

Отчёт по лабораторной работе №6.

Задача об эпидемии.

Предмет: математическое моделирование

Александр Сергеевич Баклашов

Содержание

1	Цель работы	4
2	Задание	5
3	Теоретическое введение	6
4	Выполнение лабораторной работы	8
4.1	Задача (Вариант 38)	8
4.2	Решение	8
4.2.1	Код	8
4.2.2	Параметры симуляции для 1 случая	9
4.2.3	График для 1 случая	10
4.2.4	Параметры симуляции для 2 случая	12
4.2.5	График для 2 случая	12
5	Выводы	14
6	Библиография	15

List of Figures

4.1	Код	9
4.2	Параметры симуляции	10
4.3	График изменения числа особей в каждой из трех групп для 1 случая	11
4.4	График изменения числа особей в каждой из трех групп для 1 случая (I,R)	11
4.5	Параметры симуляции	12
4.6	График изменения числа особей в каждой из трех групп для 2 случая	13

1 Цель работы

Рассмотреть простейшую модель эпидемии. С помощью рассмотренного примера научиться решать задачи такого типа.

2 Задание

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначаемая через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1) если $I(0) \leq I^*$

2) если $I(0) > I^*$ [3]

3 Теоретическое введение

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha S, \text{ если } I(t) > I^* \\ \frac{dS}{dt} &= 0, \text{ если } I(t) \leq I^*\end{aligned}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \alpha S - \beta I, \text{ если } I(t) > I^* \\ \frac{dI}{dt} &= -\beta I, \text{ если } I(t) \leq I^*\end{aligned}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности β , γ - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(t) \leq I^*$ и $I(t) > I^*$. [2]

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Задача (Вариант 38)

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 12700$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 170$, а число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 57$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

- 1) если $I(0) \leq I^*$
- 2) если $I(0) > I^*$ [3]

4.2 Решение

4.2.1 Код

Напишем код в OpenModelica [1] (рис. 4.1)

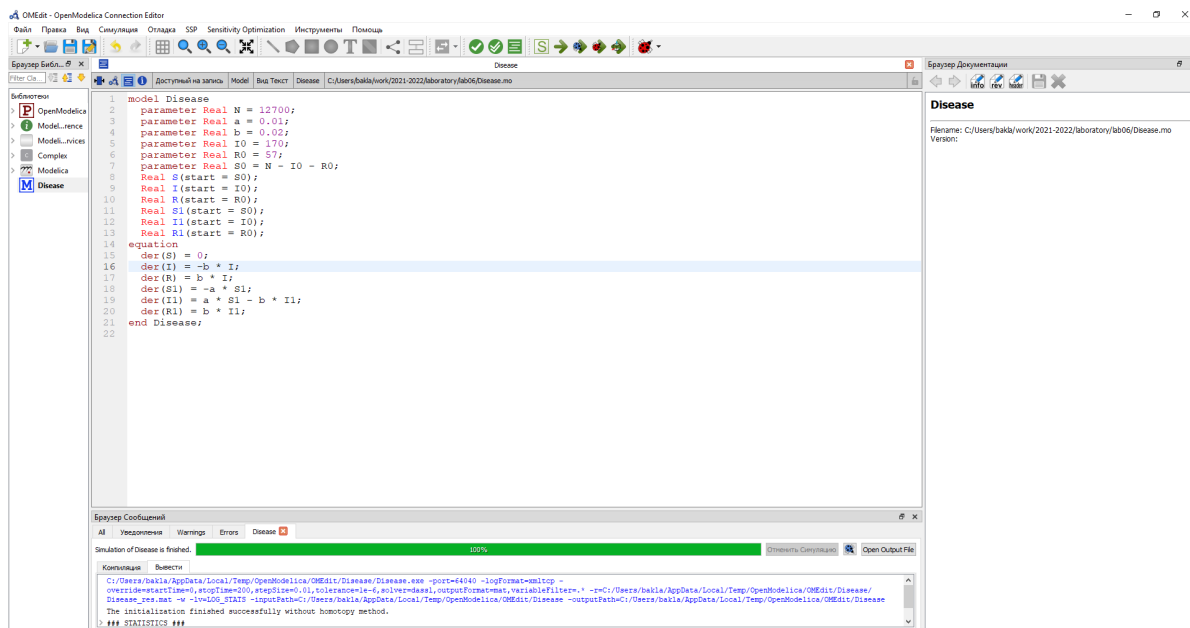


Figure 4.1: Код

4.2.2 Параметры симуляции для 1 случая

Зададим параметры симуляции для 1 случая (рис. 4.2)

