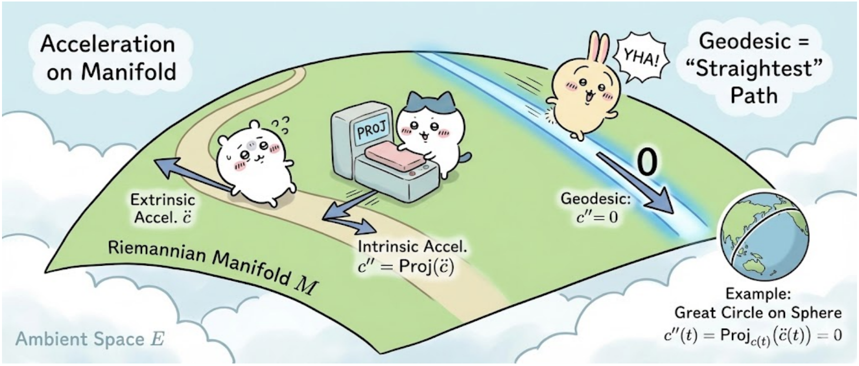
加速度与测地线

北极甜虾 (南半球版)

2026 年 1 月 22 日

Manifold Optimization Notes



1 加速度与测地线的定义

在黎曼流形上，我们已经有了诱导协变导数 D/dt 的概念，这使得我们可以定义曲线的加速度。

定义 1: 内蕴加速度

设 $c : I \to \mathcal{M}$ 是光滑曲线。其速度是沿曲线的向量场 $c' \in \mathfrak{X}(c)$。曲线 c 的**加速度 (acceleration)** 定义为速度场的诱导协变导数，即

$$c''(t) = \frac{D}{dt}c'(t).$$

我们也称 c'' 为 c 的**内蕴加速度 (intrinsic acceleration)** 。

当 $\mathcal{M}$ 是欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 中的黎曼子流形时，曲线 c 同时也是 $\mathcal{E}$ 中的曲线。为了区分，我们用 $\ddot{c}(t) = \frac{d^2}{dt^2}c(t)$ 表示**外蕴加速度 (extrinsic acceleration)**，即在嵌入空间中的经典加速度。

对于黎曼子流形，内蕴加速度与外蕴加速度可以通过正交投影算子建立联系：

命题 2: 子流形上的加速度公式

设 $\mathcal{M}$ 是嵌入在欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 中的黎曼子流形（配备诱导度量）。对于 $\mathcal{M}$ 上的光滑曲线 c，其内蕴加速度由外蕴加速度的正交投影给出：

$$c''(t) = \mathrm{Proj}_{c(t)}(\ddot{c}(t)).$$

该命题的证明不难，读者可自行验证。

定义 3: 测地线

如果一条曲线 $c : I \to \mathcal{M}$ 的加速度恒为零，即

$$c''(t) = 0, \quad \forall t \in I,$$

则称 c 为**测地线 (geodesic)** 。

直观上，测地线是流形上“尽可能直”的曲线（加速度为 0 意味着没有受到切向力的作用）。对于黎曼子流形，这等价于说曲线的外蕴加速度 $\ddot{c}(t)$ 处处垂直于流形表面。

2 例子：球面上的测地线

例子 4: 球面上的大圆

考虑单位球面 $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : x^\top x = 1\}$ 作为 $\mathbb{R}^d$ 的黎曼子流形。给定点 $x \in S^{d-1}$ 和切向量 $v \in T_x S^{d-1}$ (即 $x^\top v = 0$, 且设 $v \neq 0$)。考虑如下曲线（即球面上的大圆）：

$$c(t) = \cos(t|v|)x + \sin(t|v|)\frac{v}{|v|}.$$

我们来验证这是一条测地线。首先计算其在 $\mathbb{R}^d$ 中的外蕴速度和加速度：

$$\begin{aligned}\dot{c}(t) &= -|v|\sin(t|v|)x + |v|\cos(t|v|)\frac{v}{|v|} \\ &= -|v|\sin(t|v|)x + \cos(t|v|)v.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{c}(t) &= -|v|^2\cos(t|v|)x - |v|\sin(t|v|)v \\ &= -|v|^2\left(\cos(t|v|)x + \sin(t|v|)\frac{v}{|v|}\right) = -|v|^2 c(t).\end{aligned}$$

可以看到，外蕴加速度 $\ddot{c}(t)$ 恰好正比于 $c(t)$。由于 $c(t)$ 是球面上的点，向量 $c(t)$ 就是该点处的法向量。因此，$\ddot{c}(t)$ 垂直于切空间 $T_{c(t)}S^{d-1}$。根据子流形加速度公式，我们有

$$c''(t) = \mathrm{Proj}_{c(t)}(\ddot{c}(t)) = 0.$$

因为投影算子 $\mathrm{Proj}_{c(t)}$ 会滤除法向分量。由于 $c''(t) \equiv 0$，该曲线 $c(t)$ 是球面上的测地线。这也验证了直觉：被限制在球面上运动的粒子，如果不受切向外力，将沿大圆运动。

参考文献

[Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds.* Cambridge University Press, 2023.