WI2244TN: Differentiaalvergelijkingen (en Lin. Algebra)

Gewone DV's

- **H.2** Lineaire eerste orde DV: $y'(t) + a(t)y(t) = g(t)$;
  oplossen via integrerende factor $I(t) = e^{A(t)}$ met $A(t) = \int a(t)\,dt$.

- Separabele eerste orde DV: (te herschrijven tot:) $p(y)y'(x) = q(x)$.
  Oplossen via integreren:
  $\int p(y)dy = \int q(x)dx$ geeft impliciete oplossing $P(y) = Q(x) + K$.

- Exacte DV: $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ met $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.
  (Impliciete) oplossing: $F(x, y) = C$, waarbij $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$.

- **H.3** Tweede orde lineaire DV: $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = g(t)$.
  Existentiestelling:
  (I) Oplossingsstructuur: $y = y_H + y_p = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$,
  y_H: homogene oplossing, d.w.z. opl van homogene (of: complementaire) vgl $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$.
  y_p: particuliere oplossing.
  Onafhankelijke oplossingen: Wronskiaan.
  (II) Unieke oplossing bij beginwaarden (en 'nette' $a(t), b(t), \ldots$) $y(0) = p$, $y'(0) = q$.
  Bij constante coëfficiënten $a(t), b(t), c(t)$: y_1, y_2 via karakteristieke vgl: $ar^2 + br + c = 0$.
  (Soms) Tweede onafhankelijke oplossing bepalen via ordereductie.
  Eulervergelijking: $t^2y'' + bty' + cy = g(t)$:
  y_H bepalen door t^α te substitueren, of via substitutie $t = e^x$.
  Particuliere oplossing bepalen via 'slim stellen' of door variatie van constanten.
  Hogere orde: Analoog.

- **H.5** Voor 'niet-standaard' tweede orde lineaire DV, bijv. $y'' + ty' - 2y = e^t$:
  Machtreeksmethode: Zoek oplossing in de vorm $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n$.
  Onderscheid tussen regulier punt en regulier-singulier punt.
  Voor regulier-singulier punt: Gegeneraliseerde machtreeks.

H.7 Stelsels Lineaire DV'n: $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$, $\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

- Omschrijven van n-de orde lineaire DV geeft stelsel lineaire eerste orde DV'n.

- Homogene stelsel $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ oplossen via eigenwaarden/-vectoren van A.
  Klassificeren van gedrag rond oorsprong:
  stabiel/instabiel, knoop, zadelpunt, spiraalpunt, centrum, ...

- Lineaire oplossingsstructuur: $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$, met A een $n \times n$ matrix, heeft algemene oplossing $\mathbf{x} = \mathbf{x}_H + \mathbf{x}_p = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_p$.
  Opnieuw: $\mathbf{x}_H$: homogene oplossing, $\mathbf{x}_p$: particuliere oplossing.
  Uniciteit: beginwaardeprobleem $\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$ heeft unieke oplossing.

- Fundamentaalmatrix: $\mathbf{\Phi}(t) = [\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2(t)\ \cdots\ \mathbf{x}_n(t)]$, waarbij de kolommen onafhankelijke oplossingen zijn van $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, en
  Wronskiaan $W(t) = \mathrm{Det}(\mathbf{\Phi}(t))$ (bijv om onafhankelijkheid van oplossingen na te gaan).
  Particuliere oplossing berekenen:
  Als bij n-de orde lineaire DV: 'slim stellen' of variatie van constanten.

- e-macht van een matrix:
  — e^{At} is (unieke) oplossing van $\mathbf{F}'(t) = A\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{F}(0) = I$
  — Via machtreeks $e^{At} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$
  — Voor diagonaliseerbare matrix A: $A = PDP^{-1} \Rightarrow e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$.

- Om rekentechnische redenen bekijken we voornamelijk 2×2 stelsels

H.9 Stelsels niet-lineaire DV'n: $\begin{cases} x_1'(t) &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ & \ldots \\ x_n'(t) &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{cases}$

- Wederom: Om rekentechnische redenen bekijken we uitluitend 2×2 stelsels.
- Autonome stelsels: rechterlid niet expliciet afhankelijk van t.

  In dimensie 2: $\begin{cases} x'(t) &= F(x,y) \\ y'(t) &= G(x,y) \end{cases}$

  In dit geval 'vast' richtingsveld; oplossingen $(x(t), y(t))$ doorlopen banen (trajectorieën) in fasevlak.
- Banen zijn vastgelegd door $\dfrac{dy}{dx} \left(= \dfrac{dy/dt}{dx/dt} \right) = \dfrac{G(x,y)}{F(x,y)}$

  (Deze DV is soms oplosbaar, bijv. indien separabel.)
- Stationaire/Kritieke punten $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x(t) = x_0,\ y(t) = y_0$ is (constante of: stationaire) oplossing

  Gedrag rond stationaire punten klassificeren via lineariseringen.

H.10 Partiële differentiaalvergelijkingen

- "The Big Three": Warmtevergelijking $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x,t)$

  Golfvergelijking $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u = u(x,t)$

  Potentiaal- (of: Laplace) Vgl. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = u(x,y)$
- Oplosmethode: Driestappenplan

  Bijv. bij warmtevgl met begin- en randwaarden $u(0,t) = u(0,L) = 0,\ u(x,0) = h(x)$:

  (I) Scheiden van variabelen: $u(x,t) = X(x)T(t)$.

  (II) Ontkoppelde DV's voor X en T oplossen; randwaardeprobleem,

  hier: $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right) \exp\left[-k\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 t\right]$

  (III) Coëfficiënten B_n bepalen zodat

  $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n u_n(x,t) \quad \text{voldoet aan beginconditie} \quad u(x,0) = h(x).$$

  Dit doorgaans via Fourier-reeksen (hier: sinusreeks).