АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА

10
класс

В двух частях

Часть 2

ЗАДАЧНИК
для общеобразовательных учреждений
(профильный уровень)

Под редакцией
А. Г. Мордковича

Допущено
Министерством образования и науки
Российской Федерации

4-е издание, исправленное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2007

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6
А45

Авторы:
А. Г. Мордкович, Л. О. Денищева, Л. И. Звавич, Т. А. Корешкова, Т. Н. Мишустина, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов

А45 Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2 задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А. Г. Мордкович и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. — 4-е изд., испр. — М. Мнемозина, 2007. — 336 с. ил.
ISBN 978-5-346-00793-7

Задачник представляет собой вторую часть комплекта из двух книг, предназначенных для изучения курса алгебры и начал анализа в 10-м классе с профильной подготовкой по математике (первая часть — учебник). Он содержит трехуровневую систему упражнений, выстроенную по каждой изучаемой теме. Количество заданий достаточно для работы в классе и дома, не требует привлечения дополнительных источников.

УДК 373.167.1:[512+517]
ББК 22.14я721+22.161я721.6

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич, Денищева Лариса Олеговна, Звавич Леонид Исаакович и др.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

10 класс

В двух частях

Часть 2

ЗАДАЧНИК
для общеобразовательных учреждений (профильный уровень)

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский.* Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко.* Корректор *Н. А. Александрова*
Компьютерная верстка: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001815.02.07 от 22.02.2007.
Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,0. Доп. тираж 50 000 экз. Заказ № 18046 (К-Пз).

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 367-54-18, 367-56-27, 367-67-81; факс: (495) 165-92-18.
E-mail: ioc@mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 783-82-84, 783-82-85, 783-82-86.

Торговый дом «Мнемозина». Тел./факс: (495) 657-98-98. E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

ISBN 978-5-346-00791-3 (общ.)
ISBN 978-5-346-00793-7 (ч. 2)

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Издательство «Мнемозина» подготовило учебный комплект для изучения в 10-м классе профильной школы курса алгебры и начал анализа, состоящий из двух книг:

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра и начала анализа. Учебник.

А. Г. Мордкович и др. Алгебра и начала анализа. Задачник.

У вас в руках вторая книга комплекта — задачник.

Наличие отдельного задачника позволило авторам выстроить в нем полноценную (как по объему, так и по содержанию) систему упражнений, достаточную для работы в классе, для домашних заданий, для повторения (без привлечения других источников). В каждом параграфе представлены упражнения трех уровней сложности: простые, средние (слева от номера такого упражнения помещен знак «○») и трудные (со знаком «●»).

В конце книги приведены ответы к большинству заданий второго и третьего уровней. Нумерация упражнений своя в каждом параграфе.

Число заданий в каждом номере — одно, два (а) и б)) или четыре (а)—г)). Все они в пределах конкретного номера однотипны, поэтому советуем вам разбирать в классе пункт а) (или пункты а) и б)), а на дом задавать пункт б) (или, соответственно, пункты в) и г)).

Данная книга естественным образом соотносится с известным задачником «Алгебра и начала анализа, 10—11» (издательство «Мнемозина», авторы — А. Г. Мордкович и др.), который с 2000 года используется в общеобразовательных школах России: значительная часть материала, имеющаяся в упомянутом действующем задачнике, содержится и в настоящем задачнике. Это даст учителю, работавшему ранее по задачнику для общеобразовательной школы, возможность более комфортно работать по задачнику для профильной школы.

Количество упражнений в данном задачнике таково, что его достаточно для учащихся профильных классов различной математической направленности: и при четырех, и при пяти, и при шести часах в неделю на изучение курса алгебры и начал анализа. В дальнейшем предполагается выпуск методического пособия с комментариями к параграфам учебника, с решениями трудных упражнений из задачника, с разными вариантами поурочного планирования. Пока же, для удобства учителя, мы приводим три варианта примерного тематического планирования (из расчета 4, 5, 6 часов в неделю) в первой части комплекта — в учебнике.

П.1. Сократите дробь и найдите ее значение при заданных значениях переменных:

а) $\dfrac{9ab - 3b^2}{12a^2 - 4ab}$, если $a = \dfrac{1}{3}$; $b = \dfrac{3}{5}$;

б) $\dfrac{m^4 - 1}{m^8 - 1}$, если $m = \dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{24t^2 + 8st}{5s^2 + 15st}$, если $t = \dfrac{1}{4}$; $s = \dfrac{5}{12}$;

г) $\dfrac{x^3 + y^3}{x^6 - y^6}$, если $x = 2$; $y = 3$.

П.2. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 3x}$;

б) $\dfrac{5x^2 + x - 4}{x^2 + x}$;

в) $\dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 - 16}$;

г) $\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9}$.

П.3. Докажите, что заданная функция является линейной, и найдите ее область определения:

а) $y = \dfrac{x^4 - 5x^3 + 3x - 15}{x^3 + 3}$;

б) $u = \dfrac{t^4 - 8t^2 + 16}{(t + 2)(t^2 - 4)}$;

в) $z = \dfrac{p^3 - 4p^2 - 5p + 20}{p^2 - 5}$;

г) $s = \dfrac{m^6 - 16m^3 + 64}{(m^2 + 2m + 4)(m^3 - 8)}$.

П.4. Докажите, что график данной функции принадлежит прямой, параллельной оси абсцисс; найдите область определения этой функции:

а) $y = \dfrac{4x - 5}{7x - 21} - \dfrac{x - 1}{2x - 6}$;

б) $y = \dfrac{2x + 5}{x - 3} - \dfrac{11(x + 1)}{4x - 12}$;

в) $y = \dfrac{3x + 4}{5x - 10} - \dfrac{x + 4}{3x - 6}$;

г) $y = \dfrac{x - 5}{3x + 3} - \dfrac{3x - 1}{2x + 2}$.

П.5. Докажите, что график данной функции принадлежит прямой; найдите область определения этой функции:

а) $y = \dfrac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^2 + 3x - 10}$; в) $y = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 9x + 36}{x^2 - 7x + 12}$;

б) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 16x + 32}{x^2 - 6x + 8}$; г) $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 3x + 2}$.

П.6. Выразите переменную x через переменную y:

а) $y = \dfrac{3}{x - 2} + 4$; в) $y = \dfrac{7}{x + 3} - 1$;

б) $y = \dfrac{4}{1 - x} - 2$; г) $y = \dfrac{2}{3 - x} + 5$.

Упростите выражение:

П.7. а) $\left(\dfrac{10}{25 - b^2} - \dfrac{1}{5 + b} + \dfrac{1}{5 - b}\right)(25 - 10b + b^2)$;

б) $\left(\dfrac{2}{m - 2} - \dfrac{8}{m^2 - 4} - \dfrac{1}{m + 2}\right)(m^2 + 4m + 4)$;

в) $\left(\dfrac{4}{a + 1} + \dfrac{2a}{a^2 - 1} - \dfrac{1}{a - 1}\right)(a^2 + 2a + 1)$;

г) $\left(\dfrac{2}{3 - x} - \dfrac{4x}{9 - x^2} - \dfrac{1}{3 + x}\right)(9 + 6x + x^2)$.

П.8. а) $\dfrac{2m}{m^2 - 4} - \dfrac{2}{m^2 - 4} : \left(\dfrac{m + 1}{2m - 2} - \dfrac{1}{m - 1}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{b - 1} - \dfrac{1}{b^2 - b}\right) \cdot \dfrac{b}{b + 2} - \dfrac{2b}{b^2 - 4}$;

в) $\dfrac{1}{a - 2} - \dfrac{4a}{a^2 - 4} \quad \left(\dfrac{1}{a - 1} - \dfrac{1}{a^2 - a}\right)$;

г) $\left(\dfrac{c + 4}{3c + 3} - \dfrac{1}{c + 1}\right) : \dfrac{c + 1}{3} + \dfrac{2}{c^2 - 1}$.

П.9. а) $\left(a-1+\dfrac{2}{a+1}\right):\dfrac{a^2+1}{a^2+2a+1}$;

б) $\left(b+3+\dfrac{18}{b-3}\right)\cdot\dfrac{b^2-6b+9}{b^2+9}$;

в) $\left(p-4+\dfrac{32}{p+4}\right)\cdot\dfrac{p^2+8p+16}{p^2+16}$;

г) $\left(x+5+\dfrac{50}{x-5}\right):\dfrac{x^2+25}{x^2-10x+25}$.

П.10. а) $\dfrac{3-x^2}{x^2-1}+\dfrac{3x}{x^2-1}\quad\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}$;

б) $\dfrac{5a-6}{a+2}+\dfrac{a}{a+2}\quad\dfrac{a^2-4}{a}+\dfrac{10-3a}{a+2}$;

в) $\dfrac{3y-4}{y+1}+\dfrac{y}{y+1}:\dfrac{y}{y^2-1}+\dfrac{5-2y}{y+1}$;

г) $\dfrac{3b-2}{b^2-4}+\dfrac{3}{b^2-4}\quad\dfrac{b+2}{3}+\dfrac{b}{b+2}$.

П.11. а) $\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{5}{x^2-x-6}+\dfrac{2x}{x-3}\right)\cdot\dfrac{x}{2x+1}$;

б) $\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{10}{x^2-3x-4}+\dfrac{3x}{x-4}\right):\dfrac{3x+2}{3}$;

в) $\left(\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{4}{x^2-5x+6}+\dfrac{2x}{x-2}\right):\dfrac{2x+1}{3}$;

г) $\left(\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x^2+2x-3}\right)\quad\dfrac{x}{2x+1}$.

П.12. Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях переменной:

а) $\left(x-\dfrac{x}{1-x}\right):\dfrac{3x^4}{x^2-2x+1}$ при $x=\dfrac{1}{6}$;

б) $\left(m-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{n+m}+\dfrac{n}{m-n}+\dfrac{2mn}{n^2-m^2}\right)$ при $m=\dfrac{1}{5}$; $n=-\dfrac{4}{5}$.

П.13. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значений входящих в него переменных:

$$\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}} \quad \frac{1}{a+\cfrac{1}{b}}.$$

Упростите выражение:

П.14. а) $10\sqrt{\frac{2}{5}}-0{,}5\sqrt{160}+\sqrt{1\frac{1}{9}}$; в) $15\sqrt{\frac{3}{5}}-0{,}5\sqrt{60}+2\sqrt{3\frac{3}{4}}$;

б) $4\sqrt{3\frac{1}{2}}-0{,}5\sqrt{56}-\sqrt{1\frac{5}{9}}$; г) $3\sqrt{2\frac{1}{3}}-\sqrt{84}-\sqrt{5\frac{1}{4}}$.

П.15. а) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{12\sqrt{2}}\quad\sqrt{3\sqrt{8}}$;

б) $\sqrt{8\sqrt{3}}\quad\sqrt{3\sqrt{12}}$; г) $\frac{4-\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}+\frac{4+\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}}$.

П.16. а) $\sqrt{2}\left(\sqrt{8+\sqrt{2}\quad\sqrt{9+\sqrt{17}}}+\sqrt{8-\sqrt{2}\quad\sqrt{9-\sqrt{17}}}\right)$;

б) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

П.17. Докажите, что

$$\frac{\sqrt{5}-3}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+1\right)\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+2\right)\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+3\right)=-1.$$

П.18. Сравните числа A и B, если:

а) $A=\frac{5}{3-\sqrt{2}}+\frac{5}{3+\sqrt{2}}$, $B=\sqrt{1000}$;

б) $A=\frac{7}{5-4\sqrt{2}}+\frac{7}{5+4\sqrt{2}}$, $B=-\sqrt{90}$.

П.19. а) Известно, что $f(x)=\sqrt{x}$. Найдите, при каких значениях переменной выполняется равенство $f(x+2)=f(2x+6)$.

б) Известно, что $f(x)=\sqrt{x}$. Найдите, при каких значениях переменной выполняется равенство $f(5x-1)-f(3x+17)=0$.

П.20. Сократите дробь:

а) $\dfrac{4\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{9y-16x}$;

б) $\dfrac{196m^2-169n}{13\sqrt{n}+14m}$;

в) $\dfrac{25p-49q}{5\sqrt{p}+7\sqrt{q}}$;

г) $\dfrac{6\sqrt{ab}-9\sqrt{c}}{81c-36ab}$.

П.21. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{p-\sqrt{pq}+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$;

б) $\dfrac{4+2\sqrt{t}+t}{2+\sqrt{t}}$;

в) $\dfrac{x-3\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-3}$;

г) $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$.

Упростите выражение:

П.22. а) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{4\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}+5}{4\sqrt{x}}-\dfrac{3\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$;

б) $\dfrac{11\sqrt{m}-2\sqrt{n}}{3\sqrt{m}}-\dfrac{2\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{3\sqrt{m}}+\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{3\sqrt{m}}$;

в) $\dfrac{4\sqrt{p}-2}{2\sqrt{p}}-\dfrac{2\sqrt{p}-1}{2\sqrt{p}}+\dfrac{1}{2\sqrt{p}}$;

г) $\dfrac{2\sqrt{c}-\sqrt{d}}{5\sqrt{c}}+\dfrac{2\sqrt{c}+\sqrt{d}}{5\sqrt{c}}+\dfrac{\sqrt{c}-5\sqrt{d}}{5\sqrt{c}}$.

П.23. а) $\left((a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+a-b\right)\left((a-b)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-1\right)\right)$;

б) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{\sqrt{ab}-b}{a-b}$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt{m}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{m}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{m}+1}-\dfrac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1}\right)$;

г) $\dfrac{\sqrt{(a+\sqrt{ab})(\sqrt{ab}+b)}+\sqrt{(a-\sqrt{ab})(\sqrt{ab}-b)}}{\sqrt{(a+\sqrt{ab})(\sqrt{ab}+b)}-\sqrt{(a-\sqrt{ab})(\sqrt{ab}-b)}}$.

Решите уравнение:

П.24. а) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x}$;

б) $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0$;

в) $\frac{2x}{x+2}+\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}=0$;

г) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$.

П.25. а) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$;

б) $\frac{3}{x^2-9}=\frac{1}{9-6x+x^2}+\frac{3}{2x^2+6x}$;

в) $\frac{3x}{x^2-1}-\frac{5}{4x^2+4x+4}-\frac{1}{2(1-x)}=0$;

г) $1+\frac{4x^2}{2x^2+8x}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$.

П.26. Не решая уравнения $x^2+4x-2=0$, найдите значение выражения:

а) $x_1^2+x_2^2$; б) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; в) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; г) $x_1^3+x_2^3$,

где x_1, x_2 — корни заданного уравнения.

П.27. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$ будет наименьшей?

П.28. При каких значениях параметра a квадратный трехчлен $(2a-2)x^2+(a+1)x+1$ имеет отрицательные корни больше, чем -2?

П.29. Известно, что корни x_1, x_2 уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ удовлетворяют соотношению $x_1^2+x_2^2=1{,}75$. Найдите значение параметра a.

П.30. Решите неравенство:

а) $-2x+3(x-2)<5x$;

б) $7x+1\geqslant 12(x-2)$;

в) $8(x+1)+3x\leqslant 4x+15$;

г) $5x-4(x+3)>7x$.

Решите неравенство:

П.31. а) $\frac{2x-5}{x+4} > 0$; в) $\frac{4+3x}{1-x} \leqslant 0$;

б) $\frac{12-4x}{2x+5} \geqslant 0$; г) $\frac{2-x}{3-4x} > 0$.

П.32. а) $x^2 - 5x + 15 > 0$; в) $x^2 + 5x - 36 \geqslant 0$;

б) $x^2 - 12x + 27 \leqslant 0$; г) $x^2 - 7x + 20 < 0$.

П.33. а) $\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-x-2} \geqslant 0$; в) $\frac{(x-2)(2x-1)}{2x^2+7x+3} > 0$;

б) $\frac{-2}{2x^2-11x+12} \leqslant 0$; г) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} \geqslant 0$.

П.34. а) $\frac{(1+x)(2+x)}{(1-x)(2-x)} \geqslant 1$; в) $\frac{(x-3)(2-x)}{(3+x)(x+2)} < -1$;

б) $\frac{2}{x} - \frac{3}{x-4} < \frac{5}{2}$; г) $\frac{6}{x-1} - \frac{13}{x-2} \leqslant 2$.

П.35. При каких значениях параметра a любое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ будет решением неравенства $ax^2 - (3a + 1)x + 3 < 0$?

П.36. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $(a^2 - 5a + 6)x^2 - 2(a - 3)x + 1 > 0$ выполняется при всех действительных значениях x. Существуют ли такие значения a, при которых решением неравенства является пустое множество?

Решите систему неравенств:

П.37. а) $\begin{cases} 3x - 1 > 2(x+5), \\ 7x - 1 < 3(3x - 11); \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 3 \leqslant 4(x-1) + 13, \\ x - 1 < 2(3x - 16); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 5 \geqslant 4 - 3x, \\ 4x - 7 < 2(4 - x); \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 5 \leqslant 12 - 3(x-4), \\ 8x - 3 \geqslant 4(x-5). \end{cases}$

ГЛАВА 1 Действительные числа

§ 1. Натуральные и целые числа

1.1. а) Сколько существует натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 2?
б) Сколько существует натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 3?
в) Сколько существует натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 6?
г) Сколько существует натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 27?

1.2. Может ли из 101 идущих подряд натуральных чисел быть ровно одно делящееся:
а) на 50; б) на 51; в) на 101; г) на 10001?

○1.3. Найдите какие-нибудь 36 идущих подряд трехзначных чисел, среди которых нет ни одного кратного 37. Какое наименьшее и какое наибольшее значение может принимать наименьшее из этих 36 трехзначных чисел?

1.4. Может ли произведение 101 идущих подряд натуральных чисел не делиться:
а) на 51; б) на 101; в) на 606; г) на 4386?

Докажите утверждение:

○1.5. а) Если каждое из натуральных чисел n и m делится на натуральное число p, то $(n + m)\quad p$ и $(n - m)\quad p$.*
б) Если каждое из натуральных чисел n и m делится на натуральное число p, а x, y — произвольные натуральные числа, то $(nx \pm my)\quad p$.
в) Если натуральное число n делится на натуральное число p, а натуральное m не делится на p, то ни сумма $n + m$, ни разность $n - m$ не делятся на p.

---

* Если натуральное число n делится на натуральное число p, то принято писать $n \,\vdots\, p$.

г) Если сумма натуральных чисел и каждое ее слагаемое, кроме последнего, делятся на некоторое натуральное число p, то и это последнее слагаемое делится на p.

○1.6. а) Если $n \quad p$, то $(n \quad m) \quad p$ для любого натурального m.
б) Если $x \quad 5$, то $3x \quad 15$.
в) Если $x \quad 7$ и $y \quad 3$, то $(xy + 14y) \quad 21$.
г) Если $x \quad 17$ и $y \quad 23$, то $(x^3 + y^3) \quad 40$.

Докажите, что:

1.7. а) Сумма двух четных чисел есть четное число;
б) сумма двух нечетных чисел есть четное число;
в) сумма четного и нечетного числа есть нечетное число;
г) если x, y — произвольные натуральные числа, то $xy(x + y)$ и $xy(x - y)$ — четные числа.

1.8. а) Разность квадратов любых натуральных различных чисел делится на их сумму и на их разность;
б) разность любых натуральных различных чисел является делителем разности их кубов.

○1.9. а) Если $a + b$ делится на c, а $a - b$ не делится на с, то ни a, ни b не делятся на с;
б) $ad + bc + ac + bd$ делится на $a + b$;
в) если $ad + bc$ делится на $a + b$, то и $ac + bd$ делится на $a + b$;
г) если $ad + bc$ не делится на $a + b$, то и $ac + bd$ не делится на $a + b$.

1.10. Объясните, почему не существует натуральных чисел a и b таких, что:
а) $152a + 134b = 12\,345$; б) $150a + 135b = 1234$.

1.11. Найдите все натуральные числа x и y такие, что:
а) $7x + 12y = 50$; в) $5x - y = 17$;
б) $11x + 18y = 98$; г) $5x - 11y = 137$.

○1.12. Докажите, что:
а) $72^3 + 34^3$ делится на 106;
б) $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad + 181^3 + 182^3)$ делится на 183;
в) $18^3 + 26^3$ делится на 176;
г) $(2^3 + 3^3 + \quad + 196^3 + 197^3)$ делится на 199.

○1.13. а) Число $14a + 11b$ не делится на 5; докажите, что и $9a + b$ не делится на 5.
б) Число $17a + 29b$ не делится на 13; докажите, что и $4a + 3b$ не делится на 13.

○1.14. Найдите все такие натуральные числа n, при которых:

а) выражение $\frac{5n + 4}{n}$ является натуральным числом;

б) выражение $\frac{5n + 4}{n + 3}$ является натуральным числом;

в) выражение $\frac{7n + 12}{n}$ является натуральным числом;

г) выражение $\frac{7n + 11}{n - 5}$ является натуральным числом.

○1.15. Найдите все такие натуральные числа n, при которых заданное выражение является натуральным числом:

а) $\frac{5n^2 + 7n - 12}{n}$; б) $\frac{n^7 + 3n^2 + 36}{n^2}$.

1.16. На графике заданной функции найдите все точки, обе координаты которых — целые числа:

а) $y = 2 + \frac{4}{x + 3}$; б) $y = \frac{5x + 17}{x + 7}$.

○1.17. При каком наименьшем натуральном значении параметра a на графике заданной функции есть ровно одна точка, координатами которой являются натуральные числа? Найдите координаты этой точки:

а) $y = \frac{a}{x + 1}$; б) $y = \frac{a}{x + 113}$.

○1.18. Известно, что при некотором значении a число $b = a + \frac{2}{a}$ — целое. Будет ли целым число:

а) $a^2 + \frac{4}{a^2}$; б) $a^3 + \frac{8}{a^3}$?

○1.19. Найдите все значения a, при которых x и y являются натуральными числами:

а) $x = \frac{4}{a} + 3$, $y = \frac{8}{a} + a$; б) $x = \frac{3}{a} + 3$, $y = \frac{9}{a} + 2a$.

○1.20. При каких значениях параметра a уравнение имеет два различных натуральных корня:

а) $ax^2 - (2a^2 + 5)x + 10a = 0$;

б) $ax^2 - (a^2 + 5)x + 3a - 5 = 0$?

●1.21. Найдите все целочисленные значения параметра a, при которых оба корня уравнения — целые числа:

а) $x^2 + ax + \frac{4}{a - 4} = 0$;

б) $(a + 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 5a - 4 = 0$.

1.22. Найдите последнюю цифру числа:
а) 2^{1047}; б) 3^{1641}; в) 7^{1799}; г) 9^{1861}.

○**1.23.** Найдите последнюю цифру числа:
а) $2001^{2002^{2003}}$; в) $1345^{6789^{12345}}$;
б) $1999^{2002^{1999}}$; г) $23\,456^{78901^{2345}}$

○**1.24.** Существуют ли такие натуральные числа n и k, что последняя цифра разности указанных двух степеней равна нулю:
а) $627^n - 833^k$; б) $834^n - 626^k$?

●**1.25.** а) Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $n^3 - n$ делится на 6, то и число $(n+1)^3 - (n+1)$ также делится на 6. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.
б) Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $n^3 + 5n$ делится на 6, то и число $(n+1)^3 + 5(n+1)$ также делится на 6. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.
в) Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $7^n + 3n \quad 1$ делится на 9, то и число $7^{n+1} + 3(n+1) - 1$ также делится на 9. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.
г) Докажите, что если при некотором натуральном значении n число $3^{2n+2} - 8n - 9$ делится на 64, то и число $3^{2n+4} - 8(n+1) - 9$ также делится на 64. Проверьте наличие делимости для $n = 1$ и подумайте, для каких еще значений n имеет место делимость.

Найдите НОД и НОК чисел:

1.26. а) 154 и 210; в) 255 и 510;
б)120 и 144; г) 105 и 165.

1.27. а) $2^{32}\ \ 3^4\ \ 11^{31}$ и $2^{23}\ \ 3^7\ \ 11^{14}$;
б) $4^{24}\ \ 6^{14}\ \ 9^8$ и $8^{18}\ \ 10^{17}\ \ 12^{16}$.

1.28. Не пользуясь калькулятором, определите, является ли данное число квадратом или кубом некоторого натурального числа:
а) 75 625; б) 614 656; в) 31 104; г) 45 212 176.

1.29. Найдите все простые числа, меньшие:
а) 50; б) 100.

1.30. Найдите все составные числа, меньшие:
а) 50; б) 100.

1.31. Выпишите все пары взаимно простых составных чисел, из отрезка натурального ряда 1, 2, 3, ..., 20.

○1.32. Докажите, что: а) наименьший отличный от 1 делитель натурального числа n, большего 1, есть простое число;
б) наименьший отличный от 1 делитель составного числа n не больше $\sqrt{n}$;
в) если $p_1 < p_2 < \quad < p_n$ — простые числа, то число $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ является либо простым числом, либо делится на простое число p, большее, чем p_n;
г) простых чисел бесконечно много.

○1.33. Докажите, что:
а) любое натуральное число либо взаимно просто с заданным простым числом p, либо делится на p;
б) если произведение нескольких множителей делится на простое число p, то хотя бы один из множителей делится на p.

1.34. Составьте разложение на простые множители числа:
а) 504; б) 8281; в) 108 000; г) 12 321.

○1.35. Найдите число делителей числа:
а) 24; б) 504; в) 180; г) 60.

○1.36. Полагают, по определению, что $n! = 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \qquad (n-1)\ \ n!$ (символ $n!$ читают *n-факториал*), а $1! = 1$. С каким показателем входит число 2 в разложение на простые множители числа:
а) 10!; б) 20!; в) 40!; г) 100!?

○1.37. С каким показателем входит число 5 в разложение на простые множители числа:

а) 10!; б) 20!; в) 40!; г) 100!?

○1.38. Сколькими нулями оканчивается число:
а) 10!; б) 20!; в) 40!; г) 100!?

○1.39. Докажите, что среди данных последовательных натуральных чисел нет ни одного простого числа:
а) $23! + 2$, $23! + 3$; $23! + 4$, ... , $23! + 23$;
б) $101! + 2$, $101! + 3$; $101! + 4$, ... , $101! + 101$.
в) Сколько составных чисел в каждой серии а) и б)?
г) Выпишите 1 000 000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого.

○1.40. Докажите, что:
а) произведение двух идущих подряд натуральных чисел делится на 2;

б) произведение трех идущих подряд натуральных чисел делится на 3 и на 6;

в) произведение четырех идущих подряд натуральных чисел делится на 4, на 12 и на 24;

г) произведение пяти идущих подряд натуральных чисел делится на 5, на 20 и на 120.

○1.41. Найдите простые числа p и q, если известно, что корни уравнения $x^2 - px + q = 0$ — натуральные числа.

○1.42. Найдите все простые числа p и q такие, что:
а) $5p + 17q = 140$; б) $7p + 3q = 86$.

1.43. Составьте формулу натурального числа, которое:
а) при делении на 5 дает остаток 4;
б) при делении на 11 дает остаток 7;
в) при делении на 7 дает остаток 2;
г) оканчивается числом, делящимся на 15.

1.44. Найдите остаток от деления на 10 числа:
а) 1234; б) 43 215 432.

1.45. Число x при делении на 8 дает остаток 5. Чему может быть равен остаток от деления числа x:
а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 6?

1.46. Докажите, что:
а) остаток от деления натурального числа на 2 равен остатку от деления его последней цифры на 2;
б) остаток от деления натурального числа на 5 равен остатку от деления его последней цифры на 5.

1.47. Докажите, что:
а) остаток от деления натурального числа на 4 равен остатку от деления на 4 числа, образованного его двумя последними цифрами;
б) остаток от деления натурального числа на 25 равен остатку от деления на 25 числа, образованного его двумя последними цифрами.

1.48. Найдите остаток от деления на 3 числа:
а) 1 234 321; б) 55 555 155 555.

1.49. Найдите остаток от деления на 9 числа:
а) 1 234 567; б) 55 555 155 555.

○1.50. Докажите, что произведение $1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad 13$ делится на $(1 + 2 + 3 + \quad + 13)$, а произведение $1 \quad 2 \quad 3 \quad\quad 16$ не делится на $(1 + 2 + 3 + \ldots + 16)$.

1.51. В числе 23 $\square$ 47 заполните пропуск такой цифрой, чтобы:
а) число делилось на 3; б) число делилось на 9.

1.52. В числе 233 $\square$ 4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы:
а) число делилось на 4; б) число делилось на 12.

1.53. В числе 735 $\square$ 4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы:
а) число при делении на 3 давало в остатке 2;
б) число при делении на 4 давало в остатке 2.

1.54. В числе 7345 $\square$ заполните пропуск такой цифрой, чтобы:
а) число при делении на 9 давало в остатке 2;
б) число при делении на 25 давало в остатке 7.

○1.55. Рассмотрите два предложения:
а) сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел делится на 3;
б) сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 5 тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел делится на 5.
Докажите, что из этих утверждений верно только одно.

Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению:

○1.56. а) $2y - x = 15$; в) $7x + 4y = 123$;
б) $6x - y = 25$; г) $5x - 7y = 23$.

●1.57. а) $yx = 15$; в) $7xy + 4y^2 = 11$;
б) $36x^2 - y^2 = 27$; г) $x^2 - 7xy + 6y^2 = 18$.

○1.58. Сколько делителей имеет данное число:
а) 315; в) 250 000;
б) 9450; г) 623 700?

§ 2. Рациональные числа

2.1. Между рациональными числами a и b поместите 5 рациональных чисел:
а) $a = 1{,}1$, $b = 1{,}2$; в) $a = 11{,}0001$, $b = 11{,}0002$;
б) $a = \frac{11}{12}$, $b = \frac{10}{11}$; г) $a = \frac{12\,221}{12\,222}$, $b = \frac{122\,221}{122\,222}$.

2.2. Сколько целых чисел заключено между числами:
а) $\frac{1111}{37}$ и $\frac{11\,512}{361}$; б) $\frac{1234}{56}$ и $\frac{78\,910}{789}$?

2.3. Сколько существует обыкновенных правильных несократимых дробей со знаменателем, равным:

а) 17; б) 236?

Выпишите наибольшую из этих дробей в каждом случае.

2.4. Среди правильных дробей вида $\frac{n}{12}$, где n — натуральное число, найдите ближайшую к числу:

а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $\frac{6}{7}$.

2.5. Среди всех дробей вида $\frac{n}{17}$, где n — натуральное число, найдите ближайшую к числу:

а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $\frac{6}{7}$.

○2.6. Найдите число вида $\frac{m}{n}$ (m, n — натуральные взаимно простые числа) с наименьшим знаменателем, лежащее на числовой прямой между числами:

а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$;

б) $\frac{2}{9}$ и $\frac{2}{7}$; г) $\frac{121}{323}$ и $\frac{101}{232}$.

2.7. Найдите число, равноудаленное от чисел:

а) $\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{5}$; б) $\frac{171}{363}$ и $\frac{101}{242}$.

2.8. Известно, что $0 < a < b$. Какое из двух чисел $\frac{a}{b}$ или $\frac{b}{a}$ лежит ближе к 1?

2.9. Запишите целое число в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

а) 1; б) 20; в) -4; г) -111.

2.10. Запишите обыкновенную дробь в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{8}{11}$; г) $\frac{4}{15}$.

○2.11. Используя калькулятор, определите десятичный знак с указанным номером после запятой в десятичной записи числа:

а) $\frac{5}{13}$, 301-й знак; в) $\frac{6}{19}$, 2000-й знак;

б) $\frac{4}{17}$, 123-й знак; г) $\frac{7}{23}$, 78-й знак.

Запишите число в виде обыкновенной несократимой дроби:

2.12. а) 0; б) -123; в) 12,0006; г) 0,00123.

○2.13. а) 0,(36); б) 12,0(006); в) -1,2(3); г) -0,01(234).

2.14. Запишите число в виде бесконечной десятичной периодической дроби:
а) 10,1; б) -1,2; в) 4,023; г) -0,0101.

2.15. Запишите данные десятичные периодические дроби в виде дробей, имеющих одно и то же число цифр в периоде, и определите период каждой из этих дробей в полученной записи:
а) 3,(345) и 59,(34); б) 3,(15) и 59,(23454).

2.16. Запишите данные десятичные чисто периодические дроби в виде смешанных периодических десятичных дробей, определите их периоды. Единственно ли такое представление:

а) 1,(34); б) 30,(115); в) 6,(543); г) 9,(2610)?

○2.17. Выполните действия и представьте результат в виде бесконечной периодической десятичной дроби:

а) $\sqrt{0,(4)}$; б) $\sqrt{3,48(4)}$; в) $\sqrt{1,(7)}$; г) $\sqrt{4,3402(7)}$.

○2.18. На числовой прямой отмечены точки $A(-5)$ и $B(10)$. С помощью циркуля и линейки отметьте точку:
а) $C(5)$; б) $O(0)$; в) $D(1)$; г) $P(0,6)$.

§ 3. *Иррациональные числа*

○3.1. Докажите иррациональность числа:
а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $1 - \sqrt{3}$; г) $\sqrt{3} - \sqrt{15}$.

○3.2. Используя результат 3.1, докажите иррациональность числа:
а) $5\sqrt{2}$; б) $-7\sqrt{3}$; в) $5(1 - \sqrt{3})$; г) $\dfrac{(\sqrt{3} + \sqrt{15})}{12}$.

○3.3. а) Пусть $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь и $q > 1$. Докажите, что натуральная степень $\left(\dfrac{p}{q}\right)^n$, $n \in N$, есть также несократимая дробь.

б) Пусть a^n, $n \in N$ — целое число. Докажите, что a — либо целое, либо иррациональное число.
в) Опираясь на утверждения а) и б), докажите иррациональность числа $\sqrt[3]{21}$.

о3.4. Каким числом, рациональным или иррациональным, является:
а) сумма рационального и иррационального чисел;
б) разность рационального и иррационального чисел;
в) произведение не равного нулю рационального числа и иррационального числа;
г) частное рационального, не равного нулю числа, и иррационального числа?

Какое из данных чисел является иррациональным:

3.5. а) 2,(2345); б) $\sqrt{0,(4)}$; в) $\sqrt{1,96}$; г) $\sqrt{19,6}$?

о3.6. а) $1 + \sqrt{12} - 2\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$;
б) $\left(7 - \sqrt{11}\right)\ \left(7 + \sqrt{11}\right)$; г) $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$?

о3.7. Приведите пример двух различных иррациональных чисел, таких, что:
а) их сумма — рациональное число;
б) их разность — рациональное число;
в) их произведение — рациональное число;
г) их частное — иррациональное число.

о3.8. Приведите пример, если это возможно, двух иррациональных различных чисел, таких, что *одновременно*:
а) их сумма и разность — рациональные числа;
б) их произведение и частное — рациональные числа.

о3.9. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, у которого один из корней равен:
а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3} - 5$; в) $\sqrt{5} - 2$; г) $\sqrt{3} - \sqrt{8}$.

о3.10. Докажите, что найдется пара иррациональных чисел α и β таких, что:
а) $\alpha^2 - \beta$ — натуральное число;
б) $2\alpha^2 + 3\beta$ — целое отрицательное число.

о3.11. Докажите, что существует такое иррациональное число a, что число c является натуральным:
а) $c = a + \dfrac{1}{a}$; б) $c = a^2 + a$.

○3.12. а) Докажите, что для любого иррационального числа α, найдется такое рациональное число β, что произведение $\alpha\beta$ — рациональное число.

б) Докажите, что если точка $(x; y)$ лежит на прямой $y = kx + b$, где $k \neq 0$, b — рациональные числа, то числа x и y или оба рациональные, или оба иррациональные.

○3.13. Найдите хотя бы одно рациональное число, расположенное на отрезке:

а) $\left[\sqrt{2}; \sqrt{3}\right]$; в) $\left[\sqrt{5} - 2; 2{,}236\right]$;

б) $\left[\sqrt{3} - \sqrt{2}; \sqrt{3} + \sqrt{2}\right]$; г) $\left[\sqrt{3} + \sqrt{5}; 3{,}(9)\right]$.

○3.14. Найдите хотя бы одно иррациональное число, расположенное на отрезке:

а) $[0; 1]$; в) $[1{,}2; 1{,}6]$;

б) $[1{,}2; 1{,}22]$; г) $[1{,}2; 1{,}201]$.

○3.15. Найдите хотя бы одно рациональное число, расположенное на полуинтервале:

а) $\left(1{,}5; \sqrt{3}\right]$; б) $\left[\sqrt{3} - \sqrt{2}; 0{,}5\right)$.

○3.16. Найдите хотя бы одно иррациональное число, расположенное на полуинтервале:

а) $\left[0; \sqrt{2}\right)$; б) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}; 0{,}5\right]$.

○3.17. Найдите хотя бы одну точку $(x; y)$, имеющую рациональные координаты, лежащую на прямой:

а) $y = x\left(\sqrt{2} + 1\right) - 2$; б) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{2}} - 2$.

○3.18. Найдите хотя бы одну точку $(x; y)$, имеющую иррациональные координаты, лежащую на прямой:

а) $y = 5x - 2$; б) $y = \dfrac{x}{7} + 2$.

○3.19. Могут ли длины сторон треугольника выражаться числами:

а) $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 1; б) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, 4?

●3.20. Отметьте на числовой прямой точки $A(1)$ и $B(4)$. С помощью циркуля и линейки постройте точку:

а) $C\left(\sqrt{7}\right)$; б) $D\left(1 - \sqrt{7}\right)$; в) $E\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)$; г) $G\left(2 - \sqrt{5}\right)$.

§ 4. Множество действительных чисел

4.1. На числовой прямой отмечены точки $A(-2)$ и $B(17)$. Найдите координаты:

а) середины отрезка AB;

б) точки M, если B — середина отрезка AM;

в) точки M, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = 2 : 3$;

г) точки C числовой прямой, такой, что $AC = 3CB$.

4.2. а) Отметьте на числовой прямой нули функции
$y = (x - 1)^2(31x - 37)(41x - 49)$;

б) определите промежутки знакопостоянства функции
$y = (x - 1)^2(31x - 37)(41x - 49)$;

в) отметьте на числовой прямой нули функции
$y = (49x + 59)^2(31x + 37)^3(41x + 49)$;

г) определите промежутки знакопостоянства функции
$y = (49x + 59)^2(31x + 37)^3(41x + 49)$.

4.3. а) Отметьте на числовой прямой нули функции

$$y = \frac{(4x - 7)^2}{(19x - 43)^3(17x - 39)};$$

б) определите промежутки знакопостоянства функции

$$y = \frac{(4x - 7)^2}{(19x - 43)^3(17x - 39)};$$

в) отметьте на числовой прямой нули функции

$$y = \frac{(8x + 17)^4}{(59x + 69)^2(51x + 73)};$$

г) определите промежутки знакопостоянства функции

$$y = \frac{(8x + 17)^4}{(59x + 69)^2(51x + 73)}.$$

4.4. Укажите два рациональных и два иррациональных числа, принадлежащих данному промежутку:

а) $\left(0{,}2; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

в) $(0{,}21; 51)$;

г) $(0{,}21; 0{,}22)$.

○4.5. Существует ли геометрическая прогрессия, все члены которой различны и расположены на отрезке:

а) $[1;\ 2]$; б) $[1;\ 1{,}2]$?

Если существует, то приведите соответствующий пример, если не существует, то докажите это.

4.6. Используя калькулятор, расположите в порядке возрастания числа:

π, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, 3,14; 3,1415; $\sqrt[3]{31}$ и $\sqrt{9{,}91}$.

4.7. Выпишите 10 различных чисел, расположенных между числами:

а) 0,123 и 0,456; в) 0,123 и 0,124;

б) −0,123 и −0,132; г) −1,9999 и −2.

○4.8. На числовой прямой отмечены точки 0 и 1. При помощи циркуля и линейки постройте точки:

а) 1,4; б) $\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{10}$; г) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

○4.9. а) На числовой прямой отмечены точки −3 и 1. При помощи циркуля и линейки постройте точки 0 и 5.

б) На числовой прямой отмечены точки $-\sqrt{2}$ и 3. При помощи циркуля и линейки постройте точку 0.

4.10. Найдите расстояние между точками числовой прямой:

а) 2,4 и 17,9; в) 12,14 и 18,92;

б) −4,27 и 5,03; г) −4,27 и −5,03.

○4.11. а) Докажите, что в интервале $(8;\ 9)$ нет ни наименьшего ни наибольшего числа;

б) докажите, что среди чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 < 5$, нет ни наименьшего ни наибольшего числа.

○4.12. Число m называют *точной верхней границей* числового множества X, если для любого числа $x \in X$ справедливо неравенство $x \leqslant m$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ (ε — буква греческого алфавита *эпсилон*) существует такое число $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon > m - \varepsilon$. Найдите точную верхнюю границу множества X, если:

а) $X = [0;\ 1]$; в) $X = \left\{x \middle| x = \frac{1}{n},\ n \in N\right\}$;

б) $X = [0;\ 1)$; г) $X = \left\{x \middle| x = \frac{1 + 5n}{n},\ n \in N\right\}$.

○4.13. Число m называют *точной нижней границей* числового множества X, если для любого числа $x \in X$ справедливо неравенство $x \geqslant m$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon < m + \varepsilon$. Найдите точную нижнюю границу множества X, если:

а) $X = [0; 1]$;

в) $X = \left\{x \middle| x \quad \frac{1}{n},\ n \in N\right\}$;

б) $X = [0; 1)$;

г) $X = \left\{x \middle| x = \frac{1 + 5n}{n},\ n \in N\right\}$.

○4.14. а) Найдите все такие значения параметра b, при которых в промежутке $(-5; b]$ содержится ровно 8 целых чисел.

б) Найдите все такие значения параметра b, при которых в промежутке $(-5; b)$ содержится ровно 8 целых чисел.

в) Найдите все такие значения параметра b, при которых в промежутке $[b; 8]$ находится ровно 8 целых чисел.

г) Найдите все такие значения параметра b, при которых в промежутке $(b; b + 4]$ находится ровно 5 целых чисел.

○4.15. а) Найдите отрезок наименьшей длины, содержащий 33 целых числа, большее из которых есть 12.

б) Найдите промежуток наибольшей длины, содержащий не более четырех целых чисел, меньшее из которых есть 18.

○4.16. На числовой прямой отмечены точки $A(2a - 6a^2)$ и $B(2a - 3)$. При каких значениях a точка C лежит между A и B, если:

а) $C(2)$; б) $C(-1)$?

○4.17. На числовой прямой отмечены точки $A(12a + 6a^2)$ и $B(-2a + 3)$. При каких значениях a точка C лежит между A и B, если:

а) $C(-2)$; б) $C(a)$?

○4.18. При каких значениях p числа $\frac{p}{2 - p}$ и $\sqrt{2p - 4}$ принадлежат отрезку $[-3; 2]$?

4.19. Расположите на числовой прямой числа a, b, 0, если:

а) $\begin{cases} ab < 0, \\ a + b < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} ab < 0, \\ a + b > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} ab > 0, \\ a + b > 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} ab > 0, \\ a + b < 0. \end{cases}$

4.20. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество всех точек x числовой прямой, удовлетворяющих неравенству $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, называют *$\varepsilon$-окрестностью* точки a, при этом точки $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$ называют *граничными точками* ε-окрестности точки a. При каких $\varepsilon > 0$ точка 12,35 лежит в ε-окрестности точки:
а) 12,5; б) 12,2?

4.21. Точки x и y являются граничными точками некоторой ε-окрестности. Найдите ε, если:
а) $x=12{,}5$, $y = 12{,}7$; в) $x = -2{,}9$, $y = 3{,}3$;
б) $x = 32{,}31$, $y = 31{,}32$; г) $x = -31$, $y = -29{,}8$.

○4.22. Дано множество $P = \left\{x \middle| x = \frac{1}{n},\ n \in N\right\}$. Определите, при каких натуральных значениях n числа из P будут лежать в ε-окрестности точки 0, если:
а) $\varepsilon = 1$; б) $\varepsilon = 0{,}1$; в) $\varepsilon = 0{,}0001$; г) $\varepsilon = \frac{1}{\pi^5}$.

4.23. Целой частью действительного числа x называют наибольшее целое число, не превосходящее числа x, и обозначают $[x]$. Найдите целую часть числа:
а) 4; б) $-3{,}2$; в) 4,45; г) $-3{,}3456$.

○4.24. Докажите:
а) если $[x] = k$, то для любого натурального числа n верно равенство $[x + n] = k + n$;
б) если $[x] = k$, то для любого числа y справедливо неравенство $[x + y] \leqslant k + y$.

Решите уравнение:

○4.25. а) $[x] = 1$; б) $[x] = -11$; в) $[x] = -1$; г) $[x] = 11$.

●4.26. а) $[x] = x$; в) $[x] = \frac{x}{2}$;
б) $[x + 5] = 1 - x$; г) $\left[\frac{x+1}{4}\right] = x + 2$.

●4.27. Постройте на координатной плоскости xOy график соотношения:
а) $[x] = [y]$; в) $[x] < [y]$;
б) $[x] > [y]$; г) $[x - 1] > [y + 1]$.

4.28. Дробной частью действительного числа x называют разность $x - [x]$; дробную часть числа x обозначают символом $\{x\}$. Вычислите:

а) $\{2\}$; б) $\{12{,}81\}$; в) $\{1{,}08\}$; г) $\{\sqrt{2}\}$.

4.29. Вычислите:

а) $\{-2\}$; б) $\{-12{,}81\}$; в) $\{-1{,}08\}$; г) $\{-\sqrt{2}\}$.

○**4.30.** Пусть $\omega \in [0; 1)$. Докажите, что для любого натурального a верно равенство:

а) $\{a + \omega\} = \omega$; б) $\{a - \omega\} = 1 - \omega$.

○**4.31.** а) Найдите все числа x, для которых $\{x\} = 0{,}123$;

б) найдите наибольшее целое число, не превосходящее 1000, дробная часть которого равна 0,123.

●**4.32.** Постройте график заданной функции на отрезке $[-4; 4]$:

а) $y = [x]$; в) $y = [x + 4]$;

б) $y = [1 - x]$; г) $y = \left[\dfrac{1 - x}{2}\right]$.

●**4.33.** Постройте график заданной функции на отрезке $[-4; 4]$:

а) $y = \{x\}$; в) $y = \{x + 4\}$;

б) $y = \{1 - x\}$; г) $y = \left\{\dfrac{1 - x}{2}\right\}$.

●**4.34.** Пусть $\alpha \in [-4; 0]$. Найдите отрезок наименьшей длины, содержащей все числа вида:

а) $1 + 2\alpha^2$; в) $5\alpha^3$;

б) $5\alpha + \alpha^2$; г) $\dfrac{2\alpha + 1}{3\alpha - 1}$.

§ 5. *Модуль действительного числа*

5.1. Найдите модуль числа:

а) $\left|1 - \sqrt{2}\right|$; в) $\left|2{,}2 - \sqrt{5}\right|$;

б) $\left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right|$; г) $\left|\sqrt{6} - 2{,}5\right|$.

5.2. Используя определение модуля, запишите выражение без знака модуля:

а) $|x - 5|$;
б) $|x - 5| + |x + 8|$;
в) $|x - 5| - |4x - 5|$;
г) $|x - 5|\ \ (x + 3)$.

о5.3. При каких значениях x верно равенство:

а) $|x| = x$;
б) $|x - 7| = x - 7$;
в) $|x| = -x$;
г) $|x^2 - 7x + 12| = 7x - x^2 - 12$?

5.4. Найдите расстояние между точками A и B числовой прямой:

а) $A(7)$ и $B(12)$;
б) $A(-17)$ и $B(-62)$;
в) $A(-7)$ и $B(12)$;
г) $O(0)$ и $B(-12)$.

На числовой прямой отметьте все такие точки x, которые удовлетворяют заданному соотношению:

5.5. а) $|x| = -x$;
б) $|x + 2| = x + 2$;
в) $|x| = x$;
г) $|x - 2| = 2 - x$.

5.6. а) $|x| \leqslant x$;
б) $|x| \leqslant -x$;
в) $|x + 2| \leqslant x + 2$;
г) $|x - 2| \leqslant 2 - x$.

5.7. а) $|x| \geqslant x$;
б) $|x| \geqslant -x$;
в) $|x + 2| \geqslant x + 2$;
г) $|x - 2| \geqslant 2 - x$.

5.8. Докажите свойства модуля действительного числа:

а) $|a| \geqslant a$;
б) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;
в) $|a| > a \Leftrightarrow a < 0$;
г) $|a| + |b| + |c| = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$.

Упростите выражение:

5.9. а) $|a - b| - |b - a|$;
б) $|a - c| - |a + c| - |c - a| + |-c - a|$.

о5.10. а) $\sqrt{\pi^2 - 8\pi + 16}$;

б) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}$

в) $\sqrt{4\pi^2 - 28\pi + 49}$;

г) $\sqrt{(2{,}7 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(2{,}6 - \sqrt{7})^2}$

о5.11. а) $\left|\sqrt{51} - 7\right| + \left|\sqrt{51} - 5\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{75} - 11\right|$;

б) $|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 2\sqrt{2}| + |2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}| + \ldots +$
$+ |5\sqrt{2} - 6\sqrt{2}| + |6\sqrt{2} - 9|$;

в) $\left|1-\sqrt{37}\right|+\left|2-\sqrt{37}\right|+\left|3-\sqrt{37}\right|+\quad+$

$+\left|6-\sqrt{37}\right|+6\quad\left|7-\sqrt{37}\right|$;

г) $\left|1-\sqrt{137}\right|+\left|2-\sqrt{137}\right|+\left|3-\sqrt{137}\right|+\quad+$

$+\left|11-\sqrt{137}\right|+11\quad\left|\sqrt{137}-12\right|$.

○5.12. а) Пусть $a_1 < a_2 < \quad < a_n$. Докажите, что

$\left|a_1-a_2\right|+\left|a_2-a_3\right|+\left|a_3-a_4\right|+\quad+$

$+\left|a_{n-1}-a_n\right|=\left|a_1-a_n\right|$.

б) Пусть $n < \sqrt{a} < n+1$. Докажите, что

$\left|1-\sqrt{a}\right|+\left|2-\sqrt{a}\right|+\left|3-\sqrt{a}\right|+\quad+$

$$+\left|n-\sqrt{a}\right|+n\quad\left|\sqrt{a}-n-1\right|=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решите уравнение:

○5.13. а) $|x+4|=5$; в) $|x-4|=15$;

б) $|x-4|=|10-x|$; г) $|x-4|=|5x|$.

○5.14. а) $|x+4|=-5$; в) $|x-4|=\sqrt{20}-2\sqrt{5}$;

б) $|x-4|=15-\sqrt{227}$; г) $|x+4|=3\sqrt{12}-6\sqrt{3}$.

○5.15. а) $|x+4|=2x$; в) $|x^2-4x|=3x$;

б) $|x-14|=8+2x$; г) $|x^2+7x|=4x+10$.

Решите неравенство:

●5.16. а) $|x+4|<2x$; в) $|x-14|\leqslant 8+2x$;

б) $|x^2-4x|<3x$; г) $|x^2+7x|\leqslant 4x+10$.

●5.17. а) $|x+5|>5x-7$; в) $|7x+4|\geqslant 6+5x$;

б) $|x^2+x-5|>3x$; г) $|-x^2-x|\geqslant 4x-2$.

○5.18. а) Какие значения может принимать $|x-7|$, если $|x-4|=6$;
б) какие значения может принимать $|x+5|$, если $|x-2|=16$?

●5.19. а) Найдите все значения a, при которых $|x - 2| = a$, если $|x - a| = 1$;

б) найдите все значения a, при которых $|x - 2a + a^2| = a$, если $|x - a| = 2 - a$.

●5.20. а) Какие значения может принимать $|x - y|$, если $|x - a| = 7$, $|y - a| = 16$;

б) какие значения может принимать $|a - b|$, если $|x - a| = 7$, $|x - b| = 16$?

●5.21. а) Пусть $|x - 1| = 5$. Найдите все возможные значения выражения $\sqrt{\dfrac{2|x + 4|}{x^2 - x - 10}}$.

б) Пусть $|x - 1| < 5$. Найдите все возможные значения выражения $\sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 5}{29}}$.

Постройте график функции. Для каждой функции укажите область определения, множество значений, промежутки монотонности, нули функции:

○5.22. а) $y = |x - 5|$; б) $y = |x + 3| + |1 - x|$; в) $y = 2 - |1 - x|$; г) $y = |x + 3| - |1 - x|$.

○5.23. а) $y = |x - 5| \ \ (x + 3)$; б) $y = |x + 3| \ \ |1 - x|$.

●5.24. а) $y = \left|2 - \sqrt{5 - x}\right|$; б) $y = 2 - \sqrt{5 - |x|}$; в) $y = \left|2 - \sqrt{5 + x}\right|$; г) $y = \left|2 - \sqrt{5 + |x|}\right|$.

●5.25. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 2 + |x + 5|$; б) $y = |x - 2| + |x + 5|$; в) $y = |x - 2| - |x + 5|$; г) $y = |x - 2| \ \ |x + 5|$.

●5.26. На рисунке 1 изображен график функции $y = f(x)$. Постройте график уравнения:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$; в) $|y| = f(x)$; г) $|y| = f(|x|)$.

Выполните аналогичные задания для функций $y = g(x)$ (рис. 2), $y = h(x)$ (рис. 3) и $y = \varphi(x)$ (рис. 4).

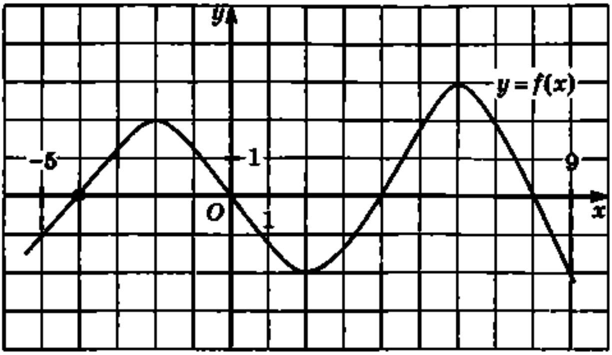

Рис. 1

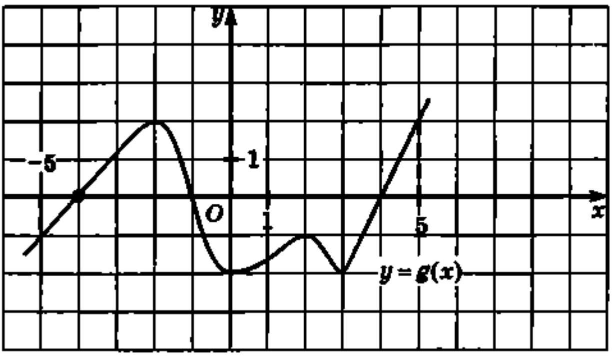

Рис. 2

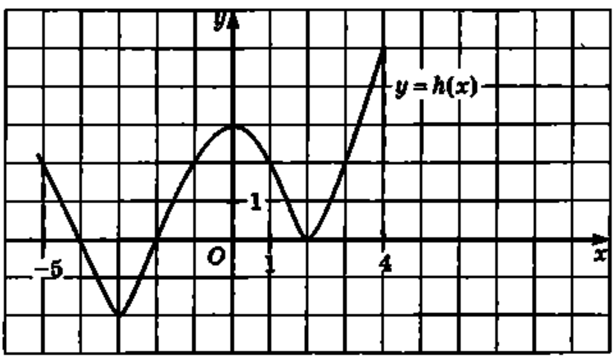

Рис. 3

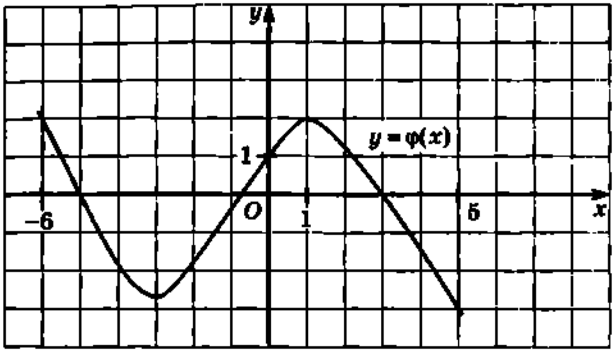

Рис. 4

●5.27. Постройте график уравнения:

а) $|x + 2y| = 4$;

б) $|x| + 2y = 4$;

в) $x + 2|y| = 4$;

г) $|x| + 2|y| = 4$.

§ 6. Метод математической индукции

○6.1. Методом математической индукции докажите:

а) формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n - 1)$;

б) формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \dfrac{(2a_1 + d(n - 1))n}{2}$;

в) формулу общего члена геометрической прогрессии $b_n = b_1q^{n-1}$;

г) формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии $S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ при $q \neq 1$.

Вычислите сумму:

○6.2. а) $7 + 8 + 9 \quad + (n + 6)$;

б) $2 + 11 + 20 + \ldots + (9n - 7)$;

в) $1{,}35 + 1{,}4 + 1{,}45 + \quad + (0{,}05n + 1{,}3)$;

г) $0{,}(3) + 0{,}(5) + 0{,}(7) + \quad + (0{,}(2)n + 0{,}(1))$.

○6.3. а) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \quad + n(-1)^{n+1}$;

б) $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \quad + (-1)^n n^2$;

в) $0 + 3 + 2 + 5 + 4 + 7 + 6 + \ldots + (n + (-1)^n)$;

г) $2 - 6 + 12 - 20 + \ldots + (-1)^{n+1}(n^2 + n)$.

Докажите, что при любом натуральном значении n выполняется равенство:

○6.4. а) $1 + 2 + 3 + \quad + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

б) $1 + 4 + 7 + \quad + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$;

в) $5 + 6 + 7+ \quad + (n + 4) = \frac{n(n+9)}{2}$;

г) $1{,}6 + 3{,}1 + 4{,}6 + \quad + (1{,}5n + 0{,}1) = \frac{n(3n+3{,}4)}{4}$.

○6.5. а) $1 + 2 + 4 + 8 + \quad + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

б) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n} = 1{,}5 - \frac{1{,}5}{3^n}$;

в) $3 - 9 + 27 - 81 + \ldots + (-3)^n = \frac{3}{4}(1 - (-3)^n)$;

г) $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \quad + \underset{n-1 \text{ нулей после запятой}}{0{,}000\ldots01} = 1{,}(1) \quad (1 \quad \underset{n \text{ нулей после запятой}}{0{,}000\ldots01} \quad)$.

○6.6. а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \quad + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \quad + (3n - 2)^2 = \frac{n(6n^2 - 3n - 1)}{2}$;

в) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \quad + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$;

г) $3^2 + 7^2 + 10^2 + \quad + (4n - 1)^2 = \frac{n(16n^2 + 12n - 1)}{3}$.

