

Indice

1	Grafi come strutture dati	1
1.1	Introduzione e terminologia	1
1.2	Rappresentazione	1
1.2.1	Lista di archi	2
1.2.2	Liste di adiacenza	2
1.2.3	Liste di incidenza	2
1.2.4	Matrici di adiacenza	2
1.2.5	Matrici di incidenza	2
2	Visite	2
2.1	Visita generica	2
2.1.1	Inizializzazione	2
2.1.2	Invarianti	3
2.1.3	Predecessori	3
2.1.4	Gestione dei vertici grigi	4
2.1.5	Complessità	5
2.2	Visita in ampiezza	5
2.2.1	Inizializzazione	5
2.2.2	Albero di visita	6
2.2.3	Proprietà	6
2.2.4	Dimostrazione $d[v] = \delta(s, v)$	6
2.2.5	Distanza nell'albero BFS	7
2.3	Visita in profondità	7
2.3.1	Inizializzazione	7
2.3.2	Caratteristiche dell'albero DFS	7
2.3.3	Teorema delle parentesi e corollari	8
3	Aciclicità	8
3.1	Grafi orientati	8
3.2	Grafi non orientati	9
3.3	Test di aciclicità	9
4	Ordinamento topologico	10
4.1	Raggiungibilità	10
4.2	Ordine topologico	10
4.2.1	Algoritmo astratto	10
4.2.2	Ordinamento topologico basato su DFS	10
5	Componenti connesse e fortemente connesse	11
5.1	Componenti connesse	11
5.2	Componenti fortemente connesse	12
6	Tecnica greedy	14
6.1	Problemi	14
6.2	Problema dello zaino frazionario	14
6.2.1	Definizione	14
6.2.2	Formalizzazione	14

Algoritmi

1	INIZIALIZZA(G)	2
2	VISITA(G,s)	3
3	VISITA(G,s)	3
4	VISITA TUTTI I VERTICI(G)	4
5	VISITA(G,s)	4
6	VISITA BFS(G,s)	5
7	VISITA DFS (ottimizzata)	7
8	VISITA DFS RICORSIVA(G,u)	7
9	CICLICO(G)	9
10	VISITA RICORSIVA CICLO(G,u)	9
11	TOPOLOGICAL SORT(G)	11
12	TOPOLOGICAL DFS(G,u,ord,t)	11
13	COMPONENTI CONNESSE(G)	12
14	CONNESSIONE(G)	12

1 Grafi come strutture dati

1.1 Introduzione e terminologia

Un grafo è una coppia di elementi (insiemi) $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ e consiste in:

- un insieme V di **vertici** (o **nodi**)
- un insieme E (E sottoinsieme del prodotto cartesiano $V \times V$) di coppie di vertici, detti **archi** o **spigoli**; ogni arco connette due vertici

I grafi possono essere:

- **orientati**: relazioni asimmetriche, insieme di coppie ordinate
- **non orientati**: relazioni simmetriche, insieme di coppie non ordinate

Un arco è **incidente** per i nodi che si toccano.

Il **grado** di un vertice è dato dal numero di archi incidenti.

Un vertice B è **adiacente** ad A se da B si può percorrere un solo arco e giungere ad A .

Un **sottografo** è una porzione di grafo (notazione $H \subseteq G$): i vertici di H sono sottoinsieme dei vertici di G e gli archi di H sono sottoinsieme degli archi di G .

Un **cammino** è una sequenza ordinata di archi che collegano due nodi. I cammini devono rispettare l'orientamento degli archi. La **lunghezza** è il numero di archi di cui è composto un cammino.

Un cammino si dice **semplice** se non passa due volte per lo stesso vertice. Se esiste almeno un cammino p tra i vertici v e w , si dice che w è **raggiungibile** da v . Inoltre v è un **antenato** di w e w è un **discendente** di v .

Un cammino tra due nodi v e w si dice **minimo** se tra v e w non esiste nessun altro cammino di lunghezza minore. La lunghezza del cammino minimo è detta **distanza** ($\delta(v, w)$).

Un grafo può essere **pesato**. La funzione peso è definita come $W : E \rightarrow \mathbb{R}$; per ogni arco $(v, w) \in E$, $W(v, w)$ definisce il **peso** di (v, w) . In un grafo pesato, la lunghezza/peso di un cammino si calcola sommando i pesi degli archi che contiene.

I grafi non orientati possono essere:

- **connessi**: esiste un cammino da ogni vertice verso ogni altro vertice
- **non connessi**

I grafi orientati possono essere:

- **fortemente connessi**: esiste un cammino da ogni vertice verso ogni altro vertice
- **debolmente connessi**: ignorando il verso degli archi

Un cammino $\langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$ si dice **chiuso** se $w_1 = w_n$. Un cammino chiuso, semplice, di lunghezza almeno 1 si dice **ciclo**. Se un grafo non contiene cicli, si dice **aciclico**.

