

# Indice

<b>1</b>	<b>Insiemi</b>	<b>1</b>
1.1	Concetti di base sugli insiemi . . . . .	1
1.2	Insieme delle parti e prodotto cartesiano . . . . .	3
1.3	Insiemi numerici fondamentali . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Funzioni</b>	<b>5</b>
2.1	Il concetto di funzione . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Insiemi in <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>7</b>
3.1	Intervalli . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Limiti</b>	<b>9</b>
4.1	Definizione di limite . . . . .	9
4.2	Limite destro e limite sinistro . . . . .	10
4.3	Operazioni tra limiti . . . . .	11
4.4	Cambiamento di variabile e continuità . . . . .	12
4.5	Relazione di asintotico e asintoti . . . . .	13
4.5.1	Asintoti . . . . .	14
4.6	Successioni . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Continuità</b>	<b>17</b>
5.1	Punti di discontinuità . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Derivate</b>	<b>19</b>

# Capitolo 1

## Insiemi

### 1.1 Concetti di base sugli insiemi

Un *insieme* è un raggruppamento di oggetti detti *elementi*, che possono essere di natura qualsiasi. Si dice che gli elementi di un insieme *appartengono* all'insieme.

#### Simboli

Per indicare gli insiemi si usano solitamente lettere maiuscole, come

$$A, B, C \dots$$

Per indicare gli elementi di un insieme si usano solitamente lettere minuscole ( $a, b, c \dots$ ) e per indicare che un elemento  $x$  appartiene all'insieme  $A$  scriviamo

$$x \in A \quad \text{oppure} \quad A \ni x$$

#### Rappresentazione

È possibile rappresentare un insieme elencando i suoi elementi, in caso questo sia finito. Ad esempio

$$A = \{1, 2, 5\}$$

significa che l'insieme  $A$  ha come elementi i numeri 1, 2, 5. In questo caso si dice che l'abbiamo definito *per tabulazione*.

Oppure è possibile rappresentare un insieme descrivendolo mediante una proprietà che lo caratterizzi univocamente. Ad esempio

$$X = \{n : n \text{ intero pari}\}$$

Un insieme privo di elementi viene detto *insieme vuoto* e viene indicato con il simbolo  $\emptyset$ .

#### Relazioni tra insiemi: inclusione

**Definizione 1.1.** Si dice che un insieme  $X$  è un sottoinsieme di un insieme  $Y$  se ogni elemento di  $X$  appartiene ad  $Y$ . Si utilizza il simbolo di inclusione (larga)  $X \subseteq Y$ . Se  $X$  non coincide con  $Y$ , si usa il simbolo di inclusione stretta  $X \subset Y$ .

#### Relazioni tra insiemi: uguaglianza

Due insiemi sono uguali quando possiedono gli stessi elementi. Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi. Allora  $X = Y$  se e solo se  $X \subseteq Y$  e  $Y \subseteq X$ .

## Operazioni insiemistiche

- *Unione.* L'unione di due insiemi  $X$  e  $Y$  è definita da:

$$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ o } x \in Y\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono sia al primo sia al secondo insieme.

- *Intersezione.* L'intersezione di due insiemi  $X$  e  $Y$  è definita da:

$$X \cap Y = \{x : x \in X \text{ e } x \in Y\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono al primo e al secondo insieme, intendendo la "o" in modo non esclusivo.

- *Unione.* La differenza tra due insiemi  $X$  e  $Y$  è definita da:

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ e } x \notin Y\}$$

È l'insieme degli elementi che appartengono al primo ma non al secondo insieme.

- *Complementare.* È un tipo particolare di differenza. Siano  $X$  e  $Y$  insiemi con  $X \subseteq Y$ . Si definisce insieme complementare di  $X$  in  $Y$  l'insieme  $Y \setminus X$ . Si indica con il simbolo  $X^C$ .

