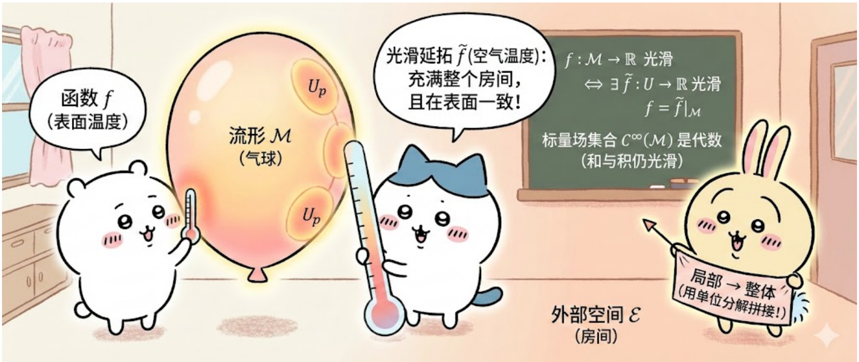
嵌入子流形间的光滑映射

北极甜虾（南半球版）

2026.1.9

Manifold Optimization Notes

光滑延拓 **局部与整体** **标量场**



我们在微积分里学过如何判断 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是光滑的（任意阶导数都存在）。但是，流形（比如一个球面 $\mathcal{M}$）并不是一个平直的空间，我们不能直接套用旧的定义。在这一节利用了嵌入的特性来解决这个问题：既然流形 $\mathcal{M}$ 是嵌在欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 里的，我们能不能“借用”外面的空间来定义光滑性？

1 核心定义：光滑延拓

光滑延拓 (Smooth Extension) 的核心思想很简单，如果在流形 $\mathcal{M}$ 上的一个函数 f，能被看作是外在空间 $\mathcal{E}$ 里某个光滑函数 $\bar{f}$ 的一部分（限制在流形上的那部分），那我们就说 f 是光滑的。

我们可以这样形象地理解：

- 想象一下流形 $\mathcal{M}$ 是一个在房间里飘浮的气球表面。

- 函数 f：是气球表面上每一个点的“温度”。
- 延拓 $\bar{f}$：如果我们能让整个房间充满了空气，并且房间里每一个点的空气温度变化都是光滑的，而且贴着气球表面的空气温度刚好等于气球表面的温度。

定义 1: 局部光滑延拓

令 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 分别为两个欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 的嵌入子流形。令 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ 是一个函数。我们说 f 在点 $x \in \mathcal{M}$ 处是光滑的 (smooth)，如果存在一个光滑函数 $\bar{f} : \mathcal{U} \to \mathcal{E}'$（$\mathcal{U}$ 是包含 x 的一个开邻域）使得 $f = \bar{f}|_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$，即

$$\bar{f}(y) = f(y), \quad \forall y \in \mathcal{M} \cap \mathcal{U}.$$

我们把 $\bar{f}$ 称为 f 在 x 附近的局部光滑延拓 (local smooth extension).

注意到 $\bar{f}$ 是定义在两个欧几里得空间的开集间的函数，所以 $\bar{f}$ 是光滑的意思就是 $\bar{f}$ 在定义域内是无限次可微的。

2 局部与整体

在定义 1中，我们仅刻画了函数在局部（即某一点附近）的光滑性。这就引出了一个自然的问题：如果函数 f 在流形上的每一点都是光滑的，我们能否找到一个统一的、定义在包含整个流形 $\mathcal{M}$ 的开集上的光滑延拓?

这相当于问我们能否将无数个局部的延拓“无缝拼接”成一个整体。下面的定理说明了光滑性的“局部定义”与“整体延拓的存在性”是等价的。

注意到虽然直觉告诉我们“既然每一点附近都有一个延拓，把它们‘拼’起来不就行了吗?”但数学上的难点在于：怎

么拼才能不留下"缝隙"，而且保证拼缝处依然是光滑的？

定理 2: 整体光滑延拓

令 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 分别为两个欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 的嵌入子流形。函数 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ 是光滑的，当且仅当存在一个光滑函数 $\bar{f} : U \to \mathcal{E}'$ ($U \subseteq \mathcal{E}$ 是包含 $\mathcal{M}$ 的一个开邻域) 使得 $f = \bar{f}|_{\mathcal{M}}$.

