

## Лекция 4. Распознавание образов, описываемых гауссовскими моделями данных

Во многих прикладных задачах для статистического описания образов часто используются гауссовские модели данных. Это означает, что **каждый образ в пространстве признаков рассматривается как реализация гауссовского случайного вектора  $\mathbf{x}$** .

Использование подобной модели часто является оправданным подходом, например, флуктуации образов в пределах одного и того же класса, обусловленные влиянием шумов (описание видео - и радиосигналов) в большинстве случаев имеют гауссовское распределение. Кроме того, немаловажное значение имеет удобство использования гауссовской модели с точки зрения возможности решения задач синтеза и анализа алгоритмов обработки информации.

Итак, рассматривается задача, в которой любой образ может принадлежать одному из  $M$  классов объектов, в совокупности составляющих конечное множество альтернативных статистических гипотез  $\Omega = \{\omega_j, j = \overline{1, M}\}$ .

Количество классов и их исходные наименования считаются известными. Задаются априорные вероятности появления объектов различных классов – априорные вероятности гипотез  $\omega_i : \Pr(\omega = \omega_j) = p(\omega_j) = p_j, j = \overline{1, M}$  и статистические описания вектора признаков каждого класса  $\mathbf{x}$  в виде условных плотностей распределения вероятностей:  $f_{\mathbf{x}}(x/\omega_i) = p(x/\omega_i), i = \overline{1, M}$ , которые называются функциями правдоподобия классов.

Пусть для гипотез  $\Omega = \{\omega_j, j = \overline{1, M}\}$  известны априорные вероятности гипотез и функции правдоподобия, каждая из которых описывается своим гауссовским распределением

$$\omega_i : p(\omega_i), p(x/\omega_i) = N(x, m_i, C_i), i = \overline{1, M}.$$

Параметры распределений – математические ожидания и матрицы ковариации классов  $m_i, C_i, i = \overline{1, M}$  на данном этапе считаем известными.

Далее при проведении синтеза и анализа алгоритмов распознавания будем использовать разделяющие функции вида  $g'_i(x) = \ln(g_i(x)), i = \overline{1, M}$ . При использовании в качестве  $g_i(x) = p(\omega_i)p(x/\omega_i)$  и подстановке в эти выражения конкретной записи гауссовских плотностей распределения, за вычетом не влияющей на результат общей константы  $-(n/2)\ln 2\pi$ , получим следующие выражения:

$$g'_i(x) = -\frac{1}{2}\ln|C_i| - \frac{1}{2}(x - m_i)^T C_i^{-1}(x - m_i) + \ln(p(\omega_i)), i = \overline{1, M}.$$

Для двух классов будем использовать решающее правило общего вида на основе разделяющей функции

$$g'(x) = g''(x) - l'_0 = \begin{matrix} \omega_1 \\ > \\ \omega_2 \end{matrix} 0, g''(x) = \ln l(x), l'_0 = \ln l_0,$$

$$g''(x) = -\frac{1}{2}\ln|C_1| - \frac{1}{2}(x - m_1)^T C_1^{-1}(x - m_1) + \frac{1}{2}\ln|C_2| + \frac{1}{2}(x - m_2)^T C_2^{-1}(x - m_2).$$

Используя полученные соотношения, перейдем к синтезу и анализу решающих правил в конкретных частных случаях.

# 1. Распознавание образов, описываемых гауссовскими случайными векторами с одинаковыми матрицами ковариации

Пусть  $C_i = C$ ,  $i = \overline{1, M}$ . Рассмотрим сначала случай распознавания двух классов на основе решающего правила в форме сравнения ЛОП с порогом

$$g''(x) = \begin{matrix} \omega_1 \\ > \\ < \\ \omega_2 \end{matrix} l'_0.$$

Преобразуем выражение для ЛОП  $g''(x)$

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{1}{2} \ln|C| - \frac{1}{2} x^T C^{-1} x + \frac{1}{2} m_1^T C^{-1} x + \frac{1}{2} x^T C^{-1} m_1 - \frac{1}{2} m_1^T C^{-1} m_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \ln|C| + \frac{1}{2} x^T C^{-1} x - \frac{1}{2} m_2^T C^{-1} x - \frac{1}{2} x^T C^{-1} m_2 + \frac{1}{2} m_2^T C^{-1} m_2 = \\ &= x^T C^{-1} (m_1 - m_2) - \frac{1}{2} m_1^T C^{-1} m_1 + \frac{1}{2} m_2^T C^{-1} m_2 = \\ &= x^T C^{-1} (m_1 - m_2) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2)^T C^{-1} (m_1 - m_2). \end{aligned}$$

