

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

Целочисленная арифметика многократной точности

В данной работе рассмотрим алгоритмы для выполнения арифметических операций с большими целыми числами. Будем считать, что число записано в b -ичной системе счисления, b – натуральное число, $b \geq 2$. Натуральное n -разрядное число будем записывать в виде

$$u = u_1 u_2 \dots u_n.$$

При работе с большими целыми числами знак такого числа удобно хранить в отдельной переменной. Например, при умножении двух чисел, знак произведения вычисляется отдельно. Квадратные скобки обозначают, что берется целая часть числа.

Алгоритм 1 (сложение неотрицательных целых чисел).

Вход. Два неотрицательных числа $u = u_1 u_2 \dots u_n$ и $v = v_1 v_2 \dots v_n$; разрядность чисел n ; основание системы счисления b .

Выход. Сумма $w = w_0 w_1 \dots w_n$, где w_0 – цифра переноса – всегда равная 0 либо 1.

1. Присвоить $j := n, k := 0$ (j идет по разрядам, k следит за переносом).
2. Присвоить $w_j = (u_j + v_j + k) \pmod{b}$, где w_j – наименьший неотрицательный вычет в данном классе вычетов; $k = \left\lfloor \frac{u_j + v_j + k}{b} \right\rfloor$.
3. Присвоить $j := j - 1$. Если $j > 0$, то возвращаемся на шаг 2; если $j = 0$, то присвоить $w_0 := k$ и результат: w .

Алгоритм 2 (вычитание неотрицательных целых чисел).

Вход. Два неотрицательных числа $u = u_1 u_2 \dots u_n$ и $v = v_1 v_2 \dots v_n$, $u > v$; разрядность чисел n ; основание системы счисления b .

Выход. Разность $w = w_1 w_2 \dots w_n = u - v$.

1. Присвоить $j := n, k := 0$ (k – заем из старшего разряда).

2. Присвоить $w_j = (u_j - v_j + k) \pmod{b}$, где w_j – наименьший неотрицательный вычет в данном классе вычетов; $k = \left\lceil \frac{u_j - v_j + k}{b} \right\rceil$.
3. Присвоить $j := j - 1$. Если $j > 0$, то возвращаемся на шаг 2; если $j = 0$, то результат: w .

Алгоритм 3 (умножение неотрицательных целых чисел столбиком).

Вход. Числа $u = u_1 u_2 \dots u_n$, $v = v_1 v_2 \dots v_m$; основание системы счисления b .

Выход. Произведение $w = uv = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$.

1. Выполнить присвоения: $w_{m+1} := 0, w_{m+2} := 0, \dots, w_{m+n} := 0, j := m$ (j перемещается по номерам разрядов числа v от младших к старшим).
2. Если $v_j = 0$, то присвоить $w_j := 0$ и перейти на шаг 6.
3. Присвоить $i := n, k := 0$ (Значение i идет по номерам разрядов числа u , k отвечает за перенос).
4. Присвоить $t := u_i \cdot v_j + w_{i+j} + k, w_{i+j} := t \pmod{b}, k := \frac{t}{b}$, где w_{i+j} – наименьший неотрицательный вычет в данном классе вычетов.
5. Присвоить $i := i - 1$. Если $i > 0$, то возвращаемся на шаг 4, иначе присвоить $w_j := k$.
6. Присвоить $j := j - 1$. Если $j > 0$, то вернуться на шаг 2. Если $j = 0$, то результат: w .

Алгоритм 4 (быстрый столбик).

Вход. Числа $u = u_1 u_2 \dots u_n$, $v = v_1 v_2 \dots v_m$; основание системы счисления b .

Выход. Произведение $w = uv = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$.

1. Присвоить $t := 0$.
2. Для s от 0 до $m + n - 1$ с шагом 1 выполнить шаги 3 и 4.
3. Для i от 0 до s с шагом 1 выполнить присвоение $t := t + u_{n-i} \cdot v_{m-s+i}$.
4. Присвоить $w_{m+n-s} := t \pmod{b}, t := \frac{t}{b}$, где w_{m+n-s} – наименьший неотрицательный вычет по модулю b . Результат: w .

Алгоритм 5 (деление многоразрядных целых чисел).

Вход. Числа $u = u_n \dots u_1 u_0$, $v = v_t \dots v_1 v_0$, $n \geq t \geq 1$, $v_t \neq 0$, разрядность чисел соответственно n и t .

Выход. Частное $q = q_{n-t} \dots q_0$, остаток $r = r_t \dots r_0$.

1. Для j от 0 до $n - t$ присвоить $q_j := 0$.
2. Пока $u \geq vb^{n-t}$, выполнять: $q_{n-t} := q_{n-t} + 1$, $u := u - vb^{n-t}$.
3. Для $i = n, n - 1, \dots, t + 1$ выполнять пункты 3.1 – 3.4:
 - 3.1 если $u_i \geq v_t$, то присвоить $q_{i-t-1} := b - 1$, иначе присвоить $q_{i-t-1} := \frac{u_i b + u_{i-1}}{v_t}$.
 - 3.2 пока $q_{i-t-1}(v_t b + v_{t-1}) > u_i b^2 + u_{i-1} b + u_{i-2}$ выполнять $q_{i-t-1} := q_{i-t-1} - 1$.
 - 3.3 присвоить $u := u - q_{i-t-1} b^{i-t-1} v$.
 - 3.4 если $u < 0$, то присвоить $u := u + v b^{i-t-1}$, $q_{i-t-1} := q_{i-t-1} - 1$.
4. $r := u$. Результат: q и r .

Задания к лабораторной работе

Реализовать рассмотренные алгоритмы программно.