Г. П. Климов, Системы обслуживания с разделением времени. 1, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1974, том 19, выпуск 3, 558–576

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том XIX И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1974

СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ. I

Г. П. КЛИМОВ

§ 1. Описание системы

Система состоит из конечного множества $\Omega = \{\alpha\}$ фаз обслуживания. У каждой фазы обслуживания допускается неограниченная очередь. Одновременно обслуживание может проходить только на одной фазе (в этом и состоит разделение обслуживания во времени). Прерывание обслуживания на фазе не допускается.

Поступившее требование направляется в очередь фазы $\alpha \in \Omega$ с вероятностью p_α, $\sum\limits_{\alpha\in\Omega} p_\alpha = 1$. Требование, обслуженное на фазе α, направляется в очередь фазы β с вероятностью $p_{\alpha\beta}$; $\sum\limits_{\beta\in\Omega} p_{\alpha\beta} \leqslant 1$ для всех $\alpha \in \Omega$; а с вероятностью $1 - \sum\limits_{\beta\in\Omega} p_{\alpha\beta}$ покидает систему.

Входящий поток требований — пуассоновский с интенсивностью a. Длительность обслуживания на фазе $\alpha \in \Omega$ определяется ф.р. $B_\alpha(t)$. Длительности обслуживания требований на фазах предполагаются независимыми между собой и от входящего потока требований.

Нам осталось лишь определить порядок обслуживания требований, т. е. правило, указывающее по состоянию системы, какое требование и на какой фазе следует обслуживать.

В каждый момент времени очередь в системе характеризуется вектором

$$l = \{l_\alpha,\ \alpha \in \Omega\},$$

где l_α — длина очереди у фазы α в рассматриваемый момент (без учета обслуживаемого требования, если такое имеется). Через L обозначим множество значений, принимаемых l. Элемент $l = \{l_\alpha,\ \alpha \in \Omega\}$, для которого все $l_\alpha = 0$, будем обозначать через 0.

После завершения обслуживания на некоторой фазе выбор очередной фазы обслуживания осуществляется в зависимости от количества $l \in L$, оставшихся в системе требований. Именно, пусть каждому $l \in L$, $l \neq 0$, сопоставляется элемент $u(l) \in \Omega$. От отображения

$$0 \neq l \mapsto u(l)$$

потребуем лишь, что $u(l) = \alpha$ влечет $l_\alpha \neq 0$.

Если после завершения обслуживания на некоторой фазе количество требований, оставшихся в системе, характеризуется вектором $l \in L$

и $l \neq 0$, то начинается обслуживание на фазе $\alpha = u(l)$. Требование, заставшее систему свободной, сразу же начинает обслуживаться с той фазы, на которую это требование поступило. Требования, ожидающие начала обслуживания на некоторой фазе, обслуживаются в порядке их поступления на эту фазу. Функцию $u = u(l)$, определяющую порядок обслуживания требований в системе, естественно назвать *функцией переключения* (фаз обслуживания).

Таким образом, вся система обслуживания задается набором объектов Ω; $p = \{p_\alpha,\ \alpha \in \Omega\}$; $P = \{p_{\alpha\beta};\ \alpha,\ \beta \in \Omega\}$; a; $\{B_\alpha(t),\ \alpha \in \Omega\}$; u.

§ 2. Функция потерь

Пусть c_α — стоимость ожидания (за единицу времени) у фазы $\alpha \in \Omega$. Положим

$$l(t) = \{l_\alpha(t),\ \alpha \in \Omega\},$$

где $l_\alpha(t)$ — длина очереди у фазы α в момент t (без учета требования, обслуживаемого в момент t, если такое имеется). Если $x_l(t)$ — индикатор события $\{l(t) = l\}$, $l \in L$, и

$$X_l(T) = \int_0^T x_l(t)\,dt,$$

то суммарные потери до момента T равны

$$\sum_{l \in L} (c, l)\, X_l(T),$$

где

$$c = \{c_\alpha,\ \alpha \in \Omega\},\ l = \{l_\alpha,\ \alpha \in \Omega\};\ (c, l) = \sum_{\alpha \in \Omega} c_\alpha l_\alpha.$$

Средние же потери за единицу времени до момента T равны

$$J_T = \mathbf{M}\frac{1}{T}\sum_{l \in L}(c, l)\,X_l(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{l \in L}(c, l)\,\mathbf{M}x_l(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{l \in L}(c, l)\,\mathbf{P}\{l(t) = l\}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (c, \mathbf{M}l(t))\,dt,$$

где $\mathbf{M}\,l(t) = \{\mathbf{M}l_\alpha(t),\ \alpha \in \Omega\}$. Для стационарного режима средние потери за единицу времени равны

$$J = (c, \bar{l}) \tag{1}$$

где $\bar{l} = \{\bar{l}_\alpha,\ \alpha \in \Omega\}$, а $\bar{l}_\alpha$ есть математическое ожидание длины очереди у фазы α в стационарном режиме. Позже мы укажем условия, при которых каждое из $\bar{l}_\alpha$ конечно.

Обозначим через U множество функций переключения u. Ясно, что потери J зависят от выбранного порядка обслуживания требований в системе, т. е. от функции переключения $u \in U$. Подчеркивая это, мы будем писать $J = J(u)$.

В этой работе решается следующая задача:

1) найти условия, при которых существует функция переключения $u^* \in U$, такая, что

$$J(u^*) = \min_{u \in U} J(u) \tag{2}$$

(всякую функцию $u^* \in U$, удовлетворяющую (2), будем называть *оптимальной функцией переключения*);

2) указать структуру оптимальной функции переключения.

§ 3. Оптимальный порядок обслуживания

Сделаем следующие предположения.

П1. Начиная с любой фазы обслуживания каждое требование с положительной вероятностью покидает систему после прохождения конечного числа фаз обслуживания. Формально это означает следующее. Для n-й степени матрицы

$$P = \{p_{ij}\}_{i,j \in \Omega}$$

положим

$$P^n = \{p_{ij}^{(n)}\}_{i,j \in \Omega}.$$

Тогда для каждого $i \in \Omega$ существует целое число $n \geqslant 1$, такое, что

$$1 - \sum_{j \in \Omega} p_{ij} > 0.$$

П2. Первые два момента длительности обслуживания на любой фазе конечны, т. е.

$$\beta_{i1} = \int_0^\infty t\, dB_i(t) < \infty, \quad \beta_{i2} = \int_0^\infty t^2\, dB_i(t) < \infty$$

для всех $i \in \Omega$.

П3. Выполнено условие эргодичности

$$\rho = \sum_{i \in \Omega} \lambda_i \beta_{i1} < 1,$$

где набор $\Lambda = \{\lambda_i,\ i \in \Omega\}$ определяется системой уравнений

$$\lambda_j = \sum_{i \in \Omega} p_{ij} \lambda_i + a p_j, \quad j \in \Omega,$$

или в матричном виде

$$(I - P')\, \Lambda = ap \tag{1}$$

где I — единичная матрица, P' — матрица, транспонированная с P, $p = \{p_i,\ i \in \Omega\}$. Из П1 следует, что система (1) имеет единственное решение Λ. Это будет показано позже.

Пусть $M \subseteq \Omega$. Обозначим через $\gamma_i(M)$ среднее суммарное время обслуживания требования (без учета ожидания), начиная с фазы $i \in M$, до первого выхода из множества фаз M. В частности, положим $\gamma_i = \gamma_i(\Omega)$.

