

## 嵌入子流形的黎曼联络

## Koszul 公式



## 1 嵌入子流形的黎曼联络

在上一节笔记中，我们最后学习了在欧几里得空间  $\mathcal{E}$  中，我们对向量场  $V$  沿方向  $u$  求导是非常直观的，其黎曼联络就是标准的向量场微分，即  $\nabla_u V = DV(x)[u]$ . 这本质上就是我们在多元微积分中学习的方向导数。

当我们处理嵌入在欧几里得空间  $\mathcal{E}$  中的流形  $M$  (如球面或 Stiefel 流形) 时，问题出现了。如果你对流形上的一个切向量场  $V$  直接求普通的欧几里得导数  $DV(x)[u]$ ，其结果往往包含一个法向分量，导致这个结果飞出了当前点的切空间  $T_x M$ .

一个最自然的处理是把微分  $DV(x)[u]$  投影回流形的切空间  $T_x M$ . 以下定理保证了投影回去后我们得到的向量场便是该流形的黎曼联络。

## 命题 1: 嵌入子流形的黎曼联络

对于嵌入在欧几里得空间中的黎曼子流形，其唯一的黎曼联络可以通过以下公式给出：

$$\nabla_u V = \text{Proj}_x(DV(x)[u]).$$

证明. 我们之前依旧证明了该式子定义了一个联络，现在我们证明它满足黎曼联络要求的对称性和度量相容性。

**联络的对称性的证明:** 令  $\bar{U}, \bar{V}$  分别为  $U, V$  在  $\mathcal{E}$  的光滑延拓，我们有

$$\nabla_U V - \nabla_V U = \text{Proj}(D\bar{V}[U] - D\bar{U}[V]).$$

在  $\mathcal{E}$  中，黎曼联络就是普通的微分  $\bar{\nabla}_U V = D\bar{V}[U]$ ，且它是对称的，满足  $D\bar{V}[U] - D\bar{U}[V] = [\bar{U}, \bar{V}]$ . 利用李括号的切向性质：如果两个向量场  $U, V$  始终相切于流形  $\mathcal{M}$ ，那么它们的李括号  $[U, V]$  也相切于流形  $\mathcal{M}$ 。因此

$$\nabla_U V - \nabla_V U = \text{Proj}([\bar{U}, \bar{V}]) = [\bar{U}, \bar{V}] = [U, V].$$

**联络的度量相容性的证明:** 令  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$  为  $U, V, W$  在  $\mathcal{E}$  上的光滑延拓。利用标量函数内积的方向导数定义，我们有

$$U\langle V, W \rangle = (\bar{U}\langle \bar{V}, \bar{W} \rangle)|_{\mathcal{M}}.$$

由于  $\mathcal{E}$  中的标准欧几里得联络  $\bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{V} = D\bar{V}[\bar{U}]$  满足度量相容性，我们可以展开上式：

$$\bar{U}\langle \bar{V}, \bar{W} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{V}, \bar{W} \rangle + \langle \bar{V}, \bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{W} \rangle.$$

由于  $W(x)$  本身属于切空间  $T_x \mathcal{M}$ ，根据正交投影的自伴随性质，对于任何向量  $a \in \mathcal{E}$ ，都有

$$\langle a, W(x) \rangle = \langle \text{Proj}_x(a), W(x) \rangle.$$

因此，在流形上的每一点  $x$ :

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{V}, \bar{W} \rangle(x) &= \langle \text{Proj}_x(\bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{V}), \bar{W} \rangle_x = \langle \nabla_U V, W \rangle(x) \\ \langle \bar{V}, \bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{W} \rangle(x) &= \langle \bar{V}, \text{Proj}_x(\bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{W}) \rangle_x = \langle V, \nabla_U W \rangle(x).\end{aligned}$$

结合以上各项，我们得到：

$$U\langle V, W \rangle = \langle \nabla_U V, W \rangle + \langle V, \nabla_U W \rangle.$$

由于该联络同时满足对称性和度量相容性，根据黎曼几何基本定理，它就是  $\mathcal{M}$  上唯一的黎曼联络。□

### 注解 2

无论是球面, Stiefel 流形还是固定秩矩阵流形，只要你能写出其投影算子（如 Stiefel 的  $I - XX^\top$ ），就能立刻算出联络。

## 2 Koszul 公式

我们在上一次笔记中学习了黎曼联络的对称性与度量相容性，黎曼基本定理告诉了我们黎曼流形上存在唯一的黎曼联络，我们现在来证明它，并给出其具体的计算公式。

### 引理 3: 李括号的向量场本质

令  $U, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 。那么存在唯一的  $W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$  使得

