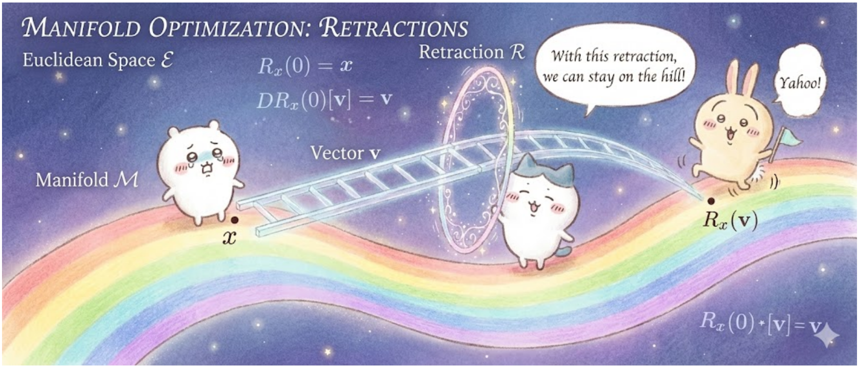
在流形上移动：收缩映射

北极甜虾（南半球版）

2026.1.12



1 动机与定义

在欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 中，最简单的优化步骤是：$x_{k+1} = x_k + \eta v$. 但在流形 $\mathcal{M}$ 上，我们会遇到一个根本性的麻烦，例如在球面上，即便 $v \in T_x\mathcal{M}$ 是一个切向量，只要步长 η 不为零，点 $x + \eta v$ 几乎总是会脱离流形。

为了实现迭代算法（如梯度下降），我们需要一个算子，它能把往切空间方向移动的“线性步”安全地“收缩”回流形上。

定义 1：收缩映射：曲线的视角

流形 $\mathcal{M}$ 上的一个**收缩映射 (Retraction)** 是一个光滑映射 $R : T\mathcal{M} \to \mathcal{M}, (x, v) \mapsto R_x(v)$，且对任意 $(x, v) \in T\mathcal{M}$ 定义的曲线 $c : I \to \mathcal{M}$ (I 是包含 0 的开区间)，$c(t) = R_x(tv)$ 满足：

起点一致: $c(0) = x$, **初速度一致:** $c'(0) = v$.

收缩映射的本质就是：它是一个从切空间到流形的映射，它在局部（即在 x 点附近）看起来就像是欧几里得位移，但在全局上它保证结果永远落在流形内。

基于链式法则，定义 1中的两个条件可以转化成更具操作性的导数条件，由下列定理给出，其证明比较容易，可自行验证。

定理 2: 收缩映射：微分的视角

流形 $\mathcal{M}$ 上的一个**收缩映射 (Retraction)** 是一个光滑映射 $R: T\mathcal{M} \to \mathcal{M}, \quad (x, v) \mapsto R_x(v)$ 并满足:

1. $R_x(0) = x$ （零向量不移动点）。
2. $DR_x(0): T_x\mathcal{M} \to T_x\mathcal{M}$ 是**恒等映射**，即 $DR_x(0)[v] = v$.

2 收缩映射的例子

在掌握了收缩映射的理论定义后，我们通过几个具体的流形实例来直观感受这一算子是如何在实际计算中发挥作用的。我们从最简单的线性空间出发，逐步过渡到弯曲的球面流形。

首先，我们考虑最平凡的情形，即流形本身就是平坦的线性空间。此时，切空间与流形是重合的。

例子 3: 线性流形的收缩映射

对于线性流形 $\mathcal{E}$（如欧几里得空间本身），最自然的收缩映射就是普通的向量加法:

$$R_x(v) = x + v.$$

这反映了在平直空间中，切空间与流形本身是重合的，线性步进不会导致点脱离流形。

在处理非线性流形如球面 S^{d-1} 时，最直接的思路如下：

例子 4: 球面的投影收缩 (Projection Retraction)

