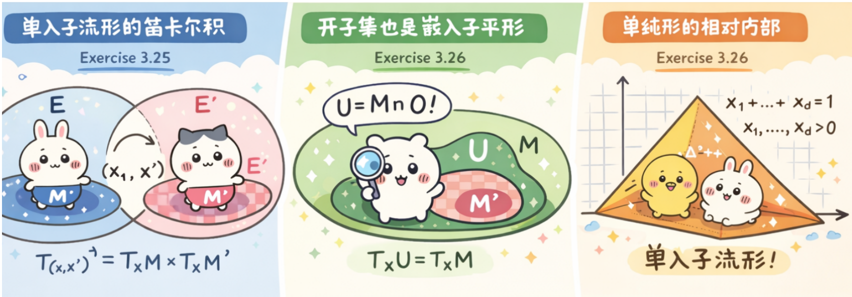
嵌入子流形的一些性质

北极甜虾（南半球版）

2026.1.9

笛卡尔积 | **开子集** | **单纯性**



命题 1: 嵌入子流形的笛卡尔积是嵌入子流形，Exercise 3.25

令 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 分别是 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 的嵌入子流形。那么，$\mathcal{M}\times\mathcal{M}'$ 是 $\mathcal{E}\times\mathcal{E}'$ 的嵌入子流形，其维度为 $\dim\mathcal{M}+\dim\mathcal{M}'$，且其切空间为

$$T_{(x,x')}(\mathcal{M}\times\mathcal{M}') = T_x\mathcal{M}\times T_{x'}\mathcal{M}'.$$

证明. **证明 $\mathcal{M}\times\mathcal{M}'$ 是嵌入子流形：**根据嵌入子流形的定义，我们需要为乘积空间 $\mathcal{M}\times\mathcal{M}'$ 中的任意一点构造一个局部定义函数，并验证其性质。

假设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{E}$ 中维度为 n 的嵌入子流形，$\mathcal{M}'$ 是 $\mathcal{E}'$ 中维度为 n' 的嵌入子流形。令 $\mathcal{E}$ 的维度为 d，$\mathcal{E}'$ 的维度为 d'。令 $k=d-n$，$k'=d'-n'$.

对于 $\mathcal{M}\times\mathcal{M}'$ 中的任意一点 (x,x'), 下列性质满足：

- 由于 $\mathcal{M}$ 是嵌入子流形，存在 x 在 $\mathcal{E}$ 中的邻域 U 和光滑函数 $h: U \to \mathbb{R}^k$，使得 $h^{-1}(0) = \mathcal{M} \cap U$，且 $Dh(x)$ 的秩为 k（满秩）。

- 由于 $\mathcal{M}'$ 是嵌入子流形，存在 x' 在 $\mathcal{E}'$ 中的邻域 U' 和光滑函数 $h': U' \to \mathbb{R}^{k'}$，使得 $(h')^{-1}(0) = \mathcal{M}' \cap U'$，且 $Dh'(x')$ 的秩为 k'（满秩）。

接下来我们在乘积空间 $\mathcal{E}\times\mathcal{E}'$ 中考虑点 (x, x') 的邻域 $W = U\times U'$, 注意这是一个开集。定义函数 $H: W \to \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k'} \simeq \mathbb{R}^{k+k'}$ 使得

$$H(y, y') = (h(y), h'(y')), \quad \forall (y, y') \in W.$$

我们需要验证 H 满足两个条件:

- 注意

  $$H(y, y') = 0 \iff h(y) = 0, h'(y') = 0.$$

  由于 h 和 h' 分别是 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 的局部定义函数，这等价于

  $$y \in \mathcal{M} \cap U \quad 且 \quad y' \in \mathcal{M}' \cap U'$$

  即

  $$(y, y') \in (\mathcal{M} \times \mathcal{M}') \cap (U \times U').$$

- 我们需要计算 H 在 (x, x') 处的微分 $DH(x, x')$. 对于切向量 $(v, v') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}'$，根据链式法则，

  $$DH(x, x')[v, v'] = (Dh(x)[v], Dh'(x')[v']).$$

  如果我们选择基底并将其写成矩阵形式，$DH(x, x')$ 是一个分块对角矩阵:

  $$DH(x, x') \cong \begin{bmatrix} Dh(x) & 0 \\ 0 & Dh'(x') \end{bmatrix}$$

其秩为 $\text{rank}(DH(x,x')) = \text{rank}(Dh(x)) + \text{rank}(Dh'(x')) = k + k'$。因为 k 和 k' 分别是 h 和 h' 的秩，所以 H 的微分是满秩的（秩为 $k+k'$）。

因此 $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ 是 $\mathcal{E} \times \mathcal{E}'$ 的嵌入子流形，且维度为

$$\dim(\mathcal{E} \times \mathcal{E}') - (k + k') = n + n' = \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{M}'.$$

证明 $T_{(x,x')}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') = T_x\mathcal{M} \times T_{x'}\mathcal{M}'$：嵌入子流形在某点的切空间等于其局部定义函数在该点微分的核。因此，$\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$ 在 (x,x') 处的切空间为

$$T_{(x,x')}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') = \ker DH(x,x')$$

