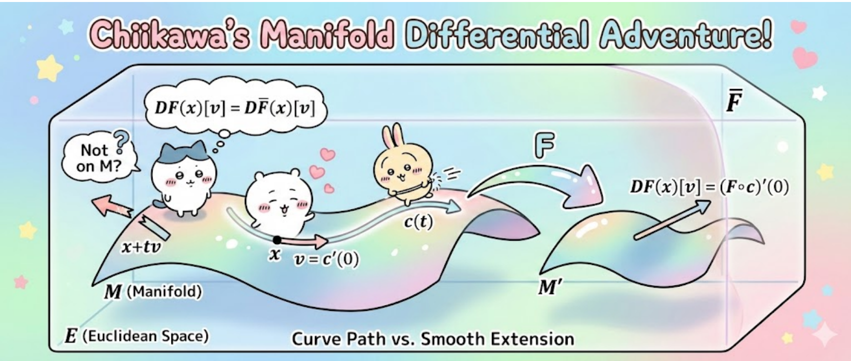
嵌入子流形上光滑映射的微分

北极甜虾（南半球版）

2026.1.11



1 动机

在欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 中，映射 F 在点 x 沿方向 v 的微分通常定义为

$$DF(x)[v] = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+tv) - F(x)}{t}$$

但在流形 $\mathcal{M}$ 上，这种定义失效了，因为：

1. $x + tv$ 通常不在流形 $\mathcal{M}$ 上，导致 $F(x + tv)$ 根本没有定义。

2. 我们希望微分能反映 F 对切向量 $v \in T_x\mathcal{M}$ 的作用。

我们接下来会讲解两种等价的定义方式：一种是基于流形内部的“曲线”视角，另一种是基于外部空间的“延拓”视角。

2 定义一：基于曲线的几何定义

切向量 v 的本质是某条曲线的速度向量。通过观察 F 如何把这条曲线“推”到目标流形上，我们可以定义微分如下。

定义 1: 微分 (通过曲线定义)

令 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ 是嵌入子流形之间的光滑映射。对于点 $x \in \mathcal{M}$ 和切向量 $v \in T_x\mathcal{M}$，令 $c : I \to \mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的一条光滑曲线，满足 $c(0) = x$ 且 $c'(0) = v$. 那么 F 在点 x 处的**微分 (Differential)** $DF(x) : T_x\mathcal{M} \to T_{F(x)}\mathcal{M}'$ 定义为

$$DF(x)[v] = (F \circ c)'(0) = \frac{d}{dt}F(c(t))\bigg|_{t=0}$$

这个定义非常直观：它衡量了如果我们以速度 v 经过 x 时候，函数 $F(x)$ 在目标空间中的瞬时速度。

3 定义二：基于延拓的计算定义

由于 $\mathcal{M}$ 嵌入在 $\mathcal{E}$ 中，我们可以利用第上一次笔记中学到的光滑延拓来计算微分。

定理 2: 微分 (通过延拓计算)

令 $\bar{F}$ 是 F 在点 x 附近的局部光滑延拓。那么对于任意 $v \in T_x\mathcal{M}$，有

$$DF(x)[v] = D\bar{F}(x)[v]$$

这个结果与具体的延拓 $\bar{F}$ 的选择无关。

证明. 根据定义，微分 $DF(x)[v]$ 是通过流形上的曲线定义的。设 $v \in T_x\mathcal{M}$，由切空间的定义可知，存在一条光滑曲线 $c : I \to \mathcal{M}$，

满足

$$c(0) = x, \quad c'(0) = v.$$

根据微分的定义：

$$DF(x)[v] = \frac{d}{dt}F(c(t))\bigg|_{t=0}.$$

由于 $\bar{F}$ 是 F 在点 x 附近的局部光滑延拓，这意味着存在 x 的一个开邻域 $U \subseteq \mathcal{E}$，使得对于所有 $y \in \mathcal{M} \cap U$，都有 $\bar{F}(y) = f(y)$。由于曲线 $c(t)$ 是连续的且 $c(0) = x \in U$，因此对于足够小的 t，曲线上的点 $c(t)$ 都会落在邻域 U 内且位于流形 $\mathcal{M}$ 上。于是，在 $t = 0$ 附近，我们有

$$F(c(t)) = \bar{F}(c(t))$$

对上式关于 t 求导，并应用欧几里得空间中的链式法则, 我们有

$$DF(x)[v] = \frac{d}{dt}F(c(t))\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\bar{F}(c(t))\bigg|_{t=0}.$$