Ясно, что

$$\gamma_i = \Big(1 - \sum_{j\in\Omega} p_{ij}\Big)\beta_{i1} + \sum_{j\in\Omega} p_{ij}(\beta_{i1} + \gamma_j) = \sum_{j\in\Omega} p_{ij}\gamma_j + \beta_{i1}$$

или в матричном виде

$$(I - P)\,\gamma = \beta, \tag{2}$$

где $\gamma = \{\gamma_i,\ i \in \Omega\}$, $\beta = \{\beta_{i1},\ i \in \Omega\}$.

Из П1 следует, что система (2) имеет единственное решение γ. Это будет показано позже.

Для любого $M \in \Omega$ числа $\gamma_i(M)$, $i \in M$ определяются аналогично. Для этого нужно в матрице $I - P$ вычеркнуть столбцы и строки, соответствующие фазам из $\Omega \setminus M$, а в векторах γ и β вычеркнуть компоненты, соответствующие тем же фазам.

Определим последовательно множества $\Omega_1^*, \ldots, \Omega_s^*$, полагая

$$\Omega_i^* = \left\{\alpha \in \Omega_i: \frac{c_\alpha(\Omega_i)}{\gamma_\alpha(\Omega_i)} = \min_{\beta\in\Omega_i} \frac{c_\beta(\Omega_i)}{\gamma_\beta(\Omega_i)},\quad j \geqslant 1, \right. \tag{3}$$

где

$$\Omega_1 = \Omega;\quad c_\alpha(\Omega_1) = c_\alpha;\quad \Omega_{i+1} = \Omega_i \setminus (\Omega_1^* + \ldots + \Omega_i^*); \tag{4}$$

$$c_\alpha(\Omega_{i+1}) = \gamma_\alpha(\Omega_i)\left[\frac{c_\alpha(\Omega_i)}{\gamma_\alpha(\Omega_i)} - \min_{\beta\in\Omega_i}\frac{c_\beta(\Omega_i)}{\gamma_\alpha(\Omega_i)}\right],\quad \alpha \in \Omega_{i+1}. \tag{5}$$

Число $s \geqslant 1$ определяется условием

$$\Omega = \Omega_1^* + \ldots + \Omega_s^*,\quad \Omega_s^* \neq \varnothing$$

Для любой выбранной функции переключения (фаз обслуживания) будем говорить, что фаза $\alpha \in \Omega$ имеет преимущество (или более высокий приоритет) по отношению к фазе β, если в любой момент начала обслуживания требования на фазе β число требований на фазе α равно нулю.

Цель работы — доказать следующее утверждение.

Теорема. *Для оптимальности функции переключения $u^* \in U$ необходимо и достаточно, чтобы при $1 \leqslant i < j \leqslant s$ каждая фаза из Ω_j^* имела преимущество по отношению к любой фазе из Ω_i^*.*

§ 4. Вложенная цепь Маркова

Рассмотрим случайный процесс

$$\eta(t) = \{n(t),\ i(t),\ \xi(t)\},\quad t \geqslant 0,$$

где $n(t) = \{n_i(t),\ i \in \Omega\}$, $n_i(t)$ — число требований, находящихся в момент t на фазе i; $i(t) = 0$ при $n(t) = 0$; если же $n(t) \neq 0$, то $i(t)$ есть номер фазы, на которой происходит обслуживание в момент t; $\xi(t) = 0$ при $n(t) = 0$; если же $n(t) \neq 0$, то $\xi(t)$ есть остаток времени дообслуживания на фазе $i(t)$, начиная с момента t.

Для определенности будем считать, что $n(+0) = 0$ (с вероятностью 1). Ясно, что процесс $\eta(t)$ является марковским. В этом параграфе изучается распределение сл. в. $\eta(t)$ в специальные моменты времени, а именно в моменты окончания обслуживания на фазах. В § 6 изучается распределение сл. в. $\eta(t)$ в стационарном режиме.

Пусть n_{iN} — число требований, оставшихся на фазе после завершения N актов обслуживания. Под актом обслуживания понимается обслуживание на одной из фаз. Положим

$$n_N = \{n_{iN},\ i \in \Omega\}.$$

Через i_N обозначим номер фазы, на которой происходил N-й акт обслуживания. Процесс $\eta_N = \{n_N, i_N\}$, $N = 1, 2, \ldots$, вкладывается (по терминологии Кендалла) в процесс $\eta(t)$, $t \geqslant 0$, и образует цепь Маркова со счетным числом состояний.

Для $n = \{n_i,\ i \in \Omega\} \in L$ и набора $z = \{z_i,\ i \in \Omega\}$ чисел z_i положим

$$z^n = \prod_{i \in \Omega} z_i^{n_i}.$$

Будем писать $|z| \leqslant 1$, если $|z_i| \leqslant 1$ для всех $i \in \Omega$. Запись $z = 1$ означает, что все $z_i = 1$.

Положим для $|z| \leqslant 1$ и $i \in \Omega$

$$P_{iN}(z) = \mathbf{M} z^{n_N} \delta_{i, i_N}; \quad \bar{P}_N(z) = \mathbf{M} z^{n_N} = \sum_{i \in \Omega} P_{iN}(z),$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Далее, положим

$$R_{iN}(z) = \mathbf{M} z^{n_N} \delta_{i, u(n_N)}, \quad i \in \Omega.$$

Отметим, что $\delta_{i, u(n_N)} = 1$, т. е. $u(n_N) = i$, если после N актов обслуживания $n_N \neq 0$ и сразу же начинается обслуживание на фазе i.

Лемма 1. *Для* $z = \{z_j,\ j \in \Omega\}$ *и* $|z_j| \leqslant 1$

$$z_i P_{iN+1}(z) = [R_{iN}(z) + \bar{P}_N(0) p_i z_i]\, \beta_i(a - a(p, z))\, Q_i(z), \tag{1}$$

где

$$Q_i(z) = \sum_{j \in \Omega} p_{ij} z_j + 1 - \sum_{j \in \Omega} p_{ij}, \tag{2}$$

а $\beta_i(\cdot)$ *есть преобразование Лапласа — Стилтьеса ф. р.* $B_i(t)$.

Доказательство. Пусть $z = \{z_i,\ i \in \Omega\}$ — набор чисел z_i, таких, что $0 \leqslant z_i \leqslant 1$. Требования, находящиеся в системе, будем разделять на красные и синие следующим образом. Каждое требование, поступающее на фазу i (после некоторой фазы обслуживания или при поступлении в систему), объявляется красным с вероятностью z_i и синим — с вероятностью $1 - z_i$ независимо от цвета остальных требований, находящихся в системе. Таким образом, требование, переходя от фазы к фазе, может менять свой цвет. Теперь функциям, участвующим в формуле (1), можно придать следующий вероятностный смысл.

$P_{iN+1}(z)$ есть вероятность того, что $(N+1)$-й акт обслуживания проходил на фазе i и после завершения этого акта в системе не остались синие требования;

$R_{iN}(z)$ — вероятность того, что после завершения N актов обслуживания в системе осталось хотя бы одно требование, все оставшиеся требования красного цвета и следующий акт обслуживания будет проходить на фазе i;

$\bar{P}_N(0)$ — вероятность того, что после завершения N актов обслуживания в системе не останется ни одного требования;

$\beta_i(a[1-(p, z]) $ — вероятность того, что за время обслуживания на фазе i в систему не поступят синие требования;

$Q_i(z)$ — вероятность того, что требование, обслуженное на фазе i, не станет синим (либо покинет систему, либо останется и будет красным).