Анализ полученного решения показывает, что ЛОП является **линейной функцией** компонент вектора  $x: x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  и определяет **линейный характер** границы, разделяющей области решений  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  и задаваемой уравнением  $g'(x) = g''(x) - l'_0 = 0$ . В многомерном признаковом пространстве эта граница является гиперплоскостью.

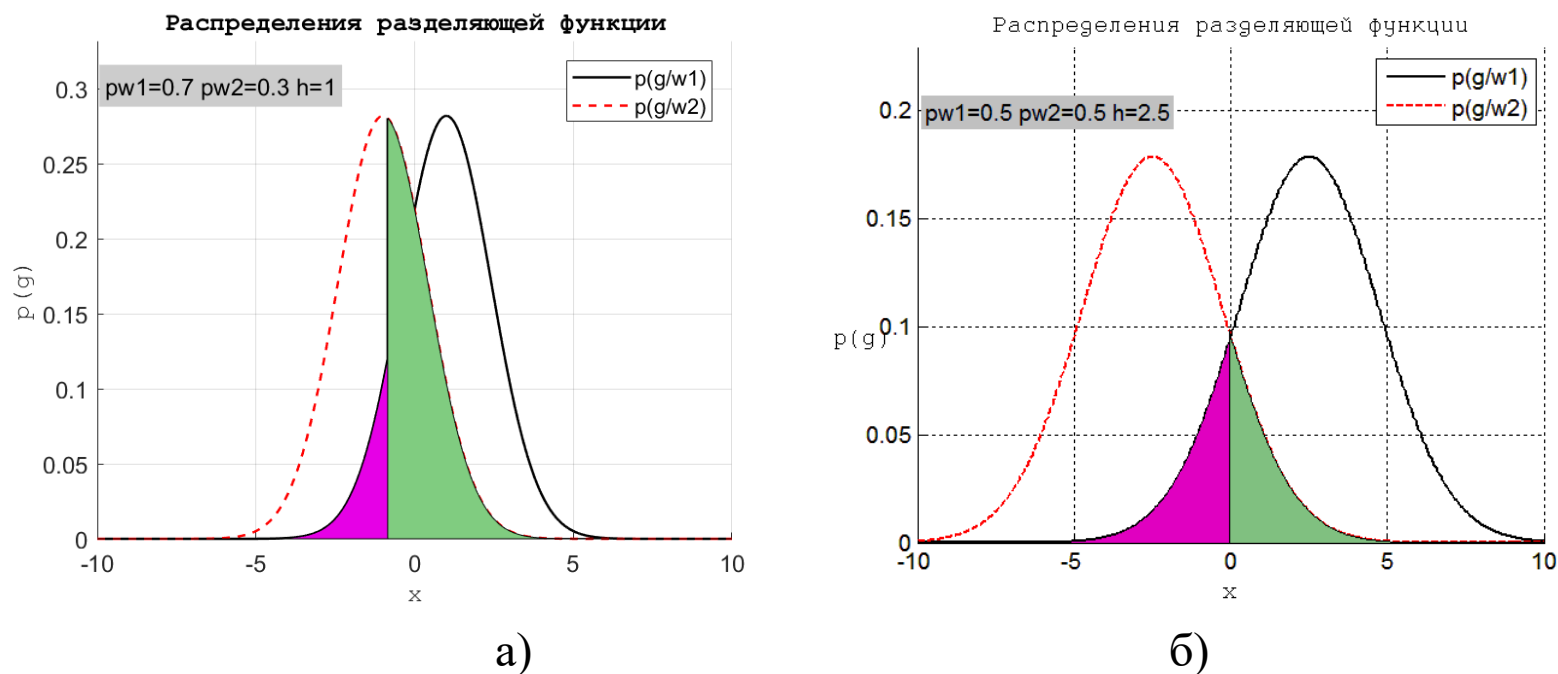
Для расчета вероятностей ошибок в данном случае воспользуемся следующими соображениями. Так как случайная величина  $g''(\mathbf{x})$  является линейной комбинацией ГСВ – компонентов случайного вектора  $\mathbf{x} : \mathbf{x}_k, k = \overline{1, n}$ , то она также является ГСВ и имеет распределения, различные для двух гипотез

