α

Ф. Р. ГАНТМАХЕР

ТЕОРИЯ МАТРИЦ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

517.1
Г 19
УДК 512.83

Феликс Рувимович Гантмахер

Теория матриц

М., 1966 г., 576 стр. с илл.

Редактор *Д. П. Желобенко*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *О. А. Сигал*

Сдано в набор 29/XI 1965 г. Подписано к печати 17/V 1966 г. Бумага $70\times108/_{16}$.
Физ. печ. л. 36. Условн. печ. л. 50,4. Уч.-изд. л. 43,75. Тираж 10 000 экз. Т-04687.
Цена книги 2 р. 99 к. Заказ № 45

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9.

$\frac{2-2-3}{76-66}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время матричное исчисление широко применяется в различных областях математики, механики, теоретической физики, теоретической электротехники и т. д. В то же время ни в советской, ни в иностранной литературе нет книги, которая достаточно полно освещала бы как вопросы теории матриц, так и разнообразные ее приложения. Данная книга представляет собой попытку восполнить этот пробел в математической литературе. В основе книги лежат курсы лекций по теории матриц и ее приложениям, читанные автором в разное время на протяжении последних 17 лет в Московском Государственном университете им. М. В. Ломоносова, в Тбилисском Государственном университете и в Московском физико-техническом институте.

Книга рассчитана не только на математиков (студентов, аспирантов, научных работников), но и на специалистов в смежных областях (физиков, инженеров-исследователей), интересующихся математикой и ее приложениями. Поэтому автор стремился сделать изложение материала возможно более доступным, предполагая у читателя только знакомство с теорией определителей и курсом высшей математики в объеме программы втуза. Лишь отдельные параграфы в последних главах книги требуют дополнительных математических знаний у читателя. Кроме того, автор старался сделать изложение отдельных глав возможно более независимым друг от друга. Так, например, глава V «Функции от матрицы» не опирается на материал, помещенный в главах II и III. В тех же местах главы V, где впервые используются основные понятия, введенные в главе IV, имеются соответствующие ссылки. Таким образом, читатель, уже знакомый с элементами теории матриц, имеет возможность непосредственно приступить к чтению интересующих его глав книги.

Книга состоит из двух частей, содержащих 15 глав.

В главах I и III приводятся первоначальные сведения о матрицах и линейных операторах и устанавливается связь между операторами и матрицами.

В главе II излагаются теоретические основы метода исключения Гаусса и связанных с ним эффективных методов решения системы n линейных уравнений при большом n. В этой же главе читатель знакомится с техникой оперирования с матрицами, разбитыми на прямоугольные «клетки» или «блоки».

В главе IV вводятся имеющие фундаментальное значение «характеристический» и «минимальный» многочлены квадратной матрицы, «присоединенная» и «приведенная присоединенная» матрицы.

В главе V, посвященной функциям от матрицы, даются самое общее определение и конкретные способы вычисления $f(A)$, где $f(\lambda)$ — функция скалярного аргумента λ, а A — квадратная матрица. Понятие функции от матрицы используется в §§ 5, 6 этой главы для нахождения и полного исследования решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Как понятие о функции от матрицы, так и связанное с ним исследование системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами первого порядка опираются только на понятие о минимальном многочлене матрицы и не используют (в отличие от обычного изложения) так называемой «теории элементарных делителей», которая излагается в последующих главах VI и VII.

Первые пять глав охватывают некоторый цикл сведений о матрицах и их применениях. Более глубокие вопросы теории матриц связаны с приведением матрицы к нормальной форме. Это приведение проводится на основе теории элементарных делителей Вейерштрасса. Ввиду важности этой теории в книге даны два ее изложения: аналитическое — в главе VI и геометрическое — в главе VII. Обращаем внимание читателя на §§ 7 и 8 главы VI, в которых рассматриваются эффективные методы нахождения матрицы, преобразующей данную матрицу к нормальной форме. В § 8 главы VII подробно исследуется метод акад. А. Н. Крылова для практического вычисления коэффициентов характеристического многочлена.

В главе VIII решаются матричные уравнения некоторых типов. Здесь же рассматривается задача об определении всех матриц, перестановочных с данной, и детально изучаются многозначные функции от матрицы $\sqrt[m]{A}$, $\ln A$.

Главы IX и X посвящены теории линейных операторов в унитарном пространстве и теории квадратичных и эрмитовых форм. Эти главы не опираются на теорию элементарных делителей Вейерштрасса и используют из предыдущего материала лишь основные сведения о матрицах и линейных операторах, изложенные в первых трех главах книги. В § 9 главы X дается приложение теории форм к исследованию главных колебаний системы с n степенями свободы. В § 10 этой же главы приведены тонкие исследования Фробениуса по теории ганкелевых форм. Эти исследования применяются в дальнейшем в главе XV при рассмотрении особых случаев в проблеме Рауса — Гурвица.

Последние пять глав составляют вторую часть книги. В главе XI определяются нормальные формы для комплексных симметрических, кососимметрических и ортогональных матриц и устанавливаются интересные связи этих матриц с вещественными матрицами тех же классов и с унитарными матрицами.

В главе XII излагается общая теория пучков матриц вида $A + \lambda B$, где A и B — произвольные прямоугольные матрицы одних и тех же размеров. Подобно тому как исследование регулярных пучков матриц $A + \lambda B$ проводится на основе теории элементарных делителей Вейерштрасса, изучение сингулярных пучков опирается на теорию минимальных индексов Кронекера, которая является как бы дальнейшим развитием теории элементарных делителей Вейерштрасса. С помощью теории Кронекера (автору кажется, что ему удалось упростить изложение этой теории) в главе XII устанавливается каноническая форма пучка матриц $A + \lambda B$ в самом общем случае. Полученные результаты применяются к исследованию системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В главе XIII излагаются замечательные спектральные свойства матриц с неотрицательными элементами и рассматриваются две важные области применений матриц этого класса: 1) однородные цепи Маркова в теории вероятностей и 2) осцилляционные свойства упругих колебаний в механике. Матричный метод исследования однородных цепей Маркова получил свое развитие в работах В. И. Романовского [29] и опирается на тот факт, что матрица переходных вероятностей в однородной цепи Маркова с конечным числом состояний является матрицей с неотрица тельными элементами специального типа («стохастическая матрица»).

Осцилляционные свойства упругих колебаний связаны с другим важным классом неотрицательных матриц — с «осцилляционными матрицами». Эти матрицы и их приложения были исследованы М. Г. Крейном совместно с автором настоящей книги. В главе XIII изложены только некоторые основные результаты из этой области. Подробное же изложение всего этого материала читатель найдет в монографии [7].

В главе XV собраны приложения теории матриц к системам дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В этой главе центральное место (§§ 5—9) занимают теория мультипликативного интеграла и связанное с ним инфинитезимальное исчисление Вольтерра. Эти вопросы почти совсем не освещены в советской математической литературе. В первых параграфах и в § 11 изучаются приводимые (по Ляпунову) системы в связи с задачей об устойчивости движения и приводятся некоторые результаты Н. П. Еругина. §§ 9—11 относятся к аналитической теории систем дифференциальных уравнений. Здесь выясняется ошибочность основной теоремы Биркгоффа, которую обычно используют для исследования решения системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки, и устанавливается канонический вид решения в случае регулярной особой точки.

В § 12 главы XV в обзорном порядке излагаются некоторые результаты фундаментальных исследований И. А. Лаппо-Данилевского по аналитическим функциям от многих матриц и их применениям к дифференциальным системам.

Последняя глава (XVI) посвящена применениям теории квадратичных форм (и, в частности, ганкелевых форм) к проблеме Рауса — Гурвица об определении числа корней многочлена, лежащих в правой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, z > 0$). В первых параграфах этой главы приводится классическая трактовка вопроса. В § 5 дана теорема А. М. Ляпунова, в которой устанавливается критерий устойчивости, эквивалентный критерию Рауса — Гурвица. Наряду с критерием устойчивости Рауса — Гурвица в § 11 этой главы выводится сравнительно мало известный критерий Льенара и Шипара, в котором число детерминантных неравенств примерно вдвое меньше, нежели в критерии Рауса — Гурвица.

В конце главы XVI показана тесная связь с задачами устойчивости двух замечательных теорем А. А. Маркова и П. Л. Чебышева, которые были получены знаменитыми авторами на основе теории разложения в ряд по убывающим степеням аргумента некоторых непрерывных дробей специального типа. Здесь же дается матричное доказательство этих теорем.

Таков краткий перечень содержания настоящей книги.

В заключение автор приносит свою искреннюю благодарность Д. К. Фаддееву, В. П. Потапову и Д. М. Котелянскому, прочитавшим рукопись книги и сделавшим много существенных замечаний, которые были учтены автором при подготовке книги к печати. Автор выражает также свою благодарность М. Г. Крейну и А. И. Узкову за ценные советы, использованные автором при написании книги.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Среди существующей литературы по теории матриц монография Ф. Р. Гантмахера занимает общепризнанно одно из лучших мест. Это объясняется систематичностью, широтой рассмотренных вопросов и четкостью изложения. Первое издание этой книги, вышедшее в 1953—1954 гг., было затем переведено на немецкий и английский языки.

В последние годы своей жизни Ф. Р. Гантмахер очень много времени уделил пересмотру и расширению этой книги. Изменения, сделанные им, частично касаются стиля (приведение некоторых терминов в соответствие с новыми традициями, улучшение отдельных доказательств и т. д.). Однако помимо этого было добавлено много нового материала, главным образом во второй, специальной, части книги. Отдельная новая глава XIV («Различные критерии регулярности и локализация собственных значений») посвящена различным методам приближенного отыскания собственных значений. Добавлены также § 5 гл. V («Некоторые свойства функций от матриц»), § 17 гл. XVI («Связь между определителями Гурвица и определителями Маркова») и два параграфа (§ 5 гл. I, § 16 гл. IX) о псевдообратных операторах и матрицах.

Известно, что автор был намерен включить в свою книгу ряд недавно разработанных вопросов, связанных с комбинаторикой собственных значений в алгебре матриц. К этим вопросам относится, в частности, задача о распределении собственных значений суммы и произведения двух матриц, а также известные неравенства Вейля и их обобщения. В настоящем издании соответствующее добавление было написано В. Б. Лидским, которому принадлежит одна из первых работ в этом направлении. В. Б. Лидский также принимал участие в подготовке и редактировании второго издания этой книги.

Можно надеяться, что некоторое увеличение объема книги не затруднит ее чтения, но, напротив, доставит читателям много интересной и ценной информации.

Д. П. Желобенко

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

ГЛАВА I

МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 1. Матрицы. Основные обозначения

1. Пусть дано некоторое числовое поле K[1]).

Определение 1. Прямоугольную таблицу чисел из поля K

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

будем называть *матрицей*. Если $m=n$, то матрица называется *квадратной*, а число m, равное n, —ее *порядком*. В общем же случае матрица называется *прямоугольной* (с размерами $m \times n$) или $m \times n$-матрицей. Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами*.

Обозначения. При двухиндексном обозначении элементов первый индекс всегда указывает номер строки, а второй индекс—номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Наряду с обозначениями матрицы (1) будем употреблять и сокращенное обозначение:

$$\| a_{ik} \| \quad (i=1, 2, \ldots, m; \ k=1, 2, \ldots, n).$$

Часто матрицу (1) будем обозначать также одной буквой, например матрица A. Если A—квадратная матрица порядка n, то будем писать: $A = \| a_{ik} \|_1^n$. Определитель квадратной матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ будем обозначать так: $| a_{ik} |_1^n$ или $| A |$.

Введем сокращенные обозначения для определителей, составленных из элементов данной матрицы:

$$A \begin{pmatrix} i_1 i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_p} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \ldots & a_{i_2 k_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \ldots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

---

[1]) Под *числовым полем* понимают любую совокупность чисел, в пределах которой всегда выполнимы и однозначны четыре операции: сложение, вычитание, умножение и деление на число, отличное от нуля.

Примерами числовых полей могут служить совокупность всех рациональных чисел, совокупность всех действительных чисел или совокупность всех комплексных чисел.

Предполагается, что все встречающиеся в дальнейшем числа принадлежат данному исходному числовому полю.

Определитель (3) называется *минором* p-го порядка матрицы A, если $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant m$ и $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqslant n$.

$m \times n$-матрица $A = \| a_{ik} \|$ имеет $C_m^p C_n^p$ миноров p-го порядка

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant m \\ 1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqslant n \end{pmatrix}; \; p \leqslant m, n \Bigg). \qquad (2')$$

Миноры (2′), у которых $i_1 = k_1$, $i_2 = k_2$, ..., $i_p = k_p$, называются *главными*.

В обозначениях (2) определитель квадратной матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ запишется так:

$$|A| = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Наибольший из порядков отличных от нуля миноров, порождаемых матрицей, называется *рангом* матрицы. Если r — ранг прямоугольной матрицы A с размерами $m \times n$, то, очевидно, $r \leqslant m, n$.