Теперь формула (1) получается из следующего утверждения. Для того чтобы $(N+1)$-й акт обслуживания проходил на фазе i, после завершения этого акта в системе не остались синие требования и само требование, обслуженное за этот акт, было красным (вероятность чего равна $z_iP_{iN+1}(z)$, необходимо и достаточно, чтобы

1) после завершения N актов обслуживания в системе не остались синие вызовы и на следующем акте обслуживалось красное требование на фазе i (вероятность чего равна $R_{iN}(z)+\bar{P}_N(0)\,p_iz_i$);

2) за $(N+1)$-й акт обслуживания на фазе i в систему не поступали синие вызовы (вероятность чего равна $\beta_i(a-a(p, z))$;

3) требование, обслуженное за $(N+1)$-й акт на фазе i, либо покинет систему, либо останется в системе и будет по-прежнему красным (вероятность чего равна $Q_i(z)$).

Лемма 2. *Если $z=\{z_i, i\in\Omega\}$ и $|z_i|\leqslant 1$, то при $N\to\infty$ существуют пределы*

$$\lim P_{iN}(z)=P_i(z),\ \lim \bar{P}_N(z)=\bar{P}(z)=\sum_{i\in\Omega} P_i(z),$$

$$\lim R_{iN}(z)=R_i(z).$$

При этом

$$z_iP_i(z)=[R_i(z)+\bar{P}(0)\,p_iz_i]\,\beta_i(a-a(p, z))\,Q_i(z); \tag{3}$$

$$\lim \mathbf{P}\{i_N=i\}=P_i(1)=\frac{\lambda_i}{\lambda};\ \bar{P}(0)=\frac{a}{\lambda}(1-\rho); \tag{4}$$

$$R_i(1)=\frac{\lambda_i}{\lambda}-\frac{ap_i}{\lambda}(1-\rho);\ \lambda=\sum_{i\in\Omega}\lambda_i.$$

Доказательство. Существование пределов следует из того, что однородная цепь Маркова η_N, $N=1, 2, \ldots$, неприводима и непериодична. Равенство (3) следует тогда из равенства (1). Остается убедиться лишь в справедливости формул (4). Для этого мы воспользуемся условием эргодичности системы (см. предположение П3 в § 3), проверив выполнение достаточного условия существования стационарного распределения для цепи Маркова (см. [1] или [2], § 45). Сформулируем последнее условие.

Через E обозначим множество состояний цепи Маркова η_N. Для каждой функции $\varphi=\varphi(x)$ на E определим функцию $A\varphi=(A\varphi)(x)$ соотношением

$$(A\varphi)(x)=\mathbf{M}\{\varphi(\eta_{N+1})\mid\eta_N=x\},\ x\in E.$$

Для того чтобы однородная неприводимая и непериодическая цепь Маркова η_N обладала стационарным распределением, достаточно существования числа $\varepsilon > 0$, неотрицательной функции $\varphi(x)$ на E и конечного множества E_0 состояний из E, таких, что

$$\begin{aligned} (A\varphi)(x) &\leqslant \varphi(x) - \varepsilon \quad \text{для } x \in E \setminus E_0, \\ (A\varphi)(x) &< \infty \quad \text{для } x \in E_0. \end{aligned} \tag{5}$$

В нашем случае $E = L \times \Omega$. Для $x = (n, i) \in E$ через $\varphi(x)$ обозначим среднее время, необходимое для обслуживания всех требований, количество которых характеризуется набором $n = \{n_j, j \in \Omega\}$, если прервать поступление требований в систему. Ясно, что

$$\varphi(x) = \sum_{j \in \Omega} n_j \gamma_j.$$

Если $x = (n, i) \in E$ и $n \neq 0$, то $(A\varphi)(x)$ есть сумма следующих слагаемых:

1) среднего суммарного времени обслуживания всех требований, количество которых характеризуется набором $n = \{n_j, j \in \Omega\}$, без учета среднего времени обслуживания одного из требований на фазе $\alpha = u(n)$;

2) среднего суммарного времени обслуживания всех требований, поступивших в систему за один акт обслуживания на фазе α.

Таким образом,

$$\begin{aligned} (A\varphi)(x) &= \sum_{j \in \Omega} n_j \gamma_j - \beta_{\alpha 1} + \sum_{k \in \Omega} (a p_k \beta_{j1}) \gamma_k = \\ &= \varphi(x) - \beta_{\alpha 1}\left(1 - \sum_{k \in \Omega} a p_k \gamma_k\right) = \varphi(x) - \beta_{\alpha 1}(1 - \rho), \end{aligned}$$

так как согласно (1), (2) § 3 имеем

$$\sum_{k \in \Omega} a p_k \gamma_k = a(p, \gamma) = a(p, (I - P)^{-1}\beta) = a((I - P')^{-1} p, \beta) = (\Lambda, \beta) = \rho. \tag{6}$$

Пусть E_0 состоит из элементов $(n, i) \in E$, для которых $n = 0$. Если $x = (0, i) \in E_0$, то

$$(A\varphi) = \sum_{j \in \Omega} p_j \sum_{k \in \Omega} (a p_k \beta_{j1}) \gamma_k = \rho \sum_{j \in \Omega} p_j \beta_{j1} < \infty.$$

Остается положить

$$\varepsilon = (1 - \rho) \min_{j \in \Omega} \beta_{j1} > 0,$$

и тогда для выбранной функции $\varphi = \varphi(x)$ и множества E_0 выполняются неравенства (5). Следовательно, цепь Маркова η_N, $N \geqslant 1$, имеет стационарное распределение. В частности, $\bar{P}(1) = 1$.

Найдем теперь $P_i(1)$, $R_i(1)$, $\bar{P}(0)$. Из (3) следует для $z_i \neq 0$:

$$\bar{P}(z) = \sum_{i \in \Omega} P_i(z) = \sum_{i \in \Omega} \left[\frac{R_i(z)}{z_i} + \bar{P}(0) p_i\right] b_i(z), \tag{7}$$

где $b_i(z) = \beta_i(a - a(p, z)) Q_i(z)$.

Положим

$$x_j = \frac{\partial}{\partial z_j} \bar{P}(z)|_{z=1},\ x_{ij} = \frac{\partial}{\partial z_j} R_i(z)|_{z=1}. \tag{8}$$

Из определения функций $\bar{P}(z)$ и $R_i(z)$ следует, что

$$x_j = \sum_{i\in\Omega} x_{ij}. \tag{9}$$

Теперь из (7), используя равенства

$$\frac{\partial}{\partial z_j} b_i(z)|_{z=1} = a\rho_j\beta_{i1} + p_{ij} = d_{ij}, \qquad \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{R_i(z)}{z_i}\Big|_{z=1} = x_{ij} - R_i(1)\,\delta_{ij},$$

получаем:

$$R_j(1) = \sum_{i\in\Omega} [R_i(1) + \bar{P}(0)\,p_i]\, d_{ij}. \tag{10}$$

Так как согласно (3)

$$P_i(1) = R_i(1) + \bar{P}(0)\,p_i, \tag{11}$$

то (10) записывается в виде

$$P_j(1) - \sum_{i\in\Omega} d_{ij}P_i(1) = \bar{P}(0)\,p_j, \quad j\in\Omega. \tag{12}$$

Из равенства же $\bar{P}(z) = \sum\limits_{i\in\Omega} P_i(z)$ с учетом $\bar{P}(1) = 1$ получаем:

$$\sum_{i\in\Omega} P_i(1) = 1. \tag{13}$$

Проверим, что набор

$$P_i(1) = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad \bar{P}(0) = \frac{a}{\lambda}(1-\rho)$$

является решением системы (12), (13). В самом деле, уравнение (13) удовлетворяется, а левая часть (12) равна

$$\frac{\lambda_j}{\lambda} - \frac{ap_j}{\lambda}\sum_{i\in\Omega}\lambda_i\beta_{i1} - \frac{1}{\lambda}\sum_{i\in\Omega} p_{ij}\lambda_i = \frac{1}{\lambda}\left(\lambda_j - \sum_{i\in\Omega} p_{ij}\lambda_i\right) - \frac{ap_j}{\lambda}\rho = \frac{ap_j}{\lambda} - \frac{ap_j}{\lambda}\rho,$$

что равно правой части (12). Здесь мы воспользовались равенствами из предположения П3 § 3.