$$p(g''/\omega_1) = N(g'', m_{g1}, D_{g1}), \quad p(g''/\omega_2) = N(g'', m_{g2}, D_{g2}).$$

Для проведения расчетов на основе этих выражений требуется определить математические ожидания и дисперсии  $g''(\mathbf{x})$  для обеих гипотез. Используя выражение для ЛОП, получим

$$\begin{aligned} m_{g1} &= M[g''/\omega_1] = m_1^T C^{-1}(m_1 - m_2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2) = \\ &= \frac{1}{2}(m_1 - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2) = h, \\ D_{g1} &= M[(g'' - m_{g1})^2/\omega_1] = M[(x - m_1)^T C^{-1}(m_1 - m_2)^2] = \\ &= M[(m_1 - m_2)^T C^{-1}(x - m_1)(x - m_1)^T C^{-1}(m_1 - m_2)] = (m_1 - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2) = 2h, \\ & \\ m_{g2} &= M[g''/\omega_2] = m_2^T C^{-1}(m_1 - m_2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2) = \\ &= -\frac{1}{2}(m_1 - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2) = -h, \\ D_{g2} &= M[(g'' - m_{g2})^2/\omega_2] = M[(x - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2)^2] = \\ &= M[(m_1 - m_2)^T C^{-1}(x - m_2)(x - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2)] = (m_1 - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2) = 2h. \end{aligned} \tag{1}$$

Отсюда видно, что плотности распределения  $g''(x)$  для разных гипотез с математическими ожиданиями  $\pm h$  расположены симметрично относительно начала координат и имеют при этом одинаковую дисперсию. Примеры вида этих распределений, расположение порога  $l'_0$  для различных априорных вероятностей классов и значений параметра  $h$  даны на рис.1. Из этих графиков, в частности видно, что, если априорные вероятности классов одинаковы, то, соответственно,  $l'_0 = 0$ , и имеется полная симметрия расположения плотностей распределений относительно порога.



Для расчета вероятностей ошибок первого и второго рода теперь воспользуемся соотношениями

$$\alpha = \int_{-\infty}^{l'_0} N(g'', m_{g_1}, D_{g_1}) dg'' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{l'_0 - h}{\sqrt{2h}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(\frac{l'_0 - h}{\sqrt{2h}}\right), \quad (2)$$

$$\beta = \int_{l'_0}^{\infty} N(g'', m_{g_2}, D_{g_2}) dg'' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{l'_0 + h}{\sqrt{2h}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \Phi\left(\frac{l'_0 + h}{\sqrt{2h}}\right).$$

Наконец, в случае  $l'_0 = 0$ , т.е. при  $p(\omega_1) = p(\omega_2)$ , имеет место

$$\alpha = \beta = \Phi\left(-\frac{h}{\sqrt{2h}}\right) = \Phi(-\sqrt{h/2}) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{(m_1 - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2)}\right).$$

Это означает, что вероятности ошибок распознавания определяются половиной расстояния Махаланобиса между математическими ожиданиями (центрами) классов. Таким образом, мы видим, что для данного случая удастся получить аналитическое решение как задачи синтеза, так и задачи анализа алгоритма распознавания.