Прямоугольную матрицу, состоящую из одного столбца

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix},$$

мы будем называть *столбцевой* и обозначать так: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Прямоугольную матрицу, состоящую из одной строки

$$\| z_1, z_2, \ldots, z_n \|,$$

мы будем называть *строчной* и обозначать так: $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$.

Квадратную матрицу, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю,

$$\begin{Vmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{Vmatrix}$$

мы будем называть *диагональной* и обозначать так: $\| d_i \delta_{ik} \|_1^n$[1]) или

$$\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}.$$

Введем еще специальные обозначения для строк и столбцов $m \times n$-матрицы $A = \| a_{ik} \|$. Будем обозначать i-ю строку матрицы A через $a_{i\cdot}$, а j-й столбец — через $a_{\cdot j}$:

$$\begin{gathered} a_{i\cdot} = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}], \\ a_{\cdot j} = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}] \\ (i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n). \end{gathered} \qquad (3)$$

---

[1]) Здесь δ_{ik} — символ Кронекера: $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$

Пусть m величин $y_1, y_2, \ldots, y_m$ выражаются линейно и однородно через n других величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n, \end{array}\right\} \tag{4}$$

или, в сокращенной записи,

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{4'}$$

Преобразование величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в величины $y_1, y_2, \ldots, y_m$ при помощи формул (4) называется *линейным преобразованием*. Коэффициенты этого преобразования образуют $m \times n$-матрицу (1). Задание линейного преобразования (4) однозначно определяет матрицу (1) и наоборот.

В следующем параграфе, исходя из свойств линейных преобразований (4), мы определим основные операции над прямоугольными матрицами.

§ 2. Сложение и умножение прямоугольных матриц

Определим основные операции над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на число и умножение матриц.

1. Пусть величины $y_1, y_2, \ldots, y_m$ выражаются через величины $x_1, x_2 \ldots, x_n$ при помощи линейного преобразования

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

а величины $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — через те же величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при помощи преобразования

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Тогда

$$y_i + z_i = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})\, x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

В соответствии с этим мы устанавливаем

Определение 2. *Суммой двух прямоугольных матриц* $A = \| a_{ik} \|$ и $B = \| b_{ik} \|$ одинаковых размеров $m \times n$ называется матрица $C = \| c_{ik} \|$ тех же размеров, элементы которой равны суммам соответствующих элементов данной матрицы:

$$C = A + B,$$

если

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Операция нахождения суммы данных матриц называется *сложением матриц*.

Пример.

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_3 \end{matrix} \right\| .$$

Согласно определению 2, складывать можно только прямоугольные матрицы одинаковых размеров.

В силу этого же определения матрица коэффициентов в преобразовании (7) есть сумма матриц коэффициентов в преобразованиях (5) и (6).

Из определения сложения матриц непосредственно следует, что эта операция обладает переместительным и сочетательным свойствами:

1° $$A+B=B+A,$$

2° $$(A+B)+C=A+(B+C).$$

Здесь A, B, C — произвольные прямоугольные матрицы одинаковых размеров.

Операция сложения матриц естественным образом распространяется на случай любого числа слагаемых.

2. Умножим в преобразовании (5) величины $y_1, y_2, \ldots, y_m$ на некоторое число α из K. Тогда

$$\alpha y_i = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ik}) x_k \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

В соответствии с этим имеет место

Определение 3. *Произведением матрицы* $A=\| a_{ik} \|$ $(i=1, 2, \ldots, m;$ $k=1, 2, \ldots, n)$ *на число* α из K называется матрица $C=\| c_{ik} \|$ $(i=1, 2, \ldots, m;$ $k=1, 2, \ldots, n)$, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A умножением на число α:

$$C=\alpha A,$$

если

$$c_{ik}=\alpha a_{ik} \qquad (i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, n).$$

Операция нахождения произведения матрицы на число называется *умножением матрицы на число.*

Пример.

$$\alpha \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 \end{matrix} \right\| .$$

Легко видеть, что

1° $$\alpha (A+B)=\alpha A+\alpha B,$$

2° $$(\alpha+\beta) A=\alpha A+\beta A,$$

3° $$(\alpha\beta) A = \alpha (\beta A).$$

Здесь A, B — прямоугольные матрицы одинаковых размеров, α, β — числа из поля K.

Разность $A-B$ двух прямоугольных матриц одинаковых размеров определяется равенством

$$A-B=A+(-1)B.$$

Если A — квадратная матрица порядка n, а α — число из K, то[1])

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|.$$

[1]) Здесь символы $|A|$ и $|\alpha A|$ обозначают определители матриц A и αA (см. стр. 13).

3. Пусть величины $z_1, z_2, \ldots, z_m$ выражаются через величины $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при помощи преобразования

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

а величины $y_1, \ldots, y_n$ выражаются через величины $x_1, x_2, \ldots, x_q$ при помощи формул

$$y_k = \sum_{j=1}^{q} b_{kj} x_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Тогда, подставляя эти выражения для y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в формулы (8), мы выразим $z_1, z_2, \ldots, z_m$ через $x_1, x_2, \ldots, x_q$ при помощи «составного» преобразования:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{q} b_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{q} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Big) x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{10}$$

В соответствии с этим имеет место

Определение 4. *Произведением двух прямоугольных матриц*

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{matrix} \right\|, \qquad B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2q} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nq} \end{matrix} \right\|$$

называется матрица

$$C = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2q} \\ \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} \ldots c_{mq} \end{matrix} \right\|,$$

у которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен «произведению» i-й строки первой матрицы A на j-й столбец второй матрицы B[1]):

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, q). \tag{11}$$

Операция нахождения произведения данных матриц называется *умножением матриц.*

Пример.

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3, & a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3, & a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, & a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3, & b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3, & b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, & b_1f_1 + b_2f_2 + b_3f_3 \end{matrix} \right\|.$$

[1]) Под произведением двух рядов чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ мы понимаем сумму произведений соответствующих чисел этих рядов: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

По определению 4 матрица коэффициентов в преобразовании (10) равна произведению матрицы коэффициентов в (8) на матрицу коэффициентов (9).

Заметим, что *операция умножения двух прямоугольных матриц выполнима лишь в том случае, когда число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором.* В частности, умножение всегда выполнимо, если оба сомножителя — квадратные матрицы одного и того же порядка. Обратим внимание читателя и на то, что даже в этом частном случае умножение матриц не обладает переместительным свойством. Так, например,

$$\left\|\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}8 & -2\\ 18 & -4\end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{matrix}\right\|.$$

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* или *коммутирующими* между собой.

Пример. Матрицы

$$A = \left\|\begin{matrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad B = \left\|\begin{matrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{matrix}\right\|$$

перестановочны между собой, так как

$$AB = \left\|\begin{matrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{matrix}\right\|, \quad BA = \left\|\begin{matrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{matrix}\right\|.$$

Легко проверяется сочетательное свойство умножения матриц, а также распределительное свойство умножения относительно сложения:

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & (AB)C = A(BC),\\ 2^\circ & (A+B)C = AC + BC,\\ 3^\circ & A(B+C) = AB + AC. \end{array} \tag{12}$$

Операция умножения матриц естественным образом распространяется на случай нескольких сомножителей.

4. Если воспользоваться произведением прямоугольных матриц, то линейное преобразование

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{13}$$

можно записать одним матричным равенством

$$\left\|\begin{matrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{matrix}\right\|,$$

или в сокращенной записи:

$$y = Ax. \tag{13'}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — столбцевые матрицы, $A = \| a_{ik} \|$ — прямоугольная матрица размеров $m \times n$.

Равенства (13) выражают собой тот факт, что столбец y является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$y = x_1 a_{\cdot 1} + x_2 a_{\cdot 2} + \ldots + x_n a_{\cdot n} = \sum_{k=1}^{n} x_k a_{\cdot k}. \qquad (13'')$$

Вернемся теперь к равенствам (11), которые эквивалентны одному матричному равенству

$$C = AB. \qquad (14)$$

Эти равенства могут быть записаны в виде

$$c_{\cdot j} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{\cdot k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, q) \qquad (14')$$

или в виде

$$c_{i \cdot} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k \cdot} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (14'')$$

Таким образом, любой j-й столбец матрицы-произведения $C = AB$ является линейной комбинацией столбцов первого сомножителя, т. е. матрицы A, причем коэффициенты этой линейной зависимости образуют j-й столбец во втором сомножителе B. Аналогично, любая i-я строка в матрице C является линейной комбинацией строк матрицы B, а коэффициентами этой линейной зависимости являются элементы i-й строки матрицы A[1]).

Остановимся еще на том частном случае, когда в произведении $C = AB$ второй сомножитель является квадратной и притом диагональной матрицей $B = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Тогда из формул (11) следует:

$$c_{ij} = a_{ij} d_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е.

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \ldots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \ldots & a_{2n}d_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}d_1 & a_{m2}d_2 & \ldots & a_{mn}d_n \end{matrix} \right\|.$$

Аналогично

$$\left\| \begin{matrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & d_m \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \ldots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \ldots & d_2a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_ma_{m1} & d_ma_{m2} & \ldots & d_ma_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом, *при умножении прямоугольной матрицы A справа (слева) на диагональную матрицу $\{d_1, d_2, \ldots\}$ все столбцы (соответственно строки) матрицы A помножаются на числа $d_1, d_2, \ldots$*

---

[1]) Следовательно, матричные уравнения $AX = C$, где A и C — заданные соответственно $m \times n$- и $m \times q$-матрицы, а X — искомая $n \times q$-матрица, имеет решение в том и только в том случае, когда столбцы матрицы C являются линейными комбинациями столбцов матрицы A. Для уравнения $XB = C$ необходимое и достаточное условие существования решения X состоит в том, что строки матрицы C должны быть линейными комбинациями строк матрицы B.

5. Пусть квадратная матрица $C = \| c_{ij} \|_1^m$ является произведением двух прямоугольных матриц $A = \| a_{ik} \|$ и $B = \| b_{kj} \|$ соответственно размеров $m \times n$ и $n \times m$:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

т. е.

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m). \tag{15'}$$

Установим важную формулу Бине—Коши, выражающую определитель $|C|$ через миноры матриц A и B:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & \ldots & a_{1k_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mk_1} & \ldots & a_{mk_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & \ldots & b_{k_1 m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k_m 1} & \ldots & b_{k_m m} \end{vmatrix} \tag{16}$$

или в специальных обозначениях (см. стр. 13):

$$C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leqslant n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}. \tag{16'}$$

Согласно этой формуле *определитель матрицы C равен сумме произведений всевозможных миноров максимального (m-го) порядка*[1] *матрицы A на соответствующие миноры того же порядка матрицы B.*

Вывод формулы Бине—Коши. На основании формулы (15′) определитель матрицы C можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{\alpha_1=1}^{n} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \ldots & \sum\limits_{\alpha_m=1}^{n} a_{1\alpha_m} b_{\alpha_m m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_{\alpha_1=1}^{n} a_{m\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \ldots & \sum\limits_{\alpha_m=1}^{n} a_{m\alpha_m} b_{\alpha_m m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \ldots & a_{1\alpha_m} b_{\alpha_m m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \ldots & a_{m\alpha_m} b_{\alpha_m m} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m = 1}^{n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \end{pmatrix} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_m m}. \tag{16''}$$

Если $m > n$, то среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ всегда найдутся равные между собой числа и, следовательно, каждое слагаемое в правой части равенства (16″) будет равно нулю. Значит, в этом случае $|C| = 0$.

Пусть теперь $m \leqslant n$. Тогда в сумме, стоящей в правой части равенства (16″), будут равны нулю те слагаемые, у которых хотя бы два из индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ равны между собой. Все же остальные слагаемые этой суммы можно разбить на группы по $m!$ слагаемых

[1]) Если $m > n$, то матрицы A и B не имеют миноров m-го порядка. В этом случае правые части формул (16) и (16′) следует заменить нулями.

в каждой, объединяя в одну группу те слагаемые, которые отличаются друг от друга только порядком индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ в пределах каждой группы слагаемых имеют одну и ту же совокупность значений). Тогда в пределах одной такой группы сумма соответствующих слагаемых будет равна [1])

$$\sum \varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & m\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_m\end{pmatrix} b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_m m} =$$
$$= A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & m\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_m\end{pmatrix} \sum \varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) b_{\alpha_1 1} b_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_m m} =$$
$$= A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & m\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \ldots & k_m\\ 1 & 2 & \ldots & m\end{pmatrix}.$$

Поэтому из (16″) получаем (16′).

