Indice

Capitolo 1

Insiemi

1.1 Concetti di base sugli insiemi

Un *insieme* è un raggruppamento di oggetti detti *elementi*, che possono essere di natura qualsiasi, Si dice che gli elementi di un insieme *appartengono* all'insieme.

Simboli

Per indicare gli insiemi si usano solitamente lettere maiuscole, come

$$A, B, C \dots$$

Per indicare gli elementi di un insieme si usano solitamente lettere minuscole $(a, b, c \dots)$ e per indicare che un elemento x appartiene all'insieme A scriviamo

$$x \in A \quad \text{oppure} \quad A \ni x$$

Rappresentazione

È possibile rappresentare un insieme elencando i suoi elementi, in caso questo sia finito. Ad esempio

$$A = \{1, 2, 5\}$$

significa che l'insieme A ha come elementi i numeri 1,2,5. In questo caso si dice che l'abbiamo definito *per tabulazione*.

Oppure è possibile rappresentare un insieme descrivendolo mediante una proprietà che lo caratterizzi univocamente. Ad esempio

$$X = \{n : n \text{ intero pari}\}$$

Un insieme privo di elementi viene detto *insieme vuoto* e viene indicato con il simbolo $\emptyset$.

Relazioni tra insiemi: inclusione

Definizione 1.1. *Si dice che un insieme X è un sottoinsieme di un insieme Y se ogni elemento di X appartiene ad Y. Si utilizza il simbolo di inclusione (larga) $X \subseteq Y$. Se X non coincide con Y, si usa il simbolo di inclusione stretta $X \subset Y$.*

Relazioni tra insiemi: uguaglianza

Due insiemi sono uguali quando possiedono gli stessi elementi. Siano X e Y due insiemi. Allora $X = Y$ se e solo se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

Operazioni insiemistiche

- *Unione.* L'unione di due insiemi X e Y è definita da:

  $$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ o } x \in Y\}$$

  È l'insieme degli elementi che appartengono sia al primo sia al secondo insieme.

- *Intersezione.* L'intersezione di due insiemi X e Y è definita da:

  $$X \cap Y = \{x : x \in X \text{ e } x \in Y\}$$

  È l'insieme degli elementi che appartengono al primo e al secondo insieme, intendendo la ”o” in modo non esclusivo.

- *Unione.* La differenza tra due insiemi X e Y è definita da:

  $$X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ e } x \notin Y\}$$

  È l'insieme degli elementi che appartengono al primo ma non al secondo insieme.

- *Complementare.* È un tipo particolare di differenza. Siano X e Y insiemi con $X \subseteq Y$. Si definisce insieme complementare di X in Y l'insieme $Y \setminus X$. Si indica con il simbolo X^C.

Proprietà delle operazioni insiemistiche

- *Proprietà dell'unione.*

  commutativa: $X \cup Y = Y \cup X$

  associativa: $/^{(}X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

  idempotenza: $X \cup X = X$

- *Proprietà dell'intersezione.*

  commutativa: $X \cap Y = Y \cap X$

  associativa: $/^{(}X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

  idempotenza: $X \cap X = X$

- *Proprietà distributive.*

  $$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$
  $$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

- *Formule di De Morgan.* Siano $A, B \subseteq X$ e denotiamo con A^C e B^C i loro insiemi complementari in X.

  $$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
  $$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

1.2 Insieme delle parti e prodotto cartesiano

Insieme delle parti

Dato un insieme X, si dice *insieme delle parti* di X l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X. Si indica con $\mathcal{P}^X$ o con 2^X. Ad esempio, si consideri l'insieme $X = \{1, 4, 5\}$:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{5\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{4,5\}, \{1,4,5\}\}$$

Se X è un insieme finito con n elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ è un insieme finito con 2^n elementi. Se X è un insieme infinito, allora anche $\mathcal{P}(X)$ è un insieme infinito.