Un **grafo completo** è un grafo con un arco per ogni coppia di vertici. Un grafo completo ha numero di archi E pari a $|E| = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$.

Un grafo non orientato, connesso e aciclico è definito **albero libero**. Se un vertice è designato ad essere radice, si definisce **albero radicato**. Un grafo non orientato, aciclico ma non connesso è definito **foresta**.

1.2 Rappresentazione

Per valutare un approccio di rappresentazione, bisogna considerare lo **spazio** occupato dalla struttura dati e il **costo computazionale** delle operazioni da effettuare su di essa.

1.2.1 Lista di archi

Dati n (numero di vertici) e m (numero di archi), lo spazio occupato è $\mathcal{O}(n+m)$: è una rappresentazione inefficiente, in quanto bisogna percorrere tutto il grafo per scandire la lista di archi. Introdurre un vertice o arco ha costo $\mathcal{O}(1)$, ma la rimozione ha costo $\mathcal{O}(m)$.

1.2.2 Liste di adiacenza

Ogni vertice v ha una lista contenente i vertici ad esso adiacenti. Calcolare il grado di un vertice è un'operazione semplice, in quanto basta scorrere la lista di adiacenza. Occupa spazio $\mathcal{O}(n+m)$, ed è adatta per grafi **sparsi** (il numero di archi è molto minore del numero di vertici).

1.2.3 Liste di incidenza

Ogni vertice v ha una lista contenente un riferimento agli archi ad esso incidenti. Occupa spazio $\mathcal{O}(n+m)$.

1.2.4 Matrici di adiacenza

Il grafo è rappresentato tramite una matrice di interi di grandezza $n \times n$ (spazio occupato $\mathcal{O}(n^2)$); è adatta per grafi **densi**. Calcolare il grado e archi incidenti ha costo $\mathcal{O}(n)$ (basta scorrere la matrice). La modifica dei vertici ha costo $\mathcal{O}(n^2)$ in quanto bisogna ricostruire completamente la matrice. Una matrice di adiacenza rappresenta anche la presenza di un cammino di lunghezza 1 tra ogni coppia di vertici v e w . In particolare, $v \rightarrow_1 w$ se e solo se $M[v, w] \neq 0$: moltiplicando la matrice per sè stessa, il risultato è diverso da 0 solo se esiste un cammino di lunghezza 2 (e via dicendo).

1.2.5 Matrici di incidenza

Il grafo è rappresentato tramite una matrice di interi di grandezza $n \times m$ (spazio occupato $\mathcal{O}(n \times m)$), in cui le righe indicizzano i vertici e le colonne indicizzano gli archi.

2 Visite

2.1 Visita generica

Una **visita** di un grafo G permette di esaminare i nodi e gli archi in maniera sistematica, senza passare due volte per lo stesso nodo.

2.1.1 Inizializzazione

Una tattica per evitare di visitare un nodo più volte è quella di mappare lo stato della visita ad un colore:

- **bianco** (o **nodi inesplorati**): vertice non ancora esplorato
- **grigio** (o **nodi aperti**): vertice visitato, ma con nodi adiacenti ancora inesplorati
- **nero** (o **nodi chiusi**): vertice visitato, con adiacenti esplorati

Dati n nodi, si utilizza un vettore *color* di colori, di grandezza n : all'inizio della visita, tutte le celle del vettore *color* sono impostate a *white*.

Algoritmo 1 INIZIALIZZA(G)

```
color  $\leftarrow$  vettore di lunghezza  $n$   
for ogni  $u \in V$  do
```

```
    color[u] ← white
end for
```

La visita parte da un nodo s , detto **nodo sorgente**.

Algoritmo 2 VISITA(G,s)

```
INIZIALIZZA( $G$ )
color ← gray
{visita  $s$ }
while ci sono vertici grigi do
     $u$  ← scegli un vertice grigio
    if esiste  $v$  bianco adiacente ad  $u$  then
        color[v] ← gray
        {visita  $v$ }
    else color[v] ← black
    end if
end while
```

Il cambiamento di colore è **monotono** (bianco \rightarrow grigio \rightarrow nero).

2.1.2 Invarianti

Un'**invariante** è una condizione che è verificabile come vera sia all'inizio sia alla fine di un ciclo:

- Invariante 1: se esiste un arco $(u, v) \in E$ ed u è nero, allora v è grigio o nero
- Invariante 2: tutti i vertici grigi o neri sono raggiungibili dalla sorgente
- Invariante 3: qualunque cammino dalla sorgente ad un vertice bianco deve contenere almeno un vertice grigio

Teorema. *Al termine dell'algoritmo di visita, v è nero se e solo se v è raggiungibile dalla sorgente.*

Dimostrazione. Per l'invariante 2, all'uscita dal ciclo tutti i vertici neri sono raggiungibili da s . Dall'invariante 3 si ricava che tra s e v esiste almeno un vertice grigio, oppure v non è bianco. Dato che la condizione di uscita dal ciclo è quella che non esistano più vertici grigi, si ricava che v non è bianco (cambiamento monotono) e non può essere grigio. Quindi, all'uscita dal ciclo, tutti i vertici raggiungibili dalla sorgente sono neri. \square

2.1.3 Predecessori

L'algoritmo può essere modificato in modo da ricordare, per ogni vertice che viene scoperto, quale vertice grigio ha permesso di scoprirlo, ossia ricordare l'arco percorso. Ad ogni vertice u si associa un attributo $\pi[u]$ che rappresenta il vertice che ha permesso di scoprirlo.

