Отчёт по лабораторной работе №8. Задача на собственные значения.

Предмет: научное программирование

Александр Сергеевич Баклашов

Содержание

1 Цель работы **5**

2 Теоретическое введение **6**

3 Выполнение лабораторной работы **7**

3.1 Собственные значения и собственные векторы 7

3.2 Марковские цепи. Случайное блуждание. 10

4 Библиография **15**

Список иллюстраций

3.1 Собственные значения и собственные векторы матр. A 8
3.2 Действительные собственные значения 9
3.3 Вектор вероятности после 5 шагов 12

Список таблиц

1 Цель работы

Изучить собственные значения в Octave.

2 Теоретическое введение

GNU Octave — свободная программная система для математических вычислений, использующая совместимый с MATLAB язык высокого уровня.

Предоставляет интерактивный командный интерфейс для решения линейных и нелинейных математических задач, а также проведения других численных экспериментов. Кроме того, Octave можно использовать для пакетной обработки. Язык Octave оперирует арифметикой вещественных и комплексных скаляров, векторов и матриц, имеет расширения для решения линейных алгебраических задач, нахождения корней систем нелинейных алгебраических уравнений, работы с полиномами, решения различных дифференциальных уравнений, интегрирования систем дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений первого порядка, интегрирования функций на конечных и бесконечных интервалах. Этот список можно легко расширить, используя язык Octave (или используя динамически загружаемые модули, созданные на Си, C++, Фортране и других). [1]

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Собственные значения и собственные векторы

Зададим матрицу A. Необходимо найти собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Для нахождения используется команда eig с двумя выходными аргументами. Синтаксис:

[v lambda] = eig (A)

Первый элемент результата есть матрица, столбцы которой представляют собой собственные векторы, а второй результат будет диагональной матрицей с собственными значениями на диагонали.(рис. 3.1)

```
>>diary on
>A = [1 2 -3 ; 2 4 0 ; 1 1 1]
A =

   1   2  -3
   2   4   0
   1   1   1

>> [v lambda] = eig (A)
v =

  -0.2400 +      0i  -0.7920 +      0i  -0.7920 -      0i
  -0.9139 +      0i   0.4523 + 0.1226i   0.4523 - 0.1226i
  -0.3273 +      0i   0.2322 + 0.3152i   0.2322 - 0.3152i

lambda =

Diagonal Matrix

   4.5251 +      0i                  0                  0
                  0   0.7374 + 0.8844i                  0
                  0                  0   0.7374 - 0.8844i

>>
```

Рис. 3.1: Собственные значения и собственные векторы матр. A

Для того, чтобы получить матрицу с действительными собственными значениями, мы можем создать симметричную матрицу (имеющую действительные собственные значения) путём умножения матрицы и на транспонированную матрицу (рис. 3.2)

```
>> C = A'*A
C =

     6    11    -2
    11    21    -5
    -2    -5    10

>> [v lambda] = eig (C)
v =

    0.876137   0.188733  -0.443581
   -0.477715   0.216620  -0.851390
   -0.064597   0.957839   0.279949

lambda =

Diagonal Matrix

     0.1497         0         0
          0    8.4751         0
          0         0   28.3752

>>
```

Рис. 3.2: Действительные собственные значения

3.2 Марковские цепи. Случайное блуждание.

Предположим, что мы случайным образом передвигаемся следующим образом. В состояниях 2,3 или 4 мы перемещаемся влево или вправо наугад. По достижении конца дороги (состояния 1 или 5) мы останавливаемся.

Наша цель - предсказать, где мы окажемся. Начнем с вектора вероятности.

- Предположим, что мы можем начать в любой точке с равной вероятностью. Тогда начальный вектор будет (0.2 ,0.2 ,0.2 ,0.2 ,0.2).
- С другой стороны, мы можем знать начальное состояние. Предположим, мы начинаем с состояния 3. Тогда начальный вектор будет (0,0,1,0,0).