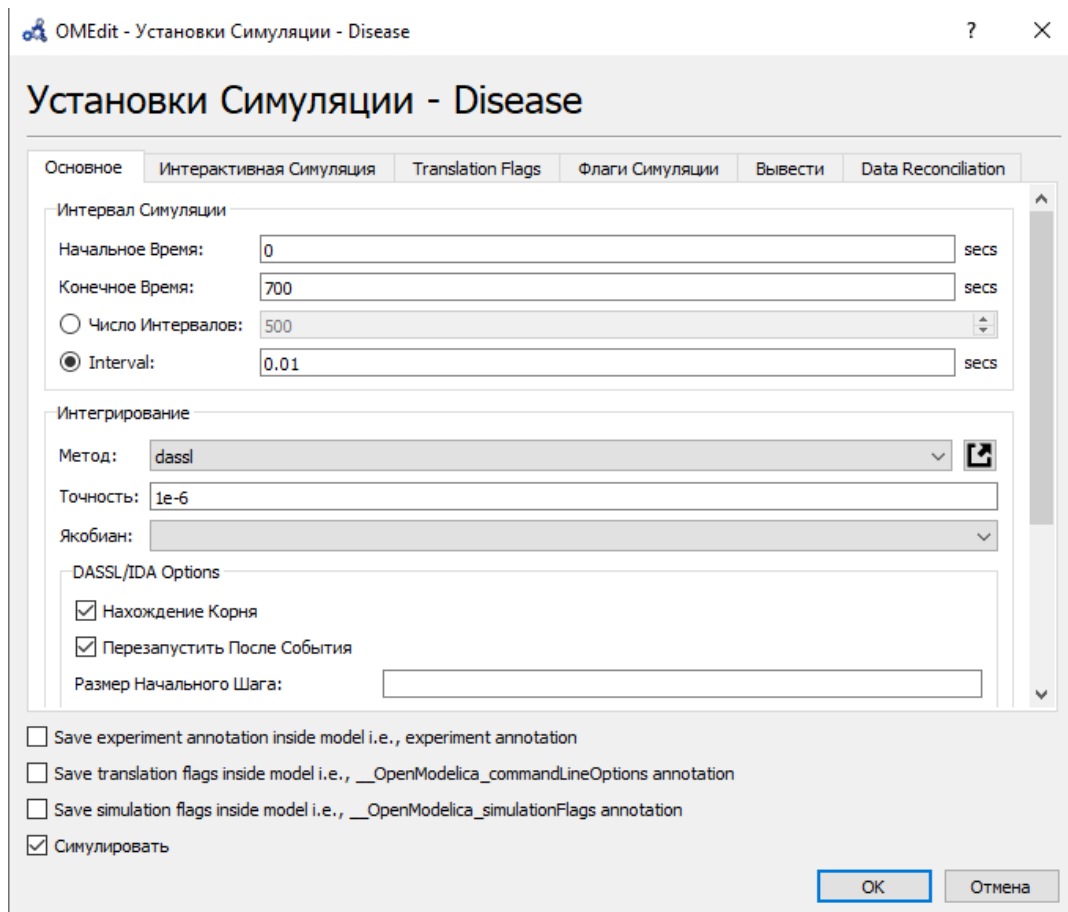


Figure 4.2: Параметры симуляции

4.2.3 График для 1 случая

Построим график изменения числа особей в каждой из трех групп для случая $I(t) \leq I^*$. (рис. 4.3)



Figure 4.3: График изменения числа особей в каждой из трех групп для 1 случая

Как мы видим на графике, в этом случае все больные изолированы и не заражают здоровых.

Рассмотрим изменение групп I и R поближе. Количество инфицированных распространителей (I) со временем уменьшается, а количество здоровых особей с иммунитетом к болезни (R) - увеличивается.