Для корректности приведенных рассуждений остается лишь убедиться в том, что каждая из матриц $I - P$ и $I - D$ обратима; здесь $D = \{d_{ij}\}_{i,j\in\Omega}$. Эту цель преследует

Лемма 3. *Из предположения* П1 § 3 *следует, что матрица* $I - P$ *обратима. Кроме того,*

$$|I - D| = (1-\rho)\,|I - P|. \tag{14}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой Адамара, указывающей достаточное условие обратимости матрицы (см., например, [3]).

Так как

$$\sum_{j\in\Omega} p_{ij}^{(n+1)} \leqslant \sum_{j\in\Omega} p_{ij}^{(n)}, \quad i \in \Omega,$$

то, начиная с некоторого n_0,

$$1 - \sum_{j\in\Omega} p_{ij}^{(n)} > 0$$

для всех $i \in \Omega$ и $n \geqslant n_0$. Но тогда матрица $wI - P^n$ удовлетворяет условию теоремы Адамара для всех чисел w, таких, что $|w| \geqslant 1$. Следовательно, все собственные значения матрицы P^n, а значит, и P, по абсолютной величине меньше 1. В частности, $|I - P| \neq 0$.

Докажем теперь формулу (14). Матрица D может быть записана в виде

$$D = P + a\beta p',$$

где β — вектор-столбец из элементов $\{\beta_{i1}, i \in \Omega\}$, p' — вектор-строка из элементов $\{p_i, i \in \Omega\}$. Но тогда

$$I - D = [I - a\beta p' (I - P)^{-1}] (I - P) = (I - \beta \Lambda') (I - P),$$

где Λ — определяется согласно (1) § 3. Для получения (14) остается воспользоваться равенством

$$|I - \beta\Lambda'| = 1 - (\beta, \Lambda) = 1 - \rho.$$

§ 5. Случайные процессы η_N^+ и η_N^-

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = \{n(t), i(t), \xi(t)\}$ в последовательные моменты $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ (не совпадающие с вероятностью 1), такие, что

$$\xi(\tau_N - 0) = 0, \quad n(\tau_N - 0) \neq 0; \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Положим

$$i_N^{\pm} = i(\tau_N \pm 0), \quad n_N^{\pm} = n(\tau_N \pm 0).$$

Тогда каждый из процессов

$$\eta_N^+ = \{n_N^+, i_N^-\}, \quad \eta_N^- = \{n_N^-, i_N^-\}, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

образует цепь Маркова. Пусть

$$P_{iN}^{\pm}(z) = \mathrm{M} z^{n_N^{\pm}} \delta_{i, i_N^-}, \qquad R_{iN}^{+}(z) = \mathrm{M} z^{n_N^{+}} \delta_{i, i_N^+},$$

где $z = \{z_i, i \in \Omega\}$, $|z_i| \leqslant 1$, и предположим, что $B_i(+0) = 0$ для всех $i \in \Omega$. Тогда с вероятностью 1 момент τ_N есть момент завершения N-го акта обслуживания, следовательно,

$$i_N^- = i_N, \quad n_N^+ = n_N, \quad i_N^+ = u(n_N^+) = u(n_N)$$

при $n \neq 0$ с вероятностью 1.

Лемма 4. *Пусть $B_i(+0) = 0$ для всех $i \in \Omega$. Тогда*

$$P_{iN}^{+}(z) = P_{iN}(z),\quad R_{iN}^{+}(z) = R_{iN}(z),\quad z_i P_{iN}^{+}(z) = P_{iN}^{-}(z) Q_i(z) \tag{1}$$

и, следовательно, при $N \to \infty$ существуют пределы

$$\lim P_{iN}^{\pm}(z) = P_i^{\pm}(z),\quad \lim R_{iN}^{+}(z) = R_i^{+}(z),$$

такие, что

$$P_i^{+}(z) = P_i(z),\quad R_i^{+}(z) = R_i(z),\quad z_i P_i^{+}(z) = P_i^{-}(z) Q_i(z). \tag{2}$$

Нам нужно убедиться лишь в формуле (1). В терминах красных и синих требований левая часть (1) есть вероятность следующего события: N-й акт обслуживания проходил на фазе i; после завершения этого акта в системе не остались синие требования, и само требование, обслуженное за этот акт, было красным. Правая же часть (1) есть вероятность события: N-й акт обслуживания проходил на фазе i; до завершения этого акта в системе находились только красные требования; требование, обслуженное за этот акт, либо покинуло систему, либо по-прежнему осталось красным. Но указанные события совпадают.

§ 6. Связь процессов n_N^{+} и $n(t)$ в стационарном режиме

Лемма 5. *Если $B_i(+0) = 0$ для всех $i \in \Omega$, то для $z = \{z_i, i \in \Omega\}$,* $|z_i| < 1$, при $t \to \infty$ существуют пределы

$$\lim \mathbf{M} z^{n(t)} = P^*(z) = \frac{\lambda}{a} \frac{1}{1-(p, z)} \sum_{i \in \Omega} P_i(z) \left[1 - \frac{z_i}{Q_i(z)}\right]; \tag{1}$$

$$\lim\ \mathbf{P}\{i(t) = i\} = \lambda_i \beta_{i1},\quad i \in \Omega; \tag{2}$$

$$\lim \mathbf{M}[e^{-s\xi(t)} \mid i(t) = i] = \frac{1}{s\beta_{i1}}[1 - \beta_i(s)],\quad s > 0,\quad i \in \Omega. \tag{3}$$

Отметим еще, что $P^*(0) = \lim \mathbf{P}\{n(t) = 0\} = 1 - \rho$.

Доказательство разобъем на несколько этапов.

1°. Покажем сначала, что указанные пределы существуют. Процесс $\eta(t)$ является регенерирующим. Точками регенерации служат моменты начала периодов занятости системы. В силу предельной теоремы для регенерирующих процессов (см. [4]) указанные пределы существуют, если

1) распределение длины одного цикла регенерации абсолютно непрерывно;

2) средняя длина одного цикла регенерации конечна.

Условие 1) выполнено, так как длина одного цикла регенерации есть сумма двух независимых случайных величин: периода отсутствия требований в системе и периода занятости системы; причем распределение первой сл. в. имеет плотность.

Условие 2) выполнено, если среднее значение периода занятости конечно. Убедимся в этом.

Так как период занятости системы не зависит от порядка обслуживания требований, то будем считать, что требования обслуживаются в порядке их поступления в систему. Если ξ есть время обслуживания одного требования до выхода его из системы, то средняя длина периода занятости равна (см., например, [2], § 13)

$$\pi_1 = \frac{\mathrm{M}\xi}{1 - a\mathrm{M}\xi},$$

если $a\,\mathrm{M}\xi < 1$. Но $\rho = a\,\mathrm{M}\xi$. Это следует из равенства

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{i \in \Omega} p_i \gamma_i$$

и формулы (6) § 4.

2°. Положим

$$P_i^*(z, s, t) = \mathrm{M}\,(z^{n(t)} e^{-s\xi(t)} \delta_{i,\, i(t)}), \quad i \in \Omega.$$

Из предыдущего пункта следует существование предела

$$\lim_{t \to \infty} P_i^*(z, s, t) = P_i^*(z, s),$$

независимого от распределения сл. в. $\eta(t) = \{n(t), i(t), \xi(t)\}$ в начальный момент времени $t = 0$.