证明. 我们分别证明必要性和充分性。

- 必要性是是平凡的，因为若存在定义在 $\mathcal{M}$ 邻域 U 上的光滑延拓 $\bar{f} : U \to \mathcal{E}'$，则对于任意 $x \in \mathcal{M}$，取 $U_x = U$，$\bar{f}$ 本身即为 x 附近的局部光滑延拓。因此 f 在 $\mathcal{M}$ 上处处光滑。

- 充分性的证明需要利用单位分解定理 (Partition of Unity Theorem) 构造整体延拓。假设 f 在 $\mathcal{M}$ 上是光滑的。即对于任意 $p \in \mathcal{M}$，存在 $\mathcal{E}$ 中的开邻域 U_p 和光滑函数 $\bar{f}_p : U_p \to \mathcal{E}'$，使得 $\bar{f}_p|_{\mathcal{M}\cap U_p} = f|_{\mathcal{M}\cap U_p}$.

  第一步：构造开覆盖
  令 $U = \bigcup_{p\in\mathcal{M}} U_p$. 这是 $\mathcal{E}$ 中包含 $\mathcal{M}$ 的开集。族 $\{U_p\}_{p\in\mathcal{M}}$ 构成了 U 的一个开覆盖。

  第二步：引入单位分解 (Partition of Unity)
  根据光滑流形（或欧几里得空间开集）的性质，存在从属于覆盖 $\{U_p\}_{p\in\mathcal{M}}$ 的光滑单位分解 $\{\rho_p\}_{p\in\mathcal{M}}$。这组函数 $\rho_p : U \to [0, 1]$ 满足：

  - **支撑集条件：** $\mathrm{supp}(\rho_p) \subset U_p$.
  - **局部有限性：** 对于任意 $x \in U$，只有有限个 $\rho_p(x)$ 不为零。
  - **归一化：** 对于任意 $x \in U$，$\sum_p \rho_p(x) = 1$.

第三步：构造整体函数
定义 $\bar{f}: U \to \mathcal{E}'$ 为

$$\bar{f}(x) = \sum_p \rho_p(x)\bar{f}_p(x).$$

由于“局部有限性”，对于每个 x，求和中只有有限项非零，因此该函数定义良好且光滑。(注意：当 $x \notin U_p$ 时，虽然 $\bar{f}_p(x)$ 可能未定义，但此时 $\rho_p(x) = 0$，规定该项为 0)。

第四步：验证延拓性质
对于任意 $y \in \mathcal{M}$，我们需要验证 $\bar{f}(y) = f(y)$。

$$\bar{f}(y) = \sum_p \rho_p(y)\bar{f}_p(y).$$

观察求和项：若 $\rho_p(y) \neq 0$，则 $y \in \operatorname{supp}(\rho_p) \subset U_p$. 因为 $y \in U_p \cap \mathcal{M}$，根据局部延拓的定义，有 $\bar{f}_p(y) = f(y)$. 因此可以提取公因式：

$$\bar{f}(y) = \sum_p \rho_p(y) f(y) = f(y)\left(\sum_p \rho_p(y)\right) = f(y) \cdot 1 = f(y).$$

□

在定理 2中，我们证明了光滑函数总能延拓到流形的某个邻域 U 上。但这个延拓不一定能覆盖整个欧几里得空间 $\mathcal{E}$.

例子 3: 无法延拓到全空间的例子, Exercise 3.33

令 $\mathcal{E} = \mathbb{R}$，$\mathcal{M} = (0, 1)$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个嵌入子流形。定义函数 $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) = \frac{1}{x}$.

- **f 是光滑的：** 对于任意 $x \in (0,1)$，由于 f 在开区间上是初等函数且分母不为零，它在每一点附近都存在任意阶导数。取 $U = (0,1)$，$\bar{f} = f$ 即可满足局部延拓定义。

- **全局延拓不存在：** 假设存在 $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 且 $\bar{f}$ 在 $\mathbb{R}$ 上光滑。那么 $\bar{f}$ 必须在 $x = 0$ 处连续。但 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$，这说明 $\bar{f}$ 在 0 点无法定义为一个有限的实数，更无法满足连续性。

因此，该光滑函数无法延拓到整个 $\mathcal{E}$.

