Отчёт по лабораторной работе №4. Модель гармонических колебаний.

Предмет: математическое моделирование

Александр Сергеевич Баклашов

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Рассмотреть модели линейного гармонического осциллятора. С помощью рассмотренного примера научиться решать задачи такого типа для разных случаев.

2 Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

3 Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время.

Данное уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы. При отсутствии потерь в системе $(\gamma = 0)$ вместо этого уравнения получаем уравнение консервативного осциллятора, энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0$$

Для однозначной разрешимости данного уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для такой системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом. [2]

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Задача (Вариант 38)

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$\ddot{x} + 21x = 0$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$\ddot{x} + 2.2\dot{x} + 2.3x = 0$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$\ddot{x} + 2.4\dot{x} + 2.5x = 0.2sin(2.6t)$

На интервале $t \in [0; 72]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 1.2, y_0 = -1.2$ [3]

4.2 Решение

4.2.1 Код

Напишем код для 3х случаев в OpenModelica[1] (рис. 4.1)

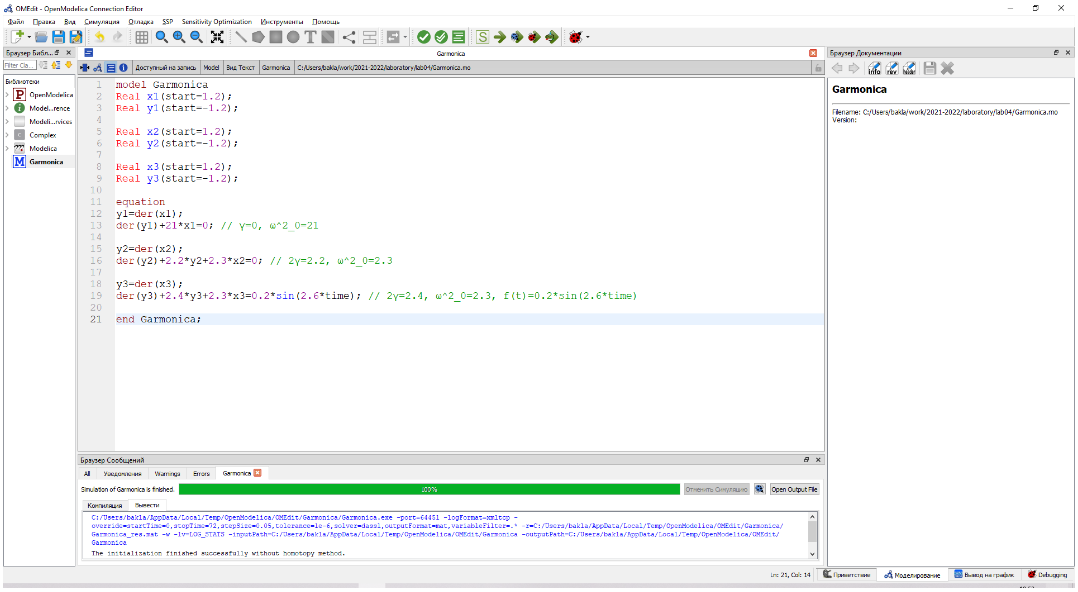

Figure 4.1: Код

4.2.2 Параметры симуляции

Зададим параметры симуляции (рис. 4.2)