Пример 1.

$$\left\| \begin{matrix} a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n & a_1d_1 + a_2d_2 + \ldots + a_nd_n \\ b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n & b_1d_1 + b_2d_2 + \ldots + b_nd_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_n & d_n \end{matrix} \right\|.$$

Поэтому формула (16) дает так называемое тождество Коши

$$\left| \begin{matrix} a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n & a_1d_1 + a_2d_2 + \ldots + a_nd_n \\ b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_nc_n & b_1d_1 + b_2d_2 + \ldots + b_nd_n \end{matrix} \right| = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \left| \begin{matrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} c_i & d_i \\ c_k & d_k \end{matrix} \right|.$$

Полагая в этом тождестве $a_i = c_i$, $b_i = d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получим:

$$\left| \begin{matrix} a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n & b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \end{matrix} \right| = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \left| \begin{matrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{matrix} \right|^2.$$

В случае, когда a_i и b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — вещественные числа, отсюда следует известное неравенство

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

При этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда все числа a_i пропорциональны соответствующим числам b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример 2.

$$\left\| \begin{matrix} a_1c_1 + b_1d_1 & \ldots & a_1c_n + b_1d_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_nc_1 + b_nd_1 & \ldots & a_nc_n + b_nd_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} c_1 & \ldots & c_n \\ d_1 & \ldots & d_n \end{matrix} \right\|.$$

Поэтому[2]) при $n > 2$

$$\left| \begin{matrix} a_1c_1 + b_1d_1 & \ldots & a_1c_n + b_1d_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_nc_1 + b_nd_1 & \ldots & a_nc_n + b_nd_n \end{matrix} \right| = 0.$$

---

[1]) Здесь $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ — нормальное расположение индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, а $\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = (-1)^N$, где N — число транспозиций индексов, необходимых для преобразования перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ к нормальному расположению $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$.

[2]) См. сноску на стр. 20.

Рассмотрим частный случай, когда A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка n, и положим в (16') $m=n$. Тогда приходим к известной теореме об умножении определителей:

$$C\begin{pmatrix}1 & 2 \dots n\\ 1 & 2 \dots n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1 & 2 \dots n\\ 1 & 2 \dots n\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1 & 2 \dots n\\ 1 & 2 \dots n\end{pmatrix},$$

или в других обозначениях:

$$|C|=|AB|=|A|\cdot|B|. \tag{17}$$

Таким образом, *определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц.*

6. Формула Бине — Коши дает возможность в самом общем случае выразить миноры произведения двух прямоугольных матриц через миноры сомножителей. Пусть

$$A=\|a_{ik}\|,\quad B=\|b_{kj}\|,\quad C=\|c_{ij}\|$$
$$(i=1,\ 2,\dots,m;\ k=1,\ 2,\dots,\ n;\ j=1,\ 2,\dots,q)$$

и

$$C=AB.$$

Рассмотрим произвольный минор матрицы C:

$$C\begin{pmatrix}i_1 & i_2 \dots i_p\\ j_1 & j_2 \dots j_p\end{pmatrix}\quad \left(1 \begin{matrix}\leqslant i_1<i_2<\dots<i_p\leqslant m\\ \leqslant j_1<j_2<\dots<j_p\leqslant q\end{matrix};\ p\leqslant m,\ q\right).$$

Матрица, составленная из элементов этого минора, представляет собой произведение двух прямоугольных матриц

$$\begin{Vmatrix}a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{i_p 1} & a_{i_p 2} & \dots & a_{i_p n}\end{Vmatrix},\qquad \begin{Vmatrix}b_{1 j_1} & \dots & b_{1 j_p}\\ b_{2 j_1} & \dots & b_{2 j_p}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ b_{n j_1} & & b_{n j_p}\end{Vmatrix}.$$

Поэтому, применяя формулу Бине—Коши, получаем:

$$C\begin{pmatrix}i_1 & i_2 \dots i_p\\ j_1 & j_2 \dots j_p\end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\dots<k_p\leqslant n} A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 \dots i_p\\ k_1 & k_2 \dots k_p\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1 & k_2 \dots k_p\\ j_1 & j_2 \dots j_p\end{pmatrix}\text{[1]} \tag{18}$$

При $p=1$ формула (18) переходит в формулу (11). При $p>1$ формула (18) является естественным обобщением формулы (11).

Отметим еще одно следствие из формулы (18).

Ранг произведения двух прямоугольных матриц не превосходит ранга любого из сомножителей.

Если $C=AB$ и r_A, r_B, r_C — ранги матриц A, B, C, то

$$r_C\leqslant r_A,\ r_B.$$

7. Если X — решение матричного уравнения $AX=C$ (размеры матриц A, X и C соответственно $m\times n$, $n\times q$ и $m\times q$), то $r_X\geqslant r_C$. Покажем, что *среди решений матричного уравнения $AX=C$ существует решение X_0 минимального ранга, для которого $r_{X_0}=r_C$.*

---

[1] Из той же формулы Бине — Коши следует, что миноры p-го порядка матрицы C при $p>n$ (если миноры таких порядков имеются) все равны нулю. В этом случае правую часть формулы (18) следует заменить нулем. См. сноску на стр. 20.

Действительно, пусть $r=r_C$. Тогда среди столбцов матрицы C имеется r линейно независимых[1]). Пусть для конкретности первые r столбцов $C_{\cdot 1}, \ldots, C_{\cdot r}$ линейно независимы, а остальные столбцы $C_{\cdot r+1}, \ldots, C_{\cdot q}$ являются линейными комбинациями первых r:

$$C_{\cdot j}=\sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk} C_{\cdot k} \qquad (j=r+1, \ldots, q). \tag{19}$$

Пусть X — произвольное решение уравнения $AX=C$. Тогда (см. стр. 19)

$$AX_{\cdot k}=C_{\cdot k} \qquad (k=1, \ldots, r). \tag{20}$$

Определим столбцы $\widetilde{X}_{\cdot r+1}, \ldots, \widetilde{X}_{\cdot q}$ равенствами

$$X_{\cdot j}=\sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk} X_{\cdot k} \qquad (j=r+1, \ldots, q).$$

Умножая эти равенства слева почленно на A, в силу равенств (19) и (20) находим:

$$A\widetilde{X}_{\cdot j}=C_{\cdot j} \qquad (j=r+1, \ldots, q). \tag{20'}$$

Система из q равенств (20) и (20′) эквивалентна одному матричному равенству

$$AX_0=C,$$

где $X_0=(X_{\cdot 1}, \ldots, X_{\cdot r}, \widetilde{X}_{\cdot r+1}, \ldots, \widetilde{X}_{\cdot q})$ — матрица ранга r[2]).

Решение X_0 минимального ранга r_C матричного уравнения $AX=C$ всегда представимо в виде

$$X_0=VC,$$

где V — некоторая $n \times m$-матрица.

Действительно, из равенства $AX_0=C$ следует, что строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы X_0. Поскольку как среди строк матрицы C, так и среди строк матрицы X_0 имеется одно и то же число r_C линейно независимых[3]), то и, обратно, строки матрицы X_0 являются линейными комбинациями строк матрицы C, а отсюда уже следует равенство $X_0=VC$.

Докажем теперь следующее предложение[4]).

Матричное уравнение

$$AXB=C, \tag{21}$$

где A, B — заданные, а X — искомая прямоугольная матрица[5]), *имеет решение в том и только том случае, когда одновременно имеют решения матричные уравнения*

$$AY=C, \qquad ZB=C, \tag{22}$$

т. е. когда столбцы матрицы C являются линейными комбинациями столбцов матрицы A, а строки матрицы C являются линейными комбинациями строк матрицы B.

В самом деле, если матрица X — решение уравнения (21), то матрицы $Y=XB$ и $Z=AX$ являются решениями уравнений (22).

Обратно, пусть существуют решения Y, Z уравнений (22). Тогда первое из этих уравнений имеет решение Y_0 минимального ранга r_C, которое по доказанному представимо в виде

$$Y_0=VC.$$

Поэтому

$$C=AY_0=AVC=AVZB.$$

Тогда матрица $X=VZ$ будет решением уравнения (21).

---

[1]) Мы ссылаемся на хорошо известное положение: ранг матрицы равен числу линейно независимых столбцов (строк) матрицы. Доказательство этого положения приведено в гл. III, стр. 68.

[2]) В матрице X_0 последние $n-r$ столбцов являются линейными комбинациями первых r; первые же r столбцов $X_{\cdot 1}, \ldots, X_{\cdot r}$ линейно независимы, так как линейная зависимость между этими столбцами в силу равенств (20) повлекла бы линейную зависимость между столбцами $C_{\cdot 1}, \ldots, C_{\cdot r}$.

[3]) См. сноску на стр. 19.

[4]) См. [232], [199].

[5]) Предполагается, что размеры матриц A, X, B, C таковы, что произведение AXB имеет смысл и имеет размеры матрицы C.

§ 3. Квадратные матрицы

1. Квадратную матрицу n-го порядка, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, будем называть *единичной матрицей* и обозначать через $E^{(n)}$ или просто E. Название «единичная матрица» связано со следующим свойством матрицы E: для любой прямоугольной матрицы

$$A=\|a_{ik}\| \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,m;\ k=1,\ 2,\ \ldots,n)$$

имеют место равенства

$$E^{(m)}A=AE^{(n)}=A.$$

Очевидно,

$$E^{(n)}=\|\delta_{ik}\|_1^n.$$

Пусть $A=\|a_{ik}\|_1^n$ — квадратная матрица. Тогда *степень матрицы* определяется обычным образом:

$$A^p=\underbrace{AA\ldots A}_{p\ \text{раз}} \quad (p=1,\ 2,\ \ldots); \qquad A^0=E.$$

Из сочетательного свойства умножения матриц следует:

$$A^q=A^{p+q}.$$

Здесь p, q — произвольные целые неотрицательные числа.

Рассмотрим многочлен (целую рациональную функцию) с коэффициентами из поля K:

$$f(t)=\alpha_0t^m+\alpha_1t^{m-1}+\ldots+\alpha_m.$$

Тогда под $f(A)$ будем понимать матрицу

$$f(A)=\alpha_0A^m+\alpha_1A^{m-1}+\ldots+\alpha_mE.$$

Так определяется *многочлен от матрицы*.

Пусть многочлен $f(t)$ равен произведению многочленов $h(t)$ и $g(t)$:

$$f(t)=h(t)\,g(t).$$

Многочлен $f(t)$ получается из $h(t)$ и $g(t)$ путем почленного перемножения и приведения подобных членов. При этом используется правило перемножения степеней: $t^pt^q=t^{p+q}$. Так как все эти действия правомерны и при замене скалярной величины t на матрицу A, то

$$f(A)=\ (A)\,g(A).$$

Отсюда, в частности,

$$h(A)\,g(A)=g(A)\,h(A)\,^{1)},$$

т. е. *два многочлена от одной и той же матрицы всегда перестановочны между собой.*

---

[1]) Так как каждое из этих произведений равно одному и тому же $f(A)$, поскольку и $g(t)\,h(t)=f(t)$. Следует отметить, что подстановка матриц в алгебраическое тождество с **несколькими** переменными неправомерна. Впрочем, перестановочные между собой матрицы можно подставлять и в этом случае.

Примеры.

Условимся p-й *наддиагональю* (*поддиагональю*) в прямоугольной матрице $A=\|a_{ik}\|$ называть ряд элементов a_{ik}, у которых $k-i=p$ (соответственно $i-k=p$). Обозначим через H квадратную матрицу n-го порядка, у которой элементы первой наддиагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю. Тогда

$$H=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad H^2=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & & & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\| \text{ и т. д.;}$$

$$H^p=0 \quad (p\geqslant n).$$

В силу этих равенств, если

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\dots+a_{n-1}t^{n-1}+\dots$$

— многочлен относительно t, то

$$f(H)=a_0E+a_1H+a_2H^2+\dots=\left\|\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \cdot \\ \cdot & & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & a_2 \\ \cdot & & & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{matrix}\right\|.$$

Аналогично, если F — квадратная матрица n-го порядка, у которой все элементы первой поддиагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю, то

$$f(F)=a_0E+a_1F+a_2F^2+\dots=\left\|\begin{matrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{matrix}\right\|.$$

Предлагаем читателю проверить следующие свойства матриц H и F:

1° *В результате умножения произвольной $m\times n$-матрицы A слева на матрицу H (матрицу F) m-го порядка все строки матрицы A поднимаются (опускаются) на одно место вверх (вниз), первая (последняя) строка матрицы A исчезает, а последняя (первая) строка произведения заполняется нулями.* Так, например,

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix}\right\|.$$

2° *В результате умножения произвольной $m\times n$-матрицы A справа на матрицу H (F) n-го порядка все столбцы матрицы A сдвигаются вправо (влево) на одно место, при этом последний (первый) столбец матрицы A исчезает, а первый* *(последний) столбец произведения заполняется нулями.* Так, например,

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

2. Квадратную матрицу будем называть *особенной*, если $|A| = 0$. В противном случае квадратная матрица A называется *неособенной*.