**Рассмотрим теперь случай, когда требуется осуществить распознавание более чем двух классов.** Для этого представим разделяющие функции в виде

$$g'_i(x) = -\frac{1}{2} \ln |C| - \frac{1}{2} x^T C^{-1} x + x^T C^{-1} m_i - \frac{1}{2} m_i^T C^{-1} m_i + \ln(p(\omega_i)), \quad i = \overline{1, M}.$$

Учитывая, что первые два слагаемых всегда меньше нуля и являются в данном случае общими для всех разделяющих функций, решающее правило удобно записать в виде

$$\omega_i : g_i'''(x) \geq g_j'''(x), \quad j = \overline{1, M}, \quad i \neq j,$$

$$g_i'''(x) = x^T C^{-1} m_i - \frac{1}{2} m_i^T C^{-1} m_i + \ln(p(\omega_i)), \quad i = \overline{1, M}.$$

Здесь используется очередной вариант задания разделяющих функций, для которых ищется максимум, и которые являются линейными функциями признаков. Это весьма удобно с точки зрения сокращения вычислительных затрат.

Кроме того, границы областей решения здесь могут быть получены как фрагменты гиперплоскостей, производящих попарное разделение классов

$$g'_{ij}(x) = x^T C^{-1} (m_i - m_j) - \frac{1}{2} (m_i + m_j)^T C^{-1} (m_i - m_j) - l'_{0ij} = 0, \quad l'_{0ij} = \ln p(\omega_j) / p(\omega_i).$$

Указанное обстоятельство позволяет оценить верхние границы вероятностей попарного перепутывания классов и, соответственно, нижнюю границу вероятности правильного распознавания классов при  $M > 2$  в общей матрице ошибок  $M_{er} = \|\varepsilon_{ij}\|$  следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \int_{\Gamma_i} p(x / \omega_j) dx \leq p_{ij}, \quad P_c^{(i)} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \varepsilon_{ij} \geq 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M p_{ij}, \quad i = \overline{1, M},$$

где  $p_{ij}$  – вероятности ошибок при двухальтернативном распознавании классов попарно. Разницу между величинами  $\varepsilon_{ij}$  и  $p_{ij}$  хорошо иллюстрируют рисунки, представленные на прошлой лекции. Очевидно, что использование такой оценки допустимо при достаточно малых ошибках двухальтернативного распознавания, так как в противном случае может быть получен результат, при котором вероятности  $P_c^{(i)}$  будут иметь отрицательную нижнюю границу.

Рассмотрим несколько конкретных примеров, иллюстрирующих получаемые области решения и результаты расчета вероятностных характеристик алгоритмов распознавания для случаев проверки простой и сложной гипотез. Указанные примеры получены на основе разработанной программы. Данная программа позволяет строить разделяющие функции, рассчитывать теоретические вероятности ошибок при попарном распознавании классов, проводить статистическое моделирование алгоритмов с оценкой реально получаемых вероятностей ошибок и, наконец, проводить визуализацию областей решений и границ между ними для синтезированных алгоритмов. Используются разделяющие функции для МАВ. На рис. 2 а,б представлены результаты, полученные для двух классов.