Algoritmo 3 VISITA(G,s)

```
INIZIALIZZA( $G$ )
color ← gray
{visita  $s$ }
while ci sono vertici grigi do
```

```

     $u \leftarrow$  scegli un vertice grigio
    if esiste  $v$  bianco adiacente ad  $u$  then
         $\text{color}[v] \leftarrow \text{gray}$ 
         $\pi[v] \leftarrow u$ 
        {visita  $v$ }
    else  $\text{color}[v] \leftarrow \text{black}$ 
    end if
end while

```

Proprietà. Al termine dell'esecuzione di $\text{VISITA}(G,s)$, tutti e soli i vertici neri diversi da s hanno predecessore diverso da NULL .

Il sottografo dei predecessori è un albero (**albero dei predecessori**) di radice s .
 Se il grafo non è connesso:

Algoritmo 4 VISITA TUTTI I VERTICI(G)

```

    INIZIALIZZA( $G$ )
    for ogni  $u \in V$  do
        if  $\text{color}[u] = \text{white}$  then
            VISITA( $G,u$ )
        end if
    end for

```

2.1.4 Gestione dei vertici grigi

Per gestire i nodi grigi si usa una struttura dati ordinata D (**frangia**). Sulla frangia è possibile eseguire le seguenti operazioni:

- **Create()**: restituisce una D vuota
- **Add(D,x)**: aggiunge un elemento x a D
- **First(D)**: restituisce il primo elemento di D
- **RemoveFirst(D)**: elimina il primo elemento di D
- **NotEmpty(D)**: restituisce vero se D contiene almeno un elemento, falso altrimenti

D è una **coda** se $\text{Add}(D,x)$ aggiunge l'elemento in coda a D , uno **stack** se $\text{Add}(D,x)$ aggiunge l'elemento in testa a D .

Algoritmo 5 VISITA(G,s)

```

    INIZIALIZZA( $G$ )
    Create()
     $\text{color}[s] \leftarrow \text{gray}$ 
    {visita  $s$ }
    Add( $D,s$ )
    while NotEmpty( $D$ ) do
         $u \leftarrow \text{First}(D)$ 
        if esiste  $v$  bianco adiacente ad  $u$  then
             $\text{color}[v] \leftarrow \text{gray}$ 

```

```

     $\pi[v] \leftarrow u$ 
    {visita  $v$ }
    Add( $D, v$ )
  else
    color[ $v$ ]  $\leftarrow$  black
    RemoveFirst( $D$ )
  end if
end while

```

2.1.5 Complessità

Il costo di visita è $\mathcal{O}(n + adj)$: adj è il tempo impiegato a controllare se esiste un nodo v bianco adiacente ad u , e dipende dalla rappresentazione; n è il numero di vertici, che vengono inseriti e rimossi da D .

Il costo di adj è:

- con lista di archi: bisogna scandire l'intera lista ($\mathcal{O}(m)$) per n volte ($\mathcal{O}(n)$), quindi $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n * m) = \mathcal{O}(mn)$
- con matrice di adiacenza: bisogna scandire l'intera riga della matrice ($\mathcal{O}(n)$), quindi $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n * n) = \mathcal{O}(n^2)$
- con liste di adiacenza: si possono ottimizzare le prestazioni utilizzando dei puntatori che puntano all'inizio delle liste di adiacenza. Se l'elemento è grigio, il puntatore è spostato all'elemento successivo; quando il puntatore giunge alla fine della lista, il primo elemento è colorato di nero. Ogni lista è percorsa una volta sola, in tutte le iterazioni del ciclo. Complessità: $\mathcal{O}(n + m)$.

2.2 Visita in ampiezza

2.2.1 Inizializzazione

La **visita in ampiezza** (**BFS**, Breadth First Search), esamina i vertici del grafo in un ordine ben preciso, costruendo un albero di visita chiamato **albero BFS**. Nell'albero BFS, ogni vertice si trova il più vicino possibile alla radice. La visita è realizzata usando la frangia come coda: quando un nodo grigio ha tutti gli adiacenti grigi, esso è rimosso dalla coda (il vertice in testa rimane nella coda finché non diventa nero).