对于 $(v,v') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}'$, 我们有

$$\begin{aligned}
(v,v') \in \ker DH(x,x') &\iff DH(x,x')[v,v'] = 0 \\
&\iff (Dh(x)[v], Dh'(x')[v']) = (0,0) \\
&\iff Dh(x)[v] = 0 \quad \text{且} \quad Dh'(x')[v'] = 0
\end{aligned}$$

我们知道 $\ker Dh(x) = T_x\mathcal{M}$ 且 $\ker Dh'(x') = T_{x'}\mathcal{M}'$. 因此

$$(v,v') \in T_{(x,x')}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') \iff v \in T_x\mathcal{M} \quad \text{且} \quad v' \in T_{x'}\mathcal{M}'$$

即

$$T_{(x,x')}(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') = T_x\mathcal{M} \times T_{x'}\mathcal{M}'.$$

□

命题 2: 嵌入子流形的开子集是嵌入子流形，Exercise 3.26

令 $\mathcal{M}$ 是线性空间 $\mathcal{E}$ 的嵌入子流形。$\mathcal{M}$ 的任意开子集 U 也是 $\mathcal{E}$ 的嵌入子流形，且具有与 $\mathcal{M}$ 相同的维度和切空间。

证明. 假设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{E}$ 中维度为 n 的嵌入子流形 (其中 $\dim \mathcal{E} = d$)。令 $k = d - n$. 设 U 是 $\mathcal{M}$ 的一个开子集。根据子空间拓扑的定义，存在 $\mathcal{E}$ 中的一个开集 O，使得

$$U = \mathcal{M} \cap O.$$

我们要证明 U 满足嵌入子流形的定义。对于 U 中的任意一点 x，因为 $x \in U \subseteq \mathcal{M}$，且 $\mathcal{M}$ 是嵌入子流形，所以存在 x 在 $\mathcal{E}$ 中的一个邻域 W 和一个光滑函数 $h : W \to \mathbb{R}^k$，使得 $h^{-1}(0) = \mathcal{M} \cap W$ 且 $Dh(x)$ 的秩为 k. 为了构造 U 在 x 处的局部定义函数，我们取邻域 $W' = W \cap O$. 由于 W 和 O 都是 $\mathcal{E}$ 中的开集，所以 W' 也是 x 在 $\mathcal{E}$ 中的开邻域。考虑限制在 W' 上的函数 $h|_{W'}$. 我们验证它是否满足子流形的条件:

- 我们有

$$\begin{aligned}
\{y \in W' : h(y) = 0\} &= \{y \in W \cap O : h(y) = 0\} \\
&= \{y \in O : y \in W \text{ 且} h(y) = 0\} \\
&= \{y \in O : y \in \mathcal{M} \cap W\} \\
&= (\mathcal{M} \cap O) \cap W \\
&= U \cap W'.
\end{aligned}$$

- 由于 W' 是开集且 $x \in W'$, 函数在 x 处的微分 $D(h|_{W'})(x)$ 与 $Dh(x)$ 相同。已知 $\mathrm{rank}(Dh(x)) = k$，因此

$$\mathrm{rank}(D(h|_{W'})(x)) = k.$$

$\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{E}$ 的嵌入子流形，其维度为 $d - k = n$, 与 $\mathcal{M}$ 的维度相同。对于 $x \in \mathcal{U}$, 其切空间为 $T_x\mathcal{U} = \ker Dh(x)$。由于这与 $\mathcal{M}$ 在 x 处的切空间定义完全一致（使用相同的局部定义函数 h)，因此

$$T_x\mathcal{U} = T_x\mathcal{M}.$$

$\square$

命题 3: 单纯形的相对内部是嵌入子流形，Exercise 3.26

单纯形的相对内部 Δ_{++}^{d-1} 定义为

$$\Delta_{++}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 + \cdots + x_d = 1 \text{ 且 } x_1, \ldots, x_d > 0\}.$$

Δ_{++}^{d-1} 是 $\mathbb{R}^d$ 的嵌入子流形。

证明. 我们首先考虑由等式约束定义的仿射子空间

$$\mathcal{A} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x_1 + \cdots + x_d = 1\right\}.$$

定义光滑函数 $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为

$$h(x) = x_1 + \cdots + x_d - 1.$$

其微分 $Dh(x) = [1, 1, \ldots, 1]$ 在任意点都是满秩的（秩为 1）。因此，根据嵌入子流形的定义，$\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个嵌入子流形，其维度为 $d - 1$.

接下来，令 O 为 $\mathbb{R}^d$ 中的正象限（这是一个开集）:

$$O = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1, \ldots, x_d > 0\}.$$

注意到 Δ_{++}^{d-1} 是仿射子空间 $\mathcal{A}$ 与开集 O 的交集:

$$\Delta_{++}^{d-1} = \mathcal{A} \cap O.$$

根据子空间拓扑的定义，Δ_{++}^{d-1} 是 $\mathcal{A}$ 中的一个开子集。

利用命题 2的结论, 嵌入子流形的开子集也是嵌入子流形, Δ_{++}^{d-1} 是 $\mathbb{R}^d$ 的嵌入子流形。 □

参考文献

[Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds*. Cambridge University Press, 2023.