在球面 S^{d-1} 上，一种常用的方式是先在环境空间沿切方向走一步，再将其归一化（即正交投影回球面）：

$$R_x(v) = \frac{x+v}{\|x+v\|} = \frac{x+v}{\sqrt{1+\|v\|^2}}.$$

可以通过求导验证，其对应的曲线 $c(t) = \frac{x+tv}{\sqrt{1+t^2\|v\|^2}}$ 在 $t=0$ 时的速度确实是 v（注意到 $x \perp v$ 且 $\|x\|=1$）。

然而，收缩映射的构造并不唯一。

例子 5: 球面的测地线收缩（指数映射）

在球面 S^{d-1} 上，另一种更具几何意义的策略是沿着流形上的“大圆 (Great Circle)”移动：

$$R_x(v) \coloneqq \cos(\|v\|)x + \frac{\sin(\|v\|)}{\|v\|}v,$$

其中约定 $\sin(0)/0 = 1$。在这种定义下，构造出的曲线：

$$c(t) = R_x(tv) = \cos(t\|v\|)x + \frac{\sin(t\|v\|)}{\|v\|}v$$

恰好描绘了球面上经过点 x 且起始速度为 v 的大圆轨迹。在后续的学习，我们会知道这类大圆正是球面的**测地线 (Geodesics)**。因此，这种特定的收缩映射在几何上被称为**指数映射 (Exponential Map)**。它不仅满足收缩映射的一阶一致性条件，还是流形上连接两点“最短”的路径。

3 乘积流形的收缩映射

命题 6: 乘积流形的收缩映射, Exercise 3.50

若 M, M' 分别具有收缩映射 R, R'，则其乘积流形 $M \times M'$ 上的映射 $R''_{(x,x')}(v, v') = (R_x(v), R'_{x'}(v'))$ 是一个收缩映射。

证明. 我们验证其满足定理 2。设 $(x, x') \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}'$。我们需要验证 R'' 在点 (x, x') 处满足以下两个条件:

1. 验证 $R''_{(x,x')}(0,0) = (x, x')$:

根据定义 $R''_{(x,x')}(0,0) = (R_x(0), R'_{x'}(0))$. 由于 R 和 R' 分别是 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 上的收缩映射，根据它们的定义可知 $R_x(0) = x$ 且 $R'_{x'}(0) = x'$。因此 $R''_{(x,x')}(0,0) = (x, x')$.

2. 验证 $DR''_{(x,x')}(0,0) = \mathbf{Id}$:

我们需要证明对于任何切向量 $(u, u') \in T_x\mathcal{M} \times T_{x'}\mathcal{M}'$，都有 $DR''_{(x,x')}(0,0)[u, u'] = (u, u')$. 映射 R'' 是两个独立映射 R_x 和 $R'_{x'}$ 的笛卡尔积。根据乘积映射微分的性质，乘积映射的微分等于其各分量微分的积:

$$DR''_{(x,x')}(0,0)[u, u'] = (DR_x(0)[u], DR'_{x'}(0)[u']).$$

由于 R 和 R' 是各自流形上的收缩映射，它们的微分在零点处均为恒等映射，即:

$$DR_x(0)[u] = u, \quad DR'_{x'}(0)[u'] = u'.$$

代入上式得:

$$DR''_{(x,x')}(0,0)[u, u'] = (u, u').$$

这说明 $DR''_{(x,x')}(0,0)$ 是切空间 $T_{(x,x')}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}')$ 上的恒等算子。 $\square$

命题 6 告诉我们像 $\mathbb{R}^n \times S^{d-1}$ 这样包含平直空间和弯曲空间的混合流形，我们不需要为这个它重新设计复杂的几何算法，只需要复用已有的线性步进和球面投影即可。

通常在处理复杂的优化问题时，变量往往分布在不同的流形上（例如矩阵分解中的 $U \in \mathrm{St}(n,r)$ 和 $V \in \mathrm{St}(m,r)$）。我们可以针对每个分量流形独立地选择最有效的收缩映射，然后通过简单的组合构造出整体的更新算子。

参考文献

[Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds*. Cambridge University Press, 2023.