Prodotto cartesiano

Si dice *coppia* un insieme ordinato di due elementi. Ad esempio:

$$\begin{aligned} \{3,7\} &= \{7,3\}: \text{ insieme non ordinato} \\ \{3,7\} &\neq \{7,3\}: \text{ insieme ordinato (coppia)} \end{aligned}$$

Dati due insiemi X e Y, il *prodotto cartesiano* di X e Y è l'insieme delle coppie (x, y) in cui $x \in X$ e $y \in Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

L'insieme dei numeri reali è indicato con $\mathbb{R}$, e il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ viene indicato con $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

1.3 Insiemi numerici fondamentali

$\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali (interi positivi, zero compreso)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali (sono frazioni di numeri interi)

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$$

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali

$\mathbb{I}$ insieme dei numeri irrazionali ($\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Capitolo 2

Funzioni

2.1 Il concetto di funzione

Definizione 2.1. *Siano $X, Y \neq \emptyset$. Si dice funzione da X in Y una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y. L'insieme X viene detto dominio della funzione mentre l'insieme Y viene detto codominio della funzione.*

Viene utilizzata la seguente notazione:

$$f : X \to Y \text{ (f definita da X a Y)} \qquad\qquad f : x \mapsto f(x) \text{ (f associa $f(x)$ ad x)}$$

Per ogni $x \in X$, l'elemento di Y che la funzione f fa corrispondere a x viene detto *immagine* di x mediante f e si indica con $f(x)$. La proprietà caratteristica di f, affinchè la si possa chiamare funzione, è l'*univocità* della corrispondenza: assegnato l'elemento in "ingresso" $a \in A$, l'elemento in "uscita" $b = f(a)$ dev'essere univocamente determinato.

Definizione 2.2. *Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \to Y$. Si dice grafico di F l'insieme*

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$$

Ossia, il grafico di una funzione f è l'insieme dei punti del piano di coordinate (x, y) con $y = f(x)$ e x variabile nel dominio D.

Definizione 2.3. *Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \to Y$. Siano rispettivamente $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Si dice immagine di A il sottoinsieme di Y costruito dalle imagini dei singoli elementi di A. Tale insieme viene denotato con $f(A)$. In altre parole si ha*

$$f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\} \subseteq Y$$

Si dice immagine inversa di B o controimmagine di B il sottoinsieme di X costituito da quegli elementi di X la cui immagine appartiene a B. Tale insieme viene denotato con $f^{-1}(B)$. In altre parole si ha

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$$

Definizione 2.4. *Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \to Y$. Sia inoltre $A \subseteq X$ insieme non vuoto. Si dice restrizione di f all'insieme A la funzione*

$$f_{|A} : A \to Y$$

Teorema 2.1. *Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \to Y$. Siano inoltre $A, B \subseteq X$ e $C, D \subseteq Y$. Valgono le seguenti conclusioni:*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f^{-1}(f(A)) \supset A$
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
5. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
6. $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

Definizione 2.5. *Siano X, Y, Z insiemi non vuoti. Siano $f : y \to Z$ e $g : X \to Y$. Viene detta composizione di f con g la funzione $f \circ g$ definita da*

$$f \circ g : X \to Z$$

Definizione 2.6. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Si dice che f è iniettiva se elementi distinti del dominio X hanno immagini distinte:*

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Definizione 2.7. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Si dice che f è suriettiva se ogni elemento del codominio Y è immagine di almeno un elemento del dominio X:*

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$

Definizione 2.8. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Si dice che f è biettiva (biiettiva o biunivoca) se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. In altre parole, si dice che f è biettiva se ogni elemento del codominio Y è immagine di esattamente un elemento del dominio X:*

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$$

Dato un insieme X non vuoto, indicheremo con $Id_X : X \to X$ la *funzione identità*, cioè quella funzione che ad ogni $x \in X$ associa se stesso:

$$Id_X(x) = x \forall x \in X$$

Definizione 2.9. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Si dice che f è invertibile se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che $f \circ g = Id_Y$ e $g \circ f = Id_X$. In altre parole si ha che:*

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y \qquad\qquad g(f(x)) = x \quad \forall x \in X$$

Se f è invertibile, una tale funzione g è unica e viene denominata funzione inversa di f. Si indica con il simbolo $f^{-1} : Y \to X$.