○6.7. а) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

б) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \quad + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

○6.8. а) $\frac{1}{1\ \ 2} + \frac{1}{2\ \ 3} + \frac{1}{3\ \ 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

б) $\frac{1}{2\ \ 7} + \frac{1}{7\ \ 12} + \quad + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)} = \frac{n}{10n+4}$.

●6.9. Докажите, что

$$\frac{1}{a\cdot(a+d)}+\frac{1}{(a+d)\cdot(a+2d)}+\frac{1}{(a+2d)\cdot(a+3d)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(a+d(n-1))(a+dn)}=\frac{n}{a(a+dn)},$$

где $a \neq 0$, $d \neq 0$, $n \in N$:

а) методом математической индукции;

б) без использования метода математической индукции.

○6.10. Используя тождество из № 6.9, вычислите сумму:

а) $\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 19}+\ldots+\frac{1}{144\cdot 149}$;

б) $\frac{1}{1{,}5\cdot 2{,}5}+\frac{1}{2{,}5\cdot 3{,}5}+\frac{1}{3{,}5\cdot 4{,}5}+\ldots+\frac{1}{73{,}5\cdot 74{,}5}$.

○6.11. Используя тождество из № 6.9, докажите неравенство:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}<1$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}<0{,}99$;

в) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<0{,}5$;

г) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{997\cdot 999}<0{,}4996$.

Докажите, что при любом натуральном значении n выполняется равенство:

○6.12. а) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

б) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

в) $1\cdot 3+3\cdot 5+\ldots+(2n-1)(2n+1)=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$;

г) $2\cdot 5+5\cdot 8+8\cdot 11+\ldots+(3n-1)(3n+2)=n(3n^2+6n+1)$.

○6.13. а) $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\ldots+(3n+1)2^{2n}=n\cdot 2^{2n-}$

б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$;

в) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$;

г) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{2n+3}{3^{n+1}}\right)$.

○6.14. а) $\frac{1^2}{1\ \ 3} + \frac{2^2}{3\ \ 5} + \quad + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

б) $\frac{1}{1\ \ 2\ \ 3} + \frac{1}{2\ \ 3\ \ 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$;

в) $\frac{1\ \ 4}{2\ \ 3} + \frac{2\ \ 5}{3\ \ 4} + \ldots + \frac{n\ \ (n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{n+2}$;

г) $\frac{1}{1\ \ 3\ \ 5} + \frac{2}{3\ \ 5\ \ 7} + \frac{3}{5\ \ 7\ \ 9} + \quad + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} =$

$= \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

●6.15. Докажите, что для любого $n \in N$ выполняется равенство:

а) $1\ \ 1! + 2\ \ 2! + 3\ \ 3! + \quad + n\ \ n! = (n+1)! - 1$;

б) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ (см. № 1.36).

●6.16. Рассмотрите три утверждения, начните их доказывать в указанном порядке методом математической индукции и определите, какое из них является верным для любого натурального значения n, а какие нет:

а) $2 + 7 + 14 + \quad + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2 + 9n + 2)}{6}$,

$2 + 7 + 14 + \ldots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2 + 7n + 3)}{6}$,

$2 + 7 + 14 + \ldots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2 + 9n + 1)}{6}$;

б) $1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2n$,

$1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 3^{1-n} + 3(n-1)$,

$1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n-1)$.

●6.17. Докажите неравенство:

а) $5^n > 3n - 1$, где $n \in N$;

б) $3^n > 2n^2 + 3n$, где $n \in N$, $n \geqslant 4$;

в) $2^n > 5n + 1$, где $n \in N$, $n \geqslant 5$;

г) $5^n > 3n^2 + 10n$, где $n \in N$, $n \geqslant 3$.

●6.18. Докажите методом математической индукции неравенство Бернулли* $(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\quad\alpha$ при $\alpha > -1$.

Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство:

●6.19. а) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \quad + \frac{1}{(n+1)^2} < 1$;

б) $\frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{13^2} + \ldots + \frac{1}{(4n+1)^2} < \frac{1}{4}$.

●6.20. а) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - 1$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 1$.

Докажите, что для любого натурального значения n справедливо утверждение:

○6.21. а) $(n^3 + 35n)\quad 6$; б) $(n^3 + 3n^2 + 8n)\quad 3$; в) $(n^5 - n)\quad 30$; г) $(2n^3 + 3n^2 + 7n)\quad 6$.

○6.22. а) $(7^n - 1)\quad 6$; б) $(2^{2n+1} + 1)\quad 3$; в) $(17^n - 1)\quad 16$; г) $(13^{2n+1} + 1)\quad 14$.

●6.23. а) $(11^{6n+3} + 1)\quad 148$; б) $(7^{2n} - 4^{2n})\quad 33$; в) $(13^{4n+2} + 1)\quad 85$; г) $(5^{n+3} + 11^{3n+1})\quad 17$.

●6.24. а) $(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n)\quad 11$; б) $(5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1})\quad 19$; в) $(5^{2+n} + 26\quad 5^n + 8^{2n+1})\quad 59$; г) $(5^{n+3}2^n - 125)\quad 45$.

●6.25. а) $(6^n + 20n + 24)\quad 25$; б) $(7^n + 12n + 17)\quad 18$.

●6.26. Выведите формулу n-го члена последовательности (a_n), заданной рекуррентным соотношением:

а) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n$; докажите, что $a_n = \frac{(n-1)n}{2}$;

б) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n^2$; докажите, что $a_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$;

в) $a_1 = -13$, $a_{n+1} = a_n + 3n$; докажите, что $a_n = \frac{(3n-29)n}{2}$;

г) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n^3$; докажите, что $a_n = \frac{(n-1)^2n^2}{4}$.

---

* Якоб Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик.

○6.27. а) Докажите, что количество разных наборов по два предмета, которые можно сделать из n различных предметов ($n \geqslant 2$), равно $\frac{n\ (n-1)}{2}$.

б) Докажите, что количество разных наборов по три предмета, которые можно сделать из n различных предметов ($n \geqslant 3$), равно $\frac{n\ (n-1)\ (n-2)}{6}$.

○6.28. а) Докажите, что количество разных непустых наборов, которые можно сделать из n различных предметов, равно $2^n - 1$.

б) Докажите, что n различных предметов можно расставить в ряд $n!$ способами (см. № 1.36).

●6.29. Докажите, что любое натуральное число $h > 4$ можно представить в виде $h = 3m + 5n$, где m и n — целые числа.

○6.30. Докажите методом математической индукции, что у выпуклого n-угольника ($n \geqslant 3$):

а) сумма внутренних углов равна $180°(n-2)$;

б) число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

ГЛАВА 2 Числовые функции

§ 7. Определение числовой функции и способы ее задания

7.1. На рисунке 5 изображен шестиугольник $ABCDEF$, составленный из двух прямоугольников, причем $AB = 10$, $BC = CD = 3$, $DE = 2$.

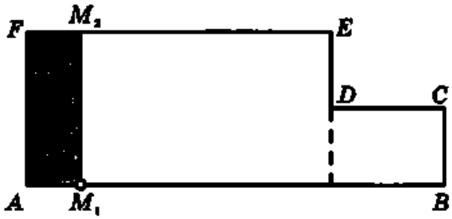

Рис. 5

Рис. 6

Найдите:

а) периметр шестиугольника $ABCDEF$;

б) площадь шестиугольника $ABCDEF$;

в) площадь прямоугольника AM_1M_2F, если AM_1 x, $0 \leqslant x \leqslant 7$;

г) площадь шестиугольника AM_1M_2DEF, если $M_1M_2 \parallel AF$ и $AM_1 = x$, $7 \leqslant x \leqslant 10$.

7.2. Используя условие задания 7.1, выразите площадь $S(x)$ части многоугольника $ABCDEF$, расположенной слева от прямой M_1M_2, как функцию от длины отрезка $AM_1 = x$.

7.3. Выполните рисунок 5 в тетради и совместите ось Ox с прямой AB, а ось Oy — с прямой AF. Определите координаты точек A, M_1, B, C, D, E, M_2, F в полученной прямоугольной системе координат. Задайте функцию, графиком которой является:

а) прямая DC;

б) прямая FE;

в) отрезок DC;

г) отрезок FE.

7.4. На рисунке 6 изображен сектор круга, радиус которого равен 1, а центральный угол равен φ, причем $\varphi \in (0; 2\pi)$.

а) Выразите площадь S этого сектора как функцию угла φ $S = S(\varphi)$.

Постройте график функции $S = S(\varphi)$.

б) Вычислите значение функции $S = S(\varphi)$ при $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

в) Найдите $S(2) - S(1)$.

г) Найдите $S(\varphi + \delta) - S(\varphi)$.

7.5. Площадь треугольника со стороной a и высотой h, опущенной на эту сторону, равна 20. Выразите длину стороны a, как функцию длины высоты h и найдите область определения и множество значений этой функции.

7.6. Перед вами известные физические формулы, связывающие несколько переменных величин. Выразите указанную величину как функцию от величины, записанной в скобках.

а) $s = vt$, $t(s)$;

б) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $R_1(R)$;

в) $v = v_0 + at$, $a(v)$;

г) $P = I^2Rt$, $I(t)$.

7.7. Выясните, при каких значениях переменных x и y линии, представленные на рисунках 7—10, задают функции вида $y = f(x)$ или/и вида $x = \varphi(y)$ (за единицу масштаба принят размер одной клетки).

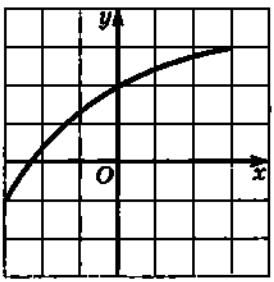

Рис. 7

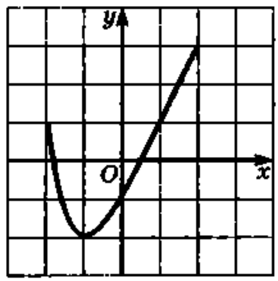

Рис. 8

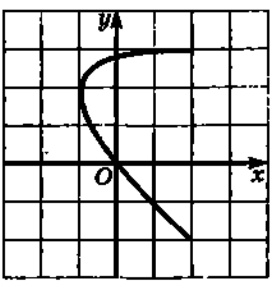

Рис. 9

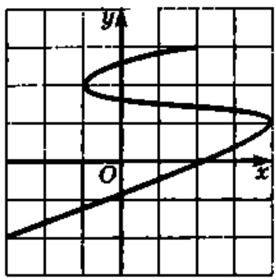

Рис. 10

7.8. Из прямоугольного листа жести размером 30×50 см по углам вырезали квадраты со стороной x см и из полученной заготовки в форме «креста» согнули коробку прямоугольной формы высотой, равной x см (см. рис.11). Выразите объем полученной коробки как функцию от x.

Рис. 11

7.9. На рисунке представлен график функции, определенной на отрезке $[a; b]$; $S(x)$ — площадь «подграфика» на отрезке $[a; x]$, $a \leqslant x \leqslant b$. Выразите величину $S(x)$ через x и постройте график функции $y = S(x)$. По этому графику найдите область значений функции $y = S(x)$:

а) рис. 12 ($a = 0$, $b = 2$); б) рис. 13 ($a = -4$, $b = 8$).

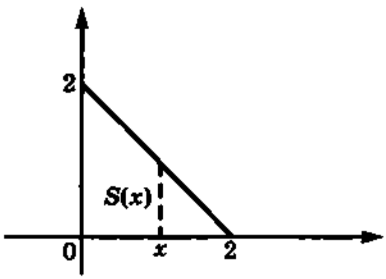

Рис. 12

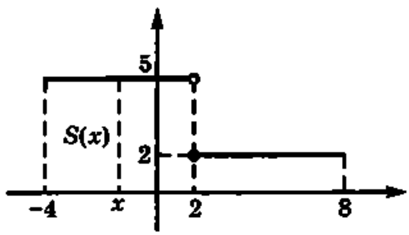

Рис. 13

Решите данное уравнение относительно y и относительно x. Исходя из полученных решений и допустимых значений переменных, выясните, можно ли говорить, что данное уравнение задает функцию вида $y = f(x)$ или/и вида $x = \varphi(y)$:

7.10. а) $2x + 3y = 24$; в) $7x - 5y = 35$;

б) $\dfrac{x - y}{x + 2y} = 2$; г) $\dfrac{2x + y}{x - 4y} = -2$.

●7.11. а) $2x - 3y^2 = -12$; б) $\dfrac{x}{x - 3} \quad \dfrac{x + 1}{x + 4} = \dfrac{y}{y - 3} \quad \dfrac{y + 1}{y + 4}$.

7.12. Постройте график функции:

а) $y = 2x - 3$; в) $y = 0{,}5x + 1$;

б) $y = 6 - 3x$; г) $y = -2 - \dfrac{1}{3}x$.

Постройте график функции:

7.13. а) $y = 2x^2$; б) $y = -\frac{3}{x}$; в) $y = -0,5x^2$; г) $y = \frac{2}{x}$.

7.14. а) $y = x^2 - 4$; б) $y = (x - 1)^2$; в) $y = 2x^2 + 1$; г) $y = -(x + 2)^2$.

7.15. а) $y = x^2 - 6x + 8$; б) $y = -x^2 + 2x + 3$; в) $y = x^2 + 4x + 7$; г) $y = -2x^2 - 6x + 1$.

7.16. а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x} + 2$; в) $y = \sqrt{x - 1}$; г) $y = \sqrt{x + 2} - 4$.

○7.17. а) $y = \frac{2}{x - 1}$; б) $y = \frac{2}{x} + 3$; в) $y = \frac{2}{x - 1} + 3$; г) $y = \frac{3x - 1}{x - 1}$.

7.18. а) $y = |x|$; б) $y = |x + 2|$; в) $y = |x| - 3$; г) $y = |x - 1| + 2$.

7.19. а) $y = 3 - x$; б) $y = 4 - |x|$.

○7.20. а) Воспользовавшись тем, что

$$\frac{x - 5}{2x + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x + 1) - 6}{x + 1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{6}{x + 1}\right) = \frac{-3}{x + 1} + \frac{1}{2},$$

постройте график функции $y = \frac{x - 5}{2x + 2}$. Напишите уравнения асимптот полученной гиперболы.

б) Функцию $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, где $c \neq 0$, $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ называют *дробно-линейной функцией*. Докажите, что графиком дробно-линейной функции является гипербола с асимптотами $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$.

○7.21. Постройте график функции и найдите область ее значений:

а) $y = 2x^2 - 1$, $x \in (-2; 1]$;

б) $y = \frac{x + 1}{x - 1}$, $x \in [0; +\infty)$;

в) $y = \sqrt{x + 3} - 1$, $x \in (-2; 1]$;

г) $y = 2x^2 + 2x - 1$, $x \in [-1; 2]$.

○7.22. Постройте график функции $y = f(x)$ и найдите область ее определения и область ее значений:

а) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2, & 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 \quad x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

Найдите область определения функции:

7.23. а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; в) $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - x - 12}$;

б) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; г) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 + x + 12}$.

○7.24. а) $y = \dfrac{\sqrt{x - 12}}{x^2 - 1}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{x + 12}}{x^2 - 1}$;

б) $y = \dfrac{1 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x + 9}}$; г) $y = \dfrac{x - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x + 3}}$.

7.25. Пусть $f(x) = -3x + 2$. Найдите:

а) $f(-x)$; б) $f(x + 5)$; в) $f(f(1))$; г) $f(f(x))$.

7.26. Пусть $f(x) = x^2$. Найдите:

а) $f(2x)$; б) $f(x - 5)$; в) $f(f(3))$; г) $f(f(x))$.

○7.27. Пусть $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 2}$. Найдите:

а) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; б) $f(2x - 1)$; в) $f(f(5))$; г) $f(f(x))$.

○7.28. а) Пусть $f(x) = x^2 + 2$. Докажите, что $f(x) = f(-x)$.

б) Пусть $f(x) = -x^3 + 2x$. Докажите, что $f(x) = -f(-x)$.

в) Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Докажите, что $(f(x))^{-1} = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

г) Пусть $f(x) = x^2 + 2$. Докажите, что $f(|x|) = f(x)$, а $|f(x)| = f(x)$.

●7.29. Найдите область определения функции, учитывая все возможные значения параметра a:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x - a}}{x^2 - 1}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{x - a}$;

б) $y = \sqrt{1 - a \quad |x|}$; г) $y = \dfrac{a \quad x^3 - \sqrt{-x^2 - 7x + 8}}{1 + \sqrt{x - a}}$.

○7.30. Пусть $f(x) = 2 - \sqrt{1 - x}$; $g(x) = \dfrac{1 + 2x}{3 + x}$. Найдите область определения функции:

а) $y = f(x) + g(x)$; в) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$;

б) $y = f(x) - g(x)$; г) $y = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

○7.31. Пусть $f(x) = x^2 - 3x - 4$; $g(x) = 5x - x^2$. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{f(x)}\ \ \sqrt{g(x)}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}$;

б) $y = \sqrt{f(x)\ \ g(x)}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{g(x)}{f(x)}}$.

○7.32. Пусть $D(f) = [-4; 1]$ — область определения функции $y = f(x)$. Найдите область определения функции:

а) $y = 15x - f(x)$; в) $y = \dfrac{7 + 4f(x)}{4 + x}$;

б) $y = \dfrac{7 + 4f(x)}{2 - x}$; г) $y = \dfrac{x - 3f(x)}{4 - x^2}$.

○7.33. Пусть $D(f) = [-5; 10]$. Найдите область определения функции:

а) $y = f(-x)$; в) $y = f(|-x|)$;

б) $y = |f(-x)|$; г) $y = f(-|x|)$.

○7.34. Пусть $D(f) = [-2; 9]$. Найдите область определения функции:

а) $y = 4f(x - 1)$; в) $y = 4\ \ f(x) - 1$;

б) $y = -4f(x + 11)$; г) $y = -4\ \ f(x) + 11$.

○7.35. а) При каких значениях параметра a функция $y = 3 - \sqrt{x - a}$ определена во всех точках отрезка $[-11; 7]$?

б) При каких значениях параметра a функция $y = 3 - \sqrt{x - 3}$ определена во всех точках отрезка $[a - 1; a + 1]$?

●7.36. Найдите все значения параметра a, при которых областью определения функции $y = \sqrt{x - 3} + \sqrt{ax + 4}$ будет:

а) луч;

б) отрезок;

в) единственное число (единственная точка);

г) пустое множество.

○7.37. а) Докажите, что, если число b принадлежит области определения функции $y = \sqrt{x^4 - 7x + 3} - \sqrt{x^4 + 7x + 3}$, то и число $(-b)$ принадлежит этой области.

б) Докажите, что, если число b не принадлежит области определения функции $y = \sqrt{x^5 - x + 3} + 3\sqrt{-x^5 + x + 3}$, то и число $(-b)$ не принадлежит этой области.

●7.38. Найдите все такие числа b, принадлежащие области определения $D(f)$ функции $y = \dfrac{1 - \sqrt{2x^2 - 7x - 22}}{x + 30}$, для которых:

а) число $b + 1$ не принадлежит $D(f)$;

б) число $b - 1$ не принадлежит $D(f)$;

в) оба числа $b + 1$ и $b - 1$ принадлежат $D(f)$;

г) отрезок $[b + 1; b + 2]$ принадлежит $D(f)$.

○7.39. а) Докажите, что все значения функции $y = 5x + 3$ положительны в окрестности точки 0 радиуса 0,2.

б) Докажите, что в 0,5-окрестности точки -1 найдутся как положительные, так и отрицательные значения функции $y = 5x + 3$.

○7.40. Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = (f(x))^2$; в) $y = (f(x))^3$;

б) $y = |f(x)|$; г) $y = \sqrt{4 + f(x)}$.

○7.41. Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = f(x + 5)$; в) $y = 5 - f(x)$;

б) $y = 5 - f(x + 5)$; г) $y = a - f(x + b)$.

○7.42. Пусть область значений функции $y = f(x - 5)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите множество значений функции:

а) $y = f(x)$; в) $y = 5 - f(x)$;

б) $y = 5 - f(x + 5)$; г) $y = a - f(x + b)$.

●**7.43.** Пусть область значений функции $y = f(x)$ есть отрезок $[-3; 5]$. Найдите все целочисленные значения функции:

а) $y = \dfrac{7}{5 + f(x)}$; в) $y = \dfrac{15}{7 - f(x)}$;

б) $y = \dfrac{8 + f(x)}{7 + f(x)}$; г) $y = \dfrac{f(x)}{6 - f(x)}$.

●**7.44.** Найдите область значений функции:

а) $y = |x|\ (x - 6) - 2$; б) $y = x\ |x - 6| - 2$.

●**7.45.** Выполните в указанном порядке задания а) и б), и, обобщив их результаты, предложите *алгоритм* нахождения множества $E(f)$ значений функции $y = f(x)$, исследуя вопрос существования корней уравнения $f(x) = a$, а также предложите *алгоритм* исследования существования корней уравнения $f(x) = a$, если известно $E(f)$.

а) Найдите область значений функции $y = x^2 - 4x - 1$ и определите, при каких значениях параметра b уравнение $b = x^2 - 4x - 1$ имеет хотя бы один корень.

б) Определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 4x - 3 = a$ имеет хотя бы один корень и найдите область значений функции $y = x^2 + 4x - 3$.

●**7.46.** а) Определите, при каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax + 3 = 0$ имеет корни, и найдите область $E(f)$ значений функции $y = \dfrac{x^2 + 3}{x}$;

б) определите, при каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - 4x + a = 0$ имеет корни, и найдите область $E(f)$ значений функции $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

●**7.47.** Найдите область значений функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x}$; в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x + 1}$; г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$.

§ 8. Свойства функций

8.1. Найдите область определения функции, заданной графически:

а) рис. 14; б) рис. 15; в) рис. 16; г) рис. 17.

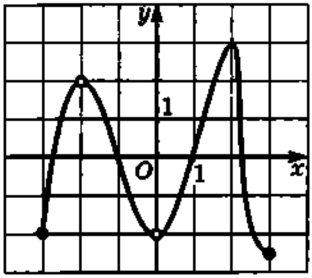

Рис. 14

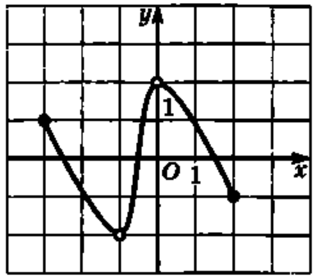

Рис. 15

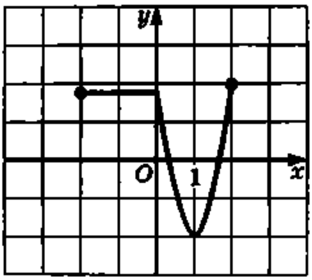

Рис. 16

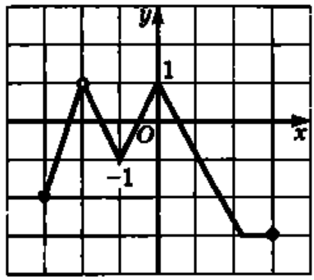

Рис. 17

Найдите область определения функции:

8.2. а) $y = \dfrac{x+1}{x^2-16}$; в) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-10x}$;

б) $y = \dfrac{x}{x(x+5)+6}$; г) $y = \dfrac{x^2-1}{(x-10)x-24}$.

8.3. а) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; в) $y = \sqrt{\dfrac{-4x}{-10-x}}$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{x-12}{x^2-16x+48}}$; г) $y = \sqrt{\dfrac{x+11}{x^2+14x+33}}$.

○8.4. а) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x > 1, \\ x^3, & x < 1; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < 1, \\ x^3, & x \geq 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \dfrac{6x}{x+7}, & x \geqslant -1, \\ \dfrac{18}{2-x}, & x < -1; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} \dfrac{6x}{x+7}, & x < -1, \\ \dfrac{18}{2-x}, & x \geqslant -1. \end{cases}$

Придумайте выражение, задающее функцию, определенную только при всех тех значениях x, для которых выполнено условие:

○8.5. а) $x \neq 100$; б) $100 \leqslant x \leqslant 101$; в) $x \leqslant 100$; г) $x = 100$.

○8.6. а) $x \neq 1$ и $x \neq 10$; б) $0 < |x| \leqslant 1$; в) $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 2$; г) $0 < |x - 2| \leqslant 5$.

Найдите область значений функции, заданной графически:

8.7. а) рис. 14; б) рис. 15; в) рис. 16; г) рис. 17.

8.8. а) рис. 18; б) рис. 19; в) рис. 20; г) рис. 21.

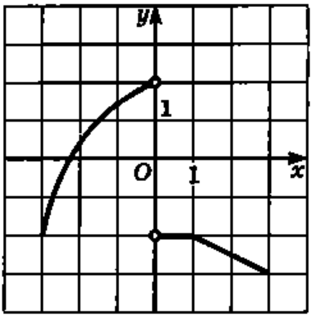

Рис. 18

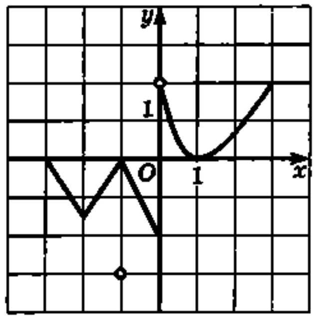

Рис. 19

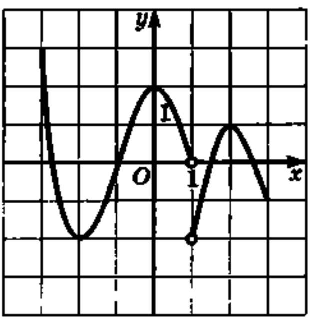

Рис. 20

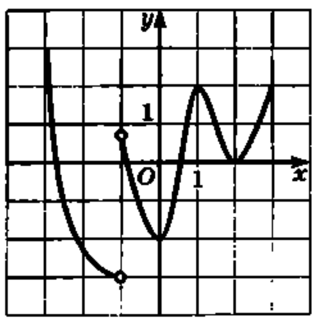

Рис. 21

Найдите область значений функции:

8.9. а) $y = 1 - 2x$;
б) $y = 1 - 2x^2$;
в) $y = 3x^2 - 12x + 1$;
г) $y = -3x^2 - 12x + 1$, $x \in [-6, 1)$.

○8.10. а) $y = 1 - \frac{2}{x}$; в) $y = \frac{3}{x} - 12$;
б) $y = \frac{x-1}{x+1}$; г) $y = \frac{4x}{12x+5}$.

○8.11. а) $y = \sqrt{x} + 5$; в) $y = 2 - \sqrt{x+3}$;
б) $y = 1 - 2\sqrt{3-x}$; г) $y = -1 + 2\sqrt{-5-10x}$.

○8.12. а) $y = 2 + \frac{x}{|x|}$; в) $y = 2x - \frac{x}{|x|}$;
б) $y = x^2 + 2x - \frac{x}{|x|}$; г) $y = x^2 - 2x + \frac{x+1}{|x+1|}$.

●8.13. Найдите область значений функции $y = f(x)$, если:
а) $f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x-3|}{x-3}$;
б) $f(x) = \frac{|x|}{x} - \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x-2|}{x-2} - \frac{|x-3|}{x-3}$.

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет решение:

○8.14. а) $x^2 + 3 = a$; в) $x^2 - 36 = -a$;
б) $\frac{1}{2-x} = a$; г) $\frac{1}{2+x} = 1 - a$.

○8.15. а) $x^2 + 5x + 3 = a$; б) $2x^2 + 5x - 3 = 7 - a$.

●8.16. а) $x + |x+2| - 2 = a$; б) $5x + |x-7| - 2 = 3a$.

8.17. Используя условия заданий 8.7 и 8.8, определите промежутки монотонности функций, заданных графически.

○8.18. Найдите промежутки монотонности функции:
а) $y = 2x^2 - 3x + 4$; в) $y = 5x^2 + 6x - 11$;
б) $y = \sqrt{1-x}$; г) $y = \sqrt{3+5x}$.

○8.19. Докажите:

а) если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X и $a > 0$, то при любом значении b функция $y = a\quad f(x) + b$ возрастает на X;

б) если функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X и $a < 0$, то при любом значении b функция $y = a\quad f(x) + b$ возрастает на X;

в) если функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X и $a > 0$, то при любом значении b функция $y = a\quad f(x) + b$ убывает на X;

г) если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X и $a < 0$, то при любом значении b функция $y = a\quad f(x) + b$ убывает на X.

○8.20. Докажите:

а) если каждая из двух функций возрастает на промежутке X, то их сумма также возрастает на этом промежутке;

б) если каждая из двух функций убывает на промежутке X, то их сумма также убывает на этом промежутке.

○8.21. Определите промежутки монотонности функции:

а) $y = 4 - 3\sqrt{x - 5}$;

б) $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{2x - 3}$;

в) $y = -3 + 5\sqrt{2 - x}$;

г) $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{3 - 4x}$.

○8.22. а) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и принимает только положительные значения на промежутке X. Докажите, что функция $y = (f(x))^2$ возрастает на промежутке X.

б) Пусть функция $y = f(x)$ убывает и принимает только положительные значения на промежутке X. Докажите, что функция $y = (f(x))^2$ убывает на промежутке X.

в) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и принимает только отрицательные значения на промежутке X. Докажите, что функция $y = (f(x))^2$ убывает на промежутке X.

г) Пусть функция $y = f(x)$ убывает и принимает только отрицательные значения на промежутке X. Докажите, что функция $y = (f(x))^2$ возрастает на промежутке X.

Найдите промежутки монотонности функции:

○8.23. а) $y = (x^2 + 1)^2$;
б) $y = x^4 + 6x^2 + 15$;
в) $y = (x^2 - 3x + 10)^2$;
г) $y = (x^2 + 2)^2 - 2x^2 - 3$.

○8.24. а) $y = (x^2 - 1)^2$;
б) $y = (x^2 - 9)^2 + 6$;
в) $y = (x^2 - 3x - 10)^2$;
г) $y = (x^2 - x - 20)^2 - 18$.

8.25. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите промежутки монотонности функции $y = (f(x))^2$:

а) рис. 22; б) рис. 23; в) рис. 24; г) рис. 25.

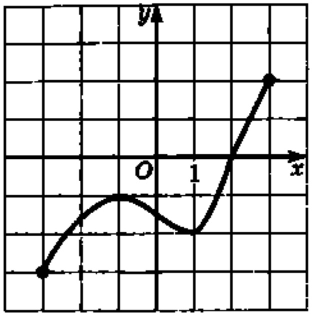

Рис. 22

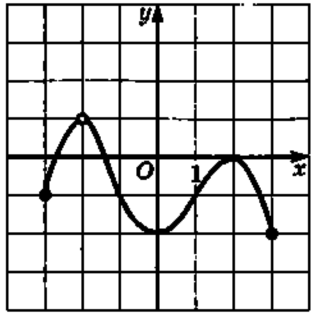

Рис. 23

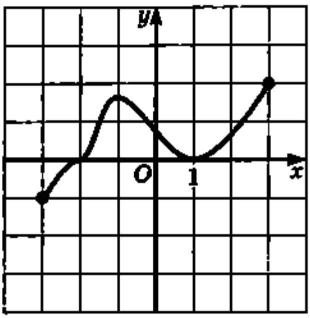

Рис. 24

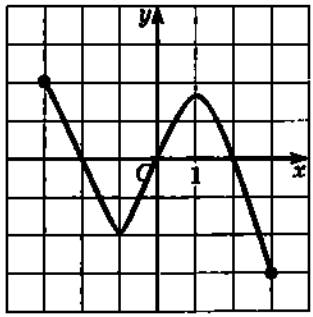

Рис. 25

○8.26. а) Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на X и принимает на X только положительные значения. Докажите, что функция $y = \frac{1}{f(x)}$ убывает на X.

б) Пусть функции $y = f(x)$ возрастает на X и принимает на X только отрицательные значения. Докажите, что функция $y = \frac{1}{f(x)}$ возрастает на X.

в) Пусть функция $y = f(x)$ убывает на X и принимает на X только положительные значения. Докажите, что функция $y = \frac{1}{f(x)}$ возрастает на X.

г) Пусть функция $y = f(x)$ убывает на X и принимает на X только отрицательные значения. Докажите, что функция $y = \frac{1}{f(x)}$ убывает на X.

○8.27. Найдите промежутки монотонности функции:

а) $y = \frac{1}{x^4 + 1}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$;

в) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$;

г) $y = \frac{1}{x^2 - 4x - 12}$.

○8.28. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите промежутки монотонности функции $y = \frac{1}{f(x)}$:

а) рис. 26; б) рис. 27; в) рис. 28; г) рис. 29.

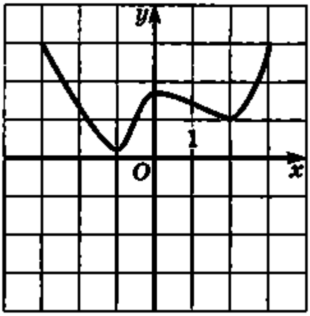

Рис. 26

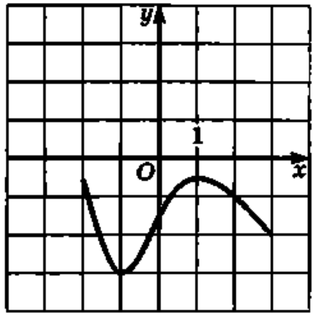

Рис. 27

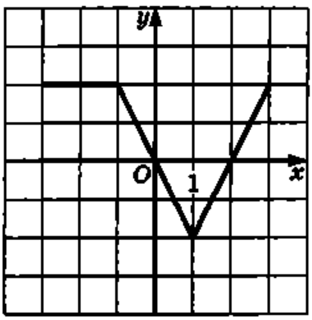

Рис. 28

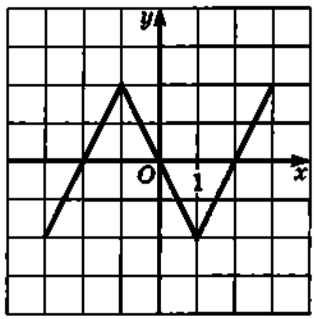

Рис. 29

○8.29. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на R. Решите:

а) уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$;

б) неравенство $f(3x + 2) < f(4x^2 + x)$;

в) уравнение $f(3x - 48) = f(-x^2 + x)$;

г) неравенство $f(3x - 48) \leqslant f(-x^2 + x)$.

○8.30. Пусть функция $y = f(x)$ убывает на R. Решите:

а) уравнение $f\left(\dfrac{1}{3x^2 + 4x - 7}\right) = f\left(\dfrac{1}{2x^2 + 3x - 5}\right)$;

б) неравенство $f\left(\dfrac{1}{3x^2 + 4x - 7}\right) \geqslant f\left(\dfrac{1}{2x^2 + 3x - 5}\right)$.

●8.31. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-1;\ 1)$ и возрастает на нем. Решите:
а) уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$;
б) неравенство $f(3x + 2) < f(4x^2 + x)$.

●8.32. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-1;\ 1]$ и убывает на нем. Решите:
а) уравнение $f(3x + 2) = f(4x^2 + x)$;
б) неравенство $f(3x + 2) < f(4x^2 + x)$.

○8.33. Докажите:
а) если функция $y = f(x)$ возрастает или убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = a$ не может иметь более одного корня на X;
б) если функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X, а функция $y = g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = g(x)$ не может иметь более одного корня на X.

Решите уравнение:

○8.34. а) $x^3 = 2 - x$; в) $\sqrt{x + 1} = 5 - x$;
б) $x^3 = 10 - x$; г) $3x \quad \sqrt{10 - x}$.

●8.35. а) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 5} = 23 - 2x$;
б) $\dfrac{5}{x + 1} = 8\sqrt{x}$;
в) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 3} = 43 - 6x - x^2$;
г) $(x^2 + 4x + 9)\sqrt{4x + 1} = 9$.

8.36. Для функций, графики которых изображены на рисунках к упражнениям 8.7, 8.8, найдите экстремумы, а также наибольшие и наименьшие значения.

8.37. а) Докажите, что функции, графики которых изображены на рисунках к упражнениям 8.7, 8.8, ограничены в области их определения.
б) Докажите: если функция имеет наибольшее и наименьшее значение на множестве M, то она ограничена на этом множестве.

○8.38. Убедитесь, что функция, график которой изображен на заданном рисунке, не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений; задайте эту функцию аналитически:

а) рис. 30; б) рис. 31.

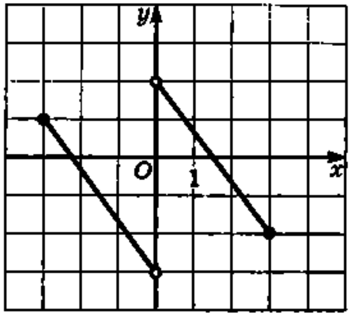

Рис. 30

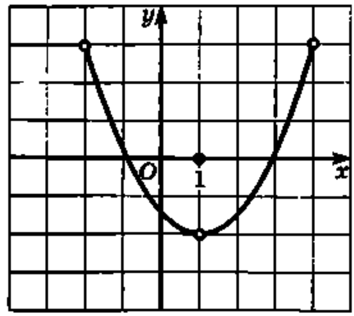

Рис. 31

8.39. а) Приведите пример функции, определенной во всех точках отрезка $[a, b]$, ограниченной на этом отрезке, но не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего значений на отрезке $[a, b]$.

б) Приведите пример функции, определенной и ограниченной на $\mathbb{R}$, но не имеющей ни наибольшего, ни наименьшего значений на $\mathbb{R}$.

○8.40. Докажите: если функция $y = f(x)$ имеет наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a, b]$, а отрезок $[a_1, b_1]$ является частью отрезка $[a, b]$, то:

а) $y_{\text{наиб}}$ на $[a, b]$ не меньше $y_{\text{наиб}}$ на $[a_1, b_1]$;

а) $y_{\text{наим}}$ на $[a, b]$ не больше $y_{\text{наим}}$ на $[a_1, b_1]$.

○8.41. Докажите: если функция $y = f(x)$ имеет наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[a, b]$, причем $y_{\text{наиб}} = y_{\text{наим}}$, то функция является постоянной на отрезке $[a, b]$.

○8.42. Докажите, что если $y = x + \frac{1}{x}$, то:

а) при $x < 0$ $y_{\text{наиб}} = -2$; б) при $x > 0$ $y_{\text{наим}} = 2$.

○8.43. Найдите наибольшее и/или наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 24x - 100$:

а) на отрезке $[-1; 5]$;
б) на луче $(-\infty; 0]$;
в) на луче $[0; +\infty)$;
г) на $\mathbb{R}$.

○8.44. **Найдите наибольшее и/или наименьшее значение функции** $y = -2x^2 - 12x + 3$:

а) на отрезке $[-1; 3]$;
б) на луче $(-\infty; -4]$;
в) на луче $[-4; +\infty)$;
г) на R.

○8.45. **Найдите наибольшее значение функции:**

а) $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$;
б) $y = \dfrac{2}{x^4 + 8x^2 + 1}$;
в) $y = \dfrac{2}{x^2 - 4x + 10}$;
г) $y = \dfrac{2}{x^4 - 8x^2 + 17}$.

●8.46. **Используя результаты упражнения 8.42, найдите наибольшее и наименьшее значения функции:**

а) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$;
б) $y = \dfrac{4x - 4}{x^2 - 2x + 17}$;
в) $y = \dfrac{10x}{x^2 + 4}$;
г) $y = \dfrac{49(x - 2)}{x^2 - 4x + 53}$.

●8.47. **Найдите наименьшее значение функции:**

а) $y = |x| + |x - 2|$;
б) $y = |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$;
в) $y = |x| + |x - 2| + |x - 4|$;
г) $y = |x| + |x - 1| + \quad + |x - n|$, $n \in N$.

○8.48. **Найдите наибольшее и наименьшее значения функции для каждого значения параметра** a:

а) $y = x^2 + 4x + 5a$ на отрезке $[-1; 1]$;
б) $y = -x^2 + 4x - a$ на отрезке $[-1; 3]$.

●8.49. **Найдите наибольшее и наименьшее значение функции для каждого значения параметра** a:

а) $y = x^2 - 4x$ на отрезке $[-1; a]$;
б) $y = -x^2 + 2x - 3$ на отрезке $[a; 3]$.

●8.50. а) Функция $y = \dfrac{15x^2 + 60}{x^4 - 16}$ определена только для допустимых целых значений x; найдите ее наибольшее значение.

б) Функция $y = \dfrac{14x^2 + 126}{81 - x^4}$ определена только для допустимых целых значений x; найдите ее наименьшее значение.

●**8.51.** Докажите теорему: если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ определены на множестве X и наибольшее значение одной из этих функций на X, равное A, совпадает с наименьшим значением другой функции на том же множестве, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно на X системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$

●**8.52.** Опираясь на теорему из упражнения 8.51, решите уравнение:

а) $\sqrt{x^{100} + 49} = 7 - x^4$;

б) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 1 + 2x - x^2$;

в) $\sqrt{x^{22} + 64} = 8 - x^{12} \quad x^{14}$;

г) $\sqrt{-x^2 - 4x - 1} = x^2 + 4x + 7$.

§ 9. *Периодические функции*

9.1. Функция $y = f(x)$ — периодическая, с периодом $T = 2$. Известно, что $f(0)$. Вычислите:
а) $f(2)$;
б) $f(-22)$;
в) $f(12k + 8)$, где k — некоторое целое число;
г) $f(4 - 8k)$, где k — некоторое целое число.

9.2. Функция $y = f(x)$ — периодическая, с периодом $T = \sqrt{5}$. Известно, что $f(1) = 1$, $f(-1) = 7$. Вычислите:
а) $f\left(1 + 8\sqrt{5}\right)$; б) $f\left(-1 - 22\sqrt{5}\right)$.

9.3. Может ли областью определения периодической функции быть:
а) отрезок; в) луч;
б) интервал; г) множество целых чисел?

9.4. На рисунке изображена часть графика периодической функции с периодом T на промежутке I. Постройте график этой функции на промежутке I_1:
а) (рис. 32) $T = 2$, $I = [-1; 2]$; $I_1 = [-4; 8]$;
б) (рис. 33) $T = 3$, $I = [1; 4)$; $I_1 = [-3; 10{,}5)$;
в) (рис. 34) $T = 4$, $I = (-3; 1]$; $I_1 = (-5; 11]$;
г) (рис. 35) $T = 1{,}5$; $I = (0; 1{,}5)$; $I_1 = (-3; 6)$.

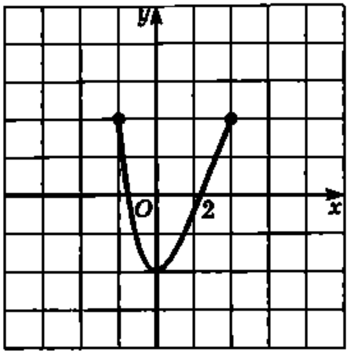

Рис. 32

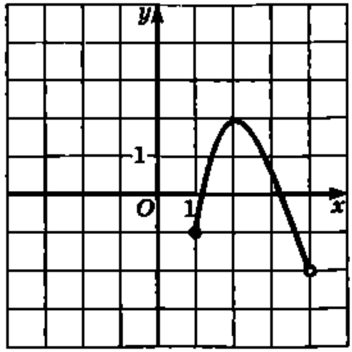

Рис. 33

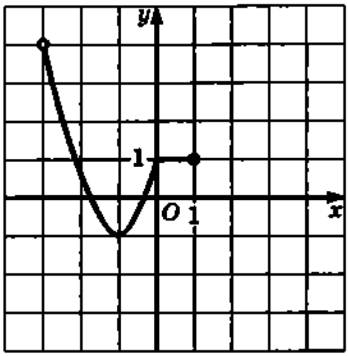

Рис. 34

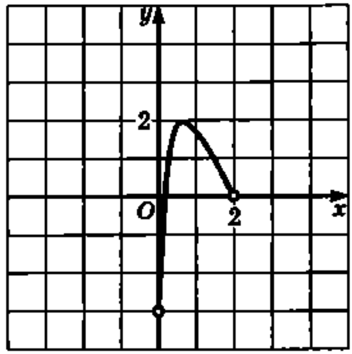

Рис. 35

○9.5. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 3, определенная для всех действительных значений x, причем $f(3) = 7$, $f(4) = 11$, $f(17) = 13$ и $f(0{,}1) = 0$. Вычислите:

а) $f(141)$; $f(-134)$; $f(332)$ $f(-8{,}9)$;

б) $f(17{,}3) - f(20{,}3)$; $f(32{,}(3)) - f(332{,}(3))$; $f(0{,}(1)) - f(-2{,}(8))$;

в) $f(10)$; $f(100)$; $f(111111)$;

г) $f(13{,}1)$ $f(14{,}1)$ $f(15{,}1)$ $f(16{,}1)$;

$f(\underbrace{8888\ldots88}_{n \text{ цифр}})$ $f(\underbrace{22222\ldots22}_{n \text{ цифр}})$.

○9.6. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 4, определенная для всех действительных значений x, причем $f(3) = 5$; $f(4) = 11$; $f(5) = 9$ и $f(6) = 0$. Сравните:

а) $f(1)$ и $f(31)$;

б) $f(11)$ и $f(110)$;

в) $f(-17)$ и $f(831)$;

г) $f\left(6 + \sqrt[3]{3}\right)$ и $f\left(\sqrt[3]{3} - 6\right)$.

○9.7. Является ли функция $y = f(x)$ периодической:

а) $f(x) = 2$; в) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 3$;

б) $f(x) = \frac{1 - x^4}{1 - x^2} - \sqrt{x^4}$; г) $f(x) = \frac{1 - x^4}{1 + x^2} + \sqrt{x^4}$?

○9.8. Докажите:

а) если 3 — период функции $y = f(x)$, то 6 — также период данной функции;

б) если 9 — период функции $y = f(x)$, то 9 — период функции $y = 5f(x + 2) - 1$;

в) если 2 — период функции $y = f(x)$, то 8 — также период данной функции;

г) если 5 — период функции $y = f(x)$, то 5 — период функции $y = -3f(2 - x) + 25$.

○9.9. Докажите:

а) если 3 — период функции $y = f(x)$, то 6 — период функции $y = 5f(0{,}5x + 2) - 1$;

б) если 9 — период функции $y = f(x)$, то 3 — период функции $y = 3 - 1{,}4f(3x - 7)$;

в) если 2 — период функции $y = f(x)$, то 3 — период функции $y = 100f\left(\frac{2x - 11}{3}\right) + 7$;

г) если 5 — период функции $y = f(x)$, то 1 — период функции $y = 81 - 3f(0{,}7 - 5x)$.

○9.10. Докажите, что если период функции $y = f(x)$ равен T, то

а) период функции $y = k\ \ f(x + a) + b$ $(k \neq 0)$ равен T;

б) период функции $y = kf(px + a) + b$ $(pk \neq 0)$ равен $\frac{T}{|p|}$.

○9.11. Пусть период функции $y = f(x)$ равен T_1, а период функции $y = g(x)$ равен T_2. Докажите, что период функции $y = h(x)$ равен T_3:

а) $T_1 = 2$, $T_2 = 7$, $h(x) = 5f(x) - 3g(x)$, $T_3 = 14$;

б) $T_1 = 15$, $T_2 = 10$, $h(x) = 8f(x) + 5g(x)$, $T_3 = 30$;

в) $T_1 = 3$, $T_2 = 13$, $h(x) = 0{,}2f(x - 3) - g(x + 11)$, $T_3 = 26$;

г) $T_1 = \frac{\sqrt{13}}{15}$, $T_2 = \frac{\sqrt{13}}{10}$, $h(x) = 5f(x) - 3\ g(x)$, $T_3 = \frac{\sqrt{13}}{5}$.

○9.12. Пусть для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняется равенство $f(x - 0{,}1) = f(x + 0{,}1) = f(x)$. Докажите, что тогда для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x - 2) = f(x + 2) = f(x)$.

○9.13. Пусть для любого x из области определения функции $y = f(x)$ выполняются равенства $f(x - 3) = f(x + 3) = f(x)$ и $f(x - 5) = f(x + 5) = f(x)$. Докажите, что для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x - 2) = f(x + 2) = f(x)$.

9.14. Пусть $[x]$ — целая часть действительного числа x, а $\{x\}$ — дробная часть этого числа (напомним, что, согласно определению, $[x] \in Z$, $x \leqslant [x] < x + 1$, $\{x\} = x - [x]$).

а) Найдите целую и дробную часть числа: 6; −3; 5,3; −5,3; $\frac{35}{53}$; $-\frac{35}{53}$; $\frac{535}{353}$; $-\frac{535}{353}$.

б) Найдите целую и дробную часть числа: $\sqrt{11}$; $\sqrt{11} - 2$; $3 - \sqrt{11}$; π; 0,(4); −2,(3); −7,(1).

○9.15. а) Докажите, что для любого значения x выполняются равенства $[x + 1] = [x] + 1$, $[x - 1] = [x]$.

б) Докажите, что для любого значения x выполняются равенства $\{x + 1\} = \{x\} = \{x - 1\}$.

в) Докажите, что функция $y = [x]$ не является периодической.

г) Докажите, что функция $y = \{x\}$ является периодической с периодом 1.

○9.16. Докажите, что 1 — наименьший период функции $y = \{x\}$.

Постройте график функции и определите, является ли функция периодической:

●9.17. а) $y = [x]$;
в) $y = [2x]$;
б) $y = [x - 2{,}5]$;
г) $y = [|x|]$.

●9.18. а) $y = |[x]|$;
в) $y = \{x\} + [x]$;
б) $y = x + [x]$;
г) $y = [\{x\}]$.

●9.19. а) $y = \{x\}$;
в) $y = \{2x\}$;
б) $y = \{x - 2{,}5\}$;
г) $y = \{|x|\}$.

●9.20. а) $y = |\{x\}|$;
в) $y = x - \{x\}$;
б) $y = x + \{x\}$;
г) $y = \{[x]\}$.

Найдите основной период функции:

○9.21. а) $y = \{x + 2\}$; $y = \{x - 3{,}7\}$; $y = 2\{x + 1{,}1\} - 14$; $y = 13 - 5\{x - 0{,}(3)\}$;

б) $y = \{2x\}$; $y = 3\{2x - 2{,}5\}$; $y = \{2x - 2{,}5\}$;
$y = 4 - 0{,}5\{2x - 2{,}5\}$;

в) $y = \{0{,}5x\}$; $y = 3\{0{,}5x\}$; $y = 7\{0{,}5x\} + 6$; $y = 9 - 1{,}1\{0{,}5x\}$;

г) $y = \left\{\frac{3x}{4}\right\}$; $y = \left\{\frac{3x+2}{4}\right\}$; $y = \left\{\frac{3x}{4} + 0{,}3\right\}$; $y = \left\{\frac{3x+2}{4} + x\right\}$.

●9.22. а) $y = \{x - 3{,}7\} + 3\{2x - 2{,}5\}$; $y = \left\{\frac{3x}{4} + 0{,}3\right\} + 5\{x - 11\}$;

б) $y = \{2x\} + \{3x - 2{,}5\}$; $y = 4 - \{12x - 2{,}5\} + \{18x\}$;

в) $y = \{0{,}3x\} + 5\{0{,}25x\}$; $y = 7\{0{,}15x\} + 1{,}1\{0{,}25x\}$;

г) $y = \left\{\frac{3x}{4}\right\} - \left\{\frac{5x+2}{3}\right\}$; $y = \left\{6 - \frac{10x}{11}\right\} + 3\ \left\{\frac{15x+2}{22}\right\}$.

●9.23. Постройте график функции:

а) $y = (\{x\})^2$;　　в) $y = \sqrt{\{x\}}$;

б) $y = \frac{1}{\{x\}}$;　　г) $y = \frac{\{x\} - 1}{1 - 2\{x\}}$.

Выясните, может ли функция быть периодической, если она обладает указанным свойством; если может, то приведите пример, если не может, — объясните почему:

○9.24. а) Областью определения функции является отрезок или луч;

б) областью определения функции является объединение бесконечного множества отрезков, но не прямая;

в) функция определена на всей числовой прямой, кроме одной точки;

г) функция определена на всей числовой прямой, кроме бесконечного числа точек.

○9.25. а) Функция имеет шесть нулей;

б) функция не имеет нулей;

в) функция положительна при $x > 3$ и отрицательна при $x < 3$;

г) при $x > 3$ функция принимает положительные значения.

○9.26. а) Функция убывает на всей области своего определения;

б) функция имеет бесконечно много промежутков убывания;

в) функция имеет наименьшее значение, но не имеет наибольшего;

г) функция убывает на интервале (3; 11).

Постройте график данной периодической функции $y = f(x)$ и укажите область ее определения, область значений, промежутки монотонности, точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения, нули функции, промежутки знакопостоянства; исследуйте функцию на четность-нечетность:

○9.27. а) Период функции равен 2 и $f(x) = 3x$ на промежутке $(-1; 1]$;
б) период функции равен 4 и $f(x) = 4 - x^2$ на отрезке $[-2; 2]$;
в) период функции равен 3 и $f(x) = 2 - x$ на промежутке $[0; 3)$;
г) период функции равен 1 и $f(x) = 2x^2 - 1$ на промежутке $(0; 1)$.

○9.28. а) Период функции равен 2 и $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1; 1]$;
б) период функции равен 4 и $f(x) = 3\sqrt{x + 2}$ на промежутке $[-2; 2)$;
в) период функции равен 3 и $f(x) = 3 - |2 - x|$ на промежутке $[0; 3)$;
г) период функции равен 1 и $f(x) = 3 - \sqrt{4 - 3x}$ на промежутке $(0; 1)$.

○9.29. а) Период функции равен 2 и $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ на промежутке $(-1; 1]$;
б) период функции равен 4 и $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(-2; 2]$;
в) период функции равен 3 и $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$ на промежутке $[0; 3)$;
г) период функции равен 5 и $f(x) = \dfrac{|x|}{|x| - 1}$ на промежутке $[-2; 3)$.

○9.30. Наибольшее значение периодической функции с периодом 3 на отрезке $[-1; 2]$ равно 5, а наименьшее значение равно -2. Найдите, если это возможно:
а) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $(-2; 11]$;
б) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $(-5; 8]$;
в) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $(-2; 1]$;
г) наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $(-\infty; 1)$.

○9.31. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 2 и $f(x) = 5x + 2$ на интервале $(0; 4)$. Решите:
а) уравнение $f(x) = 7$; б) неравенство $f(x) > 7$.

●9.32. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 5 и $f(x) = x^2 + 2x$ на полуинтервале $(-3; 2]$. Решите:
а) уравнение $f(x) = 0$; в) уравнение $f(x) = 8$;
б) неравенство $f(x) > 3$; г) неравенство $f(x) < 0$.

●9.33. Пусть $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом 4 и $f(x) = x^2 + 8x + 5$ на отрезке $[-6; -2]$. Решите:
а) уравнение $f(x) = -11$; в) уравнение $f(x) = -10$;
б) неравенство $f(x) \leqslant 11$; г) неравенство $f(x) > -10$.

●9.34. а) Существует ли такая функция $y = f(x)$, что для любого x из области ее определения выполняется равенство $f(x) = f(x + 2)$, а функция не является периодической? Если существует, приведите пример такой функции.
б) Существует ли такая функция $y = f(x)$, что для любого x из области ее определения выполняется равенство $f(x) = f(x - 3)$, а функция не является периодической? Если существует, приведите пример такой функции.

●9.35. а) Существует ли такая функция $y = f(x)$, что для любого x из области ее определения выполняется равенство $f(2x) = f(x)$, а функция является периодической? Если существует, приведите пример такой функции.
б) Существует ли такая функция $y = f(x)$, что для любого x из области ее определения выполняется неравенство $f(2x) > f(x)$, а функция является периодической? Если существует, приведите пример такой функции.

§ 10. Обратная функция

10.1. Дано равенство $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. Выразите из этого равенства x через y, если:
а) $x \geqslant 0$; б) $x \leqslant 0$; в) $x \geqslant 2$; г) $x \leqslant -0{,}21$.

10.2. Дано равенство $\rho = \frac{st^3}{2 - s}$, связывающее три величины: ρ, s, t.
а) Выразите из этого равенства s через ρ и t;
б) выразите из этого равенства t через s и ρ.

10.3. Для функции, заданной графически, укажите область определения и выясните, имеет эта функция в своей области определения обратную функцию или нет; в случае положительного ответа постройте эскиз графика обратной функции:

а) рис. 36; б) рис. 37; в) рис. 38; г) рис. 39.

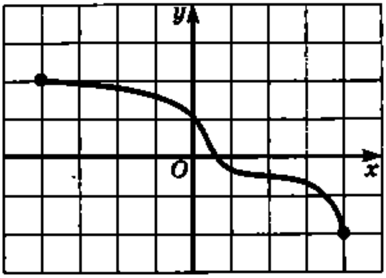

Рис. 36

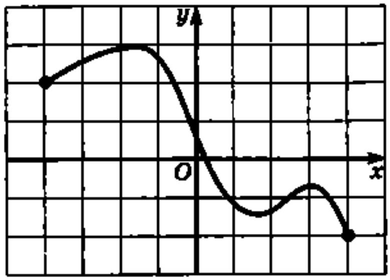

Рис. 37

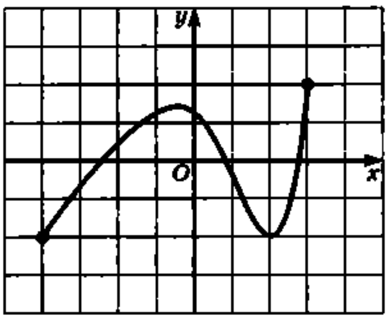

Рис. 38

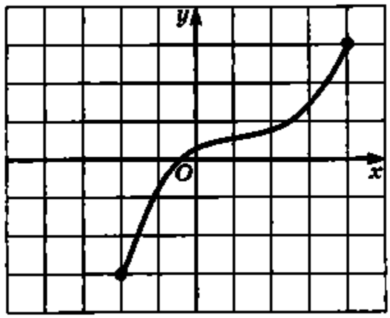

Рис. 39

10.4. Для функции, заданной табличным способом, укажите ее область определения и выясните, имеет эта функция в своей области определения обратную функцию или нет; в случае положительного ответа постройте график обратной функции:

а)

x	1	2	5	7
y	3	4	7	3

в)

x	1	2	3	7
y	5	8	9	1

б)

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	5	7
y	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	0,(6)	1,(4)

г)

x	−1	1	2	5
y	4	1,(7)	$1\frac{2}{3}$	1

10.5. Найдите область определения и множество значений функции $y = g(x)$, обратной для функции $y = f(x)$, если:

а) $D(f) = R$, $E(f) = (3; +\infty)$;

б) $D(f) = (2; 3) \cup [5; 6)$, $E(f) = (3; 4) \cup (7; +\infty)$;

в) $D(f) = [-5; 6)$, $E(f) = (-\infty; 11]$;

г) $D(f) = E(f) = \{-3; 4; 7\} \cup (10; +\infty)$.