## Proprietà delle operazioni insiemistiche

- *Proprietà dell'unione.*

commutativa:  $X \cup Y = Y \cup X$

associativa:  $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

idempotenza:  $X \cup X = X$

- *Proprietà dell'intersezione.*

commutativa:  $X \cap Y = Y \cap X$

associativa:  $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

idempotenza:  $X \cap X = X$

- *Proprietà distributive.*

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

- *Formule di De Morgan.* Siano  $A, B \subseteq X$  e denotiamo con  $A^C$  e  $B^C$  i loro insiemi complementari in  $X$ .

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

## 1.2 Insieme delle parti e prodotto cartesiano

### Insieme delle parti

Dato un insieme  $X$ , si dice *insieme delle parti* di  $X$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $X$ . Si indica con  $\mathcal{P}^X$  o con  $2^X$ . Ad esempio, si consideri l'insieme  $X = \{1, 4, 5\}$ :

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 4, 5\}\}$$

Se  $X$  è un insieme finito con  $n$  elementi, allora  $\mathcal{P}(X)$  è un insieme finito con  $2^n$  elementi. Se  $X$  è un insieme infinito, allora anche  $\mathcal{P}(X)$  è un insieme infinito.

### Prodotto cartesiano

Si dice *coppia* un insieme ordinato di due elementi. Ad esempio:

$$\begin{aligned} \{3, 7\} &= \{7, 3\} : \text{insieme non ordinato} \\ \{3, 7\} &\neq \{7, 3\} : \text{insieme ordinato (coppia)} \end{aligned}$$

Dati due insiemi  $X$  e  $Y$ , il *prodotto cartesiano* di  $X$  e  $Y$  è l'insieme delle coppie  $(x, y)$  in cui  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

L'insieme dei numeri reali è indicato con  $\mathbb{R}$ , e il prodotto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  viene indicato con  $\mathbb{R}^2$ .

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

## 1.3 Insiemi numerici fondamentali

$\mathbb{N}$  insieme dei numeri naturali (interi positivi, zero compreso)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$  insieme dei numeri interi

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$  insieme dei numeri razionali (sono frazioni di numeri interi)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \setminus 0 \right\}$$

$\mathbb{R}$  insieme dei numeri reali

$\mathbb{I}$  insieme dei numeri irrazionali ( $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ )



# Capitolo 2

## Funzioni

### 2.1 Il concetto di funzione

**Definizione 2.1.** Siano  $X, Y \neq \emptyset$ . Si dice *funzione* da  $X$  in  $Y$  una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di  $X$  uno ed un solo elemento di  $Y$ . L'insieme  $X$  viene detto *dominio* della funzione mentre l'insieme  $Y$  viene detto *codominio* della funzione.

Viene utilizzata la seguente notazione:

$$f : X \rightarrow Y \text{ (} f \text{ definita da } X \text{ a } Y\text{)} \qquad f : x \mapsto f(x) \text{ (} f \text{ associa } f(x) \text{ ad } x\text{)}$$

Per ogni  $x \in X$ , l'elemento di  $Y$  che la funzione  $f$  fa corrispondere a  $x$  viene detto *immagine* di  $x$  mediante  $f$  e si indica con  $f(x)$ . La proprietà caratteristica di  $f$ , affinché la si possa chiamare funzione, è l'*univocità* della corrispondenza: assegnato l'elemento in "ingresso"  $a \in A$ , l'elemento in "uscita"  $b = f(a)$  dev'essere univocamente determinato.

**Definizione 2.2.** Siano  $X, Y \neq \emptyset$  e sia  $f : X \rightarrow Y$ . Si dice *grafico* di  $F$  l'insieme

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$$

Ossia, il grafico di una funzione  $f$  è l'insieme dei punti del piano di coordinate  $(x, y)$  con  $y = f(x)$  e  $x$  variabile nel dominio  $D$ .