$$[U, V]f = Wf, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M}).$$

因此我们可以把  $[U, V]$  看作一个光滑向量场。如果  $\nabla$  是一个对称联络，那么

$$[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U.$$

**证明. 唯一性:** 假设存在两个向量场  $W_1, W_2$  满足条件。若对于所有平滑函数  $f$  都有  $W_1 f = W_2 f$ , 则由向量场的性质可知  $W_1 = W_2$ 。

**存在性 (嵌入视角):** 假设  $\mathcal{M}$  嵌入在欧几里得空间  $\mathcal{E}$  中, 定义联络  $\nabla_u V = \text{Proj}(D\bar{V}[U])$ 。计算算子  $[U, V]f = U(Vf) - V(Uf)$ 。通过代数运算可以验证, 对于任何对称联络, 该算子的作用等价于向量场  $\nabla_u V - \nabla_v U$  的作用。由于等式右边是两个平滑向量场的差, 其结果仍是一个平滑向量场, 因此  $[U, V]$  被唯一确定为该向量场。□

#### 定理 4: 黎曼几何基本定理: Koszul 公式

令  $\mathcal{M}$  是一个黎曼流形, 则在该流形上存在且仅存在一个黎曼联络  $\nabla$ , 对于所有光滑向量场  $U, V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ , 该联络满足以下公式:

$$2\langle \nabla_u V, W \rangle = U\langle V, W \rangle + V\langle W, U \rangle - W\langle U, V \rangle \\ - \langle U, [V, W] \rangle + \langle V, [W, U] \rangle + \langle W, [U, V] \rangle.$$

证明. 本证明分为唯一性和存在性两个部分。

**1. 唯一性 (通过公式推导):** 假设存在一个满足对称性和度量相容性的联络  $\nabla$ 。根据度量相容性, 我们可以写出其三次循环置换:

$$(1) \quad U\langle V, W \rangle = \langle \nabla_u V, W \rangle + \langle V, \nabla_u W \rangle$$

$$(2) \quad V\langle W, U \rangle = \langle \nabla_v W, U \rangle + \langle W, \nabla_v U \rangle$$

$$(3) \quad W\langle U, V \rangle = \langle \nabla_w U, V \rangle + \langle U, \nabla_w V \rangle$$

计算 (1) + (2) - (3), 得到:

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}\langle V, W \rangle + \mathbf{V}\langle W, U \rangle - \mathbf{W}\langle U, V \rangle \\ = & \langle \nabla_U V + \nabla_V U, W \rangle + \langle \nabla_U W - \nabla_W U, V \rangle + \langle \nabla_V W - \nabla_W V, U \rangle. \end{aligned}$$

利用对称性公理  $\nabla_U V - \nabla_V U = [U, V]$ , 我们可以进行以下代换:

- $\nabla_V U = \nabla_U V - [U, V]$
- $\nabla_U W - \nabla_W U = [U, W]$
- $\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$

代入上式并整理:

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}\langle V, W \rangle + \mathbf{V}\langle W, U \rangle - \mathbf{W}\langle U, V \rangle \\ = & \langle 2\nabla_U V - [U, V], W \rangle + \langle [U, W], V \rangle + \langle [V, W], U \rangle \\ = & 2\langle \nabla_U V, W \rangle - \langle [U, V], W \rangle + \langle [U, W], V \rangle + \langle [V, W], U \rangle. \end{aligned}$$

最后利用李括号的反对称性 ( $\langle [U, W], V \rangle = -\langle [W, U], V \rangle$ ) 重新整理后, 即可得到定理中的 Koszul 公式:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_U V, W \rangle = & \mathbf{U}\langle V, W \rangle + \mathbf{V}\langle W, U \rangle - \mathbf{W}\langle U, V \rangle \\ & - \langle U, [V, W] \rangle + \langle V, [W, U] \rangle + \langle W, [U, V] \rangle. \end{aligned}$$

由于公式右侧仅取决于度量和李括号, 不含  $\nabla$ , 这证明了如果  $\nabla$  存在, 它必然是唯一的。

**2. 存在性:** 需要用到书上 3.9 小节局部框架的一些知识。对于固定的  $U, V$ , Koszul 公式右侧定义了一个关于  $W$  的映射  $X(W)$ 。可以验证  $X(W)$  是  $\mathcal{F}(M)$ -线性的, 即它是一个光滑 1-形式。根据音乐同构性质 (Proposition 3.71 in [Bou23]), 对于任何光滑 1-形式, 都存在唯一的向量场  $Z$  使得  $X(W) = \langle Z, W \rangle$ 。我们令  $\nabla_U V = \frac{1}{2}Z$ , 并验证其满足联络的所有公理, 从而证明了黎曼联络的存在性。  $\square$

## 注解 5

Koszul 公式不仅在理论上证明了度量决定了联络，还为我们在不依赖环境空间的情况下直接计算流形内部的求导规则提供了可能。在后续的学习中，我们将看到这一公式是如何保证黎曼 Hessian 的自伴随性的。

## 参考文献

---

- [Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds*. Cambridge University Press, 2023.