10.6. Найдите множество значений каждой из взаимно-обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, если указаны их области определения:

а) $D(f) = R$, $D(g) = [-2; +\infty)$;

б) $D(f) = [-3; 4]$, $D(g) = [4; 11]$;

в) $D(f) = (0; +\infty)$, $D(g) = (-\infty; 7)$;

г) $D(f) = \{-1; 2; 4\}$, $D(g) = \{-2; 78; 123\}$.

○**10.7.** Являются ли функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ взаимно-обратными, если:

а) $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$;

б) $f(x) = \frac{3}{5} - 6x$, $g(x) = 0{,}1 - \frac{1}{6}x$;

в) $f(x) = \frac{1}{7}x - 3$, $g(x) = 7x + 3$;

г) $f(x) = \frac{7}{3}x + \frac{3}{7}$, $g(x) = \frac{3}{7}x + \frac{7}{3}$?

Найдите функцию, обратную данной. Постройте на одном чертеже графики этих взаимно-обратных функций:

10.8. а) $y = 3x$;

б) $y = 5x + 2$;

в) $y = x - 7$;

г) $y = \frac{1}{3}x - 4$.

○**10.9.** а) $y = \frac{3}{x - 1}$;

б) $y = \frac{x + 7}{2x - 5}$;

в) $y = \frac{2}{x + 4}$;

г) $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$.

○**10.10.** Является ли данная функция обратной по отношению к самой себе:

а) $y = x$;

б) $y = 3x$;

в) $y = -x$;

г) $y = -x + 1$?

○10.11. Совпадает ли данная функция со своей обратной:

а) $y = \frac{7}{x}$; в) $y = -\frac{8}{x}$;

б) $y = \frac{7}{x-2}$; г) $y = 5 - \frac{8}{x}$?

○10.12. Задайте функцию, обратную данной; постройте ее график:

а) $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 3x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -5x - 3, \text{ если } x \leqslant -1, \\ -1 - 3x, \text{ если } x > -1; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x < 0, \\ 3x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 2x + 1, \text{ если } x \leqslant 2, \\ \frac{1}{2}x + 4, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

○10.13. Задайте функцию, обратную данной; постройте графики заданной и обратной функций:

а) $y = \sqrt{x+3}$; в) $y = \sqrt{2x-1}$;

б) $y = -\sqrt{2-x}$; г) $y = -\sqrt{3-5x}$.

○10.14. Может ли функция иметь обратную, если она:

а) линейная; в) дробно-линейная;

б) квадратичная; г) вида $y = \sqrt{x+a}$?

○10.15. Обязательно ли функция имеет обратную, если она:

а) линейная; в) вида $y = \sqrt{x+a}$;

б) дробно-линейная; г) вида $y = x^3 + a$?

○10.16. Может ли функция иметь обратную, если она:

а) четная; в) периодическая;

б) нечетная; г) непериодическая?

○10.17. Может ли функция иметь обратную, если она:

а) возрастающая; в) имеет три нуля;

б) убывающая; г) не имеет нулей?

10.18. Рассмотрите график функции, представленный на рисунке, и укажите несколько числовых промежутков, на которых данная функция имеет обратную, и несколько, — на которых она не имеет обратной:

а) рис. 40; б) рис. 41; в) рис. 42; г) рис. 43.

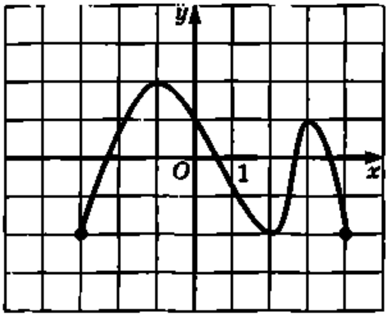

Рис. 40

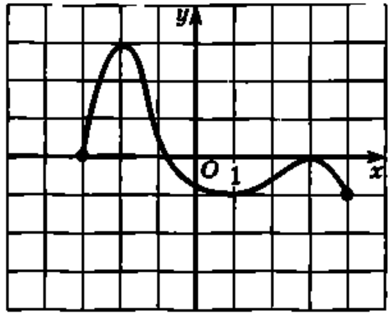

Рис. 41

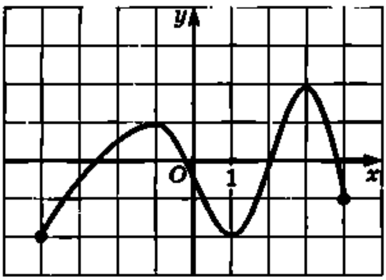

Рис. 42

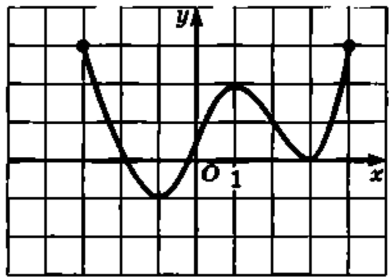

Рис. 43

Рассмотрите данную функцию на каждом из указанных промежутков; если она на этом промежутке имеет обратную функцию, то задайте обратную функцию аналитически, укажите ее область определения и область значений, постройте ее график:

○10.19. $y = x^2$:

а) на R; в) на $(-1; 5]$;

б) на $[1; +\infty)$; г) на $(-\infty; 0]$.

○10.20. $y = x^2 - 2$:

а) на R; в) на $(-1; 5]$;

б) на $[1; 2)$; г) на $[-2; 0]$.

○10.21. $y = (x + 3)^2 - 2$:

а) на R; в) на $(-\infty; -3]$;

б) на $[-3; +\infty)$; г) на $[-4; 4]$.

○10.22. (См. задание на с. 65.) $y = x^2 - 4x + 18$:

а) на R; в) на $(-\infty; 0]$;

б) на $[2; +\infty)$; г) на $[-\infty; 3)$.

●10.23. На каждом из указанных промежутков найдите, если это возможно, функцию, обратную данной:

а) $y = \begin{cases} 2x - 5, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x - 6, \text{ если } x > 1 \end{cases}$ на $(-\infty; 1]$, на $(1; +\infty)$, на R;

б) $y = \begin{cases} 5 - x, \text{ если } x \leqslant 2, \\ 7 - 2x, \text{ если } x > 2 \end{cases}$ на $(-\infty; 2]$, на $(2; +\infty)$, на R;

в) $y = \begin{cases} 3x + 5, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ на $(-\infty; 0]$, на $(0 +\infty)$, на R;

г) $y = \begin{cases} 3 - x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2 - 7x, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ на $(-\infty; 0]$, на $(0; +\infty)$, на R.

●10.24. Постройте на одном чертеже какие-нибудь графики двух взаимно-обратных непрерывных на $(-5; 10)$ функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, для которых:

а) $f(3) = 3$, $g(5) = 5$;

б) $f(3) = 7$, $f(7) = 8$, $g(9) = 9$;

в) $f(-1) = -1$, $g(3) = 3$;

г) $f(1) = 9$, $f(2) = 7$, $g(4) = 4$.

●10.25. $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно-обратные функции.

а) $f(3) = 5$ и $g(7) = 1$. Решите уравнения $f(x) = 7$ и $g(x) = 3$.

б) $f(4) = 4$ и $g(25) = 9$. Решите уравнения $f(x^2) = 25$ и $g(x^2) = 4$.

в) $f(15) = -3$ и $g(-7) = 1$. Решите уравнения $f(t) = -7$ и $g(t) = 15$.

г) $f(7) = 5$ и $g(7) = 1$. Решите уравнения $f(3x) = 7$ и $g(5 - x) = 5$.

Постройте график функции $y = f(g(x))$, если:

○10.26. а) $f(x) = 4x$, $g(x) = 0{,}25x$;

б) $f(x) = x - 3$, $g(x) = x + 3$;

в) $f(x) = -2x$, $g(x) = -05x$;

г) $f(x) = -5x + 5$, $g(x) = -0{,}2x - 1$.

○10.27. а) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x}$;

б) $f(x) = \frac{3}{x+1}$, $g(x) = \frac{3-x}{x}$;

в) $f(x) = \frac{1}{2x}$, $g(x) = \frac{1}{2x}$;

г) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \frac{x+1}{1-x}$.

○10.28. а) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;
б) $f(x) = -x^2$, $g(x) = \sqrt{-x}$;
в) $f(x) = x^2$, $g(x) = -\sqrt{x}$;
г) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -\sqrt{-x}$.

○10.29. а) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$;

б) $f(x) = 3 - 0{,}5x^2$, $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$;

в) $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{x + 2}$;

г) $f(x) = 8 - 2x^2$, $g(x) = -\sqrt{4 - 0{,}5x}$.

●10.30. Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно-обратные функции. Постройте на двух различных чертежах графики функций $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:
а) $D(f) = E(f) = R$;
б) $D(f) = E(f) = (0; 3]$;
в) $D(f) = [1; 3]$; $E(f) = R$;
г) $D(f) = [-2; 3]$; $E(f) = [-3; 2]$.

●10.31. Постройте на одном чертеже графики таких двух взаимно-обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, чтобы уравнение $f(x) = x$:
а) имело один корень;
б) имело три корня;
в) имело бесконечно много корней;
г) не имело корней.

●10.32. Постройте на одном чертеже графики таких двух взаимно-обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, чтобы уравнение $f(x) = g(x)$:
а) имело один корень;
б) имело три корня;
в) имело бесконечно много корней;
г) не имело корней.

●**10.33.** Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — некоторые взаимно-обратные функции. Являются ли равносильными следующие уравнения:

а) $f(x) = x$ и $g(x) = x$; б) $f(g(x)) = x$ и $g(f(x)) = x$?

Постройте график функции и определите, существует ли для нее обратная функция. Если да, то на том же чертеже постройте график обратной функции и задайте ее аналитически:

●**10.34.** а) $y = 3x + |x|$; в) $y = 2|x| - 5x$;

б) $y = x + 2|x|$; г) $y = 2x - 5|x|$.

●**10.35.** а) $y = x|x|$; в) $y = 2 - x|x|$;

б) $y = x^2 + 2|x|$; г) $y = x|x - 2|$.

ГЛАВА 3 Тригонометрические функции

§ 11. Числовая окружность

Горизонтальный диаметр CA и вертикальный диаметр DB разбивают единичную окружность на четыре четверти: AB — первая, BC — вторая, CD — третья, DA — четвертая (рис. 44).

11.1. Вторая четверть разделена на две равные части точкой M, а третья — на три равные части точками K и P. Найдите длину дуги:
а) AM; б) BK; в) PM; г) PK.

11.2. Первая четверть разделена на две равные части точкой M, а четвертая — на три равные части точками K и P. Найдите длину дуги:
а) DM; б) BK; в) PM; г) PC.

11.3. Третья четверть разделена точкой M в отношении $2 : 3$, первая — точкой P в отношении $1 : 5$. Найдите длину дуги:
а) CM; б) AP; в) PM; г) MP.

11.4. Можно ли найти на единичной окружности точку E с указанной ниже длиной дуги AE? Если да, то укажите четверть, в которой расположена точка E:
а) $AE = 2$; в) $AE = 6{,}3$;
б) $AE = \sqrt{8\pi}$; г) $AE = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

11.5. а) К радиусам OA и OC проведены серединные перпендикуляры, соответственно, MN и PQ (рис. 44). Чему равен центральный угол AOM? Найдите длину хорды MN. Найдите длину дуги QN. Докажите, что точки A, M, P, C, Q, N делят окружность на шесть равных частей.

б) К радиусам OB и OD проведены серединные перпендикуляры LK и TS, соответственно (рис. 45). Чему равен центральный угол KOB? Найдите длину хорды KL. Найдите длину дуги TL. Докажите, что точки K, B, L, T, D, S делят окружность на шесть равных частей.

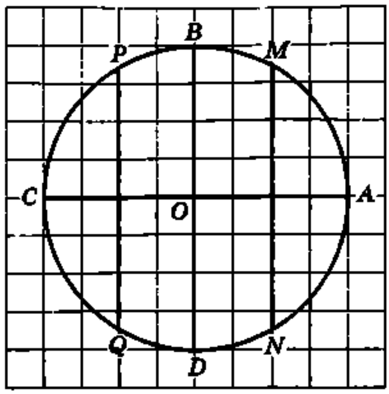

Рис. 44

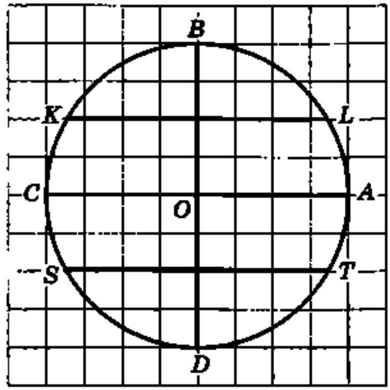

Рис. 45

Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

11.6. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $-\pi$; в) 4π; г) $-\frac{3\pi}{2}$.

11.7. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{4}$; г) $-\frac{3\pi}{4}$.

11.8. а) $\frac{10\pi}{3}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; в) $\frac{31\pi}{6}$; г) $-\frac{19\pi}{3}$.

11.9. а) $\frac{\pi}{8}$; б) $-\frac{\pi}{12}$; в) $\frac{7\pi}{12}$; г) $-\frac{11\pi}{8}$.

11.10. а) 1; б) −2; в) 3,5; г) −7.

Какой четверти числовой окружности принадлежит точка, соответствующая заданному числу?

○11.11. а) 6; б) −4,5; в) 3,3; г) −5.

○11.12. а) 10; б) −17; в) 31; г) −95.

○11.13. Укажите однозначное натуральное число, которому на числовой окружности (рис. 44) соответствует точка, наиболее близкая:

а) к точке A; в) к точке C;
б) к точке B; г) к точке D.

11.14. Как расположены на числовой прямой и на числовой окружности точки, соответствующие числам:

а) t и $-t$; в) t и $t + \pi$;

б) t и $t + 2\pi k$, $k \in Z$; г) $t + \pi$ и $t - \pi$?

Найдите на числовой окружности все точки $M(t)$, соответствующие заданной формуле (во всех формулах предполагается, что $n \in Z$):

11.15. а) $t = 2\pi n$; в) $t = \pi n$;

б) $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$; г) $t = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

11.16. а) $t = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; в) $t = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$;

б) $t = \frac{2\pi n}{3}$; г) $t = \frac{\pi n}{3}$.

11.17. а) $t = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; в) $t = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$;

б) $t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; г) $t = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$.

Числовая окружность разделена точками на восемь равных частей (рис. 46). Составьте формулу для всех чисел, которым соответствуют точки:

о11.18. а) A и C; б) B и D; в) M и P; г) N и Q.

о11.19. а) M, N, P, Q; б) A, M, B, N, C, P, D, Q.

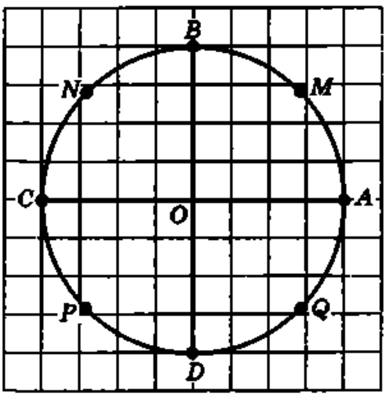

Рис. 46

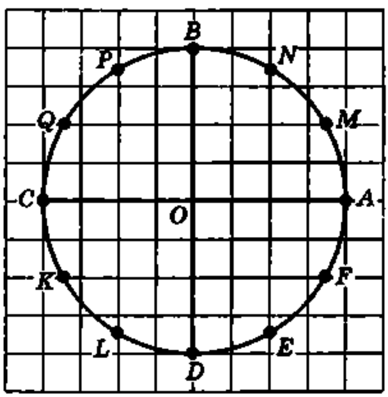

Рис. 47

Числовая окружность разделена точками на 12 равных частей (рис. 47). Составьте формулу для всех чисел, которым соответствуют точки:

о11.20. а) M и K; б) P и E; в) P и L; г) M и F.

о11.21. а) A, P, L; б) B, K, F; в) F, M, Q, K; г) A, N, P, C, L, E.

Найдите все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие указанной открытой дуге или объединению дуг (рис. 46):

о11.22. а) AB; б) $AB \cup CD$; в) BD; г) $BC \cup DA$.

о11.23. а) MN; б) NM; в) BP; г) PB.

о11.24. а) $QA \cup NC$; б) $AN \cup CQ$; в) $MN \cup PQ$; г) $AM \cup BN \cup CP \cup DQ$.

Найдите все числа t, которым на числовой окружности соответствуют точки, принадлежащие указанной дуге (рис. 47):

о11.25. а) MP; б) AQ; в) BL; г) DF.

о11.26. а) EN; б) QM; в) KA; г) KF.

Выделите на числовой окружности дугу, точки которой удовлетворяют заданному неравенству (во всех формулах предполагается, что $n \in Z$):

11.27. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; г) $\pi + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$.

11.28. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$;

в) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$;

г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$.

Найдите на числовой окружности все точки $M(t)$, соответствующие заданным формулам; составьте общую формулу для всех чисел, которым соответствуют найденные точки:

о11.29. а) $t = 2\pi n$, $t = \pi + 2\pi n$; б) $t = \pi n$, $t = \frac{\pi}{2} + \pi n$; в) $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; г) $t = \pi n$, $t = \frac{\pi n}{2}$.

○11.30. а) $t = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ t = \frac{\pi n}{3}$;

б) $t = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ t = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$;

в) $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ t = 2\pi n$;

г) $t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ t = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$.

●11.31. а) $t = -\frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1),\ t = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$;

б) $t = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ t = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \pi n,\ t = \pi n$;

в) $t = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ t = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$;

г) $t = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ t = \pi n$.

○11.32. На числовой прямой и числовой окружности отметьте все точки $M(t)$, заданные формулой и принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

а) $t = (-1)^n \frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{3}$;

в) $t = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$;

б) $t = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$;

г) $t = \pm\frac{3\pi}{7} + \frac{\pi n}{3}$.

○11.33. На числовой прямой и числовой окружности отметьте все точки $M(t)$, заданные формулой и принадлежащие отрезку $[-2; 4]$:

а) $t = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$,

в) $t = \pm\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;

б) $t = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;

г) $t = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{4}$.

○11.34. На числовой прямой и числовой окружности отметьте все точки $M(t)$, заданные формулой и принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$:

а) $t = n$;

в) $t = 2n + 1$;

б) $t = \frac{1}{2} + 2n$;

г) $t = \frac{1}{3} + \frac{3n}{2}$.

§ 12. Числовая окружность на координатной плоскости

Всюду в этом параграфе предполагается, что центр числовой окружности совпадает с началом координат плоскости xOy.

Найдите декартовы координаты заданной точки:

12.1. а) $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$; б) $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$; в) $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$; г) $M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

12.2. а) $M(-3\pi)$; б) $M\left(\frac{11\pi}{4}\right)$; в) $M\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $M\left(\frac{31\pi}{2}\right)$.

12.3. а) $M\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$; б) $M(117\pi)$; в) $M\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; г) $M(126\pi)$.

12.4. Найдите наименьшее положительное и наибольшее отрицательное числа, которым на числовой окружности соответствует заданная точка:

а) $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$;

б) $M\left(\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $M\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

12.5. Каким числам из заданного отрезка соответствует точка $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ числовой окружности:

а) $[-4\pi;\ \pi]$; в) $[0;\ 5\pi]$;

б) $\left[-\frac{3\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}\right]$?

○12.6. На отрезке $\left[-\frac{3\pi}{8};\ \frac{17\pi}{6}\right]$ укажите числа, которым на числовой окружности соответствует заданная точка:

а) $M\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$;

б) $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

12.7. Имеется ли на числовой окружности точка, абсцисса или ордината которой равна:

а) 0,7; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\sqrt{17} - \sqrt{26}$?

Укажите знаки абсциссы и ординаты заданной точки числовой окружности:

○**12.8.** а) $E(2)$; б) $K(-4)$; в) $P(3{,}2)$; г) $M(-4{,}8)$.

○**12.9.** а) $E(12)$; б) $K(-15)$; в) $P(49)$; г) $M(100)$.

●**12.10.** Что больше, абсцисса или ордината заданной точки числовой окружности:
а) $E(1)$; б) $K(-2{,}5)$; в) $P(7)$; г) $M(-4)$?

●**12.11.** Что больше, модуль абсциссы или модуль ординаты заданной точки числовой окружности:
а) $F(2{,}8)$; б) $L(-4{,}2)$; в) $K(-0{,}5)$; г) $M(4{,}5)$?

12.12. Как связаны между собой абсциссы точек числовой окружности:
а) t и $-t$; в) t и $\pi - t$;
б) t и $t + \pi$; г) t и $2\pi - t$?

12.13. Как связаны между собой ординаты точек числовой окружности:
а) t и $-t$; в) t и $\pi - t$;
б) t и $t + \pi$; г) t и $2\pi - t$?

На числовой окружности укажите все точки, координаты которых удовлетворяют данным условиям, и составьте формулы для всех чисел, которым соответствуют эти точки:

12.14. а) $x = 0$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $x = 1$.

12.15. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $x = -1$.

12.16. а) $y = 0$; б) $y = \frac{1}{2}$; в) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $y = 1$.

12.17. а) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $y = -1$.

12.18. а) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y < 0$; в) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y < 0$;

б) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y > 0$; г) $x = -\frac{1}{2}$, $y > 0$.

12.19. (См. задание к упражнениям 12.14—12.18.)

а) $y = \frac{\sqrt{3}}{2},\ x > 0$; в) $y = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x < 0$;

б) $y = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x < 0$; г) $y = -\frac{1}{2},\ x > 0$.

○12.20. (См. задание к упражнениям 12.14—12.18.)

а) $y = x$; в) $x + y = 0$;

б) $y = -x\sqrt{3}$; г) $\frac{x}{y} \quad \sqrt{3}$.

Найдите на числовой окружности все точки с абсциссой или ординатой, удовлетворяющей заданному неравенству или системе неравенств, и запишите (с помощью двойного неравенства), каким числам t они соответствуют:

○12.21. а) $x > 0$; б) $x < \frac{1}{2}$; в) $x > \frac{1}{2}$; г) $x < 0$.

○12.22. а) $x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $x > -\frac{1}{2}$.

○12.23. а) $y > 0$; б) $y < \frac{1}{2}$; в) $y > \frac{1}{2}$; г) $y < 0$.

○12.24. а) $y > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $y < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $y < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $y > -\frac{1}{2}$.

○12.25. а) $\begin{cases} x > 0, \\ y < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y > \frac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 0, \\ y > -\frac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ y < \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

○12.26. а) $x - y > 0$; б) $xy > 0$; в) $x + y < 0$; г) $xy < 0$.

○12.27. а) $x + y \leqslant 1$; б) $x - y > -1$; в) $x + y > -1$; г) $x - y \leqslant 1$.

○12.28. а) $2x^2 - x < 0$; в) $y + 2y^2 > 0$;

б) $(2x - 1)(y - 3) > 0$; г) $\left(2y - \sqrt{2}\right)(x + 2) \leqslant 0$.

○12.29. а) $4x^2 - 1 \leqslant 0$; в) $3 - 4y^2 > 0$;

б) $1 - 2y^2 < 0$; г) $2x^2 - 1 \geqslant 0$.

§ 13. Синус и косинус. Тангенс и котангенс

Вычислите $\sin t$ и $\cos t$, если:

13.1. а) $t = 0$; б) $t = \frac{\pi}{2}$; в) $t = \frac{3\pi}{2}$; г) $t = \pi$.

13.2. а) $t = \frac{5\pi}{6}$; б) $t = \frac{5\pi}{4}$; в) $t = \frac{7\pi}{6}$; г) $t = \frac{9\pi}{4}$.

13.3. а) $t = \frac{13\pi}{6}$; б) $t = -\frac{8\pi}{3}$; в) $t = \frac{23\pi}{6}$; г) $t = -\frac{11\pi}{3}$.

Вычислите:

13.4. а) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\frac{\pi}{6}\ \cos\frac{\pi}{4}\ \cos\frac{\pi}{3}\ \cos\frac{\pi}{2}$;

в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

г) $\sin\frac{\pi}{6}\ \sin\frac{\pi}{4}\ \sin\frac{\pi}{3}\ \sin\frac{\pi}{2}$.

13.5. а) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{\pi}{4}\ \cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\ \sin\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{2}\ \sin\frac{5\pi}{8}\ \cos\frac{3\pi}{2}$.

Найдите значение выражения:

13.6. а) $\cos 2t$, если $t = \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin\frac{t}{2}$, если $t = -\frac{\pi}{3}$;

в) $\sin^2 t - \cos^2 t$, если $t = \frac{\pi}{4}$;

г) $\sin^2 t + \cos^2 t$, если $t = \frac{\pi}{6}$.

13.7. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$.

Вычислите:

13.8. а) $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; в) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; г) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

13.9. а) $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}\;\;\sin\frac{\pi}{3}\;\;\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6}$;

б) $2\sin\pi + 3\cos\pi + \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2}$;

в) $2\sin\frac{\pi}{3}\;\;\cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}$;

г) $2\,\mathrm{tg}\,0 + 8\cos\frac{3\pi}{2} - 6\sin\frac{\pi}{3}$.

13.10. а) $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5}\;\;\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{5}$; в) $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{7}\;\;\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{7}$;

б) $3\,\mathrm{tg}\,2{,}3\;\;\mathrm{ctg}\,2{,}3$; г) $7\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{12}\;\;\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{12}$.

13.11. а) $\sin^2(1{,}5 + 32\pi) + \cos^2 1{,}5 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos^2\left(\frac{\pi}{8} + 4\pi\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - 44\pi\right)$.

13.12. а) $\mathrm{tg}\,2{,}5\;\;\mathrm{ctg}\,2{,}5 + \cos^2\pi - \sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin^2\frac{3\pi}{7} - 2\,\mathrm{tg}\,1\;\;\mathrm{ctg}\,1 + \cos^2\left(-\frac{3\pi}{7}\right) + \sin^2\frac{5\pi}{2}$.

13.13. а) $\cos 1 + \cos(1 + \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\sin 2 + \sin(2 + \pi) + \cos^2\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\frac{\pi}{12}$.

○**13.14.** **Докажите равенство:**

а) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4} - \cos\pi - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{3\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$;

б) $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{2}\;\;\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}{2\cos\frac{11\pi}{6} + 2\sin^2\frac{11\pi}{4}} = \sqrt{3} - 1$.

13.15. Упростите выражение:

а) $\sin t \quad \cos t \quad \mathrm{tg}\, t$;

б) $\sin t \quad \cos t \quad \mathrm{ctg}\, t - 1$;

в) $\sin^2 t - \mathrm{tg}\, t \quad \mathrm{ctg}\, t$;

г) $\dfrac{1 - \cos^2 t}{1 - \sin^2 t}$.

Докажите тождество:

13.16. а) $1 + \mathrm{tg}^2\, t = \cos^{-2} t$;

б) $1 + \mathrm{ctg}^2\, t = \sin^{-2} t$;

в) $\sin^2 t\,(1 + \mathrm{ctg}^2\, t) = 1$;

г) $\cos^2 t\,(1 + \mathrm{tg}^2\, t) = 1$.

13.17. а) $\mathrm{tg}\,(\pi - t) = -\mathrm{tg}\, t$;

б) $\mathrm{tg}\,(2\pi + t) = \mathrm{tg}\, t$;

в) $\mathrm{ctg}\,(\pi - t) = -\mathrm{ctg}\, t$;

г) $\mathrm{ctg}\,(2\pi + t) = \mathrm{ctg}\, t$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения:

13.18. а) $2 \sin t$;

б) $3 + 4 \cos t$;

в) $-3 \cos t$;

г) $3 - 5 \sin t$.

○**13.19.** а) $\dfrac{15}{2|\sin t| + 3}$;

б) $\sqrt{7 \cos^2 t + 9}$;

в) $\dfrac{1}{3 \sin^2 t + 4 \cos^2 t}$;

г) $\dfrac{5 \sin^2 t + 5 \cos^2 t}{3|\cos t| + 2}$.

Определите знак числа:

13.20. а) $\sin \dfrac{4\pi}{7}$; б) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{7}\right)$; в) $\sin \dfrac{9\pi}{8}$; г) $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

○**13.21.** а) $\sin(-2)$; б) $\cos 3$; в) $\sin 5$; г) $\cos(-6)$.

○**13.22.** а) $\sin 10$; б) $\cos(-12)$; в) $\sin(-15)$; г) $\cos 8$.

Определите знак выражения:

○**13.23.** а) $\sin 1 \quad \cos 2$;

б) $\sin \dfrac{\pi}{7} \quad \cos\left(-\dfrac{7\pi}{5}\right)$;

в) $\cos 2 \quad \sin(-3)$;

г) $\cos\left(-\dfrac{14\pi}{9}\right) \quad \sin\left(-\dfrac{4\pi}{9}\right)$.

○**13.24.** а) $\cos \dfrac{5\pi}{9} - \mathrm{tg}\, \dfrac{25\pi}{18}$;

б) $\mathrm{tg}\, 1 - \cos 2$;

в) $\sin \dfrac{7\pi}{10} - \mathrm{ctg}\, \dfrac{3\pi}{5}$;

г) $\sin 2 - \mathrm{ctg}\, 5{,}5$.

○**13.25.** а) $\sin 1 \quad \cos 2 \quad \mathrm{tg}\, 3 \quad \mathrm{ctg}\, 4$;

б) $\sin(-5) \quad \mathrm{ctg}\,(-6) \quad \mathrm{tg}\,(-7) \quad \mathrm{ctg}\,(-8)$.

●**13.26.** Вычислите:

а) $\sin 4 + |\sin 4| + 2 \cos 13 - 2|\cos 13|$;

б) $\dfrac{\mathrm{tg}\, 11 + |\mathrm{tg}\, 11|}{|\mathrm{ctg}\, 12| - \mathrm{ctg}\, 12}$.

Решите уравнение:

13.27. а) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos t = -\frac{1}{2}$;

б) $\sin t = -\frac{1}{2}$; г) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

13.28. а) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos t = \sqrt{3}$; г) $\sin t = -\frac{\pi}{3}$.

13.29. а) $10 \sin t = \sqrt{75}$; в) $8 \cos t - \sqrt{32} = 0$;

б) $\sqrt{8} \sin t + 2 = 0$; г) $8 \cos t = -\sqrt{48}$.

13.30. а) $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sqrt{2} \sin t = 0$;

б) $\sqrt{\frac{4}{3}} \cos t = \cos^2 1 + \sin^2 1$.

○**13.31.** а) $|\sin t| = 1$; в) $|\cos t| = 1$;

б) $\sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2}$; г) $\sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

○**13.32.** **Имеет ли смысл выражение:**

а) $\sqrt{\sin 10{,}2\pi}$; в) $\sqrt{\sin (-3{,}4\pi)}$;

б) $\sqrt{\cos 1{,}3\pi}$; г) $\sqrt{\cos (-6{,}9\pi)}$?

Решите неравенство (относительно переменной x):

○**13.33.** а) $\cos 2 \quad (2x - 1) < 0$;
б) $\cos 3 \quad \cos 5 \quad (x^2 - 4) < 0$.

○**13.34.** а) $(\cos t - 5)(3x - 1) \geqslant 0$;
б) $(2 + \sin t)(9 - x^2) \geqslant 0$.

○**13.35.** а) $\operatorname{ctg} 5 \quad (x - 1) \geqslant 0$;
б) $\frac{\operatorname{tg} 7 \quad \cos 1}{\sin 1}(2x^2 - 72) < 0$;
в) $(\operatorname{tg} 2 \quad \sin 5) \quad (7 - 5x) \leqslant 0$;
г) $\operatorname{tg} 1 \quad \operatorname{ctg} 2 \quad \operatorname{tg} 3 \quad \operatorname{ctg} 4 \quad (x^2 + 2) > 0$.

Сравните числа a и b:

○**13.36.** а) $a = \sin 1,\ b = \cos 1$; в) $a = \sin 2,\ b = \cos 2$;
б) $a = \sin 4,\ b = \cos 4$; г) $a = \sin 7,\ b = \cos 7$.

●**13.37.** а) $a = \sin 1,\ b = \cos 6$; в) $a = \sin 4,\ b = \cos 2$;
б) $a = \sin 2,\ b = \cos 4$; г) $a = \sin 3,\ b = \cos 5$.

Расположите в порядке возрастания числа:

○**13.38.** а) $\sin \frac{\pi}{7}$; $\sin \frac{\pi}{5}$; $\sin \frac{2\pi}{3}$; $\sin \frac{7\pi}{6}$; $\sin \frac{4\pi}{3}$;

б) $\cos \frac{\pi}{8}$; $\cos \frac{\pi}{3}$; $\cos \frac{5\pi}{6}$; $\cos \frac{5\pi}{4}$; $\cos \frac{7\pi}{4}$.

●**13.39.** а) $\sin 2,\ \sin 3,\ \cos 4,\ \cos 5$;
б) $\cos 3,\ \cos 4,\ \cos 6,\ \cos 7$;
в) $\sin 3,\ \sin 4,\ \sin 6,\ \sin 7$;
г) $\cos 2,\ \cos 3,\ \sin 4,\ \sin 5$.

●**13.40.** а) $1,\ \sin 1,\ \cos 1,\ \operatorname{tg} 1$; б) $2,\ \sin 2,\ \cos 2,\ \operatorname{ctg} 2$.

Вычислите:

●**13.41.** а) $\sqrt{\sin^2 1 + \sin^2 2 - 2\sin 1 \ \ \sin 2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \sin 1 + \sin^2 1} +$

$+ \sqrt{1 + \sin^2 2 - 2\sin 2}$;

б) $\sqrt{\cos^2 6 + \cos^2 7 - 2\cos 6 \ \ \cos 7} + \sqrt{\frac{1}{4} - \cos 7 + \cos^2 7} +$

$+ \sqrt{1 + \cos^2 6 - 2\cos 6}$.

●**13.42.** а) $\sqrt{\sin^2 5 - 2\sin 5 \ \ \sin\frac{11\pi}{6} + \sin^2\frac{11\pi}{6}} -$

$-\sqrt{\sin^2\frac{5\pi}{6} - 2\sin\frac{5\pi}{6} \ \ \sin 5 + \sin^2 5}$;

б) $\sqrt{\cos^2 4 - 2\cos 4 \ \ \cos\frac{2\pi}{3} + \cos^2\frac{2\pi}{3}} +$

$+\sqrt{\cos^2 4 - 2\cos 4 \ \ \cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}$.

Решите неравенство:

○**13.43.** а) $\sin t > 0$; в) $\sin t < 0$;

б) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○**13.44.** а) $\cos t > 0$; в) $\cos t < 0$;

б) $\cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

○**13.45.** а) $\sin t < -\frac{1}{2}$; в) $\sin t > -\frac{1}{2}$;

б) $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

○**13.46.** а) $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos t < -\frac{1}{2}$; г) $\cos t > -\frac{1}{2}$.

○**13.47.** а) $\sin t \leqslant \frac{1}{2}$; в) $\sin t \geqslant -\frac{1}{2}$;

б) $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos t \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решите систему неравенств:

○**13.48.** а) $\begin{cases} \sin t > 0, \\ \sin t < \frac{1}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos t < 0, \\ \cos t > -\frac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \cos t > \frac{1}{2}, \\ \cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

○**13.49.** а) $\begin{cases} \sin t > 0, \\ \cos t < \frac{1}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos t < 0, \\ \sin t > -\frac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \cos t > \frac{1}{2}, \\ \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

○13.50. Решите неравенство:

а) $\sin t \quad \cos t > 0$;
б) $\sin t \quad \operatorname{tg} t \leqslant 0$;
в) $\operatorname{ctg} t \quad \cos t < 0$;
г) $\operatorname{tg} t \quad \operatorname{ctg} t \geqslant 0$.

Докажите неравенство:

○13.51. а) $\sin t < \operatorname{tg} t$, если $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

б) $\cos t < \operatorname{ctg} t$, если $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

●13.52. а) $1 < \sin 1 + \cos^2 1 < 1{,}25$;

б) $2 < 2\sin^2 1{,}2 + \cos 1{,}2 < \frac{17}{8}$.

●13.53. а) $0 < \operatorname{tg} \frac{17}{7} + \cos^{-2} \frac{17}{7} < 1$;

б) $-1 < \sin^{-2} 4 + \operatorname{ctg} 4 < 1$.

§ 14. Тригонометрические функции числового аргумента

Упростите выражение:

14.1. а) $1 - \sin^2 t$;
б) $\cos^2 t - 1$;
в) $1 - \cos^2 t$;
г) $\sin^2 t - 1$.

14.2. а) $(1 - \sin t)(1 + \sin t)$;
б) $\cos^2 t + 1 - \sin^2 t$;
в) $(1 - \cos t)(1 + \cos t)$;
г) $\sin^2 t + 2\cos^2 t - 1$.

14.3. а) $\frac{1}{\cos^2 t} \quad 1$;
б) $\frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t}$;
в) $1 - \frac{1}{\sin^2 t}$;
г) $\frac{1 - \cos^2 t}{1 - \sin^2 t}$.

14.4. а) $\frac{(\sin t + \cos t)^2}{1 + 2\sin t \cos t}$;
б) $\frac{1 - 2\sin t \cos t}{(\cos t - \sin t)^2}$.

14.5. Докажите тождество:

а) $\frac{\cos^2 t}{1 - \sin t} - \sin t = 1$;
б) $\frac{\sin^2 t}{1 + \cos t} + \cos t = 1$.

14.6. Докажите, что при всех допустимых значениях t выражение принимает одно и то же значение:

а) $(\sin t + \cos t)^2 - 2 \sin t \cos t$;

б) $\dfrac{2 - \sin^2 t - \cos^2 t}{3 \sin^2 t + 3 \cos^2 t}$;

в) $\sin^4 t + \cos^4 t + 2 \sin^2 t \cos^2 t$;

г) $\dfrac{\sin^4 t - \cos^4 t}{\sin^2 t - \cos^2 t}$.

14.7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $s = f(t)$, если:

а) $f(t) = 1 - (\cos^2 t - \sin^2 t)$;

б) $f(t) = 1 - \sin t \cos t \operatorname{tg} t$;

в) $f(t) = \cos^2 t \operatorname{tg}^2 t + 5 \cos^2 t - 1$;

г) $f(t) = \sin t + 3 \sin^2 t + 3 \cos^2 t$.

Упростите выражение:

14.8. а) $\dfrac{\cos^2 t - \operatorname{ctg}^2 t}{\sin^2 t - \operatorname{tg}^2 t}$;

б) $\operatorname{ctg}^2 t - (\sin^{-2} t - 1)$;

в) $\cos^2 t - \sin^2 t (\operatorname{ctg}^2 t + 1)$;

г) $\dfrac{\sin^2 t - 1}{\cos^2 t - 1} + \operatorname{tg} t \operatorname{ctg} t$.

14.9. а) $\dfrac{\sin t}{1 + \cos t} + \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$;

б) $\operatorname{ctg}^2 t (\cos^2 t - 1) + 1$;

в) $\dfrac{\cos t}{1 + \sin t} + \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg} t + 1}{1 + \operatorname{ctg} t}$.

14.10. а) $(3 \sin t + 4 \cos t)^2 + (4 \sin t - 3 \cos t)^2$;

б) $(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)^2 - (\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t)^2$;

в) $\sin t \cos t (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)$;

г) $\sin^2 t \cos^2 t (\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t + 2)$.

Докажите тождество:

○14.11. а) $\dfrac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = \sin^2 t$;

б) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{ctg} t} = \operatorname{tg} t$;

в) $\dfrac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t} = \cos^2 t$;

г) $\dfrac{1 - \operatorname{ctg} t}{1 - \operatorname{tg} t} = -\operatorname{ctg} t$.

○14.12. а) $1 + \sin t = \dfrac{\cos t + \operatorname{ctg} t}{\operatorname{ctg} t}$;

б) $\dfrac{\sin t + \operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t} = 1 + \cos t$;

в) $\dfrac{1 - \sin t}{\cos t} = \dfrac{\cos t}{1 + \sin t}$;

г) $\dfrac{\sin t}{1 - \cos t} = \dfrac{1 + \cos t}{\sin t}$.

○14.13. Докажите тождество:

а) $\dfrac{(\sin t + \cos t)^2 - 1}{\operatorname{ctg} t - \sin t \cos t} = 2\,\operatorname{tg}^2 t;$

б) $\sin^3 t(1 + \operatorname{ctg} t) + \cos^3 t(1 + \operatorname{tg} t) = \sin t + \cos t;$

в) $\dfrac{(\sin t + \cos t)^2 - 1}{\operatorname{tg} t - \sin t \cos t} = 2\,\operatorname{ctg}^2 t;$

г) $\dfrac{1 - 4\sin^2 t \cos^2 t}{(\sin t + \cos t)^2} + 2\sin t \cos t = 1.$

По заданному значению функции найдите значения остальных тригонометрических функций:

14.14. а) $\sin t = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$;

б) $\sin t = \frac{5}{13}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

в) $\sin t = -0{,}6$, $-\frac{\pi}{2} < t < 0$;

г) $\sin t = -0{,}28$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.

14.15. а) $\cos t = 0{,}8$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

б) $\cos t = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$;

в) $\cos t = 0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$;

г) $\cos t = -\frac{24}{25}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$.

14.16. а) $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{tg} t = 2{,}4$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$;

в) $\operatorname{tg} t = -\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$;

г) $\operatorname{tg} t = -\frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$.

○14.17. а) $\operatorname{ctg} t = \frac{12}{5}$, $3\pi < t < \frac{7\pi}{2}$;

б) $\operatorname{ctg} t = \frac{7}{24}$, $2\pi < t < \frac{5\pi}{2}$;

в) $\operatorname{ctg} t = -\frac{5}{12}$, $\frac{7\pi}{2} \quad t < 4\pi$;

г) $\operatorname{ctg} t = -\frac{8}{15}$, $\frac{5\pi}{2} < t < 3\pi$.

○14.18. а) Дано: $\sin(4\pi + t) = \frac{3}{5}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите: $\operatorname{tg}(\pi - t)$.

б) Дано: $\cos(2\pi + t) = \frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$. Вычислите: $\operatorname{ctg}(\pi - t)$.

○**14.19.** а) Дано: $\cos t = -\frac{5}{13}$, $8{,}5\pi < t < 9\pi$. Вычислите: $\sin(-t)$.

б) Дано: $\sin t = \frac{4}{5}$, $\frac{9\pi}{2} < t < 5\pi$. Вычислите: $\cos(-t) + \sin(-t)$.

○**14.20.** а) Известно, что $\sin t + \cos t = 0{,}8$. Вычислите: $\sin t \cos t$.

б) Известно, что $\sin t - \cos t = \frac{1}{3}$. Вычислите: $9 \sin t \cos t$.

●**14.21.** Известно, что $\sin t + \cos t = 0{,}6$. Вычислите:
а) $\sin^3 t + \cos^3 t$; б) $\operatorname{tg} t \sin t + \operatorname{ctg} t \cos t$.

●**14.22.** Известно, что $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 2{,}3$. Вычислите:
а) $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$; б) $\operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t$.

●**14.23.** Известно, $\sin t \cos t = -0{,}5$. Вычислите:
а) $\sin^2 t + \cos^2 t$; в) $\sin^6 t + \cos^6 t$;
б) $\sin^4 t + \cos^4 t$; г) $\sin^8 t + \cos^8 t$.

●**14.24.** Известно, что $\sin t \cos t = -\frac{12}{49}$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$; б) $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$.

●**14.25.** Вычислите:

а) $\sin t + \cos t$, если $\operatorname{tg} t - \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{7}{12}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$;

б) $2 \sin t + \cos t$, если $4 \operatorname{ctg} t + 6 \operatorname{tg} t + 11 = 0$ и $\frac{5\pi}{2} < t < \frac{11\pi}{4}$.

○**14.26.** а) Вычислите $\operatorname{tg} t$, если известно, что $\frac{\sin t + 3\cos t}{\sin t - 3\cos t} = 4$.

б) Вычислите $\operatorname{ctg} t$, если известно, что $\frac{2\sin t - 3\cos t}{2\cos t - 3\sin t} = 3$.

○**14.27.** а) Вычислите $\operatorname{tg} t$, если известно, что $5 \sin t - \cos^2 t = 2{,}36$ и $\frac{5\pi}{2} < t < 3\pi$.

б) Вычислите $\operatorname{ctg} t$, если известно, что $\sin^2 t + 2\cos t + 0{,}56 = 0$ и $-\frac{7\pi}{2} < t < -3\pi$.

●**14.28.** а) Вычислите $\operatorname{ctg} t$, если известно, что $\frac{2\sin t \cos t}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{4} < t < \pi$.

б) Вычислите $\operatorname{tg} t$, если известно, что

$$\frac{2\sin^2 t + 3\sin t \cos t - \cos^2 t}{2\cos^2 t - \sin^2 t} = -\frac{1}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}.$$

●14.29. Зная, что $\operatorname{tg} t = a$, найдите:

а) $\cos^4 t$; в) $\sin^4 t$;

б) $\sin t \cos t$; г) $\sin^3 t \cos t$.

●14.30. Зная, что $\operatorname{ctg} t = a$, найдите:

а) $2\sin^2 t + 3\cos^2 t$; б) $2\sin^2 t - 3\sin t\cos t - 5\cos^2 t$.

Упростите выражение:

○14.31. а) $\sqrt{\dfrac{1+\cos t}{1-\cos t}} + \sqrt{\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}} + \dfrac{2}{\sin t}$, если $3\pi < t < \dfrac{7\pi}{2}$;

б) $\sqrt{\dfrac{1-\sin t}{1+\sin t}} + \operatorname{tg} t$, если $2\pi < t < \dfrac{5\pi}{2}$.

●14.32. а) $\sqrt{\sin^{-2} t - \operatorname{ctg}^2 t + \cos^2 t - 1} +$

$+ \sqrt{\cos^{-2} t - \operatorname{tg}^2 t + \sin^2 t - 1} + 2\sin t - \cos t$, если

$t \in (13; 14)$;

б) $\sqrt{\sin^2 t(1 - 2\operatorname{ctg} t) + 4\cos^2 t(1 - 0{,}5\operatorname{tg} t)} +$

$+ \sin t + \cos t$, если $t \in (0; 1)$.

●14.33. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{13}{24}$; б) $\dfrac{1}{2}$, $\cos 1$, $\cos 1{,}1$.

●14.34. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = \sin^2 x + 2\sin x - 5$;

б) $y = \sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\cos x$;

в) $y = 4\cos^2 x - 4\cos x - 2$;

г) $y = \cos^2 x - 3\sin^2 x - 4\sin x$.

Постройте график функции:

○14.35. а) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$; в) $y = \sin^2 \sqrt{x} + \cos^2 \sqrt{x}$;

б) $y = \cos^2 \dfrac{1}{x} + \sin^2 \dfrac{1}{x}$; г) $y = \sin^2 \dfrac{1}{x^2 - 4} + \cos^2 \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

○14.36. а) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$;

б) $y = 3\cos^2 x + 2\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + 3\sin^2 x$.

§ 15. Тригонометрические функции углового аргумента

Переведите из градусной меры в радианную:

15.1. а) $120°$; б) $220°$; в) $300°$; г) $765°$.

15.2. а) $210°$; б) $150°$; в) $330°$; г) $675°$.

Переведите из радианной меры в градусную:

15.3. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{11\pi}{3}$; в) $\frac{6\pi}{5}$; г) $\frac{46\pi}{9}$.

15.4. а) $\frac{5\pi}{8}$; б) $\frac{7\pi}{12}$; в) $\frac{11\pi}{12}$; г) $\frac{47\pi}{9}$.

Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ для заданного значения угла α:

15.5. а) $90°$; б) $180°$; в) $270°$; г) $360°$.

15.6. а) $30°$; б) $150°$; в) $210°$; г) $240°$.

Расположите в порядке возрастания числа:

○**15.7.** а) $\sin 40°$, $\sin 80°$, $\sin 120°$, $\sin 160°$;
б) $\cos 40°$, $\cos 80°$, $\cos 120°$, $\cos 160°$.

○**15.8.** а) $\sin 380°$, $\sin 830°$, $\sin 210°$, $\sin 1000°$;
б) $\cos 390°$, $\cos 460°$, $\cos 920°$, $\cos 650°$.

○**15.9.** а) $\sin 22{,}5°$, $\cos 37{,}4°$, $\cos 990°$, $\sin 990°$;
б) $\operatorname{tg} 100°$, $\operatorname{ctg} 225°$, $\cos 94{,}3°$, $\sin 77°$.

15.10. В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза c и острый угол α. Найдите катеты, площадь и радиус описанной окружности, если:
а) $c = 12$, $\alpha = 60°$; в) $c = 4$, $\alpha = 30°$;
б) $c = 6$, $\alpha = 45°$; г) $c = 60$, $\alpha = 60°$.

15.11. Хорда AB образует с диаметром AC окружности угол $\alpha°$. Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен R.

○**15.12.** Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

○**15.13.** В $\triangle ABC$ известно, что $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$. Найдите BC, AC и площадь $\triangle ABC$.

○15.14. Высота треугольника равна 5 см, а углы, прилегающие к основанию, равны $60°$ и $45°$. Найдите площадь треугольника.

●15.15. Использовав геометрические соображения, вычислите:
а) $\sin 15°$ и $\cos 15°$; б) $\sin 22{,}5°$ и $\cos 22{,}5°$.

Вычислите:

○15.16. а) $\sin^2 733° + \cos^2 347°$;
б) $2\cos^2 395° + \sin^2 1000° + 2\sin^2 755° + \cos^2 800°$.

○15.17. а) $\operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2° \operatorname{tg} 3° \quad \operatorname{tg} 89°$;
б) $\operatorname{ctg} 2° \operatorname{ctg} 4° \operatorname{ctg} 6° \quad \operatorname{ctg} 178°$.

●15.18. а) $\sin^2 1° + \sin^2 2° + \sin^2 3° + \quad + \sin^2 90°$;
б) $\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cos^2 3° + \quad + \cos^2 180°$.

○15.19. Докажите, что верно равенство:

а) $(4\sin 30° + \operatorname{tg} 60°)\left(\dfrac{1}{\cos(-60°)} + \operatorname{ctg} 150°\right) = 2\sin 150°$;

б) $(\operatorname{ctg} 210° + 2\cos 120°)(\operatorname{tg} 420° - 2\sin 330°) = 4\cos^2 315°$.

●15.20. Дано выражение $\sin 1° \sin 2° \sin 3° \quad \sin n°$.
а) При каких натуральных значениях n это выражение положительно?
б) При каких натуральных значениях n это выражение отрицательно?
в) При каких натуральных значениях n это выражение равно нулю?

●15.21. Дано выражение $\cos 1° \cos 2° \cos 3° \quad \cos n°$.
а) При каких натуральных значениях n это выражение положительно?
б) При каких натуральных значениях n это выражение отрицательно?
в) При каких натуральных значениях n это выражение равно нулю?

●15.22. Дано выражение $\sin 1° + \sin 2° + \sin 3° + \quad + \sin n°$.
а) При каких натуральных значениях n это выражение положительно?
б) При каких натуральных значениях n это выражение отрицательно?
в) При каких натуральных значениях n это выражение равно нулю?

●15.23. Дано выражение $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \ldots + \cos n°$.

а) При каких натуральных значениях $n \leqslant 360$ это выражение положительно?

б) При каких натуральных значениях $n \leqslant 360$ это выражение отрицательно?

в) При каких натуральных значениях n это выражение равно нулю?

●15.24. Использовав равнобедренный треугольник с углом 36° при вершине, вычислите $\sin 18°$, $\cos 18°$, $\sin 36°$, $\cos 36°$.

Указание. Проведите биссектрису угла при основании треугольника.

§ 16. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, их свойства и графики

Найдите значение функции:

16.1. а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ при $x = \frac{4\pi}{3}$;

б) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при $x = -\frac{\pi}{2}$;

в) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ при $x = \frac{7\pi}{6}$;

г) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ при $x = -\frac{15\pi}{4}$.

16.2. $y = \frac{1}{\cos x}$, если:

а) $x = \frac{2\pi}{3}$; б) $x = \frac{11\pi}{6}$.

16.3. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$, если:

а) $x = -\frac{\pi}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{4}$.

16.4. Не выполняя построения, ответьте на вопрос, принадлежит ли графику функции $y = \sin x$ точка с координатами:

а) $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}\right)$; в) $(\pi; 1)$; г) $\left(\frac{3\pi}{2}; -1\right)$?

16.5. Принадлежит ли графику функции $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ точка:

а) $\left(0; \frac{3}{2}\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$;

в) $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3}{2}\right)$;

г) $(4\pi; 2{,}5)$?

16.6. Принадлежит ли графику функции $y = \cos x$ точка с координатами:

а) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$;

в) $\left(\frac{2\pi}{3}; -\frac{1}{2}\right)$;

г) $\left(\frac{5\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

16.7. Принадлежит ли графику функции $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ точка с координатами:

а) $\left(0; \sqrt{3} + 1\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{6}; 1\right)$;

в) $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$;

г) $\left(\frac{\pi}{6}; 3\right)$?

16.8. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin x$:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]$;

б) на луче $\left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$;

в) на интервале $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$;

г) на полуинтервале $\left(-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$.

16.9. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos x$:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$;

б) на интервале $\left(-\pi; \frac{\pi}{4}\right)$;

в) на луче $\left[-\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$;

г) на полуинтервале $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

○16.10. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на четность:

а) $f(x) = x^5 \sin \frac{x}{2}$;

б) $f(x) = x^5 \sin x^2$;

в) $f(x) = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{x^3}$;

г) $f(x) = x^3 - \sin x$.

Исследуйте функцию на четность:

○16.11. а) $f(x) = x + \sin x$; в) $f(x) = \dfrac{x^2 \sin x}{x^2 - 9}$;

б) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2 - 1}$; г) $f(x) = \sin^2 x - x^4$.

○16.12. а) $f(x) = \sin x \cos x$; в) $f(x) = \dfrac{\cos x^3}{x(25 - x^2)}$;

б) $f(x) = \dfrac{\cos x^3}{4 - x^2}$; г) $f(x) = (4 + \cos x)(\sin^6 x - 1)$.

○16.13. а) $f(x) = x^2 \cos x$; в) $f(x) = \dfrac{\cos 5x + 1}{|x|}$;

б) $f(x) = x^5 \cos 3x$; г) $f(x) = x^{11} \cos x + \sin x$.

○16.14. Найдите область значений заданной функции на заданном промежутке:

а) $y = \sin x,\ x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$; в) $y = \sin x,\ x \in (-1; 6)$;

б) $y = \cos x,\ x \in (1; +\infty)$; г) $y = \cos x,\ x \in [1{,}2; 7{,}5]$.

Вычислите, преобразовав заданное выражение ($\sin t$ или $\cos t$) к виду $\sin t_0$ или $\cos t_0$ так, чтобы выполнялось соотношение $0 < t_0 < 2\pi$ или $0° < t_0 < 360°$:

16.15. а) $\sin 50{,}5\pi$; в) $\sin 25{,}25\pi$;
б) $\cos 51{,}75\pi$; г) $\sin 30{,}5\pi$.

16.16. а) $\sin 390°$; в) $\sin 540°$;
б) $\cos 750°$; г) $\cos 930°$.

16.17. Докажите тождество:
а) $\sin^2(x - 8\pi) = 1 - \cos^2(16\pi - x)$;
б) $\cos^2(4\pi + x) = 1 - \sin^2(22\pi - x)$.

○16.18. Найдите основной период функции:

а) $y = \sin 2x$; в) $y = \sin \frac{x}{2}$;

б) $y = \cos 3x$; г) $y = \cos \frac{3x}{4}$.

○16.19. Преобразуйте заданное выражение ($\sin t$ или $\cos t$) к виду $\sin t_0$ или $\cos t_0$ так, чтобы выполнялось соотношение $0 < t_0 < 2\pi$:

а) $\sin 8$; б) $\cos(-10)$; в) $\sin(-25)$; г) $\cos 35$.

16.20. Вычислите:

а) $\cos(t + 4\pi)$, если $\cos(2\pi - t) = -\frac{3}{5}$;

б) $\sin(32\pi - t)$, если $\sin(2\pi - t) = \frac{5}{13}$.

16.21. Решите уравнение:

а) $\sin(t + 2\pi) + \sin(t - 4\pi) = 1$;

б) $3\cos(2\pi + t) + \cos(t - 2\pi) + 2 = 0$;

в) $\sin(t + 4\pi) + \sin(t - 6\pi) = \sqrt{3}$;

г) $\cos(t + 2\pi) + \cos(t - 8\pi) = \sqrt{2}$.

Найдите область значений функции:

○**16.22.** а) $y = 2\sin x$;
в) $y = -3\cos x + 2$;
б) $y = (3\cos x - 2)^4$;
г) $y = (1 + 4\sin x)^2$.

○**16.23.** а) $y = \frac{1}{\sin x + 2}$;
в) $y = \frac{2}{\sin x - 3}$;
б) $y = \frac{8}{3\cos x - 5}$;
г) $y = \frac{15}{4 + \cos x}$.

○**16.24.** а) $y = \sin^2 x - 6\sin x + 8$;
в) $y = \cos^2 x + \cos x + 2$;
б) $y = \sqrt{2 - \cos x}$;
г) $y = \sqrt{8\sin x - 4}$.

○**16.25.** Найдите все целочисленные значения функции:

а) $y = 5 + 4\cos x$;
в) $y = 3 - 2\sin x$;
б) $y = \sqrt{2 - 7\cos x}$;
г) $y = \sqrt{11 + 2\sin x}$.

○**16.26.** Найдите все значения x, при которых заданному промежутку принадлежит только одно целое число; укажите это число:

а) $(5 - 2\sin x;\ 5 + 2\sin x)$;

б) $[4 + 2\cos x;\ 4 - 2\cos x]$.

Постройте график функции:

16.27. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
в) $y = \sin(x - \pi)$;
б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
г) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

16.28. а) $y = \sin x - 2$;
в) $y = \sin x + 2$;
б) $y = \sin x + 1$;
г) $y = \sin x - 3$.

Постройте график функции:

○16.29. а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$; б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

○16.30. а) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = -\sin x + 3$.

○16.31. а) $y = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$; в) $y = \sin(x - \pi) - 1$;

б) $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$; г) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$.

○16.32. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}5$ на промежутке:

а) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$; в) $[0; \pi)$;

б) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right)$; г) $\left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$.

Постройте график функции:

16.33. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \cos x - 2$; г) $y = \cos x + 1{,}5$.

○16.34. а) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$; в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$;

б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$; г) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$.

●16.35. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}5$ на промежутке:

а) $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; б) $(1; 9)$; в) $[231; 238]$; г) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

16.36. Известно, что $f(x) = 3 \sin x$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $2f(x) + 1$;

б) $2f(x)$; г) $f(-x) + f(x)$.

