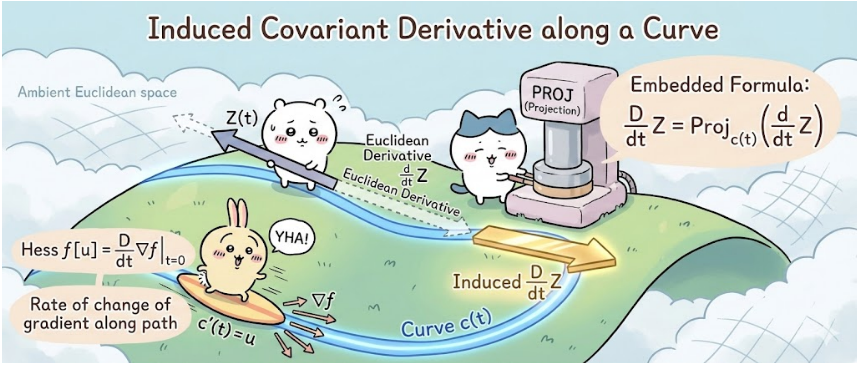
沿曲线的向量场的微分

北极甜虾 (南半球版)

2026 年 1 月 21 日

Manifold Optimization Notes

沿曲线向量场和诱导协变导数　嵌入子流形的诱导协变导数



1 沿曲线的向量场和诱导协变导数

在定义了流形上的联络 ∇ 之后，我们能够计算向量场 V 沿切向量 u 的方向导数 $\nabla_u V$。然而，在分析二阶优化算法（如计算测地线方程或泰勒展开）时，我们经常遇到仅定义在一条曲线 $c : I \to \mathcal{M}$ 上的向量场，例如曲线的速度场 $c'(t)$ 或沿曲线的梯度场 $\mathrm{grad}\, f(c(t))$。这些向量场并不一定是定义在整个流形 $\mathcal{M}$ 上的，因此不能直接使用 ∇ 求导。我们引入**诱导协变导数 (induced covariant derivative)**，记为 $\frac{D}{dt}$，来解决这一问题。

定义 1: 沿曲线的向量场

令 $c : I \to \mathcal{M}$ 是流形上的光滑曲线。映射 $Z : I \to T\mathcal{M}$ 称为曲线 c 上的向量场，如果对于所有 $t \in I$，都有 $Z(t) \in T_{c(t)}\mathcal{M}$. 曲线 c 上的光滑向量场集合记为 $\mathfrak{X}(c)$.

注意，$Z(t)$ 仅定义在曲线经过的点上，这与定义在流形开集上的向量场 $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ 不同。

定理 2: 诱导协变导数

令 $\mathcal{M}$ 是配备了联络 ∇ 的流形，$c : I \to \mathcal{M}$ 是光滑曲线。那么存在唯一的算子 $\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(c) \to \mathfrak{X}(c)$ 满足以下性质：对于任意的 $Y, Z \in \mathfrak{X}(c), V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}), g \in \mathfrak{F}(I), a, b \in \mathbb{R}$, 我们有

1. $\mathbb{R}$-**线性**:

$$\frac{D}{dt}(aY + bZ) = a\frac{D}{dt}Y + b\frac{D}{dt}Z.$$

2. **莱布尼茨法则 (Leibniz rule)**:

$$\frac{D}{dt}(gZ) = g'Z + g\frac{D}{dt}Z.$$

3. **链式法则 (Chain rule)**:

$$\frac{D}{dt}(V \circ c)(t) = \nabla_{c'(t)}V.$$

如果 ∇ 是黎曼联络，则还满足：

4. **乘积法则**:

$$\frac{d}{dt}\langle Y(t), Z(t)\rangle_{c(t)} = \langle\frac{D}{dt}Y, Z\rangle + \langle Y, \frac{D}{dt}Z\rangle.$$

这个定理的证明需要用到局部框架，这里我们跳过证明。算子 $\frac{D}{dt}$ 允许我们定义曲线的加速度（即速度场的协变导数），这将在下一次笔记学习测地线时起到关键作用。