Пусть $A = \| a_{ik} \|_1^n$ — неособенная матрица ($|A| \neq 0$). Рассмотрим линейное преобразование с матрицей коэффициентов A

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Рассматривая равенства (23) как уравнения относительно $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ и замечая, что определитель системы уравнений (23) по условию отличен от нуля, мы можем однозначно по известным формулам выразить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$x_i = \frac{1}{|A|} \left| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1,\,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2,\,i-1} & y_2 & a_{2,\,i+1} \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} \ldots a_{n,\,i-1} & y_n & a_{n,\,i+1} \ldots a_{nn} \end{matrix} \right| \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(-1)} y_k \; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

Мы получили «обратное» преобразование для (23). Матрицу коэффициентов этого преобразования

$$A^{-1} = \| a_{ik}^{(-1)} \|_1^n$$

мы назовем *обратной матрицей* для матрицы A. Из (24) легко усмотреть, что

$$a_{ik}^{(-1)} = \frac{A_{ki}}{|A|} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

где A_{ki} — алгебраическое дополнение (адъюнкта) элемента a_{ki} в определителе $|A|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Так, например, если

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\| \text{ и } |A| \neq 0,$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \left\| \begin{matrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 & a_3 c_2 - a_2 c_3 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 & a_1 c_3 - a_3 c_1 & a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 & a_2 c_1 - a_1 c_2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{matrix} \right\|.$$

Образуя составное преобразование из данного преобразования (23) и обратного (24) в одном и в другом порядке, мы в обоих случаях получаем тождественное преобразование (с единичной матрицей коэффициентов); поэтому

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{26}$$

В справедливости равенств (26) можно убедиться и непосредственным перемножением матриц A и A^{-1}. Действительно, в силу (25)[1])

$$[AA^{-1}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}^{(-1)} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Аналогично

$$[A^{-1}A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(-1)}a_{kj} = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \delta_{ij} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Нетрудно видеть, что матричные уравнения

$$AX = E \quad \text{и} \quad XA = E \qquad (|A| \neq 0) \tag{27}$$

никаких других решений, кроме решения $X = A^{-1}$ не имеют. Действительно, умножая обе части первого уравнения слева, а второго — справа на A^{-1} и используя сочетательное свойство произведения матриц, а также равенства (26), мы в обоих случаях получим [2]):

$$X = A^{-1}.$$

Этим же способом доказывается, что каждое из матричных уравнений

$$AX = B, \quad XA = B \qquad (|A| \neq 0), \tag{28}$$

где X и B — прямоугольные матрицы равных размеров, A — квадратная матрица соответствующего размера, имеет одно и только одно решение:

$$X = A^{-1}B \text{ и соответственно } X = BA^{-1}. \tag{29}$$

Матрицы (29) являются как бы «левым» и «правым» частными от «деления» матрицы B на матрицу A. Из (28) и (29) следует соответственно (см. стр. 22) $r_B \leqslant r_X$ и $r_X \leqslant r_B$, т. е. $r_X = r_B$. Сопоставляя с (28), имеем:

При умножении прямоугольной матрицы слева или справа на неособенную матрицу ранг исходной матрицы не изменяется.

Заметим еще, что из (26) вытекает $|A||A^{-1}| = 1$, т. е.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Для произведения двух неособенных матриц имеем:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{30}$$

---

1) Здесь мы используем известное свойство определителя, согласно которому сумма произведений элементов какого-либо столбца на их адъюнкты равна величине определителя, а сумма произведений элементов столбца на адъюнкты соответствующих элементов другого столбца равна нулю.

2) Если A — особенная матрица, то уравнения (27) не имеют решений. Действительно, если бы какое-либо из этих уравнений имело решение $X = \| x_{ik} \|_1^n$, то тогда было бы в силу теоремы об умножении определителей [см. формулу (17)] $|A||X| = |E| = 1$, что невозможно при $|A| = 0$.

3. Все матрицы n-го порядка образуют кольцо[1]) с единичным элементом E. Поскольку в этом кольце определена операция умножения на число из поля K и существует базис из n^2 линейно независимых матриц, через которые линейно выражаются все матрицы n-го порядка [2]), то кольцо матриц n-го порядка является *алгеброй* [3]).

Все квадратные матрицы n-го порядка образуют коммутативную группу относительно операции сложения[4]). Все неособенные матрицы n-го порядка образуют (некоммутативную) группу относительно операции умножения.

Квадратная матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$ называется *верхней треугольной* (*нижней треугольной*), если равны нулю все элементы матрицы, расположенные под главной диагональю (над главной диагональю):

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \ddots \quad \vdots \\ 0 & 0 \ldots a_{nn} \end{matrix} \right\|, \qquad A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & 0 \ \ldots \ 0 \\ a_{21} & a_{22} \ldots 0 \\ \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{matrix} \right\|.$$
$$(1) \qquad\qquad\qquad (2)$$

Диагональная матрица является частным случаем как верхней, так и нижней треугольной матрицы.

Так как определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, то треугольная (и, в частности, диагональная) матрица является неособенной только тогда, когда все ее диагональные элементы отличны от нуля.

Легко проверить, что сумма и произведение двух диагональных (верхних треугольных, нижних треугольных) матриц есть диагональная (соответственно верхняя треугольная, нижняя треугольная) матрица и что обратная матрица для неособенной диагональной (верхней треугольной, нижней треугольной) матрицы является матрицей того же типа. Поэтому

1° Все диагональные, все верхние треугольные, все нижние треугольные матрицы n-го порядка образуют три коммутативные группы относительно операции сложения.

2° Все неособенные диагональные матрицы образуют коммутативную группу относительно умножения.

3° Все неособенные верхние (нижние) треугольные матрицы составляют группу (некоммутативную) относительно умножения.

---

[1]) *Кольцом* называется совокупность элементов, в которой определены и всегда однозначно выполнимы две операции: «сложение» двух элементов (с переместительным и сочетательным свойствами) и «умножение» двух элементов (с сочетательным и распределительным относительно сложения свойствами), причем сложение обратимо. См., например, [20], стр. 15, 25 и 100 или [39], стр. 333.

[2]) Действительно, произвольная матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$ с элементами из K представима в виде $A = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} E_{ik}$, где E_{ik} — матрица n-го порядка, у которой на пересечении i-й строки и k-го столбца стоит 1, а все остальные элементы равны 0.

[3]) См., например, [20], стр. 101.

[4]) *Группой* называется всякая совокупность объектов, в которой установлена операция, относящая любым двум элементам a и b совокупности определенный третий элемент $a \ast b$ той же совокупности, если 1) операция обладает сочетательным свойством $[(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c)]$, 2) существует в совокупности единичный элемент e $(a \ast e = e \ast a = a)$ и 3) для любого элемента a совокупности существует обратный элемент a^{-1} $(a \ast a^{-1} = a^{-1} \ast a = e)$. Группа называется *коммутативной* или *абелевой*, если групповая операция обладает переместительным свойством. Относительно понятия группы см., например, [20], стр. 310 и далее.

4. В заключение этого параграфа укажем на две важные операции над матрицами — *транспонирование* матрицы и переход к *сопряженной* матрице.

Если $A = \| a_{ik} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$, то транспонированная матрица A' определяется равенством $A' = \| a'_{ik} \|$, где $a'_{ki} = a_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$. Сопряженная же матрица $A^* = \| a^*_{ik} \|$, где $a^*_{ki} = \overline{a'_{ki}} = \overline{a}_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$[1]. Если матрица A имеет размеры $m \times n$, то матрицы A' и A^* имеют размеры $n \times m$.

Легко проверяются свойства[2]:

$$1^\circ \qquad (A+B)' = A' + B', \qquad (A+B)^* = A^* + B^*.$$

$$2^\circ \qquad (\alpha A)' = \alpha A', \qquad (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*.$$

$$3^\circ \qquad (AB)' = B'A', \qquad (AB)^* = B^*A^*.$$

$$4^\circ \qquad (A^{-1})' = (A')^{-1}, \qquad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

$$5^\circ \qquad (A')' = A, \qquad (A^*)^* = A.$$

Если квадратная матрица $S = \| s_{ik} \|_1^n$ совпадает со своей транспонированной $(S' = S)$, то такая матрица называется *симметрической*. Если же квадратная матрица $H = \| h_{ik} \|$ совпадает со своей сопряженной $(H^* = H)$, то она называется *эрмитовой*. В симметрической матрице элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, равны, а в эрмитовой они комплексно сопряжены между собой. Диагональные элементы эрмитовой матрицы всегда вещественны. Заметим, что произведение двух симметрических (эрмитовых) матриц, вообще говоря, не является симметрической (эрмитовой) матрицей. В силу 3° это имеет место только в том случае, когда данные две симметрические или эрмитовы матрицы перестановочны между собой.

Если A — *вещественная* матрица, т. е. матрица с вещественными элементами, то $A^* = A'$. Эрмитова вещественная матрица всегда является симметрической.

С каждой прямоугольной матрицей $A = \| a_{ik} \|$ размеров $m \times n$ связаны две эрмитовы матрицы AA^* и A^*A размеров $m \times m$ и $n \times n$. Любое из равенств $AA^* = 0$ или $A^*A = 0$ влечет за собой[3] равенство $A = 0$.

Если квадратная матрица $K = \| k_{ij} \|_1^n$ отличается множителем -1 от своей транспонированной $(K' = -K)$, то такая матрица называется *кососимметрической*. В кососимметрической матрице любые два элемента, расположенные симметрично относительно главной диагонали, отличаются друг от друга множителем -1, а диагональные элементы равны нулю. Из 3° следует, что произведение двух перестановочных между собой кососимметрических матриц является симметрической матрицей[4].

---

[1]) Чертой обозначается переход к комплексно сопряженной величине.

[2]) В формулах 1°, 2°, 3° и 5° A, B — произвольные прямоугольные матрицы, для которых соответствующие операции выполнимы, а α — произвольное комплексное число. В формуле 4° A — произвольная квадратная неособенная матрица.

[3]) Это следует из того, что сумма диагональных элементов в каждой из матриц AA^* и A^*A равна $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} | a_{ik} |^2$.

[4]) Относительно представления квадратной матрицы A в виде произведения двух симметрических $(A = S_1 S_2)$ либо двух кососимметрических матриц $(A = K_1 K_2)$ см. [247].

§ 4. Ассоциированные матрицы. Миноры обратной матрицы

Пусть дана матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$. Рассмотрим всевозможные миноры p-го $(1 \leqslant p \leqslant n)$ порядка матрицы A:

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} \left(1 \leqslant \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_p \\ k_1 < k_2 < \dots < k_p \end{matrix} \leqslant n \right). \tag{31}$$

Число этих миноров равно N^2, где $N = C_n^p$ — число сочетаний из n по p. Для того чтобы расположить миноры (31) в квадратную таблицу, занумеруем в определенном (например, лексикографическом) порядке все сочетания по p из n индексов $1, 2, \dots, n$.

Если сочетания индексов $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ и $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ при этой нумерации будут иметь номера α и β, то минор (31) будем обозначать и так:

$$\mathfrak{a}_{\alpha\beta} = A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix}.$$

Давая α и β независимо друг от друга все значения от 1 до N, мы охватим все миноры p-го порядка матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$.

Квадратная матрица N-го порядка

$$\mathfrak{A}_p = \| \mathfrak{a}_{\alpha\beta} \|_1^N$$

называется p-й *ассоциированной матрицей* для матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$; p может принимать значения $1, 2, \dots, n$. При этом $\mathfrak{A}_1 = A$, а матрица $\mathfrak{A}_n$ состоит из одного элемента, равного $|A|$.

Замечание. Порядок нумерации сочетаний индексов фиксируется раз навсегда и не связан с выбором матрицы A.

Пример. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix}.$$

Перенумеруем все сочетания из четырех индексов 1, 2, 3, 4 по два, расположив их в следующем порядке:

(1 2) (1 3) (1 4) (2 3) (2 4) (3 4).

Тогда

$$\mathfrak{A}_2 = \begin{Vmatrix} A\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\3&4\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}1&4\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\3&4\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\3&4\end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix} \end{Vmatrix}.$$

Отметим некоторые свойства ассоциированных матриц:

1° *Из* $C = AB$ *следует* $\mathfrak{C}_p = \mathfrak{A}_p \mathfrak{B}_p$ $(p = 1, 2, \dots, n)$.

Действительно, выражая миноры p-го порядка $(1 \leqslant p \leqslant n)$ матрицы-произведения C через миноры того же порядка матриц-сомножителей по формуле (18), будем иметь:

$$C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_p & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < \dots < l_p \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ l_1 & l_2 & \dots & l_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix}$$

$$\left(1 \leqslant \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_p \\ k_1 < k_2 < \dots < k_p \end{matrix} \leqslant n\right). \tag{32}$$

Очевидно, в обозначениях этого параграфа равенство (32) может быть записано так:

$$\mathfrak{c}_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^{N} \mathfrak{a}_{\alpha\lambda}\mathfrak{b}_{\lambda\beta} \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \dots,\ N)$$

(здесь α, β, λ — номера сочетаний индексов $i_1 < i_2 < \dots < i_p$; $k_1 < k_2 < \dots$ $\dots < k_p$; $l_1 < l_2 < \dots < l_p$). Отсюда

$$\mathfrak{C}_p = \mathfrak{A}_p\mathfrak{B}_p \quad (p = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

2° *Из* $B = A^{-1}$ *следует*: $\mathfrak{B}_p = \mathfrak{A}_p^{-1}$ $(p = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

Это предложение непосредственно вытекает из предыдущего, если там положить $C = E$ и обратить внимание на то, что $\mathfrak{C}_p$ — единичная матрица порядка $N = C_n^p$.