16.37. Известно, что $f(x) = -\frac{1}{2}\cos x$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $f(x + 2\pi)$;

б) $2f(x)$; г) $f(-x) - f(x)$.

16.38. Известно, что $f(x) = \cos\frac{x}{3}$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $f(-3x)$;

б) $3f(x)$; г) $f(-x) - f(x)$.

16.39. Известно, что $f(x) = \sin 2x$. Найдите:

а) $f(-x)$; в) $f\left(-\frac{x}{2}\right)$;

б) $2f(x)$; г) $f(-x) + f(x)$.

○16.40. а) Дано: $f(x) \quad 2x^2 \quad x + 1$. Докажите, что $f(\sin x) = 3 - 2\cos^2 x - \sin x$.

б) Дано: $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$. Докажите, что $f(\sin x) = 2\sin x - 3\cos^2 x - 4$.

○16.41. а) Дано: $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Докажите, что $-f(\cos x) = 2\sin^2 x + 3\cos x$.

б) Дано: $f(x) = 5x^2 + x + 4$. Докажите, что $f(\cos x) = 9 + \cos x - 5\sin^2 x$.

16.42. Исследуйте функцию $y = \sin x$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$; в) $\left(\frac{11\pi}{3}; \frac{25\pi}{6}\right)$;

б) $\left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$; г) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right)$.

16.43. Исследуйте функцию $y = \cos x$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $[3\pi; 4\pi]$; в) $\left(\frac{7\pi}{3}; \frac{17\pi}{6}\right)$;

б) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$; г) $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$.

○16.44. На каких промежутках функция $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$:

а) возрастает; б) убывает?

○16.45. На каких промежутках функция $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$:

а) возрастает; б) убывает?

●16.46. Докажите, что функция $y = \sin x$:

а) возрастает на отрезке $[12; 13]$;

б) убывает на интервале $(8; 10)$;

в) достигает на интервале $(7; 12)$ наименьшего и наибольшего значений;

г) не достигает на интервале $(-1; 1)$ ни наименьшего, ни наибольшего значений.

●16.47. Докажите, что функция $y = \cos x$:

а) возрастает на отрезке $[-3; -0{,}5]$;

б) убывает на интервале $(7; 9)$;

в) достигает на интервале $(3; 7)$ наименьшего и наибольшего значений;

г) не достигает на интервале $(-3; -0{,}5)$ ни наименьшего, ни наибольшего значений.

Решите графически уравнение:

○16.48. а) $\sin x = x + \pi$; в) $\sin x + x = 0$;

б) $\sin x = 2x$; г) $\sin x = 2x - 2\pi$.

○16.49. а) $\sin x = \frac{2}{\pi}x$; в) $\sin x = -\frac{4}{\pi}x + 3$;

б) $\sin x + \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 + 1 = 0$; г) $\sin x = x^2 + 1$.

○16.50. а) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pi - 3x$;

б) $\sin x - \sqrt{x - \pi} = 0$;

в) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + 1$;

г) $-\sin x = \sqrt{x}$.

○16.51. а) $\cos x = x + \frac{\pi}{2}$; в) $\cos x = 2x + 1$;

б) $-\cos x = 3x - 1$; г) $\cos x = -x + \frac{\pi}{2}$.

○16.52. а) $\cos x = \sqrt{x} + 1$; в) $\cos x = -(x - \pi)^2 - 1$;

б) $\cos x = \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$; г) $\cos x = |x| + 1$.

○**16.53.** Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = x^2 + 4x - 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = -3x^2 - 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \sin x, \\ |x| - y = 0? \end{cases}$

○**16.54.** Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = -x^2 + 2x - 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = x^2 - 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = \dfrac{2}{x}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \cos x, \\ |x| - y = 0? \end{cases}$

○**16.55.** Решите графически уравнение:

а) $\sin x = \cos x$; б) $\sin x + \cos x = 0$.

●**16.56.** Решите уравнение:

а) $\sin x = \left|\dfrac{3x}{2\pi} - \dfrac{3}{4}\right|$; б) $\cos x + \left|\dfrac{3x}{5\pi} - \dfrac{3}{10}\right| = 0,\ x \geqslant 0$.

Решите неравенство:

○**16.57.** а) $\cos x \geqslant 1 + |x|$; б) $\sin x \leqslant -\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)^2 - 1$.

●**16.58.** а) $\sin x > \dfrac{3x}{5\pi}$; б) $\cos x \leqslant \dfrac{9x}{2\pi} - 1$.

Постройте график функции:

○**16.59.** а) $y = |\sin x|$; в) $y = |\cos x|$;

б) $y = \left|\cos x - \dfrac{1}{2}\right|$; г) $y = \left|\sin x + \dfrac{1}{2}\right|$.

●**16.60.** а) $y = \sin |x|$; в) $y = \cos |x|$;

б) $y = \sin\left|x - \dfrac{\pi}{3}\right|$; г) $y = \cos\left|x + \dfrac{2\pi}{3}\right|$.

○**16.61.** Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x < 0, \\ x^2, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○**16.62.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

а) Вычислите: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(\pi^2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

○**16.63.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

Постройте и прочитайте график функции:

○**16.64.** а) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ если } x < 0, \\ \cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, \text{ если } x < 0, \\ -\cos x, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○**16.65.** а) $y = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, \text{ если } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -\cos x, \text{ если } x < 0, \\ 2x^2 - 1, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

●**16.66.** Постройте график функции:

а) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; в) $y = \frac{2\cos x}{|\cos x|}$;

б) $y = \operatorname{tg} x \quad |\cos x|$; г) $y = \operatorname{ctg} x \quad |\sin x|$.

○**16.67.** Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} 2x - \pi, \text{ если } x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, \text{ если } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}, \\ \frac{3\pi}{2} - x, \text{ если } x > \frac{3\pi}{2}; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \sin x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^2, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, \text{ если } x \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

○16.68. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} 2x + 2\pi, \text{ если } x \leqslant -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi < x \leqslant 0, \\ -2x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-\pi - 2)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $f(2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

○16.69. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } x < 0, \\ \sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -(x - \pi)^2, \text{ если } x > \pi. \end{cases}$

а) Вычислите: $f(-3)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(2\pi - 3)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

○16.70. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \text{ если } -\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ x + 1, \text{ если } 0 < x < 2; \\ -\sqrt{x - 2} + 3, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

а) Вычислите: $f(0)$, $f(6)$, $f(-\pi - 2)$;

б) постройте график функции $y = f(x)$;

в) прочитайте график функции $y = f(x)$.

Постройте график функции:

●16.71. а) $y = \frac{1}{\sin x}$; б) $y = \frac{1}{\cos x}$.

●16.72. а) $y = \sin(\sin x)$; в) $y = \cos(\cos x)$;

б) $y = \sin(\cos x)$; г) $y = \cos(\sin x)$.

§ 17. Построение графика функции $y = mf(x)$

Постройте график функции:

17.1. а) $y = 3\sqrt{x}$; в) $y = \frac{1}{3}x^4$;

б) $y = -2|x|$; г) $y = -\frac{2}{x^2}$.

17.2. а) $y = -2(x-1)^3$; в) $y = -2\sqrt{x-3}$;

б) $y = 3|x+2|$; г) $y = 0{,}5x^{-3}$.

17.3. а) $y = 2\sin x$; в) $y = -\sin x$;

б) $y = 3\cos x$; г) $y = -\cos x$.

17.4. а) $y = -2\sin x$; в) $y = 1{,}5\sin x$;

б) $y = -3\cos x$; г) $y = -1{,}5\cos x$.

17.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\cos x$:

а) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; в) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) на интервале $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$; г) на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

17.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -3\sin x$:

а) на луче $[0; +\infty)$;

б) на открытом луче $\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) на луче $\left[\frac{\pi}{4}; +\infty\right)$;

г) на открытом луче $(-\infty; 0)$.

о17.7. Постройте график функции:

а) $y = 2\sin x - 1$; в) $y = -\frac{3}{2}\sin x + 3$;

б) $y = -\frac{1}{2}\cos x + 2$; г) $y = 3\cos x - 2$.

Постройте график функции:

○17.8. а) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $y = -\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $y = 1{,}5\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

○17.9. а) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$;

б) $y = -3\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) - 2$;

в) $y = -1{,}5\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 2$;

г) $y = 2{,}5\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 1{,}5$.

●17.10. а) $y = 2|\cos x|$; в) $y = 3\sin|x|$;

б) $y = -3\cos\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$; г) $y = -2\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$.

○17.11. Подберите коэффициенты a и b так, чтобы на данном рисунке был изображен график функции $y = a\sin x + b$ или $y = a\cos x + b$:

а) рис. 48; б) рис. 49; в) рис. 50; г) рис. 51.

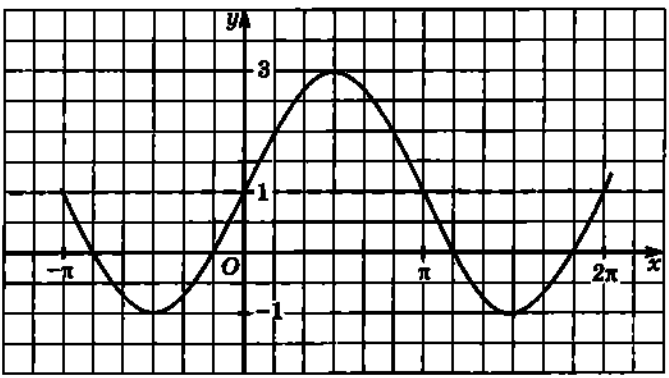

Рис. 48

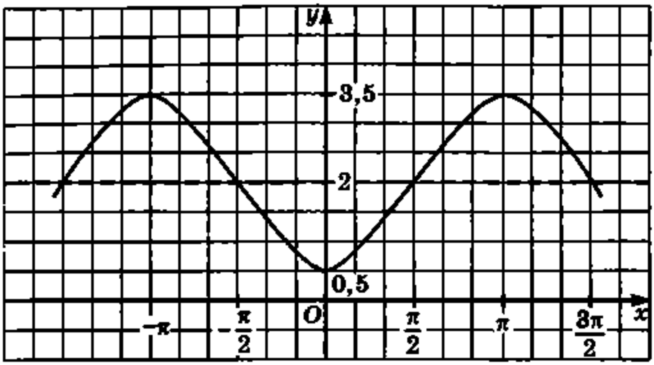

Рис. 49

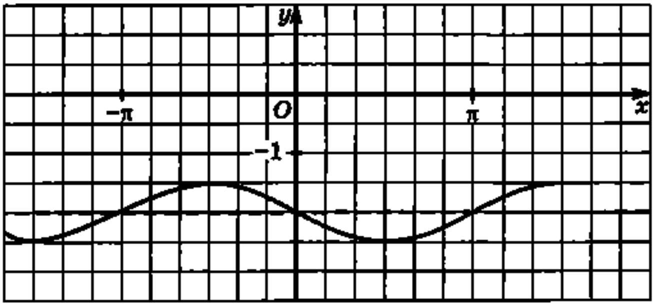

Рис. 50

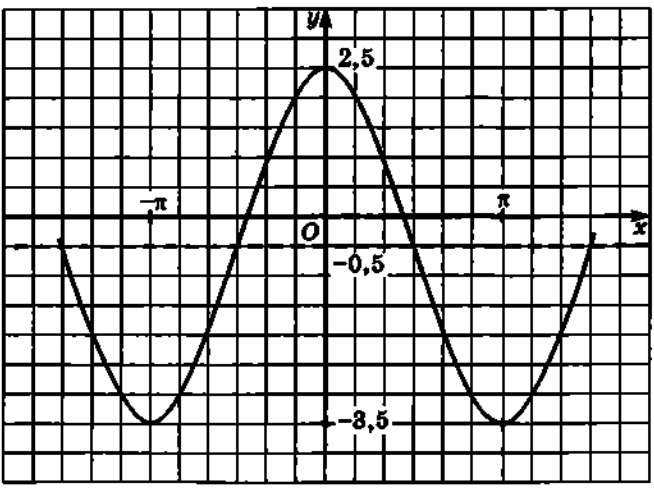

Рис. 51

○17.12. Подберите коэффициенты a и b так, чтобы на данном рисунке был изображен график функции $y = a \sin(x + b)$ или $y = a \cos(x + b)$:

а) рис. 52; б) рис. 53; в) рис. 54; г) рис. 55.

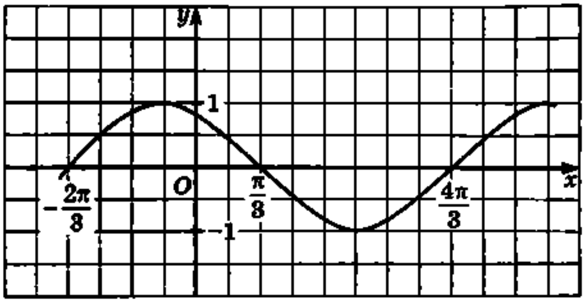

Рис. 52

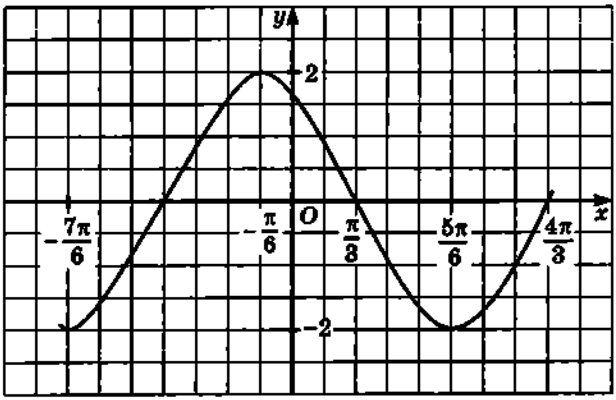

Рис. 53

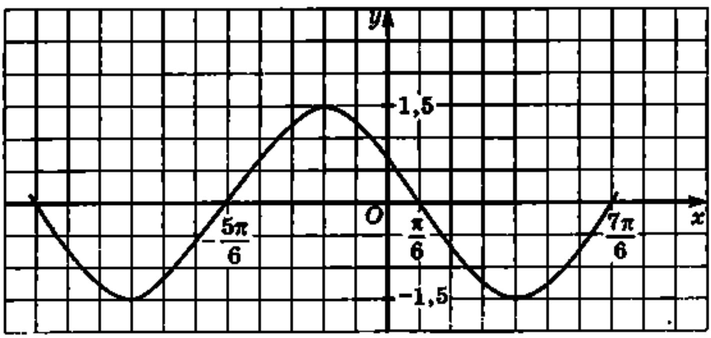

Рис. 54

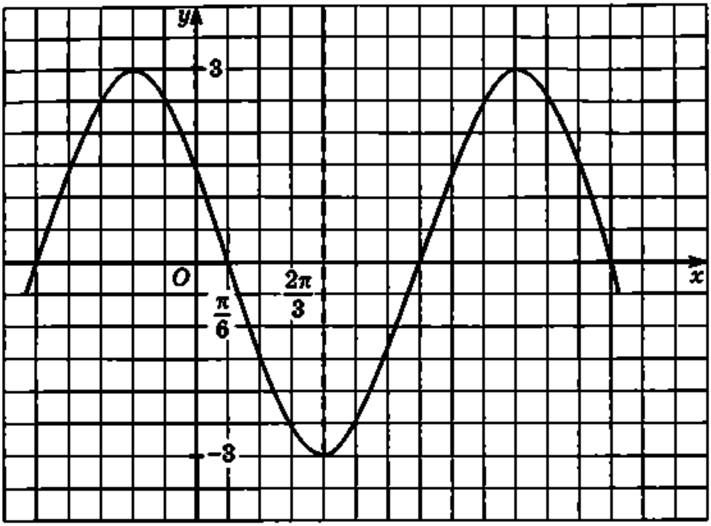

Рис. 55

○17.13. Составьте возможную аналитическую запись функции по ее графику, изображенному:

а) на рис. 56; б) на рис. 57.

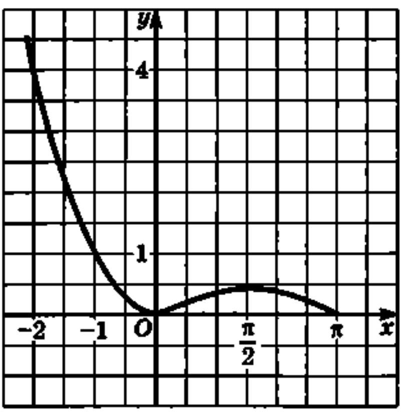

Рис. 56

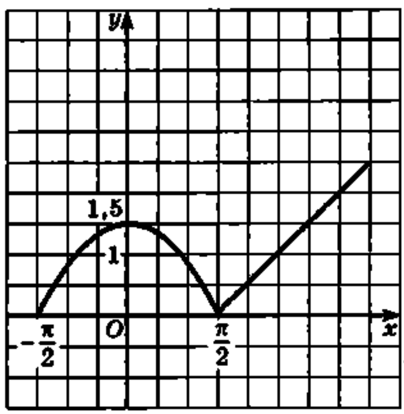

Рис. 57

○17.14. Постройте и прочитайте график функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} 3\sin x, \text{ если } x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 3x^3, \text{ если } x \geqslant \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

б) $y = \begin{cases} -2\cos x, \text{ если } x < 0; \\ \frac{1}{2}x^4, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$

●**17.15.** **Решите уравнение:**

а) $2\sin x - 1 = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{9}$;

б) $2\cos x = \frac{9x^2}{\pi^2}$.

●**17.16.** **Решите неравенство:**

а) $2\cos x < 2 + x^4$; б) $-2\sin x > \frac{9}{\pi^2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2$.

Постройте график функции:

●**17.17.** а) $y = \frac{3\sin^3 x}{1 - \cos^2 x}$; б) $y = \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x - 2}$.

●**17.18.** а) $y = 3\sin x + |\sin x|$; б) $y = \cos x - 3|\cos x|$.

●**17.19.** а) $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{|\sin x|}$; б) $y = \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{|\cos x|}$.

●**17.20.** а) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}(x - \pi)$; б) $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}(x + \pi)$.

●**17.21.** а) $y = \sin x + \sin|x| + |\sin x|$;
б) $y = \cos x + \cos|x| - |\cos x|$.

●**17.22.** а) $y = \cos x + \cos\frac{x - |x|}{2} + |\cos x|$;

б) $y = \sin x - \sin\frac{x + |x|}{2} + |\sin x|$.

§ 18. Построение графика функции $y = f(kx)$

Постройте график функции:

18.1. а) $y = \sqrt{2x}$; б) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$; в) $y = (2x)^4$; г) $y = \left|\frac{x}{3}\right|$.

18.2. а) $y = \sin\frac{x}{3}$; в) $y = \cos\frac{x}{2}$;

б) $y = \cos 2x$; г) $y = \sin 3x$.

Постройте график функции:

○18.3. а) $y = 3\sin\frac{x}{2}$; в) $y = -3\sin 2x$;

б) $y = 2{,}5\cos 2x$; г) $y = 2\cos\frac{x}{3}$.

○18.4. а) $y = 3\sin(-x)$; в) $y = 2\sin(-2x)$;
б) $y = -2\cos(-3x)$; г) $y = -3\cos(-x)$.

18.5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sin 2x$:

а) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; в) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$;

б) на интервале $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; г) на полуинтервале $(0; \pi]$.

18.6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \cos\frac{x}{3}$:

а) на луче $[0; +\infty)$;
б) на открытом луче $(-\infty; \pi)$;
в) на луче $\left(-\infty; \frac{\pi}{2}\right]$;
г) на открытом луче $\left(\frac{\pi}{3}; +\infty\right)$.

○18.7. Постройте график функции:
а) $y = \sin 2x - 1$; в) $y = \cos 2x + 3$;
б) $y = \cos\frac{x}{2} + 1$; г) $y = \sin\frac{x}{3} - 2$.

Постройте и прочитайте график функции:

○18.8. а) $y = \begin{cases} \cos 2x, \text{ если } x \leqslant \pi; \\ -\frac{1}{2}, \text{ если } x > \pi; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -\sin 3x, \text{ если } x < 0; \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$

○18.9. а) $y = \begin{cases} -2\sin x, \text{ если } x < 0; \\ \sqrt{2x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ если } x \leqslant 0; \\ 3\cos x - 3, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

o18.10. Составьте возможную аналитическую запись функции по ее графику, изображенному:

а) на рис. 58; в) рис. 60;

б) на рис. 59; г) рис. 61.

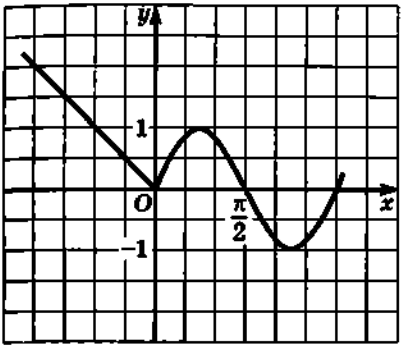

Рис. 58

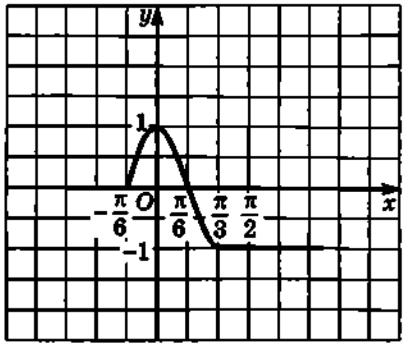

Рис. 59

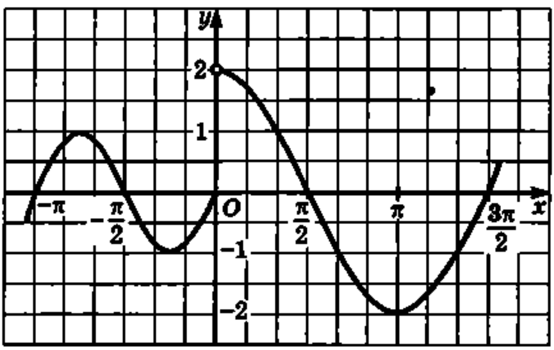

Рис. 60

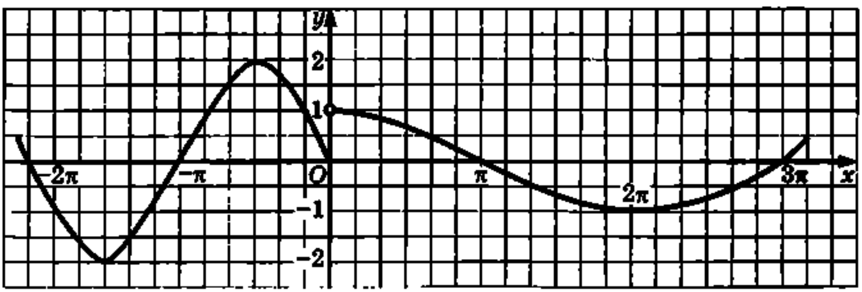

Рис. 61

○**18.11.** Исследуйте функцию $y = 2\sin 3x$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $(-1; 0)$; в) $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$; г) $(3; 4)$.

○**18.12.** Исследуйте функцию $y = -2\cos\frac{x}{2}$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$; б) $(-3; 2)$; в) $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$; г) $(3; 9)$.

○**18.13.** На каких промежутках функция $y = -0{,}5\sin\frac{2x}{3}$:

а) возрастает; б) убывает?

○**18.14.** На каких промежутках функция $y = 1{,}5\cos\frac{3x}{2}$:

а) возрастает; б) убывает?

Постройте график функции:

○**18.15.** а) $y = \sin \pi x$; в) $y = -2\sin\frac{2\pi x}{3}$;

б) $y = -2\cos\frac{\pi x}{2}$; г) $y = 3\cos\frac{3\pi x}{4}$.

○**18.16.** а) $y = \frac{1}{2}\cos 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = -1{,}5\sin\frac{2}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

●**18.17.** а) $y = \sin(x + |x|)$; в) $y = \cos(x + |x|)$;

б) $y = \cos\frac{x - 2|x|}{2}$; г) $y = \sin\frac{x + 3|x|}{2}$.

●**18.18.** Решите уравнение:

а) $\sin \pi x = 2x - 4$; б) $\cos\frac{\pi x}{3} \quad \sqrt{1{,}5x}$.

§ 19. График гармонического колебания

○**19.1.** Постройте график функции:

а) $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; б) $y = \cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Постройте график функции:

○**19.2.** а) $y = -2\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;   б) $y = -2\sin 3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

○**19.3.** а) $y = 2\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$;   б) $y = -3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

○**19.4.** а) $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$;   б) $y = -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

●**19.5.** Подберите коэффициенты a, b и c так, чтобы на данном рисунке был изображен график функции $y = a\sin(bx + c)$:
а) рис. 62;   б) рис. 63.

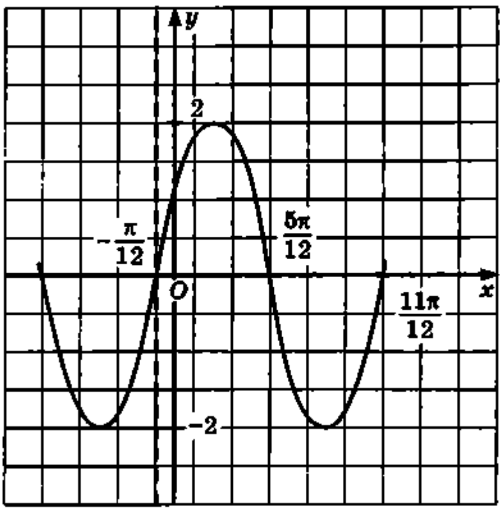

Рис. 62

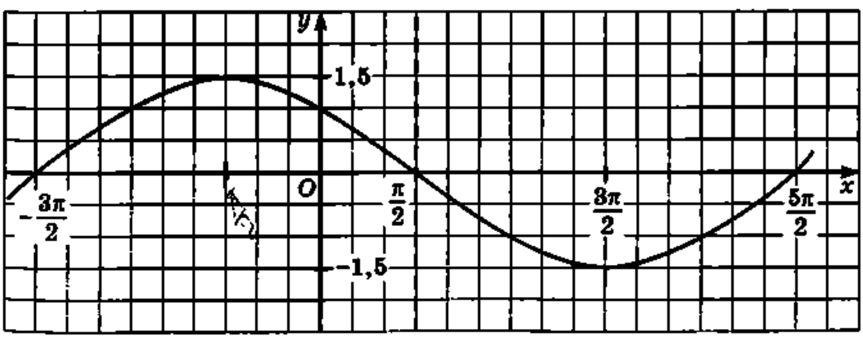

Рис. 63

●19.6. Подберите коэффициенты a, b и c так, чтобы на данном рисунке был изображен график функции $y = a\cos(bx + c)$:

а) рис. 64; б) рис. 65.

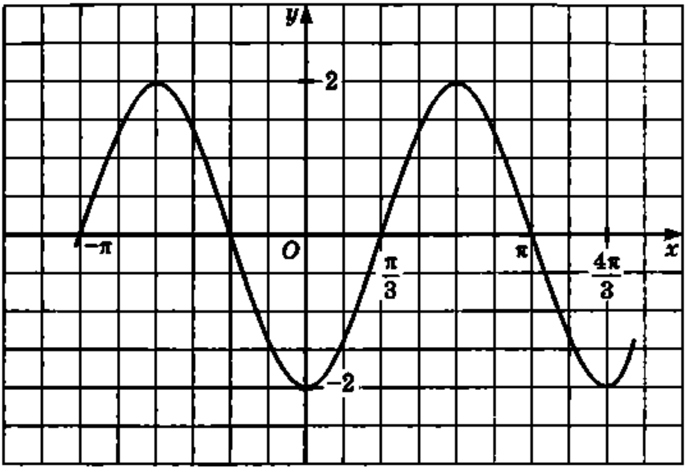

Рис. 64

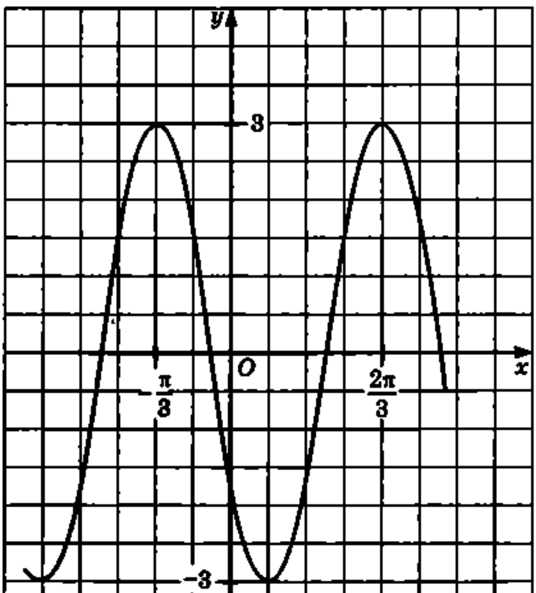

Рис. 65

○19.7. На каких промежутках функция $y = -1{,}5 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$:

а) возрастает; б) убывает?

○19.8. На каких промежутках функция $y = 3 \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$:

а) возрастает; б) убывает?

○19.9. Чему равен основной период функции:

а) $y = -1{,}5 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = 3 \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$?

○19.10. Исследуйте функцию $y = -1{,}5 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $[0;\ 2\pi]$; б) $(2;\ 4)$; в) $\left[-\frac{4\pi}{3};\ 0\right]$; г) $(-1;\ 2)$.

○19.11. Исследуйте функцию $y = 3 \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ на монотонность на заданном промежутке:

а) $\left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right]$; б) $(1;\ 2)$; в) $\left[-\frac{7\pi}{12};\ 0\right]$; г) $(-1;\ 1)$.

●19.12. При каких значениях параметра a функция $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$:

а) возрастает на $\left(a - \frac{2\pi}{3};\ a + \frac{2\pi}{3}\right)$;

б) убывает на $\left[a;\ a + \frac{\pi}{2}\right]$?

●19.13. При каких положительных значениях параметра a функция $y = -3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$:

а) возрастает на $(a;\ 2a)$;

б) убывает на $\left[a;\ a + \frac{\pi}{3}\right]$?

§ 20. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, их свойства и графики

20.1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \operatorname{tg} x$ на заданном промежутке:

а) на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

б) на полуинтервале $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$;

в) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right]$;

г) на полуинтервале $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

20.2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = \operatorname{ctg} x$ на заданном промежутке:

а) на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

в) на интервале $(-\pi; 0)$;

г) на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

20.3. Найдите область значений заданной функции:

а) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{3}\right]$;

в) $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$;

г) $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

20.4. Решите графически уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg} x = 1$;

в) $\operatorname{tg} x = -1$;

г) $\operatorname{tg} x = 0$.

20.5. Решите графически уравнение:

а) $\operatorname{ctg} x = 1$;

б) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{ctg} x = 0$.

Исследуйте функцию $y = f(x)$ на четность, если:

○20.6. а) $f(x) = \operatorname{tg} x - \cos x$; в) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x - x^4$;
б) $f(x) = \operatorname{tg} x + x$; г) $f(x) = x^3 - \operatorname{ctg} x$.

○20.7. а) $f(x) = \operatorname{tg} x \sin^2 x$; в) $f(x) = x^5 \operatorname{tg} x$;
б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2 - 1}$; г) $f(x) = x^2 + \sin x + \operatorname{tg} x$.

○20.8. а) $f(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x$; в) $f(x) = \dfrac{x^4 \operatorname{ctg} x}{x^2 - 4}$;
б) $f(x) = \dfrac{2 \operatorname{ctg} x}{x^3}$; г) $f(x) = \operatorname{ctg} x - x \cos x$.

○20.9. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \operatorname{tg} x$. Докажите, что:
а) $f(2x + 2\pi) + f(7\pi - 2x) = 0$;
б) $f(\pi - x) + f(5\pi + x) = 0$.

○20.10. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 1$. Докажите, что:
а) $f(\operatorname{tg} x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; б) $f(\operatorname{ctg} x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Найдите основной период функции:

○20.11. а) $y = \operatorname{tg} 2x$; в) $y = \operatorname{tg} 5x$;
б) $y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{3}$; г) $y = \operatorname{tg} \dfrac{2x}{5}$.

○20.12. а) $y = \operatorname{tg} x + \sin 2x - \operatorname{tg} 3x - \cos 4x$;
б) $y = \sin 3x + \cos 5x + \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} 2x$.

20.13. Известно, что $\operatorname{tg}(9\pi - x) = -\dfrac{3}{4}$. Найдите: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

20.14. Известно, что $\operatorname{ctg}(7\pi - x) = \dfrac{5}{7}$. Найдите: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

○20.15. Определите знак разности:
а) $\operatorname{tg} 200° - \operatorname{tg} 201°$; в) $\operatorname{tg} 2{,}2 - \operatorname{tg} 2{,}1$;
б) $\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 1{,}01$; г) $\operatorname{tg} \dfrac{3\pi}{5} - \operatorname{tg} \dfrac{6\pi}{5}$.

Постройте график функции:

20.16. а) $y = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;
б) $y = \operatorname{tg} x + 1$; г) $y = \operatorname{tg} x - 2$.

Постройте график функции:

○20.17. а) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$; в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$;

б) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$; г) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

○20.18. а) $y = -\operatorname{tg} x$; в) $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $y = -\operatorname{tg} x + 1$; г) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

○20.19. а) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; в) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = \operatorname{ctg} x + 1$; г) $y = \operatorname{ctg} x - 2$.

○20.20. а) $y = 2 \operatorname{tg} x$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$;

б) $y = -0{,}5 \operatorname{ctg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

○20.21. Исследуйте заданную функцию на монотонность:

а) $y = 2 \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$; в) $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3$;

б) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$; г) $y = -2 \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1{,}5$.

Постройте график функции:

○20.22. а) $y = |\operatorname{tg} x|$; в) $y = |\operatorname{ctg} x|$;

б) $y = \operatorname{tg} |x|$; г) $y = \operatorname{ctg} |x|$.

○20.23. а) $y = \operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x|$; б) $y = |\operatorname{ctg} x| - \operatorname{ctg} x$.

○20.24. а) $y = \operatorname{tg} x \, |\operatorname{ctg} x|$; б) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$.

○20.25. а) $y = 2 \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + |x|$;

б) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \sqrt{x}$.

○20.26. а) $y = \sin^2 (\operatorname{tg} x) + \cos^2 (\operatorname{tg} x)$;

б) $y = 3 \cos^2 (\operatorname{ctg} x) + 3 \sin^2 (\operatorname{ctg} x)$.

●20.27. а) $y = -\operatorname{tg} (\cos x) \quad \operatorname{ctg} (\cos x)$;

б) $y = -2 \operatorname{tg} (\sin x) \quad \operatorname{ctg} (\sin x)$.

○20.28. Решите неравенство:

а) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$;

б) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$;

в) $\operatorname{tg} x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$.

○20.29. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ \sin x > -\frac{1}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x < 1, \\ \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \cos x < 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}, \\ \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

§ 21. Обратные тригонометрические функции

Вычислите:

21.1. а) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arcsin 1$;

в) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\arcsin 0$.

21.2. а) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$;

в) $\arcsin (-1)$;

г) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

○21.3. Найдите область определения функции:

а) $y = \arcsin x$;

б) $y = \arcsin (5 - 2x)$;

в) $y = \arcsin \frac{x}{2}$;

г) $y = \arcsin (x^2 - 3)$.

○21.4. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin \left(-\frac{2}{3}\right)$;

б) $\arcsin 1{,}5$;

в) $\arcsin \left(3 - \sqrt{20}\right)$;

г) $\arcsin \left(4 - \sqrt{20}\right)$?

○21.5. Найдите область значений функции:

а) $y = 2 \arcsin x$;

б) $y = -4 \arcsin x$;

в) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$;

г) $y = \pi - 2 \arcsin x$.

○21.6. Исследуйте функцию на четность:

а) $y = \frac{\arcsin x}{x^4}$;

б) $y = \sin^2 x + x \arcsin x$;

в) $y = \arcsin x^3 + 3 \cos 2x$;

г) $y = 2 \operatorname{tg} x + x^5 - 3 \arcsin 2x$.

Постройте график функции:

○21.7. а) $y = \arcsin x$; в) $y = -\arcsin x$;

б) $y = \arcsin (-x)$; г) $y = -\arcsin (-x)$.

○21.8. а) $y = \arcsin (x - 1) + \frac{\pi}{2}$;

б) $y = -\arcsin (x + 2) - \frac{\pi}{3}$.

○21.9. а) $y = 2 \arcsin x$; в) $y = -\frac{1}{3} \arcsin x$;

б) $y = \frac{\pi}{3} - \arcsin x$; г) $y = -2 \arcsin (x - 3)$.

○21.10. а) $y = \arcsin 2x$; в) $y = \arcsin \frac{x}{3}$;

б) $y = \arcsin \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}$; г) $y = \arcsin 2(x - 1) + \frac{\pi}{2}$.

○21.11. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} \frac{\pi x}{2}, \text{ если } x < -1; \\ \arcsin x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \frac{\pi}{2}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \arcsin x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ -\arcsin x, \text{ если } 0 < x \leqslant 1; \\ (x - 1)^2 - \frac{\pi}{2}, \text{ если } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$

○21.12. Постройте график функции:

а) $y = 3|\arcsin x| - \arcsin x$;

б) $y = \arcsin x + |\arcsin x|$;

в) $y = \left|\arcsin x - \frac{\pi}{3}\right|$;

г) $y = -\arcsin |x - 2|$.

Вычислите:

21.13. а) $\arccos 0$;
в) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\arccos 1$;
г) $\arccos \frac{1}{2}$.

21.14. а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
в) $\arccos(-1)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

21.15. а) $\arccos(-1) + \arccos 0$;

б) $\arccos \frac{1}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arccos \frac{1}{2}$.

○**21.16.** а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin(-1)$;

в) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

○**21.17.** а) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{2} - 3\arccos 0 - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

б) $\frac{1}{3}\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

○**21.18.** а) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;
в) $\operatorname{ctg}(\arccos 0)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
г) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Вычислите:

○**21.19.** а) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

б) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(3\arccos(-1) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

21.20. Докажите тождество:

а) $\sin(\arccos x + \arccos(-x)) = 0$;

б) $\cos(\arcsin x + \arcsin(-x)) = 1$.

○**21.21.** Найдите область определения функции:

а) $y = \arccos x$;

б) $y = \arccos(x - 1)$;

в) $y = \arccos 2x$;

г) $y = \arccos(3 - 2x)$.

21.22. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arccos\sqrt{5}$;

б) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$;

в) $\arccos\frac{\pi}{5}$;

г) $\arccos\left(-\sqrt{3}\right)$?

○**21.23.** Найдите область значений функции:

а) $y = 2\arccos x$;

б) $y = 1{,}5\arccos x - \frac{\pi}{2}$;

в) $y = -\frac{1}{2}\arccos x$;

г) $y = \pi - 2\arccos x$.

○**21.24.** Исследуйте на четность функцию:

а) $y = \arccos x^2 + \frac{\pi}{8}$;

б) $y = \frac{\arccos x^2}{x^3}$;

в) $y = \frac{x^4}{\arccos x}$;

г) $y = 2x^3\arccos x^6$.

○**21.25.** Постройте график функции:

а) $y = \arccos x$;

б) $y = \arccos(-x)$;

в) $y = -\arccos x$;

г) $y = -\arccos(-x)$.

Постройте и прочитайте график функции:

○21.26. а) $y = \arccos(x - 1) - \frac{\pi}{2}$;

б) $y = \arccos(x + 2) + \frac{\pi}{3}$.

○21.27. а) $y = -3\arccos x$;

в) $y = \frac{1}{2}\arccos x$;

б) $y = \frac{3\pi}{4} - \arccos x$;

г) $y = \frac{2}{3}\arccos(x + 1{,}5)$.

○21.28. а) $y = \arccos 2x$;

в) $y = -\arccos\frac{x}{3}$;

б) $y = \arccos\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{6}$;

г) $y = \arccos 2(x - 1) - \frac{\pi}{2}$.

○21.29. а) $y = \begin{cases} \pi, \text{ если } x < -1; \\ \arccos x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \sqrt{x - 1}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \arccos x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0{,}5; \\ \frac{\pi}{3}, \text{ если } 0{,}5 < x \leqslant \frac{\pi}{3}; \\ x, \text{ если } \frac{\pi}{3} < x \leqslant 3. \end{cases}$

●21.30. Постройте график функции:

а) $y = \left|\arccos x - \frac{2\pi}{3}\right|$;

в) $y = -2\arccos|x|$;

б) $y = \arccos|x|$;

г) $y = \arccos|x - 2|$.

Вычислите:

21.31. а) $\operatorname{arctg} 1$;

в) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

б) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

г) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

21.32. а) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

б) $\operatorname{arcctg} 1$;

г) $\operatorname{arcctg} 0$.

Вычислите:

○21.33. а) $\operatorname{arcctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1)$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

○21.34. а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $3\arcsin\frac{1}{2} + 4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1$;

г) $\arcsin(-1) - \frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2} + 3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

○21.35. а) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;

в) $\cos(\operatorname{arctg} 0)$;

г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-1))$.

○21.36. а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 1)$;

б) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)$;

в) $\cos(\operatorname{arcctg}(-1))$;

г) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

○21.37. Найдите область определения функции:

а) $y = \arcsin x + \operatorname{arctg} x$;

б) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x} + \arccos\frac{x}{2}$;

в) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \arccos(2x - 0{,}5)$;

г) $y = \arcsin(x^2 - 1) + \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arcctg}(x - 1)$.

○21.38. Исследуйте функцию на четность:

а) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4}$;

б) $y = \sin^2 x + x \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \arcsin x + \operatorname{arcctg} x$;

г) $y = 2 \operatorname{arcctg} x + x^5 - 3 \arcsin 2x$.

○21.39. Найдите область значений функции:

а) $y = 2 \operatorname{arctg} x$;

б) $y = -\frac{1}{2} \operatorname{arcctg} x$;

в) $y = 1{,}5 \operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}$;

г) $y = \pi - 2 \operatorname{arctg} x$.

Постройте график функции:

○21.40. а) $y = \operatorname{arctg} (-x)$;

б) $y = \operatorname{arcctg} (-x)$;

в) $y = -\operatorname{arcctg} x$;

г) $y = -\operatorname{arctg} (-x)$.

○21.41. а) $y = \operatorname{arctg} (x - 1) - \frac{\pi}{2}$;

б) $y = \operatorname{arcctg} (x + 2) + \frac{\pi}{3}$.

○21.42. а) $y = 0{,}5 \operatorname{arctg} x$;

б) $y = \frac{2\pi}{3} - \operatorname{arcctg} x$;

в) $y = -\frac{1}{3} \operatorname{arcctg} x$;

г) $y = 1{,}5 \operatorname{arctg} (x + 2)$.

○21.43. а) $y = \operatorname{arctg} 3x$;

б) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$;

в) $y = \operatorname{arcctg} \frac{3x}{4}$;

г) $y = \operatorname{arcctg} 2(x - 1)$.

○21.44. Постройте и прочитайте график функции:

а) $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, \text{ если } x \leqslant 0; \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \operatorname{arcctg} x, \text{ если } x \leqslant 1; \\ \operatorname{arctg} x, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

○21.45. а) $y = |\operatorname{arctg} x|$;

б) $y = \operatorname{arcctg} |x|$;

в) $y = -2 \operatorname{arcctg} |x|$;

г) $y = \left|\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{6}\right|$.

Вычислите:

○21.46. а) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$; в) $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$;

б) $\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}6)$; г) $\operatorname{ctg}(\arcsin(-0{,}8))$.

○21.47. а) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; в) $\sin(\arccos(-0{,}8))$.

б) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$.

○21.48. а) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$; в) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{12}{5}\right)$; г) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right)\right)$.

●21.49. Докажите, что

а) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

б) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Постройте график функции:

●21.50. а) $y = \cos(\arccos x)$;
б) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x)$;
в) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;
г) $y = \arcsin x + \arcsin(-x)$.

●21.51. а) $y = \arccos x + \arccos(-x)$;

б) $y = \arccos\frac{1}{x} + \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$;

в) $y = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x)$;

г) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x} + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{x}\right)$.

●21.52. а) $y = \sin(\arccos x)$; в) $y = \cos(\arcsin x)$;
б) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$; г) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

●21.53. а) $y = \arccos(\cos x)$; б) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Решите уравнение:

○21.54. а) $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$; в) $\arccos(3x - 3{,}5) = \frac{2\pi}{3}$;

б) $\operatorname{arctg}(4x + 1) = \frac{7\pi}{12}$; г) $\operatorname{arcctg}(4x + 1) = \frac{3\pi}{4}$.

○21.55. а) $\arcsin(3x^2 - 5x + 1) = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}\left(x^3 - 27 - \sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$;

в) $\arccos(3x^2 - 10x + 2{,}5) = \frac{2\pi}{3}$;

г) $\operatorname{arcctg}(x^3 - 8x^2 + 15x + 1) = \frac{\pi}{4}$.

○21.56. а) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) - \arcsin\sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$;

б) $\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{2x - 1} - \frac{7\pi}{6} = 0$.

○21.57. а) $8\arcsin^2 x + 2\pi\arcsin x = \pi^2$;
б) $18\operatorname{arctg}^2 x - 3\pi\operatorname{arctg} x = \pi^2$;
в) $18\arccos^2 x = 3\pi\arccos x + \pi^2$;
г) $16\operatorname{arcctg}^2 x + 3\pi^2 = 16\pi\operatorname{arcctg} x$.

○21.58. а) $\arcsin\left(2x + 3\frac{1}{3}\right) = \arcsin\left(-\frac{2x}{9}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(x^2 - 9) = \operatorname{arctg} 8x$;
в) $\arccos(3x + 1) = \arccos(2x + 5)$;
г) $\operatorname{arcctg}(x^2 - x) = \operatorname{arcctg}(4x - 6)$.

●21.59. а) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$; в) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} x$;
б) $\arccos x = \arcsin x$; г) $\arcsin x = \operatorname{arcctg} x$.

Решите неравенство:

○21.60. а) $\arccos x > \frac{3\pi}{4}$; в) $\arcsin x < \frac{3\pi}{4}$;

б) $\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{4}$; г) $\operatorname{arcctg} x \leqslant \frac{5\pi}{6}$.

●21.61. а) $9\arcsin^2 x \leqslant \pi^2$; в) $16\arccos^2 x > \pi^2$;
б) $36\operatorname{arctg}^2 x > \pi^2$; г) $9\operatorname{arcctg}^2 x \leqslant \pi^2$.

●21.62. а) $8\arcsin^2 x + 2\pi\arcsin x < \pi^2$;
б) $18\operatorname{arctg}^2 x - 3\pi\operatorname{arctg} x \geqslant \pi^2$;
в) $9\arccos^2 x \leqslant 9\pi\arccos x - 2\pi^2$;
г) $16\operatorname{arcctg}^2 x + 3\pi^2 > 16\pi\operatorname{arcctg} x$.

ГЛАВА 4 Тригонометрические уравнения

§ 22. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства

Решите уравнение:

22.1. а) $\cos x = \frac{1}{2}$; в) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

22.2. а) $\cos x = \frac{1}{3}$; в) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$;

б) $\cos x = -1{,}1$ г) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

○**22.3.** Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [0; 2\pi]$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [2\pi; 4\pi]$;

в) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi; 3\pi]$;

г) $\cos x = -1$, $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решите уравнение:

22.4. а) $\frac{8\cos x - 3}{3\cos x + 2} = 1$;

б) $\frac{3\cos x + 1}{2} + \frac{5\cos x - 1}{3} = 1{,}75$.

○**22.5.** а) $6\cos^2 x + 5\cos x + 1 = 0$;
б) $3 + 9\cos x = 5\sin^2 x$.

○22.6. Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{1}{2}$, $x \in [1; 6]$;

б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; 12\right]$;

в) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [2; 10]$;

г) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-4; \frac{5\pi}{4}\right]$.

○22.7. Сколько корней имеет заданное уравнение на заданном промежутке:

а) $\cos x = \frac{1}{3}$, $x \in [1; 6]$;

б) $\cos x = -0{,}4$, $x \in [3; 11]$?

Решите уравнение:

22.8. а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x = 1$;

б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin x = \frac{1}{2}$.

22.9. а) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x = -1$;

б) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin x = -\frac{1}{2}$.

22.10. а) $\sin x = \frac{1}{4}$; в) $\sin x = -\frac{1}{7}$;

б) $\sin x = \frac{\pi}{4}$; г) $\sin x = \frac{\pi}{3}$.

○22.11. а) $(2\cos x + 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$;
б) $2\cos x - 3\sin x \cos x = 0$;
в) $4\sin^2 x - 3\sin x = 0$;
г) $2\sin^2 x - 1 = 0$.

○22.12. а) $6\sin^2 x + \sin x = 2$;
б) $3\cos^2 x = 7(\sin x + 1)$.

○22.13. Решите уравнение:

а) $\sin^2 \frac{3x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x - \cos^2 \frac{3x}{4} + 1$;

б) $\cos^2 2x - 1 - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^2 2x$.

Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

22.14. а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in [0; \pi]$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$;

в) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-\pi; 2\pi]$;

г) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-2\pi; \pi]$.

○22.15. а) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{11\pi}{4}\right)$;

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; 6\right)$;

в) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in (-4; 3)$;

г) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in (-3; 6)$.

○22.16. Сколько корней имеет заданное уравнение на заданном промежутке:

а) $\sin x = 0{,}6$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}; 3\pi\right)$;

б) $\sin x = -\frac{2}{3}$, $x \in (2; 7)$?

Решите уравнение:

22.17. а) $\operatorname{tg} x = 1$;

б) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\operatorname{tg} x = -1$;

г) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

22.18. а) $\operatorname{tg} x = 0$;

б) $\operatorname{tg} x = -2$;

в) $\operatorname{tg} x = -3$;

г) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$.

22.19. а) $\operatorname{ctg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{ctg} x = 0$; г) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

22.20. а) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x = -1$; в) $\operatorname{ctg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{ctg} x = -5$.

22.21. а) $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$; б) $2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0$; в) $4\operatorname{tg}^2 x - 9 = 0$; г) $3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 0$.

22.22. а) $\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$; б) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

22.23. а) $\sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos \dfrac{x}{3} = -\dfrac{1}{2}$; в) $\sin \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{2}$; г) $\cos 4x = 0$.

22.24. а) $\sin\left(-\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos(-2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg}(-4x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{x}{2}\right) = 1$.

○**22.25.** а) $2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) = 3$; в) $2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; г) $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

из скобки минус

○**22.26.** а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$; б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = -1$; в) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$; г) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$.

○**22.27.** Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $[0;\ 2\pi]$; б) $\cos 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi;\ \pi]$; в) $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi;\ 3\pi]$; г) $\operatorname{ctg} 4x = -1$, $[0;\ \pi]$.

Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

○22.28. а) $\sin x = -\frac{1}{2}$, $[-4; 4]$; б) $\cos x = 1$, $[-6; 16]$.

○22.29. а) $\sin \frac{x}{2} = 0$, $[-12; 18]$; б) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1; 7]$.

○22.30. Решите уравнение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие интервалу $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

○22.31. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ и найдите:

а) наименьший положительный корень;

б) корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

в) наибольший отрицательный корень;

г) корни, принадлежащие интервалу $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решите уравнение:

●22.32. а) $|x + 3| \sin x = x + 3$; б) $2|x - 6| \cos x = x - 6$.

●22.33. а) $\sqrt{16 - x^2} \sin x = 0$;

б) $\left(\sqrt{2} \cos x - 1\right)\sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0$;

в) $\sqrt{7x - x^2}\,(2 \cos x - 1) = 0$;

г) $\left(2 \sin x - \sqrt{3}\right)\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$.

○22.34. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sin x}{2 \cos x - 1}$; в) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin x}$;

б) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\pi - 3 \cos x}$; г) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x - 5}}$.

Найдите область значений функции:

●**22.35.** а) $y = \sin x + \sqrt{-\cos^2 x}$;

б) $y = \cos x + \sqrt{-\sin^2 x}$.

●**22.36.** а) $y = \cos 3x + \sqrt{\cos^2 3x - 1}$;

б) $y = \sin 2x + \sqrt{\sin^2 4x - 1}$.

Решите уравнение:

●**22.37.** а) $|\sin x| = |\cos x|$;

б) $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x = 2|\cos x|$;

в) $|\sin 2x| = \left|\sqrt{3} \cos 2x\right|$;

г) $\sqrt{2} \operatorname{tg} x + 2|\sin x| = 0$.

●**22.38.** а) $(2x - 3)|\sin x| = \sin x$;

б) $(3x - 7) \cos x = 5|\cos x|$.

●**22.39.** а) $x^2 |\operatorname{tg} x| + 9 \operatorname{tg} x = 0$;

б) $x^2 \operatorname{ctg} x - 4|\operatorname{ctg} x| = 0$.

●**22.40.** а) $(2x^2 - 12x + 13) \sin x = 3|\sin x|$;

б) $(x^2 + 8x + 11)|\cos 2x| = 4 \cos 2x$.

●**22.41.** Сколько корней имеет уравнение:

а) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{8x - x^2 - 7} = 0$;

б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sqrt{10 - x^2 - 3x} = 0$?

Решите неравенство:

22.42. а) $\cos t > \frac{1}{2}$;

б) $\cos t \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos t \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\cos t < \frac{1}{2}$.

○**22.43.** а) $\cos t < \frac{2}{3}$;

б) $\cos t > -\frac{1}{7}$;

в) $\cos t > \frac{2}{3}$;

г) $\cos t < -\frac{1}{7}$.

●**22.44.** а) $3 \cos^2 t - 4 \cos t \geqslant 4$;

б) $6 \cos^2 t + 1 > 5 \cos t$;

в) $3 \cos^2 t - 4 \cos t < 4$;

г) $6 \cos^2 t + 1 \leqslant 5 \cos t$.

Решите неравенство:

○22.45. а) $4\cos^2 t < 1$; в) $9\cos^2 t > 1$;
б) $3\cos^2 t < \cos t$; г) $3\cos^2 t > \cos t$.

22.46. а) $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\sin t > -\frac{1}{2}$; г) $\sin t \leqslant -\frac{1}{2}$.

○22.47. а) $\sin t < \frac{1}{3}$; в) $\sin t \geqslant \frac{1}{3}$;
б) $\sin t \geqslant -0{,}6$; г) $\sin t < -0{,}6$.

●22.48. а) $5\sin^2 t > 11\sin t + 12$;
б) $5\sin^2 t \leqslant 11\sin t + 12$.

●22.49. а) $6\cos^2 t + \sin t > 4$; б) $6\cos^2 t + \sin t \leqslant 4$.

○22.50. а) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x < 0$;
б) $\operatorname{ctg} x > 0$; г) $\operatorname{ctg} x > -1$.

○22.51. а) $\operatorname{tg} x < 3$; в) $\operatorname{ctg} x \leqslant 2$;
б) $3\operatorname{ctg} x - 1 > 0$; г) $2\operatorname{tg} x + 1 \geqslant 0$.

○22.52. а) $\operatorname{tg}^2 x > 9$; в) $\operatorname{tg}^2 x < 9$;
б) $\operatorname{tg}^2 x > \operatorname{tg} x$; г) $\operatorname{tg}^2 x < 2\operatorname{tg} x$.

○22.53. а) $\sin 2x < \frac{1}{2}$; в) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $3\cos 4x < 1$; г) $7\sin\frac{x}{2} > -1$.

○22.54. а) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{3}$; в) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{4}$;
б) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдите область определения функции:

●22.55. а) $y = \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$;
б) $y = \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} + \operatorname{ctg} 2x$;

в) $y = \operatorname{tg} 2x - \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\sin x}}$;

г) $y = \dfrac{1}{\sin 4x} - \sqrt{\cos x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

●22.56. а) $y = \arcsin \dfrac{x}{2} + \sqrt{\sin x + \dfrac{1}{2}}$;

б) $y = \arccos (2x - 1) + \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \cos x}$.

Решите уравнение:

●22.57. а) $\sin^2 x + \sin^2 3x = 0$; б) $\cos^4 2x + 1 = \cos^2 \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

●22.58. а) $\sin 4x + \cos 2x = 2$; б) $\sin 5x + \cos 3x = -2$.

При каких значениях параметра a множество корней заданного уравнения не пусто:

○22.59. а) $\sin x = 2a - 1$; б) $\cos x = 2a^2 - 5a + 1$; в) $\cos x = 3a - 2$; г) $\sin x = a^2 - 3$?

●22.60. а) $\dfrac{a \cos x}{2 \cos x + a} = 5$; б) $\dfrac{a \sin x + 1}{2a - 3 \sin x} = 2$.

●22.61. Решите уравнение с параметром a:

а) $\sin \left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{a - 1}{a + 1}$;

б) $\cos \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2a - 1}{a - 2}$.

●22.62. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg} \left(\dfrac{\pi}{3} \cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$;

б) $\sin (2\pi \cos x) = \dfrac{1}{2}$.

●22.63. Решите неравенство:

а) $\sin x \sqrt{4 - x^2} < 0$; б) $\cos x \sqrt{x + 2 - x^2} \geqslant 0$.

●22.64. При каких значениях параметра a решением заданного неравенства служит любое действительное число:

а) $a \cos x - 2 < 0$; б) $(2a - 3) \sin x + 1 \geqslant 0$?

Решите систему неравенств:

●22.65. а) $\begin{cases} \sin x > -\frac{4}{5}, \\ \cos x > -\frac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x < \frac{2}{7}, \\ \cos x < 0{,}6. \end{cases}$

●22.66. а) $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 1{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x > -\frac{3}{7}, \\ \operatorname{tg} x < -0{,}1. \end{cases}$

●22.67. а) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin x > -0{,}8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x < \frac{4}{9}, \\ \operatorname{ctg} x > -3. \end{cases}$

●22.68. а) $\begin{cases} \sin 2x < \frac{1}{2}, \\ 25 - x^2 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ |x + 2| < 3. \end{cases}$

§ 23. *Методы решения тригонометрических уравнений*

Решите уравнение:

○23.1. а) $3 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$;

б) $3 \sin^2 2x + 10 \sin 2x + 3 = 0$;

в) $4 \sin^2 x + 11 \sin x - 3 = 0$;

г) $2 \sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} + 1 = 0$.

○23.2. а) $6 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

б) $2 \cos^2 3x - 5 \cos 3x - 3 = 0$;

в) $2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0$;

г) $2 \cos^2 \frac{x}{3} + 3 \cos \frac{x}{3} - 2 = 0$.

○23.3. а) $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$;

б) $8 \sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$;

в) $5 \cos^2 x + 6 \sin x - 6 = 0$;

г) $4 \sin 3x + \cos^2 3x = 4$.

