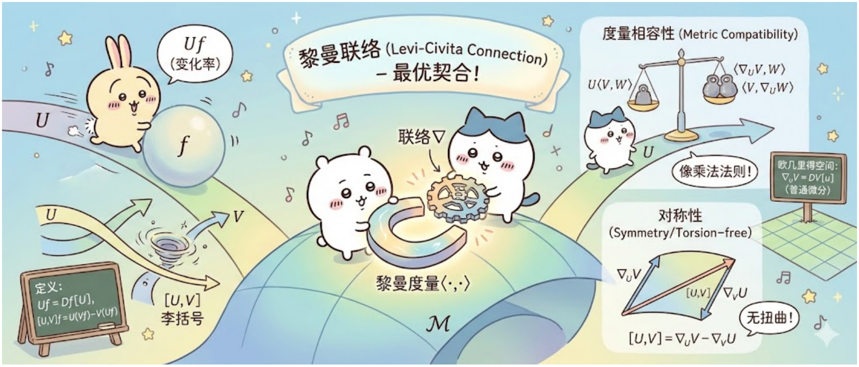
黎曼联络（一）

北极甜虾 (南半球版)

2026 年 1 月 18 日

Manifold Optimization Notes



1 动机

上一节中，我们在光滑流形上定义了**联络（Connection）** ∇ 的基本公理。然而，人们发现符合这些条件的联络有无数个。在黎曼流形上，我们希望找到一个与黎曼度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 完美契合的“最优”联络，这就是这次要学习的**黎曼联络（Riemannian Connection/Levi-Civita Connection）**。

在给出定义之前，我们先思考两个问题：

- **度量的相容性（Metric Compatibility）：** 想象我们在流形上沿着方向 U 移动，同时观察两个向量场 V 和 W 的内积 $\langle V, W\rangle$. 这是一个标量函数，根据我们对普通微积分中“导数”的直觉，这个内积的变化率 $\mathsf{U}\langle V, W\rangle$（即方向导数），应该如何用联络 $\nabla_{\mathsf{U}} V$ 和 $\nabla_{\mathsf{U}} W$ 来表表示？

- **对称性（Symmetry）**：在欧几里得空间中，二阶混合偏导数是相等的（$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$）. 在流形上，我们有描述方向交换误差的工具——李括号 $[U, V]$. 如果我们先沿 U 对 V 求导 $\nabla_U V$，再反过来沿 V 对 U 求导 $\nabla_V U$，直觉上我们希望这两者的差值与 $[U, V]$ 满足什么样的关系，才能让这个联络看起来最"对称"?

2 黎曼联络

为了介绍黎曼联络，我们需要先定义一些符号，最关键是给定一个向量场 U 和一个标量场 f, 我们需要区分 Uf 和 fU. 复习一下我们使用 $\mathfrak{X}(\mathcal{M}), \mathcal{F}(\mathcal{U})$ 分别表示 $\mathcal{M}$ 上的所有光滑向量场和光滑标量场的集合。

定义 1: 向量场对标量场的作用，李括号，度量诱导的标量场

设 $U, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 是流形上的光滑向量场，$f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ 是定义在开集 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ 上的光滑标量场。我们给出如下定义

- **向量场对标量场的作用（Action）**：定义 $Uf \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ 为

$$(Uf)(x) = Df(x)[U(x)], \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

- **李括号 (Lie bracket)**：定义 $[U, V] : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ 为

$$[U, V]f = U(Vf) - V(Uf).$$

  注: $[U, V]$ 本身仍是一个光滑向量场, 即 $[U, V] \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

- **黎曼度量诱导的标量场**：定义 $\langle U, V \rangle \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ 为

$$\langle U, V \rangle(x) = \langle U(x), V(x) \rangle_x, \quad \forall x \in \mathcal{M}.$$

直观理解，$(Uf)(x)$ 等于函数 f 在点 x 处沿着切向量 $U(x)$ 的变化率。还记得黎曼梯度 $\mathrm{grad}\, f(x)$ 被定义为与微分 $Df(x)$ 通过内积建立联系的唯一切向量，即满足 $\langle \mathrm{grad}\, f(x), v\rangle_x = Df(x)[v]$. 因此根据定义 1，我们可以推出 $\langle \mathrm{grad}\, f, U\rangle = Uf$，因为

$$\langle \mathrm{grad}\, f, U\rangle(x) = \langle \mathrm{grad}\, f(x), U(x)\rangle_x = Df(x)[U(x)] = (Uf)(x).$$

李括号描述了两个向量场作为微分算子作用于函数时的非交换性。其定义式 $[U, V]f = U(Vf) - V(Uf)$ 衡量了“先沿 V 再沿 U 求导”与“先沿 U 再沿 V 求导”之间的差异。

回顾一下黎曼度量则在流形的每一点 x 的切空间 $T_x\mathcal{M}$ 上定义了一个内积。当我们将两个向量场 U, V 放入度量中时，它会生成一个光滑的标量函数，其在点 x 的值就是 $\langle U(x), V(x)\rangle_x$.

