] \wedge \neg Eq(e, i)$
- ▶ $\exists i \forall x \ G(x, i, x) \wedge G(i, x, x) \neg Eq(e, i)$
- ▶ $G(x, i, x) \wedge G(i, x, x) \wedge \neg Eq(e, i)$
- ▶ $G(s, i, s), \ G(i, s, s), \ \neg Eq(e, i)$

Доказательство теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$

$$G(s, i, s)$$

$$G(i, s, s)$$

$$G(e, t, t)$$

$$G(t, e, t)$$

$$\neg Eq(e, i)$$

Доказательство теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$



$$x := i, y := s, z := s \\ \neg G(i, s, u) \vee Eq(s, u)$$



$$G(s, i, s)$$

$$G(i, s, s)$$

$$G(e, t, t)$$

$$G(t, e, t)$$

$$\neg Eq(e, i)$$

Доказательство теоремы

$$\begin{array}{ccc} \neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u) & & \\ \downarrow & & G(s, i, s) \\ x := i, y := s, z := s & \longleftarrow & G(i, s, s) \\ \neg G(i, s, u) \vee Eq(s, u) & & \\ \downarrow & & G(e, t, t) \\ t := i, s := e, u := t = i & \longleftarrow & G(t, e, t) \\ Eq(e, i) & & \\ & & \neg Eq(e, i) \end{array}$$

Доказательство теоремы

$$\begin{array}{ccc} \neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u) & & \\ \downarrow & & G(s, i, s) \\ x := i, y := s, z := s & \longleftarrow & G(i, s, s) \\ \neg G(i, s, u) \vee Eq(s, u) & & \\ \downarrow & & G(e, t, t) \\ t := i, s := e, u := t = i & \longleftarrow & G(t, e, t) \\ Eq(e, i) & & \\ \downarrow & & \\ \square & \longleftarrow & \neg Eq(e, i) \end{array}$$

Поиск теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$

$$G(e, t, t)$$

$$G(t, e, t)$$

Поиск теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$



$$G(e, t, t)$$

$$x := t, y := e, z := t$$

$$\neg G(t, e, u) \vee Eq(t, u)$$



$$G(t, e, t)$$

Поиск теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$



$$G(e, t, t)$$

$$x := t, y := e, z := t$$

$$\neg G(t, e, u) \vee Eq(t, u)$$



$$G(t, e, t)$$



$$u := e$$

$$\neg G(t, e, e) \vee Eq(t, e)$$

Поиск теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$



$$G(e, t, t)$$

$$x := t, y := e, z := t$$

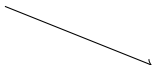
$$\neg G(t, e, u) \vee Eq(t, u)$$

$$G(t, e, t)$$



$$u := e$$

$$\neg G(t, e, e) \vee Eq(t, e)$$



$$t := e$$

$$\neg G(e, e, u) \vee Eq(e, u)$$

Поиск теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$



$$G(e, t, t)$$

$$\begin{array}{l} x := t, y := e, z := t \\ \neg G(t, e, u) \vee Eq(t, u) \end{array} \quad \longleftarrow G(t, e, t)$$



$$u := e$$

$$\neg G(t, e, e) \vee Eq(t, e)$$



$$G(t, w, w) \rightarrow G(t, e, e) \Leftrightarrow \neg G(t, w, w) \vee G(t, e, e)$$

$$\neg G(t, w, w) \vee Eq(t, e)$$

Поиск теоремы

$$\neg G(x, y, z) \vee \neg G(x, y, u) \vee Eq(z, u)$$



$$G(e, t, t)$$

$$\begin{array}{l} x := t, y := e, z := t \\ \neg G(t, e, u) \vee Eq(t, u) \end{array} \quad \longleftarrow G(t, e, t)$$



$$u := e$$

$$\neg G(t, e, e) \vee Eq(t, e)$$



$$G(t, w, w) \rightarrow G(t, e, e) \Leftrightarrow \neg G(t, w, w) \vee G(t, e, e)$$

$$\neg G(t, w, w) \vee Eq(t, e)$$



$$\forall t [\forall w G(t, w, w)] \rightarrow Eq(t, e)$$

Зацикливание метода резолюций

$$\frac{P(a)}{\neg P(x) \vee P(f(x))}$$

Зацикливание метода резолюций

$$\frac{P(a) \quad \neg P(x) \vee P(f(x))}{\text{---}}$$

$$\frac{P(f(a)) \quad \neg P(x) \vee P(f(x))}{\text{---}}$$

Зацикливание метода резолюций

$$\frac{P(a) \quad \neg P(x) \vee P(f(x))}{\text{---}}$$

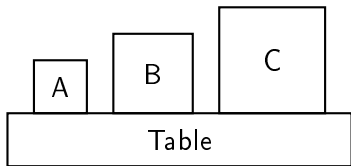
$$\frac{P(f(a)) \quad \neg P(x) \vee P(f(x))}{\text{---}}$$

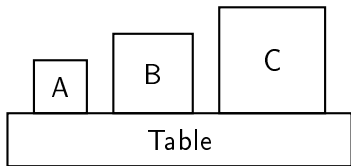
$$\frac{P(f(f(a))) \quad \neg P(x) \vee P(f(x))}{\text{---}}$$

...