Из предложения 2° вытекает важная формула, выражающая миноры обратной матрицы через миноры данной матрицы:

Если $B = A^{-1}$, то при любых $(1 \leqslant) \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_p \\ k_1 < k_2 < \dots < k_p \end{matrix} (\leqslant n)$

$$B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{p} i_\nu + \sum\limits_{\nu=1}^{p} k_\nu} A\begin{pmatrix} k'_1 k'_2 & \dots & k'_{n-p} \\ i'_1 i'_2 & \dots & i'_{n-p} \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}}, \tag{33}$$

где $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ вместе с $i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{n-p}$, а $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ вместе с $k'_1 < k'_2 < \dots < k'_{n-p}$ составляют полную систему индексов $1,\ 2,\ \dots,\ n$.

Действительно, из $AB = E$ следует:

$$\mathfrak{A}_p\mathfrak{B}_p = \mathfrak{C}_p$$

или в более подробной записи:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \mathfrak{a}_{\gamma\alpha}\mathfrak{b}_{\alpha\beta} = \delta_{\gamma\beta} = \begin{cases} 1 & (\gamma = \beta), \\ 0 & (\gamma \neq \beta). \end{cases} \tag{34}$$

Равенства (34) могут быть записаны еще так:

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_p \leqslant n} A\begin{pmatrix} j_1 j_2 & \dots & j_p \\ i_1 i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} i_1 i_2 & \dots & i_p \\ k_1 k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum\limits_{\nu=1}^{p} (j_\nu - k_\nu)^2 = 0, \\ 0, \text{ если } \sum\limits_{\nu=1}^{p} (j_\nu - k_\nu)^2 > 0 \end{cases} \tag{34'}$$

$$\left(1 \leqslant \begin{matrix} j_1 < j_2 < \dots < j_p \\ k_1 < k_2 < \dots < k_p \end{matrix} \leqslant n\right).$$

С другой стороны, применяя к определителю $|A|$ известные разложения Лапласа, получаем:

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_p\le n} A\begin{pmatrix} j_1 j_2 \ldots j_p \\ i_1 i_2 \ldots i_p\end{pmatrix}\cdot(-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{p} i_\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{p} k_\nu} A\begin{pmatrix} k'_1 k'_2 \ldots k'_{n-p} \\ i'_1 i'_2 \ldots i'_{n-p}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases} |A|, & \text{если } \sum\limits_{\nu=1}^{p}(j_\nu-k_\nu)^2=0, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{\nu=1}^{p}(j_\nu-k_\nu)^2>0, \end{cases} \tag{35}$$

где $i'_1<i'_2<\ldots<i'_{n-p}$ вместе с $i_1<i_2<\ldots<i_p$, а $k'_1<k'_2<\ldots<k'_{n-p}$ вместе с $k_1<k_2<\ldots<k_p$ образуют полную систему индексов $1, 2, \ldots, n$. Сопоставление (35) с (34′) и (34) показывает, что равенства (34) удовлетворятся, если вместо $\mathfrak{b}_{\alpha\beta}$ взять не $B\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_p \\ k_1 k_2 \ldots k_p\end{pmatrix}$, а

$$\frac{(-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{p} i_\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{p} k_\nu} A\begin{pmatrix} k'_1 k'_2 \ldots k'_{n-p} \\ i'_1 i'_2 \ldots i'_{n-p}\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1\ 2 \ldots n \\ 1\ 2 \ldots n\end{pmatrix}}.$$

Так как из системы (34) элементы $\mathfrak{b}_{\alpha\beta}$ обратной матрицы для $\mathfrak{A}_p$ определяются однозначно, то имеет место равенство (33).

§ 5. Обращение прямоугольных матриц. Псевдообратная матрица

Если A — квадратная и неособенная матрица, то для нее существует обратная матрица A^{-1}. Если же A — не квадратная, а прямоугольная $m\times n$-матрица ($m\ne n$) или квадратная, но особенная, то матрица A не имеет обратной и символ A^{-1} не имеет смысла. Однако, как будет показано далее, для произвольной прямоугольной матрицы A существует «псевдообратная» матрица A^+, которая обладает некоторыми свойствами обратной матрицы и имеет важные применения при решении системы линейных уравнений. В случае, когда A — квадратная неособенная матрица, псевдообратная матрица A^+ совпадает с обратной A^{-1} [1]).

1. С к е л е т н о е р а з л о ж е н и е м а т р и ц ы. В дальнейшем мы будем пользоваться представлением произвольной прямоугольной $m\times n$-матрицы $A=\|a_{ik}\|$ ранга r в виде произведения двух матриц B и C, имеющих соответственно размеры $m\times r$ и $r\times n$:

$$A=BC=\begin{Vmatrix} b_{11} \ldots b_{1r} \\ b_{21} \ldots b_{2r} \\ \ldots\ldots \\ b_{m1} \ldots b_{mr}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} c_{11}\ c_{12} \ldots c_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_{r1}\ c_{r2} \ldots c_{rn}\end{Vmatrix}\quad (r=r_A). \tag{36}$$

[1]) Приведенное далее в этом параграфе определение псевдообратной матрицы было дано в 1920 г. Муром, указавшим на важные применения этого понятия [214]. Позже независимо от Мура в несколько иной форме псевдообратная матрица определялась и исследовалась в работах Бьерхаммара [159], Пенрозе [227] и других авторов.

Здесь ранги сомножителей B и C обязательно равны рангу произведения A, $r_B=r_C=r$. Действительно (см. стр. 22), $r \leqslant r_B$, r_C. Но ранги r_B и r_C не могут превосходить r, так как r — один из размеров матриц B и C. Поэтому $r_B=r_C=r$.

Для того чтобы получить разложение (36), достаточно в качестве столбцов матрицы B взять любые r линейно независимых столбцов матрицы A, либо любые r линейно независимых столбцов, через которые линейно выражаются столбцы матрицы A[1]). Тогда произвольный j-й столбец матрицы A будет линейной комбинацией столбцов матрицы B с коэффициентами $c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{rj}$; эти коэффициенты и образуют j-й столбец матрицы C ($j=1, \ldots, n$, см. стр. 19)[2]).

Поскольку матрицы B и C имеют максимально возможный ранг r, то квадратные матрицы B^*B и CC^* являются неособенными:

$$|B^*B| \neq 0, \qquad |CC^*| \neq 0. \tag{37}$$

Действительно, пусть столбец x — произвольное решение уравнения

$$B^*Bx=0. \tag{38}$$

Помножим это уравнение слева на строку x^*. Тогда $x^*B^*Bx=(Bx)^*Bx=0$. Отсюда[3]) следует $Bx=0$ и (поскольку Bx — линейная комбинация линейно независимых столбцов матрицы B; ср. с формулой (13″)) $x=0$. Из того, что уравнение (38) имеет только нулевое решение $x=0$, вытекает, что $|B^*B| \neq 0$. Аналогично устанавливается второе неравенство (37)[4]).

Разложение (36) будем называть *скелетным* разложением матрицы A.

2. Существование и единственность псевдообратной матрицы. Рассмотрим матричное уравнение

$$AXA=A. \tag{39}$$

Если A — квадратная неособенная матрица, то это уравнение имеет единственное решение $X=A^{-1}$. Если же A — произвольная прямоугольная $m \times n$-матрица, то искомое решение X имеет размеры $n \times m$, но не определяется однозначно. В общем случае уравнение (39) имеет бесчисленное множество решений. Ниже будет показано, что среди этих решений имеется только одно, обладающее тем свойством, что его строки и столбцы являются линейными комбинациями соответственно строк и столбцов сопряженной матрицы A^*. Именно это решение мы будем называть псевдообратной матрицей для A и обозначать через A^+.

---

[1]) Мы исходим из известного положения: в матрице A ранга r имеется r линейно независимых столбцов, через которые линейно (т. е. в виде линейных комбинаций с числовыми коэффициентами из данного поля) выражаются все остальные столбцы. Аналогичное утверждение имеет место и для строк. Подробнее об этом см. гл. III, § 1.

[2]) Совершенно так же строками матрицы C могут быть любые r строк, через которые выражаются в виде линейных комбинаций все строки матрицы A. Тогда коэффициенты этих линейных комбинаций образуют строки матрицы B.

[3]) См. конец § 3.

[4]) Неравенства (37) также непосредственно следуют из формулы Бине—Коши. Согласно этой формуле определитель $|B^*B|$ ($|CC^*|$) равен сумме квадратов модулей всех миноров r-го порядка матрицы B (соответственно C).

Определение 5. Матрица A^+ размеров $n\times m$ называется *псевдообратной* для $m\times n$-матрицы A, если выполняются равенства[1])

$$AA^+A=A, \tag{40}$$

$$A^+=UA^*=A^*V, \tag{41}$$

где U и V — некоторые матрицы

Докажем сначала, что для данной матрицы A не может существовать двух различных псевдообратных матриц A_1^+ и A_2^+. Действительно, из равенств

$$AA_1^+A=AA_2^+A=A,\quad A_1^+=U_1A^*=A^*V_1,\quad A_2^+=U_2A^*=A^*V_2,$$

полагая $D=A_2^+-A_1^+$, $U=U_2-U_1$, $V=V_2-V_1$, найдем:

$$ADA=0,\quad D=UA^*=A^*V.$$

Отсюда

$$(DA)^*DA=A^*D^*DA=A^*V^*ADA=0$$

и, следовательно (см. конец § 3),

$$DA=0.$$

Но тогда $DD^*=DAU=0$, т. е. $D=A_2^+-A_1^+=0$.

Для того чтобы установить существование матрицы A^+, мы воспользуемся скелетным разложением (36) и будем искать сначала псевдообратные матрицы B^+ и C^+[2]). Так как по определению должны иметь место равенства

$$BB^+B=B,\quad B^+=\hat{U}B^*, \tag{42}$$

где $\hat{U}$ — некоторая матрица, то

$$B\hat{U}B^*B=B.$$

Умножая слева на B^* и замечая, что B^*B — неособенная квадратная матрица, найдем:

$$\hat{U}=(B^*B)^{-1}.$$

Но тогда второе из равенств (42) дает искомое выражение для B^+:

$$B^+=(B^*B)^{-1}B^*. \tag{43}$$

Совершенно аналогично найдем:

$$C^+=C^*(CC^*)^{-1}. \tag{44}$$

Покажем теперь, что матрица

$$A^+=C^+B^+=C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \tag{45}$$

удовлетворяет условиям (40), (41) и, следовательно, является псевдообратной матрицей для A.

---

[1]) Условия (41) означают, что строки (столбцы) матрицы A^+ являются линейными комбинациями строк (столбцов) матрицы A^* (см. сноску к стр. 19). Условия (41) могут быть заменены одним условием $A^+=A^*WA^*$, где W — некоторая матрица (см. конец § 2).

[2]) Из определения 5 сразу следует, что если $A=0$, то и $A^+=0$. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $A\neq 0$, и потому $r=r_A>0$.

В самом деле,

$$AA^+A = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = BC = A.$$

С другой стороны, из равенств (43), (44) и (45) с учетом равенства $A^* = C^*B^*$, полагая $K = (CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}$, находим

$$A^+ = C^*KB^* = C^*K(CC^*)^{-1}CC^*B^* = UC^*B^* = UA^*,$$
$$A^+ = C^*KB^* = C^*B^*B(B^*B)^{-1}KB^* = C^*B^*V = A^*V,$$

где

$$U = C^*K(CC^*)^{-1}C, \qquad V = B(B^*B)^{-1}KB^*.$$

Таким образом доказано, что для произвольной прямоугольной матрицы A существует одна и только одна псевдобратная матрица A^+, которая определяется формулой (45), где B и C — сомножители в скелетном разложении $A = BC$ матрицы A[1]). Из самого определения псевдообратной матрицы непосредственно следует, что в случае квадратной неособенной матрицы A псевдообратная матрица A^+ совпадает с обратной A^{-1}.

Пример. Пусть

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Здесь $r = 2$. Примем в качестве столбцов матрицы B первые два столбца матрицы A. Тогда

$$A = BC = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

и

$$B^*B = \left\| \begin{matrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{matrix} \right\|, \qquad (B^*B)^{-1} = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{matrix} \right\|,$$
$$CC^* = \left\| \begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix} \right\|, \qquad (CC^*)^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{3}E.$$

Поэтому согласно формуле (45)

$$A^+ = \frac{1}{3} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/9 & 1/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 & 1/9 \\ 4/9 & 1/9 & 5/9 \end{matrix} \right\|.$$

3. Свойства псевдообратной матрицы. Отметим следующие свойства псевдообратной матрицы:

1° $\quad (A^*)^+ = (A^+)^*;$

2° $\quad (A^+)^+ = A;$

3° $\quad (AA^+)^* = AA^+, \qquad (AA^+)^2 = AA^+;$

4° $\quad (A^+A)^* = A^+A, \qquad (A^+A)^2 = A^+A.$

[1]) Разложение (36) не определяет однозначно сомножителей BC. Однако поскольку, как было доказано, существует только одна псевдобратная матрица A^+, формула (45) при всех скелетных разложениях матрицы A дает одно и то же значение для A^+. В гл. II, § 5 будет изложен другой метод вычисления псевдообратной матрицы, использующий разбиение исходной матрицы на блоки (см. формулу (101) на стр. 64).

