

Indice

1	Insiemi	1
1.1	Concetti di base sugli insiemi	1
1.2	Insieme delle parti e prodotto cartesiano	3
1.3	Insiemi numerici fondamentali	3
2	Funzioni	5
2.1	Il concetto di funzione	5

Capitolo 1

Insiemi

1.1 Concetti di base sugli insiemi

Un *insieme* è un raggruppamento di oggetti detti *elementi*, che possono essere di natura qualsiasi, Si dice che gli elementi di un insieme *appartengono* all'insieme.

Simboli

Per indicare gli insiemi si usano solitamente lettere maiuscole, come

$$A, B, C \dots$$

Per indicare gli elementi di un insieme si usano solitamente lettere minuscole ($a, b, c \dots$) e per indicare che un elemento x appartiene all'insieme A scriviamo

$$x \in A \quad \text{oppure} \quad A \ni x$$

Rappresentazione

È possibile rappresentare un insieme elencando i suoi elementi, in caso questo sia finito. Ad esempio

$$A = \{1, 2, 5\}$$

significa che l'insieme A ha come elementi i numeri 1,2,5. In questo caso si dice che l'abbiamo definito *per tabulazione*.

Oppure è possibile rappresentare un insieme descrivendolo mediante una proprietà che lo caratterizzi univocamente. Ad esempio

$$X = \{n : n \text{ intero pari}\}$$

Un insieme privo di elementi viene detto *insieme vuoto* e viene indicato con il simbolo \emptyset .

Relazioni tra insiemi: inclusione

Definizione. Si dice che un insieme X è un sottoinsieme di un insieme Y se ogni elemento di X appartiene ad Y . Si utilizza il simbolo di inclusione (larga) $X \subseteq Y$. Se X non coincide con Y , si usa il simbolo di inclusione stretta $X \subset Y$.

Relazioni tra insiemi: uguaglianza

Due insiemi sono uguali quando possiedono gli stessi elementi. Siano X e Y due insiemi. Allora $X = Y$ se e solo se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

Operazioni insiemistiche

- *Unione.* L'unione di due insiemi X e Y è definita da:

$$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ o } x \in Y\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono sia al primo sia al secondo insieme.

- *Intersezione.* L'intersezione di due insiemi X e Y è definita da:

$$X \cap Y = \{x : x \in X \text{ e } x \in Y\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono al primo e al secondo insieme, intendendo la "o" in modo non esclusivo.

- *Unione.* La differenza tra due insiemi X e Y è definita da:

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ e } x \notin Y\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono al primo ma non al secondo insieme.

- *Complementare.* È un tipo particolare di differenza. Siano X e Y insiemi con $X \subseteq Y$. Si definisce insieme complementare di X in Y l'insieme $Y \setminus X$. Si indica con il simbolo X^C .

Proprietà delle operazioni insiemistiche

- *Proprietà dell'unione.*

commutativa: $X \cup Y = Y \cup X$

associativa: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

idempotenza: $X \cup X = X$

- *Proprietà dell'intersezione.*

commutativa: $X \cap Y = Y \cap X$

associativa: $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

idempotenza: $X \cap X = X$

- *Proprietà distributive.*

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

- *Formule di De Morgan.* Siano $A, B \subseteq X$ e denotiamo con A^C e B^C i loro insiemi complementari in X .

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

1.2 Insieme delle parti e prodotto cartesiano

Insieme delle parti

Dato un insieme X , si dice *insieme delle parti* di X l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X . Si indica con \mathcal{P}^X o con 2^X . Ad esempio, si consideri l'insieme $X = \{1, 4, 5\}$:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 4, 5\}\}$$

Se X è un insieme finito con n elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ è un insieme finito con 2^n elementi. Se X è un insieme infinito, allora anche $\mathcal{P}(X)$ è un insieme infinito.

Prodotto cartesiano

Si dice *coppia* un insieme ordinato di due elementi. Ad esempio:

$$\begin{aligned} \{3, 7\} &= \{7, 3\} : \text{insieme non ordinato} \\ \{3, 7\} &\neq \{7, 3\} : \text{insieme ordinato (coppia)} \end{aligned}$$

Dati due insiemi X e Y , il *prodotto cartesiano* di X e Y è l'insieme delle coppie (x, y) in cui $x \in X$ e $y \in Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

L'insieme dei numeri reali è indicato con \mathbb{R} , e il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ viene indicato con \mathbb{R}^2 .

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

1.3 Insiemi numerici fondamentali

\mathbb{N} insieme dei numeri naturali (interi positivi, zero compreso)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

\mathbb{Z} insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

\mathbb{Q} insieme dei numeri razionali (sono frazioni di numeri interi)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

\mathbb{R} insieme dei numeri reali

\mathbb{I} insieme dei numeri irrazionali ($\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Capitolo 2

Funzioni

2.1 Il concetto di funzione

Definizione. Siano $X, Y \neq \emptyset$. Si dice *funzione da X in Y* una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y . L'insieme X viene detto *dominio della funzione* mentre l'insieme Y viene detto *codominio della funzione*.

Viene utilizzata la seguente notazione:

$$f : X \rightarrow Y \text{ (} f \text{ definita da } X \text{ a } Y\text{)} \qquad f : x \mapsto f(x) \text{ (} f \text{ associa } f(x) \text{ ad } x\text{)}$$

Per ogni $x \in X$, l'elemento di Y che la funzione f fa corrispondere a x viene detto *immagine* di x mediante f e si indica con $f(x)$. La proprietà caratteristica di f , affinché la si possa chiamare funzione, è l'*univocità* della corrispondenza: assegnato l'elemento in "ingresso" $a \in A$, l'elemento in "uscita" $b = f(a)$ dev'essere univocamente determinato.

Definizione. Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \rightarrow Y$. Si dice *grafico di f* l'insieme

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$$

Ossia, il grafico di una funzione f è l'insieme dei punti del piano di coordinate (x, y) con $y = f(x)$ e x variabile nel dominio D .

Definizione. Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \rightarrow Y$. Siano rispettivamente $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Si dice *immagine di A* il sottoinsieme di Y costruito dalle immagini dei singoli elementi di A . Tale insieme viene denotato con $f(A)$. In altre parole si ha

$$f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\} \subseteq Y$$

Si dice *immagine inversa di B* o *controimmagine di B* il sottoinsieme di X costituito da quegli elementi di X la cui immagine appartiene a B . Tale insieme viene denotato con $f^{-1}(B)$. In altre parole si ha

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$$

Definizione. Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \rightarrow Y$. Sia inoltre $A \subseteq X$ insieme non vuoto. Si dice *restrizione di f all'insieme A* la funzione

$$f|_A : A \rightarrow Y$$

Teorema. Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \rightarrow Y$. Siano inoltre $A, B \subseteq X$ e $C, D \subseteq Y$. Valgono le seguenti conclusioni:

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f^{-1}(f(A)) \supset A$
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
5. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
6. $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita $f(x) = x^2$