Teorema 2.2. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Allora f è invertibile se e solo se f è biettiva.*

Definizione 2.10. *Siano X e Y due insiemi non vuoti. Si dice che X e Y hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione $f : X \to Y$ biettiva.*

Non tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità. Gli insiemi con la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono *numerabili*. Gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili ed hanno quindi la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, nonostante $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile: ha una cardinalità di *ordine superiore* rispetto ad $\mathbb{N}$.

Capitolo 3

Insiemi in $\mathbb{R}$

3.1 Intervalli

Si dice *intervallo* un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale per cui ogni numero reale compreso tra due elementi di questo sottoinsieme appartiene al sottoinsieme medesimo.

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si definiscono i seguenti intervalli:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \qquad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Anche un insieme costituito da un solo numero reale va considerato un intervallo.

Definizione 3.1. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme nonn vuoto:*

1. *si dice che X è limitato superiormente se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che*
$$\forall x \in X \to x \leq a$$
2. *si dice che X è limitato inferiormente se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che*
$$\forall x \in X \to x \geq a$$
3. *si dice che X è limitato se è contemporaneamente limitato inferiormente e superiormente*

Definizione 3.2. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto:*

1. *si dice $a \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di X se*
$$\forall x \in X \to x \leq a$$
2. *si dice $a \in \mathbb{R}$ è un minorante di X se*
$$\forall x \in X \to x \geq a$$

Definizione 3.3. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto:*

1. *si dice che $a \in \mathbb{R}$ è un massimo ($maxX$) di X se a è un maggiorante di X e $a \in X$*
2. *si dice che $a \in \mathbb{R}$ è un minimo ($minX$) di X se a è un minorante di X e $a \in X$*

Se X ammette un massimo, tale massimo è unico. Analogamente, se X ammette un minimo, tale minimo è unico.

Definizione 3.4. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto:*

1. *si dice che $a \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore ($\sup X$) di X se a è il minimo dell'insieme dei maggioranti di X*
2. *si dice che $a \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore ($\inf X$) di X se a è il massimo dell'insieme dei minoranti di X*

Teorema 3.1 (Completezza di $\mathbb{R}$)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto:*

1. *se X è limitato superiormente, allora X ammette un estremo superiore*
2. *se X è limitato inferiormente, allora X ammette un estremo inferiore*

Capitolo 4

Limiti

4.1 Definizione di limite

Definizione 4.1. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia $R > 0$. Si dice intorno di x_0 di raggio R l'intervallo (x_0-R, x_0+R).*

Si ha che x appartiene all'intorno di raggio R se e soltanto se $|x - x_0| < R$.

Definizione 4.2. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale per cui esista $R > 0$ tale che*

$$X \supseteq (x_0 - R, x_0 + R) \setminus \{x_0\}$$

Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che ℓ è il limite di f per x che tende a x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

x_0 non deve necessariamente far parte del dominio della funzione.

Definizione 4.3. *Sia $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale per cui esista $R > 0$ tale che*

$$X \supseteq (x_0 - R, x_0 + R) \setminus \{x_0\}$$

1. *si dice che $+\infty$ è il limite di f per x che tende a x_0 se*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$$

2. *si dice che $-\infty$ è il limite di f per x che tende a x_0 se*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -M$$

Definizione 4.4. *Sia $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$.*

1. *Supponiamo che esista $a \in \mathbb{R}$ per cui si abbia*

$$X \supseteq (a, +\infty)$$

Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che ℓ è il limite di f per x che tende a $+\infty$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : x > N \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. *Supponiamo che esista* $a \in \mathbb{R}$ *per cui si abbia*

$$X \supseteq (-\infty, a)$$

Sia $f : X \to \mathbb{R}$. *Sia* $\ell \in \mathbb{R}$. *Si dice che* ℓ *è il limite di* f *per* x *che tende a* $-\infty$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : x < -N \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Definizione 4.5. *Sia* $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$.