○23.4. а) $3\,\mathrm{tg}^2\,x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 1 = 0$;

б) $\mathrm{ctg}^2\,2x - 6\,\mathrm{ctg}\,2x + 5 = 0$;

в) $2\,\mathrm{tg}^2\,x + 3\,\mathrm{tg}\,x - 2 = 0$;

г) $7\,\mathrm{ctg}^2\,\dfrac{x}{2} + 2\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2} = 5$.

○23.5. а) $\mathrm{tg}\,x - 2\,\mathrm{ctg}\,x + 1 = 0$;

б) $\dfrac{\mathrm{tg}\,x + 5}{2} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

в) $2\,\mathrm{ctg}\,x - 3\,\mathrm{tg}\,x + 5 = 0$;

г) $\dfrac{7 - \mathrm{ctg}\,x}{4} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

○23.6. а) $2\cos^2 \dfrac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} = 0$;

б) $4\cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$;

в) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\,3x - 3\,\mathrm{tg}\,3x = 0$;

г) $4\sin^2\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$.

○23.7. а) $\sin^2 x - \dfrac{12 - \sqrt{2}}{2}\sin x - 3\sqrt{2} = 0$;

б) $\cos^2 x - \dfrac{8 - \sqrt{3}}{2}\cos x - 2\sqrt{3} = 0$.

○23.8. а) $\mathrm{tg}^3\,x + \mathrm{tg}^3\,x - 3\,\mathrm{tg}\,x = 3$;

б) $\mathrm{ctg}^4\,2x - 4\,\mathrm{ctg}^2\,2x + 3 = 0$.

○23.9. а) $\left(\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2}\right)(\cos 2x + 1) = 0$;

б) $\left(\cos^2\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{3}{4}\right)\sin\dfrac{x}{2} = 0$.

○23.10. а) $\mathrm{tg}\,x\,\sin 2x = 0$;

б) $(1 + \cos x)\left(\dfrac{1}{\sin x} - 1\right) = 0$;

в) $\cos x\,\mathrm{tg}\,3x = 0$;

г) $(1 + \cos x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = 0$.

○23.11. а) $\sin x = \dfrac{3}{4}\cos x$;

б) $3\sin x = 2\cos x$;

в) $2\sin x + 5\cos x = 0$;

г) $\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Решите уравнение:

○23.12. а) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$; в) $\sin x - 3\cos x = 0$;

б) $\sin x + \cos x = 0$; г) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

○23.13. а) $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$;

б) $\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$;

в) $\sin^2 x = 3\sin x \cos x$;

г) $\sqrt{3}\cos^2 x = \sin x \cos x$.

○23.14. а) $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$;

б) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$;

в) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

г) $3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

○23.15. а) $\sin 2x = \cos 2x$; в) $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{3}\cos \frac{x}{2}$;

б) $\sqrt{3}\sin 3x = \cos 3x$; г) $\sqrt{2}\sin 17x = \sqrt{6}\cos 17x$.

○23.16. а) $2\sin^2 2x - 5\sin 2x \cos 2x + 2\cos^2 2x = 0$;

б) $3\sin^2 3x + 10\sin 3x \cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$.

○23.17. а) $\sin^2 \frac{x}{2} = 3\cos^2 \frac{x}{2}$; б) $\sin^2 4x = \cos^2 4x$.

○23.18. а) $5\sin^2 x - 14\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 2$;

б) $3\sin^2 x - \sin x \cos x = 2$;

в) $2\cos^2 x - \sin x \cos x + 5\sin^2 x = 3$;

г) $4\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3$.

○23.19. а) $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 5$;

б) $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 4$.

○23.20. а) $3\sin^2 2x - 2 = \sin 2x \cos 2x$;

б) $2\sin^2 4x - 4 = 3\sin 4x \cos 4x - 4\cos^2 4x$.

○23.21. а) $4\sin^2 \frac{x}{2} - 3 = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$;

б) $3\sin^2 \frac{x}{3} + 4\cos^2 \frac{x}{3} = 3 + \sqrt{3}\sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$.

○23.22. а) $\sin^2 x - 5\cos x = \sin x \cos x - 5\sin x$;

б) $\cos^2 x - 7\sin x + \sin x \cos x = 7\cos x$.

○23.23. а) $\sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x = \sin^3 x \cos^3 x + \sin x \cos^5 x$;

б) $\sin^2 x \cos^2 x - 10\sin x \cos^3 x + 21\cos^4 x = 0$.

●23.24. а) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{7}{16}$; б) $\cos^{-4}\frac{x}{2}\left(2\sin^4\frac{x}{2} - 1\right) = 2$.

Решите систему уравнений:

○23.25. а) $\begin{cases} 2\sin x - 5\cos y = 7, \\ 5\sin x + \cos y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5\sin 2x + 3\cos 3y = 1, \\ 8\sin 2x - 6\cos 3y = 7. \end{cases}$

○23.26. а) $\begin{cases} \sin x + \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \sin x\cos y = -\frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \cos 2y = 1, \\ 2\sin^2\frac{x}{2} - 3\cos 2y = 2. \end{cases}$

Решите уравнение:

●23.27. а) $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}$;

б) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{9}\operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1$.

●23.28. а) $|\cos x| = 2\cos x - \sqrt{3}\sin x$;

б) $\sin x = \sqrt{3}\cos x + 2|\sin x|$.

○23.29. а) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = 0$; в) $\frac{\cos^2 x + \cos x}{\sin x} = 0$;

б) $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$; г) $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos x$.

●23.30. а) $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\cos^2 x - \cos x} = 0$; б) $\frac{4\sin^3 2x - 3\sin 2x}{\cos 3x} = 0$.

●23.31. Для каждого значения a решите уравнение:

а) $\frac{a\sin x - 1}{\sin x + \cos x} = 0$; б) $\frac{a\cos x - 1}{\sin x - \cos x} = 0$.

Решите уравнение:

●23.32. а) $x^2 - 2x\cos\pi x + 1 = 0$; б) $x^2 - 2x\sin\frac{\pi x}{2} + 1 = 0$.

●23.33. а) $\cos^5 x + \sin^4 x = 1$; б) $\cos^8 x + \sin^3 x = 1$.

●23.34. а) $3\sin^2\frac{x}{3} + 5\sin^2 x = 8$; б) $\cos^2 2x - 2\cos^3 3x = 3$.

Решите уравнение:

●23.35. а) $2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 5$;

б) $\sin\frac{x}{4} + 2\cos\frac{x - 2\pi}{3} = 3$.

●23.36. а) $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$;

б) $\sqrt{2 + 4\cos x} = 3\cos x + 0{,}5$.

●23.37. а) $\sqrt{3}\sin x - \sqrt{2\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x} = 0$;

б) $\cos x + \sqrt{\sin^2 x \quad 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x} = 0$.

●23.38. а) $\sqrt{3\sin 5x - \cos^2 x - 3} = 1 - \sin x$;

б) $\sqrt{2\cos 4x - \sin^2 x - 2} = 1 + \cos x$.

Решите неравенство:

●23.39. а) $4\sin x\cos x - 1 > 2\sin x - 2\cos x$;

б) $1 + 2\sin x \geqslant 4\sin x\cos x + 2\cos x$.

●23.40. а) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} < 0$;

б) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\cos x + \sqrt{3} \geqslant 0$.

●23.41. а) $\sin x - \cos x > 0$;

б) $\sin x - \sqrt{3}\cos x \leqslant 0$;

в) $\sin x + \cos x < 0$;

г) $\sqrt{3}\sin x + \cos x \geqslant 0$.

●23.42. а) $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x > 0$;

б) $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x < 0$;

в) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x \leqslant 0$;

г) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x \geqslant 0$.

ГЛАВА 5

Преобразование тригонометрических выражений

§ 24. Синус и косинус суммы и разности аргументов

24.1. Представив $105°$ как сумму $60° + 45°$, вычислите:
а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$.

24.2. Вычислите:
а) $\sin 15°$; б) $\cos 15°$; в) $\sin 15° \cos 15°$; г) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$.

Упростите выражение:

24.3. а) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta$;
б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\alpha$;
в) $\sin\alpha\sin\beta + \cos(\alpha + \beta)$;
г) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

24.4. а) $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2}\cos\alpha$;
б) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;
в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right)$;
г) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\alpha$.

24.5. а) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha\cos\beta$; б) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$; в) $\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)$; г) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

24.6. а) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta) + \cos\alpha\sin\beta}$; б) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}$; в) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta}$; г) $\dfrac{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)}$.

24.7. Представив $2x$ в виде $x + x$, докажите тождество:
а) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; б) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Докажите тождество:

24.8. а) $\sin (\alpha + \beta) + \sin (-\alpha) \cos (-\beta) = \sin \alpha \cos \beta$;
б) $\cos (\alpha + \beta) + \sin (-\alpha) \sin (-\beta) = \sin \alpha \cos \beta$.

24.9. а) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;

б) $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos \left(\frac{\pi}{3} + x\right)$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

г) $\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos \left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

24.10. а) $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x = \sin 8x$;
б) $\cos 5x \cos 3x - \sin 5x \sin 3x = \cos 8x$;
в) $\sin 7x \cos 4x - \cos 7x \sin 4x = \sin 3x$;
г) $\cos 2x \cos 12x + \sin 2x \sin 12x = \cos 10x$.

24.11. а) $\cos (\alpha - \beta) + \sin (-\alpha) \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta$;
б) $\sin (30° - \alpha) - \cos (60° - \alpha) = -\sqrt{3} \sin \alpha$;
в) $\sin (\alpha - \beta) - \cos \alpha \sin (-\beta) = \sin \alpha \cos \beta$;
г) $\sin (30° - \alpha) + \sin (30° + \alpha) = \cos \alpha$.

○**24.12.** а) $\dfrac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2 \sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3} \sin \alpha} = -\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$;

б) $\dfrac{\cos \alpha - 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{2 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \sin \alpha} = -\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$.

Используя формулы сложения, выведите следующие формулы (их называют *формулами приведения*):

24.13. а) $\sin (\pi - x) = \sin x$; в) $\operatorname{tg} (2\pi - x) = -\operatorname{tg} x$;
б) $\cos (\pi + x) = -\cos x$; г) $\operatorname{ctg} (\pi - x = -\operatorname{ctg} x$.

24.14. а) $\sin \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; в) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$;

б) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$; г) $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$.

Вычислите:

24.15. а) $\sin 74° \cos 16° + \cos 74° \sin 16°$;
б) $\cos 23° \cos 22° - \sin 23° \sin 22°$;
в) $\sin 89° \cos 1° + \cos 89° \sin 1°$;
г) $\cos 178° \cos 2° - \sin 178° \sin 2°$.

24.16. а) $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20}$;

б) $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{5\pi}{7}$;

в) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{11\pi}{12}$;

г) $\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$.

24.17. а) $\cos 107° \cos 17° + \sin 107° \sin 17°$;
б) $\cos 36° \cos 24° - \sin 36° \sin 24°$;
в) $\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27°$;
г) $\sin 51° \cos 21° - \cos 51° \sin 21°$.

24.18. а) $\cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$;

б) $\sin \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$;

в) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$;

г) $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$.

○24.19. Докажите равенство:

а) $\sin 75° \cos 75° = \frac{1}{4}$;

в) $\sin 105° \cos 105° = -\frac{1}{4}$;

б) $\cos^2 75° - \sin^2 75° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos^2 75° + \sin^2 75° = 1$.

○24.20. Решите уравнение:

а) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 1$;
б) $\cos 3x \cos 5x = \sin 3x \sin 5x$;

в) $\sin 6x \cos x + \cos 6x \sin x = \frac{1}{2}$;

г) $\cos 5x \cos 7x - \sin 5x \sin 7x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

○24.21. Найдите наименьший (в градусах) положительный корень уравнения:

а) $\sin x \cos 45° + \cos x \sin 45° =$
$= \cos 17° \cos 13° - \sin 17° \sin 13°$;

б) $\cos x \cos 45° + \sin x \sin 45° =$
$= \sin 200° \cos 80° - \cos 200° \sin 80°$.

○24.22. Решите уравнение:

а) $\cos 6x \cos 5x + \sin 6x \sin 5x = -1$;

б) $\sin 3x \cos 5x - \sin 5x \cos 3x = 0{,}5$.

○24.23. Найдите корни уравнения на заданном промежутке:

а) $\sin 0{,}2x \cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x \sin 0{,}8x = \cos 3x \cos 2x +$
$+ \sin 3x \sin 2x,\ x \in [0; 3\pi]$;

б) $\cos 0{,}7x \cos 1{,}3x \quad \sin 0{,}7x \sin 1{,}3x \quad \sin 7x \cos 9x -$
$- \sin 9x \cos 7x,\ x \in [-\pi; \pi]$.

Решите уравнение:

○24.24. а) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos x = 0{,}5$;

б) $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

○24.25. а) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 1$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = 1$;

б) $\sin x - \cos x = 1$;

г) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$.

○24.26. а) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \quad 1$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \quad 1$;

б) $\sin x + \cos x = 1$;

г) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$.

○24.27. Знaя, что $\sin t = \frac{3}{5},\ 0 < t < \frac{\pi}{2}$, вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)$.

○24.28. Зная, что $\cos t = -\frac{5}{13},\ \frac{\pi}{2} < t < \pi$, вычислите:

а) $\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)$;

г) $\sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)$.

○24.29. Зная, что $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha + \beta)$;
б) $\cos(\alpha + \beta)$.

○24.30. Зная, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha + \beta)$;
б) $\cos(\alpha + \beta)$.

○24.31. Зная, что $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\sin\beta = -\frac{40}{41}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha + \beta)$;
б) $\cos(\alpha + \beta)$.

○24.32. Зная, что $\sin t = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$;
б) $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$;
в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$;
г) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$.

○24.33. Зная, что $\cos t = \frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$, вычислите:

а) $\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$;
б) $\sin\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$;
в) $\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$;
г) $\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$.

○24.34. Зная, что $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, вычислите:

а) $\sin(\alpha - \beta)$;
б) $\cos(\alpha - \beta)$.

○24.35. Зная, что $\sin\beta = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -0{,}8$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, вычислите:

а) $\sin(\alpha - \beta)$;
б) $\cos(\alpha - \beta)$.

Решите неравенство:

○24.36. а) $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x > \frac{1}{2}$;

б) $\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2} < -\frac{2}{7}$;

в) $\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{2} < \frac{1}{3}$;

г) $\sin 2x \sin 5x + \cos 2x \cos 5x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

○24.37. а) $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x > \frac{1}{2}$;

б) $\cos 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x < -\frac{1}{3}$;

в) $\sin x \cos \frac{x}{2} + \cos x \sin \frac{x}{2} \leqslant -\frac{2}{7}$;

г) $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

●24.38. Докажите, что для любого действительного значения x справедливо неравенство:

а) $\sin (5 + x) \cos x < \cos (5 + x) \sin x$;

б) $\cos (7 - 2x) \cos 2x > \sin (7 - 2x) \sin 2x$.

○24.39. а) Зная, что $\sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}6$ и $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{6}$, вычислите $\sin x$.

б) Зная, что $\cos \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -0{,}8$ и $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$, вычислите $\cos x$.

○24.40. Определите знак числа a:

а) $a = (\cos 1 + \cos 2)^2 + (\sin 1 - \sin 2)^2 - 2$;

б) $a = (\sin 3 + \cos 4)^2 + (\cos 3 + \sin 4)^2 - 1$.

○24.41. Сравните числа $a = \cos x \cos 2x$ и $b = \cos 3x$, если:

а) $0 < x < \frac{\pi}{2}$;　　б) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

○24.42. Сравните числа $a = \sin x \cos 2x$ и $b = \sin 3x$, если:

а) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;　　б) $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

●24.43. Сравните числа a и b, если:

а) $a = \dfrac{\sin 3}{\sin 4}$, $b = \dfrac{\cos 3}{\cos 4}$; б) $a = \dfrac{\sin 4}{\cos 5}$, $b = \dfrac{\cos 4}{\sin 5}$.

●24.44. а) Зная, что $\cos(x + y) = a$, $\cos(x - y) = b$, найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

б) Зная, что $\sin(x + y) = a$, $\sin(x - y) = b$, найдите $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}$.

●24.45. Докажите, что не существует пары $(x; y)$, такой, что:

а) $\sin x \cos y = 0{,}7$; $\cos x \sin y = 0{,}4$;

б) $\cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $\sin x \sin y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

●24.46. а) Докажите, что если $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\sin\gamma = \cos\gamma$, то $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$;

б) докажите, что если $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)\sin\gamma = -\cos\gamma$, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi n$;

○24.47. Постройте график функции:

а) $y = \sin\dfrac{11x}{5}\cos\dfrac{x + 10\pi}{5} - \cos\dfrac{11x}{5}\sin\dfrac{x}{5}$;

б) $y = \cos\left(2x + \dfrac{7\pi}{12}\right)\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \dfrac{7\pi}{12}\right)\sin\left(x + \dfrac{9\pi}{4}\right)$.

Вычислите:

●24.48. а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \arccos\dfrac{3}{5}\right)$; в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \arcsin\dfrac{3}{5}\right)$;

б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$; г) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{5}{13}\right)$.

●24.49. а) $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right) + \arcsin\dfrac{1}{3}\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} + \arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$.

●24.50. Докажите равенство:

$$\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Докажите равенство:

●24.51. $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

●24.52. $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

§ 25. Тангенс суммы и разности аргументов

Вычислите:

25.1. а) $\operatorname{tg} 15°$; б) $\operatorname{tg} 75°$; в) $\operatorname{tg} 105°$; г) $\operatorname{tg} 165°$.

25.2. а) $\frac{\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 20°}{1 - \operatorname{tg} 25° \operatorname{tg} 20°}$; в) $\frac{\operatorname{tg} 9° + \operatorname{tg} 51°}{1 - \operatorname{tg} 9° \operatorname{tg} 51°}$;

б) $\frac{1 - \operatorname{tg} 70° \operatorname{tg} 65°}{\operatorname{tg} 70° + \operatorname{tg} 65°}$; г) $\frac{1 + \operatorname{tg} 54° \operatorname{tg} 9°}{\operatorname{tg} 54° - \operatorname{tg} 9°}$.

Упростите выражение:

25.3. а) $\frac{\operatorname{tg} 2{,}22 + \operatorname{tg} 0{,}92}{1 - \operatorname{tg} 2{,}22 \operatorname{tg} 0{,}92}$; б) $\frac{\operatorname{tg} 1{,}47 - \operatorname{tg} 0{,}69}{1 + \operatorname{tg} 1{,}47 \operatorname{tg} 0{,}69}$.

25.4. а) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)}$;

б) $\frac{\operatorname{tg}(45° + \alpha) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}(45° + \alpha)\operatorname{tg}\alpha}$.

Докажите тождество:

○25.5. а) $\frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45° - \alpha)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\operatorname{tg} x - 1$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = 2$;

г) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg}\alpha = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\operatorname{tg}\alpha$.

○25.6. а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$;
б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\beta - \alpha)\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$.

○25.7. а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 30° - \operatorname{tg}^2 15°}{1 - \operatorname{tg}^2 30° \operatorname{tg}^2 15°} = \operatorname{tg} 15°$.

25.8. Представив $2x$ в виде $x + x$, докажите тождество $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

○**25.9.** Докажите, что значение выражения $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)\operatorname{tg}\beta}$ не зависит от значения β.

○**25.10.** Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{5}$.

○**25.11.** Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3}$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

○**25.12.** а) Вычислите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = 3$;

б) вычислите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0{,}2$.

○**25.13.** а) Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$, вычислите $\operatorname{tg}\beta$;

б) зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{4}$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 2$, вычислите $\operatorname{tg}\beta$.

○**25.14.** Известно, что $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

○**25.15.** Известно, что $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

○25.16. Дано: $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. Докажите, что:

а) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \operatorname{tg}\beta$.

○25.17. Решите уравнение:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x} = 1$; б) $\dfrac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x} = \sqrt{3}$.

○25.18. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$:

а) $\dfrac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x} = 1$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\operatorname{tg} 2x + 1} = \sqrt{3}$.

○25.19. Решите неравенство:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\operatorname{tg} x} < 1$; б) $\dfrac{\operatorname{tg} 3x - 1}{\operatorname{tg} 3x + 1} > 1$.

○25.20. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \operatorname{tg}(x + y) = -3, \\ 2\operatorname{tg} x \quad \operatorname{tg} y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{tg}(x - y) \quad -\frac{1}{2}, \\ 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 5. \end{cases}$

●25.21. Вычислите β, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -3$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

●25.22. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right)$.

●25.23. Докажите, что прямые $y = 3x + 1$ и $y = 6 - 2x$ пересекаются под углом 45°.

●25.24. Точка K — середина стороны CD квадрата $ABCD$. Чему равен тангенс острого угла между диагональю AC и отрезком BK?

§ 26. Формулы приведения

Упростите выражение:

26.1. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$; в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$;

б) $\cos(2\pi - t)$; г) $\sin(\pi + t)$.

26.2. а) $\sin(\pi - t)$; в) $\cos(2\pi + t)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$.

26.3. а) $\cos(90° - \alpha)$; в) $\sin(270° + \alpha)$;

б) $\sin(360° - \alpha)$; г) $\cos(180° + \alpha)$.

26.4. а) $\mathrm{tg}(90° - \alpha)$; в) $\mathrm{tg}(270° + \alpha)$;

б) $\mathrm{ctg}(180° - \alpha)$; г) $\mathrm{ctg}(360° + \alpha)$.

Вычислите с помощью формул приведения:

26.5. а) $\sin 240°$; б) $\mathrm{tg}\, 300°$; в) $\cos 330°$; г) $\mathrm{ctg}\, 315°$.

26.6. а) $\cos\frac{5\pi}{3}$; в) $\sin\frac{7\pi}{6}$;

б) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

○26.7. а) $\sin 3090°$; в) $\cos 4650°$;

б) $\mathrm{tg}\, 2205°$; г) $\mathrm{ctg}\, 4110°$.

○26.8. а) $\cos 630° - \sin 1470° - \mathrm{ctg}\, 1125°$;

б) $\sin(-7\pi) + 2\cos\frac{31\pi}{3} - \mathrm{tg}\frac{7\pi}{4}$;

в) $\mathrm{tg}\, 1800° - \sin 495° + \cos 945°$;

г) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \mathrm{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

○26.9. Упростите выражение:

а) $\sin(90° - \alpha) + \cos(180° + \alpha) + \mathrm{tg}(270° + \alpha) + \mathrm{ctg}(360° + \alpha)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi - t) + \mathrm{tg}(\pi - t) + \mathrm{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - t\right)$.

Упростите выражение:

○26.10. а) $\dfrac{\cos(180^\circ + \alpha)\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^\circ + \alpha)}$; в) $\dfrac{\sin(-\alpha)\,\mathrm{ctg}(-\alpha)}{\cos(360^\circ - \alpha)\,\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(\pi - t)\cos(2\pi - t)}{\mathrm{tg}(\pi - t)\cos(\pi - t)}$; г) $\dfrac{\sin(\pi + t)\sin(2\pi + t)}{\mathrm{tg}(\pi + t)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)}$.

○26.11. а) $\dfrac{\cos(\pi - t) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(2\pi - t) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - t\right)}$;

б) $\dfrac{\sin^2(\pi - t) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(\pi - t)}\ \mathrm{tg}(\pi - t)$.

○26.12. а) $\dfrac{\sin^3(\alpha - 270^\circ)\cos(360^\circ - \alpha)}{\mathrm{tg}^3(\alpha - 90^\circ)\cos^3(\alpha - 270^\circ)}$;

б) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + y\right)}{\cos(\pi - x)\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - y\right)} - \dfrac{\sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - y\right)\mathrm{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right)}{\cos(2\pi - y)\,\mathrm{tg}(11\pi - x)}$.

○26.13. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\mathrm{tg}(\pi - t)}{\cos(\pi + t)}\ \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)} = \mathrm{tg}^2\, t$;

б) $\dfrac{\sin(\pi - t)}{\mathrm{tg}(\pi + t)}\ \dfrac{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)}{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right)}\ \dfrac{\cos(2\pi - t)}{\sin(-t)} = \sin t$;

в) $\dfrac{\cos^2(\pi - t) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) + \cos(\pi + t)\cos(2\pi - t)}{\mathrm{tg}^2\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + t\right)} = \cos^2 t$;

г) $\dfrac{\sin^2\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi - t)}{\mathrm{tg}^2\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = \cos t$.

Вычислите:

○26.14. а) $\frac{11\cos 287^\circ - 25\sin 557^\circ}{\sin 17^\circ}$;

б) $\frac{13\sin 469^\circ - 8\cos 341^\circ}{\cos 19^\circ}$.

○26.15. а) $\frac{2\cos\frac{11\pi}{5} + 8\sin\frac{13\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}}$; б) $\frac{5\sin\frac{5\pi}{7} + 2\cos\frac{25\pi}{14}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$.

○26.16. а) $\sin 77^\circ \cos 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 73^\circ$;
б) $\cos 125^\circ \cos 5^\circ + \sin 55^\circ \cos 85^\circ$.

○26.17. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3} + t\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12} + t\right)$.

○26.18. а) $\frac{\cos 105^\circ \cos 5^\circ + \sin 105^\circ \cos 85^\circ}{\sin 195^\circ \cos 5^\circ + \cos 195^\circ \sin 185^\circ}$;

б) $\frac{\sin 75^\circ \cos 5^\circ - \cos 75^\circ \cos 85^\circ}{\cos 375^\circ \cos 5^\circ - \sin 15^\circ \sin 365^\circ}$.

○26.19. а) $\frac{\operatorname{tg} 380^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 225^\circ + \operatorname{ctg} 290^\circ \operatorname{ctg} 65^\circ}$; б) $\frac{\operatorname{tg}\frac{19\pi}{36} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{36}}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{36}\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{36}}$.

○26.20. Известно, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0{,}4$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = -3$.
Вычислите: а) $\operatorname{tg}(x + y)$; б) $\operatorname{ctg}(x - y)$.

Решите уравнение:

○26.21. а) $2\cos(2\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3$;

б) $\sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3$;

в) $2\sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{2}$;

г) $3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(2\pi + x) = 1$.

Решите уравнение:

○26.22. а) $5\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-8\cos(2\pi-x)=1;$

б) $\sin(2\pi+x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)=1.$

○26.23. а) $\sin^2(\pi+x)+\cos^2(2\pi-x)=0;$
б) $\sin^2(\pi+x)+\cos^2(2\pi-x)=1.$

○26.24. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0;$

б) $2\sin(\pi-3x)+\cos(2\pi-3x)=0.$

○26.25. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-3\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)=0;$

б) $\sqrt{3}\sin\left(\pi-\frac{x}{3}\right)+3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3}\right)=0.$

○26.26. а) $\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2\cos^2 x=0;$

б) $\sin^2 3x+3\cos^2 3x-4\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=0;$

в) $\sin^2 x+2\sin(\pi-x)\cos x-3\cos^2(2\pi-x)=0;$

г) $\sin^2(2\pi-3x)+5\sin(\pi-3x)\cos 3x+4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)=0.$

○26.27. а) $3\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=2;$

б) $2\cos^2\frac{x}{2}-3\sin\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\cos\left(2\pi-\frac{x}{2}\right)+7\sin^2\frac{x}{2}=3;$

в) $4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\sin(\pi+x)+$

$+3\cos^2(\pi+x)=3;$

г) $3\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(\pi+x)+$

$+2\sin^2(x-\pi)=2.$

○26.28. а) $2\sin^2(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$;

б) $2\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 = 0$;

в) $2\cos^2 x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 0$;

г) $5 - 5\sin 3(\pi - x) = \cos^2(\pi - 3x)$.

○26.29. а) $2\,\mathrm{tg}^2\, 2x + 3\,\mathrm{tg}\,(\pi + 2x) = 0$;

б) $\mathrm{tg}^2\, 3x - 6\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$.

○26.30. а) $3\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2} - 2\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \quad 1 = 0$;

б) $\mathrm{tg}\,(\pi + x) + 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$;

в) $3\,\mathrm{tg}^2\, 4x - 2\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 1$;

г) $2\,\mathrm{ctg}\, x - 3\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 5 = 0$.

○26.31. а) $\sin^2 x + \cos^2 2x + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) + 2\cos x\,\mathrm{tg}\, x = 1$;

б) $2\cos^2 x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

○26.32. Постройте график функции:

а) $y = \sin(3\pi + 3x)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)\sin(4\pi - x) + {}$

$+ \sin\frac{99\pi}{2}$;

б) $y = \cos(\pi + x)\cos\left(3\pi - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos\frac{3\pi + x}{2} + {}$

$+ \cos\frac{16\pi}{3}$.

●26.33. Докажите равенство:

а) $\dfrac{\sin 50^\circ + \cos 50^\circ}{\sqrt{2}\sin 85^\circ} = 1$;

б) $\dfrac{\cos 40^\circ - \sqrt{3}\sin 40^\circ}{\sin 190^\circ} = 2$.

●26.34. Докажите, что:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1; 1]$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

Вычислите:

●26.35. а) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)$; в) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)$;

б) $\arccos\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)$; г) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)$.

●26.36. а) $\arcsin\left(-\cos\frac{4\pi}{5}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{5}\right)\right)$;

б) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{24\pi}{5}\right)\right)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{27\pi}{7}\right)\right)$.

●26.37. Постройте график функции:
а) $y = \arcsin(\sin x)$; б) $y = \arcsin(\cos x)$.

§ 27. Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени

Упростите выражение:

27.1. а) $\frac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t$; в) $\cos^2 t - \cos 2t$;

б) $\frac{\sin 6t}{\cos^2 3t}$; г) $\frac{\cos 2t}{\cos t - \sin t} - \sin t$.

27.2. а) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$; в) $\frac{\sin 100^\circ}{2\cos 50^\circ}$;

б) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$; г) $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

27.3. Вычислите:

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; в) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;
б) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$; г) $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$.

Вычислите:

27.4. а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; в) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$

27.5. а) $\dfrac{\operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}$; б) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{12} - 1}$.

27.6. а) $\dfrac{\sin 2t - 2\sin t}{\cos t - 1}$; в) $\sin 2t \operatorname{ctg} t - 1$;

б) $\dfrac{\cos 2t - \cos^2 t}{1 - \cos^2 t}$; г) $2\cos^2\frac{\pi + t}{4} - 2\sin^2\frac{\pi + t}{4}$.

27.7. а) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t}$; в) $(1 - \operatorname{tg}^2 t)\cos^2 t$;

б) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t}$; г) $(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)\sin 2t$.

Докажите тождество:

27.8. а) $(\sin t - \cos t)^2 = 1 - \sin 2t$;
б) $\cos^4 t - \sin^4 t = \cos 2t$;
в) $(\sin t + \cos t)^2 = 1 + \sin 2t$;
г) $\cos^4 t - \sin^4 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t$.

27.9. а) $\sin^2 2t = \dfrac{1 - \cos 4t}{2}$; в) $2\sin^2 2t = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4t\right)$;

б) $2\sin^2\frac{t}{2} + \cos t = 1$; г) $2\cos^2 t - \cos 2t = 1$.

○27.10. а) $\cos^2 3t = \dfrac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6t\right)}{2}$; в) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4} + 2t\right) = \dfrac{1 - \sin 4t}{2}$;

б) $\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t} = \operatorname{tg}^2\frac{t}{2}$; г) $\dfrac{1 - \cos t}{\sin t} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

○27.11. а) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$;

б) $2\sin^2(45^\circ - \alpha) + \sin 2\alpha = 1$;

в) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$;

г) $2\cos^2(45^\circ + \alpha) + \sin 2\alpha = 1$.

Докажите тождество:

○27.12. а) $\dfrac{\cos 2t}{\sin t \cos t + \sin^2 t} = \operatorname{ctg}(\pi + t) - 1$;

б) $\dfrac{\sin 2t - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) - \sin^2 t} = -2\operatorname{ctg} t$;

в) $(\operatorname{ctg} t - \operatorname{tg} t)\sin 2t = 2\cos 2t$;

г) $\dfrac{1 - \cos 2t + \sin 2t}{1 + \cos 2t + \sin 2t}\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = 1$.

○27.13. а) $\dfrac{\sin 2t}{1 + \cos 2t}\ \dfrac{\cos t}{1 + \cos t} = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$;

б) $\dfrac{\sin 2t}{1 + \cos 2t}\ \dfrac{\cos t}{1 + \cos t}\ \dfrac{\cos\dfrac{t}{2}}{1 + \cos\dfrac{t}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{t}{4}$.

○27.14. а) $\dfrac{1 - \cos 2t + \sin 2t}{1 + \sin 2t + \cos 2t} = \operatorname{tg} t$;

б) $\dfrac{1 + \cos 2t - \sin 2t}{1 + \sin 2t + \cos 2t} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right)$.

○27.15. а) $\cos^2 t - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2t\right)$;

б) $\sin^2 t - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - t\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

○27.16. а) $\cos x \cos 2x = \dfrac{\sin 4x}{4\sin x}$;

б) $\cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{\sin 8x}{8\sin x}$;

в) $\sin x \cos 2x = \dfrac{\sin 4x}{4\cos x}$;

г) $\sin x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{\sin 8x}{8\cos x}$.

○27.17. Проверьте числовое равенство:

а) $\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}\sin 72^\circ$;

б) $\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}$.

○**27.18.** Упростите выражение $\sqrt{1 - \cos 2t} + \sqrt{1 + \cos 2t}$, если:

а) $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $t \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; г) $t \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

27.19. Вычислите (с помощью формул понижения степени):

а) $\sin 22{,}5°$; б) $\cos 22{,}5°$; в) $\sin \frac{3\pi}{8}$; г) $\cos \frac{3\pi}{8}$.

○**27.20.** Вычислите:

а) $\sin 11°15' \cos 11°15' \cos 22°30' \cos 45°$;

б) $\sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12}$.

○**27.21.** а) $\frac{1 + \cos 40° + \cos 80°}{\sin 80° + \sin 40°} \ \operatorname{tg} 40°$;

б) $\frac{1 - \cos 25° + \cos 50°}{\sin 50° - \sin 25°} - \operatorname{tg} 65°$.

○**27.22.** а) $\frac{\sin 125°}{\sin 55°} - \frac{\cos 125°}{\cos 55°}$; б) $\frac{\cos 150°}{\sin 40°} - \frac{\sin 150°}{\cos 40°}$.

●**27.23.** а) $\left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^3 \frac{\pi}{8} - \sin^3 \frac{\pi}{8}\right)$;

б) $\sin \frac{7\pi}{8}\left(\cos^4 \frac{7\pi}{16} - \sin^4 \frac{7\pi}{16}\right)$;

в) $\left(\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}\right)\left(\cos^3 \frac{\pi}{12} + \sin^3 \frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\sin \frac{\pi}{12}\left(\cos^6 \frac{\pi}{24} - \sin^6 \frac{\pi}{24}\right)$.

●**27.24.** а) $\sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^6 \frac{3\pi}{8} + \cos^6 \frac{3\pi}{8}$;

б) $\cos^2 \frac{5\pi}{8} - \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} - \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^6 \frac{5\pi}{8} - \sin^6 \frac{5\pi}{8}$.

●**27.25.** а) $\cos \frac{\pi}{33} \cos \frac{2\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33}$;

б) $\cos \frac{\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} \cos \frac{8\pi}{65} \cos \frac{16\pi}{65} \cos \frac{32\pi}{65}$.

●27.26. Докажите равенство:

а) $8 \cos 10° \cos 20° \cos 40° = \operatorname{ctg} 10°$;

б) $\sin 70° + 8 \cos 20° \cos 40° \cos 80° = 2 \cos^2 10°$.

○27.27. Известно, что $\sin t = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Вычислите:

а) $\sin 2t$; б) $\cos 2t$; в) $\operatorname{tg} 2t$; г) $\operatorname{ctg} 2t$.

○27.28. Известно, что $\cos x = 0{,}8$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Вычислите:

а) $\sin 2x$; б) $\cos 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\operatorname{ctg} 2x$.

○27.29. Известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, $180° < x < 270°$. Вычислите:

а) $\sin 2x$; б) $\cos 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\operatorname{ctg} 2x$.

○27.30. а) Известно, что $\cos t = \frac{3}{4}$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите:

$\cos \frac{t}{2}$, $\sin \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$.

б) Известно, что $\operatorname{ctg} t = \frac{3}{4}$, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Вычислите:

$\cos \frac{t}{2}$, $\sin \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$.

○27.31. а) Известно, что $\sin 2x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Вычислите:

$\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

б) Известно, что $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$. Вычислите:

$\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

○27.32. а) Зная, что $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = a$, найдите $\sin \frac{2x - \pi}{2}$, $\cos \frac{2x + \pi}{2}$;

б) зная, что $\operatorname{tg} \frac{x}{4} = a$, найдите $\sin \frac{x - 3\pi}{2}$, $\cos \frac{x + 3\pi}{2}$.

●27.33. а) Зная, что $\cos 4x = -\frac{527}{625}$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, вычислите $\sin x$;

б) зная, что $\cos 4x = \frac{17}{81}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, вычислите $\operatorname{tg} x$.

○27.34. Вычислите $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, если:

а) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = a$; б) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = a$.

○27.35. а) Известно, что $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$. Вычислите $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

б) Известно, что $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{49}{50}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислите $\sin 2\alpha$.

○27.36. Известно, что $\cos 2x = \frac{5}{13}$. Вычислите:

а) $\sin^4 x + \cos^4 x$;
б) $\sin^8 x - \cos^8 x$.

○27.37. Сравните числа a и b, если:

а) $a = \sin \frac{\pi}{12}$, $b = \frac{1}{4}$;
б) $a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$, $b = \frac{1}{2}$.

○27.38. Выразите:

а) $\sin 3x$ через $\sin x$;
б) $\cos 3x$ через $\cos x$.

○27.39. Опираясь на результаты № 27.38, сформулируйте необходимое и достаточное условие для выполнения равенства:

а) $\sin 3x = 3 \sin x$;
б) $\cos 3x + 3 \cos x = 0$.

○27.40. а) Зная, что $f(x) = \sin x$, $f(a) = 0{,}1$, вычислите $f(3a)$;
б) зная, что $f(x) = \sin x$, $f(a) = 0{,}25$, вычислите $f(4a)$;
в) зная, что $f(x) = \cos x$, $f(a) = -0{,}1$, вычислите $f(3a)$;
г) зная, что $f(x) = \cos x$, $f(a) = \frac{2}{3}$, вычислите $f(4a)$.

●27.41. а) Зная, что $15 \cos 2t + 8 \sin t = 9$ и $1 < t < 3$, вычислите $\operatorname{tg} t$;
б) зная, что $6 \cos 2t + 5 \cos t + 3 = 0$ и $4 < t < 6$, вычислите $\operatorname{ctg} t$.

●27.42. а) Докажите, что если $\sin^2 x \quad \sin y \cos y$, то $\cos 2x = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + y\right)$;

б) докажите, что если $\cos^2 x = \sin y \cos y$, то $\cos (\pi + 2x) = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - y\right)$.

●**27.43.** а) Известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{1}{7}$, $\sin y = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $x + 2y = \frac{\pi}{4}$.

б) Известно, что $\sin x = \frac{7}{25}$, $\cos y = \frac{7}{25}$, $\cos z = \frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $0 < z < \frac{\pi}{2}$. Докажите, что $x + \frac{y}{2} = z$.

●**27.44.** а) Зная, что $t = 2 \arccos \frac{3}{5}$, вычислите $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$;

б) зная, что $t = 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4}\right)$, вычислите $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$;

в) зная, что $t = 2 \arcsin \left(-\frac{5}{13}\right)$, вычислите $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$;

г) зная, что $t = 2 \operatorname{arcctg} \frac{12}{5}$, вычислите $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

●**27.45.** а) Зная, что $t = \arccos \frac{3}{5}$, вычислите $\sin \frac{t}{2}$, $\cos \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$;

б) зная, что $t = \operatorname{arctg} \left(-\frac{3}{4}\right)$, вычислите $\sin \frac{t}{2}$, $\cos \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$;

в) зная, что $t = \arcsin \left(-\frac{5}{13}\right)$, вычислите $\sin \frac{t}{2}$, $\cos \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$;

г) зная, что $t = \operatorname{arcctg} \frac{12}{5}$, вычислите $\sin \frac{t}{2}$, $\cos \frac{t}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

Решите уравнение:

27.46. а) $\sin 2x - 2 \cos x = 0$;
б) $2 \sin x = \sin 2x$;
в) $\sin 2x - \sin x = 0$;
г) $\sin 2x - \cos x = 0$.

27.47. а) $\sin x \cos x = 1$;
б) $\sin 4x \cos 4x = \frac{1}{2}$;
в) $\cos^2 \frac{x}{3} - \sin^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$;
г) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$.

○27.48. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

а) $\cos 2x + 3\sin x = 1$; в) $\cos 2x = \cos^2 x$;

б) $\sin^2 x = -\cos 2x$; г) $\cos 2x = 2\sin^2 x$.

○27.49. Решите уравнение:

а) $2 - \cos 2x + 3\sin x = 0$;

б) $\cos 6x - \cos 3x - 2 = 0$;

в) $26\sin x\cos x - \cos 4x + 7 = 0$;

г) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x\cos x$.

○27.50. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения:

а) $\cos x = \dfrac{\sin 22{,}5^\circ \cos 22{,}5^\circ}{\cos^2 67{,}5^\circ - \sin^2 67{,}5^\circ}$;

б) $\sin x = \dfrac{\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ}{4\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$.

Решите уравнение:

○27.51. а) $3\sin 2x + \cos 2x = 1$; б) $\cos 4x + 2\sin 4x = 1$.

○27.52. а) $4\sin x + \sin 2x = 0$, $x \in [0; 2\pi]$;

б) $\cos^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$, $x \in \left[\dfrac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

○27.53. Сколько корней имеет уравнение:

а) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin 2x$, на отрезке $\left[\dfrac{20\pi}{9}; \dfrac{28\pi}{9}\right]$;

б) $2\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \quad 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) + 1 = 0$, на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$?

Решите уравнение:

○27.54. а) $1 - \cos x = 2\sin\dfrac{x}{2}$; в) $1 + \cos x = 2\cos\dfrac{x}{2}$;

б) $1 - \cos x = \sin x \sin\dfrac{x}{2}$; г) $\sin x = \mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}(1 + \cos x)$.

○27.55. а) $\sin^2 2x = 1$; в) $\sin^2\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{4}$;

б) $\cos^2\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$; г) $\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

○27.56. Найдите корни уравнения, удовлетворяющие неравенству $|x| < 4$:

а) $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$; б) $4\cos^2 2x + 8\cos^2 x = 7$.

●27.57. Решите уравнение:

а) $\sin 2x + 2\sin x = 2 - 2\cos x$;

б) $4\sin 2x + 8(\sin x - \cos x) = 7$.

○27.58. Докажите тождество:

а) $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; б) $\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

○27.59. Используя замену $u = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ и тождества из упражнения 27.58, решите уравнение:

а) $\sin x + 7\cos x = 5$; б) $5\sin x + 10\cos x + 2 = 0$.

○27.60. Вычислите $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, если известно, что:

а) $\sin x + \cos x = 1{,}4$; $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$;

б) $\sin x - \cos x = 0{,}2$; $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

Решите неравенство:

○27.61. а) $4\sin^2 3x < 3$; б) $4\cos^2\dfrac{x}{4} > 1$.

○27.62. а) $\sin 2x\cos 2x < \dfrac{1}{4}$; б) $\cos^2\dfrac{x}{4} - \sin^2\dfrac{x}{4} > \dfrac{1}{2}$.

○27.63. а) $\cos^2 2x - \sin^2 2x \leqslant -1$; в) $\sin^2 3x - \cos^2 3x \leqslant -1$;

б) $\sin 5x\cos 5x \geqslant \dfrac{1}{2}$; г) $\sin\dfrac{2x}{3}\cos\dfrac{2x}{3} \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

○27.64. а) $y = 2\cos 2x + \sin^2 x$; б) $y = 2\sin^2 3x - \cos 6x$.

○27.65. а) $y = 3 - \sin x + \cos 2x$; б) $y = \cos 2x + 4\cos x - 1$.

●27.66. а) $y = \sin 3x + \cos 2x + 4\sin^3 x$;

б) $y = \cos 3x + \cos 2x - 4\cos^3 x$.

○27.67. Постройте график функции:

а) $y = 4\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}$; б) $y = 2\cos^2 x$.

Постройте график функции:

○27.68. а) $y = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$;   б) $y = -\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$.

○27.69. а) $y = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$;   б) $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$.

○27.70. а) $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} + \sin x$;   в) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} + \sin x$;

б) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} + \cos x$;   г) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \cos x$.

○27.71. а) $y = \begin{cases} 2\sin x \cos x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ 2\sin^2 \dfrac{x}{4}, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2, \text{ если } x \leqslant \dfrac{\pi}{4}, \\ 2 + \dfrac{\pi}{4} - x, \text{ если } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

●27.72. а) $y = \dfrac{\sin 2x}{|\sin x|}$;   в) $y = \dfrac{\sin 2x}{-|\cos x|}$;

б) $y = \dfrac{\sin 2x}{-2|\cos x|}$;   г) $y = \dfrac{\sin 2x}{2|\sin x|}$.

§ 28. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Представьте в виде произведения:

28.1. а) $\sin 40° + \sin 16°$;   в) $\sin 10° + \sin 50°$;

б) $\sin 20° - \sin 40°$;   г) $\sin 52° - \sin 36°$.

28.2. а) $\cos 15° + \cos 45°$;   в) $\cos 20° + \cos 40°$;

б) $\cos 46° - \cos 74°$;   г) $\cos 75° - \cos 15°$.

28.3. а) $\sin \dfrac{\pi}{5} - \sin \dfrac{\pi}{10}$;   в) $\sin \dfrac{\pi}{6} + \sin \dfrac{\pi}{7}$;

б) $\sin \dfrac{\pi}{3} + \sin \dfrac{\pi}{4}$;   г) $\sin \dfrac{\pi}{3} - \sin \dfrac{\pi}{11}$.

Представьте в виде произведения:

28.4. а) $\cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{20}$; в) $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{11}$;

б) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{3\pi}{4}$; г) $\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{4}$.

28.5. а) $\sin 3t - \sin t$;
б) $\cos(\alpha - 2\beta) - \cos(\alpha + 2\beta)$;
в) $\cos 6t + \cos 4t$;
г) $\sin(\alpha - 2\beta) - \sin(\alpha + 2\beta)$.

28.6. а) $\operatorname{tg} 25° + \operatorname{tg} 35°$; в) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40°$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

○28.7. а) $\frac{1}{2} - \cos t$; в) $1 + 2\cos t$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin t$; г) $\cos t + \sin t$.

○28.8. а) $\sin 5x + 2\sin 6x + \sin 7x$;
б) $2\cos x + \cos 2x + \cos 4x$.

○28.9. а) $\sin t + \sin 2t + \sin 3t + \sin 4t$;
б) $\cos 2t - \cos 4t - \cos 6t + \cos 8t$.

Докажите тождество:

28.10. а) $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

б) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

○28.11. а) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}\alpha$.

○28.12. а) $\sin x + \sin y + \sin(x - y) = 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x - y}{2}$;

б) $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$.

○28.13. а) $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$;
б) $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

Вычислите:

○28.14. а) $\dfrac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$;

в) $\dfrac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin \frac{7\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{7\pi}{18} - \cos \frac{\pi}{9}}$;

г) $\dfrac{\sin \frac{5\pi}{18} + \sin \frac{11\pi}{9}}{\cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{11\pi}{9}}$.

○28.15. а) $\dfrac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$, если $\operatorname{ctg} 4\alpha = 0{,}2$;

б) $\dfrac{\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x}{\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x}$, если $\operatorname{tg} \dfrac{5x}{4} = 2$.

●28.16. а) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 130^\circ + \sin^2 110^\circ$;
б) $\cos^2 35^\circ + \cos^2 25^\circ - \cos^2 5^\circ$.

●28.17. а) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ$.

Проверьте равенство:

28.18. а) $\sin 35^\circ + \sin 25^\circ = \cos 5^\circ$;
б) $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ = \cos 10^\circ$;
в) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$;
г) $\cos 20^\circ - \sin 50^\circ = \sin 10^\circ$.

○28.19. а) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ = 0$;
б) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ = 0$.

○28.20. а) $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ = \sin 1^\circ$;
б) $\cos 115^\circ - \cos 35^\circ + \cos 65^\circ + \cos 25^\circ = \sin 5^\circ$.

●28.21. а) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2 \operatorname{tg} 20^\circ$.

●28.22. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то выполняется равенство:
а) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$;
б) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\beta}{2} \cos \dfrac{\gamma}{2}$.

○28.23. а) Зная, что $\sin 2x + \sin 2y = a$, $\cos 2x + \cos 2y = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), вычислите $\operatorname{tg}(x + y)$;
б) зная, что $\sin x - \sin y = a$, $\cos x - \cos y = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), вычислите $\operatorname{ctg} \dfrac{x + y}{2}$.

●28.24. Докажите:

а) если $2\sin x = \sin(x + 2y)$, то $\operatorname{tg}(x + y) = 3\operatorname{tg} y$;

б) если $2\cos x = \cos(x + 2y)$, то $\operatorname{ctg}(x + y) - 2\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y$.

●28.25. Докажите:

а) если $\cos^2 x + \cos^2 y = m$, то $\cos(x + y)\cos(x - y) = m - 1$;

б) если $\cos^2(x + y) + \sin^2 x + \sin^2 y = m$, то

$\sin x \sin y \cos(x + y) = \dfrac{1 - m}{2}$.

Решите уравнение:

○28.26. а) $\cos x + \cos 3x = 0$; в) $\cos x = \cos 5x$;

б) $\sin 12x + \sin 4x = 0$; г) $\sin 3x = \sin 17x$.

○28.27. а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

б) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$.

○28.28. а) $\sin 3x = \cos 2x$;

б) $\sin(5\pi - x) = \cos(2x + 7\pi)$;

в) $\cos 5x = \sin 15x$;

г) $\sin(7\pi + x) = \cos(9\pi + 2x)$.

○28.29. а) $1 + \cos 6x = 2\sin^2 5x$ в) $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \cos^2 \dfrac{7x}{2}$;

б) $\cos^2 2x = \cos^2 4x$; г) $\sin^2 x + \sin^2 3x = 1$.

○28.30. а) $2\sin^2 x + \cos 5x = 1$;

б) $2\sin^2 3x - 1 = \cos^2 4x - \sin^2 4x$.

○28.31. а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 5x = 0$; в) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 4x$;

б) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{ctg} x$; г) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{3x}{2} = 0$.

○28.32. а) $\sin x + \sin 3x + \cos x + \cos 3x = 0$;

б) $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$.

○28.33. Сколько корней имеет заданное уравнение на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$:

а) $\sin 2x + \sin 6x = \cos 2x$;

б) $2\cos^2 x - 1 = \sin 3x$?

○28.34. Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку $(0; 2{,}5)$:

а) $\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$;

б) $\sin 2x + 5\sin 4x + \sin 6x = 0$.

○28.35. При каких значениях x числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, если:

а) $a = \cos 7x$, $b = \cos 2x$, $c = \cos 11x$;

б) $a = \sin 3x$, $b = \cos x$, $c = \sin 5x$?

○28.36. Решите неравенство:

а) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1$;

б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \quad -\frac{1}{2}$.

○28.37. Постройте график функции:

а) $y = 1{,}5\left(\cos\frac{9x + 10\pi}{6} + \cos\frac{9x - 10\pi}{6}\right)$;

б) $y = 2\left(\sin\frac{9x + 2\pi}{3} + \sin\frac{9x - 2\pi}{3}\right)$.

●28.38. Постройте график уравнения:

а) $\sin 2x = \sin 2y$; б) $\cos 2x = \cos 2y$.

§ 29. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

Представьте в виде суммы:

29.1. а) $\sin 23° \sin 32°$; в) $\sin 14° \cos 16°$;

б) $\cos\frac{\pi}{12} \cos\frac{\pi}{8}$; г) $2\sin\frac{\pi}{8} \cos\frac{\pi}{5}$.

29.2. а) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$; в) $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$;

б) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$; г) $2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$.

29.3. а) $\cos\alpha\sin(\alpha + \beta)$;

б) $\sin(60° + \alpha)\sin(60° - \alpha)$;

в) $\sin\beta\cos(\alpha + \beta)$;

г) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

○29.4. а) $\sin 10° \cos 8° \cos 6°$; б) $4\sin 25° \cos 15° \sin 5°$.

○29.5. а) $\sin x \sin y \sin z$; б) $\cos x \cos y \cos z$.

○29.6. а) $\sin^2 x \cos 4x$; б) $\cos^2 2x \sin 3x$.

Докажите тождество:

○29.7. а) $2\sin t \sin 2t + \cos 3t = \cos t$;

б) $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{2}$.

○29.8. а) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4}$;

б) $4\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 3 - 4\sin^2 x$.

○29.9. а) $4\sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x$;

б) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \operatorname{tg} 3x$.

●29.10. $\cos^2(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

●29.11. а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \quad + \sin nx =$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$$

б) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \quad + \cos nx =$

$$= \frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Вычислите:

○29.12. а) $\cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ - \cos 4^\circ \cos 2^\circ$;
б) $\sin^2 10^\circ + \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

○29.13. а) $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$; б) $\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 40^\circ} + 4\cos 100^\circ$.

○29.14. а) $2\sin 87^\circ \cos 57^\circ - \sin 36^\circ$;
б) $2\sin 59^\circ \sin 14^\circ + \sin 163^\circ$.

○29.15. а) $\sin 12^\circ \cos 72^\circ - \cos 33^\circ \cos 27^\circ$;
б) $2\cos 28^\circ \cos 17^\circ - 2\sin 31^\circ \sin 14^\circ - 2\sin 14^\circ \sin 3^\circ$.

●29.16. а) $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$;
б) $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

○29.17. Сравните числа:

а) $a = \sin 1 \cos 2$, $b = \sin 3 \cos 4$;

б) $a = \cos 2 \cos 4$, $b = -\sin 3{,}5 \sin 2{,}5$.

●29.18. Докажите неравенство:

а) $\sin(x + 2) \cos(x - 2) < \sin(x + 3) \cos(x - 3)$;

б) $\cos(2x - 3) \cos(2x + 3) > \sin(1 + 2x) \sin(1 - 2x)$.

●29.19. а) Зная, что $\cos x = \frac{3}{4}$, вычислите $16 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}$;

б) зная, что $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, вычислите

$125 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$.

Решите уравнение:

○29.20. а) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 0{,}25 = 0$;

б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

○29.21. а) $2 \sin x \cos 3x + \sin 4x = 0$;

б) $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.

○29.22. а) $\sin 3x \cos x = \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}$;

б) $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2 x = 0$;

в) $\sin 2x \cos x = \sin x \cos 2x$;

г) $\cos 2x \cos x = \cos 2{,}5x \cos 0{,}5x$.

○29.23. Найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корень уравнения:

а) $\sin x \sin 3x = 0{,}5$; б) $\cos x \cos 3x = 0{,}5$.

○29.24. При каких значениях x числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, если:

а) $a = \cos 6x$, $b = \cos 4x$, $c = \cos 2x$;

б) $a = \sin 2x$, $b = \sin 3x$, $c = \sin 4x$?

○29.25. Решите неравенство:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}-x\right)<0;$

б) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\geqslant 0;$

в) $\sin\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\leqslant 0;$

г) $\cos\frac{3x+\pi}{6}\cos\frac{3x-\pi}{6}>0.$

●29.26. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2},\\ 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{3};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{4},\\ \sin(x+y)\sin(x-y)=\frac{3}{4}.\end{cases}$

○29.27. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{24}\right);$

б) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$

●29.28. Постройте график функции:

а) $y=2\left|\sin\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\right|;$

б) $y=-3\left|\cos\frac{3x+\pi}{6}\cos\frac{3x-\pi}{6}\right|.$

Постройте график уравнения:

●29.29. а) $2\sin(x+y)\cos y=\sin x;$

б) $2\cos(x+y)\cos x=\cos y.$

●29.30. а) $\cos\frac{x(y-1)}{2}\cos\frac{x(y+1)}{2}=\cos^2\frac{x}{2};$

б) $\sin\frac{y(x+1)}{2}\cos\frac{y(x-1)}{2}=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right).$

§ 30. Преобразование выражения $A\sin x + B\cos x$ к виду $C\sin(x+t)$

Преобразуйте данное выражение к виду $C\sin(x+t)$ или $C\cos(x+t)$:

30.1. а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x$; в) $\sin x - \cos x$;

б) $\sin x + \sqrt{3}\cos x$; г) $2\sin x - \sqrt{12}\cos x$.

30.2. а) $3\sin x + 4\cos x$; в) $7\sin x - 24\cos x$;

б) $5\cos x - 12\sin x$; г) $8\cos x + 15\sin x$.

○30.3. Докажите тождество:

а) $\sin x + \cos x + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$;

б) $\cos 2x - \sin 2x - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}\sin^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$.

○30.4. Преобразуйте сумму в произведение:

а) $\sin t + \cos t + 5\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sin t - \cos t + \sqrt{34}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$.

○30.5. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin 38° - \cos 38°}{\sqrt{2}\sin 7°}$; в) $\dfrac{\sin 17° + \sqrt{3}\cos 17°}{2\cos 347°}$;

б) $\dfrac{\sin 377° - \sqrt{3}\cos 17°}{\cos 407°}$; г) $\dfrac{\sin 752° + \cos 328°}{\sqrt{2}\sin 437°}$.

○30.6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$;

б) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$;

в) $y = \sin x - \cos x$;

г) $y = \sqrt{6}\sin x - \sqrt{2}\cos x$.

○30.7. Найдите область значений функции:

а) $y = 3\sin 2x - 4\cos 2x$;

б) $y = 5\cos 3x + 12\sin 3x$;

в) $y = 7\sin\frac{x}{2} + 24\cos\frac{x}{2}$;

г) $y = 8\cos\frac{x}{3} - 15\sin\frac{x}{3}$.

○30.8. Существуют ли значения x, при которых выполняется равенство:

а) $\sin 5x + \cos 5x = 1{,}5$;

б) $3 \sin 2x - 4 \cos 2x = \sqrt{26}$;

в) $\sin 7x - \sqrt{3} \cos 7x = \frac{\pi}{2}$;

г) $5 \sin x + 12 \cos x = \sqrt{170}$?

○30.9. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{2} (\sin x + \cos x)$;

б) $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$;

в) $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$;

г) $y = \sin x - \cos x$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

○30.10. а) $y = \cos x - 2 \sin x - 1$;

б) $y = |5 \sin x + 12 \cos x - 17|$;

в) $y = 3 \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} - 5$;

г) $y = |7 \sin 2x - 24 \cos 2x| + 15$.

