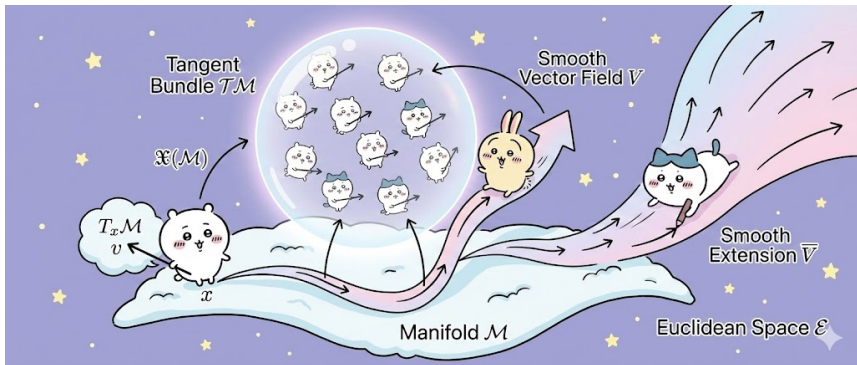


切丛的动机与定义

向量场及其光滑性

向量场的代数性质



1 切丛的动机与定义

1.1 动机与直觉

在欧几里得空间 \mathcal{E} 中，向量是“自由”的，我们可以任意地把点 x 处的速度向量 v 移动到点 y 处。但在流形 \mathcal{M} 上，切向量 v 是“附着”在点 x 上的（即 $v \in T_x \mathcal{M}$ ），它不能脱离基点存在。

这种“附着性”带来了核心挑战：

- 我们希望定义**光滑向量场**（比如梯度下降中的下降方向 $\eta(x)$ ），这意味着我们需要一个数学框架来判断“一个向量随基点变化而变化”的过程是否光滑。
- 既然切空间 $T_x \mathcal{M}$ 随 x 的不同而改变，我们无法直接用传统的微积分来比较不同点的切向量。

因此我们将所有的点及其对应的切向量组成的对 (x, v) 收集起来，构成一个新的集合——**切丛 (Tangent Bundle)**。如果我们能证明切丛本身也是一个光滑流形，那么“向量场的光滑性”就变成了“流形之间映射的光滑性”。

1.2 切丛的定义与几何结构

定义 1: 切丛

令 \mathcal{M} 是欧几里得空间 \mathcal{E} 的嵌入子流形。其**切丛 (Tangent Bundle)** 记为 $T\mathcal{M}$ ，定义为所有流形上的点及其对应切空间的切向量组成的有序对的集合：

$$T\mathcal{M} = \{(x, v) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} : x \in \mathcal{M} \text{ 且 } v \in T_x\mathcal{M}\}$$

注意切丛里的每个元素都是一个有序对 (x, v) ，它指明了向量 v 是位于哪个点 x 的切空间里。接下来的定理指出了切丛最核心的几何性质：它继承了原流形的光滑性，且维度翻倍。

定理 2: 切丛的流形性质

若 \mathcal{M} 是 \mathcal{E} 的 n 维嵌入子流形，则 $T\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ 的 $2n$ 维嵌入子流形。

证明. 令 $h: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是 \mathcal{M} 在 x 附近的局部定义函数，即 $\mathcal{M} = h^{-1}(0)$ 且 $Dh(x)$ 满秩。注意到 $v \in T_x\mathcal{M}$ 当且仅当 $Dh(x)[v] = 0$ 。定义 $H: \mathcal{U} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ ：

$$H(x, v) = (h(x), Dh(x)[v])$$

有序对 (x, v) 属于切丛当且仅当 $H(x, v) = (0, 0)$ 。现在我们计

算 H 的微分：

$$DH(x, v)[\dot{x}, \dot{v}] = (Dh(x)[\dot{x}], D^2h(x)[v, \dot{x}] + Dh(x)[\dot{v}])$$

这个线性映射是满秩的（秩为 $2k$ ），因为每一块 $Dh(x)$ 都是满秩的。根据嵌入子流形的等价， TM 是维度为 $2d - 2k = 2(d - k) = 2n$ 的流形。□

注解 3: 物理直觉（相空间）

经典力学中，系统的状态不仅由位置 x 决定，还由动量或速度 v 决定。这 $2n$ 个参数构成的空间正是物理学中的**相空间 (Phase Space)**。切丛就是相空间的几何抽象。

注解 4: 记号的等同与滥用

对于切向量 $v \in T_xM$ ，我们有时会不加区分地使用 v 与有序对 (x, v) 这两个概念。我们可能会写作 $(x, v) \in T_xM$ ，或者在切空间的基点 x 已由语境明确给出的情况下，写作 $v \in TM$ 。

