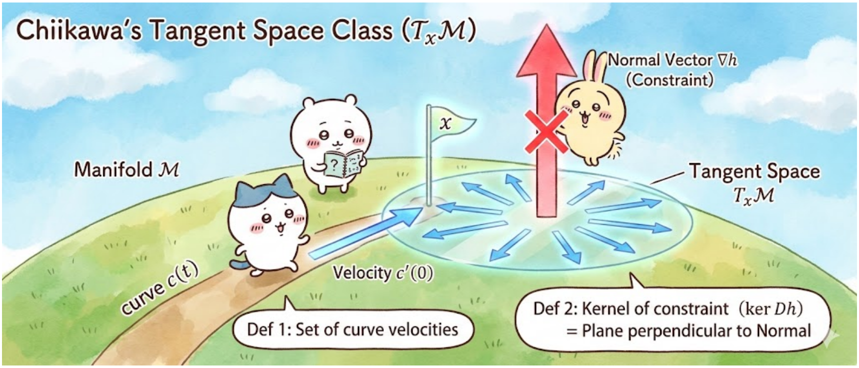
切空间（Tangent Space）

北极甜虾（南半球版）

2026 年 1 月 25 日

Manifold Optimization Notes

几何定义	代数表述	典型示例



在欧几里得空间中，我们可以向任何方向移动。但在流形上，我们被限制在“表面”上。切空间 $T_x\mathcal{M}$ 告诉我们在点 x 处，哪些方向是“合法”的。

1 几何定义：通过曲线的速度

我们先给出切空间最直观的定义方式：如果你在流形上移动，你的速度向量必须切于流形。

定义 1: 切空间 (Tangent Space)

令 $\mathcal{M}$ 为一个嵌入子流形。对于任意 $x \in \mathcal{M}$, 我们定义 $\mathcal{M}$ 在 x 处的切空间为

$$T_x\mathcal{M} = \{c'(0) \mid c : I \to \mathcal{M} \text{ 是光滑曲线且 } c(0) = x\},$$

其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个包含 0 的开区间。

也就是说任意向量 $v \in T_x\mathcal{M}$ 当且仅当存在一个光滑曲线 $c \subseteq \mathcal{M}$ 以速度 v 经过 x，我们把 v 叫做 $\mathcal{M}$ 在 x 处的切向量。

注意到定义 1虽然看起来很直观，但有一个潜在的问题：流形上经过点 x 的光滑曲线有无数条，我们如何确定这个集合 $T_x\mathcal{M}$ 真的捕捉到了“切方向”的本质，而不是受制于曲线具体的参数化方式？

注解 2: 切空间是良定义的

考虑 $c_1, c_2 : I \to \mathcal{M}$ 两条光滑曲线，满足 $c_1(0) = c_2(0) = x$。我们称 c_1 与 c_2 在 x 点等价，记作 $c_1 \sim c_2$，当且仅当 $c_1'(0) = c_2'(0)$. 我们可以将点 x 处的一条曲线 c 的等价类记为

$$[c]_x = \{\gamma : I \to \mathcal{M} \mid \gamma \text{ 是光滑曲线}, \gamma(0) = x, \gamma'(0) = c'(0)\}$$

在这个视角下，一个切向量 v 本质上就是一个等价类 $[c]_x$. 注意到无论我们选择等价类 $[c]_x$ 中的哪条曲线 γ，它们计算出的导数 $\gamma'(0)$ 都是同一个向量 v。这保证了切向量只取决于曲线在 x 处的一阶微分行为，而非曲线的其它细节。

2 代数表述：约束方程的核

虽然基于曲线的定义很直观，但在实际计算中，我们一般利用下列定理，它建立了曲线速度与局部定义函数的联系。

定理 3: 切空间的等价定义

令 $\mathcal{M}$ 为一个嵌入子流形，h 是它在 x 处的局部定义函数 (满足 $h(y) = 0 \iff y \in \mathcal{M} \cap U$)。那么

$$T_x\mathcal{M} = \ker Dh(x).$$

证明. 我们分为两步证明每个集合都是对方的子集。

1. 包含关系 ($T_x\mathcal{M} \subseteq \ker Dh(x)$)： 取一条在流形上的曲线 $c(t)$，满足 $c(0) = x$。因为曲线在流形上，所以对所有 t，都有 $h(c(t)) = 0$。两边对 t 求导，利用链式法则我们得到

$$\frac{d}{dt}h(c(t)) = Dh(c(t))[c'(t)] = 0.$$

在 $t = 0$ 处，我们得到 $Dh(x)[c'(0)] = 0$。这意味着任何切向量 $v = c'(0)$ 都必须在 $Dh(x)$ 的核里。

2. 包含关系 ($\ker Dh(x) \subseteq T_x\mathcal{M}$)： 设 $v \in \ker Dh(x)$。我们需要构造一条流形上的光滑曲线 $c(t)$ 使得 $c'(0) = v$。根据局部平坦化定理，存在 x 的邻域 U 和微分同胚 $F : U \to V \subseteq \mathbb{R}^d$，使得 $F(\mathcal{M} \cap U)$ 是平坦子空间 $V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^k)$.