**Definizione 2.3.** Siano  $X, Y \neq \emptyset$  e sia  $f : X \rightarrow Y$ . Siano rispettivamente  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq Y$ . Si dice *immagine* di  $A$  il sottoinsieme di  $Y$  costruito dalle immagini dei singoli elementi di  $A$ . Tale insieme viene denotato con  $f(A)$ . In altre parole si ha

$$f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\} \subseteq Y$$

Si dice *immagine inversa* di  $B$  o *controimmagine* di  $B$  il sottoinsieme di  $X$  costituito da quegli elementi di  $X$  la cui immagine appartiene a  $B$ . Tale insieme viene denotato con  $f^{-1}(B)$ . In altre parole si ha

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$$

**Definizione 2.4.** Siano  $X, Y \neq \emptyset$  e sia  $f : X \rightarrow Y$ . Sia inoltre  $A \subseteq X$  insieme non vuoto. Si dice *restrizione* di  $f$  all'insieme  $A$  la funzione

$$f|_A : A \rightarrow Y$$

**Teorema 2.1.** Siano  $X, Y \neq \emptyset$  e sia  $f : X \rightarrow Y$ . Siano inoltre  $A, B \subseteq X$  e  $C, D \subseteq Y$ . Valgono le seguenti conclusioni:

1.  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2.  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3.  $f^{-1}(f(A)) \supset A$
4.  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
5.  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
6.  $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

**Definizione 2.5.** Siano  $X, Y, Z$  insiemi non vuoti. Siano  $f : Y \rightarrow Z$  e  $g : X \rightarrow Y$ . Viene detta composizione di  $f$  con  $g$  la funzione  $f \circ g$  definita da

$$f \circ g : X \rightarrow Z$$

**Definizione 2.6.** Siano  $X$  e  $Y$  insiemi non vuoti e sia  $f : X \rightarrow Y$ . Si dice che  $f$  è iniettiva se elementi distinti del dominio  $X$  hanno immagini distinte:

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

**Definizione 2.7.** Siano  $X$  e  $Y$  insiemi non vuoti e sia  $f : X \rightarrow Y$ . Si dice che  $f$  è suriettiva se ogni elemento del codominio  $Y$  è immagine di almeno un elemento del dominio  $X$ :

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$$

**Definizione 2.8.** Siano  $X$  e  $Y$  insiemi non vuoti e sia  $f : X \rightarrow Y$ . Si dice che  $f$  è biettiva (biiettiva o biunivoca) se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. In altre parole, si dice che  $f$  è biettiva se ogni elemento del codominio  $Y$  è immagine di esattamente un elemento del dominio  $X$ :

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X : f(x) = y$$

Dato un insieme  $X$  non vuoto, indicheremo con  $Id_X : X \rightarrow X$  la *funzione identità*, cioè quella funzione che ad ogni  $x \in X$  associa se stesso:

$$Id_X(x) = x \quad \forall x \in X$$

**Definizione 2.9.** Siano  $X$  e  $Y$  insiemi non vuoti e sia  $f : X \rightarrow Y$ . Si dice che  $f$  è invertibile se esiste una funzione  $g : Y \rightarrow X$  tale che  $f \circ g = Id_Y$  e  $g \circ f = Id_X$ . In altre parole si ha che:

$$f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y \qquad g(f(x)) = x \quad \forall x \in X$$

Se  $f$  è invertibile, una tale funzione  $g$  è unica e viene denominata *funzione inversa* di  $f$ . Si indica con il simbolo  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ .

**Teorema 2.2.** Siano  $X$  e  $Y$  insiemi non vuoti e sia  $f : X \rightarrow Y$ . Allora  $f$  è invertibile se e solo se  $f$  è biettiva.

**Definizione 2.10.** Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi non vuoti. Si dice che  $X$  e  $Y$  hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione  $f : X \rightarrow Y$  biettiva.

Non tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità. Gli insiemi con la stessa cardinalità di  $\mathbb{N}$  si dicono *numerabili*. Gli insiemi  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  sono numerabili ed hanno quindi la stessa cardinalità di  $\mathbb{N}$ , nonostante  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ . L'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali non è numerabile: ha una cardinalità di *ordine superiore* rispetto ad  $\mathbb{N}$ .