Algoritmo 6 VISITA BFS(G, s)

```

INIZIALIZZA( $G$ )
queue()
color[ $s$ ]  $\leftarrow$  gray
{visita  $s$ }
enqueue( $D, s$ )
while NotEmpty( $D$ ) do
   $u \leftarrow$  head( $D$ )
  if esiste  $v$  bianco adiacente ad  $u$  then
    color[ $v$ ]  $\leftarrow$  gray
     $\pi[v] \leftarrow u$ 
    {visita  $v$ }
    enqueue( $D, v$ )

```

```

else
    color[v] ← black
    dequeue(D)
end if
end while

```

2.2.2 Albero di visita

L'albero BFS viene costruito a livelli; l'albero rappresenta i cammini minimi. Anche se le liste di adiacenza vengono invertite, i nodi per livello non cambiano. Si può inizializzare un **vettore di distanze** (stimate) d , inizializzato ad infinito: se un determinato vertice non è stato trovato (distanza ∞ a fine BFS), allora non è raggiungibile da s .

2.2.3 Proprietà

Proprietà (1). *In D ci sono tutti e soli i vertici grigi.*

Proprietà (2). *Se $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ è il contenuto di D , allora:*

i $d[v_i] \leq d[v_{i+1}]$: i vertici sono ordinati per livelli nella coda

ii $d[v_n] \leq d[v_1] + 1$: la coda contiene al massimo due livelli

Dimostrazione. Nel caso base, in D è presente solo la sorgente. La proprietà 2 è vera. Il passo ha due casi:

- $\text{dequeue}(D)$: o D rimane vuota (banalmente vera), o rimangono $\langle v_2, \dots, v_n \rangle$, e
 - i. le disuguaglianze sono ancora vere e quindi
 - ii. anche $d[v_n] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1$
- $\text{enqueue}(D, v)$: v è reso figlio di v_1 e accodato, quindi $d[v] = d[v_1] + 1$ e
 - i. $d[v_n] \leq d[v_1] + 1 = d[v]$
 - ii. $d[v] = d[v_1] + 1 \leq d[v_1] + 1$

□

2.2.4 Dimostrazione $d[v] = \delta(s, v)$

Lemma (Invariante 4). *$d[v] = \delta(s, v)$ per tutti i vertici grigi o neri.*

Dimostrazione $d[v] \geq \delta(s, v)$. Dato che l'albero dei predecessori π contiene solo archi appartenenti a G , il cammino da s a v è un cammino che appartiene anche a G , quindi la lunghezza del cammino da s a v nell'albero è maggiore o uguale alla distanza tra s e v .

Dimostrazione $d[v] \leq \delta(s, v)$. Definiamo l'insieme dei vertici a distanza k dalla sorgente nel grafo come $V_k = \{v \in V \mid \delta(s, v) = k\}$ (v_0 contiene solo la sorgente).

Nel caso base, $d[v_0] \leq \delta(s, v)$ (distanza di s da sé stesso: $0 \leq 0$). Sia $v \in V_k$: allora $\delta(s, v) = k$ (per definizione).

Con $k > 0$ (passo), esisterà almeno un vertice w tale che $\delta(s, w) = k - 1$ e $(w, v) \in E$, ovvero un arco che va da w a v . Definiamo l'insieme dei vertici appartenenti a V_{k-1} con arco entrante in v come $U_{k-1} = \{w \in V_{k-1} \mid (w, v) \in E\}$. Tra questi, sia u il primo vertice di U_{k-1} ad essere scoperto ed inserito nella coda: per politica FIFO, u sarà anche il primo ad essere estratto dalla coda. Quando guarderò i vertici adiacenti a u , v sarà ancora bianco (perché più lontano), e v verrà inserito nell'albero come figlio di u ,

con $d[v] = d[u] + 1$. Inoltre, per ipotesi induttiva, $d[u] \leq k - 1$.
Quindi, quando inseriremo v nell'albero:

- $d[v] = d[u] + 1$
- ma $d[u] \leq k - 1$, quindi $d[v] \leq (k - 1) + 1$
- $d[v] \leq k$

2.2.5 Distanza nell'albero BFS

Teorema. *Al termine dell'esecuzione della visita BFS, si ha $d[v] = \delta(s, v)$ per tutti i vertici $v \in V$.*

Dimostrazione. caso base: se v non è raggiungibile da s , allora $d[v]$ rimane ∞ .

altrimenti, v è nero (per invariante 2). Per ogni vertice v raggiungibile da s , il cammino da s a v sull'albero ottenuto dalla visita è un **cammino minimo**. \square

2.3 Visita in profondità

2.3.1 Inizializzazione

La **visita in profondità** (DFS, Depth First Search), esamina i vertici del grafo partendo dall'ultimo vertice incontrato. Si ottiene dall'algoritmo di visita generico, implementando la frangia come **stack**.