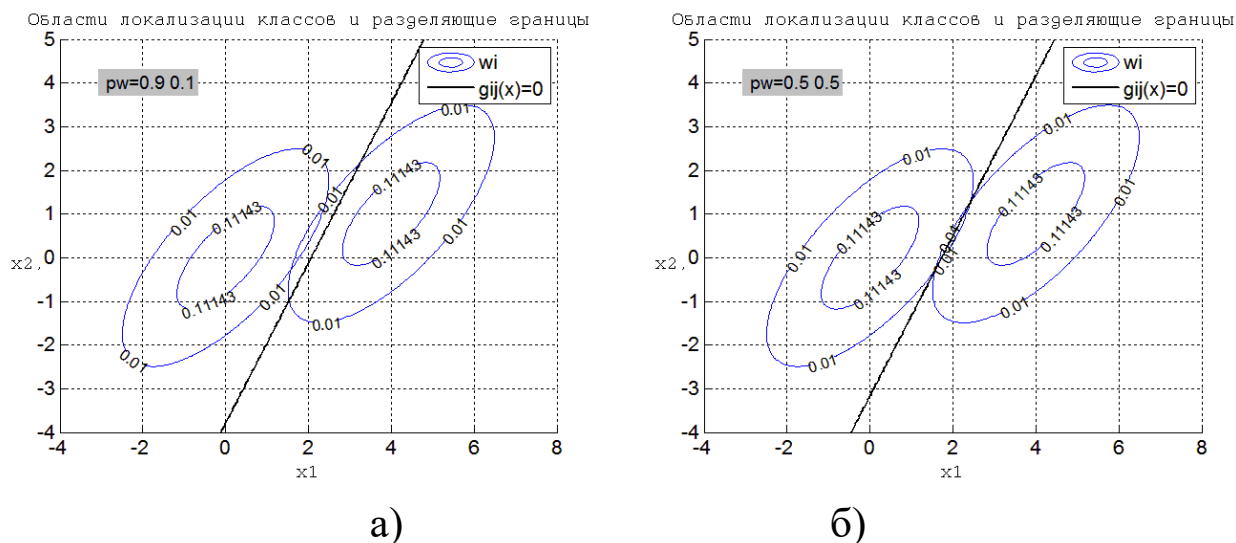


Рис.2. Примеры областей локализации двух классов и разделяющие границы между ними



На рис. 3а,б представлены результаты аналогичного характера, полученные для трех и четырех классов.

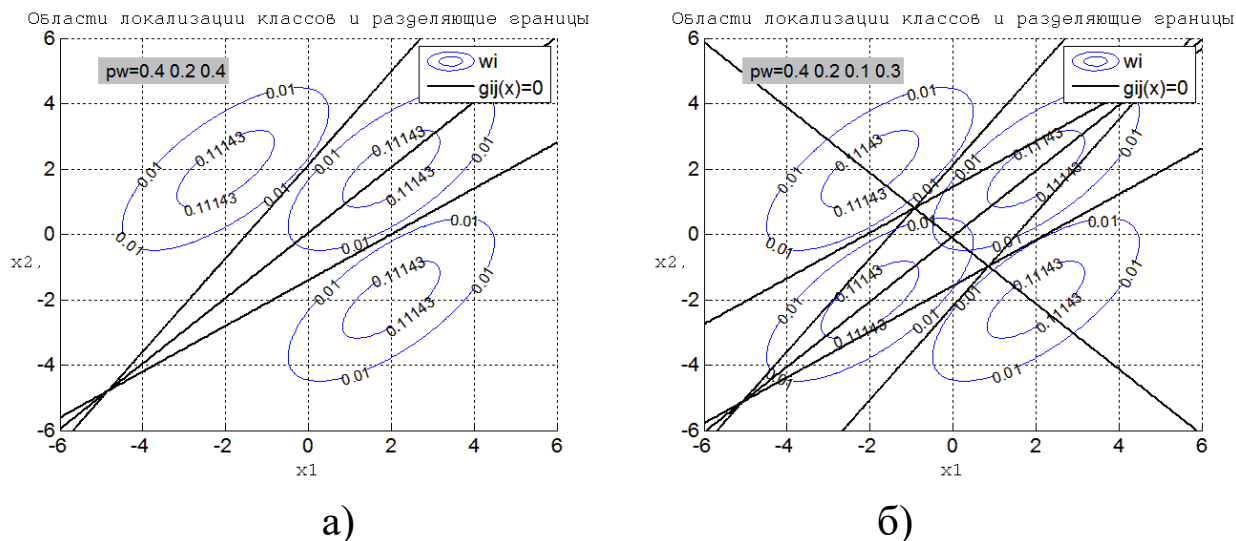


Рис.3. Примеры областей локализации нескольких классов и разделяющие границы между ними

Здесь области решений являются многоугольниками, грани которых образуют фрагменты в виде отрезков прямых линий, принадлежащие разделяющим границам, полученным при попарном сравнении классов. При этом, очевидно, что часть из этих границ, например, граница между классами, являющаяся одной из диагоналей квадранта на рис.3, не участвуют в формировании границ областей решений.