Первое свойство означает, что операции перехода к сопряженной и к псевдообратной матрице перестановочны между собой. Равенство 2° выражает собой взаимность понятия псевдообратной матрицы, так как согласно 2° псевдообратной матрицей для A^+ является исходная матрица A. Согласно равенствам 3° и 4° матрицы AA^+ и A^+A являются эрмитовыми и *инволютивными* (квадрат каждой из этих матриц равен самой матрице).

Для вывода равенства 1° воспользуемся скелетным разложением (36): $A = BC$. Тогда равенство $A^* = C^*B^*$ дает скелетное разложение матрицы A^*. Поэтому, заменяя в формуле (45) матрицу B на C^*, а матрицу C на B^*, получим:

$$(A^*)^+ = B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C = [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^* = (A^+)^*.$$

Равенства $A^+ = C^+B^+$, $B^+ = (B^*B)^{-1}B^*$, $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$ являются скелетными разложениями. Следовательно,

$$(A^+)^+ = (B^+)^+(C^+)^+ = (B^*)^+B^*BCC^*(C^*)^+.$$

Используя свойство 1°, а также выражения для B^+ и C^+, найдем:

$$(A^+)^+ = B(B^*B)^{-1}B^*BCC^*(CC^*)^{-1}C = BC = A.$$

Справедливость равенств 3° и 4° проверяется непосредственно путем подстановки в эти равенства вместо A^+ соответствующего выражения из формулы (45).

Заметим, что в общем случае, когда разложение $A = BC$ не является скелетным, не всегда имеет место равенство $A^+ = C^+B^+$. Так, например,

$$A = \|1\| = \|0 \quad 1\| \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| = BC.$$

Здесь

$$A^+ = A^{-1} = \|1\|, \qquad B^+ = \|0 \quad 1\|^+ = (\|1\| \cdot \|0 \quad 1\|)^+ = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| \|1\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$C^+ = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|^+ = \left(\left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\| \cdot \|1\| \right)^+ = \|1\| \cdot \|2\|^{-1} \|1 \quad 1\| = \|{}^1/_2 \quad {}^1/_2\|.$$

Поэтому

$$C^+B^+ = \|{}^1/_2 \ {}^1/_2\| \left\| \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\| = \|{}^1/_2\| \neq A^+.$$

4. Наилучшее приближенное решение (по методу наименьших квадратов). Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= y_m, \end{aligned} \tag{46}$$

или в матричной записи

$$Ax = y. \tag{46'}$$

Здесь $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — заданные числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — искомые.

В общем случае система (46) может быть и несовместной.

Столбец

$$x^0 = (x^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \tag{47}$$

называется *наилучшим приближенным решением* системы (46), если при значениях $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$ «квадратичное отклонение»

$$| y - Ax |^2 = \sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right|^2 \tag{48}$$

достигает своего наименьшего значения и среди всех столбцов x, для которых это отклонение имеет минимальное значение, столбец x^0 имеет наименьшую «длину», т. е. для этого столбца величина

$$| x |^2 = x^* x = \sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \tag{49}$$

имеет наименьшее значение.

Покажем, что система (46) всегда имеет одно и только одно наилучшее приближенное решение и это приближенное решение определяется по формуле

$$x^0 = A^+ y, \tag{50}$$

где A^+ — псевдообратная матрица для матрицы A.

Для этого рассмотрим произвольный столбец x и положим

$$y - Ax = u + v,$$

где

$$u = y - Ax^0 = y - AA^+ y, \qquad v = A(x^0 - x). \tag{51}$$

Тогда

$$\begin{aligned} | y - Ax |^2 &= (y - Ax)^* (y - Ax) = \\ &= (u + v)^* (u + v) = u^* u + v^* u + u^* v + v^* v. \end{aligned} \tag{52}$$

Но

$$v^* u = (x^0 - x)^* A^* (y - AA^+ y) = (x^0 - x)^* (A^* - A^* AA^+) y. \tag{53}$$

Исходя из разложения (36) и формулы (45), найдем:

$$A^* AA^+ = C^* B^* BCC^* (CC^*)^{-1} (B^* B)^{-1} B^* = C^* B^* = A^*.$$

Поэтому из равенства (53) следует

$$v^* u = 0, \tag{54}$$

но тогда и

$$u^* v = (v^* u)^* = 0. \tag{54'}$$

Поэтому из равенства (52) находим:

$$| y - Ax |^2 = | u |^2 + | v |^2 = | y - Ax^0 |^2 + | A(x^0 - x) |^2, \tag{55}$$

и, следовательно, для любого столбца x

$$| y - Ax | \geqslant | y - Ax^0 |. \tag{56}$$

Пусть теперь

$$| y - Ax | = | y - Ax^0 |;$$

тогда согласно равенству (55)

$$Az = 0, \tag{57}$$

где

$$z = x - x^0.$$

С другой стороны,

$$|x|^2=(x^0+z)^*(x^0+z)=|x^0|^2+|z|^2+(x^0)^*z+z^*x^0. \tag{58}$$

Вспоминая, что $A^+=A^*V$ (см. определение 5), получим в силу (57):

$$(x^0)^*z=(A^+y)^*z=(A^*Vy)^*z=y^*V^*Az=0. \tag{59}$$

Но тогда и

$$z^*x^0=((x^0)^*z)^*=0.$$

Поэтому из равенства (58) находим:

$$|x|^2=|x^0|^2+|z|^2,$$

и, следовательно,

$$|x|^2\geqslant|x^0|^2, \tag{60}$$

причем знак $=$ имеет место только при $z=0$, т. е. при $x=x^0$, где $x^0=A^+y$.

Пример. Найти наилучшее приближенное решение (по методу наименьших квадратов) системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3 &=3,\\ -x_1+2x_2-3x_3+x_4&=6,\\ x_2-x_3+x_4&=0. \end{aligned}$$

Здесь

$$A=\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{matrix}\right\|.$$

Но тогда (см. пример на стр. 35)

$$A^+=\left\|\begin{matrix} 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/9 & 1/9 & 2/9\\ 2/9 & -1/9 & 1/9\\ 4/9 & 1/9 & 5/9\end{matrix}\right\|,$$

и потому

$$x^0=\left\|\begin{matrix} x_1^0\\ x_2^0\\ x_3^0\\ x_4^0\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/9 & 1/9 & 2/9\\ 2/9 & -1/9 & 1/9\\ 4/9 & 1/9 & 5/9\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}3\\6\\0\end{matrix}\right\|.$$

Следовательно,

$$x_1^0=1,\quad x_2^0=1,\quad x_3^0=0,\quad x_4^0=2.$$

Определим норму $\|A\|$ $m\times n$-матрицы $A=\|a_{ik}\|$ как неотрицательное число, задаваемое формулой

$$\|A\|^2=\sum_{i,\,k}|a_{ik}|^2. \tag{61}$$

При этом очевидно, что

$$\|A\|^2=\sum_{k=1}^{n}|A_{\cdot k}|^2=\sum_{i=1}^{n}|A_{i\cdot}|^2. \tag{61'}$$

Рассмотрим матричное уравнение

$$AX=Y, \tag{62}$$

где A и Y — заданные $m\times n$- и $m\times p$-матрицы, а X — искомая $n\times p$-матрица.

Определим наилучшее приближенное решение X^0 уравнения (62) из условия

$$\| Y - AX^0 \| = \min \| Y - AX \|,$$

причем в случае, когда

$$\| Y - AX \| = \| Y - AX^0 \|,$$

требуется, чтобы

$$\| X^0 \| \leqslant \| X \|.$$

Из соотношений

$$\| Y - AX \|^2 = \sum_{k=1}^{p} | Y_{\cdot k} - AX_{\cdot k} |^2, \tag{63}$$

$$\| X \|^2 = \sum_{k=1}^{p} | X_{\cdot k} |^2 \tag{64}$$

следует, что k-й столбец искомой матрицы $X^0_{\cdot k}$ должен быть наилучшим приближенным решением системы линейных уравнений

$$AX_{\cdot k} = Y_{\cdot k}.$$

Поэтому

$$X^0_{\cdot k} = A^+ Y_{\cdot k}.$$

Поскольку это равенство справедливо при любом $k = 1, \ldots, p$, то

$$X^0 = A^+ Y. \tag{65}$$

Таким образом, уравнение (62) всегда имеет одно и только одно наилучшее приближенное решение, определяемое формулой (65).

В частном случае, когда $Y = E$ — единичная матрица m-го порядка, имеем $X^0 = A^+$. Следовательно, *псевдообратная матрица* A^+ *является наилучшим приближенным решением* (*по методу наименьших квадратов*) *матричного уравнения*

$$AX = E.$$

Это свойство псевдообратной матрицы A^+ может быть принято в качестве ее определения.

5. Метод Гревилля последовательного нахождения псевдообратной матрицы состоит в следующем. Пусть a_k — k-й столбец в $m \times n$-матрице A, $A_k = (a_1, \ldots, a_k)$ — матрица, образованная первыми k столбцами матрицы A. b_k — последняя строка в матрице A_k^+ ($k = 1, \ldots, n$, $A_1 = a_1$, $A_n = A$). Тогда[1])

$$A_1^+ = a_1^+ = \frac{a_1^*}{a_1^* a_1} \tag{66}$$

и для $k > 1$ имеют место рекуррентные формулы

$$A_k^+ = \begin{pmatrix} B_k \\ b_k \end{pmatrix}, \quad B_k = A_{k-1}^+ - d_k b_k, \quad d_k = A_{k-1}^+ a_k; \tag{67}$$

при этом, если $c_k = a_k - A_{k-1} d_k \neq 0$, то

$$b_k = c_k^+ = (a_k - A_{k-1} d_k)^+; \tag{68}$$

[1]) Если $A_1 = a_1 = 0$, то и $A_1^+ = 0$.

если же $c_k=0$, т. е. $a_k=A_{k-1}d_k$, то

$$b_k=(1+d_k^*d_k)^{-1}\,d_k^*A_{k-1}^+. \tag{69}$$

Предлагаем читателю проверить, что матрица $\begin{pmatrix} B_k \\ b_k \end{pmatrix}$ является псевдообратной для матрицы A_k^+, если матрица B_k и строка b_k определяются формулами (61)—(64). Этот метод не требует вычисления детерминантов и может быть использован для вычисления обратной матрицы.

Пример. Пусть

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что для каждой вещественной матрицы M мы можем писать M' вместо M^*. Тогда

$$A_1^+=(A_1'A_1)^{-1}A_1'=\frac{1}{6}A_1'=\| {}^1/_6,\ -{}^1/_6,\ {}^1/_3,\ 0\|,$$

$$d_2=A_1^+a_2=-{}^3/_2,\qquad c_2=a_2-A_1d_2=\begin{Vmatrix} {}^1/_2 \\ {}^1/_2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

$$b_2=c_2^+=(c_2'c_2)^{-1}c_2'=\frac{2}{3}c_2'=\| {}^1/_3,\ {}^1/_3,\ 0,\ {}^2/_3\|,$$

$$B_2=A_1^+-d_2b_2=\| {}^2/_3,\ {}^1/_3,\ {}^1/_3,\ 1\|.$$

Таким образом,

$$A_2^+=\begin{Vmatrix} {}^2/_3 & {}^1/_3 & {}^1/_3 & 1 \\ {}^1/_3 & {}^1/_3 & 0 & {}^2/_3 \end{Vmatrix}.$$

Далее

$$d_3=A_2^+a_3=\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}\quad \text{и}\quad c_3=a_3-A_2d_3=0.$$

Поэтому

$$b_3=(1+d_3'd_3)^{-1}d_3'A_2^+=\| {}^1/_3,\ {}^1/_3\|\,A_2^+=\| {}^1/_3\ {}^2/_9\ {}^1/_9\ {}^5/_9\|$$

и

$$B_3=A_2^+-d_3b_3=\begin{Vmatrix} {}^2/_3 & {}^1/_3 & {}^1/_3 & 1 \\ {}^1/_3 & {}^1/_3 & 0 & {}^2/_3 \end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix} {}^1/_3 & {}^2/_9 & {}^1/_9 & {}^5/_9 \\ {}^1/_3 & {}^2/_9 & {}^1/_9 & {}^5/_9 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} {}^1/_3 & {}^1/_9 & {}^2/_9 & {}^4/_9 \\ 0 & {}^1/_9 & -{}^1/_9 & {}^1/_9 \end{Vmatrix}$$

$$A^+=A_3^+=\begin{Vmatrix} {}^1/_3 & {}^1/_9 & {}^2/_9 & {}^4/_9 \\ 0 & {}^1/_9 & -{}^1/_9 & {}^1/_9 \\ {}^1/_3 & {}^2/_9 & {}^1/_9 & {}^5/_9 \end{Vmatrix}.$$

ГЛАВА II

АЛГОРИТМ ГАУССА И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Метод исключения Гаусса

1. Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и правыми частями $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

В матричной форме эта система может быть записана так:

$$Ax = y. \qquad (1')$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — столбцы и $A = \| a_{ik} \|_1^n$ — квадратная матрица коэффициентов.