Algoritmo 7 VISITA DFS (ottimizzata)

```
D ← emptyStack(D)
color[s] ← gray
{visita s}
push(D)
while esiste  $v$  non considerato adiacente a top(D) do
    if color[v] = white then
        color[v] = gray
         $\pi[v] \leftarrow \text{top}(D)$ 
        {visita s}
        push(D,s)
    end if
    color[top(D)] ← black
    pop(D)
end while
```

2.3.2 Caratteristiche dell'albero DFS

Un vertice viene chiuso (colorato di nero) solo quando tutti i suoi discendenti sono stati chiusi.

Gli intervalli di attivazione di una qualunque coppia di vertici sono o **disgiunti** o **uno contenuto interamente nell'altro**. Questo è l'ordine delle attivazioni delle chiamate di una procedura ricorsiva, ed è quindi possibile costruire un algoritmo DFS ricorsivo. Inoltre, è possibile introdurre un contatore per ricordare l'ordine delle attivazioni.

Algoritmo 8 VISITA DFS RICORSIVA(G,u)

```
color[u] ← gray
{visita s}
```

```

d[u] ← time
time++
for ogni  $v$  adiacente ad  $u$  do
    if color[v] = white then
         $\pi[v] \leftarrow u$ 
        VISITA DFS RICORSIVA(G,v)
    end if
    color[u] ← black
    f[u] ← time
    time++
end for

```

2.3.3 Teorema delle parentesi e corollari

Teorema (Parentesi). *In ogni visita DFS di un grafo, per ogni coppia di vertici u, v , una ed una sola delle seguenti condizioni è soddisfatta:*

- $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$ ed u è un **antenato** di v in un albero della foresta DFS
- $d[v] < d[u] < f[u] < f[v]$ ed u è un **discendente** di v in un albero della foresta DFS
- $d[u] < f[u] < d[v] < f[v]$ e tra u e v non esiste relazione (non sono adiacenti)

Teorema (Annidamento degli intervalli). *Una visita DFS di un grafo colloca un vertice v come discendente proprio di un vertice u in un albero della foresta DFS se e solo se $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$.*

Teorema (Cammino bianco). *In una foresta DFS, un vertice v è discendente del vertice u se e solo se al tempo $d[u]$ v è raggiungibile da u con un cammino contenente solo vertici bianchi.*

La complessità della visita DFS è $(O)(m + n)$ (come la visita generica).

3 Aciclicità

È possibile verificare la presenza di un ciclo tramite una visita DFS.

3.1 Grafi orientati

Un arco $\langle u, v \rangle$ viene **percorso** quando si incontra v nella lista degli adiacenti ad u . Durante la DFS di un grafo orientato, ogni arco è percorso una volta sola. Definiamo:

- **Arco dell'albero**: arco inserito nella foresta DFS
- **Arco all'indietro**: arco che collega un vertice ad un suo antenato
- **Arco in avanti**: arco che collega un vertice ad un suo discendente
- **Arco di attraversamento**: arco che collega due vertici che non sono in relazione

Durante la visita di un grafo orientato, un arco $\langle u, v \rangle$ viene percorso quando si incontra v nella lista degli adiacenti ad u . In quel momento, color[v] può essere:

- **bianco**: $\langle u, v \rangle$ è un **arco dell'albero**

- **grigio:** u è un discendente di v , $\langle u, v \rangle$ è un **arco all'indietro**
- **nero:** $\langle u, v \rangle$ è un arco
 - **in avanti** se v è discendente di u
 - **di attraversamento** altrimenti

3.2 Grafi non orientati

Durante la DFS di un grafo orientato, ogni arco è percorso esattamente due volte. Definiamo:

- **Arco dell'albero:** arco inserito nella foresta DFS
- **Arco all'indietro:** arco che collega un vertice ad un suo antenato

Durante la visita di un grafo orientato, un arco $\langle u, v \rangle$ viene percorso quando si incontra v nella lista degli adiacenti ad u . In quel momento, $\text{color}[v]$ può essere:

- **bianco:** (u, v) è un **arco dell'albero**
- **grigio:** u è un discendente di v , $\langle u, v \rangle$ è un **arco all'indietro**
- **nero:** $\langle u, v \rangle$ è un **arco all'indietro**

3.3 Test di aciclicità

Teorema (Grafo aciclico). *Se un grafo (orientato o non orientato) contiene un ciclo, allora esiste un arco all'indietro. Viceversa, se una visita in profondità produce un arco all'indietro, il grafo contiene un ciclo. Quindi, un grafo è aciclico se e solo se una visita DFS non produce archi all'indietro.*

Algoritmo 9 CICLICO(G)

```

INIZIALIZZA( $G$ )
for ogni nodo  $u$  di  $G$  do
  if  $\text{color}[u] = \text{white}$  and VISITA RICORSIVA CICLO( $G, u$ ) then
    return true
  end if
end for
return false