注解 3: 利用诱导导数表示 Hessian

利用链式法则，我们可以将黎曼 Hessian 与诱导协变导数联系起来。令 $c(t)$ 是满足 $c(0) = x$ 和 $c'(0) = u$ 的曲线。根据定义 $\operatorname{Hess} f(x)[u] = \nabla_u \operatorname{grad} f$，利用定理 2 的链式法则性质，我们可以写成：

$$\operatorname{Hess} f(x)[u] = \frac{D}{dt} \operatorname{grad} f(c(t))\Big|_{t=0}.$$

这直观地表明，Hessian 衡量的是当我们沿曲线移动时，梯度向量场的变化率。

2 嵌入子流形上的诱导协变导数

对于嵌入子流形，诱导协变导数的计算非常直观：它就是欧氏空间中的普通导数在切空间上的正交投影。

命题 4: 嵌入子流形上的诱导协变导数

令 $\mathcal{M}$ 是欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 的黎曼子流形，配备诱导度量。对于曲线 c 上的向量场 $Z(t)$，其诱导协变导数为：

$$\frac{D}{dt} Z(t) = \operatorname{Proj}_{c(t)} \left(\frac{d}{dt} Z(t) \right),$$

其中 $\frac{d}{dt} Z(t)$ 是 $Z(t)$ 作为 $\mathcal{E}$ 中向量值函数的经典导数，$\operatorname{Proj}_{c(t)}$ 是向切空间 $T_{c(t)}\mathcal{M}$ 的正交投影。

证明. 这里我们验证一下链式法则的满足，其他性质留给读者自行证明。令 $Z(t) = \bar{U}(c(t))$，其中 $\bar{U}$ 是 $\mathcal{E}$ 中的光滑扩展。我们在欧氏空间中有 $\frac{d}{dt} Z(t) = D\bar{U}(c(t))[c'(t)] = \bar{\nabla}_{c'(t)} \bar{U}$（因为欧氏空间的联络即方向导数）。根据黎曼子流形联络的定义

($\nabla_u U = \mathrm{Proj}_x(\bar{\nabla}_u \bar{U})$)，我们有：

$$\mathrm{Proj}_{c(t)}\left(\frac{d}{dt}Z(t)\right) = \mathrm{Proj}_{c(t)}(\bar{\nabla} c'(t)\bar{U}) = \nabla c'(t) U.$$

这正是诱导协变导数所需的链式法则性质。 □

例子 5: Hessian 的有限差分近似

对于欧几里得空间 $\mathcal{E}$ 中黎曼子流形 $\mathcal{M}$ 上的光滑函数 f，我们可以应用命题 4（即嵌入子流形诱导协变导数公式）来计算 Hessian。根据 $\mathrm{Hess}\, f(x)[u] = \frac{D}{dt} \mathrm{grad}\, f(c(t))\big|_{t=0}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}\, f(x)[u] &= \mathrm{Proj}_x\left(\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{grad}\, f(c(t)) - \mathrm{grad}\, f(c(0))}{t}\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{Proj}_x(\mathrm{grad}\, f(c(t))) - \mathrm{grad}\, f(x)}{t},\end{aligned}$$

这里的向量减法是有意义的，因为对于所有的 t，$\mathrm{grad}\, f(c(t))$ 都是线性嵌入空间 $\mathcal{E}$ 中的元素。该式对于任何满足 $c(0) = x$ 且 $c'(0) = u$ 的光滑曲线 c 都成立。
例如，如果我们选取一条**收缩曲线 (retraction curve)** $c(t) = R_x(tu)$，那么对于某个适当选取的步长 $\bar{t} > 0$，我们得到 Hessian 的**有限差分近似 (finite difference approximation)**：

$$\mathrm{Hess}\, f(x)[u] \approx \frac{\mathrm{Proj}_x(\mathrm{grad}\, f(R_x(\bar{t}u))) - \mathrm{grad}\, f(x)}{\bar{t}}.$$

假设 $\mathrm{grad}\, f(x)$ 是方便计算的，该公式为我们提供了一种直接的方法来近似计算 $\mathrm{Hess}\, f(x)[u]$，其计算开销非常低：仅需计算一次收缩映射、一次梯度和一次投影。

参考文献

[Bou23] Nicolas Boumal. *An introduction to optimization on smooth manifolds.* Cambridge University Press, 2023.