Relazione di Laboratorio di Calcolo

Riccardo Nazzari, Linda Monfermoso

Primo Semestre 2023/2024

1 Introduzione al progetto

Il progetto assegnato prevede la scrittura di un programma in linguaggio C per il calcolo di integrali definiti, utilizzando due metodi diversi e fornendo i risultati con almeno 4 cifre decimali esatte. Abbiamo deciso di determinare il valore delle funzioni integrate con il **metodo composito del punto medio** ed il **metodo composito di Cavalieri/Simpson**.

2 Richiami alla teoria

2.1 Integrazione numerica

L'integrale è un operatore lineare che, data una funzione f(x) e un intervallo [a, b] nel dominio, restituisce il valore dell'area sottesa nel suo grafico.

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Questo calcolo risulta facile nel momento in cui siamo a conoscenza della primitiva F, ma non sempre è così: quando la funzione f(x) viene definita come integrale (come la funzione di Eulero) oppure è nota solo in alcuni punti bisogna ricorrere alla **integrazione numerica** dell'integrale.

L'integrazione numerica, detta anche *quadratura numerica*, consiste nello stimare il valore di un integrale definito, con il vantaggio di poterlo fare senza conoscere la funzione primitiva. Del resto sappiamo che l'integrale non è altro che il calcolo dell'area della superfcie delimitata dal grafico della funzione, dall'asse delle ascisse e dalle rete di equazione x=a e x=b; di fatto, i metodi esistenti approssimano il calcolo di tale area mediante diverse tecniche.

I metodi per l'integrazione numerica si dividono in due macrocategorie:

- **Formule di Newton-Cotes**: si basano sulla valutazione dell'integrando in n+1 punti equidistanti e sono consigliate da utilizzare proprio se i valori sono noti. Fanno parte di questa famiglia il **metodo del punto medio**, il **metodo di Cavalieri/Simpson** e la **formula del trapezio**;

- **Formule di Gauss**: sono preferibili da utilizzare quando è possibile modificare i punti dove è valutato l'integrando, basandosi sulla conoscenza di n+1 valori della funzione nell'intervallo considerato.

Nel nostro progetto abbiamo impiegato il metodo del punto medio e di Cavalieri/Simpson.

2.2 Metodo del punto medio

Conosciuto anche come **metodo dei rettangoli**, è il modo più semplice per approssimare un integrale definito nella forma:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Possiede un grado di precisione molto basso, ed il calcolo si basa sul rappresentare l'integrale come un rettangolo, formato da:

- una base di valore (b-a), dove 'b' e 'a' sono i due estremi di integrazione;
- un'altezza di valore f(c), dove 'c' è il punto medio dell'intervallo.

Otteniamo quindi un'espressione dell'integrale pari a:

$$I_r = (b-a)\,f(c) \;=\; (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

2.2.1 Formula composita del punto medio

L'errore che si ottiene con il metodo del punto medio appena enunciato è abbastanza alto e si può calcolare come:

$$\varepsilon = \int_a^b f(x)dx - I_r = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\varepsilon)$$

In particolare, è lampante come l'utilizzo di *un solo* rettangolo lasci spazio ad un errore di precisione abbastanza grossolano rispetto al risultato sperato.

E' possibile aumentare l'accuratezza di questo metodo dividendo l'intervallo in n parti con la stessa ampiezza h, calcolata come:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

da cui ricaviamo i punti di suddivisione:

$$x_0 = a,\, x_1 = a+h,\, x_2 = a+2h,\, ...\, x_n = a_n + nh = b.$$

su cui possiamo calcolare i valori della funzione:

$$y_0 = f(a),\, y_1 = f(x_1),\, y_2 = f(x_2),\, ..., y_{n-1} = f(x_{n-1}),\, y_n = f(b).$$

Quello che otteniamo sono dei rettangoli che hanno come base l'intervallo di suddivisione, mentre come altezza il segmento rappresentato dal valore di f calcolato nel primo estremo oppure nel secondo.

A questo punto possiamo calcolare l'area applicando la formula vista in precedenza per ogni intervallo, ovvero:

$$\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

3 Sviluppo del progetto