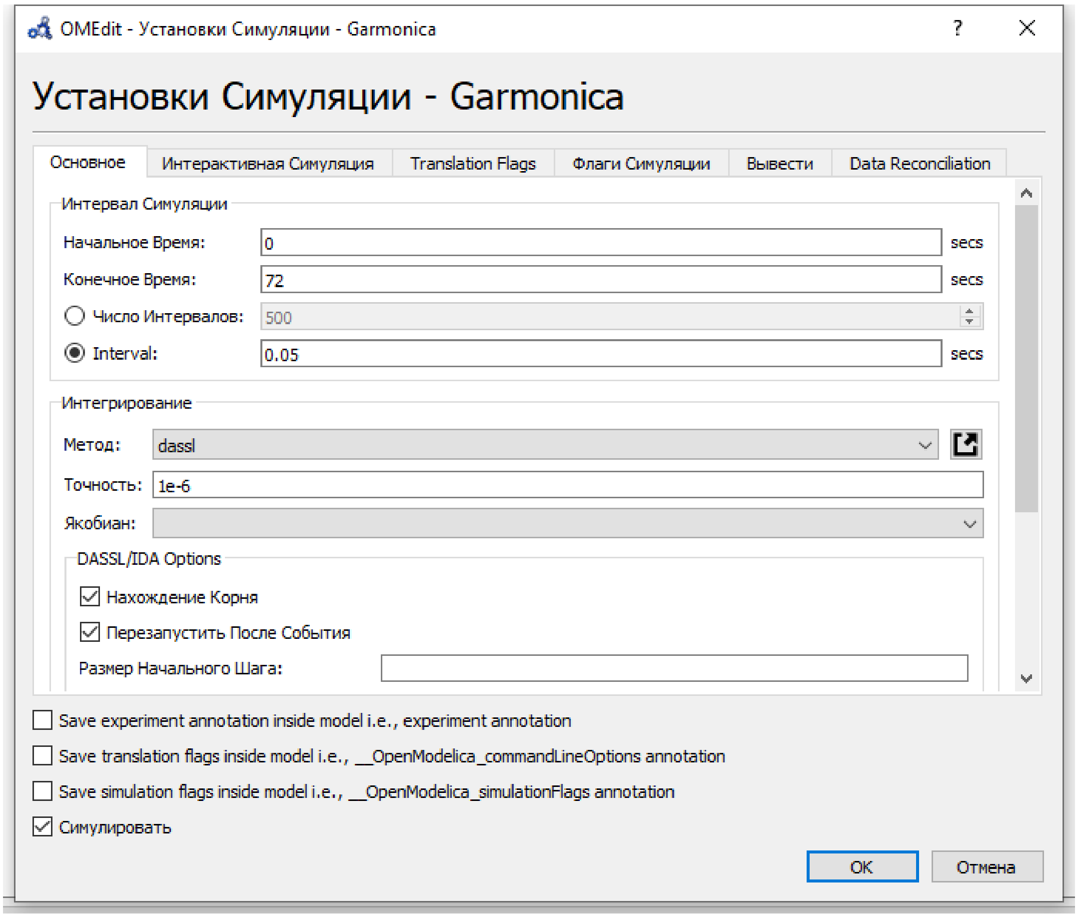

Figure 4.2: Параметры симуляции

4.2.3 Первый случай

1. Построим решение уравнения гармонического осциллятора для 1 случая (рис. 4.3)

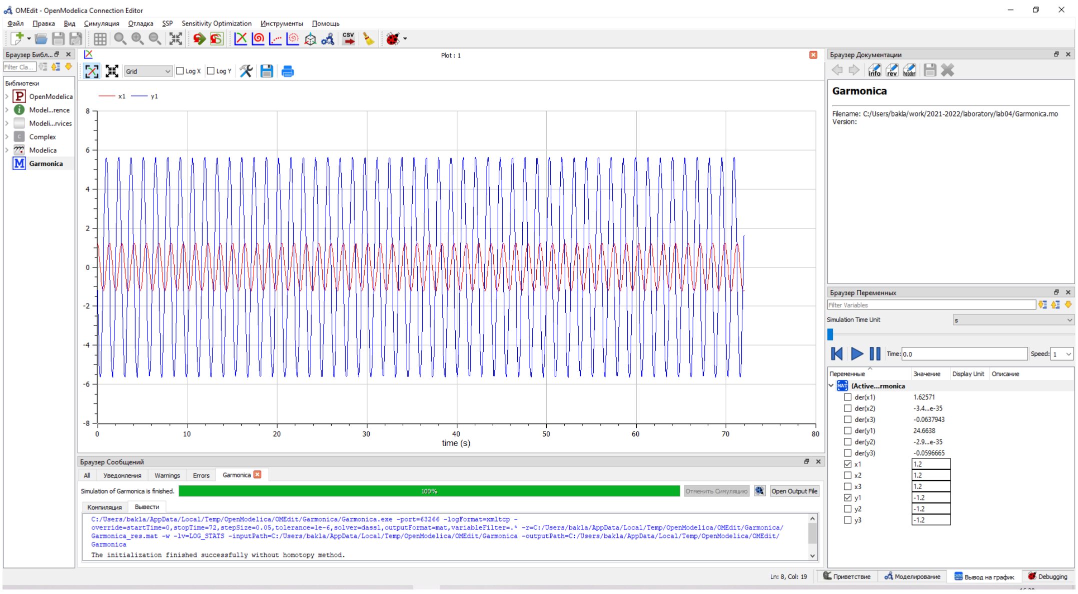

Figure 4.3: Решение для 1 случая

2. Построим фазовый портрет для 1 случая (рис. 4.4)