Покажем, что

$$(-s + a - a(p, z))\, P_i^*(z, s) = \lambda\,[R_i(z) + \bar{P}(0) p_i z_i] \beta_i(s) - \lambda P^-{}_i(z). \quad (4)$$

Будем рассматривать процесс $\eta(t)$ в стационарном режиме; другими словами будем считать, что распределение сл. в. $\eta(0)$ совпадает с предельным распределением сл. в. $\eta(t)$ при $t \to \infty$. В частности, для любого $t \geqslant 0$

$$P_i^*(z, s, t) = P_i^*(z, s). \quad (5)$$

Рассматривая возможные изменения процесса $\eta(t)$ в промежутке от t до $t + h$, имеем при $h \downarrow 0$

$$\begin{aligned} P_i^*(z, s, t + h) &= \mathrm{M}\,\{z^{n(t+h)} e^{-s\xi(t+h)} \delta_{i,\, i(t+h)}\} = \\ &= \mathbf{P}\,\{\xi(t) = 0\} a h p_i z_i \beta_i(s) + \\ &+ \mathbf{P}\,\{0 < \xi(t) \leqslant h\}\, \mathrm{M}\,\{z^{n(t+h)} e^{-s\xi(t+h)} \delta_{i,\, i(t+h)} | 0 < \xi(t) \leqslant h\} + \\ &+ \mathbf{P}\,\{\xi(t) > h\}\, \mathrm{M}\,\{z^{n(t+h)} e^{-s\xi(t+h)} \delta_{i,\, i(t+h)} | \xi(t) > h\} + o(h). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как при $h \downarrow 0$

$$\mathrm{M}\,\{z^{n(t+h)} \delta_{i,\, i(t+h)} \mid 0 < \xi(t) \leqslant h\} \to R_i(z),$$
$$\mathrm{M}\,\{e^{-s\xi(t+h)} \mid 0 < \xi(t) \leqslant h,\ i(t + h) = i\} \to \beta_i(s),$$

то второе слагаемое равно

$$\mathbf{P}\,\{0 < \xi(t) \leqslant h\}\, R_i(z) \beta_i(s) + o(h).$$

Преобразуем третье слагаемое. При $\xi(t) > h$

$$i(t + h) = i(t), \quad \xi(t + h) = \xi(t) - h.$$

Учитывая поступление требований в промежутке от t до $t + h$, запишем третье слагаемое в виде

$$\mathbf{P}\,\{\xi(t) > h\} \left(1 - ah + ah \sum_{j \in \Omega} p_j z_j\right) \mathrm{M}\,\{z^{n(t)} e^{-s[\xi(t) - h]} \delta_{i,\, i(t)} \mid \xi(t) > h\} + o(h).$$

Но

$$P_i^*(z, s, t) = \mathbf{P}\{\xi(t) > h\}\, \mathbf{M}\{z^{n(t)} e^{-s\xi(t)} \delta_{i,i(t)} \mid \xi(t) > h\} +$$
$$+ \mathbf{P}\{0 < \xi(t) \leqslant h\} \mathbf{M}\{z^{n(t)} e^{-s\xi(t)} \delta_{i,i(t)} \mid 0 < \xi(t) \leqslant h\},$$

и так как при $h \downarrow 0$

$$\mathbf{M}\{z^{n(t)} \delta_{i,i(t)} \mid 0 < \xi(t) \leqslant h\} \to P_i^-(z),$$

то окончательно третье слагаемое в (6) запишем в виде

$$[1 - ah + ah(p, z) + sh]\,[P_i^*(z, s, t) - \mathbf{P}\{0 < \xi(t) \leqslant h\} P_i^-(z)] + o(h).$$

Теперь формула (6) с учетом (5) принимает вид

$$[-s + a - a(p, z)]\, P_i^*(z, s) = \mathbf{P}\{\xi(t) = 0\}\, a p_i z_i \beta_i(s) +$$
$$+ \frac{1}{h} \mathbf{P}\{0 < \xi(t) \leqslant h\}\,[R_i(z)\beta_i(s) - P_i^-(z)] + o(h)/h. \tag{7}$$

Полагая

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}\{0 < \xi(t) \leqslant h\} = \lambda_0$$

и принимая во внимание, что $\mathbf{P}\{\xi(t) = 0\} = P^*(0)$, получим из (7):

$$[-s + a - a(p, z)]\, P_i^*(z, s) = \lambda_0 \left[R_i(z) + P^*(0) \frac{a}{\lambda_0} p_i z_i\right] \beta_i(s) - \lambda_0 P_i^-(z). \tag{8}$$

При $s = a - a(p, z)$ получаем (см. еще лемму 4):

$$z_i P_i(z) = \left[R_i(z) + P^*(0) \frac{a}{\lambda_0} P_i z_i\right] \beta_i(a - a(p, z))\, Q_i(z).$$

Теперь из леммы 2 имеем

$$\bar{P}(0) = P^*(0) \frac{a}{\lambda_0} = \frac{a}{\lambda}(1 - \rho). \tag{9}$$

Из (8) и формул лемм 2 и 4 при $z = 1$ получаем:

$$sP_i^*(1, s) = \lambda_0 P_i(1)\,[1 - \beta_i(s)]$$

или

$$P_i^*(1, s) = \frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_i}{s}[1 - \beta_i(s)], \tag{10}$$

откуда находим:

$$1 - P^*(0) = \sum_{i \in \Omega} P_i^*(1, 0) = \frac{\lambda_0}{\lambda} \sum_{i \in \Omega} \lambda_i \beta_{i1} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \rho,$$

что вместе с (9) дает $\lambda_0 = \lambda$. Формула (8) теперь совпадает с (4).

3°. Так как $\lambda_0 = \lambda$, то формула (9) дает $P^*(0) = 1 - \rho$. Так как, далее, $\mathbf{P}\{i(t) = i\} = P_i^*(1, 0)$, то из (10) следует (2). В силу же равенства

$$P_i^*(1, s) = \mathbf{P}\{i(t) = i\}\, \mathbf{M}[e^{-s\xi(t)} \mid i(t) = i]$$

из (10) получаем (3).

Нам осталось получить формулу (1). Положим в (4) $s = 0$ и просуммируем левую и правую части по всем $i \in \Omega$. Получим

$$a[1 - (p, z)] \sum_{i \in \Omega} P_i^*(z, 0) = \lambda \left\{\sum_{i \in \Omega} R_i(z) + \bar{P}(0)(p, z) - \sum_{i \in \Omega} P_i^-(z)\right\}.$$

Теперь формула (1) следует из того, что

$$\sum_{i\in\Omega} P_i^*(z, 0) = P^*(z) - P^*(0); \quad \bar{P}(0) = \frac{a}{\lambda} P^*(0),$$

$$\sum_{i\in\Omega} R_i(z) = \bar{P}(z) - \bar{P}(0) = \sum_{i\in\Omega} P_i(z) - \bar{P}(0),$$

и формулы (2) § 5.