●30.11. а) $y = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 2\sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;

б) $y = \cos 2x + \sin 2x - \sqrt{7} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

○30.12. При каком значении параметра a наибольшее значение заданной функции равно числу M:

а) $y = 6 \sin 1{,}5x - 8 \cos 1{,}5x + a$, $M = 17$;

б) $y = 7 \sin 0{,}3x + 24 \cos 0{,}3x + a$, $M = -17$?

○30.13. При каком значении параметра a наименьшее значение заданной функции равно числу m:

а) $y = -9 \sin 1{,}4x - 12 \cos 1{,}4x + a$, $m = 1$;

б) $y = 3{,}5 \sin 0{,}2x - 12 \cos 0{,}2x + a$, $m = -1$?

●30.14. При каком значении параметра a наибольшее значение функции $y = f(x)$ равно наименьшему значению функции $y = g(x)$:

а) $f(x) = 7 \sin 5x - 24 \cos 5x + a \quad 1$, $g(x) = 3 - 2 \cos 4x$;

б) $f(x) = 9 \sin (x - 2) + 12 \cos (x - 2) - 5 - a$, $g(x) = 2 + 7 \sin (2x + 1)$?

○30.15. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$;

б) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

в) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3}$;

г) $\sin x - \cos x = 1$.

Решите уравнение:

○30.16. а) $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{2}$;

б) $\sin 5x - \cos 5x = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

в) $\cos\frac{x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$;

г) $\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} = 1$.

○30.17. а) $4\sin x - 3\cos x = 5$;

б) $3\sin 2x + 4\cos 2x = 2{,}5$;

в) $12\sin x + 5\cos x + 13 = 0$;

г) $5\cos\frac{x}{2} - 12\sin\frac{x}{2} = 6{,}5$.

○30.18. а) $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$;

б) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\cos 3x$;

в) $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos x$;

г) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin 4x$.

●30.19. а) $2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$;

б) $5\sin x - 12\cos x + 13\sin 3x = 0$.

●30.20. а) $\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$;

б) $\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)^2 + 1 = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

●30.21. а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x + 2 = \frac{12}{5\pi}x$;

б) $\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 2x - \frac{\pi}{2}$.

○30.22. Решите неравенство:

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x > 1$;　　б) $3\sin x - 4\cos x < 2{,}5$.

○30.23. При каких значениях параметра a уравнение не имеет решений:

а) $5\sin 2x + 12\cos 2x = 2a - 1$;

б) $3\cos\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2} + 1 = a^2$?

Докажите, что при любых значениях x выполняется неравенство:

○**30.24.** а) $2\sin^2 x + \sin 2x < 2{,}5$;

б) $16\sin^2 3x + 15\sin 6x \leqslant 25$.

●**30.25.** а) $3\sin x + 5\cos x < \sqrt[3]{210}$;

б) $\sqrt{3}\sin x - 7\cos x \quad -\sqrt[3]{390}$.

○**30.26.** При каких значениях параметра a решением неравенства является любое действительное число x:

а) $12\sin 2x - 35\cos 2x < 148a^2$;

б) $35\sin 3x + 12\cos 3x \geqslant 18{,}5(a^3 - 10)$?

§ 31. Методы решения тригонометрических уравнений (продолжение)

Решите уравнение:

○**31.1.** а) $\sin(x - 1) = \cos(x + 2)$;

б) $\sin(3x + 3) = \cos(x - 1)$.

○**31.2.** а) $\sin x \sin 5x = \cos 4x$; б) $\cos x \cos 5x = \cos 6x$.

○**31.3.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$.

○**31.4.** а) $2\cos^2 5x + \cos 3x = 1$;

б) $\sin 5x + \sin x + 2\cos^2 x = 1$.

○**31.5.** а) $8\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin x - 4 = 0$;

б) $4\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 1{,}5 + \sin x$.

○**31.6.** а) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$;

б) $\cos^2 2x + \cos^2 4x + \cos^2 6x = 1{,}5$.

○**31.7.** а) $\sin^2\frac{x}{2} + \sin^2 x + \sin^2\frac{5x}{2} + \sin^2 2x = 2$;

б) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

○**31.8.** $\operatorname{tg}(x - 15^\circ)\operatorname{ctg}(x + 15^\circ) = \frac{1}{3}$.

Решите уравнение:

●**31.9.** $8\sin^6 x + 3\cos 2x + 2\cos 4x + 1 = 0.$

●**31.10.** а) $5\sin 3x + 2\sin x = 0;$ б) $7\cos 3x - 3\cos x = 0.$

●**31.11.** а) $3|\cos x| + 2\cos x = 5|\sin x| - 3\sin x;$

б) $7|\cos x| - 4\cos x = 3|\sin x| + 2\sin x.$

○**31.12.** а) $4\cos^3\frac{x}{2} + 3\sqrt{2}\sin x = 8\cos\frac{x}{2};$

б) $\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4} = \cos^3\frac{x}{4} + \sin\frac{x}{2}.$

○**31.13.** $\cos^4 x + \sin^4 x - \sin 2x + \frac{3}{4}\sin^2 2x = 0.$

○**31.14.** а) $\cos 4x + 5\cos^2 x = 0{,}75;$

б) $\cos 4x + 3\sin^2 x = 0{,}25.$

○**31.15.** $2\sin^3 x - \cos 2x = \sin x.$

●**31.16.** $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3 + \cos 4x.$

○**31.17.** Решите уравнение $2\sin x - 3\cos x = 3$ двумя способами:

а) с помощью универсальной подстановки $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2};$

б) сведя его к однородному уравнению второй степени относительно аргумента $\frac{x}{2}$.

Решите уравнение:

○**31.18.** а) $3\sin 2x + \cos 2x = 2;$ б) $\cos 4x + 2\sin 4x = 1.$

●**31.19.** $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$

○**31.20.** Применив подстановку $y = \cos x - \sin x$, решите уравнение $4 - 4(\cos x - \sin x) = \sin 2x.$

Решите уравнение:

●**31.21.** а) $\sin x\cos x + 6\cos x + 6 = 6\sin x;$

б) $5\sin 2x - 11\cos x = 11\sin x - 7.$

●**31.22.** $2(1 - \sin x - \cos x) + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0.$

●**31.23.** а) $\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x;$ б) $32\cos^6 x - \cos 6x = 1.$

Решите уравнение:

○**31.24.** $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos 13x$.

○**31.25.** а) $3\cos(x+1) - 4\sin(x+1) = 5$;

б) $15\sin(2x-3) + 8\cos(2x-3) = 8{,}5$.

●**31.26.** $3\sin x - 5\sin\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos x$.

●**31.27.** $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

●**31.28.** $\dfrac{\cos^2 x - \cos x - \sin^2 x}{1 - \cos 2x - \sin x} = 0$.

●**31.29.** Найдите корни уравнения $\cos 4x + \dfrac{10\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $[-2;\ 1{,}4]$.

Решите уравнение:

●**31.30.** $3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = \dfrac{5}{\sin x}$.

●**31.31.** $\cos 2x - 3\cos x + 1 = \dfrac{1}{(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x)\sin(x - \pi)}$.

○**31.32.** $\dfrac{\cos^2 x(1 + \operatorname{ctg} x)}{\sin x - \cos x} = 3\cos x$.

○**31.33.** а) $\dfrac{2 - \sin x + \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$;

б) $\dfrac{6\sin^2 x - 6\sin x + \cos 2x + 1}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0$.

●**31.34.** а) $2\operatorname{ctg} 3x - 2\operatorname{tg} 3x - 4\operatorname{tg} 6x = 1$;

б) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x = 8\operatorname{tg} 8x$.

●**31.35.** $6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

●**31.36.** $\sin 5x + \sin x = 2 + 2\cos^2 x$.

●**31.37.** $\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\sin 3x = 2$.

●**31.38.** $\cos 2x\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = 1$.

Решите уравнение:

●31.39. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$.

●31.40. $\sqrt{9 - x^2}\,(\sin 2x - 3\cos x) = 0$.

●31.41. а) $\sqrt{25 - 4x^2}\,(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$;

б) $\sqrt{49 - 4x^2}\left(\sin \pi x + 3\cos\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0$.

●31.42. а) $\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{3}\sin x\right)\sqrt{4x - x^2 + 5} = 0$;

б) $(2\sin 2x - \operatorname{tg} x)\sqrt{2 - x - x^2} = 0$.

●31.43. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$.

●31.44. а) $\sqrt{\sin 7x - \sin 5x} \quad \sqrt{\sin x}$;

б) $\sqrt{\cos 5x + \cos x - \sin 5x} = \sqrt{\sin x}$.

●31.45. а) $\sin\left(\pi\sqrt{5 - x^2}\right) = 0{,}5$; б) $\cos\left(\pi\sqrt{7 - x^2}\right) = -0{,}5$.

●31.46. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{1 + x^2} + \sin\dfrac{2\pi x}{1 + x^2} = 2$.

●31.47. а) Дано уравнение с параметром a: $\sqrt{a\cos 2x - 3\sin 2x} = \cos x$. Известно, что $x = 0$ является корнем этого уравнения. Найдите остальные корни.

б) Дано уравнение с параметром a: $\sqrt{2\sin 2x - a\cos 2x} + \sin x = 0$. Известно, что $x = -\dfrac{\pi}{2}$ является корнем этого уравнения. Найдите остальные корни.

ГЛАВА 6 Комплексные числа

§ 32. Комплексные числа и арифметические операции над ними

32.1. Приведите примеры линейных уравнений с действительными коэффициентами, которые:

а) имеют целые корни, но не имеют натуральных корней;

б) имеют рациональные корни, но не имеют целых корней;

в) имеют действительные корни, но не имеют рациональных корней;

г) не имеют действительных корней.

32.2. Приведите примеры квадратных уравнений с действительными коэффициентами, которые:

а) имеют целые корни, но не имеют натуральных корней;

б) имеют рациональные корни, но не имеют целых корней;

в) имеют действительные корни, но не имеют рациональных корней;

г) не имеют действительных корней.

32.3. Укажите хотя бы одно значение параметра a, при котором у уравнения $2x^2 + 4x + a = 0$:

а) оба корня целые, но не натуральные числа;

б) оба корня рациональные, но не целые числа;

в) оба корня действительные, но не рациональные числа;

г) укажите все значения a, при которых действительных корней нет.

32.4. Укажите хотя бы одно значение параметра a, при котором у уравнения $3x^2 + ax + 6 = 0$:

а) оба корня целые, но не натуральные числа;

б) оба корня рациональные, но только один из них — целое число;

в) оба корня действительные, но не рациональные числа;

г) укажите все значения a, при которых действительных корней нет.

Вычислите:

32.5. а) i^3; б) i^5; в) i^{22}; г) $i^{17} + i^{2005}$

○32.6. а) $(-i)^3$; в) $-i^{22} - (-i)^{22}$;
б) $(-2i)^5$; г) $i^3 + i^5 + i^7 + \quad + i^{2005}$.

32.7. Найдите значение многочлена $z^2 + 361$ при заданном значении переменной z:
а) $z = i$; в) $z = -11i$;
б) $z = -2i$; г) $z = -19(-i)^3$.

○32.8. Найдите значение многочлена $z^3 + 3z$ при заданном значении переменной z:
а) $z = -i$; в) $z = -3i$;
б) $z = \sqrt{2}i$; г) $z = -\sqrt{3}i$.

○32.9. Дана геометрическая прогрессия с первым членом, равным i, и знаменателем, равным $-i$.
а) Выпишите первые 7 членов этой прогрессии;
б) найдите значение 27-го члена прогрессии;
в) найдите сумму первых 2007 членов прогрессии;
г) найдите сумму членов прогрессии с 15-го по 30-й.

Для комплексных чисел z_1 и z_2 найдите их сумму $z_1 + z_2$ и разность $z_1 - z_2$, если:

32.10. а) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$; в) $z_1 = -i$, $z_2 = 1 - i$;
б) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + 2i$; г) $z_1 = i^3 + 4i^4$, $z_2 = i^2 - 3(-i)^3$.

○32.11. а) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - 2i$;
б) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 + 2i$;
в) $z_1 = i^{16}$, $z_2 = 15 + i$;
г) $z_1 = i^{17} + 18i^{19}$, $z_2 = 15i^{15} - 16(-i)^{16}$.

○32.12. Дана арифметическая прогрессия с первым членом, равным $3 - 2i$, и разностью, равной $-1 + i$.
а) Составьте формулу n-го члена прогрессии;
б) найдите значение 15-го члена прогрессии;
в) найдите сумму первых 20 членов этой прогрессии;
г) найдите сумму членов прогрессии с 10-го до 40-го.

32.13. Докажите, что:
а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \in C$, $z_2 \in C$;
б) $(a + b)z = az + bz$, $a \in R$, $b \in R$, $z \in C$;
в) $(ab)z = a(bz)$, $a \in R$, $b \in R$, $z \in C$;
г) $a(z_1 + z_2) = az_1 + az_2$, $a \in R$, $z_1 \in C$, $z_2 \in C$.

○32.14. Известно, что сумма действительной и мнимой частей комплексного числа az, $a \in R$, равна 1. Найдите a если:

а) $z = 1 + i$;
б) $z = 7 + 3i$;
в) $z = 13 - 23i$;
г) $z = 1 - i$.

○32.15. Вычислите $az_1 + bz_2$, если:

а) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $a = 2$, $b = -1$;
б) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + 2i$, $a = -4$, $b = -5$;
в) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $a = -2$, $b = 3$;
г) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2 + 3i$, $a = 12$, $b = -11$.

○32.16. Известно, что число $az_1 + z_2$, $a \in R$, является чисто мнимым. Найдите a, если:

а) $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 6 - i$;
б) $z_1 = 12 - 13i$, $z_2 = 3i$;
в) $z_1 = 8 + 3i$, $z_2 = -1 - 2i$;
г) $z_1 = i$, $z_2 = -1 + 2i$.

○32.17. Известно, что число $z_1 + az_2$, $a \in R$, является действительным. Найдите a, если:

а) $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 6 - i$;
б) $z_1 = 12 - 13i$, $z_2 = (3 + i)^2$;
в) $z_1 = 8 + 3i$, $z_2 = -1 - 2i$;
г) $z_1 = i$, $z_2 = (2 - 3i)^2$.

○32.18. Найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $z = az_1 + bz_2$, если:

а) $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$, $z = 5 + 2i$;
б) $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 3 - i$, $z = i$;
в) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z = 3 + 5i$;
г) $z_1 = 4 - i$, $z_2 = -7 + 2i$, $z = 1$.

Вычислите:

32.19. а) $i(1 + i)$;
б) $i(-3 + 2i)$;
в) $(4 - 3i)i$;
г) $i(4 - 3i)i(4 + 3i)$.

32.20. а) $(1 - 2i)(1 + i)$;
б) $(1 - i)(1 + i)$;
в) $(4 - 3i)(-4 + 3i)$;
г) $(12 + 5i)(12 - 5i)$.

32.21. а) $(1 + i)^2$;
б) $(1 - i)^3$;
в) $(2 + i)^5$;
г) $(1 + i)^3 + (1 - i)^2$.

32.22. Решите уравнение:

а) $iz = 1$;
б) $(1 + i)z = 1$;
в) $(1 + i)z = i$;
г) $(1 + i)z = 1 - i$.

○32.23. Дана геометрическая прогрессия с первым членом, равным i, и знаменателем, равным $1 - i$.

а) Найдите третий член прогрессии.
б) Найдите девятый член прогрессии.

в) На каких местах в этой прогрессии расположены чисто мнимые числа?

г) На каких местах в этой прогрессии расположены действительные числа?

Вычислите:

○32.24. а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1-i}{i}$; в) $\frac{1-i}{1+i}$; г) $\frac{1+i}{1-i}$.

○32.25. а) $i^2 + i^{-2}$; б) $i^3 + i^{-3}$; в) $i^3 + i^{-}$ г) $i-^3 + i^{-5}$.

●32.26. а) $\frac{2i^4 + 3i^5}{(2+3i)(8+i)} + \frac{(2-i)^4}{(3-4i)(8-i)} i^6$;

б) $\frac{2i^{16} - 3i^9}{(2-3i)^2} + \frac{(1+2i)^4}{(3-4i)(24-7i)} + \frac{93-36i}{325}$.

○32.27. Решите уравнение:

а) $iz = (1 - i)$;

б) $(1 + i)z = (1 - i)$;

в) $(1 + i)z = i$;

г) $(1 + i)^2 z = (1 - i)^3$.

○32.28. Найдите действительные числа a и b, для которых верно равенство $\frac{z_1}{z_2} = a\frac{z_2}{z_1} + bz_2$, если:

а) $z_1 = i$, $z_2 = 2$;

б) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$;

в) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$;

г) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + 2i$.

○32.29. Найдите значение функции $w = \frac{z^2 + 1}{z - i}$, если:

а) $z = 1 + i$;

б) $z = 1 - i$;

в) $z = 2i$;

г) $z = 2 + i$.

○32.30. а) Докажите, что число $\left(-b + i\sqrt{a}\right)^3 + \left(b - i\sqrt{a}\right)^3$ при любых действительных значениях $a \geqslant 0$ и b является действительным.

б) Вычислите $\left(2 + i\sqrt{5}\right)^3 + \left(2 - i\sqrt{5}\right)^3$

●32.31. При каких действительных значениях a число $z = (2 - ai)^3 - (3 - ai)^2 + 5 + a(1 - a^2 i)$:

а) является действительным;

б) является чисто мнимым?

○32.32. Для комплексного числа z найдите сопряженное число $\bar{z}$ и вычислите произведение $z\bar{z}$ и частное $\frac{\bar{z}}{z}$:

а) $z = i$;

б) $z = -i$;

в) $z = 3 - 7i$;

г) $z = -5 - 6i$.

○32.33. По заданному сопряженному числу $\bar{z}$ восстановите комплексное число z и вычислите произведение $z\bar{z}$ и частное $z \quad \bar{z}$.

а) $\bar{z} = 2i$;
в) $\bar{z} = 1 - i$;
б) $\bar{z} = -3i$;
г) $\bar{z} = -1 + 3i$.

○32.34. Дано: $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 4 + i$. Найдите:

а) $\dfrac{z_1}{\bar{z}_2}$; б) $\dfrac{z_1^2}{(\bar{z}_2)^2}$; в) $\dfrac{\bar{z}_1}{z_2}$; г) $\dfrac{(\bar{z}_1)^2}{z_2}$.

○32.35. Дано: $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -2 + 3i$. Найдите:

а) $\dfrac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1}$;
в) $\dfrac{z_2}{z_2 + \bar{z}_1}$;
б) $\dfrac{(z_1 + z_2)^2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}$;
г) $\dfrac{z_2 - 2\bar{z}_1}{(\bar{z}_2 + z_1)^3}$.

●32.36. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5z_1 - 3\bar{z}_2 = -9 + 5i, \\ 4\bar{z}_1 + z_2 = 3 - 4i; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 4\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 7 - 6i, \\ 3z_1 - 2z_2 = -3 - i; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7z_1 + 2\bar{z}_2 = 7 - 4i, \\ 3\bar{z}_1 - z_2 = 3 - 2i; \end{cases}$
г) $\begin{cases} i\bar{z}_1 + 2z_2 = 3 + 8i, \\ 2iz_1 - \bar{z}_2 = 7i. \end{cases}$

○32.37. Среди корней уравнения $z^2 + (\bar{z})^2 = 8$ укажите все корни:

а) с нулевой мнимой частью;
б) с мнимой частью, равной 1;
в) у которых действительная часть равна мнимой части;
г) у которых действительная часть в три раза больше положительной мнимой части.

●32.38. Среди корней уравнения $\bar{z} + 1 = \dfrac{1}{z + 1}$ найдите корень:

а) у которого действительная часть наименьшая;
б) у которого мнимая часть наименьшая;
в) который ближе всего расположен к началу координат;
г) который ближе всего расположен к числу i.

§ 33. Комплексные числа и координатная плоскость

Для комплексного числа $z = x + iy$, его действительной части x и его мнимой части y используют следующие обозначения: $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$ (от французских слов *reelle* — действительный, *imaginaire* — мнимый).

33.1. а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = -2 + 5i$, $z_4 = -9 + i$, $z_5 = -3 - 2i$.

б) Укажите те точки, которые лежат левее оси ординат. Что можно сказать о знаке действительной части каждой из таких точек?

в) Укажите те точки, которые лежат выше оси абсцисс. Что можно сказать о знаке мнимой части каждой из таких точек?

г) Соедините данные точки последовательно отрезками. Сколько получилось точек пересечения замкнутой ломаной с осями координат? Запишите комплексные числа, которым соответствуют эти точки.

33.2. а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_1 = -5 - 4i$, $z_2 = 1 + 8i$, $z_3 = -2 - 4i$, $z_4 = 8 + i$, $z_5 = -1 - 8i$.

б) Соедините заданные точки последовательно отрезками. Сколько получилось точек пересечения с осями координат? Запишите комплексные числа, которым соответствуют эти точки.

33.3. а) Отметьте на координатной плоскости точки $\overline{z}_n$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$), если $z_1 = -5 - 3i$, $z_2 = 1 + 6i$, $z_3 = -3 - 6i$, $z_4 = 9 + 2i$, $z_5 = 1 - 6i$.

б) Соедините отмеченные точки последовательно отрезками. Сколько чисто мнимых чисел имеется на полученной ломаной? Назовите их.

в) Сколько на этой ломаной лежит чисел, для которых $\operatorname{Re} z = -3$? Назовите их.

г) Сколько на ломаной чисел, для которых $\operatorname{Im} z = 3$? Назовите их.

Изобразите на координатной плоскости множество всех комплексных чисел z, удовлетворяющих заданному условию:

о33.4. а) Действительная часть равна -2;

б) мнимая часть равна 3 или 4;

в) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$;

г) $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$.

о33.5. а) $\operatorname{Re} z = 4$ или $\operatorname{Im} z = 4$;

б) $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|$;

в) $\operatorname{Re} z = 5$ или $\operatorname{Im} z = 4$;

г) $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$ или $(\operatorname{Re} z)^2 = \operatorname{Im} z$.

а) Действительная часть на 4 больше мнимой части;
б) сумма действительной и мнимой частей равна 4;
в) сумма квадратов действительной и мнимой частей равна 4;
г) квадрат суммы действительной и мнимой частей равен 4.

а) $|\mathrm{Re}\, z| - |\mathrm{Im}\, z| = 1$; в) $(\mathrm{Re}\, z)^2 = \mathrm{Im}\, z - 1$;
б) $(\mathrm{Re}\, z)^2 = \mathrm{Im}\, z + 1$; г) $(\mathrm{Re}\, z)(\mathrm{Im}\, z) = 1$.

а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_0 = 1$, $z_1 \quad 1 + i$, $z_2 = (1 + i)^2$, $z_3 = (1 + i)^3, \dots, z_7 = (1 + i)^7$.
б) Чему равна величина угла: $\angle z_0Oz_1$, $\angle z_1Oz_2$, , $\angle z_6Oz_7$, $\angle z_7Oz_0$?
в) Перечислите все пары точек, лежащие по разные стороны от оси абсцисс. Сколько таких пар?
г) Запишите все числа, у которых произведение действительной и мнимой частей отрицательно. Сколько таких чисел?

а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = z_1^2$, $z_3 = z_1^3$, $z_4 = z_1^4$, $z_5 = z_1^5$.
б) Чему равна величина угла: $\angle z_0Oz_1$, $\angle z_1Oz_2, \dots, \angle z_5Oz_0$?
в) На каком расстоянии от начала координат находятся все эти точки?
г) Перечислите все пары точек, соответствующих сопряженным друг к другу числам. Сколько таких пар?

Изобразите на координатной плоскости множество всех комплексных чисел z, у которых:

а) Действительная часть больше мнимой части;
б) мнимая часть не меньше действительной части;
в) мнимая часть больше 2, а действительная часть не больше 3;
г) мнимая часть не меньше 2, а действительная часть меньше 3.

а) $\mathrm{Im}\, z \geqslant 2$ или $\mathrm{Re}\, z < 3$;
б) $\mathrm{Im}\, z > 2$ или $\mathrm{Re}\, z \leqslant 3$;
в) $\mathrm{Re}\, z > (\mathrm{Im}\, z)^2$ и $(\mathrm{Re}\, z)^2 > \mathrm{Im}\, z$;
г) $\mathrm{Im}\, z \geqslant 2\,\mathrm{Re}\, z$ или $\mathrm{Re}\, z < 3\,\mathrm{Im}\, z$.

○33.12. а) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \geqslant 0$;

б) $1 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2$;

в) $1 < (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 < 16$;

г) $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 < 1$ или $16 < (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

33.13. Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = -1 + 3i$, а также числа:

а) $3z_1$; б) $-2z_2$; в) $z_1 + z_2$; г) $3z_1 - 2z_2$.

33.14. Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -5 + 2i$, а также числа:

а) $\overline{z_1}$; б) $-\overline{3z_2}$; в) $\overline{z_1 + z_2}$; г) $\overline{z_1 - 3z_2}$.

○33.15. а) Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = -3 + i$ и $z_2 = 5 + 2i$.

б) Найдите действительный коэффициент a, при котором $z_1 + az_2$ — чисто мнимое число.

в) По правилу параллелограмма постройте сумму чисел z_1 и az_2 из пункта б).

г) Найдите действительный коэффициент a, при котором $z_1 + az_2$ — действительное число; по правилу параллелограмма постройте сумму чисел z_1 и az_2.

○33.16. а) Изобразите на координатной плоскости числа $z_1 = -3 + i$ и $z_2 = 5 + 2i$.

б) Найдите действительный коэффициент a, при котором $az_1 + z_2$ — чисто мнимое число.

в) По правилу параллелограмма постройте сумму чисел az_1 и z_2 из пункта б).

г) Найдите действительный коэффициент a, при котором $az_1 + z_2$ — действительное число; по правилу параллелограмма постройте сумму чисел az_1 и z_2.

●33.17. а) Для $n = 1, 2, 3, 4$ изобразите на координатной плоскости точки $z_n = (2n - 1) + (5 - n)i$;

б) докажите, что все эти точки лежат на одной прямой l; составьте уравнение прямой;

в) укажите число, лежащее на прямой l, у которого $\operatorname{Re} z = -5$;

г) укажите число, лежащее на прямой l, у которого $\operatorname{Im} z = 8$.

●33.18. а) Для n 1, 2, 3, 4, 5, 6 изобразите на координатной плоскости точки $z_n = (n - 1) + (n^2 - 5n + 6)i$.

б) Докажите, что эти точки лежат на одной параболе; составьте уравнение параболы.

в) Найдите действительную часть суммы $z_1 + z_2 + \quad + z_6$.

г) Укажите номер n, начиная с которого мнимая часть числа z_n будет больше 100.

●**33.19.** а) Для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ изобразите на координатной плоскости точки $z_n = (n + 1) + \frac{3}{n}i$.

б) Докажите, что все эти точки лежат на одной гиперболе; составьте уравнение гиперболы.

в) Укажите точку, наиболее близкую к оси абсцисс.

г) Укажите точку, наиболее близкую к началу координат.

Решите уравнение:

○**33.20.** а) $z\,\mathrm{Re}\,z = 1$; в) $z\,(\mathrm{Re}\,z)^2 = 1$;
б) $z\,\mathrm{Re}\,z = -1$; г) $z\,(\mathrm{Re}\,z)^2 = -1$.

○**33.21.** а) $z\,\mathrm{Im}\,z = i$; в) $z\,(\mathrm{Im}\,z)^2 = i$;
б) $z\,\mathrm{Im}\,z = -i$; г) $z\,(\mathrm{Im}\,z)^2 = -i$.

○**33.22.** а) $z\,\mathrm{Re}\,z = \bar{z}\,\mathrm{Im}\,\bar{z}$; в) $z\,\mathrm{Im}\,\bar{z} \quad \bar{z}\,\mathrm{Re}\,z$;
б) $z\,\mathrm{Re}\,\bar{z} = \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z$; г) $z\,\mathrm{Re}\,z = \bar{z}\,\mathrm{Re}\,\bar{z}$.

○**33.23.** а) $z\,\mathrm{Re}\,(z - 4) = i - 4$; в) $\bar{z}\,(\mathrm{Re}\,z - 6) = 21i - 9$;
б) $z\,\mathrm{Im}\,(z + 2i) = 7 - i$; г) $\bar{z}\,(\mathrm{Im}\,z + 4) = 10 + 4i$.

§ 34. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Найдите модуль комплексного числа:

34.1. а) $6 - 8i$; в) $i(2 + i)$;
б) $20 + 21i$; г) $(3 - i)(2 + i)$.

34.2. а) $\frac{2}{i}$; б) $-\frac{3}{i}$; в) $\frac{i + 1}{i}$; г) $\frac{i}{i + 1}$.

○**34.3.** Для комплексных чисел $z_1 = 12 - 5i$ и $z_2 = 3 + 4i$:

а) найдите $|z_1|$ и $|z_2|$;

б) вычислите $z_1 z_2$ и проверьте равенство $|z_1 z_2| = |z_1| \quad |z_2|$;

в) вычислите $\frac{1}{z_1}$ и проверьте равенство $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|}$;

г) вычислите $\frac{z_1}{z_2}$ и проверьте равенство $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

34.4. Для комплексных чисел $z_1 = 3 - i$ и $z_2 = 1 + 2i$:

а) найдите $|\bar{z}_1|$ и $|\bar{z}_2|$ и проверьте равенства $|\bar{z}_1| \quad |z_1|$ и $|\bar{z}_2| = |z_2|$;

б) проверьте неравенство $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$;

в) вычислите $\overline{z_1 z_2}$ и проверьте равенство $|\overline{z_1 z_2}| = |\overline{z_1}| \ |\overline{z_2}|$;

г) проверьте неравенство $|z_1 - z_2| > |z_1| - |z_2|$.

о34.5. При каком положительном значении параметра a модуль данного числа равен 10:

а) $a + 8i$; в) $(a + 1) + (a - 1)i$;

б) $2a + ai$; г) $a + \frac{50i}{a}$?

Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих заданному условию:

34.6. а) $|z| = 3$; в) $|z + 2| = 3$;

б) $|z - 1| = 3$; г) $|z + 3i| = 3$.

о34.7. а) $|z - i| = 1$; в) $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$;

б) $|z + 2i| = 2$; г) $|z + 4 + 3i| = 5$.

о34.8. Про комплексное число z известно, что $\mathrm{Re}\, z = 3$ или $\mathrm{Re}\, z = 6$. Сколько имеется таких чисел, если, кроме того, известно, что:

а) $|z| = 3$; б) $|z| = 4$; в) $|z| = 6$; г) $|z| = 10$?

о34.9. Про комплексное число z известно, что $\mathrm{Re}\, z = 3$ или $\mathrm{Im}\, z = 4$. Сколько имеется таких чисел, если, кроме того, известно, что:

а) $|z| = 3$; б) $|z| = 4$; в) $|z| = 5$; г) $|z| = 10$?

о34.10. Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих уравнению:

а) $|z| = |z - 1|$; в) $|z - 1| = |z - i|$;

б) $|z - 1| = |z - 3|$; г) $|z + 3i| = |z + 4|$.

о34.11. Число z задано в тригонометрической форме. Укажите его стандартную тригонометрическую форму:

а) $z = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$;

б) $z = \cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4}$;

в) $z = \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4}$;

г) $z = \cos \frac{101\pi}{4} + i \sin \frac{101\pi}{4}$.

Число z задано в тригонометрической форме. Укажите его стандартную тригонометрическую форму:

○34.12. а) $z = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}$;

б) $z = \cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$;

в) $z = \cos\frac{99\pi}{4} + i\sin\frac{99\pi}{4}$;

г) $z = \cos\left(-\frac{103\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{103\pi}{6}\right)$.

○34.13. а) $z = \cos(13{,}2\pi) + i\sin(13{,}2\pi)$;

б) $z = \cos(-12{,}3\pi) + i\sin(-12{,}3\pi)$;

в) $z = \cos(17\arccos(-1)) + i\sin(17\arccos(-1))$;

г) $z = \cos(2\arccos(-0{,}5)) + i\sin(2\arccos(-0{,}5))$.

Найдите аргумент комплексного числа:

34.14. а) $5i$; б) $5{,}55$; в) $-5{,}5i$; г) $-5{,}555$.

○34.15. а) $2 - 2i$; в) $-3 + 3i$;

б) $\left(-\sqrt{3} + i\right)^2$ г) $(-3 + 3i)^2$.

Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел, аргумент которых равен:

34.16. а) $\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{3\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{3\pi}{4}$ или $\frac{\pi}{4}$.

34.17. а) $\frac{2\pi}{3}$; в) $-\frac{5\pi}{6}$;

б) $-\frac{\pi}{6}$ или $\frac{5\pi}{6}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{3}$.

○34.18. Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел, у которых аргумент:

а) положителен; в) больше чем $\frac{\pi}{2}$;

б) отрицателен; г) меньше чем $\frac{\pi}{4}$.

○34.19. Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел, у которых аргумент:

а) больше чем $\frac{\pi}{2}$, но меньше чем $\frac{3\pi}{4}$;

б) больше чем $-\frac{3\pi}{4}$, но меньше чем $\frac{\pi}{6}$;

в) больше чем $\frac{3\pi}{4}$, или меньше чем $\frac{\pi}{6}$;

г) отличается от $-\frac{2\pi}{3}$ не более чем на $\frac{\pi}{6}$.

○34.20. Изобразите на комплексной плоскости множество всех тех чисел z, у которых:

а) $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ и $|z| = 2$;

б) $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ и $3 < |z| < 5$;

в) $-\frac{3\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{6}$ и $|z| = 8$;

г) $-\frac{5\pi}{6} < \arg(z) < \frac{2\pi}{3}$ или $1 < |z| < 2$.

Запишите комплексное число в стандартной тригонометрической форме:

○34.21. а) 5; б) $3i$; в) -8; г) $-0{,}5i$.

○34.22. а) $4 + 4i$; б) $1 - i$; в) $-2 + 2i$; г) $-2 - 2i$.

34.23. а) $\sqrt{3} + i$; б) $-\sqrt{3} + i$; в) $3\sqrt{3} - 3i$; г) $-2\sqrt{3} - 2i$.

○34.24. а) $4 - 4\sqrt{3}i$; б) $1 + \sqrt{3}i$; в) $-2 - 2\sqrt{3}i$; г) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

○34.25. а) $3 - 4i$; б) $-5 + 12i$; в) $6 + 8i$; г) $-15 - 8i$.

●34.26. а) $\sin 35° - i\cos 35°$; б) $\sin(-23°) + i\cos(-23°)$; в) $-\sin 40° + i\cos 40°$; г) $\sin(-20°) - i\sin(-70°)$.

●34.27. а) $1 - \cos 100° + i\sin 100°$; б) $\sin\frac{4\pi}{7} + i\left(1 - \cos\frac{4\pi}{7}\right)$; в) $\sin\frac{6\pi}{11} + i\left(1 - \cos\frac{6\pi}{11}\right)$; г) $1 - \cos 250° + i\sin 610°$.

○34.28. Представьте в алгебраической форме комплексное число:

а) $5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

б) $\dfrac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$;

в) $5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

г) $\dfrac{1}{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$.

Выполните действия, используя правила умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме:

○34.29. а) $6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\ \ \frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

б) $(-5 - 5i)\ \ \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $0{,}3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\ \ 20\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

г) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\ \ (2 + 2\sqrt{3}i)$.

○34.30. а) $8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7}{12}\right)\ \ 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

б) $(10 + 10i)\ \ \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;

в) $12\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) : 0{,}3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

г) $16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) : (4 - 4\sqrt{3}i)$.

34.31. а) Зная, что $z = i$, изобразите на комплексной плоскости числа z, z^2, z^3, z^9, z^{99} и найдите их аргументы.

б) Зная, что $z = -i$, изобразите на комплексной плоскости числа z, z^5, z^{15}, z^{-25}, z^{-1001} и найдите их аргументы.

34.32. а) Зная, что $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, найдите z^2, запишите числа z и z^2 в тригонометрической форме, сравните модули и аргументы этих чисел, изобразите числа на комплексной плоскости.

б) Зная, что $z = 2 - 2\sqrt{3}i$, найдите z^2, запишите числа z и z^2 в тригонометрической форме, сравните модули и аргументы этих чисел, изобразите числа на комплексной плоскости.

Зная, что $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, изобразите на комплексной плоскости числа z_1, z_2, z и найдите аргумент указанного числа z:

○34.33. а) $z = z_1z_2$; в) $z = z_1(z_2)^3$;

б) $z = (z_1)^2z_2$; г) $z = (z_1)^5(z_2)^3$.

○34.34. а) $z = \frac{z_1}{z_2}$; б) $z = \frac{z_2}{z_1}$; в) $z = \frac{z_1^2}{z_2}$; г) $z = \frac{z_1^3}{z_2^5}$.

Зная, что $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, изобразите на комплексной плоскости числа z_1, z_2, z и найдите аргумент указанного числа z:

●34.35. а) $z = z_1z_2$; в) $z = z_1(z_2)^5$;

б) $z = (z_1)^2z_2$; г) $z = (z_1)^{11}(z_2)^{10}$.

●34.36. а) $z = \frac{z_1}{z_2}$; б) $z = z_1^3$; в) $z = \frac{z_1^4}{z_2^3}$; г) $z = \frac{z_1^{31}}{z_2^{30}}$.

○34.37. Каждое комплексное число, действительная часть которого равна -4, умножили на z. Изобразите на комплексной плоскости полученное множество чисел, если:

а) $z = i$; б) $z = -3i$; в) $z = 1 - \sqrt{3}i$; г) $z = 3 - i$.

○34.38. Зная, что $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 4 + 3i$, $z_3 = -1 + 7i$, изобразите на комплексной плоскости треугольник с вершинами zz_1, zz_2, zz_3, если:

а) $z = i$; в) $z = -i$;

б) $z = 2i$; г) $z = 1 - i$.

○34.39. Зная, что $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 4 + 3i$, $z_3 = -2 + 5i$, изобразите на комплексной плоскости треугольник с вершинами $\frac{z_1}{z}$, $\frac{z_2}{z}$, $\frac{z_3}{z}$, если:

а) $z = i$; б) $z = 2i$; в) $z = -i$; г) $z = 1 - i$.

●34.40. Для числа $z = \cos(0{,}11\pi) + i\sin(0{,}11\pi)$ укажите наименьшее натуральное число n, при котором:

а) $\arg(z^n) > \frac{\pi}{4}$; в) $\arg(z^n) > \frac{5\pi}{6}$;

б) $\arg(z^n) > \frac{\pi}{2}$; г) $\arg(z^n) < 0$.

●34.41. а) Среди корней z уравнения $\sqrt{3}(z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 4i^9$ найдите число, аргумент которого равен $\frac{\pi}{6}$.

б) Среди корней z уравнения $\mathrm{Re}\,z \quad \mathrm{Im}\,\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{i^6}$ найдите число, аргумент которого равен $\frac{\pi}{3}$.

●34.42. а) Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z, удовлетворяющих условию $|zi \quad 3i + 4| \leqslant \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$. Чему равно наибольшее значение $|z|$?

б) Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z, удовлетворяющих условию $|zi \quad 3 \quad 4i| \leqslant \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$. Чему равно наименьшее значение $|z|$?

§ 35. Комплексные числа и квадратные уравнения

○35.1. Найдите все действительные значения параметра a, при которых уравнение $z^2 - 4x + a = 0$:
а) имеет только один корень;
б) имеет два действительных корня;
в) не имеет действительных корней;
г) имеет два действительных корня разных знаков.

○35.2. Найдите все действительные значения параметра a, при которых уравнение $x^2 + ax + 9 = 0$:
а) имеет хотя бы один действительный корень;
б) не имеет действительных корней;
в) имеет хотя бы один отрицательный корень;
г) имеет два действительных корня, больших, чем 1.

○35.3. Найдите все действительные значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 8x + 16 = 0$:
а) имеет только один корень;
б) имеет действительный положительный корень;
в) имеет два действительных корня разных знаков;
г) имеет два действительных корня, сумма квадратов которых равна 1.

○35.4. Решите уравнение:
а) $z^2 + 144 = 0$;
в) $z^2 + 441 = 0$;
б) $\frac{5z^2 - 29}{z + 3\sqrt{5}} = z - \sqrt{45}$;
г) $\frac{3z^2 + 2004}{z - \sqrt{44}} = z + 2\sqrt{11}$.

Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

○35.5. а) i и $-i$; в) $7i$ и $-7i$;
б) $7 + 2i$ и $7 - 2i$; г) $1 + i$ и $1 - i$.

○35.6. а) $2i$ и $\frac{2}{i}$; в) $-2^{-3}i$ и $\frac{i}{8}$;
б) $1 + 3i$ и $\frac{10}{1 + 3i}$; г) $(2^9 + 2^7 + 2^3)i$ и $(3^4 - 3^6)i$.

Решите уравнение:

35.7. а) $z^2 - 2z + 2 = 0$; в) $z^2 - 6z + 25 = 0$;
б) $z^2 + 4z + 5 = 0$; г) $z^2 + 10z + 61 = 0$.

○35.8. а) $z^2 - z + 2,5 = 0$; в) $z^2 - 5z + 6,5 = 0$;
б) $z^2 + 3z + 8,5 = 0$; г) $z^2 + 11z + 36,5 = 0$.

○35.9. При каких действительных значениях параметра a:
а) уравнение $z^2 - 2z + a = 0$ имеет корень $1 + i$;
б) уравнение $z^2 + 6z + a = 0$ имеет корень $i - 3$;
в) уравнение $z^2 - 8z + (a^2 + 9) = 0$ имеет корень $4 - 3i$;
г) уравнение $z^2 + 10z + (a^2 + 4a + 5) = 0$ имеет корень $-5 + i$?

○35.10. При каких действительных значениях параметра a:
а) уравнение $z^2 + az + 5 = 0$ имеет корень $2 + i$;
б) уравнение $z^2 + az + 13 = 0$ имеет корень $-2 - 3i$;
в) уравнение $z^2 + (1 - a^2)z + 25 = 0$ имеет корень $4 + 3i$;
г) уравнение $z^2 + (a^2 + 2a + 2)z + 41 = 0$ имеет корень $-5 + 4i$?

○35.11. Вычислите $\sqrt{a + bi}$, решив уравнение $(x + yi)^2 = a + bi$:

а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt{-4}$; в) $\sqrt{9i}$; г) $\sqrt{-25i}$.

○35.12. Вычислите $\sqrt{a + bi}$, решив уравнение $(x + yi)^2 = a + bi$ или использовав формулу

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\ \frac{b}{|b|}\ \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right):$$

а) $\sqrt{3 - 4i}$; в) $\sqrt{4 - 3i}$;
б) $\sqrt{3 + 4i}$; г) $\sqrt{12 + 5i}$.

○35.13. Вычислите:

а) $\sqrt{15 + 8i}$; в) $\sqrt{24 - 7i}$;

б) $\sqrt{15 - 8i}$; г) $\sqrt{40 + 9i}$.

35.14. Изобразите на комплексной плоскости число z и множество $\sqrt{z}$, если:

а) $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$; в) $|z| = 9$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$;

б) $|z| = 4$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$; г) $|z| = 0{,}25$, $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$.

35.15. Изобразите на комплексной плоскости число z и множество $\sqrt{z}$, если:

а) $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$; в) $|z| = 9$, $\arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$;

б) $|z| = 4$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$; г) $|z| = 0{,}25$, $\arg(z) = -\frac{9\pi}{10}$.

●35.16. Изобразите на комплексной плоскости множество $\sqrt{z}$, если:

а) $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{2}$; в) $|z| = 1$, $-\frac{2\pi}{3} \leqslant \arg(z) \leqslant 0$;

б) $|z| = 1$, $0 < \arg(z) < \pi$; г) $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \pi$.

○35.17. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) $1 + i$ и $2 - i$; в) $1 + 2i$ и $7 - 2i$;

б) $2 + i$ и $3 - 2i$; г) $5 + 4i$ и $4 - 5i$.

○35.18. Решите уравнение:

а) $z^2 - 2iz = 0$; в) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$;

б) $z^2 + 4iz = 0$; г) $z^2 - 8z + 11 + 12i = 0$.

○35.19. Найдите те значения параметра a, при которых:

а) уравнение $z^2 - 2z + a = 0$ имеет корень $z = i$;

б) уравнение $z^2 - 8iz + a = 0$ имеет корень $3 - i$;

в) уравнение $z^2 + 6z + a = 0$ имеет корень –

г) уравнение $z^2 + 10iz + a = 0$ имеет корень $-10 + i$.

○35.20. Найдите те значения параметра a, при которых:

а) уравнение $z^2 + az + 5 = 0$ имеет корень i;

б) уравнение $z^2 + az + 13 = 0$ имеет корень $-2i$;

в) уравнение $z^2 + az + 24i = 0$ имеет корень $1 + i$;

г) уравнение $z^2 + az + 1 + i = 0$ имеет корень $-3 + 2i$.

§ 36. Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа

36.1. Пусть $z = 2(\cos 0{,}2\pi + i\sin 0{,}2\pi)$. Верно ли, что:

а) z^4 принадлежит первой координатной четверти;

б) z^4 принадлежит второй координатной четверти, а его модуль меньше $\sqrt{300}$;

в) z^8 принадлежит третьей координатной четверти;

г) z^8 принадлежит четвертой координатной четверти, а его модуль больше 100?

○36.2. Пусть $z = 3(\cos 0{,}3\pi + i\sin 0{,}3\pi)$. Верно ли, что:

а) z^6 принадлежит первой координатной четверти;

б) z^6 принадлежит четвертой координатной четверти, а его модуль больше 1000;

в) z^6 принадлежит четвертой координатной четверти, а его модуль меньше 750;

г) z^{16} принадлежит второй координатной четверти?

○36.3. Пусть $z = \cos 0{,}19\pi + i\sin 0{,}19\pi$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены выше оси абсцисс;

б) расположены правее оси ординат;

в) расположены в первой координатной четверти;

г) расположены во второй или в четвертой координатной четверти?

○36.4. Пусть $z = 2(\cos 0{,}21\pi + i\sin 0{,}21\pi)$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены во второй координатной четверти;

б) расположены внутри круга радиуса 500 с центром в начале координат;

в) расположены в первой координатной четверти;

г) расположены правее оси ординат и вне круга радиуса 500 с центром в начале координат?

○36.5. Пусть $z = \cos 0{,}17\pi + i \sin 0{,}17\pi$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены выше оси абсцисс;

б) расположены правее оси ординат;

в) расположены выше биссектрисы первой и третьей координатной четвертей;

г) расположены ниже биссектрисы второй и четвертой координатной четвертей?

●36.6. Пусть $z = 0{,}5(\cos 0{,}23\pi + i \sin 0{,}23\pi)$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \ldots, z^9, z^{10}\}$:

а) расположены во второй координатной четверти;

б) расположены вне круга радиуса 0,2 с центром в начале координат;

в) расположены в первой координатной четверти;

г) расположены правее оси ординат и внутри круга радиуса 0,001 с центром в начале координат?

Вычислите:

36.7. а) $(\cos 15° + i \sin 15°)^8$; б) $(\cos 15° + i \sin 15°)^{18}$; в) $(\cos 75° + i \sin 75°)^{10}$; г) $(\cos 75° + i \sin 75°)^{100}$.

○36.8. а) $(1 + i)^4$; б) $(1 + i)^6$; в) $(1 - i)^{10}$; г) $(1 - i)^{20}$.

○36.9. а) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^3$; б) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^5$ в) $\left(\sqrt{3} + i\right)^7$; г) $\left(\sqrt{3} - i\right)^9$

○36.10. а) $(\cos 10° + i \sin 10°)^{-6}$; б) $(\cos 10° - i \sin 10°)^{-3}$; в) $(\cos 10° + i \sin 10°)^{-12}$; г) $(\cos 80° - i \sin 80°)^{-18}$.

○36.11. а) $(1 + i)^{-4}$; б) $(1 + i)^{-6}$; в) $(1 - i)^{10}$; г) $(1 - i)^{-20}$.

○36.12. а) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^{-3}$; б) $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^{-5}$ в) $\left(\sqrt{3} + i\right)^{-7}$; г) $\left(\sqrt{3} - i\right)^{-9}$

●36.13. а) $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^7 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)^7$

б) $\dfrac{16i\left(\sin \frac{\pi}{3} - i \cos \frac{\pi}{3}\right)^2}{\left(\sqrt{3} + i\right)^4}$;

в) $\left(\sqrt{3} + i\right)^5 + \left(\sqrt{3} - i\right)^5$

г) $\dfrac{32i\left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}\right)^2}{\left(\sqrt{3} - i\right)^5}$.

●36.14. а) Вычислите z^{12}, если $z = 2\cos\frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{3\pi}{4} + i + i\cos\frac{3\pi}{4}\right)$;

б) вычислите z^{30}, если $z = 2\sin\frac{\pi}{12}\left(1 - \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

○**36.15.** Пусть $\{z, z^2, z^3, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots\}$ — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}2\pi + i \sin 0{,}2\pi$.

а) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит второй координатной четверти.

б) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит четвертой координатной четверти.

в) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором $z^n = 1$.

г) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

○**36.16.** Пусть $\{z, z^2, z^3, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots\}$ — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}03\pi + i \sin 0{,}03\pi$.

а) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит второй координатной четверти.

б) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит третьей координатной четверти.

в) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором $z^n = -1$.

г) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

●**36.17.** Пусть $\{z, z^2, z^3, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots\}$ — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}1\pi - i \sin 0{,}1\pi$.

а) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит третьей координатной четверти (не на координатных осях).

б) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит второй координатной четверти (не на координатных осях).

в) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

г) Найдите сумму этих различных чисел.

●**36.18.** Пусть $\{z, z^2, z^3, \quad, z^n, z^{n+1}, \dots\}$ — бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $z = \cos 0{,}01\pi - i \sin 0{,}01\pi$.

а) Укажите наименьшее натуральное значение n, при котором z^n принадлежит второй координатной четверти.

б) Сколько в этой прогрессии различных чисел?

в) Сколько из этих чисел лежат на осях координат?

г) Найдите сумму этих различных чисел.

●**36.19.** Пусть $z = 1 + i$. Какие числа из множества $\{z, z^2, z^3, \dots, z^{11}, z^{12}\}$:

а) лежат на оси абсцисс;

б) правее прямой $x = 9$;

в) лежат левее оси ординат;

г) выше прямой $y = 2$?

○**36.20.** Вычислите и изобразите на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[3]{-27}$; в) $\sqrt[3]{125i}$; г) $\sqrt[3]{-512i}$.

36.21. Произвольно отметьте на комплексной плоскости число z_0, у которого $|z_0| = 1$ и $\frac{\pi}{2} < \arg(z_0) < \pi$.

а) Изобразите корень уравнения $z^3 = z_0$, принадлежащий первой координатной четверти.

б) Изобразите корень уравнения $z^3 = z_0$, принадлежащий четвертой координатной четверти.

в) Изобразите множество $\sqrt[3]{z_0}$.

г) Объясните, почему у уравнения $z^3 = z_0$ нет корней, расположенных в третьей четверти.

36.22. Произвольно отметьте на комплексной плоскости число z_0, у которого $|z_0| = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < \arg(z_0) < 0$.

а) Изобразите корень уравнения $z^3 = z_0$, принадлежащий четвертой координатной четверти.

б) Изобразите множество $\sqrt[3]{z_0}$.

в) Объясните, почему у уравнения $z^3 = z_0$ нет корней, расположенных в первой четверти.

г) Найдите площадь треугольника с вершинами в точках из пункта б).

●**36.23.** Решите уравнение:

а) $z^6 + (8 - i)z^3 + (1 + i)^6 = 0$;

б) $z^4 + (2 - 4i)z^2 - (1 - i)^6 = 0$.

●**36.24.** а) При каком действительном значении a выражение $\frac{a(\sin 75^\circ + i\cos 75^\circ)^{12}}{i(a + 2i)^2 - (14 - 3ai) - 2}$ является действительным числом?

б) При каком действительном значении b выражение $\frac{b : (\cos 22^\circ 30' - i\sin 22^\circ 30')^{16}}{i(3i - b)^2 - (3 - 8bi) - 3}$ является действительным числом?

ГЛАВА 7 Производная

§ 37. Числовые последовательности

37.1. Являются ли числовыми последовательностями следующие функции:

а) $y = 3x^2 + 5$, $x \in Z$; в) $y = 7 - x^2$, $x \in Q$;

б) $y = \sin x$, $x \in [0; 2\pi]$; г) $y = \cos \frac{x}{2}$, $x \in N$?

37.2. Приведите примеры последовательностей, заданных:

а) с помощью формулы n-го члена;

б) словесно;

в) рекуррентным способом.

37.3. Задайте последовательность аналитически и найдите ее первые пять членов, если:

а) каждому натуральному числу ставится в соответствие противоположное ему число;

б) каждому натуральному числу ставится в соответствие квадратный корень из этого числа;

в) каждому натуральному числу ставится в соответствие число -5;

г) каждому натуральному числу ставится в соответствие половина его квадрата.

По заданной формуле n-го члена вычислите первые пять членов последовательности (y_n):

37.4. а) $y_n = 2n^2 - n$; в) $y_n = \dfrac{3n - 1}{2n}$;

б) $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$; г) $y_n = \dfrac{(-1)^n + 2}{3n - 2}$.

37.5. а) $y_n = 3 \cos \dfrac{2\pi}{n}$; в) $y_n = 1 - \cos^2 \dfrac{\pi}{n}$;

б) $y_n = \operatorname{tg} \left((-1)^n \dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $y_n = \sin n\pi - \cos n\pi$.

По заданной формуле n-го члена вычислите первые пять членов последовательности (y_n):

37.6. а) $y_n = \sin \frac{n\pi}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}(2n + 1)$;

б) $y_n = \cos \frac{n\pi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}(2n + 1)$;

в) $y_n = n \sin \frac{n\pi}{2} + n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$;

г) $y_n = \sin \frac{n\pi}{4} - n \cos \frac{n\pi}{4}$.

37.7. а) $y_n = \frac{1\ 2\ 3\ \ldots\ n}{n^3 + 1}$; б) $y_n = \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}\ \ldots\ \frac{(2n - 1)}{2n}$.

37.8. Выпишите первые четыре члена последовательности десятичных приближений числа $\sqrt{2}$:

а) по недостатку; б) по избытку.

Выпишите первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:

37.9. а) $x_1 = 2,\ x_n = 5 - x_{n-1}$; в) $x_1 = -1,\ x_n = 2 + x_{n-}$

б) $x_1 = 2,\ x_n = x_{n-1} + 10$; г) $x_1 = 4,\ x_n = x_{n-1} - 3$.

37.10. а) $x_1 = 2,\ x_n = nx_{n-}$ в) $x_1 = -2,\ x_n = -x_{n-}$

б) $x_1 = -5,\ x_n = -0{,}5\ \ x_{n-}$ г) $x_1 = 1,\ x_n = \frac{x_{n-1}}{0{,}1}$.

37.11. а) Выпишите первые шесть членов последовательности (x_n), у которой $x_1 = 5$, $x_2 = -3$ и каждый член, начиная с третьего, равен полусумме двух предыдущих членов. Составьте рекуррентное задание последовательности.

б) Выпишите первые шесть членов последовательности (y_n), у которой $y_1 = -1$, $y_2 = 1$ и каждый член, начиная с третьего, равен утроенной сумме двух предыдущих членов. Составьте рекуррентное задание последовательности.

○37.12. Определите значения первых пяти членов последовательности и составьте формулу ее n-го члена, если график последовательности представлен:

а) на рис. 66; в) на рис. 68;

б) на рис. 67; г) на рис. 69.

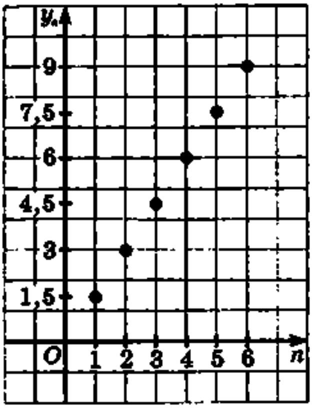

Рис. 66

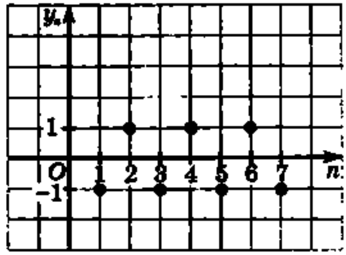

Рис. 67

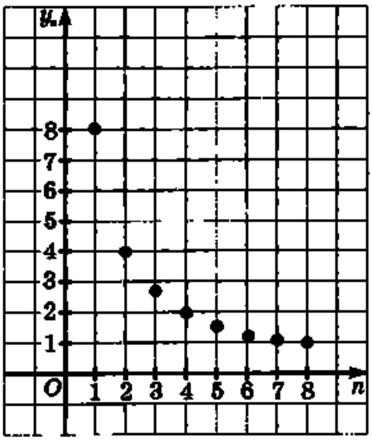

Рис. 68

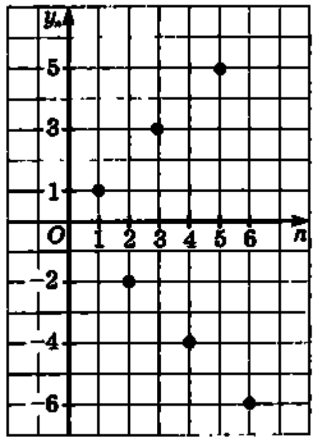

Рис. 69

Постройте график функции:

○37.13. а) $y = (x + 1)^{-2}$, $x \in N$; в) $y = -\dfrac{18}{x + 2}$, $x \in N$;

б) $y = 3x - x^2$, $x \in N$; г) $y = \sqrt{x + 3}$, $x \in N$.

○37.14. а) $y = 2 - x$, $x \in N$; в) $y = \dfrac{x + 5}{2}$, $x \in N$;

б) $y = 3x - x^2$, $x \in N$; г) $y = x^2 - 4x$, $x \in N$.

○37.15. а) $y = \sin \dfrac{\pi}{6}x$, $x \in N$; в) $y = \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3}x$, $x \in N$;

б) $y = \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{4}(2x + 1)$, $x \in N$; г) $y = \cos \pi x$, $x \in N$.

Постройте график последовательности:

○37.16. а) $y_n = 10 - n^3$; в) $y_n = n^3 - 8$;

б) $y_n = (-1)^n \sqrt{9n}$; г) $y_n = 4 - \sqrt{4n}$.

○37.17. а) $y_n = 2 \sin \frac{\pi}{6} n$; б) $y_n = (-1)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}(2n - 1)$.

○37.18. а) Все натуральные числа, кратные пяти, расположенные в порядке возрастания, образуют последовательность. Укажите седьмой, девятый, двенадцатый, n-й члены последовательности.

б) Все натуральные числа, кратные семи, расположенные в порядке возрастания, образуют последовательность. Укажите шестой, десятый, тридцать первый, n-й члены последовательности.