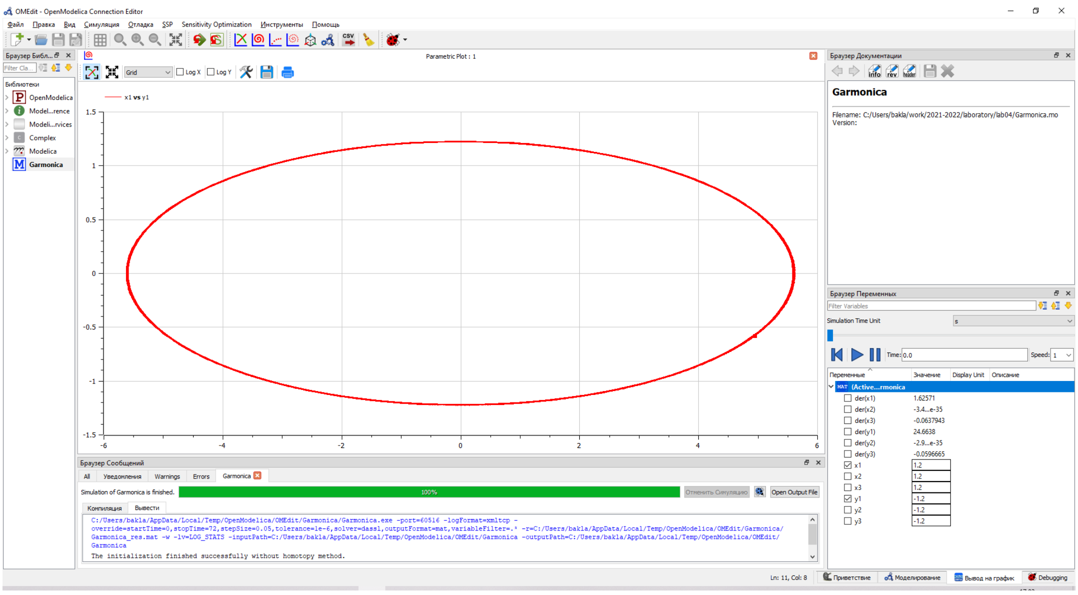

Figure 4.4: Фазовый портрет для 1 случая

4.2.4 Второй случай

1. Построим решение уравнения гармонического осциллятора для 2 случая (рис. 4.5)

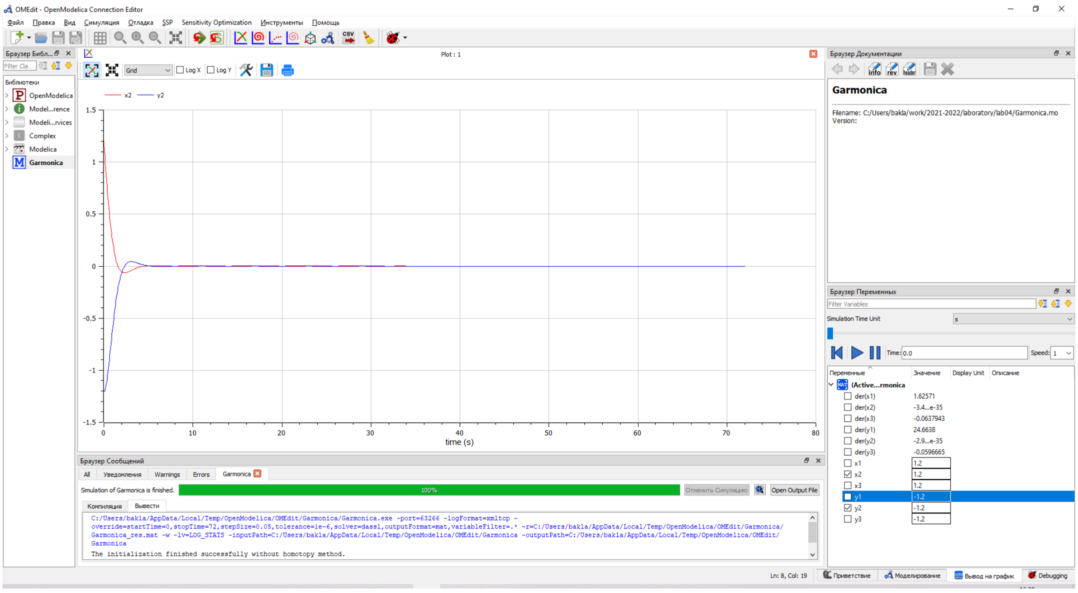

Figure 4.5: Решение для 2 случая

2. Построим фазовый портрет для 2 случая (рис. 4.6)