Мы хотим предсказать наше местоположение после k ходов. Это делается путём записи переходной матрицы. Сформируем массив nxn, элемент ij которого является вероятностью перехода из состояния i в j. Пусть T есть транспонированная матрица переходов. Матричное произведение Tx даёт новое распределение вероятностей после одного периода времени. Продолжение умножения на T даёт вероятности для будущих состояний. Таким образом, для любого начального вектора вероятности x и любого положительного целого числа k вектор вероятности после k периодов времени равен

$$\vec{y} = T^k \vec{x}$$

Для примера случайного блуждания найдём вектор вероятности после 5 шагов для каждого из следующих начальных векторов вероятности:

$$a = [0.2; 0.2 ;0.2; 0.2 ;0.2]^T \

b = [0.5; 0 ;0 ;0 ;0.5]^T \ c = [0 ;1 ;0 ;0; 0]^T \ d = [0 ;0 ;1 ;0 ;0]^T $$

Сформируем матрицу переходов:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Вероятности будущего состояния легко вычисляются как $T^k\vec{x}$, где x - начальный вектор вероятностей (рис. 3.3)

```
>> T = [1 0.5 0 0 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0.5 0 0.5 0; 0 0 0.5 0 0; 0
0 0 0.5 1];
>> a = [0.2;0.2;0.2;0.2;0.2];
>> b = [0.5;0;0;0;0.5];
>> c = [0;1;0;0;0];
>> d = [0;0;1;0;0];
>> T^5*a
ans =

   0.450000
   0.025000
   0.050000
   0.025000
   0.450000

>> T^5*b
ans =

   0.5000
        0
        0
        0
   0.5000

>> T^5*c
ans =

   0.6875
        0
   0.1250
        0
   0.1875

>> T^5*d
ans =

   0.3750
   0.1250
        0
   0.1250
   0.3750

>> |
```

Рис. 3.3: Вектор вероятности после 5 шагов

Состояние x является равновесным, если $\vec{x} = T\vec{x}$, где T - матрица перехода для цепи Маркова. Равновесное состояние не приводит к изменению состояния в будущем. Каждая цепь Маркова имеет хотя бы одно равновесное состояние. Пусть T - матрица переходов для цепи Маркова. Тогда $\lambda = 1$ является собственным значением T. Если x является собственным вектором для $\lambda = 1$ с неотрицательными компонентами, сумма которых равна 1, то x является равновесным состоянием для T. Найдём вектор равновесного состояния для цепи Маркова с переходной матрицей

$$T = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.51 & 0.14 \\ 0.29 & 0.04 & 0.52 \\ 0.23 & 0.45 & 0.34 \end{bmatrix}$$

Таким образом, $x = (0.37631 \;\; 0.29287 \;\; 0.33082)$ является вектором равновесного состояния. Проверим это.

Все пункты выше - на рис. **??**.

```
>> T = [0.48 0.51 0.14; 0.29 0.04 0.52; 0.23 0.45 0.34]
T =

   0.480000   0.510000   0.140000
   0.290000   0.040000   0.520000
   0.230000   0.450000   0.340000

>> [v lambda] = eig (T)
v =

  -0.6484  -0.8011   0.4325
  -0.5046   0.2639  -0.8160
  -0.5700   0.5372   0.3835

lambda =

Diagonal Matrix

   1.0000        0        0
        0   0.2181        0
        0        0  -0.3581

>> x = v(:,1)/sum(v(:,1))
error: 'l' undefined near line 1, column 9
>> x = v(:,1)/sum(v(:,1))
x =

   0.3763
   0.2929
   0.3308


>> T^10 * x
ans =

   0.3763
   0.2929
   0.3308

>> T^50 * x
ans =

   0.3763
   0.2929
   0.3308

>> T^50 * x - T^10*x
ans =

   4.4409e-16
   2.7756e-16
   3.8858e-16

>> diary off
>>
```

Вывод

В ходе данной лабораторной работы я изучил собственные значения в Octave.

4 Библиография

1. Лабораторная работа №8. - 8 с. [Электронный ресурс]. M. URL: Лабораторная работа №7. (Дата обращения: 11.12.2023).