Замечание. Положим

$$p_{ik}^* = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{n_i(t) = k\}, \quad p_{ik}^+ = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{n_{iN} = k \mid i_N = i\}.$$

Если $p_{ij} = 0$ для всех i и j из Ω, то $p_{ik}^* = p_{ik}^+$ для всех $i \in \Omega$ и всех целых чисел $k \geqslant 0$. В самом деле, в этом случае для набора $z = \{z_j, j \in \Omega\}$, такого, что $z_j = 1$ для всех $j \in \Omega$, кроме $j = i \in \Omega$, и $|z_i| \leqslant 1$ из (1) следует:

$$P^*(z) = P_i(z)/P_i(1).$$

§ 7. Соотношения для первых моментов вложенной цепи Маркова

Для вложений цепи Маркова $\eta_N = \{n_N, i_N\}$, $N \geqslant 1$, где $n_N = \{n_{jN}, j \in \Omega\}$, положим

$$x_j = \lim_{N\to\infty} \mathbf{M} n_{jN}, \quad x_{ij} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{M} n_{jN}\delta_{i,\, u(n_N)}.$$

Отметим, что x_j и x_{ij} могут быть определены согласно (8), (9) § 4 и что $x_{ij}/R_i(1)$ есть среднее число требований на фазе j в момент переключения обслуживания на фазу i (в стационарном режиме).

Лемма 6. *Для любых i и j из Ω*

$$x_{ij} + x_{ji} = \sum_{\alpha\in\Omega} (x_{\alpha i} d_{\alpha j} + x_{\alpha j} d_{\alpha i}) + c_{ij}, \tag{1}$$

где

$$d_{ij} = a p_j \beta_{i1} + p_{ij},$$

$$\lambda c_{ij} = \sum_{\alpha\in\Omega} \lambda_\alpha (a^2 p_i p_j \beta_{\alpha 2} + a p_i \beta_{\alpha 1} p_{\alpha j} + a p_j \beta_{\alpha 1} p_{\alpha i}) + 2\lambda_i \delta_{ij} - \lambda_i d_{ij} - \lambda_j d_{ji}.$$

Доказательство следует из (7) § 4 и формул

$$\frac{\partial}{\partial z_i} b_\alpha(z)\big|_{z=1} = a p_i \beta_{\alpha 1} + p_{\alpha i} = d_{\alpha i},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} b_\alpha(z)\big|_{z=1} = a^2 p_i p_j \beta_{\alpha 2} + a p_i \beta_{\alpha 1} p_{\alpha j} + a p_j \beta_{\alpha 1} p_{\alpha i},$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{R_\alpha(z)}{z_\alpha}\Big|_{z=1} = x_{\alpha i} - R_\alpha(1)\,\delta_{\alpha i},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \frac{R_\alpha(z)}{z_\alpha}\Big|_{z=1} = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} R_\alpha(z)\big|_{z=1} - x_{\alpha i}\delta_{\alpha j} - x_{\alpha j}\delta_{\alpha i} + 2R_\alpha(1)\,\delta_{\alpha i}\delta_{\alpha j},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \bar{P}(z)\big|_{z=1} = \sum_{\alpha\in\Omega} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} R_\alpha(z)\big|_{z=1}.$$

§ 8. Вид функции потерь

Так как

$$l_i(t) = n_i(t) - \delta_{i,i(t)}, \quad i \in \Omega,$$

то

$$\mathbf{M}l_i(t) = \mathbf{M}n_i(t) - \mathbf{P}\{i(t) = i\}.$$

Полагая

$$\bar{n}_i = \lim_{t\to\infty} \mathbf{M}n_i(t), \ \bar{l}_i = \lim_{t\to\infty} \mathbf{M}l_i(t),$$

с учетом (2) § 6 получим:

$$\bar{l}_i = \bar{n}_i - \lambda_i\beta_{i1};$$

поэтому функция потерь (1) § 2 принимает вид

$$J = (c, \bar{l}) = (c, \bar{n}) - \sum_{i\in\Omega} c_i\lambda_i\beta_{i1}. \tag{1}$$

Здесь $\bar{n} = \{\bar{n}_i, \ i \in \Omega\}$. Выразим $\bar{n}$ и затем J через $\{x_{ij}\}$.

Предполагая, что $B_i(+0) = 0$ для всех $i \in \Omega$, воспользуемся для этой цели формулой (3) § 4 и формулой (1) § 6, переписав последнюю в виде

$$[1 - (p, z)]\, P^*(z) = \frac{\lambda}{a} \sum_{i\in\Omega} \left[P_i(z) - P_i(z)\frac{z_i}{Q_i(z)}\right] = \frac{\lambda}{a}\Big\{\bar{P}(z) - \\ - \sum_{\alpha\in\Omega} [R_\alpha(z) + \bar{P}(0)\, p_\alpha z_\alpha]\, \beta_\alpha(a - a(p, z))\Big\}. \tag{2}$$

Так как $\frac{\partial}{\partial z_i} P^*(z)\,|_{z=1} = \bar{n}_i$, то вторая производная по z_i левой части (2) в точке $z = 1$ равна $-2p_i\bar{n}_i$. Эта же производная правой части (2) с учетом формул, помещенных в конце предыдущего параграфа, равна

$$-\frac{\lambda}{a} \sum_{\alpha\in\Omega} \left\{[R_\alpha(1) + \bar{P}(0)\, p_\alpha]\, a^2 p_i^2 \beta_{\alpha 2} + 2\left[\frac{\partial}{\partial z_i} R_\alpha(z)\Big|_{z=1} + \bar{P}(0)\, p_\alpha \delta_{\alpha i}\right] a p_i \beta_{\alpha 1}\right\} = \\ = -\frac{\lambda}{a} \sum_{\alpha\in\Omega} \left\{\frac{\lambda_\alpha}{\lambda} a^2 p_i^2 \beta_{\alpha 2} + 2\left[x_{\alpha i} + \frac{a}{\lambda}(1 - \rho)\, p_\alpha \delta_{\alpha i}\right] a p_i \beta_{\alpha 1}\right\} = \\ = -\left\{a p_i^2 \sum_{\alpha\in\Omega} \lambda_\alpha \beta_{\alpha 2} + 2\lambda p_i \sum_{\alpha\in\Omega} x_{\alpha i}\beta_{\alpha 1} + 2(1 - \rho)\, a p_i^2 \beta_{i1}\right\},$$

откуда находим:

$$\bar{n}_i = \lambda \sum_{\alpha\in\Omega} x_{\alpha i}\beta_{\alpha 1} + \frac{a p_i}{2} \sum_{\alpha\in\Omega} \lambda_\alpha \beta_{\alpha 2} + (1 - \rho)\, a p_i \beta_{i1}.$$

Таким образом, получена

Лемма 7.

$$J = \lambda \sum_{i,\,\alpha\in\Omega} c_i x_{\alpha i} \beta_{\alpha 1} + \mathrm{const},$$

где const *не зависит от выбора функции переключения* $u = u(n)$; *или в векторно-матричной записи*

$$J = \lambda\,(c, X'\beta) + \mathrm{const}, \tag{3}$$

где

$$c = \{c_i, \ i \in \Omega\}, \ \beta = \{\beta_{i1}, \ i \in \Omega\}, \ X = \{x_{ij}; \ i, j \in \Omega\}.$$

§ 9. Экстремальная задача

Согласно § 2 наша цель — в классе $U = \{u\}$ всех функций переключения (фаз обслуживания) найти функцию переключения u^*, для которой

$$J(u^*) = \min_{u \in U} J(u).$$

Функционал $J = J(u)$ записывается в виде (3) § 8, в котором числа x_{ij}, составляющие матрицу X, естественно зависят от выбранной функции переключения $u \in U$. Кроме того, эти числа удовлетворяют системе уравнений (1) § 7. В связи с этим рассмотрим следующую задачу линейного программирования: найти минимум линейного функционала (3) § 8 по $X = \{x_{ij}\}$, где все x_{ij} неотрицательны и удовлетворяют системе линейных уравнений (1) § 7. Если этот минимум равен J^* и существует функция переключения $u^* \in U$, для которой $J(u^*) = J^*$, то, конечно, u^* есть оптимальная функция переключения (на которой достигается минимум функционала $J(u)$ по всем $u \in U$). Мы скоро убедимся, что это на самом деле имеет место, и найдем вид функции переключения. Очевидно, что вместо функционала (3) § 8 мы можем рассматривать функционал $J = (c, X'\beta)$.