## 2. Распознавание образов, описываемых гауссовскими случайными векторами с различными матрицами ковариации

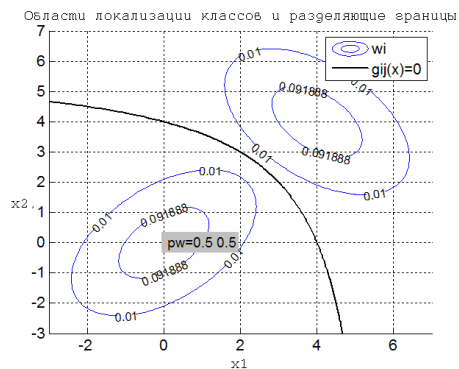
Пусть теперь  $C_i \neq C_j$ ,  $i \neq j$ . Рассмотрим также сначала случай распознавания двух классов в соответствии с правилом

$$g''(x) = \begin{matrix} \omega_1 \\ > \\ < \\ \omega_2 \end{matrix} l'_0.$$

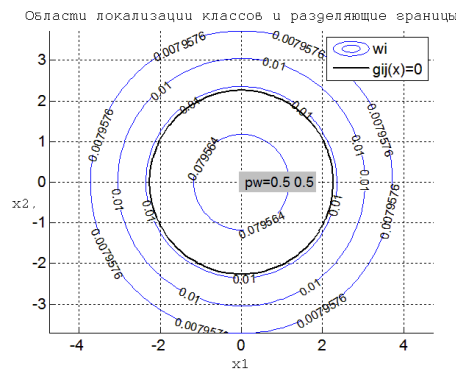
Преобразуем выражение для ЛОП  $g''(x)$

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{1}{2} \ln|C_1| - \frac{1}{2} x^T C_1^{-1} x + \frac{1}{2} m_1^T C_1^{-1} x + \frac{1}{2} x^T C_1^{-1} m_1 - \frac{1}{2} m_1^T C_1^{-1} m_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \ln|C_2| + \frac{1}{2} x^T C_2^{-1} x - \frac{1}{2} m_2^T C_2^{-1} x - \frac{1}{2} x^T C_2^{-1} m_2 + \frac{1}{2} m_2^T C_2^{-1} m_2 = \\ &= -\frac{1}{2} x^T (C_1^{-1} - C_2^{-1}) x + x^T (C_1^{-1} m_1 - C_2^{-1} m_2) - \frac{1}{2} m_1^T C_1^{-1} m_1 + \frac{1}{2} m_2^T C_2^{-1} m_2 - \frac{1}{2} \ln \frac{|C_1|}{|C_2|}. \end{aligned}$$

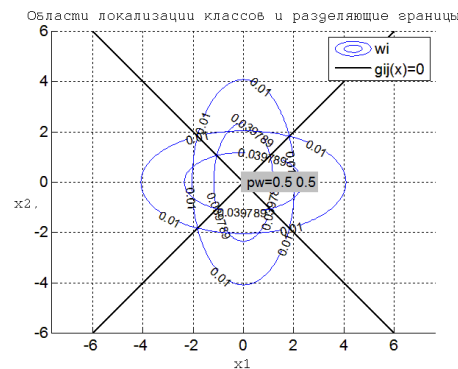
Анализ этого выражения показывает, что в данном случае зависимость разделяющей функции  $g'(x) = g''(x) - l'_0$  от компонент вектора признаков носит квадратичный характер. Соответственно, граница областей решений принимает в многомерном пространстве форму различных поверхностей второго порядка: гиперсфера, гиперэллипсоид, гиперпараболоид и т.д. Также видно, что при  $C_1 = C_2$ , выражение преобразуется в ранее полученное.



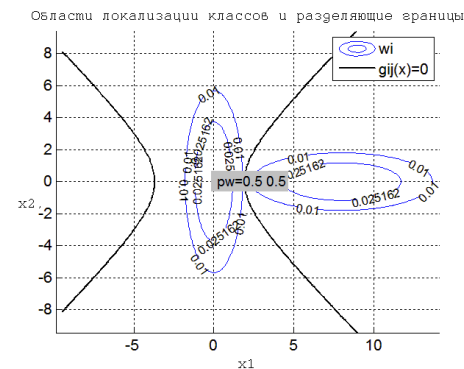
а)



б)



в)



д)

Рис.4. Примеры областей локализации двух классов и разделяющие границы между ними

На рис. 4а представлен результат визуализации областей локализации двух классов и разделяющее границы между ними, которая в данном случае имеет вид параболы. На рис.4б граница имеет вид окружности, вложенной в область локализации первого класса. Такая ситуация возникает, когда распределения классов имеют одинаковое математическое ожидание и различные дисперсии. На рис.4в граница имеет вид ломанных прямых линий, так как области локализации классов определяются эллипсами с различной ориентацией и одинаковым математическим ожиданием. Форма разделяющих линий на рис.4д определяется гиперболами, при этом область  $\Gamma_2$  является разрывной.