- 映射向量：令 $w = DF(x)[v]$。由于 F 是微分同胚，$DF(x)$ 是线性同构。利用局部平坦化定理，w 的后 k 个分量必然为 0。

- 构造平坦曲线：在 V 中定义一条直线 $\gamma(t) = F(x) + tw$。由于 $w \in \mathbb{R}^n \times \{0\}^k$，当 t 足够小时，这条直线 $\gamma(t)$ 完全落在 $V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}^k)$ 中。

- 映射回流形：定义曲线 $c(t) = F^{-1}(\gamma(t))$。因为 $\gamma(t)$ 在平坦子空间内，所以 $c(t)$ 必然落在流形 $\mathcal{M}$ 上。显然 $c(0) = F^{-1}(F(x)) = x$。计算速度

$$\begin{aligned} c'(0) = D(F^{-1})(F(x))[\gamma'(0)] &= (DF(x))^{-1}[w] \\ &= (DF(x))^{-1}[DF(x)[v]] = v. \end{aligned}$$

对于任意 $v \in \ker Dh(x)$ 都找到了对应的曲线，说明 $\ker Dh(x) \subseteq T_x\mathcal{M}$. □

定理 4

令 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{E}$ 的 n 维嵌入子流形。那么 $T_x\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{E}$ 的 n 维线性子空间。

证明. 由 $T_x\mathcal{M} = \ker Dh(x)$ 知其为线性空间（线性映射的核）。由定义知 $Dh(x)$ 满秩，即 $\operatorname{rank}(Dh(x)) = k$。假设 $\mathcal{E}$ 的维度为 d，应用 Rank-Nullity Theorem 我们得到 $\dim(\mathcal{E}) = \operatorname{rank}(Dh(x)) + \dim(\ker Dh(x))$，因此 $\dim(T_x\mathcal{M}) = d - k = n$. □

3 切空间的典型示例

通过前面建立的代数表述 $T_x\mathcal{M} = \ker Dh(x)$，我们可以方便地推导出几种常见流形的切空间结构。

例子 5: 单位球面

考虑单位球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top x = 1\}$. 定义其局部定义函数为 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，即 $h(x) = x^\top x - 1$.
为了找到切空间，我们计算 h 在 x 处的微分

$$Dh(x)[v] = \lim_{t\to 0} \frac{(x+tv)^\top(x+tv) - 1 - (x^\top x - 1)}{t} = 2x^\top v.$$

根据切空间的等价定义，其切空间为微分算子的核：

$$T_xS^{n-1} = \ker Dh(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : x^\top v = 0\}.$$

这在几何上非常直观：球面上的一点 x 处的切向量 v 必须与该点的法向量（即位置向量 x 本身）正交。

例子 6: Stiefel 流形

Stiefel 流形 $\mathrm{St}(n,p)=\{X\in\mathbb{R}^{n\times p}:X^\top X=I_p\}$ 包含所有列正交矩阵。其局部定义函数 $h:\mathbb{R}^{n\times p}\to\mathrm{Sym}(p)$（其中 $\mathrm{Sym}(p)$ 为 $p\times p$ 对称矩阵空间）定义为

$$h(X)=X^\top X-I_p.$$

计算 h 在 X 处的微分。对于任何方向 $V\in\mathbb{R}^{n\times p}$：

$$Dh(X)[V]=\lim_{t\to 0}\frac{(X+tV)^\top(X+tV)-X^\top X}{t}=X^\top V+V^\top X.$$

因此，Stiefel 流形在 X 处的切空间为：

$$T_X\mathrm{St}(n,p)=\{V\in\mathbb{R}^{n\times p}:X^\top V+V^\top X=0\}.$$

注意到条件 $X^\top V+V^\top X=0$ 等价于说矩阵 $X^\top V$ 是一个反对称矩阵（Skew-symmetric），即 $X^\top V\in\mathrm{Skew}(p)$。

例子 7: 正交群

正交群 $O(n)=\{X\in\mathbb{R}^{n\times n}:X^\top X=I_n\}$ 是 Stiefel 流形在 $p=n$ 时的特殊情况。由例 6 直接可知，其切空间为：

$$T_XO(n)=\{V\in\mathbb{R}^{n\times n}:X^\top V+V^\top X=0\}.$$

特别地，如果在单位矩阵 $X=I_n$ 处考察切空间，我们有：

$$T_IO(n)=\{V\in\mathbb{R}^{n\times n}:V+V^\top=0\}=\mathrm{Skew}(n).$$

在李群（Lie Group）理论中，$T_IO(n)$ 被称为正交群对应的李代数 $\mathfrak{o}(n)$，它由所有反对称矩阵组成。

参考文献

[Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds*. Cambridge University Press, 2023.