Robbin's conjecture

$$\begin{array}{l} (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) \\ A \vee B = B \vee A \\ \neg(\neg(A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg B)) = A \\ \hline \therefore \neg\neg A = A \end{array}$$





Действие:

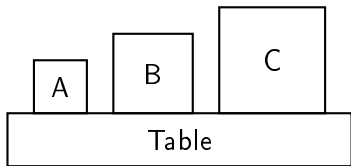
- ▶ $Move(what, from, to)$

Требования:

- ▶ $On(what, from)$
- ▶ $Cl(to) \vee (to = Table)$
- ▶ $Cl(what)$

Результат:

- ▶ $On(what, to)$
- ▶ $\neg Cl(to)$
- ▶ $\neg On(what, from)$
- ▶ $Cl(from)$



<i>On</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>T</i>
<i>A</i>	0	0	0	1
<i>B</i>	0	0	0	1
<i>C</i>	0	0	0	1
<i>Cl</i>	1	1	1	

Действие:

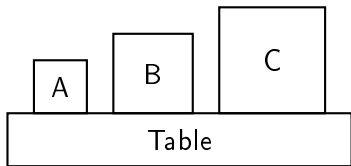
- ▶ $Move(what, from, to)$

Требования:

- ▶ $On(what, from)$
- ▶ $Cl(to) \vee (to = Table)$
- ▶ $Cl(what)$

Результат:

- ▶ $On(what, to)$
- ▶ $\neg Cl(to)$
- ▶ $\neg On(what, from)$
- ▶ $Cl(from)$



<i>On</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>T</i>
<i>A</i>	0	0	0	1
<i>B</i>	0	0	0	1
<i>C</i>	0	0	0	1
<i>Cl</i>	1	1	1	

↓

<i>On</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>T</i>
<i>A</i>	0	1	0	0
<i>B</i>	0	0	0	1
<i>C</i>	0	0	0	1
<i>Cl</i>	1	0	1	

Действие:

- ▶ $Move(what, from, to)$

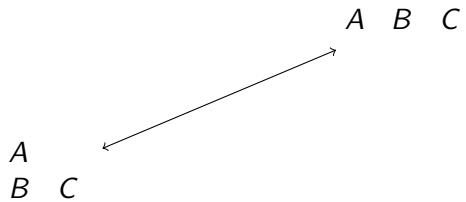
Требования:

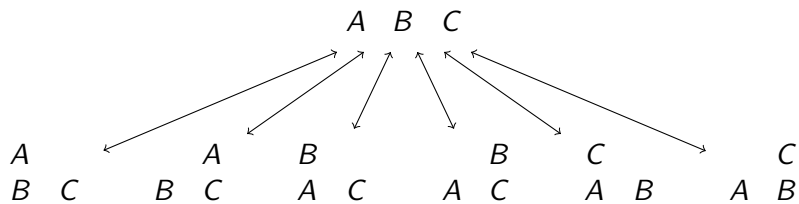
- ▶ $On(what, from)$
- ▶ $Cl(to) \vee (to = Table)$
- ▶ $Cl(what)$

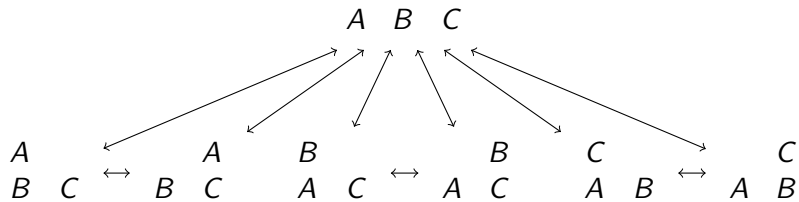
Результат:

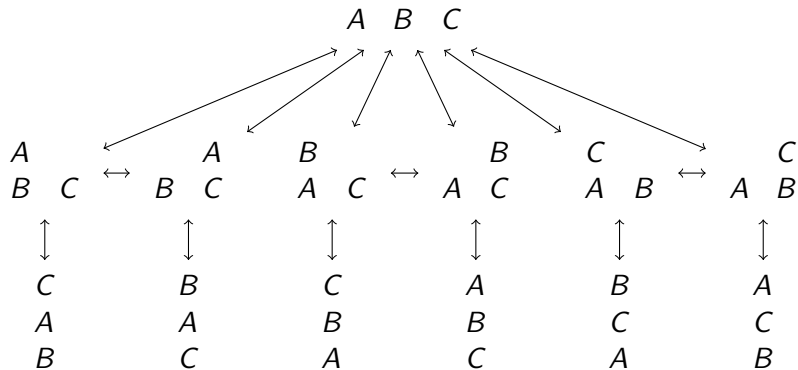
- ▶ $On(what, to)$
- ▶ $\neg Cl(to)$
- ▶ $\neg On(what, from)$
- ▶ $Cl(from)$

$A \quad B \quad C$









4



Stench



Breeze

PIT

3



Breeze
Stench
Gold

PIT

Breeze

2



Stench



Breeze

1



START



Breeze

PIT

Breeze

1

2

3

4