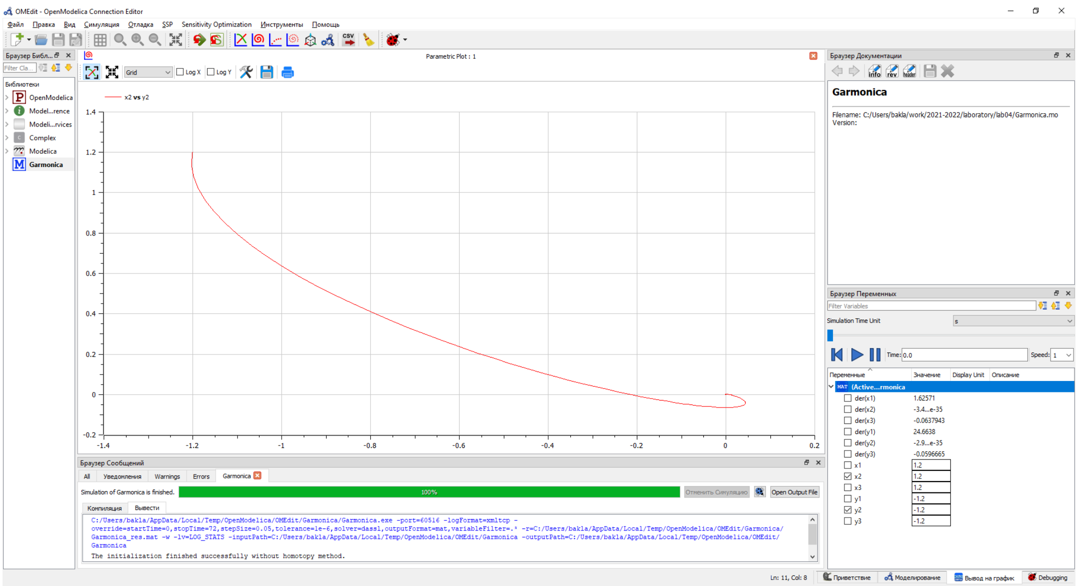

Figure 4.6: Фазовый портрет для 2 случая

4.2.5 Третий случай

1. Построим решение уравнения гармонического осциллятора для 3 случая (рис. 4.7)

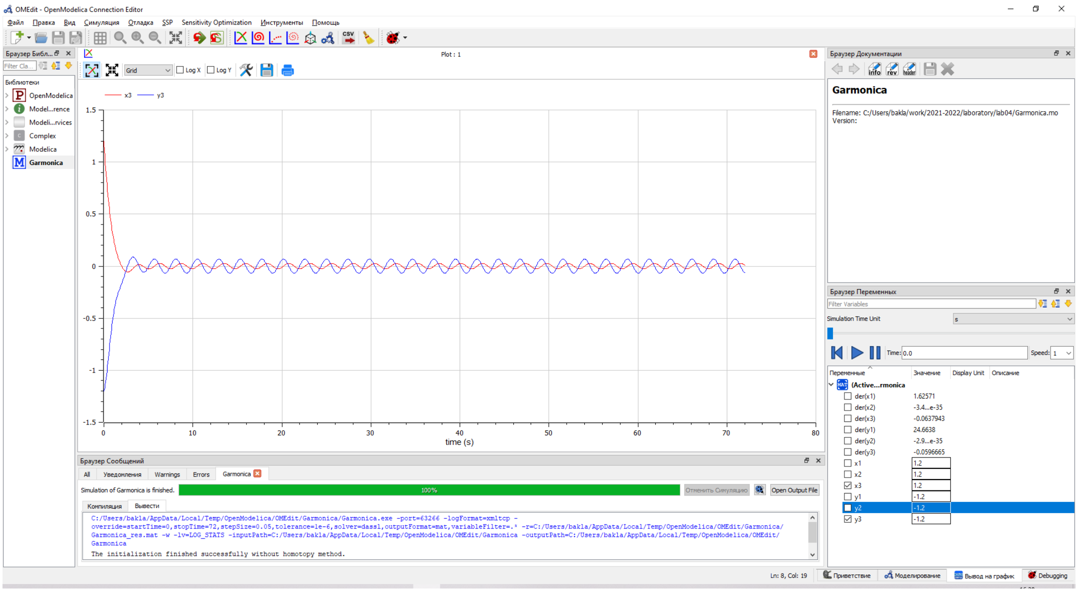

Figure 4.7: Решение для 3 случая

2. Построим фазовый портрет для 3 случая (рис. 4.8)