2 向量场及其光滑性

有了切丛这一流形结构，我们就可以正式讨论流形上的向量场。向量场本质上是切丛的一个“截面”，它为流形上的每个点分配一个切向量。

定义 5: 向量场

一个**向量场 (Vector Field)** V 是把流形上的每一个点映射到该点处的切向量的函数，即 $V: M \rightarrow TM$ 满足

$$\forall x \in M, \quad V(x) \in T_xM.$$

一个向量场是光滑的，当且仅当它作为一个流形间的映射（从 \mathcal{M} 到 $T\mathcal{M}$ ）是光滑的。 \mathcal{M} 上的所有的光滑向量场构成的集合记为 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 。

在实际计算中，直接验证流形间映射的光滑性可能比较繁琐。类似于标量场，我们同样可以利用“延拓”的视角来刻画向量场的光滑性。

命题 6: 向量场的光滑性与延拓

设 \mathcal{M} 为欧几里得空间 \mathcal{E} 的嵌入子流形。 \mathcal{M} 上的向量场 V 是光滑的（即 $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ），当且仅当存在定义在 \mathcal{M} 的某个开邻域 $U \subseteq \mathcal{E}$ 内的光滑向量场 $\bar{V}: U \rightarrow U \times \mathcal{E}$ ，使得

$$V = \bar{V}|_{\mathcal{M}}.$$

证明. 1. 充分性 (\Leftarrow):

若存在定义在 \mathcal{M} 邻域上的光滑向量场 \bar{V} 满足 $V = \bar{V}|_{\mathcal{M}}$ ，由于 \bar{V} 是从欧几里得空间开集到其切丛（也是欧几里得空间）的光滑映射，根据光滑映射的定义，其限制在子流形上的映射 V 显然是光滑性。

2. 必要性 (\Rightarrow):

假设 $V: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ 是光滑向量场。由于切丛 $T\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ 的一个嵌入子流形（定理 2），根据光滑映射的延拓性质，存在 \mathcal{M} 在 \mathcal{E} 中的开邻域 U 和光滑映射 $\bar{V}: U \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ ，使得 $V = \bar{V}|_{\mathcal{M}}$ 。

我们将 \bar{V} 写成两个分量的形式： $\bar{V}(y) = (\bar{V}_1(y), \bar{V}_2(y))$ 。由于对于所有 $x \in \mathcal{M}$ ，都有 $V(x) = (x, v)$ ，这意味着 $\bar{V}_1(x) = x$ 。现在构造 $\bar{V}(y) = (y, \bar{V}_2(y))$ 。这是一个定义在 U 上的光滑向量场（其对应的向量部分 \bar{V}_2 是光滑的）。显然，当 $x \in \mathcal{M}$ 时，

$\bar{V}(x) = (x, \bar{\bar{V}}_2(x)) = V(x)$ 。因此 \bar{V} 即为 V 的一个光滑延拓。 \square

3 向量场的代数性质

由于向量场在每个点处都取值于线性空间（切空间），我们可以自然地定义向量场的加法以及与标量场的乘法。下面的命题保证了这些运算在光滑性下是封闭的，这意味着 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 不仅是一个线性空间，它还是光滑标量场环 $\mathfrak{F}(\mathcal{M})$ 上的一个模。

命题 7: 光滑向量场的代数性质, Exercise 3.46

设 $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{M})$ 为光滑标量场， $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 为光滑向量场。则以下定义的向量场也是光滑的：

- **向量场之和：** $(V + W)(x) = V(x) + W(x)$
- **标量乘法：** $(fV)(x) = f(x)V(x)$

证明. 我们利用命题 6 提供的延拓视角进行验证：

1. 验证 $V + W$ 的光滑性： 由命题 6，存在 \mathcal{M} 邻域上的光滑延拓 \bar{V} 和 \bar{W} 。定义 $\bar{Z}(y) = \bar{V}(y) + \bar{W}(y)$ 。作为欧几里得空间中两个光滑向量场的和（对应向量分量相加）， \bar{Z} 在邻域内显然是光滑的。由于 $\bar{Z}|_{\mathcal{M}} = V + W$ ，根据命题 6， $V + W$ 是光滑向量场。

2. 验证 fV 的光滑性： 同理，设 \bar{f} 是 f 的光滑标量延拓， \bar{V} 是 V 的光滑向量延拓。定义 $\bar{Z}(y) = \bar{f}(y)\bar{V}(y)$ 。在欧几里得空间中，光滑标量场与光滑向量场的乘积仍是光滑的。由于 $\bar{Z}|_{\mathcal{M}} = fV$ ，故 fV 是光滑向量场。 \square

参考文献

[Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds*. Cambridge University Press, 2023.