Optimización de la planificación de servicios: análisis de soluciones

Gabriela Sánchez Yepez

[a] *Posgrado en Ingeniería de Sistemas, Universidad Autónoma de Nuevo León, gabriela.sanchezypz@uanl.edu.mx,*

Abstract

Se han propuesto dos modelos para resolver un problema de toma de decisiones. En objetivo del presente trabajo es aplicar herramientas estadísticas que ayuden a determinar si hay diferencias significativas entre las soluciones que proporcionan ambos modelos.

Keywords:
Modelo matemático, GRASP reactivo, gap

1. Introducción

En el presente trabajo se analizan los resultados obtenidos al resolver un problema de planificación de servicios de telecomunicaciones que consiste en asignar órdenes de servicio a un conjunto de cuadrillas de trabajadores, así como en determinar la secuencia en que deben realizarse dichos servicios, con el fin de balancear el salario de las cuadrillas sujeto a diversas restricciones. Cada orden tiene asignado un puntaje que depende de la dificultad de la misma, por este motivo el salario de los trabajadores depende directamente de la cantidad y el tipo de servicio que realicen.

Ya que no existe una única forma de plantear el balance del salario se proponen dos formulaciones matemáticas. Una de ellas aborda el balance maximizando el mínimo puntaje colectado por las cuadrillas (s_{min}), por lo tanto se referirá a esta formulación como modelo *Max-Min*. La segunda formulación toma como base el caso ideal, que consiste en considerar que todas las cuadrillas obtienen un puntaje igual a la media de los puntos de las órdenes (μ). Ésta busca que los puntajes colectados por las cuadrillas se alejen lo menos posible de esta media. Es decir, el segundo modelo, al cual se referirá como modelo *Min-Max* tiene como función objetivo minimizar la máxima de las desviaciones respecto a μ. Más detalles acerca del problema así como las formulaciones completas se encuentran en el trabajo de Sánchez-Yepez (2019).

El objetivo del proyecto es determinar si al resolver ambos modelos utilizando como método de solución una metaheurística basada en un GRASP reactivo (Sánchez-Yepez, 2019), hay diferencias significativas entre las soluciones. Para cumplir con dicho objetivo se emplean distintos test estadísticos para los cuales se ha seleccionado un nivel de significancia de 0.05.

El resto del documento se distribuye de la siguiente manera: en la sección 2 se describe cómo se obtienen los datos a analizar, la sección 3 presenta y analiza los datos utilizando distintas herramientas de estadística descriptiva, mientras que en la sección 4 se describe el uso de pruebas estadísticas para justificar si hay diferencias entre los datos. Finalmente, la sección 5 presenta las conclusiones del trabajo.

2. Datos

Se plantean dos formulaciones distintas para resolver un problema de toma de desiciones. Para validar las mismas y contar con un punto de referencia al resolver con la metaheurística GRASP reactiva, los modelos se resuelven con el optimizador CPLEX versión 12.8 usando un solo hilo y considerando dos criterios de paro: un tiempo de cómputo máximo de 7200 segundos o un gap de 0.0 % (soluciones óptimas).

Las instancias utilizadas en la experimentación son adaptadas de las propuestas en la literatura (Chao et al., 1996). El conjunto se divide en siete clases teniendo en total 353 instancias disponibles. Las instancias pertenecientes a una misma clase contienen el mismo grafo y varían en la cantidad de cuadrillas disponibles y tiempo límite para la duración de las rutas. Las características de cada clase de instancias se especifica en el cuadro 1.

Debido a la naturaleza aleatoria del GRASP reactivo, se proporcionan diez soluciones a cada instancia para obtener poblaciones de tamaño 3530. Teniendo en mente el punto de referencia, los conjuntos de datos que se analizan son diferencias porcentuales (**gap**) entre el valor objetivo de las soluciones obtenidas con la metaheurística y el valor objetivo de la mejor solución encontrada por CPLEX, para un modelo en particular.

Por ejemplo, el gap para el modelo Max-Min queda determinado por la

Cuadro 1: Instancias.

Clase	**Órdenes**	**Instancias**			
		Cuadrillas			**Total**
		2	**3**	**4**	
I	21	11	11	11	33
II	32	17	16	15	48
III	33	20	20	20	60
IV	64	11	8	5	24
V	66	25	25	24	74
VI	100	20	19	17	56
VII	102	20	19	19	58

ecuación (1)

$$gap = 100 \times \frac{Z_{\text{cplex}} - Z_{\text{grasp}}}{Z_{\text{cplex}}}, \tag{1}$$

donde Z_{cplex} y Z_{grasp} representan el valor de la función objetivo obtenida por CPLEX y el GRASP reactivo, respectivamente.

