Indice

Capitolo 1

Insiemi

1.1 Concetti di base sugli insiemi

Un *insieme* è un raggruppamento di oggetti detti *elementi*, che possono essere di natura qualsiasi, Si dice che gli elementi di un insieme *appartengono* all'insieme.

Simboli

Per indicare gli insiemi si usano solitamente lettere maiuscole, come

$$A, B, C \dots$$

Per indicare gli elementi di un insieme si usano solitamente lettere minuscole $(a, b, c \dots)$ e per indicare che un elemento x appartiene all'insieme A scriviamo

$$x \in A \quad \text{oppure} \quad A \ni x$$

Rappresentazione

È possibile rappresentare un insieme elencando i suoi elementi, in caso questo sia finito. Ad esempio

$$A = \{1, 2, 5\}$$

significa che l'insieme A ha come elementi i numeri 1,2,5. In questo caso si dice che l'abbiamo definito *per tabulazione*.

Oppure è possibile rappresentare un insieme descrivendolo mediante una proprietà che lo caratterizzi univocamente. Ad esempio

$$X = \{n : n \text{ intero pari}\}$$

Un insieme privo di elementi viene detto *insieme vuoto* e viene indicato con il simbolo $\emptyset$.

Relazioni tra insiemi: inclusione

Definizione. *Si dice che un insieme X è un sottoinsieme di un insieme Y se ogni elemento di X appartiene ad Y. Si utilizza il simbolo di inclusione (larga) $X \subseteq Y$. Se X non coincide con Y, si usa il simbolo di inclusione stretta $X \subset Y$.*

Relazioni tra insiemi: uguaglianza

Due insiemi sono uguali quando possiedono gli stessi elementi. Siano X e Y due insiemi. Allora $X = Y$ se e solo se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

Operazioni insiemistiche

- *Unione.* L'unione di due insiemi X e Y è definita da:

$$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ o } x \in Y\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono sia al primo sia al secondo insieme.

- *Intersezione.* L'intersezione di due insiemi X e Y è definita da:

$$X \cap Y = \{x : x \in X \text{ e } x \in Y\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono al primo e al secondo insieme, intendendo la "o" in modo non esclusivo.

- *Unione.* La differenza tra due insiemi X e Y è definita da:

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ e } x \notin Y\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono al primo ma non al secondo insieme.

- *Complementare.* È un tipo particolare di differenza. Siano X e Y insiemi con $X \subseteq Y$. Si definisce insieme complementare di X in Y l'insieme $Y \setminus X$. Si indica con il simbolo X^C.

Proprietà delle operazioni insiemistiche

- *Proprietà dell'unione.*

$$\begin{aligned}
&\text{commutativa: } X \cup Y = Y \cup X \\
&\text{associativa: } /^{(}X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \\
&\text{idempotenza: } X \cup X = X
\end{aligned}$$

- *Proprietà dell'intersezione.*

$$\begin{aligned}
&\text{commutativa: } X \cap Y = Y \cap X \\
&\text{associativa: } /^{(}X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \\
&\text{idempotenza: } X \cap X = X
\end{aligned}$$

- *Proprietà distributive.*

$$\begin{aligned}
&X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \\
&X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)
\end{aligned}$$

- *Formule di De Morgan.* Siano $A, B \subseteq X$ e denotiamo con A^C e B^C i loro insiemi complementari in X.

$$\begin{aligned}
&(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \\
&(A \cap B)^C = A^C \cup B^C
\end{aligned}$$

1.2 Insieme delle parti e prodotto cartesiano

Insieme delle parti

Dato un insieme X, si dice *insieme delle parti* di X l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X. Si indica con $\mathcal{P}^X$ o con 2^X. Ad esempio, si consideri l'insieme $X = \{1, 4, 5\}$:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 4, 5\}\}$$

Se X è un insieme finito con n elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ è un insieme finito con 2^n elementi. Se X è un insieme infinito, allora anche $\mathcal{P}(X)$ è un insieme infinito.

Prodotto cartesiano

Si dice *coppia* un insieme ordinato di due elementi. Ad esempio:

$$\begin{aligned} \{3, 7\} = \{7, 3\} &: \text{ insieme non ordinato} \\ \{3, 7\} \neq \{7, 3\} &: \text{ insieme ordinato (coppia)} \end{aligned}$$

Dati due insiemi X e Y, il *prodotto cartesiano* di X e Y è l'insieme delle coppie (x, y) in cui $x \in X$ e $y \in Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

L'insieme dei numeri reali è indicato con $\mathbb{R}$, e il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ viene indicato con $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

1.3 Insiemi numerici fondamentali

$\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali (interi positivi, zero compreso)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali (sono frazioni di numeri interi)

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$$

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali

$\mathbb{I}$ insieme dei numeri irrazionali ($\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Capitolo 2

Funzioni

Definizione. *Siano* $X, Y \neq \emptyset$. *Si dice funzione da* X *in* Y *una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di* X *uno ed un solo elemento di* Y. *L'insieme* X *viene detto dominio della funzione mentre l'insieme* Y *viene detto codominio della funzione.*

Viene utilizzata la seguente notazione:

$$f : X \to Y \qquad\qquad x \mapsto f(x)$$

Per ogni $x \in X$, l'elemento di Y che la funzione f fa corrispondere a x viene detto *immagine* di x mediante f e si indica con $f(x)$.