# Capitolo 3

## Insiemi in $\mathbb{R}$

### 3.1 Intervalli

Si dice *intervallo* un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  tale per cui ogni numero reale compreso tra due elementi di questo sottoinsieme appartiene al sottoinsieme medesimo.

Dati  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , si definiscono i seguenti intervalli:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \qquad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Anche un insieme costituito da un solo numero reale va considerato un intervallo.

**Definizione 3.1.** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non vuoto:

1. si dice che  $X$  è limitato superiormente se esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall x \in X \rightarrow x \leq a$$

2. si dice che  $X$  è limitato inferiormente se esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall x \in X \rightarrow x \geq a$$

3. si dice che  $X$  è limitato se è contemporaneamente limitato inferiormente e superiormente

**Definizione 3.2.** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non vuoto:

1. si dice  $a \in \mathbb{R}$  è un maggiorante di  $X$  se

$$\forall x \in X \rightarrow x \leq a$$

2. si dice  $a \in \mathbb{R}$  è un minorante di  $X$  se

$$\forall x \in X \rightarrow x \geq a$$

**Definizione 3.3.** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non vuoto:

1. si dice che  $a \in \mathbb{R}$  è un massimo ( $\max X$ ) di  $X$  se  $a$  è un maggiorante di  $X$  e  $a \in X$
2. si dice che  $a \in \mathbb{R}$  è un minimo ( $\min X$ ) di  $X$  se  $a$  è un minorante di  $X$  e  $a \in X$

Se  $X$  ammette un massimo, tale massimo è unico. Analogamente, se  $X$  ammette un minimo, tale minimo è unico.



**Definizione 3.4.** *Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non vuoto:*

- 1. si dice che  $a \in \mathbb{R}$  è l'estremo superiore ( $\sup X$ ) di  $X$  se  $a$  è il minimo dell'insieme dei maggioranti di  $X$*
- 2. si dice che  $a \in \mathbb{R}$  è l'estremo inferiore ( $\inf X$ ) di  $X$  se  $a$  è il massimo dell'insieme dei minoranti di  $X$*

**Teorema 3.1** (Completezza di  $\mathbb{R}$ ). *Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non vuoto:*

- 1. se  $X$  è limitato superiormente, allora  $X$  ammette un estremo superiore*
- 2. se  $X$  è limitato inferiormente, allora  $X$  ammette un estremo inferiore*

# Capitolo 4

## Limiti

### 4.1 Definizione di limite

**Definizione 4.1.** Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e sia  $R > 0$ . Si dice intorno di  $x_0$  di raggio  $R$  l'intervallo  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .

Si ha che  $x$  appartiene all'intorno di raggio  $R$  se e soltanto se  $|x - x_0| < R$ .

**Definizione 4.2.** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ . Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale per cui esista  $R > 0$  tale che

$$X \supseteq (x_0 - R, x_0 + R) \setminus \{x_0\}$$

Sia  $\ell \in \mathbb{R}$ . Si dice che  $\ell$  è il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $x_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$x_0$  non deve necessariamente far parte del dominio della funzione.

**Definizione 4.3.** Sia  $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ . Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale per cui esista  $R > 0$  tale che

$$X \supseteq (x_0 - R, x_0 + R) \setminus \{x_0\}$$

1. si dice che  $+\infty$  è il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $x_0$  se

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$$

2. si dice che  $-\infty$  è il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $x_0$  se

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -M$$

**Definizione 4.4.** Sia  $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ .

1. Supponiamo che esista  $a \in \mathbb{R}$  per cui si abbia

$$X \supseteq (a, +\infty)$$

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $\ell \in \mathbb{R}$ . Si dice che  $\ell$  è il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $+\infty$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : x > N \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. Supponiamo che esista  $a \in \mathbb{R}$  per cui si abbia

$$X \supseteq (-\infty, a)$$

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $\ell \in \mathbb{R}$ . Si dice che  $\ell$  è il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $-\infty$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : x < -N \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