Es claro que el gap puede ser tanto positivo como negativo. Si es positivo indica que el valor objetivo encontrado con CPLEX es mejor que el encontrado por la metaheurística, en cambio si es negativa indica que el valor objetivo encontrado con la metaheurística es mejor que el determinado por el optimizador. Para tener la misma interpretación al analizar los resultados del modelo Min-Max, el gap determinado por ecuación 1 se multiplica por (-1).

Es de interés determinar el comportamiento que siguen las soluciones obtenidas con un modelo específico al evaluar con una función objetivo distinta. En este caso las soluciones del modelo Max-Min son evaluadas en la función objetivo del modelo Min-Max y las soluciones del modelo Min-Max son evaluadas en la función objetivo del modelo Max-Min.

Considerando toda la información descrita en la sección, en total se analizan cuatro conjuntos de soluciones: las del modelo Max-Min, las soluciones del modelo Min-Max evaluadas en la función objetivo del modelo Max-Min, las del modelo Min-Max y las soluciones del modelo Max-Min evaluadas en la función objetivo del modelo Min-Max, identificadas por s_1, s_{21}, s_2 y s_{12}, respectivamente. El cálculo del gap en cada uno de estos conjuntos da lugar a los cuatro distintos conjuntos de datos que se analizan en el trabajo.

3. Estadística descriptiva

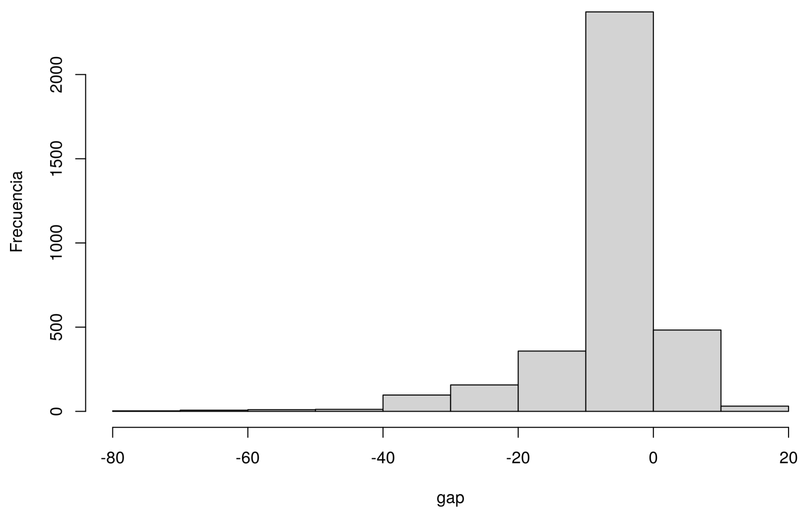
La distribución de los resultados del gap en cada conjunto de datos se presentan en las figuras 1 y 2. El apoyo visual de estas figuras permite identificar que existe un gran número de replicas para las cuales no hay diferencia entre los dos métodos de solución empleados (metaheurística y optimizador). Esto es de esperarse ya que el optimizador logra encontrar soluciones óptimas para aproximadamente un 50 % del total de las instancias en ambos modelos y los resultados de la metaheurística se mantienen muy similares. De forma muy particular en casi el 100 % de las instancias de las clases I y II, los resultados son los mismos, esto puede observarse más a detalle en los diagramas de caja bigote de las figuras 3 y 4.

Es importante destacar que en adelante el análisis se realiza por pares ya que el interés es determinar si es que alguno de los modelos da mejores resultados. Recuerde que la diferencia entre las formulaciones radica en la función objetivo.