○37.19. а) Все натуральные числа, которые при делении на 5 дают в остатке 2, расположены в порядке возрастания. Найдите первые пять членов этой последовательности.

б) Все натуральные числа, которые при делении на 4 дают в остатке 3, расположены в порядке возрастания. Найдите сумму первых шести членов этой последовательности.

○37.20. а) Последовательность состоит из квадратов простых чисел, расположенных в порядке возрастания. Найдите сумму первых восьми членов этой последовательности. (Число 1 не считается ни простым, ни составным).

б) Известно, что (y_n) — последовательность всех натуральных степеней числа 3, расположенных в порядке возрастания. Найдите: y_5, y_8, y_{37}, y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n-}:

○37.21. Задайте формулой n-го члена и рекуррентным способом:

а) возрастающую последовательность всех четных натуральных чисел, не делящихся на 4;

б) возрастающую последовательность всех натуральных чисел, которые при делении на 13 дают в остатке 5;

в) возрастающую последовательность всех натуральных чисел, делящихся на 3 и на 7 (одновременно);

г) возрастающую последовательность всех четных натуральных чисел, делящихся на 3 и на 5 (одновременно).

Составьте одну из возможных формул n-го члена последовательности по первым пяти ее членам:

○37.22. а) −1, −2, −3, −4, −5, в) 10, 9, 8, 7, 6,

б) 6, 12, 18, 24, 30, ... ; г) 4, 8, 12, 16, 20, ...

○37.23. а) 3, 9, 27, 81, 243, ...; в) 1, 8, 27, 64, 125, ...;
б) 9, 16, 25, 36, 49, ...; г) 2, 9, 28, 65, 126, ...

○37.24. а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots;$

б) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \ldots;$

в) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \ldots;$

г) $\frac{1}{3\ \ 5}, \frac{1}{5\ \ 7}, \frac{1}{7\ \ 9}, \frac{1}{9\ \ 11}, \frac{1}{11\ \ 13}, \ldots$

○37.25. а) $\frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}, \frac{243}{1024}, \ldots;$

б) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4\sqrt{2}}, \ldots;$

в) $\frac{1}{\sqrt{1\ \ 2}}, -\frac{4}{\sqrt{2\ \ 3}}, \frac{9}{\sqrt{3\ \ 4}}, -\frac{16}{\sqrt{4\ \ 5}}, \frac{25}{\sqrt{5\ \ 6}}, \ldots;$

г) $\frac{4}{1\ \ 2\ \ 3}, -\frac{9}{2\ \ 3\ \ 4}, \frac{14}{3\ \ 4\ \ 5}, -\frac{19}{4\ \ 5\ \ 6}, \frac{24}{5\ \ 6\ \ 7}, \ldots$

37.26. Какие члены последовательности (y_n) расположены между членами:

а) y_{732} и y_{745}; в) y_{998} и y_{1003};

б) y_{n-1} и y_{n+2}; г) y_{2n-2} и y_{2n+3}?

○37.27. Укажите номер члена последовательности $y_n \quad \frac{2\ \ \ n}{5n+1}$, равного:

а) 0; б) $\frac{-3}{26}$; в) $\frac{-1}{6}$; г) $-\frac{43}{226}$.

○37.28. Квадрат со стороной 1 см вписан во второй квадрат таким образом, что вершины первого квадрата являются серединами сторон второго. Второй квадрат, аналогично, вписан в третий квадрат и т. д. Получается последовательность вписанных друг в друга квадратов.

а) Составьте последовательность периметров полученных квадратов. Выпишите первые пять членов этой последовательности.

б) Составьте последовательность площадей полученных квадратов. Выпишите первые пять членов этой последовательности.

в) Чему равна длина стороны одиннадцатого квадрата?

г) Чему равна площадь семнадцатого квадрата?

О37.29. Сколько членов последовательности $y_n = 2n^2 - 7n + 5$ принадлежит:

а) отрезку $[2; 5]$; б) промежутку $(-\infty; 10)$?

Начиная с какого номера все члены последовательности (x_n) будут больше заданного числа A?

О37.30. а) $x_n = 3n - 2$, $A = 15$; б) $x_n = 5^{n-1}$, $A = 125$.

О37.31. а) $x_1 = 0$, $x_n = x_{n-1} + 3$, $A = 28$;

б) $x_1 = 1$, $x_n = 7x_{n-1}$, $A = 285$.

О37.32. Сколько членов последовательности не превосходят 1:

а) $\frac{1}{3125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{125}, \ldots$; в) $\frac{2}{729}, \frac{2}{243}, \frac{2}{81}, \ldots$;

б) $\frac{6}{377}, \frac{11}{379}, \frac{16}{381}, \ldots$; г) $\frac{2}{219}, \frac{9}{222}, \frac{16}{225}, \ldots$?

О37.33. Выпишите все отрицательные члены последовательности:

а) $y_n = n^2 - n - 6$; в) $y_n = n^2 - 6n + 8$;

б) $y_n = \frac{-181}{15 - 7n}$; г) $y_n = \frac{1 + 2n}{9n - 5}$.

О37.34. Найдите число положительных членов последовательности:

а) $y_n = 4n - n^2$; в) $y_n = -n^2 + 9n - 14$;

б) $y_n = \frac{140 - n^2}{6n - 11}$; г) $y_n = \frac{123}{147 - 5n}$.

О37.35. Найдите наименьший член последовательности:

а) $y_n = n^2 - 42n + 13$; б) $y_n = n^2 - 26n + 41$.

О37.36. Укажите номер наибольшего члена последовательности:

а) $y_n = 303 + 38n - n^2$; б) $y_n = 145 + 32n - n^2$.

О37.37. Найдите номер члена последовательности $y_n = \frac{3n + 191}{3n + 2}$, наиболее близкого к числу:

а) 25; б) 2; в) 5; г) 41.

О37.38. Дана последовательность $y_n = n^2 - 18n$.

а) Установите, сколько в ней отрицательных членов;

б) найдите наименьший член последовательности;

в) укажите номер члена последовательности, который равен 19;

г) выясните, сколько членов последовательности принадлежит отрезку $[-15; 2]$.

●37.39. Найдите наименьший член последовательности:

а) $y_n = 3n^2 - 10n + 3$;

б) $y_n = \frac{-3}{2n-5}$;

в) $y_n = 2n^2 - 7n + 3$;

г) $y_n = \frac{-4}{n+4}$.

●37.40. Найдите наибольший член последовательности:

а) $y_n = -2n^2 + 11n - 2$;

б) $y_n = \frac{3}{2n-5}$;

в) $y_n = 20 - 12n - 3n^2$;

г) $y_n = \frac{4}{n+4}$.

○37.41. Является ли ограниченной снизу последовательность:

а) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$;

б) $y_n = \frac{n^2}{n+1}$;

в) $5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \ldots$;

г) $y_n = ((-1)^n + 1)n^2$?

○37.42. Является ли ограниченной сверху последовательность:

а) $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$;

б) $1, -1, 1, -2, 1, -3, \ldots$;

в) $x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$;

г) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$?

○37.43. Является ли ограниченной последовательность:

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

б) $-2, 3, -4, 5, \ldots, (-1)^n(n+1), \ldots$;

в) $\frac{\sin 1}{1}, -\frac{\sin 2}{2}, \frac{\sin 3}{3}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}\sin n}{n}, \ldots$;

г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}, \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}, \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}, \ldots, \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(2n-1), \ldots$?

●37.44. Известно, что (x_n) — ограниченная последовательность. Является ли ограниченной последовательность:

а) $y_n = -5x_n + 2$;

б) $p_n = \frac{x_n^2}{x_n^2 + 1}$;

в) $z_n = \frac{1}{2|x_n| + 1}$;

г) $t_n = x_n \sin(3n)$?

○37.45. При каких значениях параметра p заданная последовательность ограничена сверху числом 1:

а) $y_n = \frac{2n+p}{2n+1}$;

б) $z_n = \frac{n}{p^2 + n}$?

○37.46. При каких значениях параметра p заданная последовательность ограничена снизу числом 1:

а) $y_n = \frac{n-p}{n+2}$;

б) $z_n = \frac{2n+9}{2n+p^2}$?

●37.47. При каких значениях параметра p последовательность:

а) $y_n = \dfrac{2n + p}{3n - 1}$ ограничена сверху числом 1;

б) $y_n = \dfrac{p + 5n}{3n + 1}$ ограничена снизу числом 1?

37.48. Определите, является последовательность (x_n) убывающей или возрастающей:

а) $x_n = 3n + 2$;

б) $x_n = \dfrac{5}{n + 3}$;

в) $x_n = 6^{1-n}$;

г) $x_n = \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{2n-1}$.

37.49. Объясните, является последовательность (y_n) убывающей или возрастающей, если для любого номера n выполняется неравенство:

а) $y_{n-1} - y_n > 0$;

б) $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} < 1$;

в) $y_{n+1} - y_n < 0$;

г) $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} < 1$ $(y_n < 0)$.

○37.50. Выясните, какие из приведенных последовательностей являются монотонными; укажите характер монотонности:

а) $y_n = 5^{-n}$;

б) $y_n = \cos \dfrac{\pi}{n + 5}$;

в) $y_n = \dfrac{2}{3n + 1}$;

г) $y_n = \sqrt{n + 8}$.

○37.51. Исследуйте на монотонность последовательность:

а) $y_n = -2n + 1$;

б) $y_n = 3n^2 + n - 1$;

в) $y_n = \cos \dfrac{1}{n}$;

г) $y_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$.

●37.52. Докажите, что заданная последовательность возрастает:

а) $y_n = n^3 + 2n$;

б) $y_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 10}$;

в) $y_n = \dfrac{n + 1}{n + 7}$;

г) $y_n = \dfrac{n^4 + 3n^2 + 1}{n^4 + 3n^2 + 6}$.

●37.53. Докажите, что заданная последовательность убывает:

а) $y_n = \dfrac{3n + 5}{3n - 1}$;

б) $y_n = \dfrac{1}{n^3 + 2n}$;

в) $y_n = \dfrac{n^2 + 15}{n^2 + 2}$;

г) $y_n = \dfrac{n^4 + 2n^2 + 7}{n^2 + 2n^2 - 1}$.

○37.54. Если (x_n) — возрастающая последовательность с положительными членами, то что можно сказать о монотонности последовательности (y_n):

а) $y_n = 5x_n + 7$;

б) $y_n = \frac{7}{3 + x_n}$;

в) $y_n = 2 - 3x_n$;

г) $y_n = (x_n)^2 + 2$?

○37.55. При каких значениях параметра p последовательность (y_n) будет возрастающей:

а) $y_n = pn - 5$;

б) $y_n = -\frac{p - 1}{n}$;

в) $y_n = 2 - pn$;

г) $y_n = \frac{p + 2}{n + 1}$?

○37.56. При каких значениях параметра p последовательность (y_n) будет убывающей:

а) $y_n = \frac{2}{pn}$;

б) $y_n = \frac{pn + 2}{pn + 3}$;

в) $y_n = \frac{p}{\sin\frac{1}{n}}$;

г) $y_n = \frac{5n^2 - p}{n^2}$?

○37.57. Дана последовательность $x_n = n^2 - 1$. Исследуйте на ограниченность и монотонность последовательность (y_n):

а) $y_n = x_n$;

б) $y_n = x_{n+1} - x_n$;

в) $y_n = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}$;

г) $y_n = \frac{1}{x_{n+1}}$.

○37.58. Исследуйте последовательность (x_n) на ограниченность и монотонность:

а) $x_n = \frac{n}{n + 2}$;

б) $x_n = \frac{n^2 + 1}{n^2}$.

○37.59. Приведите примеры последовательностей:

а) возрастающих и ограниченных снизу;

б) возрастающих и не ограниченных сверху;

в) убывающих и ограниченных снизу;

г) убывающих и не ограниченных снизу.

●37.60. Приведите пример последовательности:

а) возрастающей, ограниченной сверху, все члены которой положительные числа;

б) убывающей, все члены которой принадлежат интервалу (0; 7);

в) возрастающей, имеющей ровно три отрицательных члена;

г) неограниченной, немонотонной.

§ 38. Предел числовой последовательности

38.1. Запишите окрестность точки a радиуса r в виде интервала, если:

а) $a = 0$, $r = 0{,}1$;
б) $a = -3$, $r = 0{,}5$;
в) $a = 2$, $r = 1$;
г) $a = 0{,}2$, $r = 0{,}3$.

38.2. Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

а) $(1,\ 3)$;
б) $(-0{,}2,\ 0{,}2)$;
в) $(2{,}1,\ 2{,}3)$;
г) $(-7,\ -5)$?

38.3. Принадлежит ли точка x_1 окрестности точки a радиуса r, если:

а) $x_1 = 1$, $a = 2$, $r = 0{,}5$;
б) $x_1 = 1{,}1$, $a = 1$, $r = 0{,}2$;
в) $x_1 = -0{,}2$, $a = 0$, $r = 0{,}3$;
г) $x_1 = 2{,}75$, $a = 2{,}5$, $r = 0{,}3$?

○38.4. Существует ли номер n_0, начиная с которого все члены последовательности (x_n) попадают в окрестность точки a радиуса $r = 0{,}1$, если:

а) $x_n = \frac{1}{n^2}$, $a = 0$;
б) $x_n = \frac{1}{n^2}$, $a = 1$;
в) $x_n = \frac{n}{n+1}$, $a = 0$;
г) $x_n = \frac{n}{n+1}$, $a = 1$?

Укажите номер n_0 того члена последовательности (x_n), начиная с которого все члены последовательности попадут в окрестность точки a радиуса r

○38.5. а) $x_n = \frac{1}{2n}$, $a = 0$, $r = 0{,}1$;

б) $x_n = 3 + \frac{1}{n^2}$, $a = 3$, $r = 0{,}2$;

в) $x_n = 1 + \frac{2}{n^2}$, $a = 1$, $r = 0{,}01$;

г) $x_n = -\frac{3}{n}$, $a = 0$, $r = 0{,}1$.

○38.6. а) $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $a = 0$, $r = \frac{1}{27}$;

б) $x_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$, $a = 0$, $r = \frac{1}{64}$;

в) $x_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $a = 2$, $r = \frac{1}{128}$;

г) $x_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $a = 3$, $r = \frac{1}{81}$.

Постройте график последовательности (y_n) и составьте, если можно, уравнение горизонтальной асимптоты графика:

○38.7. а) $y_n = \frac{2}{n}$; в) $y_n = \frac{4}{n}$;

б) $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; г) $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

○38.8. а) $y_n = -1 + \frac{1}{n}$; в) $y_n = 2 - \frac{2}{n}$;

б) $y_n = 2 - \frac{1}{n^2}$; г) $y_n = -3 + \frac{1}{n^2}$.

○38.9. а) $y_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}$; в) $y_n = -3 + (-1)^n \frac{2}{n}$;

б) $y_n = (-1)^n 2 + \frac{1}{n}$; г) $y_n = (-1)^{n+1} 3 - \frac{2}{n}$.

38.10. Верно ли утверждение:

а) если последовательность имеет предел, то она монотонна;

б) если последовательность монотонна, то она имеет предел;

в) если последовательность ограничена, то она имеет предел;

г) если последовательность не монотонна, то она не имеет предела?

Пользуясь теоремой о пределе монотонной ограниченной последовательности, докажите, что последовательность имеет предел:

○38.11. а) $x_n = \frac{3n^2 + 2}{n^2}$; б) $x_n = \frac{n^2 - 5}{n^2 + 5}$.

●38.12. а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;

б) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

38.13. а) $x_n = \dfrac{5}{n^2}$; в) $x_n = \dfrac{-15}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{-17}{n^3}$; г) $x_n = \dfrac{3}{\sqrt{n}}$.

○38.14. а) $x_n = \dfrac{7}{n} + \dfrac{8}{\sqrt{n}} + \dfrac{9}{n^3}$; в) $x_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{7}{n^2} - \dfrac{5}{n^3} + \dfrac{13}{n^4}$;

б) $x_n = 6 - \dfrac{7}{n^2} - \dfrac{3}{n} - \dfrac{3}{\sqrt{n}}$; г) $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{\sqrt{n}} - 4 + \dfrac{7}{n^2}$.

○38.15. а) $x_n = \dfrac{5}{2^n}$; в) $x_n = 7 \cdot 3^{-n}$;

б) $x_n = \dfrac{1}{2} \cdot 5^{-n}$; г) $x_n = \dfrac{4}{3^{n+1}}$.

○38.16. а) $x_n = \dfrac{5n+3}{n+1}$; в) $x_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$;

б) $x_n = \dfrac{7n-5}{n+2}$; г) $x_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$.

○38.17. а) $x_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$; в) $x_n = \dfrac{3-n^2}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{1+2n+n^2}{n^2}$; г) $x_n = \dfrac{3n-4-2n^2}{n^2}$.

○38.18. а) $x_n = \dfrac{(2n+1)(n-3)}{n^2}$; в) $x_n = \dfrac{(3n-2)(2n+3)}{n^2}$;

б) $x_n = \dfrac{(3n+1)(4n-1)}{(n+1)^2}$; г) $x_n = \dfrac{(1-2n)(1+n)}{(n+2)^2}$.

○38.19. а) $x_n = \dfrac{(2n+1)(3n-4) - 6n^2 + 12n}{n+5}$;

б) $x_n = \dfrac{n^2(2n+5) - 2n^3 + 5n^2 - 13}{n(n+1)(n-7) + (1-n)}$;

в) $x_n = \dfrac{(1-n)(n^2+1) + n^3}{n^2 + 2n}$;

г) $x_n = \dfrac{n(7-n^2) + n^3 - 3n - 1}{(n+1)(n+2) + (2n^2+1)}$.

Вычислите:

●38.20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

●38.21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n+3\cdot 4^n}{2^n-6\cdot 4^n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5^n-7\cdot 4^n}{2^n+6\cdot 5^n}$.

38.22. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n) , если:

а) $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{3}$; в) $b_1 = -1$, $q = 0{,}2$;

б) $b_1 = -5$, $q = -0{,}1$; г) $b_1 = 2$, $q = -\frac{1}{3}$.

38.23. Найдите сумму геометрической прогрессии:

а) 32, 16, 8, 4, 2, ... ; в) 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, ... ;

б) 24, -8, $\frac{8}{3}$, $-\frac{8}{9}$, ... ; г) 18, -6, 2, $-\frac{2}{3}$, ...

38.24. Найдите знаменатель и сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_1 = -2$, $b_2 = 1$; в) $b_1 = 7$, $b_2 = -1$;

б) $b_1 = 3$, $b_2 = \frac{1}{3}$; г) $b_1 = -20$, $b_2 = 4$.

38.25. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 2$, $b_1 = 3$; в) $S = -\frac{9}{4}$, $b_1 = -3$;

б) $S = -10$, $b_1 = -5$; г) $S = 1{,}5$, $b_1 = 2$.

38.26. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 10$, $q = 0{,}1$; в) $S = 6$, $q = -0{,}5$;

б) $S = -3$, $q = -\frac{1}{3}$; г) $S = -21$, $q = \frac{1}{7}$.

○38.27. Найдите n-й член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $S = 15$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 3$; в) $S = 20$, $b_1 = 22$, $n = 4$;

б) $S = -20$, $b_1 = -16$, $n = 4$; г) $S = 21$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 3$.

о38.28. Найдите сумму геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_n = \frac{25}{3^n}$; в) $b_n = \frac{45}{3^n}$;

б) $b_n = (-1)^n \frac{13}{2^{n-1}}$; г) $b_n = (-1)^{n-1} \frac{7}{6^{n-2}}$.

о38.29. а) Найдите сумму геометрической прогрессии, если известно, что сумма первого и третьего ее членов равна 29, а второго и четвертого 11,6.

б) Чему равен пятый член геометрической прогрессии, если известно, что он в 4 раза меньше куба третьего члена прогрессии, а сумма прогрессии равна 4,5?

о38.30. а) Найдите геометрическую прогрессию, если известно, что ее сумма равна 24, а сумма первых трех членов равна 21.

б) Найдите седьмой член геометрической прогрессии, если известно, что ее сумма равна 31,25, а сумма первых трех членов равна 31.

о38.31. а) Составьте геометрическую прогрессию, если известно, что ее сумма равна 18, а сумма квадратов ее членов равна 162.

б) Найдите сумму квадратов членов геометрической прогрессии, если известно, что ее сумма равна 2, а сумма кубов ее членов равна $1\frac{1}{7}$.

Вычислите:

о38.32. а) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} +$ в) $\frac{3}{2} \quad 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} +$

б) $49 + 7 + 1 + \frac{1}{7^2} +$ г) $125 + 25 + 5 + 1 +$

о38.33. а) $-6 + \frac{2}{3} - \frac{2}{27} + \frac{2}{243} -$

б) $3 + \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} +$

в) $49 - 14 + 4 - \frac{8}{7} +$

г) $4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} +$

о38.34. а) $2 + 4 + 6 + \quad + 20 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

б) $1 + 3 + 5 + \ldots + 99 + \frac{2}{5} - \frac{4}{25} + \frac{8}{125} -$

в) $21 + 24 + 27 + \quad + 51 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} -$

г) $1 + 4 + 7 + \quad + 100 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 +$

○38.35. Упростите выражение $\left(x \neq \frac{\pi n}{2}\right)$:

а) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x +$
б) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \cos^4 x +$
в) $\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \cos^8 x +$
г) $1 - \sin^3 x + \sin^6 x - \sin^9 x +$

Решите уравнение, если известно, что $|x| < 1$:

○38.36. а) $x + x^2 + x^3 + x^4 + \quad + x^n + \ldots = 4$;

б) $2x - 4x^2 + 8x^3 - 16x^4 + \qquad \frac{3}{8}$.

●38.37. а) $\frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 + x^4 + \quad + x^n + \quad = \frac{7}{2}$;

б) $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \quad = \frac{13}{6}$.

●38.38. Решите уравнение:

а) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \qquad \sin^n x + \ldots = 5$;
б) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \quad + (-1)^{n-1} \cos^n x + \ldots = 2$;

в) $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \quad + (\sin x)^{2n-2} + \qquad \frac{4}{3}$;

г) $7 \cos^3 x + 7 \cos^6 x + \quad + 7 (\cos x)^{3n} + \quad = 1$.

§ 39. Предел функции

39.1. Какая из функций, графики которых изображены на рис. 70—73, имеет предел при $x \to +\infty$? при $x \to -\infty$? при $x \to \infty$?

39.2. Выясните, имеет ли функция $y = f(x)$ предел при $x \to +\infty$, при $x \to -\infty$ или при $x \to \infty$ и чему он равен, если:

а) прямая $y = 3$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty; 4]$;

б) прямая $y = -2$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[-6; +\infty)$;

в) прямая $y = -5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $(-\infty; 3]$;

г) прямая $y = 5$ является горизонтальной асимптотой графика функции на луче $[4; +\infty)$.

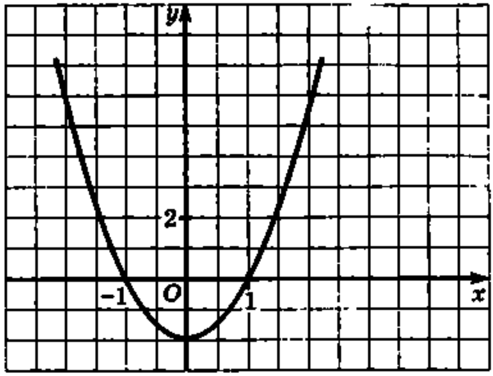

Рис. 70

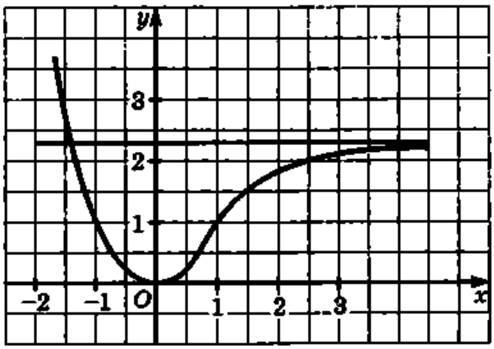

Рис. 71

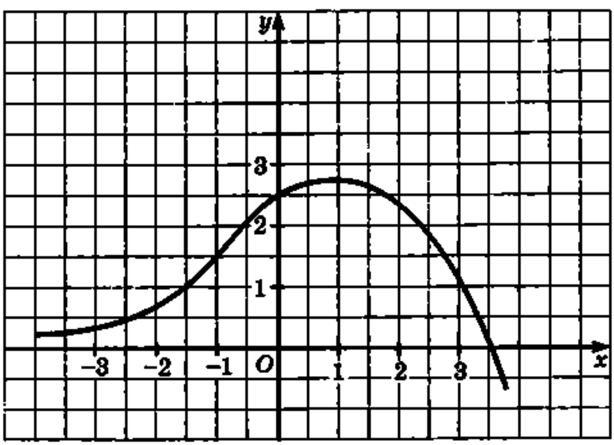

Рис. 72

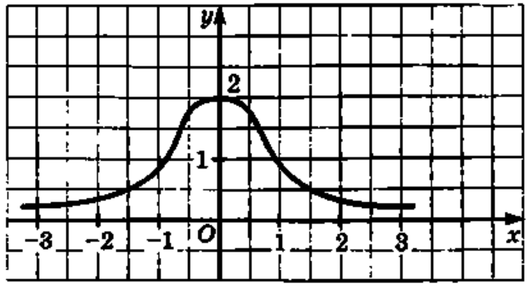

Рис. 73

○39.3. Известно, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -3$, $\lim\limits_{n\to\infty} h(x) = 9$.

Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + g(x) - h(x))$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)\quad(f(x))^2)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x) - f(x) + h(x))$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\quad g(x)\quad h(x))$.

○39.4. Известно, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -10$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 6$.

Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3f(x) + h(x)}{2g(x) + 15}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)h(x)}{g(x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3g(x)}{5h(x)}$.

Постройте график какой-либо функции $y = f(x)$, обладающей указанными свойствами:

39.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -2$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -5$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

39.6. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 10$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$.

39.7. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$ и $f(x) > 0$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ и $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[-7; 3]$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ и $f(x) > 0$ на $[0, +\infty)$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ и $f(x) < 0$ на $(-\infty; +\infty)$.

Постройте график какой-нибудь функции $y = h(x)$, $x \in R$, обладающей указанными свойствами:

○39.8. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 4$ и функция возрастает;

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 5$ и функция убывает;

в) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -2$ и функция возрастает;

г) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -3$ и функция убывает.

○39.9. а) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена сверху;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена снизу;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена сверху;

г) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$ и функция ограничена снизу.

●39.10. Постройте график непрерывной на $(-\infty; +\infty)$ функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$; $f(x) > 0$ на $(-\infty, 0)$; $E(f) = [-5; 5]$, функция убывает на $[2; 7]$;

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $E(f) = [-3; 5)$, $f(x) < 0$ на $(0; +\infty)$, функция возрастает на $[3; +\infty)$ и убывает на $[0; 3]$.

Вычислите:

39.11. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{7}{x^5} - \frac{2}{x^3}\right)$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{9}{x^3} - \frac{5}{x^7}\right)$.

39.12. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x^9} + 1\right)$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{6}{x^5} + \frac{4}{x^2} + 9\right)$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{4}{x^3} - \frac{7}{x} - 21\right)$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{7}{x^2} - 7\right)$.

○39.13. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(12 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{16}{x^7}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{5}{x^3} + 1\right) \cdot \left(-\frac{8}{x^2} - 2\right)$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(4 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{2}{x^5}$;

г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{7}{x^6} - 2\right) \cdot \left(-\frac{6}{x^{10}} - 3\right)$.

○39.14. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x - 2}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - 4}{x + 3}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 4}{2x + 7}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x + 9}{6x - 1}$.

○39.15. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 7x + 5}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5 - 5x}{2x^2 - 9x}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x + 3}{12x^2 - 6x}$.

○39.16. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x - x^2 + 1}{5x^2 - 2x}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x - 2x^2 + 4}{3x^2 + 2x}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 8}{x^3 + 18}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^4 + 2x + 1}$.

○39.17. а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 9}{x^2 + 2}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 8}{x^2 - 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{12x^2 + 5x + 2}{6x^2 + 5x - 1}$; г) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x^2 + 4x - 3}{5x^2 + 2x + 1}$.

39.18. Какая из функций, графики которых изображены на рис. 74—81, имеет предел при $x \to 3$? Чему равен этот предел?

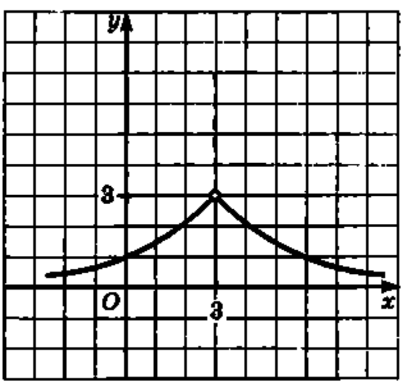

Рис. 74

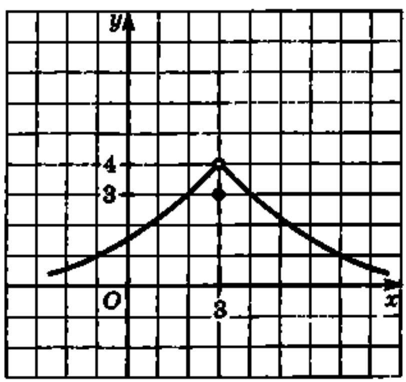

Рис. 75

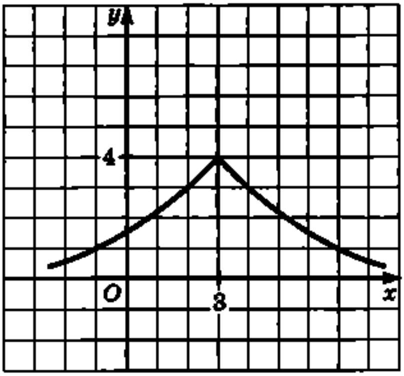

Рис. 76

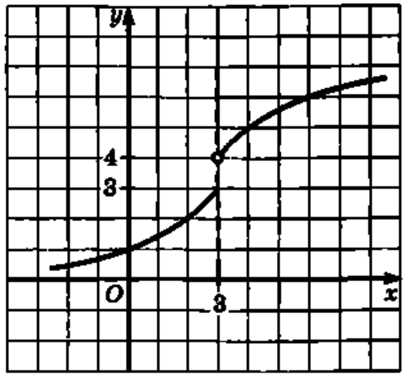

Рис. 77

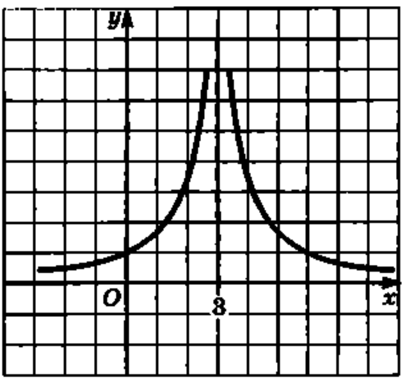

Рис. 78

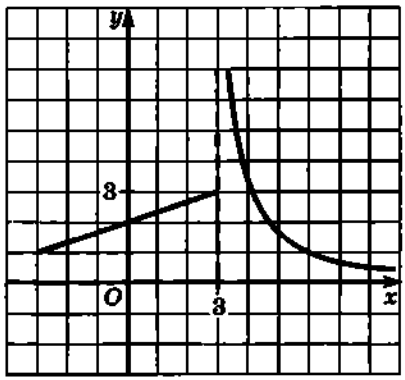

Рис. 79

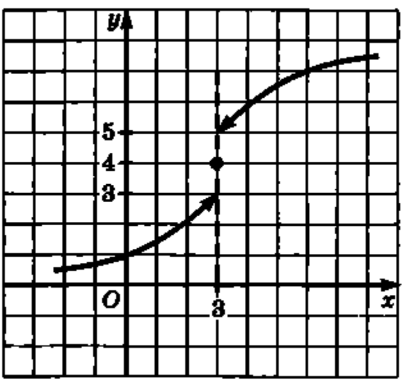

Рис. 80

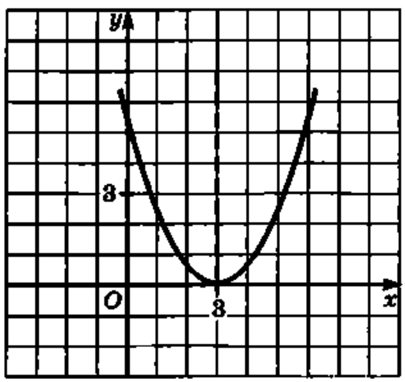

Рис. 81

39.19. Постройте график какой-нибудь функции $y = g(x)$, обладающей заданным свойством:

а) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -3$;

в) $\lim\limits_{x \to -7} g(x) = -4$;

г) $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = 3{,}5$.

39.20. Постройте график какой-нибудь функции $y = f(x)$, обладающей заданными свойствами:

а) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ и $f(2) = 3$;

б) $\lim\limits_{x \to -6} f(x) = 4$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

в) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 4$, $f(-1)$ не существует;

г) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$.

39.21. На рис. 82 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите:

а) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; б) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; в) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; г) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

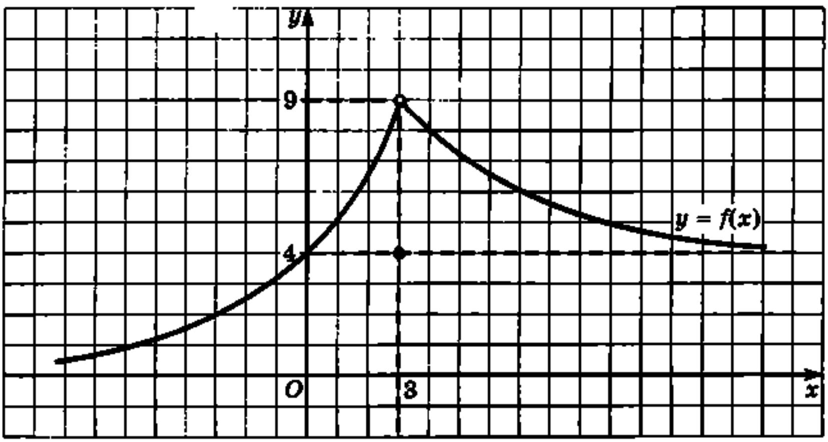

Рис. 82

○**39.22.** Постройте график функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

а) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$; $f(2) = 5$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -1$; $f(-3) = 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2$; функция возрастает на $(-\infty; 2]$.

б) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -3$; $f(-1) = 2$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -2$; $f(0) = -2$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$; $E(f) = (-3; 5]$.

Вычислите:

39.23. а) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+5)$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x+3}{4x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+6x-8)$;

г) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{7x-14}{21x+2}$.

○39.24. а) $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-1}{x^2+3x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to3,5}\sqrt{2x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5-2x}{3x^2-2x+4}$.

○39.25. а) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\pi x}{x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cos\frac{2\pi}{x}}{3x-1}$.

●39.26. а) $\lim\limits_{x\to0,5}(2\arcsin x+3\arccos x)$;

б) $\lim\limits_{x\to-0,5}\dfrac{\arccos x+\pi\sin\pi x}{\pi\cos\pi x+2\arcsin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(2\,\mathrm{arctg}\,x-\mathrm{arcctg}\,x)$;

г) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2\,\mathrm{arcctg}\,x+\pi x}{\cos x-\cos(-x)+\mathrm{arctg}\,x}$.

○39.27. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2-x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-3x}{x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x+5}{x^2+5x}$.

○39.28. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3+x}{x^2-9}$.

○39.29. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{2x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x^2-11x+18}{x-9}$.

○39.30. а) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$;　　　в) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^3-27}$;

б) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1+x^3}{1-x^2}$;　　　г) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{16-x^2}{64-x^3}$.

○39.31. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$;　　　в) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$;

б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$;　　　г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$.

●39.32. а) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-3x}$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-7}\right)$;

в) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x+5}-3}$;

г) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{5-3x} - \sqrt{-3x}\right)$.

●39.33. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;　　　б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 8x - \sin 2x}$.

39.34. Найдите приращение функции $y = 2x - 3$ при переходе от точки $x_0 = 3$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = 3{,}2$;　　　в) $x_1 = 3{,}5$;

б) $x_1 = 2{,}9$;　　　г) $x_1 = 2{,}5$.

39.35. Найдите приращение функции $y = x^2 + 2x$ при переходе от точки $x_0 = -2$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = -1{,}9$;　　　в) $x_1 = -1{,}5$;

б) $x_1 = -2{,}1$;　　　г) $x_1 = -2{,}5$.

39.36. Найдите приращение функции $y = \sin x$ при переходе от точки $x_0 = 0$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$;　　　в) $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $x_1 = -\dfrac{\pi}{6}$;　　　г) $x_1 = -\dfrac{\pi}{3}$.

○**39.37.** Найдите прпращение функции $y = 2\sin x \cos x$ при переходе от точки $x_0 = 0$ к точке x_1, если:

а) $x_1 = -\dfrac{\pi}{8}$;　　　в) $x_1 = \dfrac{\pi}{8}$;

б) $x_1 = \dfrac{\pi}{12}$;　　　г) $x_1 = -\dfrac{\pi}{12}$.

○39.38. Найдите приращение функции $y = \sqrt{x}$ при переходе от точки $x_0 = 1$ к точке $x_1 = x_0 + \Delta x$, если:

а) $\Delta x = 0{,}44$; в) $\Delta x = 0{,}21$;

б) $\Delta x = -0{,}19$; г) $\Delta x = 0{,}1025$.

39.39. По графику функции, представленному на рисунке, найдите приращение аргумента и приращение функции при переходе от точки x_0 к точке x_1:

а) рис. 83; б) рис. 84.

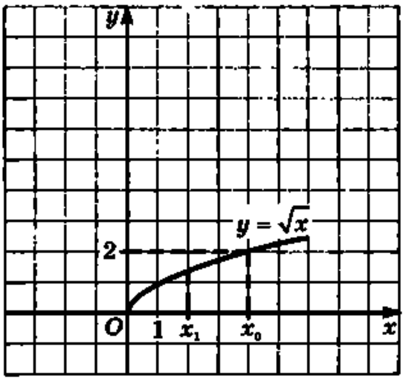

Рис. 83

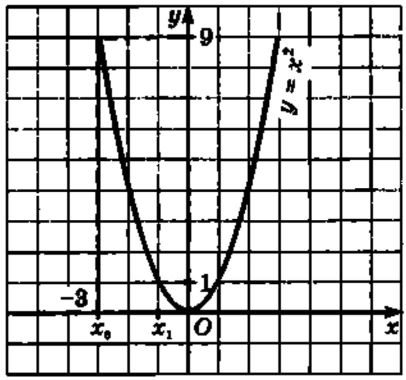

Рис. 84

○39.40. Найдите приращение функции $y = 4x^2 - x$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$:

а) $x = 0$, $\Delta x = 0{,}5$; в) $x = 0$, $\Delta x = -0{,}5$;

б) $x = 1$, $\Delta x = -0{,}1$; г) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

○39.41. Найдите приращение функции $y = f(x)$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = 3x + 5$; в) $f(x) = 4 - 2x$;

б) $f(x) = -x^2$; г) $f(x) = 2x^2$.

○39.42. Вычислите, чему равно отношение приращения функции $y = x^2 - 4x + 1$ к приращению аргумента при переходе от точки $x_0 = 2$ к точке:

а) $x = 2{,}1$; в) $x = 2{,}5$;

б) $x = 1{,}9$; г) $x = 1{,}5$.

39.43. Для функции $y = f(x)$ найдите Δf при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = kx + m$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

б) $f(x) = ax^2$; г) $f(x) = \sqrt{x}$.

о39.44. Для функции $y = f(x)$ найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = kx + b$; б) $f(x) = ax^2$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$.

о39.45. Для функции $y = f(x)$ найдите $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$, если:

а) $f(x) = kx + b$; б) $f(x) = ax^2$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$.

§ 40. Определение производной

40.1. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = 2t + 1$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 2$ с до момента:

а) $t_2 = 3$ с;
б) $t_2 = 2{,}5$ с;
в) $t_2 = 2{,}1$ с;
г) $t_2 = 2{,}05$ с.

Вычислите мгновенную скорость точки в момент $t = 2$ с.

40.2. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = t^2$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 0$ с до момента:

а) $t_2 = 0{,}1$ с;
б) $t_2 = 0{,}01$ с;
в) $t_2 = 0{,}2$ с;
г) $t_2 = 0{,}001$ с.

Вычислите мгновенную скорость точки в момент $t = 1$ с.

40.3. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = 2t^2 + t$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите среднюю скорость движения точки с момента $t_1 = 0$ с до момента:

а) $t_2 = 0{,}6$ с;
б) $t_2 = 0{,}2$ с;
в) $t_2 = 0{,}5$ с;
г) $t_2 = 0{,}1$ с.

Вычислите мгновенную скорость точки в момент $t = 1$ с.

о40.4. Закон движения точки по прямой задается формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите мгновенную скорость движения точки, если:

а) $s(t) = 4t + 1$;
б) $s(t) = t^2 - t$;
в) $s(t) = 3t + 2$;
г) $s(t) = t^2 - 2t$.

40.5. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Определите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$, если график функции изображен:

а) на рис. 85; в) на рис 87;

б) на рис. 86; г) на рис. 88.

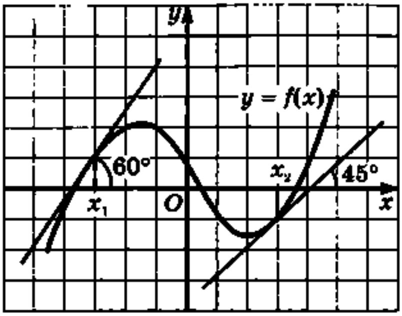

Рис. 85

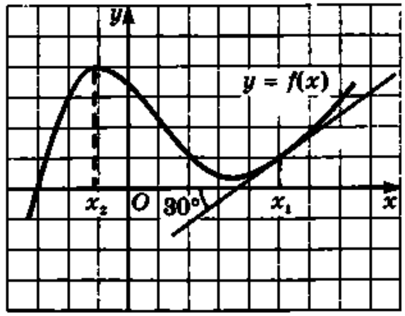

Рис. 86

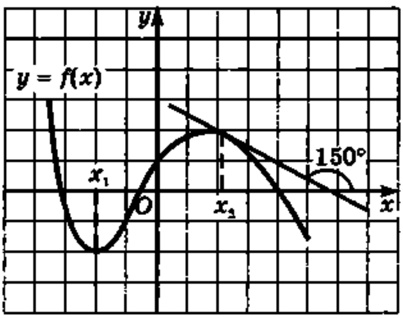

Рис. 87

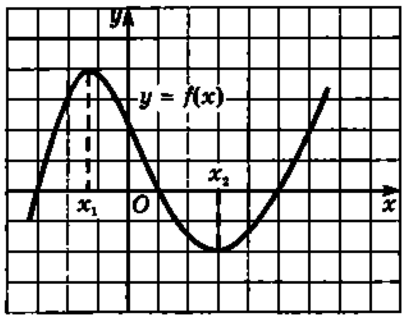

Рис. 88

40.6. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 89). Сравните значения производной в указанных точках:

а) $f'(-7)$ и $f'(-2)$; в) $f'(-9)$ и $f'(0)$;

б) $f'(-4)$ и $f'(2)$; г) $f'(-1)$ и $f'(5)$.

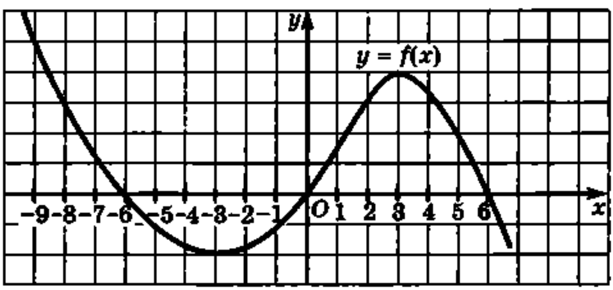

Рис. 89

40.7. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 89). Укажите два значения аргумента x_1 и x_2, при которых:

а) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) > 0$;   в) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) < 0$;

б) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$;   г) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$.

40.8. Функция $y = \varphi(x)$ задана своим графиком (рис. 90). Укажите несколько значений аргумента, для которых:

а) $\varphi'(x) > 0$;   в) $\varphi'(x) < 0$;

б) $\varphi'(x) < 0$ и $x > 0$;   г) $\varphi'(x) > 0$ и $x < 0$.

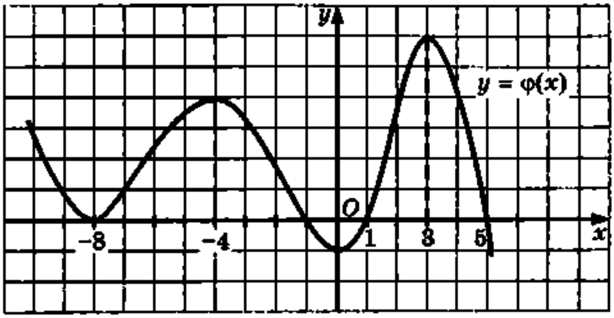

Рис. 90

Воспользовавшись определением, найдите производную функции в точке x:

●40.9. а) $y = x^2 + 2x$;   в) $3x^2 - 4x$;

б) $y = \frac{1}{x}$;   г) $y = \frac{4}{x}$.

●40.10. а) $y = \sqrt{x}$;   в) $y = \sqrt{x} + 1$;

б) $y = \frac{1}{x^2}$;   г) $y = x^3$.

Воспользовавшись определением, найдите производную функции в точке x_0 или докажите, что она не существует:

●40.11. а) $y = \begin{cases} 3x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -2x+3, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ $x_0 = 0$.

б) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -2x^2, \text{ если } x < 0; \end{cases}$ $x_0 = 0$.

в) $y = \begin{cases} -4x + 2, \text{ если } x \geqslant 3, \\ 2x - 4, \text{ если } x < 3; \end{cases}$ $x_0 = 3$.

г) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ $x_0 = 1$.

●40.12. а) $y = |x + 4|$, $x_0 = -4$;

б) $y = -3x|x|$, $x_0 = 0$;

в) $y = 2x|x|$, $x_0 = 0$;

г) $y = (x - 1)|x - 1|$, $x_0 = 1$.

40.13. Найдите скорость изменения функции в точке x:

а) $y = 9{,}5x - 3$;
в) $y = 6{,}7x - 13$;

б) $y = -16x + 3$;
г) $y = -9x + 4$.

○40.14. Найдите скорость изменения функции $y = f(x)$ в указанной точке:

а) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$;
в) $f(x) = x^2$, $x_0 = -2$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$;
г) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -0{,}5$.

○40.15. Закон движения точки по прямой задается формулой $s(t) = t^2$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите скорость и ускорение (скорость изменения скорости) в момент времени t, если:

а) $t = 1$ с; б) $t = 2{,}1$ с; в) $t = 2$ с; г) $t = 3{,}5$ с.

○40.16. Закон движения некоторой точки по прямой задается формулой $s(t) = t^2 + t$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — отклонение точки в момент времени t (в метрах) от начального положения. Найдите скорость и ускорение в момент времени t, если:

а) $t = 1$ с; б) $t = 2{,}1$ с; в) $t = 2$ с; г) $t = 3{,}5$ с.

§ 41. Вычисление производных

Найдите производную функции:

41.1. а) $y = 7x + 4$;
в) $y = -6x + 1$;

б) $y = x^2$;
г) $y = \frac{1}{x}$.

41.2. а) $y = x^5$;
в) $y = x^4$;

б) $y = x^{10}$;
г) $y = x^{201}$

41.3. а) $y = \sin x$;
в) $y = \cos x$;

б) $y = \sqrt{x}$;
г) $y = x^{10}$

41.4. а) $y = \operatorname{tg} x$;
в) $y = \operatorname{tg} x + 4$;

б) $y = \operatorname{ctg} x$;
г) $y = \operatorname{ctg} x + 8$.

41.5. а) $y = x^2 - 7x$; в) $y = 7x^2 + 3x$;
б) $y = -3x^2 - 13x$; г) $y = -x^2 + 8x$.

41.6. а) $y = x^3 + 2x^5$; в) $y = x^3 + 4x^{100}$;
б) $y = x^4 - x^9$; г) $y = x^4 - 7x^9$.

41.7. а) $y = 12x + \sqrt{x}$; в) $y = \sqrt{x} - 5x^2$;
б) $y = -2x^2 - \frac{1}{x}$; г) $y = 10x^2 + \frac{1}{x}$.

41.8. а) $y = 6\sqrt{x} + \frac{3}{x}$; в) $y = 10\sqrt{x} + \frac{5}{x}$;
б) $y = -2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$; г) $y = -8\sqrt{x} - \frac{1}{x}$.

41.9. а) $y = \cos x + 2x$; в) $y = \sin x - 3x$;
б) $y = 3 \sin x + \cos x$; г) $y = 2 \cos x + \sin x$.

41.10. а) $y = \frac{1}{3} \sin x - 3 \operatorname{ctg} x$; в) $y = \frac{\cos x}{5} + 1{,}4 \operatorname{ctg} x$;
б) $y = 2 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \cos x$; г) $y = 6 \operatorname{tg} x - \sin x$.

41.11. а) $y = x^5 + 9x^{20} + 1$; в) $y = x^6 + 13x^{10} + 12$;
б) $y = x^7 - 4x^{16} - 3$; г) $y = x^9 - 6x^{21} - 36$.

41.12. а) $y = (x^3 - 1)(x^4 + 2)$; в) $y = (x^2 + 3)(x^4 - 1)$;
б) $y = (x^2 + 3)(x^6 - 1)$; г) $y = (x^2 - 2)(x^7 + 4)$.

41.13. а) $y = \sqrt{x}(2x - 4)$; в) $y = \sqrt{x}(8x - 10)$;
б) $y = (x^3 + 1) \sqrt{x}$; г) $y = \sqrt{x} (x^4 + 2)$.

41.14. а) $y = x \sin x$; в) $y = x \cos x$;
б) $y = \sqrt{x} \cos x$; г) $y = \sqrt{x} \sin x$.

○**41.15.** а) $y = \left(\frac{1}{x} + 1\right)(2x - 3)$; в) $y = \left(\frac{1}{x} + 8\right)(5x - 2)$;
б) $y = \left(7 - \frac{1}{x}\right)(6x + 1)$; г) $y = \left(9 - \frac{1}{x}\right)(3x + 2)$.

○**41.16.** а) $y = x^3 \operatorname{tg} x$; в) $y = \frac{1}{x} \operatorname{ctg} x$;
б) $y = \cos x \operatorname{ctg} x$; г) $y = \sin x \operatorname{tg} x$.

Найдите производную функции:

○41.17. а) $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$; в) $y = (x + 1)(x^2 - x + 1)$;
б) $y = (x^2 + 2x + 4)(x - 2)$; г) $y = (x^2 - 3x + 9)(x + 3)$.

○41.18. а) $y = \frac{x^3}{2x + 4}$; в) $y = \frac{x^2}{3 - 4x}$;
б) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$; г) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

○41.19. а) $y = \frac{3\sqrt{x}}{2x + 9}$; в) $y = \frac{-2\sqrt{x}}{8 - 3x}$;
б) $y = \frac{\sin x}{x}$; г) $y = \frac{\cos x}{x}$.

○41.20. а) $y = \frac{x^9 - 3}{x^3}$; в) $y = \frac{x^5 + x}{x^3 - 1}$;
б) $y = \frac{x^{15}}{x^{10} + 1}$; г) $y = \frac{x^{13}}{x^4 - 2}$.

○41.21. а) $y = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$; в) $y = \cos^2 3x + \sin^2 3x$;
б) $y = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; г) $y = -\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

○41.22. а) $y = \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$;
б) $y = \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} + \cos \frac{x}{3} \sin \frac{2x}{3}$;
в) $y = \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x$;
г) $y = \cos \frac{x}{5} \cos \frac{4x}{5} - \sin \frac{x}{5} \sin \frac{4x}{5}$.

Найдите значение производной заданной функции в точке x_0:

41.23. а) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; в) $y = -3x - 11$, $x_0 = -3$;
б) $y = x^2$, $x_0 = -7$; г) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0{,}5$.

41.24. а) $y = \sin x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; в) $y = \cos x$, $x_0 = -3\pi$;
б) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; г) $y = \sin x$, $x_0 = 0$.

41.25. а) $y = 6x - 9$, $x_0 = 3$; в) $y = 5x - 8$, $x_0 = 2$;
б) $y = x^3 - 3x + 2$, $x_0 = -1$; г) $y = x^2 + 3x - 4$, $x_0 = 1$.

41.26. а) $y = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$, $x_0 = 4$; в) $y = \frac{8}{x} - \frac{x^3}{3}$, $x_0 = 1$;

б) $y = \sqrt{x} + 4$, $x_0 = 9$; г) $y = \sqrt{x} + 5x$, $x_0 = 4$.

41.27. а) $y = 2\sin x - 13\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

б) $y = -\cos x + \frac{1}{\pi}x^2$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

в) $y = -\sin x - 3$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

г) $y = 4\cos x + x\sqrt{2}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

41.28. а) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{\pi} \quad \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = 2\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

в) $y = \operatorname{ctg} x + \frac{\pi^2}{x}$, $x_0 = -\frac{\pi}{6}$;

г) $y = (2x + 3)^2 - 4\operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$.

○41.29. а) $y = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; в) $y = \frac{\cos x}{x}$, $x_0 = \pi$;

б) $y = \frac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 2$; г) $y = \frac{2x}{x+1}$, $x_0 = 0$.

○41.30. Докажите, что производная заданной функции принимает положительные значения при всех допустимых значениях аргумента:

а) $y = 3x + 12$; в) $y = -2\sin x + 4x$;

б) $y = 2x^3 + 15x$; г) $y = 3x - 1{,}5\cos x$.

○41.31. Докажите, что производная заданной функции принимает отрицательные значения при всех допустимых значениях аргумента:

а) $y = \frac{1}{x^5} - 1{,}5x$; в) $y = 1{,}4\cos x - 3x$;

б) $y = -\sqrt{x} + 14$; г) $y = \frac{12}{x^7} + 29$.

○41.32. а) Найдите те значения аргумента, при которых производная функции $y = x^3 - 3x$ принимает положительные значения;

б) найдите те значения аргумента, при которых производная функции $y = x^5 - \frac{5}{4}x^4$ принимает отрицательные значения;

в) найдите те значения аргумента, при которых производная функции $y = \sqrt{x} + x$ принимает неотрицательные значения;

г) найдите те значения аргумента, при которых производная функции $y = 7\cos x + 12$ принимает неположительные значения.

Найдите скорость изменения функции в точке x_0:

41.33. а) $y = x^2$, $x_0 = -0{,}1$;

б) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;

в) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$;

г) $y = \cos x$, $x_0 = \pi$.

○41.34. а) $y = x^3 + 2x$, $x_0 = 2$;

б) $y = \left(\sqrt{x+1}\right)\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

в) $y = \frac{1}{x}\left(\frac{4}{x} - 2\right)$, $x_0 = -0{,}5$;

г) $y = 2\sin x - 4x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

●41.35. Существует ли производная заданной функции в точке x_0? Если да, то вычислите ее:

а) $y = |x - 2|(x - 2)$, $x_0 = 2$;

б) $y = (x + 2)|x + 2|$, $x_0 = -2$.

●41.36. Существует ли производная заданной функции в указанных точках? Если да, то найдите значения производных:

а) $y = x^2 - 5|x| + 6$, $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$;

б) $y = |x^2 - 5|x| + 6|$, $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}5$.

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

41.37. а) $f(x) = x^2$, $x_0 = -4$;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -\frac{1}{3}$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

г) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$.

41.38. а) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$; в) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

б) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$; г) $f(x) = \sin x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

Определите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен k, если:

○41.39. а) $f(x) = \sqrt{x} - x,\ k = 1$;

б) $f(x) = \sqrt{x} + 3x,\ k = 4$.

○41.40. а) $f(x) = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},\ k = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;

б) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2},\ k = \frac{1}{2}$.

Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x:

41.41. а) $f(x) = x^6 - 4x,\ x_0 = 1$;

б) $f(x) = \sqrt{x} - 3,\ x_0 = \frac{1}{4}$;

в) $f(x) = -x^5 - 2x^2 + 2,\ x_0 = -1$;

г) $f(x) = \frac{25}{x} + 2,\ x_0 = \frac{5}{4}$.

○41.42. а) $f(x) = 10 - \cos x,\ x_0 = \frac{3\pi}{2}$;

б) $f(x) = 2 \operatorname{tg} x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

в) $f(x) = 4 - \sin x,\ x_0 = 6\pi$;

г) $f(x) = -4 \operatorname{ctg} x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

○41.43. а) $f(x) = x^2 \sin x,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

б) $f(x) = x(1 + \cos x),\ f'(\pi) = ?$

в) $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \frac{x^2}{\pi} + x \sin \frac{\pi}{6},\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$

г) $f(x) = \sqrt{3} \cos x - x \cos \frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{\pi},\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

○41.44. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = h(x)$ образует с положительным направлением оси абсцисс заданный угол α:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 19$, $\alpha = 45°$;

б) $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$, $\alpha = 135°$.

○41.45. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = h(x)$ образует острый угол с положительным направлением оси x, если:

а) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

б) $h(x) = 4\sqrt{x} - x$;

в) $h(x) = x^3 - x^4 \quad 19$;

г) $h(x) = \operatorname{tg} x - 4x$.

○41.46. Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = \varphi(x)$ образует тупой угол с положительным направлением оси x, если:

а) $\varphi(x) = \sin x + 3$;

б) $\varphi(x) = 0{,}2x^5 - 3\dfrac{1}{3}x^3 + 9x$;

в) $\varphi(x) = \operatorname{ctg} x + 9x$;

г) $\varphi(x) = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 21$.

○41.47. При каких значениях a касательные к графикам функций $y = f(x)$, $y = h(x)$ в точке $x = a$ не имеют общих точек:

а) $f(x) = x^7$, $h(x) = x^8$;

б) $f(x) = x^2 + x + 3$, $h(x) = x^3$?

○41.48. а) При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 2$, если известно, что $f(x) = 2\sqrt{x} - 5x + 3$?

б) При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 1$, если известно, что $f(x) = 3x - \sqrt{x} + 13$?

Решите неравенство $f'(x) < 0$:

○41.49. а) $f(x) = x^3 - 4^4$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 6x$.

○41.50. а) $f(x) = \sin 2x$;

б) $f(x) = -4\cos x + 2x$.

Решите неравенство $f'(x) > 0$:

○41.51. а) $f(x) = x^3 + x^4$;

б) $f(x) = \dfrac{4}{2-5x}$.

○41.52. а) $f(x) = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}$;

б) $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2}$.