На рис.5а,б представлены результаты аналогичного характера, полученные для трех классов.

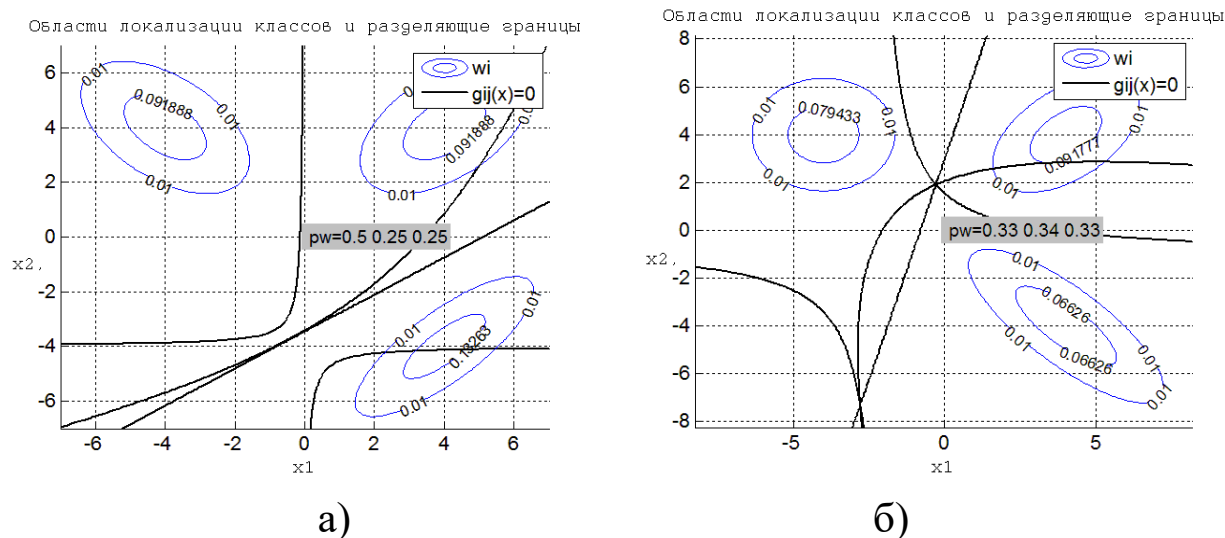


Рис.5. Примеры областей локализации трех классов и разделяющие границы между ними

Для расчета вероятностей ошибок получить явные выражения аналогично предыдущему случаю не удастся, поскольку случайная величина  $g''(\mathbf{x})$  является нелинейной функцией компонентов случайного вектора  $\mathbf{x}: \mathbf{x}_k, k = \overline{1, n}$  и не является в этом случае гауссовской. Для этой цели могут быть использованы численные и весьма громоздкие методы расчета плотностей распределения ЛОП  $p(g''/\omega_{1,2})$ , которые детально описаны в книге Фукунага, Статистическая теория распознавания образов.

Использование гауссовской аппроксимации плотностей при достаточных значениях  $n$  позволяет получить приближенные, но во многих случаях приемлемые результаты. При этом математические ожидания и дисперсии  $g''(x)$  для обеих гипотез имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m_{g1} &= M[g'' / \omega_1] = \frac{1}{2} \text{tr}(C_2^{-1} C_1 - I) + \frac{1}{2} (m_1 - m_2)^T C_1^{-1} (m_1 - m_2) - \frac{1}{2} \ln \frac{|C_1|}{|C_2|} = h_1, \\ D_{g1} &= M[(g'' - m_{g1})^2 / \omega_1] = \frac{1}{2} \text{tr}[(C_2^{-1} C_1 - I)^2] + (m_1 - m_2)^T C_2^{-1} C_1 C_2^{-1} (m_1 - m_2) = d_1, \\ m_{g2} &= M[g'' / \omega_2] = \frac{1}{2} \text{tr}(I - C_1^{-1} C_2) - \frac{1}{2} (m_1 - m_2)^T C_2^{-1} (m_1 - m_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{|C_2|}{|C_1|} = h_2, \\ D_{g2} &= M[(g'' - m_{g2})^2 / \omega_1] = \frac{1}{2} \text{tr}[(I - C_1^{-1} C_2)^2] + (m_1 - m_2)^T C_1^{-1} C_2 C_1^{-1} (m_1 - m_2) = d_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда видно, что гауссовские аппроксимации плотности распределения  $g''(x)$  для разных гипотез теперь расположены несимметрично относительно начала координат и имеют при этом разные дисперсии.