Если A — неособенная матрица, то можно написать:

$$x = A^{-1}y \qquad (2)$$

или в развернутом виде:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(-1)} y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2')$$

Таким образом, задача вычисления элементов обратной матрицы $A^{-1} = \| a_{ik}^{(-1)} \|_1^n$ эквивалентна задаче решения системы уравнений (1) при любых правых частях $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Элементы обратной матрицы определяются формулами (25) главы I. Однако фактическое вычисление элементов матрицы A^{-1} по этим формулам при большом n весьма затруднительно. Поэтому большое практическое значение имеют эффективные методы вычисления элементов обратной матрицы и, следовательно, решения системы линейных уравнений[1]).

В настоящей главе мы изложим теоретические основы некоторых из этих методов, представляющих собой разновидности метода исключения Гаусса, знакомство с которым у читателя началось еще в курсе алгебры средней школы.

---

[1]) Для подробного ознакомления с этими методами мы рекомендуем обратиться к книге Фаддеевых [33], а также к циклу статей, напечатанных в «Успехах математических наук», т. 5, вып. 3 (1950).

2. Пусть в системе уравнений (1) $a_{11} \neq 0$. Мы исключим x_1 из всех уравнений, начиная со 2-го, для чего ко второму уравнению почленно прибавим первое, помноженное на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, к третьему почленно прибавим первое, помноженное на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и т. д. После этого система уравнений (1) заменится эквивалентной системой

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = y_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = y_n^{(1)}. \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены в последних $(n-1)$ уравнениях определяются формулами

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \qquad y_i^{(1)} = y_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} y_1 \qquad (i,\ j = 2,\ \ldots,\ n). \tag{3'}$$

Пусть $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Тогда таким же образом мы исключим x_2 из последних $n-2$ уравнений системы (3) и получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = y_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = y_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = y_n^{(2)}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

При этом новые коэффициенты и правые части связаны с предыдущими формулами:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)}, \qquad y_i^{(2)} = y_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} y_2^{(1)} \qquad (i,\ j = 3,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

Продолжая этот алгоритм далее, мы на $(n-1)$-м этапе приведем исходную систему (1) к треугольной рекуррентной системе

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = y_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = y_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = y_n^{(n-1)}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Это приведение выполнимо в том и только в том случае, если в процессе приведения все числа a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, $\ldots$, $a_{n-1,n-1}^{(n-2)}$ оказываются отличными от нуля.

Изложенный нами **алгоритм Гаусса** состоит из однотипных операций, которые легко выполняются на современных счетных машинах.

3. Выразим коэффициенты и правые части приведенной системы через коэффициенты и правые части исходной системы (1). При этом мы не будем предполагать, что в процессе приведения все числа a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $\ldots$, $a_{n-1,n-1}^{(n-2)}$ оказываются отличными от нуля, а рассмотрим общий случай, когда первые p из этих чисел отличны от нуля:

$$a_{11} \neq 0,\ a_{22}^{(1)} \neq 0,\ \ldots,\ a_{pp}^{(p-1)} \neq 0 \qquad (p \leqslant n-1), \tag{7}$$

что дает возможность (на p-м этапе приведения) привести исходную систему уравнений к виду

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{1n}x_n=y_1,\\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n=y_2^{(1)},\\
\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\qquad\qquad a_{pp}^{(p-1)}x_p+\ldots\ldots+a_{pn}^{(p-1)}x_n=y_p^{(p-1)},\\
\qquad\qquad\qquad a_{p+1,\,p+1}^{(p)}x_{p+1}+\ldots+a_{p+1,\,n}^{(p)}x_n=y_{p+1}^{(p)},\\
\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\qquad\qquad\qquad a_{n,\,p+1}^{(p)}x_{p+1}+\ldots+a_{nn}^{(p)}x_n=y_n^{(p)}.
\end{array}\right\}\tag{8}$$

Матрицу коэффициентов этой системы уравнений обозначим через G_p:

$$G_p=\left\|\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & a_{1,\,p+1} & \ldots\ a_{1n}\\
0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2p}^{(1)} & a_{2,\,p+1}^{(1)} & \ldots\ a_{2n}^{(1)}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & a_{pp}^{(p-1)} & a_{p,\,p+1}^{(p-1)} & \ldots\ a_{pn}^{(p-1)}\\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{p+1,\,p+1}^{(p)} & \ldots\ a_{p+1,\,n}^{(p)}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,\,p+1}^{(p)} & \ldots\ a_{nn}^{(p)}
\end{array}\right\|.\tag{9}$$

Переход от матрицы A к матрице G_p совершался следующим образом: к каждой строке матрицы A, начиная со 2-й и кончая n-й, последовательно прибавлялись какие-то предыдущие строки (из числа первых p), помноженные на некоторые коэффициенты. Поэтому у матриц A и G_p одинаковы все миноры p-го порядка, содержащиеся в первых p строках, а также все миноры $(p+1)$-го порядка, содержащиеся в строках с номерами $1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ i\ (i>p)$:

$$\left.\begin{array}{c}
A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p\end{pmatrix}=G_p\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p\end{pmatrix}\\
(1\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_p\leqslant n),\\
A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p & i\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p & k_{p+1}\end{pmatrix}=G_p\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p & i\\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p & k_{p+1}\end{pmatrix}\\
(1\leqslant k_1<k_2<\ldots<k_{p+1}\leqslant n).
\end{array}\right\}\tag{10}$$

Из этих формул, учитывая структуру (9) матрицы G_p, найдем:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p\\ 1 & 2 & \ldots & p\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}^{(1)}\ldots a_{pp}^{(p-1)},\tag{11}$$

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p & i\\ 1 & 2 & \ldots & p & k\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}^{(1)}\ldots a_{pp}^{(p-1)}a_{ik}^{(p)}\qquad(i,\ k=p+1,\ \ldots,\ n).\tag{12}$$

Деля почленно второе из этих равенств на первое, получим основные формулы[1])

$$a_{ik}^{(p)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p & i\\ 1 & 2 & \ldots & p & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p\\ 1 & 2 & \ldots & p\end{pmatrix}}\qquad(i,\ k=p+1,\ \ldots,\ n).\tag{13}$$

[1]) См. [88], стр 89.

Если условия (7) выполнены для данного значения p, то такие же условия выполнены для любого меньшего значения p. Поэтому формулы (13) имеют место не только для данного значения p, но и для всех меньших значений p. То же можно сказать и о формуле (11). Поэтому вместо этой формулы можно написать равенства

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=a_{11},\quad A\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}^{(1)},\quad A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)},\ \ldots \tag{14}$$

Таким образом, условия (7), т. е. необходимые и достаточные условия выполнимости первых p этапов алгоритма Гаусса, могут быть записаны в виде следующих неравенств:

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq 0,\quad A\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\neq 0,\ \ldots,\ A\begin{pmatrix}1&2&\ldots&p\\1&2&\ldots&p\end{pmatrix}\neq 0. \tag{15}$$

Тогда из (14) находим:

$$a_{11}=A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad a_{22}^{(1)}=\frac{A\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}},$$

$$a_{33}^{(2)}=\frac{A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}},\ \ldots,\ a_{pp}^{(p-1)}=\frac{A\begin{pmatrix}1&2&\ldots&p\\1&2&\ldots&p\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1&2&\ldots&p-1\\1&2&\ldots&p-1\end{pmatrix}}. \tag{16}$$

Для того чтобы в алгоритме исключения Гаусса можно было *последовательно* исключить $x_1, x_2, \ldots, x_p$, нужно, чтобы все величины (16) были отличны от нуля, т. е. чтобы выполнялись неравенства (15). В то же время формулы для $a_{ik}^{(p)}$ имеют смысл, если выполняется только последнее из условий (15).

4. Пусть матрица коэффициентов в системе уравнений (1) имеет ранг r. Тогда надлежащей перестановкой уравнений и изменением нумерации неизвестных можно добиться выполнения неравенств

$$A\begin{pmatrix}1&2&\ldots&j\\1&2&\ldots&j\end{pmatrix}\neq 0\qquad (j=1,2,\ldots,r). \tag{17}$$

Это позволяет последовательно исключить $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и получить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{1n}x_n&=y_1,\\
a_{22}^{(1)}x_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n&=y_2^{(1)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{rr}^{(r-1)}x_r+\ldots\ldots+a_{rn}^{(r-1)}x_n&=y_r^{(r-1)},\\
a_{r+1,\,r+1}^{(r)}x_{r+1}+\ldots+a_{r+1,\,n}^{(r)}x_n&=y_{r+1}^{(r)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_{n,\,r+1}^{(r)}x_{r+1}+\ldots+a_{nn}^{(r)}x_n&=y_n^{(r)}.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Здесь коэффициенты определяются по формулам (13). Из этих формул, поскольку ранг матрицы $A=\|a_{ik}\|_1^n$ равен r, следует, что

$$a_{ik}^{(r)}=0\qquad (i,k=r+1,\ldots,n)$$

и матрица G_r, получающаяся из матрицы $A=\|a_{ik}\|_1^n$, после применения r-этапного алгоритма исключения Гаусса, имеет вид

$$G_r=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \ldots & a_{2r}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{r,r+1}^{(r-1)} & \ldots & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}\right\|. \tag{19}$$

Последние $n-r$ уравнений (18) сводятся к условиям совместности

$$y_i^{(r)}=0 \qquad (i=r+1, \ldots, n). \tag{20}$$

Заметим, что столбец свободных членов при алгоритме исключения подвергается таким же преобразованиям, как и любой столбец коэффициентов. Поэтому, дополняя матрицу $A=\|a_{ik}\|_1^n$ $(n+1)$-м столбцом из свободных членов, мы получим:

$$y_i^{(p)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & \ldots & p & i \\ 1 & \ldots & p & n+1\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & \ldots & p \\ 1 & \ldots & p\end{pmatrix}} \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ p=1, 2, \ldots, r). \tag{21}$$

В частности, условия совместности (20) сводятся к известным условиям

$$A\begin{pmatrix}1 & \ldots & r & r+j \\ 1 & \ldots & r & n+1\end{pmatrix}=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n-r). \tag{22}$$

Если $r=n$, т. е. матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$ неособенная, и

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & j \\ 1 & 2 & \ldots & j\end{pmatrix}\neq 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n),$$

то при помощи алгоритма Гаусса можно последовательно исключить $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и привести систему уравнений к виду (6).

§ 2. Механическая интерпретация алгоритма Гаусса

Рассмотрим произвольную упругую статическую систему S, закрепленную на краях (например, струну, стержень, многопролетный стержень, мембрану, пластину или дискретную систему), и возьмем на ней n точек (1), (2), ..., (n).

Мы будем рассматривать перемещения (прогибы) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ точек (1), (2), ..., (n) системы S под действием сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, приложенных в этих же точках. Мы будем предполагать, что силы и перемещения параллельны одному и тому же направлению и потому определяются своими алгебраическими величинами (рис. 1).

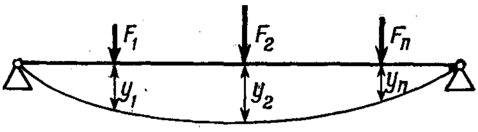

Рис. 1.

Кроме того, мы примем, что имеет место принцип линейного наложения сил:

1° *При суммарном наложении двух систем сил соответствующие прогибы складываются.*

2° *При умножении величин всех сил на одно и то же вещественное число все прогибы умножаются на это число.*

Обозначим через a_{ik} коэффициент влияния точки (k) на точку (i), т. е. прогиб в точке (i) под действием единичной силы, приложенной в точке (k) $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ (рис. 2). Тогда при совместном действии сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ прогибы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ определятся по формулам

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}F_k=y_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Сопоставляя (23) с исходной системой (1), мы задачу отыскания решения системы уравнений (1) можем интерпретировать так:

Даны прогибы $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ищутся соответствующие силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Обозначим через S_p статическую систему, получающуюся из S введением p неподвижных шарнирных опор в точках (1), (2) ..., (p) $(p \leqslant n)$. Коэффициенты влияния для оставшихся подвижных точек $(p+1), \ldots, (n)$ системы S_p обозначим через

$$a_{ik}^{(p)} \qquad (i, k=p+1, \ldots, n)$$

(см. рис. 3 для $p=1$).

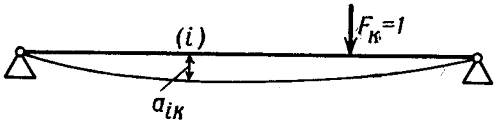

Рис. 2.