1. *Supponiamo che esista* $a \in \mathbb{R}$ *per cui si abbia*

$$X \supseteq (a, +\infty)$$

Sia $f : X \to \mathbb{R}$. *Si dice che* $+\infty$ *è il limite di* f *per* x *che tende a* $+\infty$ *se*

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : x > N \implies f(x) > M$$

2. *Supponiamo che esista* $a \in \mathbb{R}$ *per cui si abbia*

$$X \supseteq (a, +\infty)$$

Sia $f : X \to \mathbb{R}$. *Si dice che* $-\infty$ *è il limite di* f *per* x *che tende a* $-\infty$ *se*

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : x > N \implies f(x) < -M$$

3. *Supponiamo che esista* $a \in \mathbb{R}$ *per cui si abbia*

$$X \supseteq (-\infty, a)$$

Sia $f : X \to \mathbb{R}$. *Si dice che* $+\infty$ *è il limite di* f *per* x *che tende a* $-\infty$ *se*

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : x < -N \implies f(x) > M$$

4. *Supponiamo che esista* $a \in \mathbb{R}$ *per cui si abbia*

$$X \supseteq (-\infty, a)$$

Sia $f : X \to \mathbb{R}$. *Si dice che* $-\infty$ *è il limite di* f *per* x *che tende a* $-\infty$ *se*

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : x < -N \implies f(x) < -M$$

4.2 Limite destro e limite sinistro

Definizione 4.6 (Limite destro)**.** *Sia* $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$. *Sia* x_0 *tale per cui esista* $R > 0$ *tale che*

$$X \supseteq (x_0 x, x_0 + R) \quad (X \text{ contiene un intorno destro di } x_0)$$

1. *Sia* $\ell \in \mathbb{R}$. *Si dice che* ℓ *è il limite destro di* f *per* x *che tende a* x_0 *da destra se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. *Si dice che* $+\infty$ *è il limite destro di* f *per* x *che tende a* x_0 *da destra se*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies f(x) > M$$

3. *Si dice che* $-\infty$ *è il limite destro di* f *per* x *che tende a* x_0 *da destra se*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies f(x) < -M$$

Definizione 4.7 (Limite sinistro)**.** *Sia* $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$. *Sia* x_0 *tale per cui esista* $R > 0$ *tale che*

$$X \supseteq (x_0 x, x_0 + R) \quad (X \text{ contiene un intorno destro di } x_0)$$

1. *Sia* $\ell \in \mathbb{R}$. *Si dice che* ℓ *è il limite sinistro di* f *per* x *che tende a* x_0 *da destra se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. *Si dice che* $+\infty$ *è il limite sinistro di* f *per* x *che tende a* x_0 *da destra se*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies f(x) > M$$

3. *Si dice che* $-\infty$ *è il limite sinistro di* f *per* x *che tende a* x_0 *da destra se*

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies f(x) < -M$$

Teorema 4.1. *Sia* $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$. *Sia* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tale per cui esista* $R > 0$ *tale che*

$$X \supseteq (x_0 - R, x_0 + R) \setminus \{x_0\}$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

esiste se e solo se esistono e coincidono tra di loro

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad\qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

4.3 Operazioni tra limiti

Teorema 4.2. *Sia* $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. *Sia* $f : X \to \mathbb{R}$. *Supponiamo che le funzioni* f *e* g *ammettano limiti finiti. Allora si ha:*