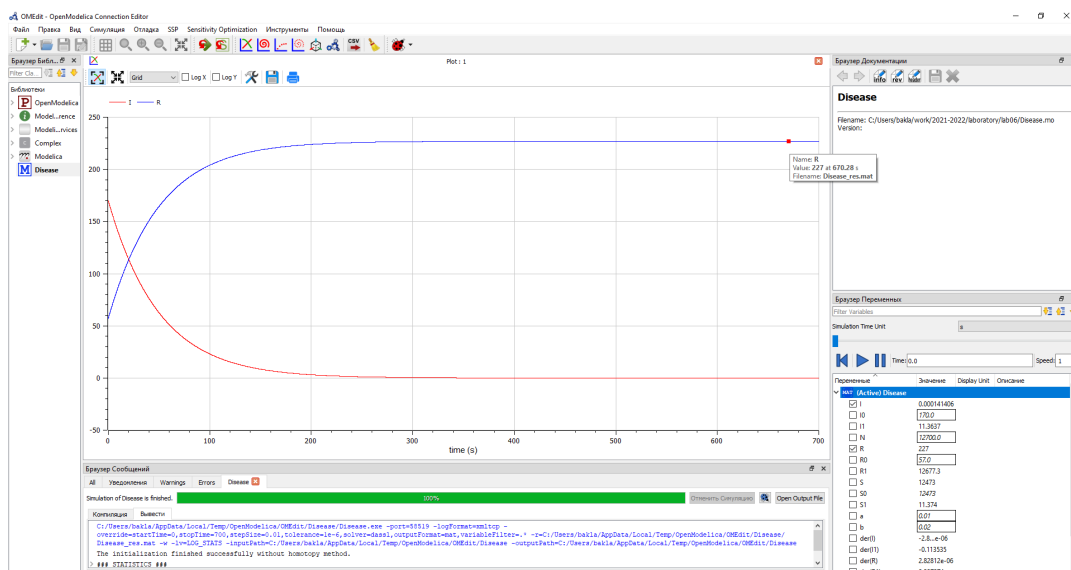


Figure 4.4: График изменения числа особей в каждой из трех групп для 1 случая (I,R)

4.2.4 Параметры симуляции для 2 случая

Зададим параметры симуляции для 2 случая (рис. 4.5)