Итак, рассмотрим следующую задачу линейного программирования: найти минимум функционала

$$J = (c, X'\beta), \tag{1}$$

где элементы матрицы $X = \{x_{ij},\ i, j \in \Omega\}$ удовлетворяют неравенствам

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{для всех } i, j \in \Omega \tag{2}$$

и системе уравнений

$$x_{ij} + x_{ji} - \sum_{\alpha \in \Omega} (x_{\alpha i} d_{\alpha j} + x_{\alpha j} d_{\alpha i}) = c_{ij}. \tag{3}$$

Для произвольного порядка π элементов из Ω будем писать $i <_\pi j$ или проще $i < j$ (когда ясно, о каком порядке π идет речь), если элемент $i \in \Omega$ предшествует элементу $j \in \Omega$ согласно порядку π.

Мы будем еще использовать следующее предположение: *для любого порядка π элементов из Ω существует набор чисел $\{x_{ij}\}$, удовлетворяющих* (2), (3), *для которого $x_{ji} = 0$ при $i < j$.*

Это предположение не является ограничением, так как в существовании такого набора $\{x_{ij}\}$ можно убедиться непосредственно, вспомнив вид коэффициентов c_{ij}, а еще проще это вытекает из следующих рассуждений. Выберем функцию переключения, соответствующую дисциплине обслуживания с относительным приоритетом (фаз обслуживания), предоставляющей преимущество фазе i по отношению к фазе j, если $i < j$. Для такой функции переключения набор $\{x_{ij}\}$ удовлетворяет (2), (3) и условию $x_{ji} = 0$ при $i < j$.

§ 10. Оценка снизу функционала потерь

Пусть r — число элементов из Ω. Выберем некоторую нумерацию этих элементов числами $1, 2, \ldots, r$. Мы можем считать, что $\Omega = \{1, 2, \ldots, r\}$.

Запишем систему уравнений (3) § 9 в матричном виде

$$X + X' = X'D + D'X + C,$$

где $D = \{d_{ij}\}$, $C = \{c_{ij}\}$ или в виде

$$(I - D')X + X'(I - D) = C.$$

Используя запись (см. конец § 4) $D = P + a\beta p'$ или $I - D = I - P - a\beta p'$, получим

$$(I - P')X + X'(I - P) = ap\beta'X + aX'\beta p' + C. \tag{1}$$

Для $k = \overline{1, r}$ через R_k обозначим матрицу, образованную из P заменой последних $r - k$ столбцов нулевыми столбцами. В конце § 4 мы видели, что любое собственное значение матрицы P по модулю меньше единицы. Следовательно, то же самое верно и для матрицы R_k. В частности, допустимо разложение

$$(I - R_k)^{-1} = \sum_{n \geqslant 0} R_k^n.$$

Положим

$$w_k = (I - R_k)^{-1}\beta = \sum_{n \geqslant 0} R_k^n \beta; \tag{2}$$

отсюда видно, что $w_k \geqslant 0$ (запись $w \geqslant 0$ для вектора w означает, что компоненты этого вектора неотрицательны). Представим w_k в виде

$$w_k = u_k + v_k; \quad u_k \geqslant 0, \; v_k \geqslant 0;$$
$$w_k = (w_{k1}, \ldots, w_{kr})'; \quad u_k = (w_{k1}, \ldots, w_{kk}, 0, \ldots, 0)'. \tag{3}$$

Так как $R_k u_k = P u_k$, $R_k v_k = 0$, то из (2) следует:

$$\beta = (I - P)u_k + v_k. \tag{4}$$

Умножим каждую из частей равенства (1) слева на вектор-строку u_k' и справа на вектор-столбец u_k. Так как

$$\begin{aligned} u_k'(I - P')Xu_k &= [(I - P)u_k]'Xu_k = (\beta' - v_k')Xu_k = \\ &= (X'\beta, u_k) - (v_k, Xu_k) = u_k'X'(I - P)u_k; \\ au_k'p\beta'Xu_k &= a(p, u_k)(X'\beta, u_k) = au_k'X'\beta p'u_k; \\ u_k'Cu_k &= (Cu_k, u_k), \end{aligned}$$

то

$$[1 - a(p, u_k)](X'\beta, u_k) = (v_k, Xu_k) + \frac{1}{2}(Cu_k, u_k). \tag{5}$$

Отметим, что $1 - a(p, u_k) > 0$, так как из (4) следует:

$$\begin{aligned} u_k = (I - P)^{-1}(\beta - v_k) = \sum_{n \geqslant 0} P^n(\beta - v_k) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} P^n\beta = (I - P)^{-1}\beta = \\ = \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)', \end{aligned}$$

т. е. $a(p, u_k) \leqslant a(p, \gamma) = \rho < 1$.

Положим

$$h_k = \frac{(v_k, Xu_k)}{1 - a(p, u_k)}, \quad b_k = \frac{1}{2} \frac{(Cu_k, u_k)}{1 - a(p, u_k)}, \tag{6}$$
$$X'\beta = y = (y_1, \ldots, y_r)';$$

тогда равенство (5) запишется в виде

$$(u_k, y) = h_k + b_k, \; k = 1, 2, \ldots, r,$$

или

$$\begin{aligned} &w_{11}y_1 &&= h_1 + b_1, \\ &w_{21}y_1 + w_{22}y_2 &&= h_2 + b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\ &w_{r1}y_1 + w_{r2}y_2 + \ldots + w_{rr}y_r &&= h_r + b_r, \end{aligned}$$

или в векторной записи

$$Wy = h + b. \tag{7}$$

Функционал же потерь (1) § 9 в новых обозначениях равен $J = (c, y)$.

Отметим, что матрица W обратима. В самом деле, из (2) следует: $w_k - \beta \geqslant 0$, т. е.

$$w_{ki} \geqslant \beta_{i1} > 0. \tag{8}$$

Лемма 8. *Если*

$$W'^{-1}c \geqslant 0, \tag{9}$$

то $J = (c, y) \geqslant J^* = (z, b)$, *где* $W'^{-1}c = z = (z_1, \ldots, z_r)'$. *Кроме того,* $J = J^*$ *тогда и только тогда, когда* $z_k > 0$ *влечет* $x_{ji} = 0$ *при* $i \leqslant k < j$.

Доказательство. Из (7) и (9) следует:

$$J = (c, y) = (c, W^{-1}h) + (c, W^{-1}b) = (z, h) + (z, b) \geqslant J^* = (z, b),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $z_k > 0$ влечет $h_k = 0$. Но в силу (3) и (6)

$$[1 - a(p, u_k)]\, h_k = (v_k, Xu_k) = \sum_{i \leqslant k < j} w_{ki} w_{kj} x_{ji}.$$

Остается заметить, что согласно (8) равенство $h_k = 0$ равносильно $x_{ji} = 0$ для всех i и j, таких, как $i \leqslant k < j$.

В силу предположения, сформулированного в конце § 9, существует набор чисел $\{x_{ij}\}$, удовлетворяющих (2), (3) § 9, для которого $x_{ji} = 0$ при $i < j$. Для такого набора все $h_k = 0$; следовательно $J = J^*$. В частности, это означает, что при выполнении условия (9) указанный набор $X = \{x_{ij}\}$ является одним из решений задачи линейного программирования (1)—(3) § 9.

В следующем параграфе мы покажем, что существует такая нумерация фаз из Ω, при которой условие (9) выполняется автоматически.

