Задача на собственные значения

Включите журналирование работы.

```
>> diary on
```

Собственные значения и собственные векторы

Зададим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Необходимо найти собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Для нахождения используется команда `eig` с двумя выходными аргументами. Синтаксис:

```
[v lambda] = eig (A)
```

Первый элемент результата есть матрица, столбцы которой представляют собой собственные векторы, а второй результат будет диагональной матрицей с собственными значениями на диагонали.

```
>> A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =

   1   2  -3
   2   4   0
   1   1   1
```

```
>> [v lambda] = eig(A)
v =

  -0.23995 + 0.00000i  -0.79195 + 0.00000i  -0.79195 - 0.00000i
  -0.91393 + 0.00000i   0.45225 + 0.12259i   0.45225 - 0.12259i
  -0.32733 + 0.00000i   0.23219 + 0.31519i   0.23219 - 0.31519i

lambda =

Diagonal Matrix

   4.52510 + 0.00000i                    0                    0
                    0   0.73745 + 0.88437i                    0
                    0                    0   0.73745 - 0.88437i
```

Для того, чтобы получить матрицу с действительными собственными значениями, мы можем создать симметричную матрицу (имеющую действительные собственные значения) путём умножения матрицы и на транспонированную матрицу:

```
>> C = A' * A
C =

    6   11   -2
   11   21   -5
   -2   -5   10

>> [v lambda] = eig(C)
v =

   0.876137   0.188733  -0.443581
  -0.477715   0.216620  -0.851390
  -0.064597   0.957839   0.279949

lambda =

Diagonal Matrix
```

```
0.14970          0          0
      0    8.47515          0
      0          0   28.37516
```

Здесь диагональные элементы матрицы Λ являются собственными значениями, а соответствующие столбцы матрицы V являются соответствующими собственными векторами. Каждому собственному значению соответствует бесконечное семейство собственных векторов. Типичные собственные векторы, полученные в Octave, нормированы на единицу.

Марковские цепи

Рассмотрим последовательность случайных событий при соблюдении следующих условий:

- возможно конечное число состояний;
- через определённые промежутки времени проводится наблюдение и регистрируется состояние системы;
- для каждого состояния мы задаём вероятность перехода в каждое из остальных состояний или вероятность остаться в том же самом состоянии. Существенным предположением является то, что эти вероятности зависят только от текущего состояния.

Такая система называется цепью Маркова. Наша задача – предсказать вероятности состояний системы.

Случайное блуждание

Предположим, что мы случайным образом передвигаемся следующим образом. В состояниях 2, 3 или 4 мы перемещаемся влево или вправо наугад. По достижении конца дороги (состояния 1 или 5) мы останавливаемся.

Наша цель – предсказать, где мы окажемся. Начнем с вектора вероятности.

- Предположим, что мы можем начать в любой точке с равной вероятностью. Тогда начальный вектор будет $(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$.

- С другой стороны, мы можем знать начальное состояние. Предположим, мы начинаем с состояния 3. Тогда начальный вектор будет $(0, 0, 1, 0, 0)$.

Мы хотим предсказать наше местоположение после k ходов. Это делается путём записи переходной матрицы. Сформируем массив $n \times n$, элемент ij которого является вероятностью перехода из состояния i в j. Пусть T есть транспонированная матрица переходов. Матричное произведение Tx даёт новое распределение вероятностей после одного периода времени. Продолжение умножения на T даёт вероятности для будущих состояний. Таким образом, для любого начального вектора вероятности x и любого положительного целого числа k вектор вероятности после k периодов времени равен

$$\vec{y} = T^k \vec{x}.$$

Для примера случайного блуждания найдём вектор вероятности после 5 шагов для каждого из следующих начальных векторов вероятности:

$$a = [0.2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2]^T,$$
$$b = [0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5]^T,$$
$$c = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$
$$d = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Сформируем матрицу переходов:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

```
>> T = [1 0.5 0 0 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0.5 0 0.5 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0 0 0.
>> a = [0.2; 0.2; 0.2; 0.2 ; 0.2];
>> b = [0.5; 0; 0; 0; 0.5];
>> c = [0; 1; 0; 0; 0];
>> d = [0; 0; 1; 0; 0];
```

Вероятности будущего состояния легко вычисляются как $T^k\vec{x}$, где $\vec{x}$ – начальный вектор вероятностей.

```
>> T^5 * a
ans =

   0.450000
   0.025000
   0.050000
   0.025000
   0.450000

>> T^5 * b
ans =

   0.50000
   0.00000
   0.00000
   0.00000
   0.50000

>> T^5 * c
ans =

   0.68750
   0.00000
   0.12500
   0.00000
   0.18750

>> T^5 * d
ans =

   0.37500
   0.12500
   0.00000
   0.12500
   0.37500
```

Состояние x является равновесным, если $\vec{x} = T\vec{x}$, где T – матрица перехода для цепи Маркова. Равновесное состояние не приводит к изменению состояния в будущем. Каждая цепь Маркова имеет хотя бы одно равновесное состояние.

Пусть T – матрица переходов для цепи Маркова. Тогда $\lambda = 1$ является собственным значением T. Если x является собственным вектором для $\lambda = 1$ с неотрицательными компонентами, сумма которых равна 1, то x является равновесным состоянием для T.

Найдём вектор равновесного состояния для цепи Маркова с переходной матрицей

$$T = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.51 & 0.14 \\ 0.29 & 0.04 & 0.52 \\ 0.23 & 0.45 & 0.34 \end{bmatrix}.$$

```
>> T = [0.48 0.51 0.14; 0.29 0.04 0.52; 0.23 0.45 0.34]
T =

   0.480000   0.510000   0.140000
   0.290000   0.040000   0.520000
   0.230000   0.450000   0.340000

>> [v lambda] = eig(T)
v =

  -0.64840  -0.80111   0.43249
  -0.50463   0.26394  -0.81601
  -0.57002   0.53717   0.38351

lambda =

Diagonal Matrix

   1.00000         0         0
         0   0.21810         0
         0         0  -0.35810

>> x = v(:,1)/sum(v(:,1))
x =
```

```
   0.37631
   0.29287
   0.33082
```

Таким образом, $x = (0.37631 \quad 0.29287 \quad 0.33082)$ является вектором равновесного состояния. Проверим это.

```
>> T^10 * x
ans =

   0.37631
   0.29287
   0.33082

>> T^50 * x
ans =

   0.37631
   0.29287
   0.33082

>> T^50 * x - T^10 * x
ans =

   2.2204e-16
   1.6653e-16
   1.1102e-16
```

Выключите журналирование.

```
>> diary off
```

Задание

- Сделайте отчёт по лабораторной работе в формате Markdown.
- В качестве ответа просьба предоставить отчёты в 3 форматах: `pdf`, `docx` и `md` (в архиве, поскольку он должен содержать скриншоты, Makefile и т.д.)