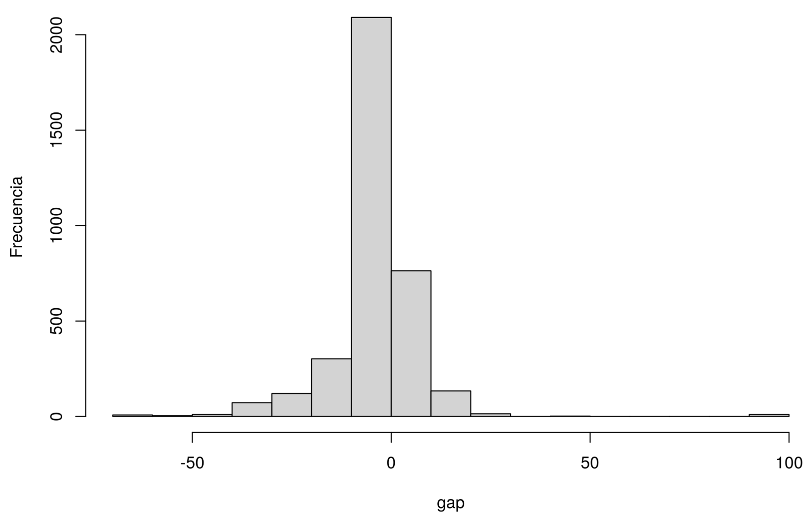
Los pares de conjuntos que se analizan son el el gap al evaluar las soluciones del modelo Max-Min en la función objetivo Min-Max (s_{12}) junto con el gap de las soluciones s_1 y, el gap al evaluar las soluciones del modelo Min-Max en la función objetivo Max-Min s_{21} y el gap de las soluciones s_2. Si se analizan los diagramas de caja bigote de acuerdo a los pares antes mencionados, se puede observar que los resultados son similares con mayor frecuencia en las clases más pequeñas. La figura 5 permite observar las densidades de los resultados separados de acuerdo a la función objetivo. En esta figura son más notorias las similitudes que las diferencias.

Si se comparan directamente las medias de los conjuntos de datos se observa que la media del gap obtenido de las soluciones s_1 es -4.0173 mientras que la media del gap de las soluciones s_{21} es -1.7953. En ambos casos es negativo lo que indica que, en promedio, las soluciones de la metaheurística son mejores que las del optimizador. Ya que la media de las soluciones s_1 es más pequeña, se podría decir que en promedio el modelo Max-Min mostró mejor desempeño. Al realizar el mismo análisis con las soluciones s_2 y s_12 los resultados obtenidos para las medias son 0.0313 y -1.9195, lo que permite concluir que en promedio nuevamente las soluciones del modelo Max-Min muestran mejores resultados.

El análisis descriptivo muestra que sí hay ligeras diferencias entre los conjuntos. Sin embargo, no es suficiente para justificar si en general la diferencia será significativa o no.

