Indice

Capitolo 1

Insiemi

1.1 Concetti di base sugli insiemi

Un *insieme* è un raggruppamento di oggetti detti *elementi*, che possono essere di natura qualsiasi, Si dice che gli elementi di un insieme *appartengono* all'insieme.

Simboli

Per indicare gli insiemi si usano solitamente lettere maiuscole, come

$$A, B, C \dots$$

Per indicare gli elementi di un insieme si usano solitamente lettere minuscole $(a, b, c \dots)$ e per indicare che un elemento x appartiene all'insieme A scriviamo

$$x \in A \quad \text{oppure} \quad A \ni x$$

Rappresentazione

È possibile rappresentare un insieme elencando i suoi elementi, in caso questo sia finito. Ad esempio

$$A = \{1, 2, 5\}$$

significa che l'insieme A ha come elementi i numeri 1,2,5. In questo caso si dice che l'abbiamo definito *per tabulazione*.

Oppure è possibile rappresentare un insieme descrivendolo mediante una proprietà che lo caratterizzi univocamente. Ad esempio

$$X = \{n : n \text{ intero pari}\}$$

Un insieme privo di elementi viene detto *insieme vuoto* e viene indicato con il simbolo $\emptyset$.

Relazioni tra insiemi: inclusione

Definizione 1.1. *Si dice che un insieme X è un sottoinsieme di un insieme Y se ogni elemento di X appartiene ad Y. Si utilizza il simbolo di inclusione (larga) $X \subseteq Y$. Se X non coincide con Y, si usa il simbolo di inclusione stretta $X \subset Y$.*

Relazioni tra insiemi: uguaglianza

Due insiemi sono uguali quando possiedono gli stessi elementi. Siano X e Y due insiemi. Allora $X = Y$ se e solo se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

Operazioni insiemistiche

- *Unione.* L'unione di due insiemi X e Y è definita da:

  $$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ o } x \in Y\}$$

  È l'insieme degli elementi che appartengono sia al primo sia al secondo insieme.

- *Intersezione.* L'intersezione di due insiemi X e Y è definita da:

  $$X \cap Y = \{x : x \in X \text{ e } x \in Y\}$$

  È l'insieme degli elementi che appartengono al primo e al secondo insieme, intendendo la "o" in modo non esclusivo.

- *Unione.* La differenza tra due insiemi X e Y è definita da:

  $$X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ e } x \notin Y\}$$

  È l'insieme degli elementi che appartengono al primo ma non al secondo insieme.

- *Complementare.* È un tipo particolare di differenza. Siano X e Y insiemi con $X \subseteq Y$. Si definisce insieme complementare di X in Y l'insieme $Y \setminus X$. Si indica con il simbolo X^C.

Proprietà delle operazioni insiemistiche

- *Proprietà dell'unione.*

  commutativa: $X \cup Y = Y \cup X$

  associativa: $/^{(}X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

  idempotenza: $X \cup X = X$

- *Proprietà dell'intersezione.*

  commutativa: $X \cap Y = Y \cap X$

  associativa: $/^{(}X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

  idempotenza: $X \cap X = X$

- *Proprietà distributive.*

  $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

  $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

- *Formule di De Morgan.* Siano $A, B \subseteq X$ e denotiamo con A^C e B^C i loro insiemi complementari in X.

  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

1.2 Insieme delle parti e prodotto cartesiano

Insieme delle parti

Dato un insieme X, si dice *insieme delle parti* di X l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X. Si indica con $\mathcal{P}^X$ o con 2^X. Ad esempio, si consideri l'insieme $X = \{1, 4, 5\}$:

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{5\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{4,5\}, \{1,4,5\}\}$$

Se X è un insieme finito con n elementi, allora $\mathcal{P}(X)$ è un insieme finito con 2^n elementi. Se X è un insieme infinito, allora anche $\mathcal{P}(X)$ è un insieme infinito.