```

Algoritmo 10 VISITA RICORSIVA CICLO(G, u)

```

 $\text{color}[u] \leftarrow \text{gray}$ 
for ogni  $v$  adiacente ad  $u$  do
  if  $\text{color}[v] = \text{white}$  then
     $\pi[v] \leftarrow u$ 
    if VISITA RICORSIVA CICLO( $G, v$ ) then
      return true
    end if
  else if  $v \neq \pi[u]$  ( $\text{color}[v] = \text{gray}$  per grafi orientati) then
    return true
  end if
end for
 $\text{color}[u] \leftarrow \text{black}$ 
return false

```

4 Ordinamento topologico

Dato un **grafo orientato aciclico** (DAG) è sempre possibile ordinare i nodi in un **ordine topologico**, cioè in modo che non ci sia nessun arco all'indietro nell'ordinamento.

4.1 Raggiungibilità

In un DAG, la relazione di **raggiungibilità** è una relazione di ordine parziale:

- è riflessiva: ogni vertice è raggiungibile da se stesso
- è antisimmetrica: se v è raggiungibile da u ed u è raggiungibile da v , allora v e u sono coincidenti
- è transitiva: se v è raggiungibile da u e w è raggiungibile da v , allora w è raggiungibile da u

4.2 Ordine topologico

Dato un DAG, un **ordine topologico** è un ordine lineare dei suoi nodi tale che, se nel grafo vi è un arco (u, v) , allora u precede v nell'ordine. Un grafo aciclico possiede sempre un ordine topologico; un DAG può possedere diversi ordini topologici.

4.2.1 Algoritmo astratto

Il metodo più semplice ma meno efficiente per trovare un'ordinamento topologico. Si definiscono: **nodo sorgente** come nodo che non ha archi entranti, e **nodo pozzo** come nodo che non ha archi uscenti. Questo algoritmo funziona rimuovendo nodi sorgente dal grafo G' (memorizzandoli in una lista, ord) e sviluppando un sottoproblema.

Teorema. ord è un'ordinamento topologico di G . Denotiamo con ord_i e G' (copia del grafo G) il contenuto di ord e G' all'iterazione i -esima: ad ogni istante del ciclo, non può esserci nessun cammino in G che porta da un vertice in G' ad uno in ord ("all'indietro").

Dimostrazione. Caso base: con $i = 0$, la condizione è banalmente verificata (ord non contiene vertici). Passo induttivo: ad un istante k , non c'è alcun cammino in G dai vertici G'_k ai vertici in ord_k , quindi ad un istante $k + 1$, non c'è alcun cammino in G dai vertici G'_{k+1} ai vertici in ord_{k+1} .

Al passo k -esimo, si sceglie un vertice sorgente u in G'_k : non ci sono cammini in G che raggiungono u passando solo per i vertici di G'_k . Per ipotesi induttiva, aggiungendo u ad ord_k all'istante k , all'istante $k + 1$ non ci sarà alcun cammino in G dai vertici di G'_{k+1} ai vertici in ord_{k+1} . \square

La complessità dell'algoritmo semplice è $\mathcal{O}(m * n)$.

4.2.2 Ordinamento topologico basato su DFS

Teorema (Ordinamento topologico). In una qualunque visita DFS, $f[v] < f[u]$ per ogni arco $\langle u, v \rangle$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che si abbia $f[u] < f[v]$; quindi, apro e chiudo u e poi apro e chiudo v , oppure apro u e v e poi chiudo u e v . Il primo caso è impossibile, perchè u non può diventare nero prima che v diventi grigio, ossia prima che tutti i suoi adiacenti siano stati scoperti. Il secondo caso è impossibile perchè u sarebbe discendente di v e l'arco $\langle u, v \rangle$ sarebbe un arco all'indietro, ma il grafo è aciclico. \square

Per ottenere l'ordinamento topologico, basta tenere traccia dei vertici chiusi con una lista, che conterrà i vertici chiusi, dal più al meno recente.

Algoritmo 11 TOPOLOGICAL SORT(G)

```
INIZIALIZZA( $G$ )
 $ord \leftarrow$  vettore di lunghezza  $n$ 
 $t \leftarrow n-1$ 
for ogni  $u \in V$  do
    if  $color[u] = \text{white}$  then
        TOPOLOGICAL DFS( $G, u, ord, t$ )
    end if
end for
return  $ord$ 
```

Algoritmo 12 TOPOLOGICAL DFS(G, u, ord, t)

```
 $color[u] \leftarrow \text{gray}$ 
 $d[u] \leftarrow \text{time} \leftarrow \text{time}+1$ 
for ogni  $v$  adiacente ad  $u$  do
    if  $color[v] = \text{white}$  then
         $\pi_{getsu}$ 
        TOPOLOGICAL DFS( $G, v, ord, t$ )
    end if
end for
 $color[u] \leftarrow \text{black}$ 
 $f[u] \leftarrow \text{time} \leftarrow \text{time}+1$ 
 $ord[t] \leftarrow u$ 
 $t-$ 
```

La complessità è $\mathcal{O}(m + n)$.

