

Valor esperado y varianza

Gabriela Sánchez Y.

5064

En la presente actividad se simulan problemas previamente que previamente se resolvieron de forma analítica [3], con el objetivo de encontrar evidencia numérica que apoye el resultado analítico. Las simulaciones se realizan con el apoyo del lenguaje de programación R [1]. El código puede consultarse en el archivo `t10.R` [2].

Ejercicio 1, página 247

A card is drawn at random from a deck consisting of cards numbered 2 through 10. A player wins 1 dollar if the number on the card is odd and loses 1 dollar if the number is even. What is the expected value of his winnings?

El resultado analítico de este problema es $-\frac{1}{9}$. Como primera aproximación para apoyar dicho resultado se realizan dos simulaciones del juego, en cada una se guarda la frecuencia y la frecuencia relativa con que cada resultado ocurre, además se calcula el promedio de las ganancias. En el cuadro 1 se pueden observar estos resultados.

Cuadro 1: Frecuencias para el juego de las cartas.

Ganancia	$n = 100$		$n = 10,000$	
	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia	Frecuencia relativa
-1	54	0.54	5578	0.5578
1	46	0.46	4422	0.4422
Ganancia promedio	-0.08		-0.1156	

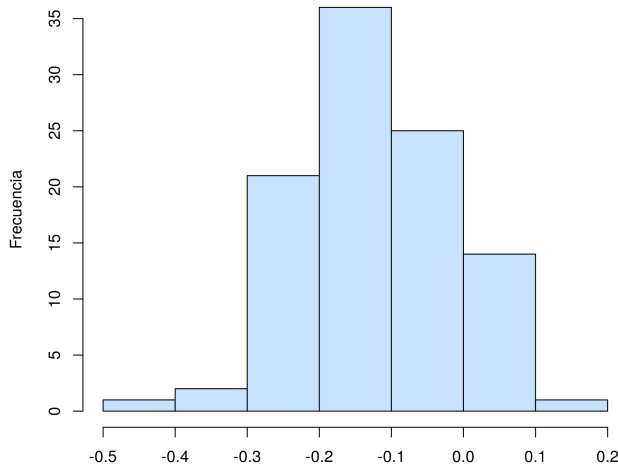
La ganancia promedio al jugar cien veces es de -0.08 y al jugar 10,000 veces de -0.1156. Se puede observar que este último resultado concuerda un poco mejor con el valor esperado de la ganancia.

Es claro que estos resultados pueden variar, por lo que se realizan réplicas del juego para observar cómo varía la ganancia promedio. Los resultados obtenidos para cien réplicas se muestran en la figura 1. La ganancia promedio se encuentra en su mayoría entre -0.1 y -0.2 cuando se juega cien veces y, entre -0.12 y -0.10 cuando se juega 10,000 veces. Es decir, los resultados se acercan al valor real.

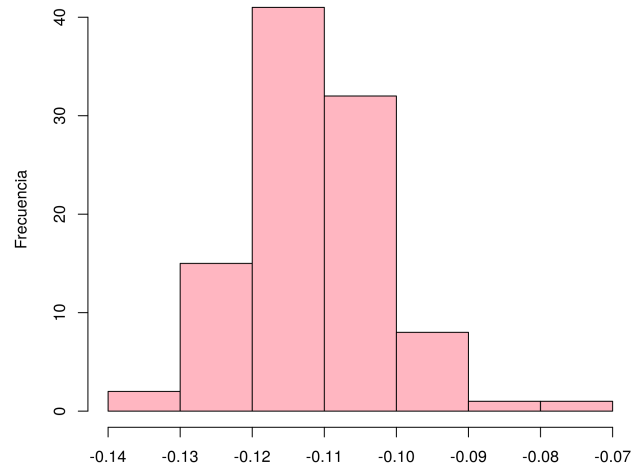
Ejercicio 15, página 249

A box contains two gold balls and three silver balls. You are allowed to choose successively balls from the box at random. You win 1 dollar each time you draw a gold ball and lose 1 dollar each time you draw a silver ball. After a draw, the ball is not replaced. Show that, if you draw until you are ahead by 1 dollar or until there are no more gold balls, this is a favorable game.

Previamente se determinó que el valor esperado jugando con las condiciones indicadas es 0.2. El



(a) $n = 100$



(b) $n = 10,000$

Figura 1: Ganancia promedio del juego de cartas.