**Definizione 4.5.** Sia  $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ .

1. Supponiamo che esista  $a \in \mathbb{R}$  per cui si abbia

$$X \supseteq (a, +\infty)$$

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $+\infty$  è il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $+\infty$  se

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : x > N \implies f(x) > M$$

2. Supponiamo che esista  $a \in \mathbb{R}$  per cui si abbia

$$X \supseteq (a, +\infty)$$

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $-\infty$  è il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $-\infty$  se

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : x > N \implies f(x) < -M$$

3. Supponiamo che esista  $a \in \mathbb{R}$  per cui si abbia

$$X \supseteq (-\infty, a)$$

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $+\infty$  è il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $-\infty$  se

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : x < -N \implies f(x) > M$$

4. Supponiamo che esista  $a \in \mathbb{R}$  per cui si abbia

$$X \supseteq (-\infty, a)$$

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $-\infty$  è il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $-\infty$  se

$$\forall M > 0, \exists N > 0 : x < -N \implies f(x) < -M$$

## 4.2 Limite destro e limite sinistro

**Definizione 4.6** (Limite destro). Sia  $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ . Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0$  tale per cui esista  $R > 0$  tale che

$$X \supseteq (x_0, x_0 + R) \quad (X \text{ contiene un intorno destro di } x_0)$$

1. Sia  $\ell \in \mathbb{R}$ . Si dice che  $\ell$  è il limite destro di  $f$  per  $x$  che tende a  $x_0$  da destra se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. Si dice che  $+\infty$  è il limite destro di  $f$  per  $x$  che tende a  $x_0$  da destra se

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies f(x) > M$$

3. Si dice che  $-\infty$  è il limite destro di  $f$  per  $x$  che tende a  $x_0$  da destra se

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies f(x) < -M$$

**Definizione 4.7** (Limite sinistro). Sia  $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ . Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0$  tale per cui esista  $R > 0$  tale che

$$X \supseteq (x_0 - R, x_0 + R) \quad (X \text{ contiene un intorno destro di } x_0)$$

1. Sia  $\ell \in \mathbb{R}$ . Si dice che  $\ell$  è il limite sinistro di  $f$  per  $x$  che tende a  $x_0$  da destra se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2. Si dice che  $+\infty$  è il limite sinistro di  $f$  per  $x$  che tende a  $x_0$  da destra se

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies f(x) > M$$

3. Si dice che  $-\infty$  è il limite sinistro di  $f$  per  $x$  che tende a  $x_0$  da destra se

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies f(x) < -M$$

**Teorema 4.1.** Sia  $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ . Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  tale per cui esista  $R > 0$  tale che

$$X \supseteq (x_0 - R, x_0 + R) \setminus \{x_0\}$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

esiste se e solo se esistono e coincidono tra di loro

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

### 4.3 Operazioni tra limiti

**Teorema 4.2.** Sia  $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ . Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che le funzioni  $f$  e  $g$  ammettano limiti finiti. Allora si ha:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \ell_1 - \ell_2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$$

$$4. \text{ se } c \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$5. \text{ se } g(x) \neq 0 \text{ e } \ell_2 \neq 0, \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = \ell_1/\ell_2$$

#### 4.4 Cambiamento di variabile e continuità

**Teorema 4.3** (Cambiamento di variabile). *Siano  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  insiemi non vuoti e siano date due funzioni  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Siano  $x_0, y_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  e sia  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  tali che si abbia*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0 \qquad \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = \ell$$

*Supponiamo inoltre che  $g(x) \neq y_0$  per ogni  $x \in X \setminus \{x_0\}$ . Allora si ha*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \ell$$

Supponiamo di dover calcolare un limite che si presenta nella forma:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$$

Si introduce una nuova variabile  $y = g(x)$ :

$$x \rightarrow x_0 \implies y = g(x) \rightarrow y_0 \implies y \rightarrow y_0$$

sostituisco  $g(x)$  con  $y$  nel limite:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$$

**Definizione 4.8** (Continuità). *Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dato  $x_0 \in X$  si dice che  $f$  è continua in  $x_0$  se vale la seguente condizione:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

*Si dice che  $f$  è continua su  $A \subseteq X$  se è continua in ogni punto di  $A$ .*

Se  $x_0$  e  $X$  sono tali per cui esiste  $R > 0$  per cui  $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq X$  allora  $f$  è continua in  $x_0$  se e soltanto se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Le funzioni elementari sono continue in ogni punto del loro dominio naturale.