1. $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$

2. $\lim_{x \to x_0}(f(x) - g(x)) = \ell_1 - \ell_2$

3. $\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$

4. *se* $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x)$

5. *se* $g(x) \neq 0$ *e* $\ell_2 \neq 0$, $\lim_{x \to x_0}(f(x)/g(x)) = \ell_1/\ell_2$

4.4 Cambiamento di variabile e continuità

Teorema 4.3 (Cambiamento di variabile)**.** *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ insiemi non vuoti e siano date due funzioni $f : Y \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$. Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e sia $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tali che si abbia*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \qquad\qquad \lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$$

Supponiamo inoltre che $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \in X \setminus \{x_0\}$. Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell$$

Supponiamo di dover calcolare un limite che si presenta nella forma:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x))$$

Si introduce una nuova variabile $y = g(x)$:

$$x \to x_0 \implies y = g(x) \to y_0 \implies y \to y_0$$

sostituisco $g(x)$ con y nel limite:

$$\lim_{y \to y_0} f(y)$$

Definizione 4.8 (Continuità)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : X \to \mathbb{R}$. Dato $x_0 \in X$ si dice che f è continua in x_0 se vale la seguente condizione:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Si dice che f è continua su $A \subseteq X$ se è continua in ogni punto di A.

Se x_0 e X sono tali per cui esiste $R > 0$ per cui $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq X$ allora f è continua in x_0 se e soltanto se $\lim_{x \to x_0} f(x) = s(x_0)$.

Le funzioni elementari sono continue in ogni punto del loro dominio naturale.

Teorema 4.4 (Teorema del confronto)**.** *Sia $X \subset \mathbb{R}$ e siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ tali che*

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in X$$

Supponiamo che esistano, finiti o infiniti, i limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad\qquad \lim_{x \to x_0} g(x)$$

con $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite si deduce che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

Posto $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ per ogni $x \in X$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha:

$$|f(x) - \ell_1| < \varepsilon \implies \ell_1 - \varepsilon < f(x) < \ell_1 + \varepsilon$$
$$|g(x) - \ell_2| < \varepsilon \implies \ell_2 - \varepsilon < g(x) < \ell_2 + \varepsilon$$

ed in particolare si ottiene

$$\ell_1 - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < \ell_2 + \varepsilon \implies \ell_1 - \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon \implies \ell_1 - \ell_2 < 2\varepsilon \implies \ell_1 \leq \ell_2$$

□

Teorema 4.5 (Teorema dei due Carabinieri). *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f : X \to \mathbb{R}, g : X \to \mathbb{R}, h : X \to \mathbb{R}$ tali che*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in X$$

Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

e sia $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ il valore comune di questi due limiti. Allora anche f ammette limite per $x \to x_0$ ed inoltre

$$lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite si deduce che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \implies |g(x) - \ell| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \implies |h(x) - \ell| < \varepsilon$$

Posto $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ per ogni $x \in X$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha:

$$|g(x) - \ell| < \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$$
$$|h(x) - \ell| < \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$$

ed in particolare si ottiene

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

□

4.5 Relazione di asintotico e asintoti

Definizione 4.9. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f : X \to \mathbb{R}, g : X \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tale che X contenga $U \setminus \{x_0\}$ con U intorno di x_0. Supponiamo che $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in X \setminus \{x_0\}$. Si dice che $f(x)$ è asintotica a $g(x)$ per $x \to x_0$ se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Si usa la notazione

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0$$

Si tratta di una relazione di equivalenza poichè possiede la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

- proprietà riflessiva: $f(x) \sim f(x)$ per $x \to x_0$
- proprietà simmetrica: se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$, allora per $g(x) \sim f(x)$ per $x \to x_0$
- proprietà transitiva: se $f(x) \sim g(x)$ e $g(x) \sim h(x)$ per $x \to x_0$, allora $f(x) \sim h(x)$ per $x \to x_0$

Nel calcolo dei limiti si potrà sostituire in alcune situazioni una funzione con un'altra ad essa asintotica.