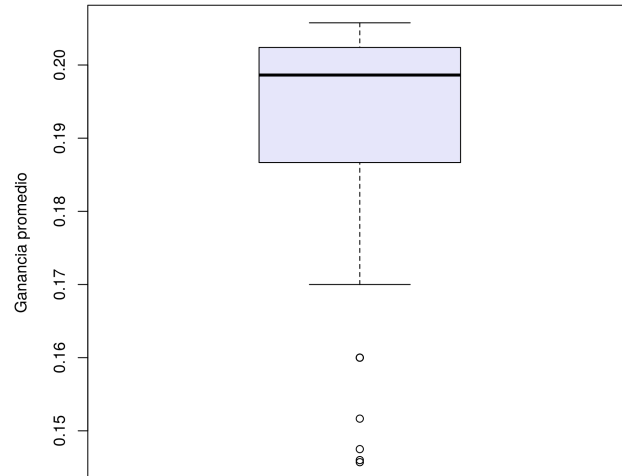


Figura 2: Diagrama de caja bigote de las ganancias obtenidas en cien réplicas del experimento.

experimento diseñado para apoyar ese resultado es el siguiente: se plantea un experimento donde se juega cien veces. Ya que la elección es al azar, un sólo resultado del experimento no aporta mucha información por lo que se realizan cien réplicas. Los resultados obtenidos de la ganancia promedio se muestran en el diagrama de caja bigote de la figura 2. Note que la media de las ganancias obtenidas en las distintas réplicas es muy cercana a 0.2, de esta forma se tiene evidencia numérica que respalda el resultado obtenido previamente.

Es interesante analizar qué tanto cambia el valor esperado al modificar las condiciones de juego. Suponga que ahora el jugador se retira cuando lleva una ventaja de 1 dólar o luego de sacar dos pelotas, ¿cuál es el valor esperado de las ganancias en este caso?.

Jugar con esas condiciones reduce el espacio muestral a tres casos: G , SG y SS , cada uno con probabilidad $2/5$, $3/10$ y $3/10$, respectivamente; donde G representa una pelota dorada y S una

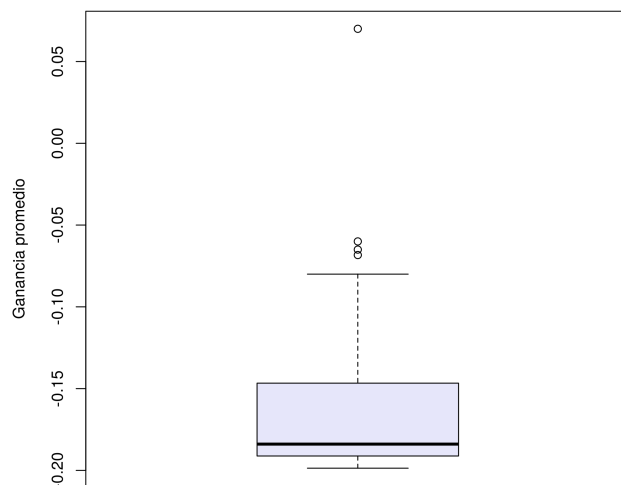


Figura 3: Ganancia promedio cuando el jugador se retira con una ventaja de 1 dólar o luego de sacar dos pelotas.

plata. El valor esperado es $E[X] = 1(2/5) + 0(3/20) - 2(3/10) = -1/5$.

Para responder a esta pregunta de forma numérica, se plantea el mismo experimento realizado previamente con la única diferencia de las condiciones de paro en el juego. Los resultados de la ganancia promedio se muestran en el diagrama de caja bigote de la figura 3. Se puede concluir que el juego ha dejado de ser favorable, ahora la media de las ganancias es muy cercana a -0.2. Nótese que el resultado se aproxima al analítico que se ha calculado anteriormente.

Ejercicio 18, página 249

Exactly one of six similar keys opens a certain door. If you try the keys, one after another, what is the expected number of keys that you will have to try before success?

La simulación de este problema sigue un criterio similar al planteado para los ejercicios anteriores. El experimento consiste en realizar la prueba de las llaves hasta llegar a la correcta un total de cien veces y se replica 500. El promedio de los intentos fallidos antes de llegar al correcto obtenido en los experimentos se muestra en el diagrama de caja bigote de la figura 4. La media de la simulación casi coincide con el valor analítico de 0.5.

Ejercicio 3, página 278

The lifetime, measure in hours, of the ACME super light bulb is a random variable T with density function $f_T(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$, where $\lambda = 0.05$. What is the expected lifetime of this light bulb? What is its variance?

La simulación para este ejercicio consiste en obtener cien lotes de 500 bombillas cada uno. La vida de cada una de estas bombillas debe ser tal que siga la distribución de densidad $f_T(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$. Para obtener un aproximado al valor esperado de la vida útil y la varianza, se calcula el promedio de vida de las bombillas y la varianza en cada lote, respectivamente.