**Teorema 4.4** (Teorema del confronto). *Sia  $X \subset \mathbb{R}$  e siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  tali che*

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in X$$

*Supponiamo che esistano, finiti o infiniti, i limiti*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \qquad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

*con  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Allora si ha*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione di limite si deduce che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - \ell_2| < \varepsilon$$

Posto  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  per ogni  $x \in X$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta$  si ha:

$$|f(x) - \ell_1| < \varepsilon \implies \ell_1 - \varepsilon < f(x) < \ell_1 + \varepsilon$$

$$|g(x) - \ell_2| < \varepsilon \implies \ell_2 - \varepsilon < g(x) < \ell_2 + \varepsilon$$

ed in particolare si ottiene

$$\ell_1 - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < \ell_2 + \varepsilon \implies \ell_1 - \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon \implies \ell_1 - \ell_2 < 2\varepsilon \implies \ell_1 \leq \ell_2$$

□

**Teorema 4.5** (Teorema dei due Carabinieri). *Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  e siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, g : X \rightarrow \mathbb{R}, h : X \rightarrow \mathbb{R}$  tali che*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in X$$

*Supponiamo che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

*e sia  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  il valore comune di questi due limiti. Allora anche  $f$  ammette limite per  $x \rightarrow x_0$  ed inoltre*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione di limite si deduce che

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1 &\implies |g(x) - \ell| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : |x - x_0| < \delta_2 &\implies |h(x) - \ell| < \varepsilon \end{aligned}$$

Posto  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  per ogni  $x \in X$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta$  si ha:

$$\begin{aligned} |g(x) - \ell| < \varepsilon &\implies \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \\ |h(x) - \ell| < \varepsilon &\implies \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \end{aligned}$$

ed in particolare si ottiene

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

□

## 4.5 Relazione di asintotico e asintoti

**Definizione 4.9.** *Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  e siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Sia  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  tale che  $X$  contenga  $U \setminus \{x_0\}$  con  $U$  intorno di  $x_0$ . Supponiamo che  $f(x) \neq 0$  e  $g(x) \neq 0$  per ogni  $x \in X \setminus \{x_0\}$ . Si dice che  $f(x)$  è asintotica a  $g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Si usa la notazione

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Si tratta di una relazione di equivalenza poichè possiede la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

- proprietà riflessiva:  $f(x) \sim f(x)$  per  $x \rightarrow x_0$
- proprietà simmetrica: se  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora per  $g(x) \sim f(x)$  per  $x \rightarrow x_0$
- proprietà transitiva: se  $f(x) \sim g(x)$  e  $g(x) \sim h(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora  $f(x) \sim h(x)$  per  $x \rightarrow x_0$

Nel calcolo dei limiti si potrà sostituire in alcune situazioni una funzione con un'altra ad essa asintotica.

Le funzioni asintotiche si possono sostituire solo in presenza di moltiplicazione e divisione.

### 4.5.1 Asintoti

#### Asintoto verticale

Si dice che una funzione  $f$  possiede un asintoto verticale in  $x_0$  se almeno uno tra

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

esiste ed è infinito. In tal caso, si dice che la retta verticale di equazione  $x = x_0$  è un asintoto verticale per  $f$ .

#### Asintoto orizzontale

Si dice che una funzione  $f$  possiede un asintoto orizzontale a  $+\infty$  se esiste ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

In tal caso si dice che la retta orizzontale di equazione  $y = \ell$  è un asintoto orizzontale per  $f$  a  $+\infty$ .