Prodotto cartesiano

Si dice *coppia* un insieme ordinato di due elementi. Ad esempio:

$$\{3,7\} = \{7,3\} : \text{ insieme non ordinato}$$
$$\{3,7\} \neq \{7,3\} : \text{ insieme ordinato (coppia)}$$

Dati due insiemi X e Y, il *prodotto cartesiano* di X e Y è l'insieme delle coppie (x, y) in cui $x \in X$ e $y \in Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

L'insieme dei numeri reali è indicato con $\mathbb{R}$, e il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ viene indicato con $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

1.3 Insiemi numerici fondamentali

$\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali (interi positivi, zero compreso)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$ insieme dei numeri razionali (sono frazioni di numeri interi)

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$$

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali

$\mathbb{I}$ insieme dei numeri irrazionali ($\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Capitolo 2

Funzioni

2.1 Il concetto di funzione

Definizione 2.1. *Siano $X, Y \neq \emptyset$. Si dice funzione da X in Y una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y. L'insieme X viene detto dominio della funzione mentre l'insieme Y viene detto codominio della funzione.*

Viene utilizzata la seguente notazione:

$$f : X \to Y \text{ (f definita da X a Y)} \qquad\qquad f : x \mapsto f(x) \text{ (f associa $f(x)$ ad x)}$$

Per ogni $x \in X$, l'elemento di Y che la funzione f fa corrispondere a x viene detto *immagine* di x mediante f e si indica con $f(x)$. La proprietà caratteristica di f, affinchè la si possa chiamare funzione, è l'*univocità* della corrispondenza: assegnato l'elemento in "ingresso" $a \in A$, l'elemento in "uscita" $b = f(a)$ dev'essere univocamente determinato.

Definizione 2.2. *Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \to Y$. Si dice grafico di F l'insieme*

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$$

Ossia, il grafico di una funzione f è l'insieme dei punti del piano di coordinate (x, y) con $y = f(x)$ e x variabile nel dominio D.

Definizione 2.3. *Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \to Y$. Siano rispettivamente $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Si dice immagine di A il sottoinsieme di Y costruito dalle imagini dei singoli elementi di A. Tale insieme viene denotato con $f(A)$. In altre parole si ha*

$$f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\} \subseteq Y$$

Si dice immagine inversa di B o controimmagine di B il sottoinsieme di X costituito da quegli elementi di X la cui immagine appartiene a B. Tale insieme viene denotato con $f^{-1}(B)$. In altre parole si ha

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$$

Definizione 2.4. *Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \to Y$. Sia inoltre $A \subseteq X$ insieme non vuoto. Si dice restrizione di f all'insieme A la funzione*

$$f_{|A} : A \to Y$$

Teorema 2.1. *Siano $X, Y \neq \emptyset$ e sia $f : X \to Y$. Siano inoltre $A, B \subseteq X$ e $C, D \subseteq Y$. Valgono le seguenti conclusioni:*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f^{-1}(f(A)) \supset A$
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
5. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
6. $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

Definizione 2.5. *Siano X, Y, Z insiemi non vuoti. Siano $f : y \to Z$ e $g : X \to Y$. Viene detta composizione di f con g la funzione $f \circ g$ definita da*

$$f \circ g : X \to Z$$

Definizione 2.6. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Si dice che f è iniettiva se elementi distinti del dominio X hanno immagini distinte:*

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Definizione 2.7. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Si dice che f è suriettiva se ogni elemento del codominio Y è immagine di almeno un elemento del dominio X:*

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$

Definizione 2.8. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Si dice che f è biettiva (biiettiva o biunivoca) se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. In altre parole, si dice che f è biettiva se ogni elemento del codominio Y è immagine di esattamente un elemento del dominio X:*

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$$

Dato un insieme X non vuoto, indicheremo con $Id_X : X \to X$ la *funzione identità*, cioè quella funzione che ad ogni $x \in X$ associa se stesso:

$$Id_X(x) = x \forall x \in X$$

Definizione 2.9. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Si dice che f è invertibile se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che $f \circ g = Id_Y$ e $g \circ f = Id_X$. In altre parole si ha che:*

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y \qquad\qquad g(f(x)) = x \quad \forall x \in X$$

Se f è invertibile, una tale funzione g è unica e viene denominata funzione inversa di f. Si indica con il simbolo $f^{-1} : Y \to X$.

Teorema 2.2. *Siano X e Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$. Allora f è invertibile se e solo se f è biettiva.*

Definizione 2.10. *Siano X e Y due insiemi non vuoti. Si dice che X e Y hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione $f : X \to Y$ biettiva.*

Non tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità. Gli insiemi con la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono *numerabili*. Gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili ed hanno quindi la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, nonostante $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile: ha una cardinalità di *ordine superiore* rispetto ad $\mathbb{N}$.

Capitolo 3

Insiemi in $\mathbb{R}$

3.1 Intervalli

Si dice *intervallo* un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale per cui ogni numero reale compreso tra due elementi di questo sottoinsieme appartiene al sottoinsieme medesimo.

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si definiscono i seguenti intervalli:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \qquad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Definizione 3.1.