5 Componenti connesse e fortemente connesse

5.1 Componenti connesse

In un grafo non orientato, la relazione di raggiungibilità è una relazione di equivalenza:

- è **riflessiva**: per definizione, ogni vertice è raggiungibile da se stesso con un cammino degenero di lunghezza 0
- è **simmetrica**: se v è raggiungibile da u tramite un cammino p , allora u è raggiungibile da v percorrendo all'indietro lo stesso cammino
- è **transitiva**: se v è raggiungibile da u e w è raggiungibile da v , allora w è raggiungibile da u , percorrendo il cammino da u a v e da v a w .

In un grafo non orientato, le componenti connesse sono le classi di equivalenza della relazione di raggiungibilità. Una visita di un grafo restituisce esattamente una componente connessa di quel grafo (l'albero di visita).

Algoritmo 13 COMPONENTI CONNESSE(G)

```
INIZIALIZZA( $G$ )
 $\Pi \leftarrow$  foresta vuota
for ogni  $u \in V$  do
    if  $\text{color}[u] = \text{white}$  then
         $\pi_u \leftarrow \text{VISITA}(G, u)$  ( $\pi_u$  è l'albero di visita)
         $\Pi \leftarrow \Pi + \pi_u$ 
    end if
end for
return  $\Pi$ 
```

Il grafo è connesso se e solo se nell'albero di visita tutti i vertici hanno un predecessore eccetto il nodo sorgente. La complessità è $\mathcal{O}(m + n)$.

Algoritmo 14 CONNESSIONE(G)

```
INIZIALIZZA( $G$ )
scegli vertice  $s$  appartenente a  $G$ 
 $\pi \leftarrow \text{VISITA}(G, s)$ 
for ogni  $u$  appartenente a  $G$  do
    if  $u \neq s$  e  $\pi[u] = \text{NULL}$  then return false
    end if
end for
return true
```

5.2 Componenti fortemente connesse

In un grafo orientato G , due nodi, u e v si dicono mutualmente raggiungibili o **fortemente connessi** se ognuno dei due è raggiungibile dall'altro, cioè esiste un cammino da u a v e da v a u ($u \leftrightarrow v$). La connessione forte è una relazione di equivalenza. Una **cfc** di un grafo orientato G è un sottografo G' di G fortemente connesso e massimale: i nodi di G' sono tutti fra loro fortemente connessi e nessun altro nodo di G è fortemente connesso con nodi di G' . Ogni vertice del grafo fa parte di una cfc, in quanto ogni nodo è almeno fortemente connesso con se stesso. Da un grafo fortemente connesso è possibile ricavare un DAG (e quindi un ordinamento topologico).

Per trovare la cfc contenente un vertice x :

- calcoliamo i **discendenti** di x ($D(x)$), ossia i vertici di G raggiungibili da x
- calcoliamo gli **antenati** di x ($A(x)$), ossia i vertici che raggiungono x
- $\text{cfc}[x]$ è data dall'**intersezione** tra l'insieme degli antenati e dei discendenti ($D(x) \cap A(x)$)

Questo algoritmo è molto costoso, $\mathcal{O}(n^2 + m)$.

Lemma (Cammino fortemente connesso). *Se due vertici x, y di un grafo sono in una stessa cfc, allora nessun cammino tra di essi può abbandonare tale cfc.*

Dimostrazione. Sia z tale che $x \rightarrow z$ e $z \rightarrow y$. z è banalmente raggiungibile da x per ipotesi ($x \rightarrow z$); siccome x, y appartengono alla stessa cfc, esisterà un cammino $y \rightarrow x$. Esiste anche $z \rightarrow y$ per ipotesi. Quindi, per concatenazione, esisterà anche un cammino $z \rightarrow y \rightarrow x$. \square

Teorema (Sottoalbero fortemente connesso). *In una qualunque DFS di un grafo G orientato, tutti i vertici di una cfc vengono collocati in uno stesso sottoalbero.*

Dimostrazione. Sia r il primo vertice di una data cfc che viene scoperto dalla DFS: da r sono raggiungibili tutti gli altri vertici della cfc (per definizione). Poichè r è il primo vertice ad essere stato scoperto, al momento della sua scoperta tutti gli altri vertici della cfc saranno bianchi. Per il lemma precedente, tutti i cammini da r agli altri vertici della cfc conterranno solo vertici bianchi che fanno parte della cfc. Allora, per il **teorema del cammino bianco**, tutti i vertici appartenenti alla cfc di r saranno discendenti di r nell'albero DFS. \square

Proprietà (1). *Esiste sempre, per ogni grafo diretto, almeno un ordine di visita DFS dei suoi nodi tale per cui le cfc sono già separate nella foresta di visita.*