Тем не менее, это позволяет проводить расчеты вероятностей ошибок  $\alpha, \beta$ , подставляя выражения для моментов в качестве параметров соответствующих распределений  $g''(x)$ :

$$p(g'' / \omega_1) \approx N(g'', m_{g1}, D_{g1}), \quad p(g'' / \omega_2) \approx N(g'', m_{g2}, D_{g2}), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_{-\infty}^{l'_0} N(g'', m_{g1}, D_{g1}) dg'' = \Phi\left(\frac{l'_0 - m_{g1}}{\sqrt{D_{g1}}}\right), \\ \beta &= \int_{l'_0}^{\infty} N(g'', m_{g2}, D_{g2}) dg'' = 1 - \Phi\left(\frac{l'_0 - m_{g2}}{\sqrt{D_{g2}}}\right). \end{aligned}$$

Еще одна возможность получения приближенных аналитических оценок вероятностей ошибок распознавания двух классов является использование верхней границы Чернова с расстоянием Бхаттачария. В данном случае такие оценки имеют вид

$$\alpha \leq \sqrt{p(\omega_2)/p(\omega_1)} \exp\left(-\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right), \quad \beta \leq \sqrt{p(\omega_1)/p(\omega_2)} \exp\left(-\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right), \quad (5)$$

$$E_s = p(\omega_1)\alpha + p(\omega_2)\beta \leq \sqrt{p(\omega_1)p(\omega_2)} \exp\left(-\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}(m_1 - m_2)^T \frac{(C_1 + C_2)^{-1}}{2} (m_1 - m_2) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \frac{|C_1| + |C_2|}{\sqrt{|C_1||C_2|}}.$$

В случае, когда требуется осуществить распознавание более, чем двух классов  $M > 2$ , используется стандартная структура решающего правила и исходное представление разделяющих функций.

Для этой ситуации также можно попытаться оценить границы вероятностей попарного перепутывания классов и, соответственно, нижнюю границу вероятности правильного распознавания классов в общей матрице ошибок на основе выражений. При этом результат может оказаться существенно менее точным, так как вероятности ошибок при попарном распознавании классов уже изначально определяются с определенной погрешностью.

Наконец, всегда остается надежная возможность проведения анализа вероятностных характеристик ошибок распознавания методом статистического моделирования, который при достаточных объемах данных дает наиболее точные результаты.

Таблица 5.2. Сравнение различных методов определения вероятности ошибки распознавания при распознавании двух классов образов

Исходные данные	Теоретическая оценка (4) на основе расчета моментов ЛОП		Граница Чернова (5)		Статистическое моделирование	
	$p(\omega_1) = 0.5$	$p(\omega_1) = 0.8$	$p(\omega_1) = 0.5$	$p(\omega_1) = 0.8$	$p(\omega_1) = 0.5$	$p(\omega_1) = 0.8$
	$p(\omega_2) = 0.5$	$p(\omega_2) = 0.2$	$p(\omega_2) = 0.5$	$p(\omega_2) = 0.2$	$p(\omega_2) = 0.5$	$p(\omega_2) = 0.2$
$dm=0$	0.2398	0.1672	<b>0.5000</b>	<b>0.4000</b>	0.3336	0.1730
$dm=0.5$	0.1765	0.2072	0.3894	0.3115	0.2008	0.1610
$dm=1$	0.0641	0.0835	0.1839	0.1472	0.0643	0.0598
$dm=2$	0.0047	0.0057	0.0092	0.0073	0.0015	0.0012