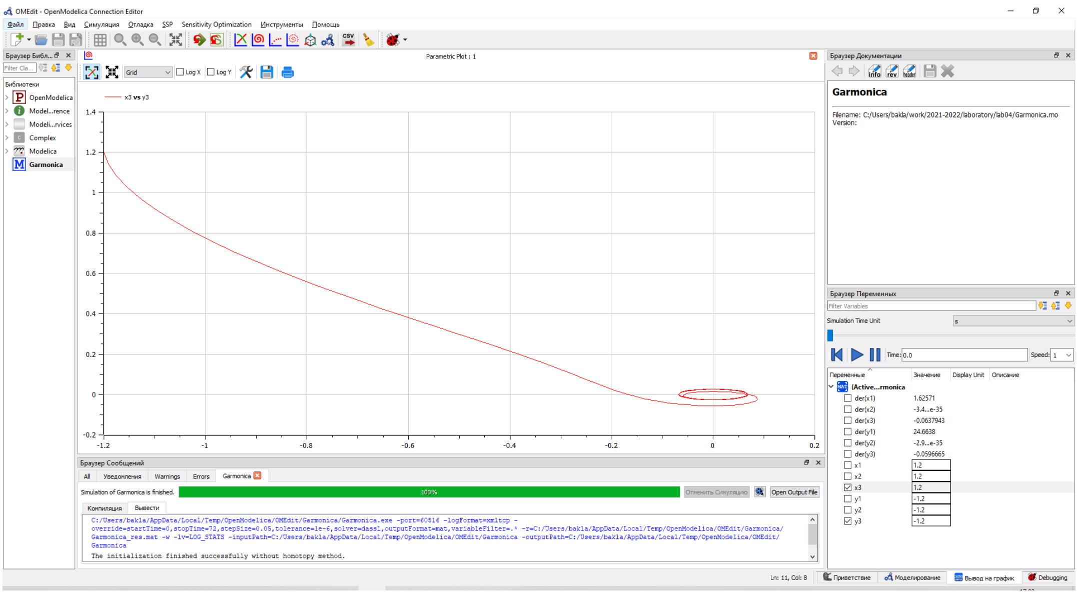

Figure 4.8: Фазовый портрет для 3 случая

5 Выводы

В ходе данной лабораторной работы я рассмотрел модели линейного гармонического осциллятора для 3 случаев и научился решать задачи такого типа.

6 Вопросы к лабораторной работе

1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

Уравнение гармонических колебаний:

$$x = Acos(\omega_0 t + \phi)$$

где x - смещение колеблющейся точки от положения равновесия;

t - время;

A - соответственно амплитуда;

ω_0 - угловая частота,

ϕ - начальная фаза колебаний;

$(\omega_0 t + \phi)$ - фаза колебаний в момент t.

2. Дайте определение осциллятора

Осциллятор — система, совершающая колебания. Показатели такой системы переодически повторяются во времени.

3. Запишите модель математического маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = 0$$

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Переменную, от которой берется производная 2 порядка, заменяем на ту же переменную, но от которой берется производная 1 порядка. Далее записываем её как другую переменную — первое уравнение системы. Далее берём производную от неё и смотрим на исходное уравнение — второе уравнение системы. Например:

$$\ddot{x} + 5x = 0$$

Переменную, от которой берется производная 2 порядка($\ddot{x}$), заменяем на ту же переменную, но от которой берется производная 1 порядка ($\dot{x}$). Далее записываем её как другую переменную(y):

$y = \dot{x}$ — первое уравнение системы.

Далее берём производную от неё ($\dot{y}$=$\ddot{x}$) и смотрим на исходное уравнение:

$\dot{y} = -5x$ — второе уравнение системы.

Полная система уравнений:

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = -5x \end{cases}$$

5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовый портрет - это множество различных решений (совокупность фазовых траекторий), изображённых на одной фазовой плоскости.

Фазовая траектория - кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последоват. моменты времени в течение всего времени эволюции.

7 Библиография

1. Modelica: Language Specification. - 308 с. [Электронный ресурс]. M. URL: Language Specification (Дата обращения: 03.03.2021).

2. Лабораторная работа №4. Задача о погоне. - 7 с. [Электронный ресурс]. M. URL: Лабораторная работа №4. Модель гармонических колебаний. (Дата обращения: 03.03.2021).

3. Лабораторная работа №4. Варианты. [Электронный ресурс]. M. URL: Варианты (Дата обращения: 03.03.2021).