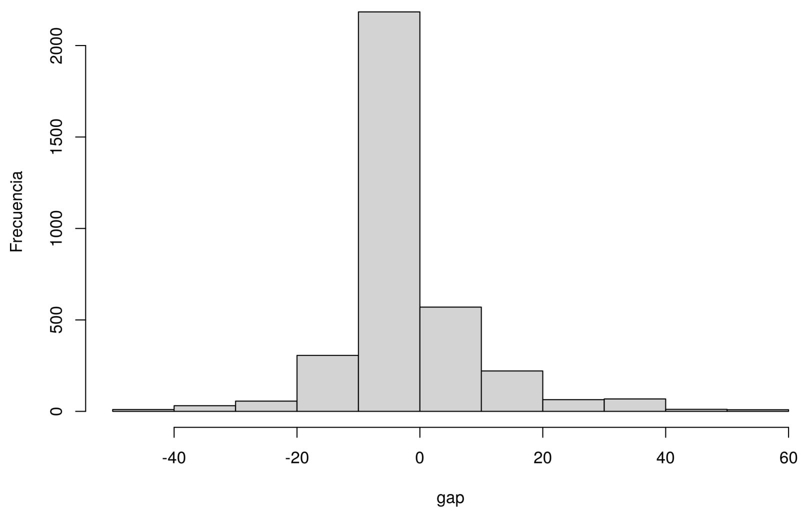


(a) Soluciones s_1

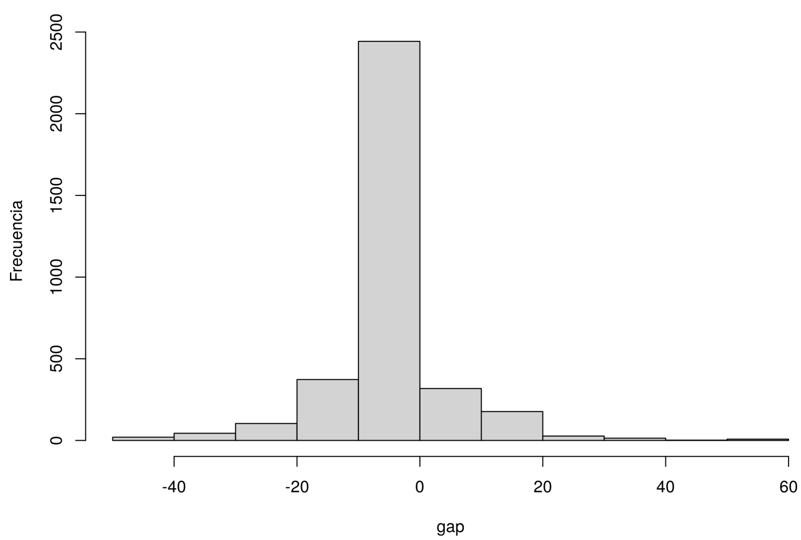


(b) Soluciones s_{21}

Figura 1: Gap para la función objetivo Max-Min.

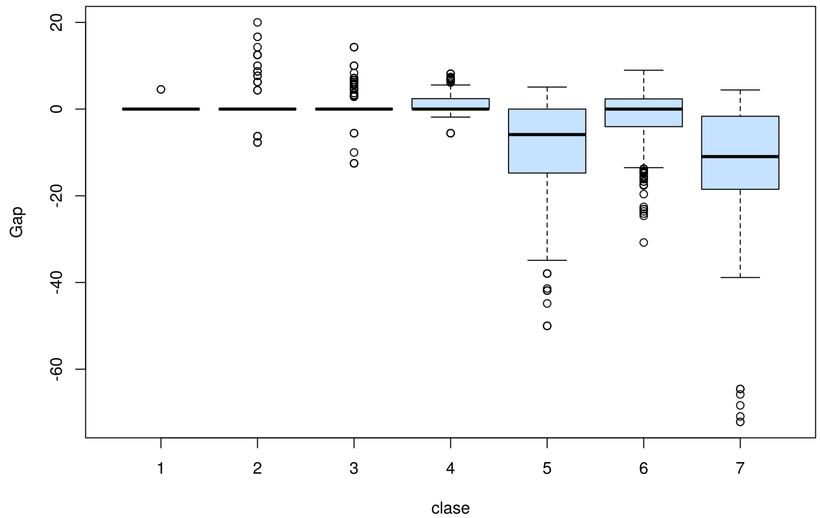


(a) Soluciones s_2

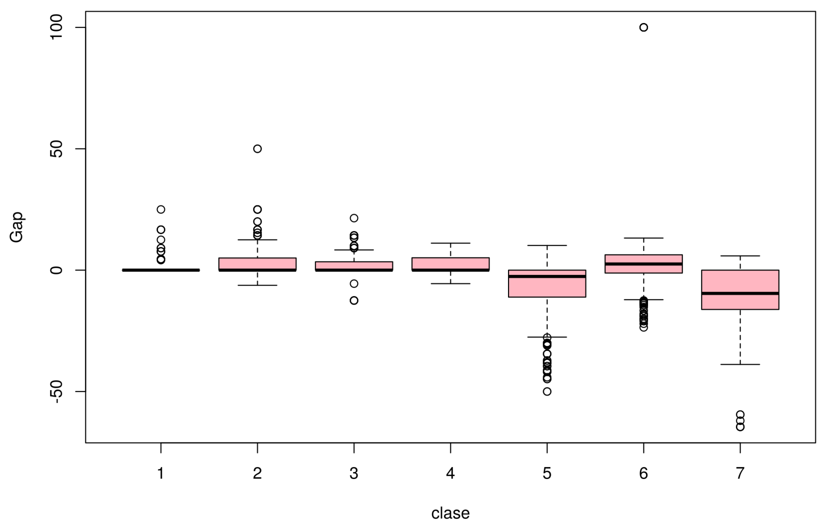


(b) Soluciones s_{12}

Figura 2: Gap para la función objetivo Min-Max.