§ 11. Структура оптимальной дисциплины обслуживания

Определим последовательно фазы $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \ldots, \alpha_1$ согласно следующим рекуррентным соотношениям:

$$M_r = \Omega; \; c_\alpha(M_r) = c_\alpha, \quad \alpha \in M_r;$$

$$\frac{c_{\alpha_i}(M_i)}{\gamma_{\alpha_i}(M_i)} = \min_{\alpha \in M_i} \frac{c_\alpha(M_i)}{\gamma_\alpha(M_i)} = m_i, \alpha_i \in M_i; \tag{1}$$

$$M_{i-1} = \Omega \setminus \{\alpha_r, \ldots, \alpha_i\} = M_i - \{\alpha_i\}; \tag{2}$$

$$c_\alpha(M_{i-1}) = \gamma_\alpha(M_i)\left[\frac{c_\alpha(M_i)}{\gamma_\alpha(M_i)} - m_i\right], \alpha \in M_{i-1}. \tag{3}$$

Видно, что упорядоченный набор фаз $\alpha_r, \alpha_{r-1}, \ldots, \alpha_1$ может быть определен неоднозначно (если минимум в (1) достигается на нескольких фазах из M_i).

Пронумеруем теперь фазы из Ω так, чтобы $\alpha_i = i, i = 1, \ldots, r$.

Лемма 9. *Для указанной нумерации фаз*

$$W'^{-1}c = z,$$

где

$$z = \left\{\frac{c_1(M_1)}{\gamma_1(M_1)}, \ldots, \frac{c_r(M_r)}{\gamma_r(M_r)}\right\}'. \tag{4}$$

В частности, $W'^{-1}c \geqslant 0$.

Доказательство разобьем на этапы.

1°. Проверим прежде всего, что $w_{ki} = \gamma_i(M_k)$, $k \geqslant i$. Из (3), (4) § 10 следует, что

$$\beta_k = (I_k - P_k)\overline{w}_k,$$

где I_k — единичная матрица размерности $k \times k$; P_k — матрица размерности $k \times k$; получаемая из матрицы P отбрасыванием последних $r - k$ строк и столбцов;

$$\beta_k = (\beta_{11}, \ldots, \beta_{k1})'; \quad \overline{w}_k = (w_{k1}, \ldots, w_{kk})'.$$

Поэтому так же, как компонента γ_i вектора $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)'$, удовлетворяющего уравнению $\beta = (I - P)\gamma$, имеет смысл среднего суммарного времени обслуживания требования, начиная с фазы $i \in M_r$ до первого выхода из множества фаз M_r, так и компонента $\overline{w}_{ki}$ вектора $\overline{w}_k$ имеет тот же смысл, если M_r заменить на M_k; т. е. $w_{ki} = \gamma_i(M_k)$, $i \in M_k$.

2°. Полагая $z = (z_1, \ldots, z_r)'$, запишем (4) в виде $c = W'z$ или развернуто

$$\begin{aligned} c_1(M_r) &= w_{11}z_1 + w_{21}z_2 + \ldots + w_{r1}z_r, \\ c_2(M_r) &= \qquad\quad\; w_{22}z_2 + \ldots + w_{r2}z_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_r(M_r) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad w_{rr}r_r. \end{aligned} \tag{5}$$

Из последнего уравнения получаем:

$$z_r = \frac{c_r}{w_{rr}} = \frac{c_r(M_r)}{\gamma_r(M_r)},$$

а так как $w_{ri} = \gamma_i(M_r)$, то система уравнений (5), кроме последнего, с учетом обозначений (2) и (3) и соотношения (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} c_1(M_{r-1}) &= w_{11}z_1 + w_{21}z_2 + \ldots + w_{r-11}z_{r-1}, \\ c_2(M_{r-1}) &= \qquad\quad\; w_{22}z_2 + \ldots + w_{r-12}z_{r-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{r-1}(M_{r-1}) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad w_{r-1\,r-1}z_{r-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что в силу (1) $c_i\ (M_{r-1}) \geqslant 0$ для всех $i \leqslant r-1$. Система же уравнений (6) аналогична системе (5), если в (5) число r заменить на $r-1$ Остается воспользоваться методом индукции.

Положим теперь

$$L\ (i) = z_i + \ldots + z_r,\quad i = \overline{1, r}.$$

Обозначим через $L_1, \ldots, L_s$ множество различных значений функции $L\ (\alpha)$ на Ω; $s \leqslant r$. Будем считать, что $L_1 > L_2 > \ldots > L_r$. Пусть

$$M_i^* = \{\alpha \in \Omega : L\ (\alpha) = L_i\}. \tag{7}$$

Лемма 10. *Для того чтобы функция переключения $u \in U$ была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы фазы из M_i^* имели преимущество перед фазами из M_j^*, если $i < j$.*

Доказательство. Согласно лемме 9 $W'^{-1}c \geqslant 0$. В силу леммы 8 функция переключения $u \in U$, порождающая $X = \{x_{\alpha\beta}\}$, оптимальна тогда и только тогда, когда $z_k > 0$ влечет $x_{\beta\alpha} = 0$ при $\alpha \leqslant k < \beta$. Отметим, далее, что в силу определения (7)

1) при $1 \leqslant i < j \leqslant r$ номер каждой фазы из M_i^* меньше номера любой фазы из M_j^*;

2) если $\alpha \in M_i^*$ и $z_\alpha > 0$, то $z_\beta = 0$ для всех других фаз из M_i^*; при этом $\beta < \alpha$; в связи с этим положим $\omega_i = \alpha$, если $\alpha \in M_i^*$ и $z_\alpha > 0$;

3) в M_i^* при $i \neq r$ существует фаза $\alpha \in M_i^*$, такая, что $z_\alpha > 0$.

Необходимость. Пусть $1 \leqslant i < j \leqslant r$, $k = \omega_i \in M_i^*$. Тогда $z_k > 0$ и, следовательно, $x_{\beta\alpha} = 0$ при $\alpha \leqslant k < \beta$. В частности, $x_{\beta\alpha} = 0$ при $\alpha \in M_i^*$ и $\beta \in M_j^*$. Таким образом, всякая фаза $\alpha \in M_i^*$ имеет преимущество перед любой фазой $\beta \in M_j^*$.

Достаточность. Пусть $\alpha \in M_i^*$, $\beta \in M_j^*$ и $i < j$. Так как фаза α имеет преимущество перед фазой β, то $x_{\beta\alpha} = 0$. При этом $\alpha \leqslant k = \omega_i < \beta$. Если теперь $z_k > 0$, то в силу того, что фаза k совпадает с одной из фаз $\{\omega_i\}$, $x_{\beta\alpha} = 0$ при $\alpha \leqslant k < \beta$.

Теперь теорема § 3 следует из леммы 10, если учесть, что множества $\Omega_1^*, \ldots, \Omega_s^*$ совпадают соответственно с множествами $M_s^*, \ldots, M_1^*$.

Поступила в редакцию
7.6.73

ЛИТЕРАТУРА

[1] **M. D. Maustafa,** Input-output Markov processes, Proc. Koninkijke Nederl. Akad. Wetensch., 60 (1957), 112—118.

[2] **Г. П. Климов,** Стохастические системы обслуживания, М., изд-во «Наука», 1966.

[3] **М. Пароди,** Локализация характеристических чисел матриц и ее применения, М., ИЛ, 1960.

[4] **В. Л. Смит,** Теория восстановления и смежные с ней вопросы, сб. перев.: «Математика», 5 : 3 (1961).

TIME-SHARING SERVICE SYSTEMS. I

G. P. KLIMOV (MOSCOW)

(Summary)

The paper deals with a multiphase time-sharing system. Such an order of service is found that minimizes an additive loss functional.