根据链式法则，我们得到

$$\frac{d}{dt}\bar{F}(c(t))\bigg|_{t=0} = D\bar{F}(c(0))[c'(0)] = D\bar{F}(x)[v].$$

□

注解 3

这意味着在计算流形上函数的微分时，我们可以暂时忘掉流形的约束，把它当作外在的空间里的函数求导，最后只需要把输入向量 v 限制在切空间内即可。

例子 4: Rayleigh 商的微分

考虑球面 $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : x^\top x = 1\}$ 和函数 $f : S^{d-1} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x) = x^\top Ax,$$

其中 A 为对称矩阵。

1. **延拓**：取 $\bar{f}(x) = x^\top Ax$，其定义域为整个 $\mathbb{R}^d$。
2. **求导**：在欧几里得空间中，$D\bar{f}(x)[v] = 2x^\top Av$。
3. **结论**：对于球面上的点 x 和切向量 $v \perp x$，函数 f 的微分即为 $Df(x)[v] = 2x^\top Av$。

4 微分的一些性质

流形上的微分保留了经典微积分的所有优良性质。

命题 5: 微分的线性性质, Exercise 3.37

令 $\mathcal{M}$ 是欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 的嵌入子流形。设 $F_1, F_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{E}'$ 是两个光滑映射，且 $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. 定义映射 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{E}'$ 为

$$F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x).$$

则 F 是光滑映射，且其在点 $x \in \mathcal{M}$ 处的微分满足线性关系：

$$DF(x) = a_1DF_1(x) + a_2DF_2(x).$$

证明. 我们要证明 F 的光滑性以及微分的线性关系。证明分为两个部分：

1. 验证光滑性：

根据光滑映射的定义，由于 F_1 和 F_2 在 x 处光滑，存在 x 在 $\mathcal{E}$ 中的一个开邻域 U 以及定义在 U 上的光滑函数 $\bar{F}_1, \bar{F}_2 : U \to \mathcal{E}'$，使得它们分别是 F_1 和 F_2 的局部光滑延拓。即对于所有 $y \in \mathcal{M} \cap U$，有 $\bar{F}_1(y) = F_1(y)$ 且 $\bar{F}_2(y) = F_2(y)$。

现在定义 $\bar{F} : U \to \mathcal{E}'$ 为：

$$\bar{F}(y) = a_1\bar{F}_1(y) + a_2\bar{F}_2(y).$$

由于 $\bar{F}_1$ 和 $\bar{F}_2$ 是定义在欧几里得空间开集上的光滑函数，其线性组合 $\bar{F}$ 在 U 上显然也是光滑的。此外，对于任意 $y \in \mathcal{M} \cap U$：

$$\bar{F}(y) = a_1\bar{F}_1(y) + a_2\bar{F}_2(y) = a_1F_1(y) + a_2F_2(y) = F(y).$$

因此，$\bar{F}$ 是 F 在点 x 附近的局部光滑延拓。由定义可知 F 是光滑映射。

2. 验证微分的线性性质：

根据定理 2，对于任意切向量 $v \in T_x\mathcal{M}$，我们有

$$DF(x)[v] = D\bar{F}(x)[v].$$

代入 $\bar{F}$ 的表达式，并利用欧几里得空间中微分算子的线性性质：

$$\begin{aligned} DF(x)[v] &= D(a_1\bar{F}_1 + a_2\bar{F}_2)(x)[v] \\ &= a_1D\bar{F}_1(x)[v] + a_2D\bar{F}_2(x)[v]. \end{aligned}$$