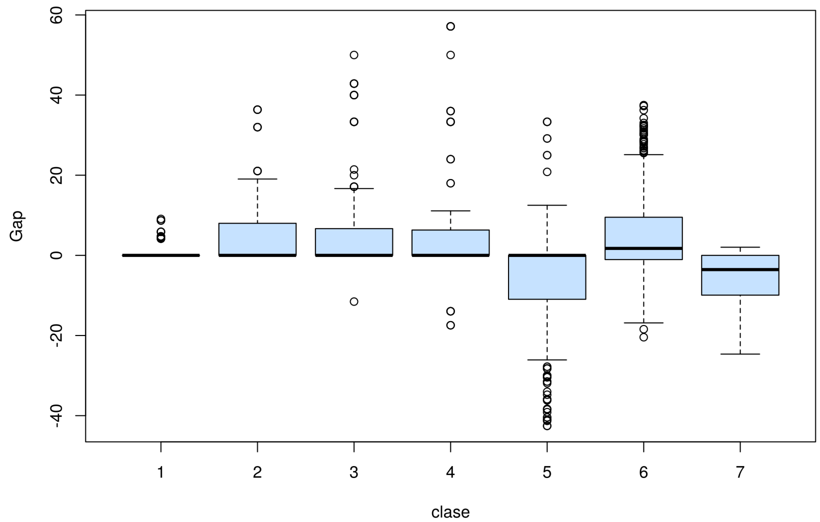


(a) Soluciones s_1

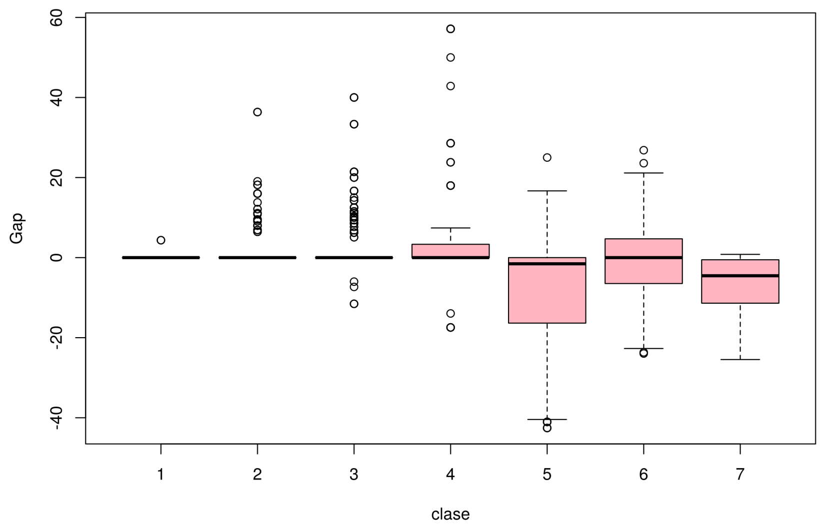


(b) Soluciones s_{21}

Figura 3: Gap para la función objetivo Max-Min separado por clase.