Proprietà (2). *Un grafo G ed il suo trasposto G^T hanno le stesse cfc.*

Siano x e y due vertici di un grafo G ; assumiamo che x non sia sulla stessa cfc di y . Dopo la DFS su G si possono presentare i seguenti casi:

1. y è **discendente di** x in un albero della foresta DFS di G . Esiste un cammino da x a y , ma non il contrario, quindi non esisterà un cammino da x a y in G^T ($d[x] < d[y] < f[y] < f[x]$).
2. x e y **non sono uno discendente dell'altro** nella foresta DFS di G . Non può esistere nessun cammino da y a x , altrimenti x sarebbe nel sottoalbero di y . Quindi, non esisterà il cammino da x a y in G^T ($d[y] < f[y] < d[x] < f[x]$).

In entrambi i casi, ($f[x] > f[y]$), quindi nella seconda visita i vertici saranno considerati in ordine decrescente di tempo di fine visita.

Da queste osservazioni, si ricava l'**algoritmo di Kosaraju**:

1. visita G con l'algoritmo VISITA TUTTI I VERTICI DFS e costruisci una lista di vertici in ordine decrescente dei tempi di fine visita
2. costruisci G^T
3. visita G^T con l'algoritmo VISITA TUTTI I VERTICI DFS, considerando i vertici nell'ordine trovato al passo 1

La complessità è pari a $\mathcal{O}(n + m)$. Per dimostrare la correttezza dell'algoritmo, ci si avvale del **teorema del sottoalbero fortemente connesso** e dei lemmi seguenti.

Lemma (2). *Un grafo orientato e il suo trasposto hanno le stesse cfc.*

Lemma (3). *Sia A^T un albero ottenuto con la visita in profondità G^T , considerando i vertici in ordine decrescente dei tempi di fine visita su G , e sia u la sua radice. Per ogni vertice v discendente di u in A^T , v e u appartengono alla stessa cfc.*

Dimostrazione. Dimostriamo che ogni discendente di u in A^T è anche un discendente di u in un albero della foresta costruita dalla DFS su G . La dimostrazione è fatta per assurdo.

Consideriamo un cammino sull'albero A^T a partire dalla radice u ; sia v il primo vertice sul cammino per cui il lemma non vale (cioè v non è discendente di u nella visita di G) e sia w il suo predecessore sul cammino. L'enunciato è valido per w : $d[u] \leq d[w] < f[w] \leq f[u]$.

Siccome la visita DFS di G^T considera i vertici in ordine decrescente di fine visita, vale $f[v] < f[u]$. Per il **teorema delle parentesi**, se v non è discendente di u nella prima visita, deve valere $d[v] < f[v] < d[u] < f[u]$. Ma questo è impossibile, in quanto v è adiacente a w in G , e la visita di v non può terminare prima che sia iniziata la visita di un suo adiacente.

Quindi in G esiste un cammino da u a v . Siccome v è discendente di u in A^T , esiste anche un cammino da u a v in G^T , e quindi da v a u in G . \square

L'algoritmo è quindi corretto.

6 Tecnica greedy

6.1 Problemi

Un **problema** P è definito come una relazione $P \subseteq I \times S$: I è l'insieme delle possibili **istanze** del problema e l'insieme S è l'insieme delle possibili **soluzioni** del problema. Tipi di problemi:

- **problemi di decisione**: problemi che richiedono di verificare una certa proprietà sull'input (risultato o vero o falso)
- **problemi di ricerca**: data un'istanza del problema, restituire una soluzione ammissibile
- **problemi di ottimizzazione**: data un'istanza di un problema ed una funzione obiettivo valutata(Sol), che per ogni soluzione Sol restituisce un valore di tale soluzione Sol ottima

Una soluzione di un problema di ottimizzazione è anche una soluzione di un equivalente problema di ricerca (ma non viceversa).

6.2 Problema dello zaino frazionario

6.2.1 Definizione

Un ladro entra in un magazzino e trova n oggetti. L' i -esimo oggetto o_i ha un valore di c_i euro e pesa p_i chilogrammi. $v_i = c_i/p_i$ è il valore per unità di peso. Gli oggetti sono frazionabili, quindi il ladro ne può prendere anche solo una frazione x_i , $0 \leq x_i \leq 1$. In tal caso, il valore della parte presa sarà $c_i x_i$. Il ladro ha un solo zaino, che può contenere oggetti per un peso massimo di P chilogrammi.

Quali oggetti e in quale quantità dovrà prendere il ladro per ottenere il massimo guadagno dal furto?

6.2.2 Formalizzazione

Il problema richiede di valorizzare x_i per ogni $1 \leq i \leq n$ in modo che $\sum x_i c_i$ sia massima. Due proprietà:

- **Ottimalità**. Tutte le soluzioni che massimizzano il valore totale dello zaino (la **funzione obiettivo**) sono soluzioni ottime.
- **Ammissibilità**.