定理 2: 黎曼几何基本定理

在一个黎曼流形 $\mathcal{M}$ 上，存在一个唯一的联络 ∇ 满足下列额外性质：对于所有的 $U, V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$,

- **度量相容性：** $U\langle V, W\rangle = \langle \nabla_U V, W\rangle + \langle V, \nabla_U W\rangle$.
- **对称性：** $[U, V] = (\nabla_U V - \nabla_V U)$.

这个联络我们叫做 **Levi-Civita 联络**或者**黎曼联络**。

我们暂时不证明这个定理，但是我们来解释这两个条件怎么回答最开始提出的两个问题：

- **度量相容性：** 在普通微积分中，两个函数的乘积求导遵循乘法法则 (Leibniz rule)：$(fg)' = f'g + fg'$。在黎曼流形上，当我们沿着 U 方向移动时，内积的变化率 $U\langle V, W\rangle$ 应该如何分解？定理中的性质 $U\langle V, W\rangle = \langle \nabla_U V, W\rangle + \langle V, \nabla_U W\rangle$ 正是**乘法法则在向量场上的推广**。

- **对称性 (Symmetry/Torsion-free)：** 在欧几里得空间例如 $\mathbb{R}^d$ 中，混合偏导数的可交换性 ($\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$) 是微积分的基础。在流形上，向量场 U, V 自身可能存在非交换性，由李括号 $[U, V]$ 刻画。定理中的性质 $[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U$ 要求**向量场在求导时不引入额外的扭曲（Torsion）**。

3 欧几里得空间的黎曼联络

以下定理说明了欧几里得空间上的黎曼联络即为普通的向量场微分。

定理 3: 欧几里得空间的黎曼联络

令 $\mathcal{E}$ 为配备了任意欧几里得度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的欧几里得空间。那么其黎曼联络为

$$\nabla_U V(x) = DV(x)[U(x)], \quad \forall U, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{E}), x \in \mathcal{E}.$$

证明. 我们首先证明度量相容性。考虑三个向量场 $U, V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{E})$。根据 ∇ 的定义，在点 x 处：

$$(\nabla_U V)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{V(x + tU(x)) - V(x)}{t}.$$

定义函数 $f = \langle V, W \rangle$。利用度量的双线性及导数的定义：

$$\begin{aligned} (Uf)(x) &= Df(x)[U(x)] \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\langle V(x + tU(x)), W(x + tU(x)) \rangle - \langle V(x), W(x) \rangle}{t}. \end{aligned}$$

将 $V(x + tU(x)) = V(x) + t\nabla_U V(x) + o(t)$ 代入上式可得：

$$\begin{aligned} (Uf)(x) &= \langle \nabla_U V(x), W(x) \rangle + \langle V(x), \nabla_U W(x) \rangle \\ &= (\langle \nabla_U V, W \rangle + \langle V, \nabla_U W \rangle)(x). \end{aligned}$$

这证明了度量相容性。

为了证明对称性，我们利用标量场的 Hessian 矩阵。回顾李括号的定义：$[U, V]f = U(Vf) - V(Uf)$。注意 $(Vf)(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), V(x) \rangle_x$。利用刚刚证明的度量相容性：

$$U(Vf) = U\langle \operatorname{grad} f, V \rangle = \langle \nabla_U (\operatorname{grad} f), V \rangle + \langle \operatorname{grad} f, \nabla_U V \rangle.$$

在欧几里得空间中，$\nabla_U (\operatorname{grad} f) = \mathrm{D} \operatorname{grad} f U$ 正是 f 的 Hessian 矩阵作用在 U 上，记作 $\operatorname{Hess} f U$。因此：

$$U(Vf) = \langle \operatorname{Hess} f U, V \rangle + \langle \operatorname{grad} f, \nabla_U V \rangle.$$

同理：

$$V(Uf) = \langle \operatorname{Hess} f V, U \rangle + \langle \operatorname{grad} f, \nabla_V U \rangle.$$

由于欧几里得空间中二阶混合偏导数可交换，Hessian 矩阵是对称的，即 $\langle \operatorname{Hess} f U, V \rangle = \langle \operatorname{Hess} f V, U \rangle$。两式相减，Hessian 项抵消：

$$\begin{aligned} [U, V]f &= U(Vf) - V(Uf) \\ &= \langle \operatorname{grad} f, \nabla_U V - \nabla_V U \rangle. \end{aligned}$$

再次利用 $\langle \operatorname{grad} f, Z \rangle = Zf$，我们将上式右侧写为向量场的作用：

$$[U, V]f = (\nabla_U V - \nabla_V U)f.$$

对于任意 f 成立，故 $[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U$。 □

参考文献

[Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds.* Cambridge University Press, 2023.