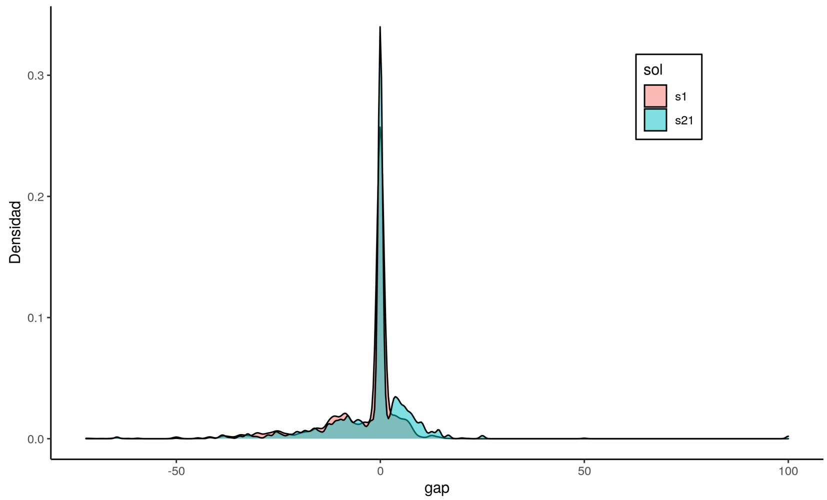


(a) Soluciones s_2

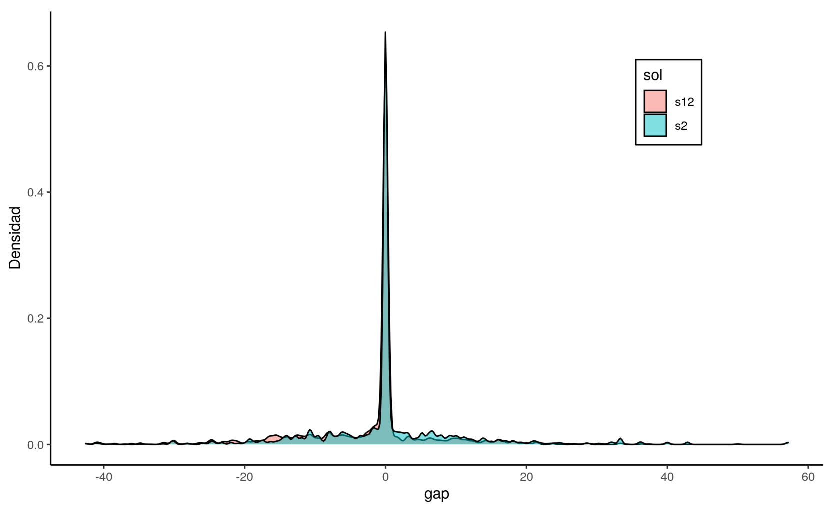


(b) Soluciones s_{12}

Figura 4: Gap para la función objetivo Min-Max separado por clase.



(a) Función objetivo Max-Min



(b) Función objetivo Min-Max

Figura 5: Densidad del gap separado por función objetivo.

4. Pruebas estadísticas

En esta sección se emplean pruebas estadísticas con el objetivo de justificar diferencias significativas en los resultados. Todas las pruebas usadas se realizan utilizando como apoyo el lenguaje de programación R (The R Foundation). Como primer paso, es importante verificar si las muestras cumplen con la normalidad o no, ya que ayudará a determinar si deben usarse pruebas paramétricas o no paramétricas.

4.1. Normalidad

Para determinar si los conjuntos de datos siguen una distribución normal se emplea la prueba de *Shapiro-Wilk*. Este test plantea la hipótesis nula de que la muestra proviene de una distribución normal, por lo tanto si el p-valor es menor que 0.05 se rechaza la hipótesis nula y se concluye que los datos no provienen de una distribución normal. Los resultados de los cuatro distintos conjuntos de datos indican que ninguno cumple con la normalidad por lo tanto sólo son utilizadas pruebas no paramétricas para analizar las diferencias entre los datos.

4.2. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

Se resalta que el conjunto de instancias usadas para resolver ambos modelos es el mismo, por lo tanto se tienen datos *pareados*. La prueba de los rangos con signo de Wilcoxon permite analizar si hay diferencia entre las muestras pareadas. La hipótesis nula de la prueba es que la mediana de las diferencias de cada par es cero.

Al realizar la prueba para los dos pares de conjuntos de datos de estudio, el p-valor permite rechazar la hipótesis nula ya que es menor que el nivel de significancia. Se debe hacer énfasis en que existen varios pares en los cuales ambos datos son iguales, eso ocasiona lo que se conoce como *ties* o *ligaduras*. En este caso `wilcox.test()` devuelve un p-valor aproximado por lo que no se puede hacer una conclusión al respecto.

Se optó por hacer una tercera prueba pareada en la que se consideran como datos las evaluaciones cruzadas, es decir el gap obtenido de las soluciones s_{12} y s_{21}. El resultado del p-valor en este panorama no permite rechazar la hipótesis nula. Sin embargo, sucede lo mismo que en los casos anteriores, hay pares de datos iguales que generan ligaduras por lo que tampoco se puede concluir con seguridad un resultado.

5. Conclusiones

El empleo de la prueba para muestras pareadas no permite hacer conclusiones respecto a los datos ya que los datos generan ligaduras. Como trabajo a futuro se puede implementar la estrategia descrita por DeGroot and Schervish (2012) para tratar con estos casos. Otro punto a resaltar en esta prueba es que de cada instancia hay diez replicas por lo que podría haber diferencias en el resultado del p-valor si los pares de conjuntos de datos se consideran de forma diferente. Una estrategia a implementar es reducir el tamaño de las muestras al usar únicamente los mejores resultados obtenidos para cada una de las instancias.

Referencias

Chao, I.M., Golden, B.L., Wasil, E.A., 1996. The team orienteering problem. European Journal of Operational Research 88, 464 – 474.

DeGroot, M., Schervish, M., 2012. Probability and Statistics. Addison-Wesley.

Sánchez-Yepez, G., 2019. Optimización de la planificación de servicios. Master's thesis. Posgrado en Ingeniería de Sistemas, Universidad Autónoma de Nuevo León.

The R Foundation, . The R Project for Statistical Computing. `https://www.r-project.org/`.