这说明了“光滑性”是一个局部性质。只要函数在流形内部表现良好，它就是光滑的。至于它在接近流形“边界”（而这些边界点不属于流形本身）时是否爆炸，并不影响流形本身的光滑性。

3 标量场

在优化问题中，我们要最小化的目标函数通常是一个从流形 $\mathcal{M}$ 映射到实数集 $\mathbb{R}$ 的函数。这类函数在几何上有一个专门的名字：标量场（scalar field)。

由于实数集 $\mathbb{R}$ 本身就是一个欧几里得空间（即 $\mathcal{E}' = \mathbb{R}$），我们可以直接套用前面关于“光滑映射”的定义。

定义 4: 标量场

令 $\mathcal{M}$ 为欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 的嵌入子流形。如果函数 $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 是光滑的（即满足定义 1），则称 f 为 $\mathcal{M}$ 上的一个光滑标量场。$\mathcal{M}$ 上所有光滑标量场的集合记为 $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ 或 $C^\infty(\mathcal{M})$。

接下来的命题说明了光滑标量场集合构成了一个代数，也就是说，我们对光滑函数进行加法和乘法运算后，得到的结果依然是光滑的。这让我们在流形上构建复杂函数时有了理论保障。

命题 5: 光滑标量场的代数性质

令 $f, g : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 是流形 $\mathcal{M}$ 上的两个光滑标量场。证明它们的和 $f+g$ 以及积 fg 也是光滑标量场。

证明. 我们利用局部光滑延拓的性质来证明。任取一点 $x \in \mathcal{M}$.

- 由于 f 是光滑的，存在 x 在 $\mathcal{E}$ 中的开邻域 $\mathcal{U}_f$ 以及光滑函数 $\bar{f} : \mathcal{U}_f \to \mathbb{R}$，使得 $\bar{f}$ 是 f 的局部延拓。
- 由于 g 是光滑的，存在 x 在 $\mathcal{E}$ 中的开邻域 $\mathcal{U}_g$ 以及光滑函数 $\bar{g} : \mathcal{U}_g \to \mathbb{R}$，使得 $\bar{g}$ 是 g 的局部延拓。

令 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g$. 由于两个开集的交集仍是开集，所以 $\mathcal{U}$ 是 x 在 $\mathcal{E}$ 中的一个开邻域。

现在，我们在 $\mathcal{U}$ 上定义两个新函数：

$$\bar{s}(y) = \bar{f}(y) + \bar{g}(y) \quad \text{和} \quad \bar{p}(y) = \bar{f}(y)\bar{g}(y), \quad \forall y \in \mathcal{U}.$$

1. 验证光滑性：

$\bar{s}$ 和 $\bar{p}$ 是欧几里得空间开集 $\mathcal{U}$ 上两个光滑函数 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 的和与积。根据微积分的基本知识，它们在 $\mathcal{U}$ 上显然是光滑的。

2. 验证延拓性质：

对于任意 $y \in \mathcal{M} \cap \mathcal{U}$，我们需要验证它们是否等于 $f+g$ 和 fg.

$$\begin{aligned} \bar{s}(y) &= \bar{f}(y) + \bar{g}(y) = f(y) + g(y) = (f+g)(y), \\ \bar{p}(y) &= \bar{f}(y) \cdot \bar{g}(y) = f(y) \cdot g(y) = (fg)(y). \end{aligned}$$

因此，$\bar{s}$ 和 $\bar{p}$ 分别是 $f+g$ 和 fg 在点 x 附近的局部光滑延拓。根据局部光滑延拓的定义，$f+g$ 和 fg 在点 x 处是光滑的。

由于 x 是任意选取的，故 $f+g$ 和 fg 在整个 $\mathcal{M}$ 上都是光滑标量场。 $\square$

参考文献

[Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds*. Cambridge University Press, 2023.