Коэффициент $a_{ik}^{(p)}$ можно рассматривать как прогиб в точке (i) системы S при действии единичной силы в точке (k) и сил реакций $R_1, R_2, \ldots, R_p$ в закрепленных точках (1), (2), ..., (p). Поэтому

$$a_{ik}^{(p)}=R_1a_{i1}+\ldots+R_pa_{ip}+a_{ik}. \tag{24}$$

С другой стороны, при этих же силах прогибы системы S в точках (1), (2), ..., (p) равны нулю:

$$\left.\begin{array}{r} R_1a_{11}+\ldots+R_pa_{1p}+a_{1k}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_1a_{p1}+\ldots+R_pa_{pp}+a_{pk}=0. \end{array}\right\} \tag{25}$$

Если

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\ldots p\\ 1 & 2\ldots p\end{pmatrix}\neq 0,$$

то мы можем из (25) определить $R_1, R_2, \ldots, R_p$ и полученные выражения подставить в (24). Это исключение $R_1, R_2, \ldots, R_p$ можно сделать и так. К системе равенств (25) прибавим равенство (24), записанное в виде

$$R_1a_{i1}+\ldots+R_pa_{ip}+a_{ik}-a_{ik}^{(p)}=0. \tag{24'}$$

Рассматривая (25) и (24') как систему $p+1$ однородных уравнений, имеющую ненулевое решение $R_1, R_2, \ldots, R_p, R_{p+1}=1$, получаем, что определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1p} & a_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{p1} \ldots a_{pp} & a_{pk} \\ a_{i1} \ldots a_{ip} & a_{ik}-a_{ik}^{(p)} \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда

$$a_{ik}^{(p)}=\frac{A\begin{pmatrix}1\ 2\ldots p\ i\\ 1\ 2\ldots p\ k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1\ 2\ldots p\\ 1\ 2\ldots p\end{pmatrix}} \qquad (i, k=p+1, \ldots, n). \tag{26}$$

По этим формулам коэффициенты влияния «опорной» системы S_p выражаются через коэффициенты влияния исходной системы S.

Но формулы (26) совпадают с формулами (13) предыдущего параграфа. Поэтому *для любого p $(\leqslant n-1)$ коэффициенты $a_{ik}^{(p)}$ $(i, k=p+1, \ldots, n)$ в алгоритме Гаусса являются коэффициентами влияния опорной системы S_p.*

В справедливости этого основного положения можно убедиться из чисто механических соображений, не опираясь на алгебраический вывод формул (13). Для этого рассмотрим сначала частный случай одной опоры: $p=1$ (рис. 3). В этом случае коэффициенты влияния системы S_1 определятся по формулам [полагаем $p=1$ в (26)]:

$$a_{ik}^{(1)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}=a_{ik}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1k} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Эти формулы совпадают с формулами (3′).

Таким образом, если коэффициенты a_{ik} $(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ в системе уравнений (1) являются коэффициентами влияния статической системы S, то коэффициенты $a_{ik}^{(1)}$ $(i,\ k=2,\ \ldots,\ n)$ в алгоритме Гаусса являются коэффициентами влияния системы S_1. Применяя эти же соображения к системе S_1 и вводя в ней вторую опору в точке (2), получим, что коэффициенты $a_{ik}^{(2)}$ $(i,\ k=3,\ \ldots,\ n)$ в системе уравнений (4) являются коэффициентами влияния опорной системы S_2, и вообще для любого $p\ (\leqslant n-1)$ коэффициенты $a_{ik}^{(p)}$ $(i,\ k=p+1,\ \ldots,\ n)$ в алгоритме Гаусса являются коэффициентами влияния опорной системы S_p.

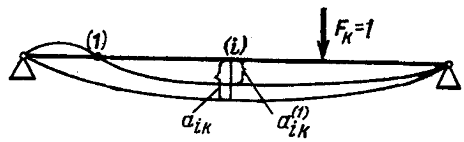

Рис. 3.

Из механических соображений очевидно, что *последовательное введение p опор равносильно одновременному введению этих опор.*

Замечание. Обращаем внимание на то, что при механической интерпретации алгоритма исключения не было необходимости предполагать, что точки, в которых рассматриваются прогибы, совпадают с точками приложения сил $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$. Можно считать, что $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — прогибы точек (1), (2), ..., (n), а силы $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$ приложены в точках (1′), (2′), ..., (n'). Тогда a_{ik} — коэффициент влияния точки (k') на точку (i). В этом случае вместо опоры в точке (j) следует рассматривать обобщенную опору в точках (j), (j'), при которой прогиб в точке (j) поддерживается все время равным нулю за счет надлежащим образом выбранной вспомогательной силы R_j в точке (j'). Условие возможности введения p обобщенных опор в точках (1), (1′); (2), (2′); ...; (p), (p'), т. е. возможность удовлетворить условиям $y_1=0,\ y_2=0,\ \ldots,\ y_p=0$ при любых $F_{p+1},\ \ldots,\ F_n$ за счет надлежащих $R_1=F_1,\ \ldots,\ R_p=F_p$, выражается неравенством

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p\\ 1 & 2 & \ldots & p\end{pmatrix}\neq 0.$$

§ 3. Детерминантное тождество Сильвестра

В § 1 путем сопоставления матриц A и G_p мы пришли к равенствам (10) и (11).

Эти равенства позволяют сразу получить важное детерминантное тождество Сильвестра. Действительно, из (10) и (11) находим:

$$|A|=A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ 1 & 2 & \ldots & n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p\\ 1 & 2 & \ldots & p\end{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{p+1,\,p+1}^{(p)} & \ldots & a_{p+1,\,n}^{(p)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n,\,p+1}^{(p)} & \ldots & a_{nn}^{(p)}\end{vmatrix}. \qquad (27)$$

Введем в рассмотрение окаймляющие минор $A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p\\ 1 & 2 & \ldots & p\end{pmatrix}$ определители.

$$b_{ik}=A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & p & i\\ 1 & 2 & \ldots & p & k\end{pmatrix} \qquad (i,\ k=p+1,\ \ldots,\ n).$$

Матрицу, составленную из этих определителей, обозначим через

$$B=\|b_{ik}\|_{p+1}^{n}.$$

Тогда согласно формулам (13)

$$\begin{vmatrix} a^{(p)}_{p+1,\,p+1} & \dots & a^{(p)}_{p+1,\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a^{(p)}_{n,\,p+1} & \dots & a^{(p)}_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} b_{p+1,\,p+1} & \dots & b_{p+1,\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n,\,p+1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}}{\left[A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix}\right]^{n-p}} = \frac{|B|}{\left[A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix}\right]^{n-p}}.$$

Поэтому равенство (27) может быть записано так:

$$|B| = \left[A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix}\right]^{n-p-1} |A|. \tag{28}$$

Это и есть детерминантное тождество Сильвестра. Оно выражает определитель $|B|$, составленный из окаймляющих определителей, через исходный определитель и окаймляемый минор.

Равенство (28) было нами установлено для матриц $A = \| a_{ik} \|_1^n$, элементы которых удовлетворяют неравенствам

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & j\\ 1 & 2 & \dots & j\end{pmatrix} \neq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, p). \tag{29}$$

Однако из «соображений непрерывности» следует, что эти ограничения можно отбросить и что тождество Сильвестра справедливо для любой матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$. В самом деле, пусть неравенства (29) не выполняются. Введем матрицу

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon E.$$

Очевидно, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon = A$. С другой стороны, миноры

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & j\\ 1 & 2 & \dots & j\end{pmatrix} = \varepsilon^j + \dots \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$$

представляют собой p не равных тождественно нулю многочленов относительно ε. Поэтому можно выбрать такую последовательность $\varepsilon_m \to 0$, что

$$A_{\varepsilon_m}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & j\\ 1 & 2 & \dots & j\end{pmatrix} \neq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, p;\ m = 1, 2, \dots).$$

Для матрицы A_{ε_m} мы можем написать тождество (28). Переходя в обеих частях этого тождества к пределу при $m \to \infty$, мы получим тождество Сильвестра для предельной матрицы $A = \lim\limits_{m \to \infty} A_{\varepsilon_m}$[1]).

Если мы тождество (28) применим к определителю

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p & i_1 & i_2 & \dots & i_q\\ 1 & 2 & \dots & p & k_1 & k_2 & \dots & k_q\end{pmatrix} \qquad \left(p < \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_q \\ k_1 < k_2 < \dots < k_q \end{matrix} \leqslant n\right),$$

то мы получим удобный для применений вид тождества Сильвестра:

$$B\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_q\\ k_1 & k_2 & \dots & k_q\end{pmatrix} = \left[A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix}\right]^{q-1} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p & i_1 & i_2 & \dots & i_q\\ 1 & 2 & \dots & p & k_1 & k_2 & \dots & k_q\end{pmatrix}. \tag{30}$$

---

[1]) Под *пределом* (при $p \to \infty$) *последовательности матриц* $B_p = \| b_{ik}^{(p)} \|$ понимают матрицу $B = \| b_{ik} \|_1^n$, где $b_{ik} = \lim\limits_{p \to \infty} b_{ik}^{(p)}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$.

§ 4. Разложение квадратной матрицы на треугольные множители

1. Пусть дана матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$ ранга r. Введем следующие обозначения для последовательных главных миноров этой матрицы:

$$D_k=A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ 1 & 2 & \dots & k\end{pmatrix}\qquad (k=1,\,2,\,\dots,\,n).$$

Допустим, что имеют место условия выполнимости алгоритма Гаусса:

$$D_k\neq 0\qquad (k=1,\,2,\,\dots,\,r).$$

Обозначим через G матрицу коэффициентов системы уравнений (18), к которой приводится система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k=y_i\qquad (i=1,\,2,\,\dots,\,n)$$

методом исключения Гаусса. Матрица G имеет верхнюю треугольную форму, причем элементы ее первых r строк определяются формулами (13), а элементы последних $n-r$ строк все равны нулю[1]):

$$G=\left\|\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,\,r+1} & \dots & a_{1n}\\
0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,\,r+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{r,\,r+1}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)}\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{matrix}\right\|.$$

Переход от матрицы A к матрице G совершался при помощи некоторого числа N операций следующего типа: к i-й строке матрицы прибавлялась j-я $(j<i)$ строка, предварительно помноженная на некоторое число α. Такая операция равносильна умножению преобразуемой матрицы слева на матрицу

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} \qquad\quad (j) & \qquad (i) \qquad\quad \end{matrix}\\
\left\|\begin{matrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\cdot & \ddots & \cdot & & \cdot & & \cdot\\
\vdots & & 1 & & \vdots & & \vdots\\
\cdot & & \cdot & \ddots & \cdot & & \cdot\\
0 & \dots & \alpha & \dots & 1 & \dots & 0\\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \ddots & \cdot\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{matrix}\right\|
\end{array}. \qquad (31)$$

В этой матрице на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы, за исключением элемента α, равны нулю.

[1]) Матрица G совпадает с матрицей G_r (стр. 45).

Таким образом,

$$G = W_N \dots W_2 W_1 A,$$

где каждая из матриц $W_1, W_2, \dots, W_N$ имеет вид (31) и, следовательно, является нижней треугольной матрицей с диагональными элементами, равными 1.

Пусть

$$W = W_N \dots W_2 W_1. \tag{32}$$

Тогда

$$G = WA. \tag{33}$$

Матрицу W будем называть *преобразующей* матрицей для матрицы A в методе исключения Гаусса. Обе матрицы, G и W, однозначно определяются заданием матрицы A. Из (32) следует, что W — нижняя треугольная матрица с диагональными элементами, равными 1 (см. стр. 28).

Поскольку W — неособенная матрица, то из (33) находим:

$$A = W^{-1} G. \tag{33'}$$

Мы представили матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы W^{-1} на верхнюю треугольную матрицу G. Вопрос о разложении матрицы A на множители такого типа полностью выясняется следующей теоремой:

Теорема 1. *Всякую матрицу* $A = \| a_{ik} \|_1^n$ *ранга* r, *у которой первые* r *последовательных главных миноров отличны от нуля,*

$$D_k = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, r), \tag{34}$$

можно представить в виде произведения нижней треугольной матрицы B *на верхнюю треугольную матрицу* C

$$A = BC = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{35}$$

При этом

$$b_{11} c_{11} = D_1, \quad b_{22} c_{22} = \frac{D_2}{D_1}, \quad \dots, \quad b_{rr} c_{rr} = \frac{D_r}{D_{r-1}}. \tag{36}$$

Первым r *диагональным элементам матриц* B *и* C *можно дать произвольные значения, удовлетворяющие условиям* (36).

Задание первых r *диагональных элементов матриц* B *и* C *определяет однозначно элементы первых* r *столбцов матрицы* B *и первых* r *строк матрицы* C. *Для этих элементов имеют место формулы*

$$b_{gk} = b_{kk} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & g \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}}, \qquad c_{kg} = c_{kk} \frac{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & g \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}} \tag{37}$$

$$(g = k, k+1, \dots, n; \ k = 1, 2, \dots, r).$$

В случае $r < n$ ($|A| = 0$) *в последних* $n - r$ *столбцах матрицы* B *можно все элементы положить равными нулю, а в последних* $n - r$ *строках матрицы* C *всем элементам дать произвольные значения, либо*