Analogamente si parla di asintoto orizzontale a  $-\infty$  se esiste ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

In tal caso si dice che la retta orizzontale di equazione  $y = \ell$  è un asintoto orizzontale per  $f$  a  $-\infty$ .

#### Asintoto obliquo

Si dice che una funzione  $f$  possiede un asintoto obliquo a  $+\infty$  se esistono e sono finiti i seguenti limiti

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

In tal caso si dice che la retta di equazione  $y = mx + q$  è un asintoto obliquo per  $f$  a  $+\infty$ .

## 4.6 Successioni

Sia  $X$  un insieme non vuoto. Una funzione  $a : \mathbb{N} \rightarrow X$  viene detta successione. Quando  $X = \mathbb{R}$  si parla di successioni reali o successioni in  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 4.10.** Sia  $\{a_n\}$  una successione in  $\mathbb{R}$ .

1. Si dice che  $\ell \in \mathbb{R}$  è il limite di  $\{a_n\}$  per  $n \rightarrow +\infty$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies |a_n - \ell| < \varepsilon$$

Si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$$

2. Si dice che  $+\infty$  è il limite di  $\{a_n\}$  per  $n \rightarrow +\infty$  se

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies a_n > M$$

Si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

3. Si dice che  $-\infty$  è il limite di  $\{a_n\}$  per  $n \rightarrow +\infty$  se

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies a_n < -M$$

Si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Le tecniche di calcolo dei limiti delle successioni sono essenzialmente le stesse che si usano per il calcolo dei limiti per  $x \rightarrow +\infty$  nel caso delle funzioni di variabile reale.

Anche nelle successioni è possibile definire relazioni di asintotico: date due successioni  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  con  $a_n \neq 0$  e  $b_n \neq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si dice che

$$a_n \sim b_n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad \text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$





# Capitolo 5

## Continuità

**Definizione 5.1** (Continuità). Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  non vuoto e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dato  $x_0 \in X$  si dice che  $f$  è continua in  $x_0$  se vale la seguente condizione:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Si dice che  $f$  è continua su  $A \subseteq X$  se è continua in ogni punto di  $A$ .

**Teorema 5.1.** Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  insieme non vuoto e siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo che  $f$  e  $g$  siano continue in un punto  $x_0 \in X$ . Allora valgono le seguenti:

1.  $f + g$  è continua in  $x_0$
2.  $f - g$  è continua in  $x_0$
3.  $f \cdot g$  è continua in  $x_0$
4. se  $g(x) \neq 0$  per ogni  $x \in X$  allora  $\frac{f}{g}$  è continua in  $x_0$

**Teorema 5.2** (Continuità delle funzioni composte). Siano  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  insiemi non vuoti e siano  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : X \rightarrow Y$ . Supponiamo che  $g$  sia continua in un punto  $x_0 \in X$  e che  $f$  sia continua in  $y_0 = g(x_0) \in Y$ . Allora la funzione composta  $f \circ g : X \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $x_0$ .

**Definizione 5.2** (Massimo e minimo di una funzione). Sia  $X$  insieme non vuoto e sia

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

1. Si dice che  $f$  ammette massimo in  $X$  se l'insieme  $f(X)$  ammette massimo. Si pone inoltre

$$\max_{x \in X} f(x) = \max(f(X))$$

2. Si dice che  $f$  ammette minimo in  $X$  se l'insieme  $f(X)$  ammette minimo. Si pone inoltre

$$\min_{x \in X} f(x) = \min(f(X))$$

**Definizione 5.3** (Estremo superiore ed estremo inferiore di una funzione). Sia  $X$  insieme non vuoto e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

1. Si dice che  $f$  ammette estremo superiore in  $X$  se l'insieme  $f(X)$  ammette estremo superiore. Si pone inoltre

$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup(f(X))$$

2. Si dice che  $f$  ammette estremo inferiore in  $X$  se l'insieme  $f(X)$  ammette estremo inferiore. Si pone inoltre

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf(f(X))$$

Una funzione reale ammette sempre estremo superiore ed inferiore purchè si ammettano come loro possibili valori rispettivamente  $+\infty$  e  $-\infty$ .