再次应用定理 2，由于 $\bar{F}_1$ 和 $\bar{F}_2$ 分别是 F_1 和 F_2 的延拓，我们有 $D\bar{F}_1(x)[v] = DF_1(x)[v]$ 且 $D\bar{F}_2(x)[v] = DF_2(x)[v]$。代入上式得

$$DF(x)[v] = a_1DF_1(x)[v] + a_2DF_2(x)[v].$$

□

定理 6: 链式法则, Exercise 3.39

令 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ 和 $G : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}''$ 是光滑映射。则复合映射 $G \circ F$ 的微分满足：

$$D(G \circ F)(x) = DG(F(x)) \circ DF(x)$$

证明. 根据微分的定义，对于切向量 $v \in T_x\mathcal{M}$，存在一条流形 $\mathcal{M}$ 上的光滑曲线 $c : I \to \mathcal{M}$，满足：

$$c(0) = x, \quad c'(0) = v.$$

由此，复合映射 $G \circ F$ 在点 x 处作用于 v 的微分定义为

$$D(G \circ F)(x)[v] = \frac{d}{dt}(G \circ F)(c(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}G(F(c(t)))\Big|_{t=0}.$$

为了计算上述导数，我们令 $c' : I \to \mathcal{M}'$ 为流形 $\mathcal{M}'$ 上的一条曲线，定义为：

$$c'(t) = F(c(t)).$$

显然，$c'(0) = F(c(0)) = F(x)$。根据微分 $DF(x)$ 的定义，这条曲线在 $t = 0$ 处的切向量为

$$(c')'(0) = \frac{d}{dt}F(c(t))\Big|_{t=0} = DF(x)[v].$$

由于 F 是光滑映射，且 $v \in T_x\mathcal{M}$，我们知道 $(c')'(0) \in T_{F(x)}\mathcal{M}'$.

现在，我们将 $c'(t)$ 代入复合函数的导数式中：

$$D(G \circ F)(x)[v] = \frac{d}{dt}G(c'(t))\Big|_{t=0}.$$

根据 $DG(F(x))$ 的定义，映射 G 在点 $F(x)$ 处作用于切向量 $(c')'(0)$ 的微分恰好就是

$$DG(F(x))[(c')'(0)] = \frac{d}{dt}G(c'(t))\bigg|_{t=0}.$$

将 $(c')'(0) = DF(x)[v]$ 代入上式，我们得到

$$D(G \circ F)(x)[v] = DG(F(x))[DF(x)[v]].$$

由于上述等式对所有 $v \in T_x\mathcal{M}$ 均成立，因此

$$D(G \circ F)(x) = DG(F(x)) \circ DF(x).$$

$\square$

命题 7: 乘积法则, Exercise 3.38

对于光滑映射 $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 和 $G : \mathcal{M} \to \mathcal{E}'$，映射 $fG : x \mapsto f(x)G(x)$ 从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{E}'$ 是光滑的，且满足乘积法则：

$$D(fG)(x)[v] = Df(x)[v] \cdot G(x) + f(x) \cdot DG(x)[v].$$

命题 8: 乘积流形映射的微分, Exercise 3.40

令 $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{N}$ 为三个流形，并考虑光滑映射 $F : \mathcal{M} \times \mathcal{M}' \to \mathcal{N}$。对于任意 $(x, y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ 且 $(u, v) \in T_{(x,y)}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') = T_x\mathcal{M} \times T_y\mathcal{M}'$，我们有

$$DF(x, y)[(u, v)] = D(x \mapsto F(x, y))(x)[u] + D(y \mapsto F(x, y))(y)[v]$$

其中 $x \mapsto F(x, y)$ 表示通过将 F 的第二个输入固定为 y 而得到的从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的函数，$y \mapsto F(x, y)$ 同理。

命题 9: 流形上的子流形, Exercise 3.41

令 $\mathcal{M}$ 为线性空间 $\mathcal{E}$ 的嵌入子流形，令 $\mathcal{N}$ 为 $\mathcal{M}$ 的子集，由 $\mathcal{N} = g^{-1}(0)$ 定义，其中 $g : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^p$ 是光滑的且对于所有 $x \in \mathcal{N}$，$\operatorname{rank} \mathrm{D}g(x) = p$. 那么 $\mathcal{N}$ 本身是 $\mathcal{E}$ 的嵌入子流形，其维度为 $\dim \mathcal{M} - p$，且切空间为

$$T_x\mathcal{N} = \ker \mathrm{D}g(x) \subseteq T_x\mathcal{M}.$$

读者可自行验证上诉性质成立！

参考文献

[Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds*. Cambridge University Press, 2023.