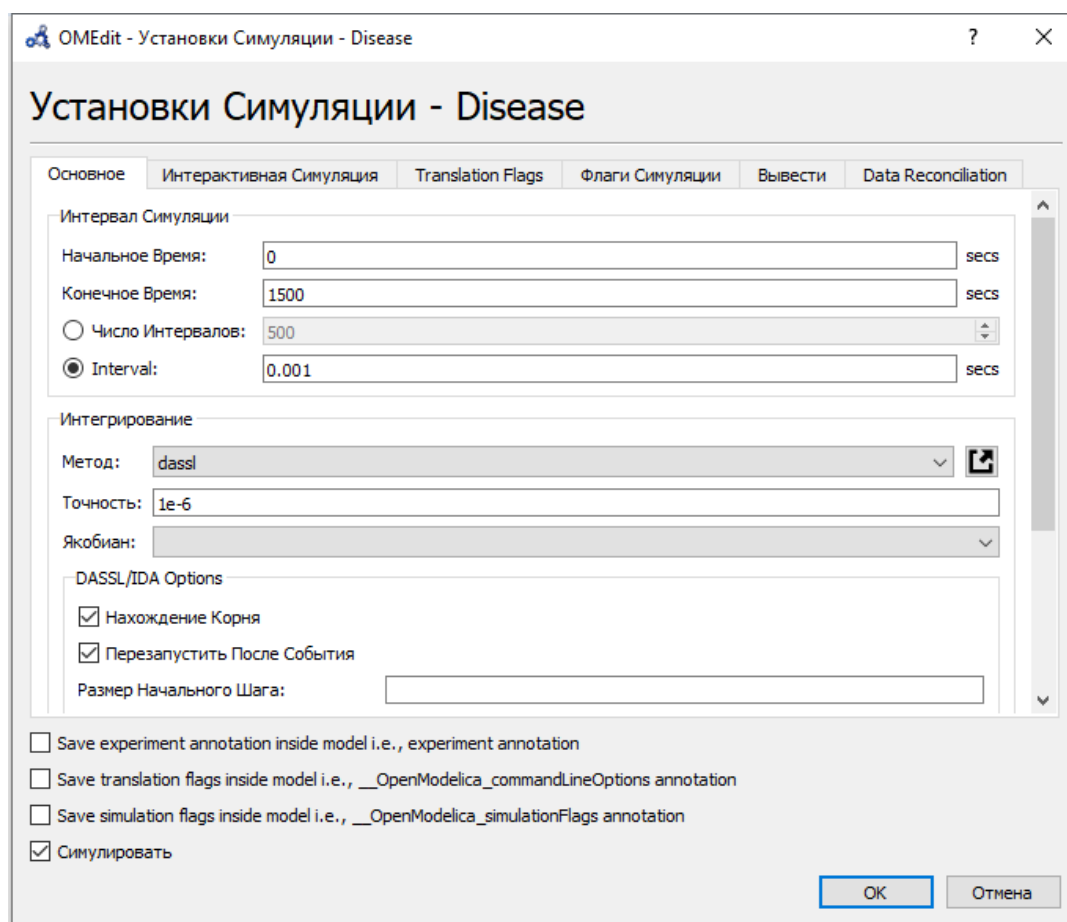


Figure 4.5: Параметры симуляции

4.2.5 График для 2 случая

Построим график изменения числа особей в каждой из трех групп для случая $I(t) > I^*$. (рис. 4.6)

Как мы видим на графике, в этом случае инфицирование особи способны заражать восприимчивых к болезни особей. Количество здоровых, но восприимчивых к болезни особей (S) со временем уменьшается и идет прирост здоровых особей с иммунитетом к болезни (R). Количество инфицированных распространителей (I) вначале увеличивается, затем уменьшается по мере роста здоровых

особей с иммунитетом к болезни (R).

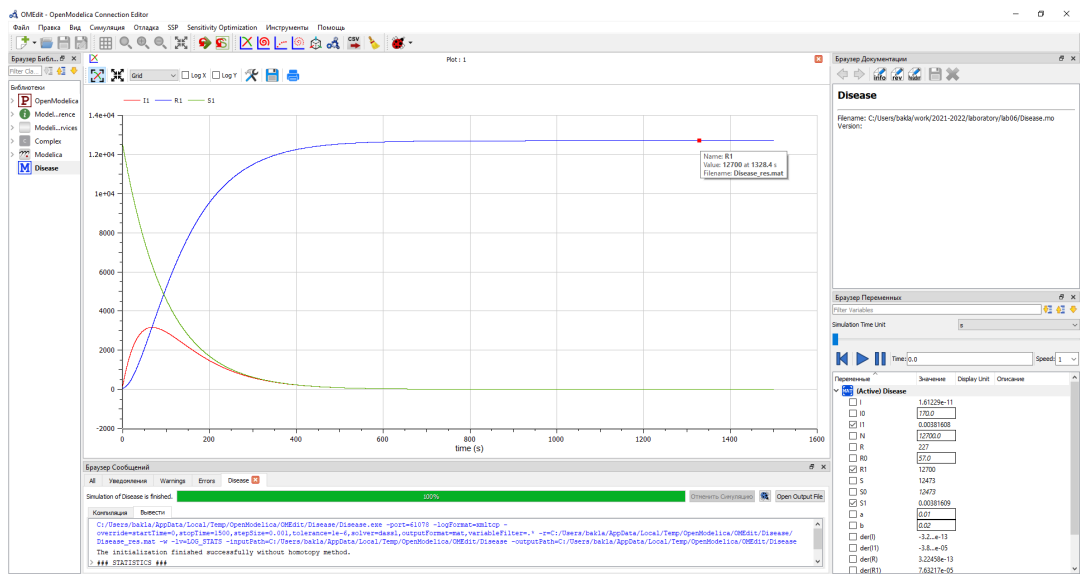


Figure 4.6: График изменения числа особей в каждой из трех групп для 2 случая

5 Выводы

В ходе данной лабораторной работы я рассмотрел простейшую модель эпидемии. С помощью рассмотренного примера научился решать задачи такого типа.

6 Библиография

1. Modelica: Language Specification. - 308 с. [Электронный ресурс]. М. URL: Language Specification (Дата обращения: 18.03.2021).
2. Лабораторная работа №6. Задача об эпидемии. - 4 с. [Электронный ресурс]. М. URL: Лабораторная работа №6. Задача об эпидемии. (Дата обращения: 18.03.2021).
3. Лабораторная работа №6. Варианты. [Электронный ресурс]. М. URL: Варианты (Дата обращения: 18.03.2021).