**Teorema 5.3** (Weierstrass). *Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \leq b$ . Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$ . Allora  $f$  ammette massimo e minimo in  $[a, b]$ .*

**Teorema 5.4** (Teorema di Continuità della Funzione Inversa). *Siano  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli e sia  $f : I \rightarrow J$  una funzione invertibile. Se  $f$  è continua in  $I$  allora la funzione inversa  $f^{-1} : J \rightarrow I$  è continua in  $J$ .*

## 5.1 Punti di discontinuità

I punti di discontinuità vengono classificati in tre specie. Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo di estremi  $a$  e  $b$ :

$$a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in (a, b)$ . In tal modo la funzione  $f$  è definita sia a destra che a sinistra di  $x_0$ .

### Discontinuità di prima specie o salto

Si dice che  $x_0$  è un punto di discontinuità di prima specie o di tipo salto se esistono finiti ma diversi tra loro

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

### Discontinuità di seconda specie

Si dice che  $x_0$  è un punto di discontinuità di seconda specie se almeno uno tra

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

non esiste oppure è infinito.

### Discontinuità di terza specie o eliminabile

Si dice che  $x_0$  è un punto di discontinuità di terza specie o eliminabile se esiste ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

ma è diverso da  $f(x_0)$ .

# Capitolo 6

## Derivate

**Definizione 6.1.** Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Siano  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$ . La seguente funzione

$$\varphi_{x_0} : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$$

viene detta rapporto incrementale.

**Definizione 6.2.** Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Siano  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$ . Si dice che  $f$  è derivabile in  $x_0$  se esiste ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In tal caso si pone

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Con il cambiamento di variabile si può scrivere:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La retta passante per un punto  $(x_0, y_0)$  di coefficiente angolare  $m$  è

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

Nel nostro caso  $y_0 = f(x_0)$  ed  $m = f'(x_0)$ :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

**Definizione 6.3.** Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Siano  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$ .

1. Si dice che  $f$  è derivabile da destra in  $x_0$  se esiste ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In tal caso questo limite viene detto derivata destra di  $f$  in  $x_0$ .

2. Si dice che  $f$  è derivabile da sinistra in  $x_0$  se esiste ed è finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In tal caso questo limite viene detto derivata sinistra di  $f$  in  $x_0$ .

**Teorema 6.1.** Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ . Siano  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$ . Allora  $f$  è derivabile in  $x_0$  se e soltanto se  $f$  è derivabile sia da destra che da sinistra ed inoltre le derivate destra e sinistra coincidono.

**Teorema 6.2** (Continuità delle funzioni derivabili). Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $x_0 \in I$ . Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $x_0$ . Allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

*Dimostrazione.* Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

deve esistere ed è finito. Ma il denominatore tende a 0 e l'unico modo per avere un rapporto con limite finito è che il numeratore tenda anch'esso a 0. Ciò dimostra che  $f$  è continua in  $x_0$ .  $\square$

**Teorema 6.3.** Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $x_0 \in I$ . Siano  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili in  $x_0$ . Allora valgono le seguenti conclusioni:

1.  $f + g$  è derivabile in  $x_0$  ed inoltre

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. sia  $c \in \mathbb{R}$  allora  $cf$  è derivabile in  $x_0$  ed inoltre

$$cf'(x_0) = cf'(x_0)$$

3.  $f - g$  è derivabile in  $x_0$  ed inoltre

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

4.  $fg$  è derivabile in  $x_0$  ed inoltre

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

5.  $f/g$  è derivabile in  $x_0$  ed inoltre

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

**Teorema 6.4** (Derivazione della funzione composta). Siano  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  intervalli e siano  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : I \rightarrow J$ . Sia  $x_0 \in I$  e sia  $g$  derivabile in  $x_0$ . Posto  $y_0 = g(x_0) \in J$  si supponga che  $f$  sia derivabile in  $y_0$ . Allora  $f \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $x_0$  ed inoltre

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$