Le funzioni asintotiche si possono sostituire solo in presenza di moltiplicazione e divisione.

4.5.1 Asintoti

Asintoto verticale

Si dice che una funzione f possiede un asintoto vertical in x_0 se almeno uno tra

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

esiste ed è infinito. In tal caso, si dice che la retta verticale di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale per f.

Asintoto orizzontale

Si dice che una funzione f possiede un asintoto orizzontale a $+\infty$ se esiste ed è finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

In tal caso si dice che la retta orizzontale di equazione $y = \ell$ è un asintoto orizzontale per f a $+\infty$.

Analogamente si parla di asintoto orizzontale a $-\infty$ se esiste ed è finito

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

In tal caso si dice che la retta orizzontale di equazione $y = \ell$ è un asintoto orizzontale per f a $-\infty$.

Asintoto obliquo

Si dice che una funzione f possiede un asintoto obliquo a $+\infty$ se esistono e sono finiti i seguenti limiti

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

In tal caso si dice che la retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto orizzontale per f a $+\infty$.

4.6 Successioni

Sia X un insieme non vuoto. Una funzione $a : \mathbb{N} \to X$ viene detta successione. Quando $X = \mathbb{R}$ si parla di successioni reali o successioni in $\mathbb{R}$.

Definizione 4.10. *Sia $\{a_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$.*

1. *Si dice che $\ell \in \mathbb{R}$ è il limite di $\{a_n\}$ per $n \to +\infty$ se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies |a_n - \ell| < \varepsilon$$

   Si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$$

2. *Si dice che $+\infty$ è il limite di $\{a_n\}$ per $n \to +\infty$ se*

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies a_n > M$$

   Si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

3. *Si dice che* $-\infty$ *è il limite di* $\{a_n\}$ *per* $n \to +\infty$ *se*

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies a_n < -M$$

Si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

Le tecniche di calcolo dei limiti delle successioni sono essentialmente le stesse che si usano per il calcolo dei limiti per $x \to +\infty$ nel caso delle funzioni di variabile reale.

Anche nelle successioni è possibile definire relazioni di asintotico: date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ con $a_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si dice che

$$a_n \sim b_n \qquad \text{per } n \to +\infty \qquad \text{se } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Capitolo 5

Continuità

Definizione 5.1 (Continuità)**.** *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f : X \to \mathbb{R}$. Dato $x_0 \in X$ si dice che f è continua in x_0 se vale la seguente condizione:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Si dice che f è continua su $A \subseteq X$ se è continua in ogni punto di A.

Teorema 5.1. *Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ insieme non vuoto e siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$. Supponiamo che f e g siano continue in un punto $x_0 \in X$. Allora valgono le seguenti:*

1. *$f + g$ è continua in x_0*
2. *$f - g$ è continua in x_0*
3. *$f \cdot g$ è continua in x_0*
4. *se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in X$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0*

Teorema 5.2 (Continuità delle funzioni composte)**.** *Siano $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ insiemi non vuoti e siano $f : Y \to \mathbb{R}$ e $g : X \to Y$. Supponiamo che g sia continua in un punto $x_0 \in X$ e che f sia continua in $y_0 = g(x_0) \in Y$. Allora la funzione composta $f \circ g : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.*

Definizione 5.2 (Massimo e minimo di una funzione)**.** *Sia X insieme non vuoto e sia*

$$f : X \to \mathbb{R}$$

1. *Si dice che f ammette massimo in X se l'insieme $f(X)$ ammette massimo. Si pone inoltre*

$$\max_{x \in X} f(x) = \max(f(X))$$

2. *Si dice che f ammette minimo in X se l'insieme $f(X)$ ammette massimo. Si pone inoltre*

$$\min_{x \in X} f(x) = \min(f(X))$$