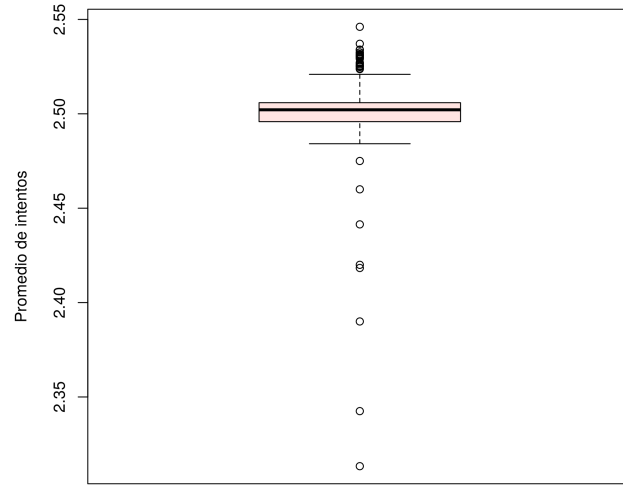


Figura 4: Promedio de intentos fallidos antes de encontrar la llave correcta.

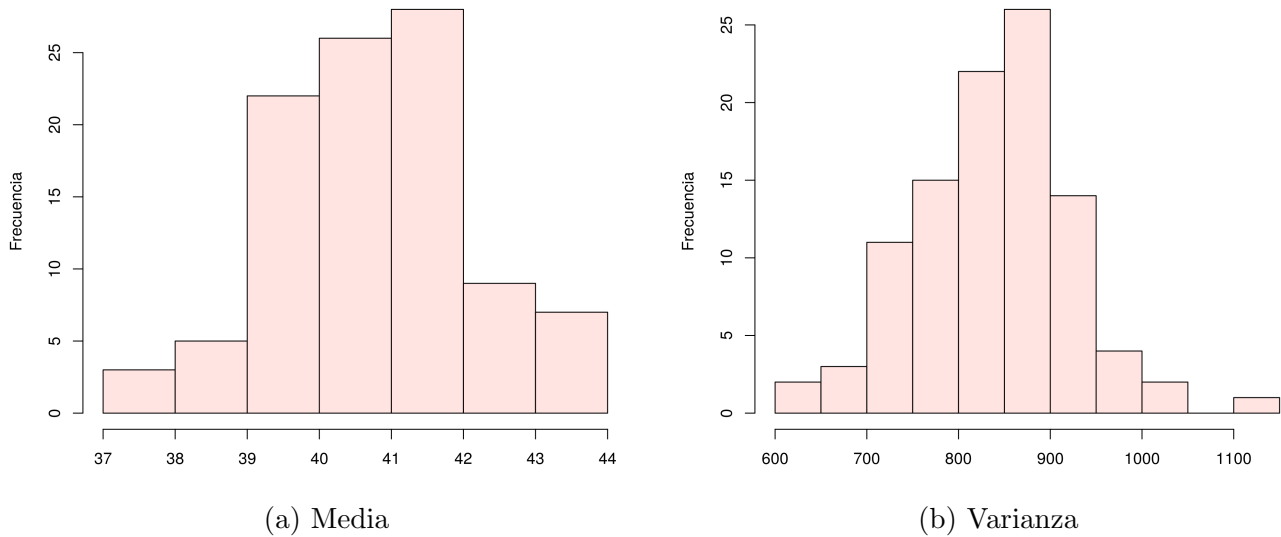


Figura 5: Media y varianza de la vida útil de la bombilla.

La figura 5 muestra los resultados obtenidos. En la figura 5a se muestra un histograma con las frecuencias en el promedio de vida útil en los distintos lotes, noté que en su mayoría se encuentran entre 39 y 42, bastante cercanos al valor exacto de 40. Por su parte, la figura 5b muestra que la varianza se encuentra en su mayoría entre 800 y 900. Recuerde que el valor analítico de la varianza es de 800, por lo que la simulación puede ayudar a respaldar dicho resultado.

Referencias

- [1] Selva Prabhakaran. R-statistics. <http://r-statistics.co/Statistical-Tests-in-R.html>.
- [2] Gabriela Sánchez Y. Modelos probabilistas aplicados. <https://github.com/Saphira3000/MPA>.

- [3] Gabriela Sánchez Y. Modelos probabilistas aplicados: tarea 9. <https://github.com/Saphira3000/MPA/blob/master/t9/t9.pdf>.