При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = f(x)$ равна скорости изменения функции $y = g(x)$:

○**41.53.** а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $g(x) = 7{,}5x^2 - 16x$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{-1}{x}$?

○**41.54.** а) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = -\operatorname{ctg} x$?

○**41.55.** При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = g(x)$ больше скорости изменения функции $y = h(x)$:

а) $g(x) = x^3 - 3x^2$, $h(x) = 1{,}5x^2 - 9$;

б) $g(x) = \operatorname{tg} x$, $h(x) = 4x - 81$?

○**41.56.** Найдите значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{6}{5x - 9}$, $g(x) = \frac{3}{7 - 5x}$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(x) = 2x + 15$.

○**41.57.** Найдите значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) \leqslant g'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin x \quad \cos x$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 61$;

б) $f(x) = x\cos x$, $g(x) = \sin x$.

41.58. Укажите, какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$, если:

а) $f'(x) = 2x$;

б) $f'(x) = \cos x$;

в) $f'(x) = 3$;

г) $f'(x) = -\sin x$.

○**41.59.** Известна производная функции $y = f'(x)$. Укажите, какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$, если:

а) $f'(x) = 3x^2 + 2x$;

б) $f'(x) = -\frac{7}{x^2}$;

в) $f'(x) = 5x^4 - 1$;

г) $f'(x) = \frac{9}{2\sqrt{x}}$?

●**41.60.** Задайте аналитически функцию $y = f(x)$, если графиком ее производной является:

а) парабола (рис. 100);

б) ломанная (рис. 104).

○41.61. а) При каких значениях x верно равенство $y' \quad y + y^2 = 0$, если $y = 2\sin x$?

б) При каких значениях x верно равенство $y^2 + (y')^2 = 1$, если $y = \sqrt{x}$?

●41.62. При каких значениях a и b функция

$$y = \begin{cases} 2x - 3, \text{ если } x \leqslant 1, \\ x^2 + ax + b, \text{ если } x > 1: \end{cases}$$

а) непрерывна на всей числовой прямой;

б) дифференцируема на всей числовой прямой?

●41.63. При каких значениях a и b функция

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3}{4}, \text{ если } x \leqslant -1, \\ ax^3 + bx, \text{ если } x > -1: \end{cases}$$

а) непрерывна на всей числовой прямой;

б) дифференцируема на всей числовой прямой?

○41.64. Найдите вторую производную функции:

а) $y = x^4 + 2x$;
в) $y = \sin x + 1$;
б) $y = x^5 - 3x$;
г) $y = 2\cos x - 4$.

○41.65. Найдите $f'''(0)$, если:

а) $y = 2x^3 - x^2$;
в) $y = 4\sin x - \cos x$;
б) $y = x + \cos x$;
г) $y = \sin x + \cos x$.

○41.66. Тело движется по прямой согласно закону $x(t) = \dfrac{t^4}{4} - \dfrac{t^3}{3} - 6t^2 + 2t + 1$ (где t — время (в секундах), $x(t)$ — координата (в метрах)). Найдите:

а) ускорение движения в момент времени $t = 3$ с;

б) силу, действующую на тело массой 1 г в момент времени $t = 3$ с.

○41.67. а) При каких значениях x верно равенство $y'' + y' - y = 0$, если $y = 3\cos x$?

б) При каких значениях x верно равенство $(y'')^2 + 2y' = y^2 + 1$, если $y = \sin x$?

○41.68. а) Докажите, что функция $y = x\sin x$ удовлетворяет соотношению $y'' + y = 2\cos x$;

б) докажите, что при любых значениях a и b функция $y = a\sin x + b\cos x$ удовлетворяет соотношению $y'' + y = 0$.

○41.69. Строится мост параболической формы, соединяющий пункты A и B, расстояние между которыми равно 200 м. Въезд на мост и съезд с моста должны быть прямолинейными участками пути, эти участки направлены к горизонту под углом 15°. Указанные прямые должны быть касательными к параболе. Составьте уравнение профиля моста в заданной системе координат (рис. 91).

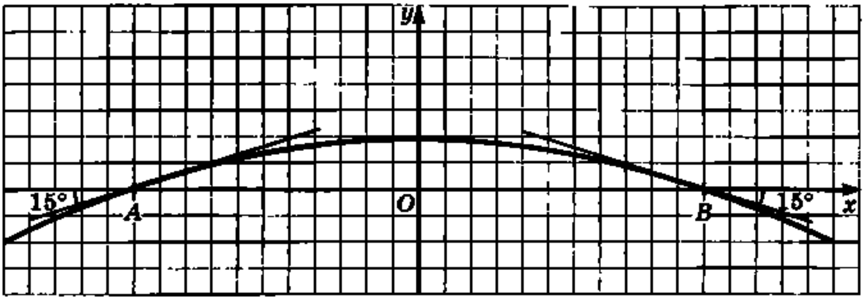

Рис. 91

●41.70. а) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = 4x^2 - |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол 60°?

б) При каких значениях параметра a касательные к графику функции $y = x^2 + |a|x$, проведенные в точках его пересечения с осью x, образуют между собой угол 45°?

§ 42. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной функции

Найдите производную функции:

42.1. а) $y = (4x - 9)^7$;   в) $y = \left(\frac{x}{3} + 2\right)^{12}$

б) $y = \left(12 - \frac{x}{5}\right)^6$;   г) $y = (15 - 9x)^{13}$.

42.2. а) $y = \sin(3x - 9)$;   в) $y = \sin(5 - 3x)$;

б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$;   г) $y = \cos(9x - 10)$.

42.3. а) $y = \operatorname{tg}\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$;   в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$;

б) $y = \sqrt{50 + 0{,}2x}$;   г) $y = \sqrt{4 - 9x}$.

Найдите производную функции:

○42.4. а) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$; в) $y = 1 - 2\sin^2 3x$;
б) $y = 2\sin x \quad \cos x$; г) $y = \sin^2 3x + \cos^2 3x$.

○42.5. а) $y = \sin 3x \cos 5x + \cos 3x \sin 5x$;
б) $y = \cos 4x \cos 6x - \sin 4x \sin 6x$;
в) $y = \sin 7x \cos 3x - \cos 7x \sin 3x$;
г) $y = \cos \frac{x}{3} \quad \cos \frac{x}{6} + \sin \frac{x}{3} \quad \sin \frac{x}{6}$.

○42.6. а) $y = (1 - x^3)^5$; в) $y = \frac{1}{(x^2 - 7x + 8)^2}$;
б) $y = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}$; г) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5}}$.

○42.7. а) $y = \sin^3 x$; в) $y = \operatorname{tg}^5 x$;
б) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$; г) $y = \operatorname{tg}(x + x^3)$.

●42.8. а) $y = \sqrt{1 - x^2} + \cos^3 x$; в) $y = \sin^2 x \quad \cos\sqrt{x}$;
б) $y = \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{x^2 + 1}$; г) $y = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{x^3}$.

Найдите значение производной функции в точке x_0:

○42.9. а) $y = (3x - 2)^7$, $x_0 = 3$; в) $y = (4 - 5x)^7$, $x_0 = 1$;
б) $y = \sqrt{25 - 9x}$, $x_0 = 1$; г) $y = \sqrt{7x + 4}$, $x_0 = 3$.

○42.10. а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;
б) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;
в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$;
г) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

○42.11. а) $y = (x^2 - 3x + 1)^7$, $x_0 = 1$;
б) $y = \sqrt{\frac{x + 1}{x + 4}}$, $x_0 = 0$;
в) $y = \sqrt{(x - 1)(x - 4)}$, $x_0 = 0$;
г) $y = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3}\right)^3$, $x_0 = 1$.

○42.12. а) $y = \operatorname{tg}^3 x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$; в) $y = \cos x^3,\ x_0 = 0$;

б) $y = \sin\sqrt{x},\ x_0 = \frac{\pi^2}{36}$; г) $y = \operatorname{ctg}^2 x - 1,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Вычислите скорость изменения функции в точке x_0:

○42.13. а) $y = (2x + 1)^5,\ x_0 = -1$; в) $y = \frac{4}{12x - 5},\ x_0 = 2$;

б) $y = \sqrt{7x - 3},\ x_0 = 1$; г) $y = \sqrt{11 - 5x},\ x_0 = -1$.

○42.14. а) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right),\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = \operatorname{tg} 6x,\ x_0 = \frac{\pi}{24}$;

в) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right),\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

г) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{3},\ x_0 = \pi$.

○42.15. а) $y = \sqrt{4x^2 - 20x + 25},\ x_0 = 3$;

б) $y = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 1},\ x_0 = \frac{\pi}{3}$;

в) $y = \sqrt{1 - 10x + 25x^2},\ x_0 = 1$;

г) $y = \sqrt{1 - \cos x + \frac{1}{4}\cos^2 x},\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

●42.16. а) $y = (x - \sin x)^2,\ x_0 = \pi$;

б) $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{\cos x}},\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

в) $y = \sqrt{(\sin x + 1)\cos x},\ x_0 = \frac{\pi}{6}$;

г) $y = (\operatorname{tg} x - 1)^4,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

○42.17. При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = f(x)$ равна скорости изменения функции $y = g(x)$:

а) $f(x) = \cos 2x,\ g(x) = \sin x$;

б) $f(x) = \sin 6x,\ g(x) = \cos 12x + 4$;

в) $f(x) = \frac{2}{3}\sin 3x,\ g(x) = \cos 2x$;

г) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x};\ g(x) = 2\sqrt{x}$?

○**42.18.** При каких значениях аргумента скорость изменения функции $y = g(x)$ больше скорости изменения функции $y = h(x)$:

а) $g(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$, $h(x) = 6x - 12$;

б) $g(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$, $h(x) = 3 - \sqrt{2}x$?

○**42.19.** Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x:

а) $h(x) = \dfrac{18}{4x + 1}$, $x_0 = 0{,}5$;

б) $h(x) = \cos^3 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

в) $h(x) = \sqrt{6 - 2x}$, $x_0 = 1$;

г) $h(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

○**42.20.** Определите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен a, если:

а) $f(x) = \sin x \quad \cos x$, $k = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $f(x) = \cos^2 x$, $k = \dfrac{1}{2}$.

○**42.21.** Определите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной равен 0:

а) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x$;

б) $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$.

○**42.22.** а) Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие отрезку $[0, 2]$, если известно, что $f(x) = \cos^2 x + 1 + \sin x$.

б) Найдите корни уравнения $f'(x) = 0$, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, если известно, что $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1$.

○**42.23.** а) Дано: $f(x) = a\sin 2x + b\cos x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$, $f'\left(\dfrac{9\pi}{2}\right) = -4$. Чему равны a и b?

б) Дано: $f(x) = a\cos 2x + b\sin 4x$, $f'\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = 4$, $f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2$. Чему равны a и b?

○**42.24.** Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$;

б) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$;

в) $f(x) = \sin^4 x$;

г) $f(x) = \cos^3 x - \sin^3 x$.

○**42.25.** Решите неравенство $y' \leqslant 0$, если:

а) $y = \dfrac{(1 - 3x)^3}{(2 - 7x)^5}$;

б) $y = \dfrac{(2x + 3)^4}{(2 - 5x)^5}$.

○42.26. Решите неравенство $g'(x) > 0$, если:

а) $g(x) = \dfrac{(2x-1)^4}{(3x+2)^5}$; б) $g(x) = \dfrac{(4-3x)^4}{(5x-4)^3}$.

○42.27. Проверьте равенство $g'(x) = f(x)$, если:

а) $g(x) = (1 - x^2)\sin x^2 - \cos x^2$, $f(x) = 2(x - x^3)\cos x^2$;

б) $g(x) = (x^2 - 1{,}5)\cos 2x - x\sin 2x$, $f(x) = (2 - 2x^2)\sin 2x$.

○42.28. Найдите значения аргумента, удовлетворяющие условию $f'(x) = g'(x)$, если:

а) $f(x) = \sin(2x - 3)$, $g(x) = \cos(2x - 3)$;

б) $f(x) = \sqrt{3x - 10}$, $g(x) = \sqrt{14 + 6x}$.

○42.29. Определите абсциссы точек, в которых касательные к графику функции $y = h(x)$ образуют с положительным направлением оси абсцисс заданный угол α:

а) $h(x) = 2\quad\sqrt{2x - 4}$, $\alpha = 60°$;

б) $h(x) = \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\alpha = 0°$.

Известна производная функции $y = f'(x)$. Укажите, какой формулой можно задать функцию $y = f(x)$:

○42.30. а) $f'(x) = 6(2x - 1)^2$; б) $f'(x) = -20(4 - 5x)^3$.

○42.31. а) $f'(x) = \dfrac{2}{(2x+3)^2}$; б) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x - 7}}$.

○42.32. а) $f'(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; б) $f'(x) = \dfrac{4}{\cos^2(5x - 1)}$.

○42.33. Найдите производную функции:

а) $y = \arcsin 3x$; в) $y = (\arccos x)^3$;

б) $y = \operatorname{arctg} x^2$; г) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$.

●42.34. Найдите значение производной функции в точке x_0:

а) $y = (\arccos x)^3$, $x_0 = 0$;

б) $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x_0 = -1$;

в) $y = \arcsin\sqrt{x}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$;

г) $y = \arccos\dfrac{2-x}{x\sqrt{2}}$, $x_0 = 1$.

○**42.35.** Вычислите скорость изменения функции $y = g(x)$ в точке x_0:

а) $g(x) = \operatorname{arctg}(1 - 3x)$, $x_0 = \frac{1}{3}$;

б) $g(x) = \arcsin\sqrt{x}$; $x_0 = 0{,}25$;

в) $g(x) = \arccos(2x - 3)$, $x_0 = 1{,}5$;

г) $g(x) = \sqrt{\operatorname{arcctg} x}$, $x_0 = 0$.

○**42.36.** Найдите тангенс угла между касательной к графику функции $y = h(x)$ в точке с абсциссой x_0 и осью x:

а) $h(x) = \arcsin(3x - 2)$, $x_0 = \frac{2}{3}$;

б) $h(x) = \arcsin x \quad \arccos x$, $x_0 = 0$.

○**42.37.** а) Решите уравнение $f'(x) = 2$, если $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$.

б) Найдите те значения x, при которых выполняется равенство $(f'(x))^2 = \frac{1}{x}$, где $f(x) = 2\arcsin\sqrt{x}$.

●**42.38.** Решите неравенство $(f'(x))^2 > 1$, если:

а) $f(x) = \arcsin 2x$; б) $f(x) = 2\arccos\sqrt{x}$.

§ 43. *Уравнение касательной к графику функции*

43.1. Определите знак углового коэффициента касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, в точках с абсциссами a, b, c:

а) рис. 92; б) рис. 93;

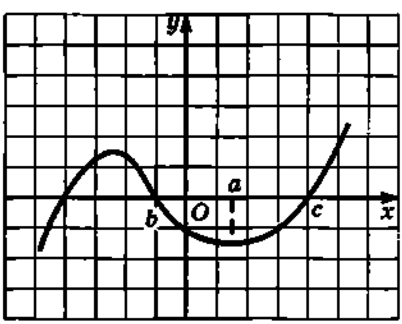

Рис. 92

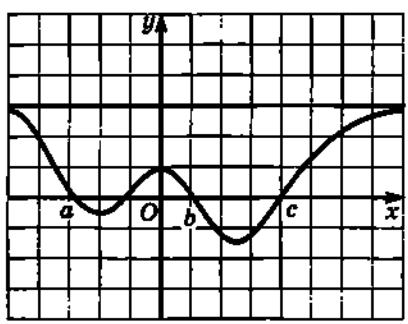

Рис. 93

43.2. Укажите точки, в которых производная равна нулю и точки, в которых производная не существует, если график функции изображен на заданном рисунке:

а) рис. 94; б) рис. 95; в) рис. 96; г) рис. 97.

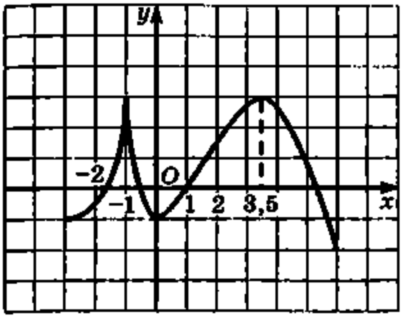

Рис. 94

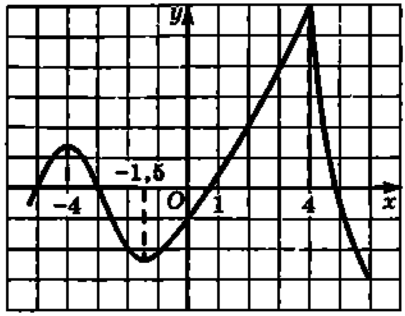

Рис. 95

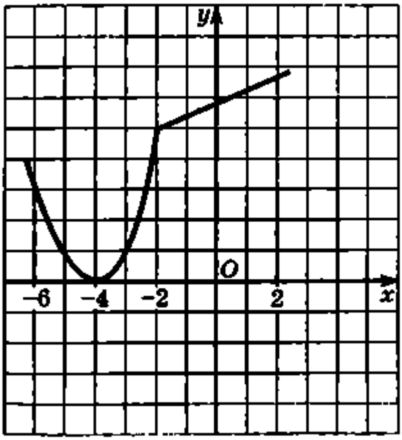

Рис. 96

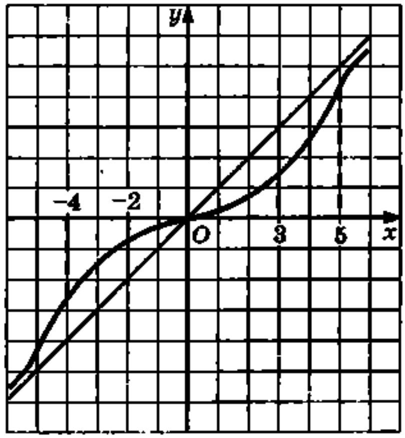

Рис. 97

43.3. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3,\ a = -1$;

б) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3},\ a = 1$;

в) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 12x - 45,\ a = 0$;

г) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1},\ a = 1$.

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

43.4. а) $f(x) = \sqrt{x - 7}$, $a = 8$;

б) $f(x) = \sqrt{4 - 5x}$, $a = 0$;

в) $f(x) = \sqrt{10 + x}$, $a = -5$;

г) $f(x) = \sqrt{3{,}5 - 0{,}5x}$, $a = -1$.

43.5. а) $f(x) = \sin x$, $a = 0$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $a = \frac{\pi}{8}$;

в) $f(x) = \cos 3x$, $a = \frac{\pi}{2}$;

г) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $a = \frac{\pi}{3}$.

○43.6. а) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, $a = \frac{\pi}{4}$;

б) $f(x) = \cos^2 x$, $a = \frac{\pi}{12}$;

в) $f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$, $a = \frac{\pi}{4}$;

г) $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$, $a = \frac{\pi}{2}$.

Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

○43.7. а) $f(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, $x_0 = 3$;

б) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

в) $f(x) = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$, $x_0 = -\frac{1}{2}$;

г) $f(x) = \sin x \quad \cos x \quad \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

○43.8. а) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$, $x_0 = -2$;

в) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x}{x^2}$, $x_0 = -0{,}1$;

г) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$, $x_0 = -5$.

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в каждой из указанных точек:

○43.9. а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ если } |x| \geq 1, \\ 1 - x^2, \text{ если } |x| < 1, \end{cases}$ $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3;$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, \text{ если } x \geq 0, \\ 2 - x^2, \text{ если } x < 0, \end{cases}$ $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2;$

в) $f(x) = \begin{cases} -3x, \text{ если } x \leq 0, \\ \sqrt{5x}, \text{ если } x > 0, \end{cases}$ $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 5;$

г) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - 2x}, \text{ если } x \leq 2, \\ x - 2, \text{ если } x > 2, \end{cases}$ $x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5.$

○43.10. а) $f(x) = x^2 - 9|x| + 14,\ x_1 = -7,\ x_2 = 4{,}5,\ x_3 = 8;$

б) $f(x) = x^2 - 4|x| - 12,\ x_1 = -3,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2.$

○43.11. а) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2{,}5,\ x_3 = 4;$

б) $f(x) = |-x^2 + 2x + 3|,\ x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$

Найдите ту точку графика функции $y = f(x)$, в которой угловой коэффициент касательной равен k:

○43.12. а) $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 1,\ k = 2;$

б) $f(x) = x + \frac{1}{x},\ k = 3;$

в) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x,\ k = 1;$

г) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x},\ k = -3.$

○43.13. а) $f(x) = \arcsin 2x,\ k = 2;$

б) $f(x) = x - \arccos x,\ k = 2;$

в) $f(x) = 3 + \operatorname{arctg} x,\ k = \frac{1}{2};$

г) $f(x) = \operatorname{arcctg} 3x,\ k = 3.$

43.14. Какой угол образует с осью x касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

а) $f(x) = 4 + x^2,\ a = 2;$

б) $f(x) = 1 - \frac{1}{x},\ a = 3;$

в) $f(x) = (1 - x)^3,\ a = -3;$

г) $f(x) = 2x - x^3,\ a = 1?$

Какой угол образует с осью x касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

43.15. а) $f(x) = x^2$, $a = 0{,}5$; в) $f(x) = 0{,}2x^5$, $a = -1$;

б) $f(x) = -3x^3$, $a = \frac{1}{3}$; г) $f(x) = -0{,}25x^4$, $a = 0$.

43.16. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$, $a = 1$;

б) $f(x) = -7x^3 + 10x^2 + x - 12$, $a = 0$.

43.17. а) $f(x) = \frac{2x - 1}{3 - 2x}$, $a = \frac{1}{2}$; б) $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$, $a = 1$.

43.18. а) $f(x) = \sqrt{6x + 7}$, $a = 3\frac{1}{3}$; б) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$, $a = 2$.

43.19. а) $f(x) = \sqrt{3}\cos\frac{x}{3}$, $a = \frac{3\pi}{2}$; б) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, $a = \frac{\pi}{2}$.

43.20. а) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin\frac{x}{3}$, $a = 3\pi$;

б) $f(x) = \cos x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $a = \frac{\pi}{3}$.

○43.21. а) $f(x) = |2x - x^2|$, $a = 1$;

б) $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$, $a = -2$;

в) $f(x) = |x^2 + 4x|$, $a = -3$;

г) $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$, $a = -1$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

43.22. а) $f(x) = x^2$, $a = 3$;

б) $f(x) = 2 - x - x^3$, $a = 0$;

в) $f(x) = x^3$, $a = 1$;

г) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $a = -1$.

○43.23. а) $f(x) = \frac{3x - 2}{3 - x}$, $a = 2$; в) $f(x) = \frac{2x - 5}{5 - x}$, $a = 4$;

б) $f(x) = \frac{1}{(x + 2)^3}$, $a = -3$; г) $f(x) = \frac{1}{4(2x - 1)^2}$, $a = 1$.

○43.24. а) $f(x) = 2\sqrt{3x - 5}$, $a = 2$;

б) $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$, $a = 3$.

○43.25. а) $f(x) = \cos\frac{x}{3},\ a = 0$;   в) $f(x) = \sin 2x,\ a = \frac{\pi}{4}$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg} 2x,\ a = \frac{\pi}{4}$;   г) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{3},\ a = 0$.

○43.26. а) $f(x) = \arccos 3x + 2x,\ a = 0$;

б) $f(x) = 3x^2 - 0{,}2\arcsin 5x,\ a = 0$;

в) $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + 3\sqrt{x},\ a = 1$;

г) $f(x) = \frac{1}{x} - 5\operatorname{arcctg} 2x,\ a = 1$.

●43.27. а) $f(x) = \sin^3 2x,\ a = \frac{\pi}{12}$;

б) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\operatorname{arctg} 3x},\ a = \frac{1}{3}$;

в) $f(x) = \cos^2 2x,\ a = \frac{\pi}{8}$;

г) $f(x) = 2\operatorname{arcctg}(3x^2) + 3\operatorname{arctg}(2x^3),\ a = 0$.

○43.28. а) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, \text{ если } x \geqslant -3, \\ -2x - 3, \text{ если } x < -3, \end{cases}\ a = -2$;

б) $f(x) = |x^2 - 3x|,\ a = 4$;

в) $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -4x, \text{ если } x < 0, \end{cases}\ a = 1$;

г) $f(x) = x^2 - 7|x| + 10,\ a = -1$.

○43.29. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = f(x)$ в точках его пересечения с осью абсцисс, если:

а) $f(x) = 9 - x^2$;   в) $f(x) = x^3 - 4x$;

б) $f(x) = x^3 - 27$;   г) $f(x) = x^3 - x^4$.

○43.30. Напишите уравнения касательных к параболе:

а) $y = x^2 - 3x$ в точках с ординатой 4;

б) $y = -x^2 + 5x$ в точках с ординатой 6.

○43.31. В какой точке касательная к графику функции $y = x^2$ параллельна заданной прямой:

а) $y = 2x + 1$;   в) $y = \frac{3}{4}x - 2$;

б) $y = -\frac{1}{2}x + 5$;   г) $y = -x + 5$?

○43.32. Напишите уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{x^3}{3} - 2$, которые параллельны заданной прямой:

а) $y = x - 3$; б) $y = 9x - 5$.

○43.33. Напишите уравнения тех касательных к графику функции $y = \arcsin x$, которые параллельны заданной прямой:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = x + 2$.

В какой точке графика заданной функции $y = f(x)$ касательная параллельна заданной прямой:

○43.34. а) $y = 3 + x$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x - 4$;

б) $y = 0$, $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 8$;

в) $y = x - 3$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 7$;

г) $y = 2$, $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + 6$?

○43.35. а) $f(x) = \sin x$, $y = -x$; в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $y = x$;

б) $f(x) = \cos 3x$, $y = 0$; г) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $y = -1$?

○43.36. а) $f(x) = \cos^2 x$, $y = -x + 3$;

б) $f(x) = \operatorname{arcctg}(x^2)$, $y = -3$;

в) $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $y = 5$;

г) $f(x) = (\arcsin x)^2$, $y = -5$.

К графику заданной функции проведите касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = 2 - x$:

○43.37. а) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - x$; б) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - x$.

○43.38. а) $y = \frac{3x + 7}{x - 3}$; б) $y = \frac{x + 9}{x + 8}$.

○43.39. а) $y = -4\sqrt{x + 7}$; б) $y = \sqrt{1 - 2x}$.

○43.40. а) $y = \arccos x$; б) $y = \operatorname{arcctg} x$.

○43.41. а) На графике функции $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ найдите точки, в которых касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°. Составьте уравнения этих касательных.

б) На графике функции $y = \dfrac{3x + 7}{x + 2}$ найдите точки, в которых касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 135°. Составьте уравнения этих касательных.

○43.42. Составьте уравнение той касательной к графику функции $y = f(x)$, которая образует с осью x заданный угол α, если:

а) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 3\sqrt{3}x$, $\alpha = 60°$;

б) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}x^3$, $\alpha = 30°$.

○43.43. а) Вычислите координаты точек пересечения с осью y тех касательных к графику функции $y = \dfrac{3x - 1}{x + 8}$, которые образуют угол 45° с осью x.

б) Вычислите координаты точек пересечения с осью y тех касательных к графику функции $y = \dfrac{x + 4}{x - 5}$, которые образуют угол 135° с осью x.

○43.44. Составьте уравнение параболы $y = x^2 + bx + c$, касающейся прямой $y = -x$ в точке $M(1;\ 1)$.

○43.45. Проведите касательную к графику функции $y = x^2 + 1$, проходящую через точку A, не принадлежащую этому графику, если:

а) $A(-1;\ -2)$; б) $A(0;\ 0)$; в) $A(0;\ -3)$; г) $A(-1;\ 1)$.

○43.46. Через данную точку B проведите касательную к графику функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = -x^2 - 7x + 8$, $B(1;\ 1)$;

б) $f(x) = -x^2 - 7x + 8$, $B(0;\ 9)$.

Через данную точку B проведите касательную к графику функции $y = f(x)$:

●43.47. а) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $B(-2; 3)$;

б) $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $B(4; 0)$.

●43.48. а) $f(x) = \sqrt{4x - 3}$, $B(2; 3)$;

б) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $B(1; 2)$.

○43.49. а) Найдите все значения x, при каждом из которых касательная к графику функции $y = \cos 7x + 7 \cos x$ в точках с абсциссой x параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\frac{\pi}{6}$.

б) Найдите все значения a, при каждом из которых касательные к графикам функций $y \quad 2 \quad 14 \sin 3x$ и $y = 6 \sin 7x$ в точках с абсциссой $x = a$ параллельны.

●43.50. а) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна 2,25.

б) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$, $x < 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{9}{8}$.

●43.51. а) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3$, $x > 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{2}{3}$.

б) Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3$, $x < 0$, отсекающей от осей координат треугольник, площадь которого равна $\frac{27}{8}$.

●43.52. а) На оси y взята точка B, из нее проведены касательные к графику функции $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$. Известно, что эти касательные образуют между собой угол 90°. Найдите координаты точки B.

б) Составьте уравнения тех касательных к графику функции $y = 0{,}5x^2 - 2{,}5$, которые пересекаются под углом 90° в точке, лежащей на оси y.

●43.53. а) На оси y взята точка B, из нее проведены касательные к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Известно, что эти касательные образуют между собой угол 60°. Найдите координаты точки B.

б) Составьте уравнения тех касательных к графику функции $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(1 - x^2)$, которые пересекаются под углом 120° в точке, лежащей на оси y.

●43.54. а) Найдите точку пересечения касательных к графику функции $y = x^2 - |2x - 6|$, проведенных через точки с абсциссами $x = 5$, $x = -5$.

б) Найдите точку пересечения касательных к графику функции $y = x^3 + |x - 1|$, проведенных через точки с абсциссами $x = 2$, $x = -2$.

●43.55. а) При каких значениях параметра p касательная к графику функции $y = x^3 - px$ в точке $x = 1$ проходит через точку (2; 3)?

б) При каких значениях параметра p касательная к графику функции $y = x^3 + px^2$ в точке $x = 1$ проходит через точку (3; 2)?

●43.56. Является ли прямая $y = 4x - 5$ касательной к графику заданной функции? Если да, то найдите координаты точки касания:

а) $y = x^3 + x^2 - x - 2$; б) $y = x^3 - 2x^2 - 7x - 13$.

○43.57. Найдите все такие значения параметра a, при которых касательные, проведенные к графикам функций $y = f(x)$ в точке $(a; f(a))$ и $y = g(x)$ в точке $(a; g(a))$, параллельны:

а) $f(x) = x^6$; $g(x) = x^7$; б) $f(x) = x^4$; $g(x) = x^5$.

●43.58. а) При каких значениях параметра a прямая $y = ax + 1$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{4x + 1}$?

б) При каких значениях параметра a прямая $y = 2x + a$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{4x - 1}$?

●43.59. а) К графику функции $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ проведена касательная, параллельная прямой $y - 4x - 1 = 0$. Найдите ординату точки касания.

б) К графику функции $y = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ проведена касательная, параллельная прямой $3y - 6x + 2 = 0$. Найдите ординату точки касания.

●43.60. а) Найдите наименьшее положительное значение x, при котором касательные к графикам функций $y = 3\cos\frac{5x}{2}$ и $y = 5\cos\frac{3x}{2} + 2$ параллельны.

б) Найдите наибольшее отрицательное значение x, при котором касательные к графикам функций $y = 2 - 14\sin 3x$ и $y = 6\sin 7x$ параллельны.

●43.61. а) Точка A с абсциссой -1 и точка B с абсциссой 1 принадлежат графику функции $y = 2x^3 + 3x^2 - \frac{x}{2} + 1$. Найдите сумму абсцисс всех тех точек, в каждой из которых касательная к этому графику параллельна прямой AB.

б) Точка A с абсциссой -3 и точка B с абсциссой 3 принадлежат графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 \quad 2x^2 \quad 22x - 28$. Найдите сумму абсцисс всех тех точек, в каждой из которых касательная к этому графику параллельна прямой AB.

●43.62. а) Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = x^2 - x + 1$ и $y = x^2 + 5x + 4$.

б) Найдите точку пересечения общих касательных к графикам функций $y = x^2$ и $y = -x^2 - 8$.

●43.63. Углом между кривыми называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения. Под каким углом пересекаются кривые:

а) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$?

●43.64. Докажите, что параболы $y = \frac{(x-1)^2}{2}$ и $y = \frac{(x+1)^2}{2}$ перпендикулярны в точке их пересечения.

●43.65. а) Из какой точки оси y кривая $y = \sqrt{1 + x^2}$ видна под углом 120°?
б) Найдите множество точек координатной плоскости, из которых парабола $y = x^2$ видна под прямым углом.

●43.66. а) Найдите значение параметра a, при котором касательная к графику функции $y = x^3 + a^2x - a$ в точке $x = -1$ проходит через точку $M(1; 7)$.
б) Найдите значение параметра a, при котором касательная к графику функции $y = x^4 - 3x^3 + 2a$ в точке $x = -2$ проходит через точку $M(-1; -8)$.

●43.67. а) Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к графику функции $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $x = 3$.
б) Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к графику функции $y = \sqrt{x^2 - 9}$ в точке $x = 5$.

●43.68. а) Прямая $y = 6x - 7$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке $M(2; 5)$. Найдите значения коэффициентов b и c.
б) Прямая $y = 7x - 10$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке $x = 2$. Найдите значения коэффициентов a, b и c, если известно, что парабола пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$.

●43.69. Докажите, что треугольник, образованный касательной к гиперболе $y = \frac{a^2}{x}$ и осями координат, имеет постоянную площадь, а точка касания является центром окружности, описанной около этого треугольника. Рассмотрев чертеж к задаче, придумайте геометрический способ построения касательной к гиперболе.

●43.70. Докажите, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке $x = a$ делит пополам отрезок $[0; a]$ оси абсцисс. Рассмотрев чертеж к задаче, придумайте геометрический способ построения касательной к параболе. Обобщите этот результат и этот способ построения касательной на любую степенную функцию $y = x^n$, где n — натуральное число, большее 2.

§ 44. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы

44.1. Определите, какой знак имеет производная функции $y = f(x)$ в точках с абсциссами a, b, c, d:

а) рис. 98; б) рис. 99.

44.2. По графику производной функции $y = f(x)$, представленному на заданном рисунке, определите, на каких промежутках функция $y = f(x)$ возрастает, а на каких убывает:

а) рис. 100; б) рис. 101; в) рис. 102; г) рис. 103.

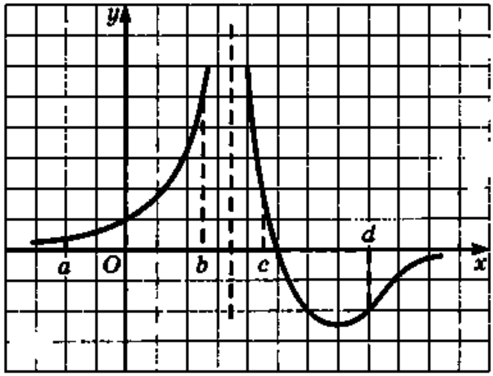

Рис. 98

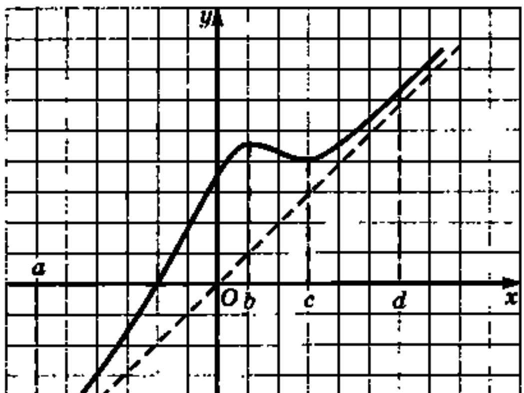

Рис. 99

44.3. На каком из указанных промежутков функция $y = f(x)$ убывает, если график ее производной представлен на рис. 104:

а) $(-2; 1)$; б) $(-\infty; 4)$; в) $(4; +\infty)$; г) $(-\infty; -2)$?

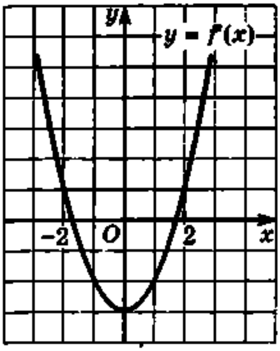

Рис. 100

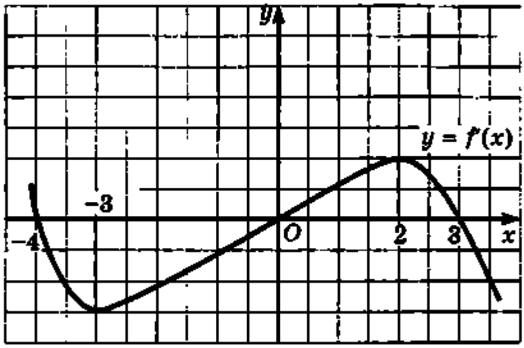

Рис. 101

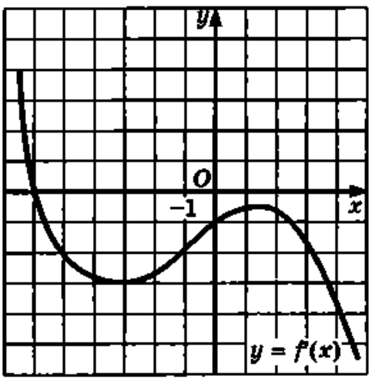

Рис. 102

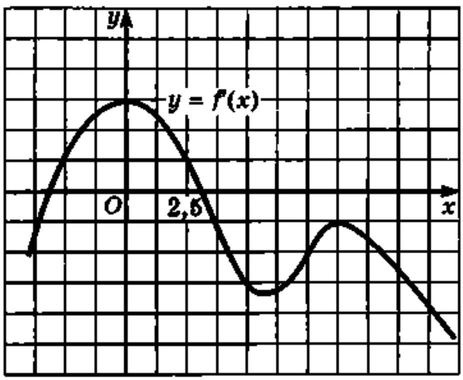

Рис. 103

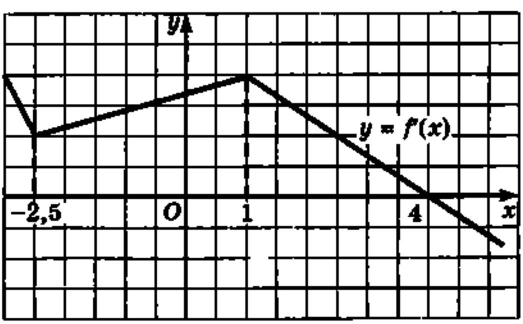

Рис. 104

44.4. Определите, для какой из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ отрезок $[-1; 1]$ является промежутком возрастания, если на рис. 105, 106, 107 изображены графики производных этих функций.

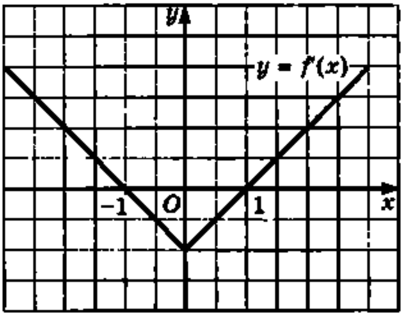

Рис. 105

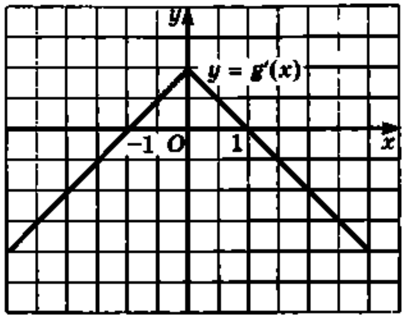

Рис. 106

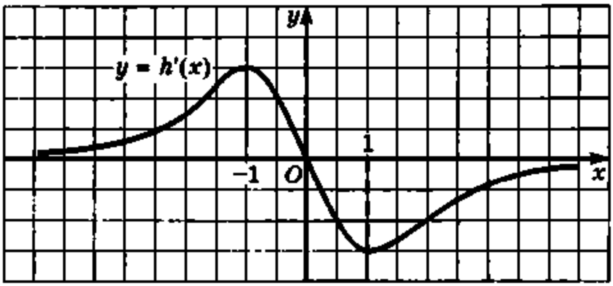

Рис. 107

44.5. На рис. 108, 109, 110 изображены графики производных $y = f'(x)$, $y = g'(x)$, $y = h'(x)$. Определите, какая из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$:

а) возрастает на R; б) убывает на R?

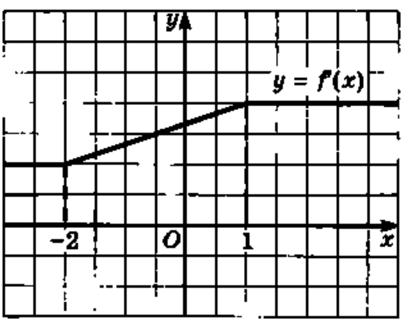

Рис. 108

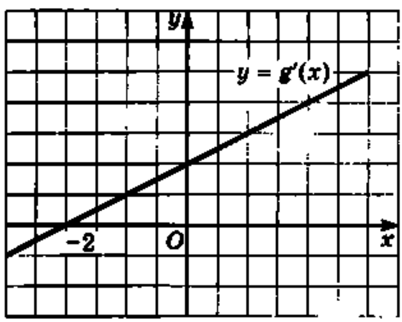

Рис. 109

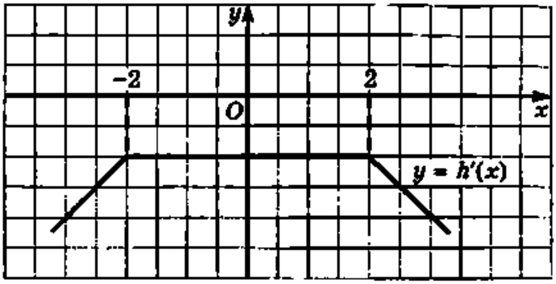

Рис. 110

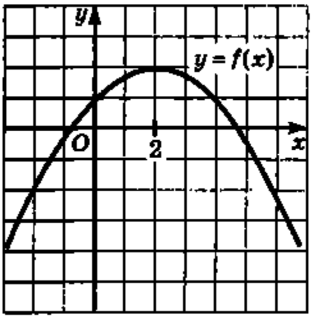

Рис. 111

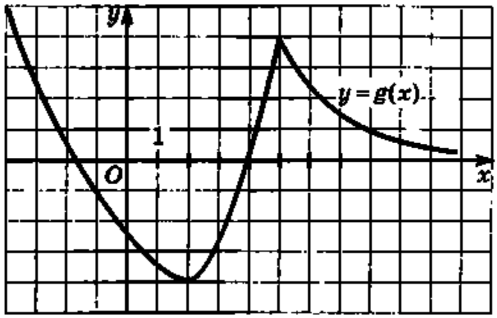

Рис. 112

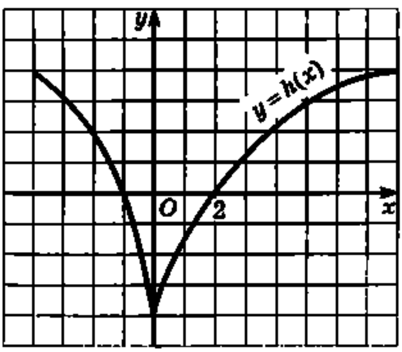

Рис. 113

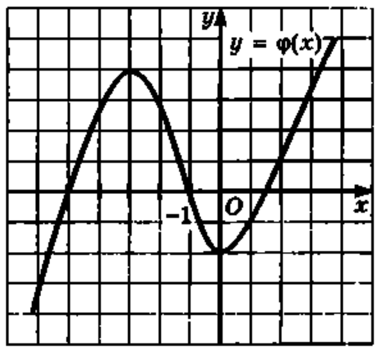

Рис. 114

На рис. 111—114 изображены графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ и $y = \varphi(x)$, определенных на всей числовой прямой. Используя их, решите неравенство:

44.6. а) $f'(x) > 0$; б) $g'(x) < 0$; в) $h'(x) < 0$; г) $\varphi'(x) > 0$.

44.7. а) $f'(x) \leqslant 0$; б) $g'(x) \geqslant 0$; в) $h'(x) \geqslant 0$; г) $\varphi'(x) \leqslant 0$.

44.8. а) Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что данная функция возрастает на $(-\infty; 1)$ и убывает на промежутке $(1; +\infty)$.

б) Изобразите эскиз графика производной функции $y = f(x)$, если известно, что данная функция убывает на луче $(-\infty; -1]$, возрастает на отрезке $[-1; 3]$, убывает на луче $[3; +\infty)$.

44.9. Изобразите эскиз графика функции $y = f(x)$, если промежутки постоянства знака производной $f'(x)$ представлены на схеме:

а) рис. 115; в) рис. 117;
б) рис. 116; г) рис. 118.

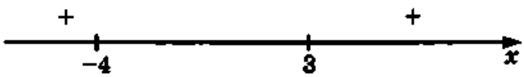

Рис. 115

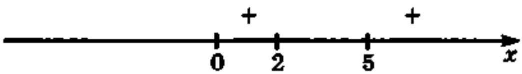

Рис. 116

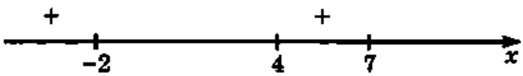

Рис. 117

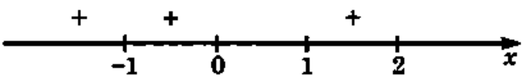

Рис. 118

○44.10. Докажите, что заданная функция возрастает на R:

а) $y = \cos x + 2x$; в) $y = x^5 + 3x^3 + 7x + 4$;
б) $y = \sin x + x^3 + x$; г) $y = x^5 + 4x^3 + 8x - 8$.

○44.11. Докажите, что заданная функция убывает на R:

а) $y = \sin 2x - 3x$; б) $y = \cos 3x + 4x$.

○44.12. Докажите, что функция монотонна на всей числовой прямой. Укажите характер монотонности.

а) $y = x^5 + 6x^3 - 7$; в) $y = \sin x - 2x - 15$;

б) $y = x - \cos x + 8$; г) $y = 11 - 5x - x^3$

Докажите, что заданная функция возрастает:

○44.13. а) $y = x^5 + 3x - 6$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = 15 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}$ на $(-\infty, 0)$;

в) $y = x^7 + 7x^3 + 2x - 42$ на $(-\infty; +\infty)$;

г) $y = 21x - \frac{1}{x^5}$ на $(0, +\infty)$.

○44.14. а) $y = 7x - \cos 2x$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = 10x + \sin 3x$ на $(-\infty; +\infty)$.

○44.15. а) $y = 2x^3 + 2x^2 + 11x - 35$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = 3x^3 - 6x^2 + 41x - 137$ на $(-\infty; +\infty)$.

○44.16. а) $y = \frac{4x}{4x + 1}$ на $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$;

б) $y = \frac{2x - 13}{x - 5}$ на $(-\infty, 5)$.

Докажите, что заданная функция убывает:

○44.17. а) $y = -x^3 - 5x + 3$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = -2x^5 - 7x^3 - x + 8$ на $(-\infty; +\infty)$;

в) $y = -x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ на $(-\infty; +\infty)$;

г) $y = -4x^3 + 4x^2 - 2x + 9$ на $(-\infty; +\infty)$.

○44.18. а) $y = \frac{3x + 7}{x + 2}$ на $(-2, +\infty)$;

б) $y = \frac{-4x + 1}{2x + 1}$ на $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

○44.19. а) $y = 7\cos x - 5\sin 3x - 22x$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = 3\cos 7x - 8\sin \frac{x}{2} - 25x + 1$ на $(-\infty; +\infty)$.

○44.20. Определите промежутки монотонности функции:

а) $y = x^3 + 2x$;

б) $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$;

в) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$;

г) $y = -x^5 + 5x$.

Определите промежутки монотонности функции:

○44.21. а) $y = \frac{3x-1}{3x+1}$; б) $y = \frac{1-2x}{3+2x}$.

○44.22. а) $y = \sqrt{3x-1}$; в) $y = \sqrt{1-2x}$;

б) $y = \sqrt{1-x} + 2x$; г) $y = \sqrt{2x-1} - x$.

○44.23. а) $y = \frac{x^2}{x^2+2}$; б) $y = -\frac{3x^2}{x^2+4}$.

○44.24. а) $y = \sin^2 x$; в) $y = \cos^2 x$;

б) $y = \frac{1}{\cos^3 x}$; г) $y = \frac{1}{\sin^5 x}$.

○44.25. а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$; б) $y = \sqrt{5x - 2 - 2x^2}$.

●44.26. а) $y = \arcsin x^2$; в) $y = \arccos \sqrt{x}$;

б) $y = \text{arcctg}\, \sqrt{x}$; г) $y = \text{arctg}^2\, x$.

●44.27. а) $y = \begin{cases} 2x^3 - 6x, \text{ если } x \geqslant -1, \\ x^2 + 2x + 3, \text{ если } x < -1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3x^4 - 4x^3, \text{ если } x \leqslant 2, \\ -x^2 + 4x + 12, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

●44.28. а) $y = \begin{cases} x^5 - 5x^4 + 1, \text{ если } x \geqslant 0, \\ (x+2)^2 - 3, \text{ если } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -3x^5 + 5x^3 - 2, \text{ если } x \geqslant -1, \\ \frac{4}{x}, \text{ если } x < -1. \end{cases}$

○44.29. Исследуйте на монотонность функцию $y = f(x)$ и постройте (схематически) ее график:

а) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; в) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$;

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; г) $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 7$.

○44.30. Постройте график функции $y = f(x)$, $x \in [0; 10]$, производная которой равна нулю на интервалах $(0; 2)$; $(2; 6)$; $(6; 10)$, если известно, что $f(1) = 0$, $f(5) = 3$, $f(8) = -2$.

При каких значениях параметра a функция возрастает на всей числовой прямой:

○**44.31.** а) $y = x^3 + ax$; б) $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 + 5x - 3$?

○**44.32.** а) $y = ax - \cos x$; б) $y = 2 \sin 2x - ax$?

○**44.33.** При каких значениях параметра b функция убывает на всей области определения:

а) $y = 7 + bx - x^2 - x^3$; в) $y = x^3 + bx^2 + 3x + 21$;

б) $y = -2\sqrt{x + 3} + bx$; г) $y = -2bx + \sqrt{1 - x}$?

●**44.34.** При каких значениях параметра a функция $y = x^2 - 3x$:

а) убывает на отрезке $[a + 1;\ a + 3]$;

б) возрастает на отрезке $\left[a - \frac{1}{2};\ 2a + 2\right]$;

в) убывает на отрезке $\left[a - 3;\ \frac{1}{6}a + \frac{2}{3}\right]$;

г) возрастает на отрезке $[a - 2{,}5;\ a - 0{,}5]$?

○**44.35.** а) При каких значениях параметра a функция $y = 2x^3 - 3x^2 + 7$ возрастает в интервале $(a - 1;\ a + 1)$?

б) При каких значениях параметра a функция $y = -x^3 + 3x + 5$ убывает в интервале $\left(a;\ a + \frac{1}{2}\right)$?

○**44.36.** По графику функции $y = f(x)$, $x \in R$, изображенному на заданном рисунке, определите точки, в которых ее производная обращается в 0:

а) рис. 119; б) рис. 120; в) рис. 121; г) рис. 122.

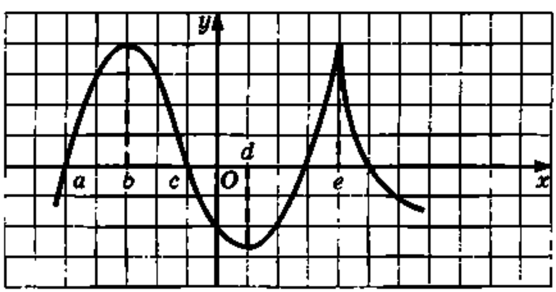

Рис. 119

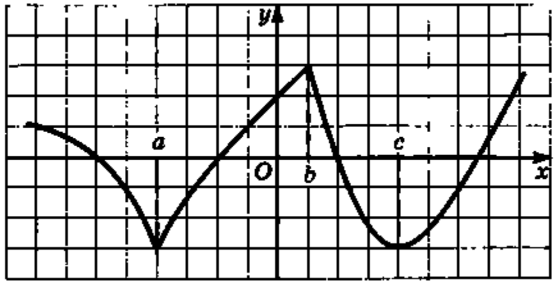

Рис. 120

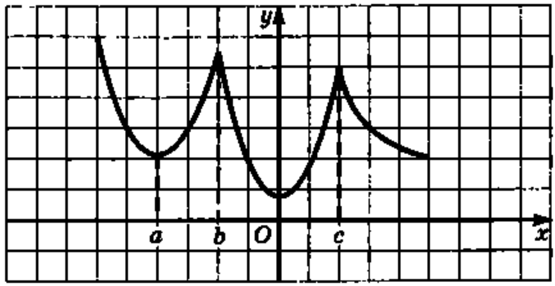

Рис. 121

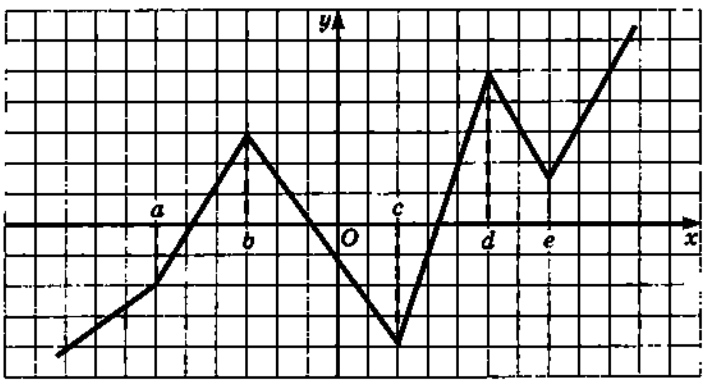

Рис. 122

○44.37. По графику функции $y = f(x)$, $x \in R$, изображенному на заданном рисунке, определите точки, в которых производная не существует:

а) рис. 119; б) рис. 120; в) рис. 121; г) рис. 122.

○44.38. При каких значениях параметра a заданная функция имеет одну стационарную точку:

а) $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$; б) $y = x^3 - 3ax^2 + 75x - 10$?

44.39. Сколько точек минимума имеет функция $y = f(x)$, график которой изображен на заданном рисунке:

а) рис. 119; б) рис. 120; в) рис. 121; г) рис. 122?

44.40. Сколько точек максимума имеет функция $y = f(x)$, график которой изображен на заданном рисунке:

а) рис. 119; б) рис. 120; в) рис. 121; г) рис. 122?

44.41. Используя данные о производной $y = f'(x)$, приведенные в таблице,

x	$(-\infty,\ 5)$	-5	$(-5; -2)$	-2	$(-2; 8)$	8	$(8; +\infty)$
$y = f'(x)$	$+$	0		0	$+$	0	$+$

укажите:

а) промежутки возрастания функции $y = f(x)$;

б) промежутки убывания функции $y = f(x)$;

в) точки максимума функции $y = f(x)$;

г) точки минимума функции $y = f(x)$.

44.42. По графику $y = f'(x)$, изображенному на заданном рисунке, определите, имеет ли функция $y = f(x)$ точки экстремума:

а) рис. 100; б) рис. 101; в) рис. 102; г) рис. 103.

○44.43. Постройте эскиз графика какой-нибудь функции, обладающей указанными свойствами:

а) функция имеет две точки максимума, одну точку минимума и является ограниченной;

б) функция возрастает при $x \leqslant 1$ и при $x \geqslant 5$ и убывает на промежутке $[1; 5]$, точка $x = 1$ является критической, а точка $x = 5$ — стационарной;

в) функция имеет разрыв в точке $x = -2$, максимум в точке $x = -1$ и минимум в точке $x = 1$;

г) функция имеет горизонтальную асимптоту $y = 3$ при $x \to \infty$, одну точку максимума и одну точку минимума.

○44.44. а) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале (a, b), имеющей на этом интервале одну точку минимума, две точки максимума и не имеющей наименьшего значения.

б) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале (a, b), имеющей на нем две точки минимума, две точки максимума, но не имеющей ни наименьшего, ни наибольшего значений.

○44.45. Может ли иметь только одну точку экстремума:

а) четная функция; в) периодическая функция;

б) нечетная функция; г) монотонная функция?

○44.46. По графику функции $y = f(x)$, $x \in R$ изображенному на заданном рисунке, постройте эскиз графика ее производной:

а) рис. 123; б) рис. 124; в) рис. 125; г) рис. 126.

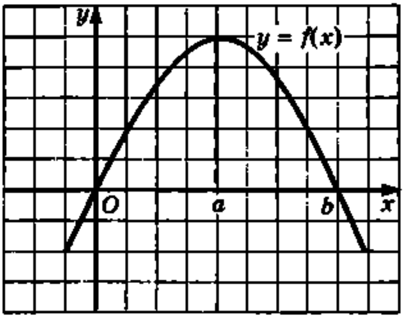

Рис. 123

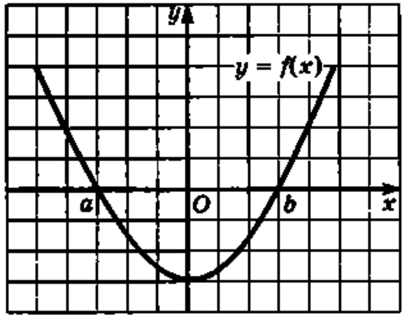

Рис. 124

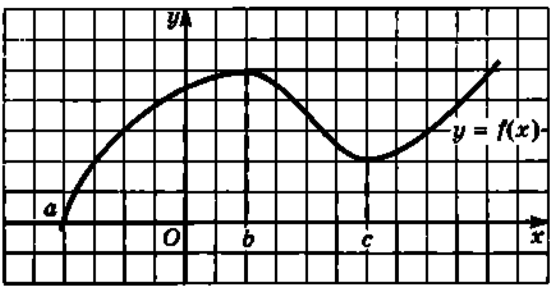

Рис. 125

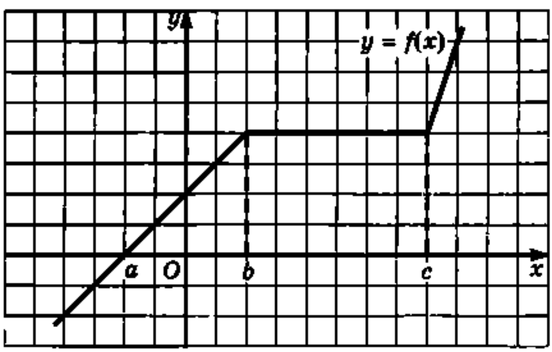

Рис. 126

○44.47. Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$, $x \in R$ по графику производной, изображенному на заданном рисунке: а) рис. 127; б) рис. 128; в) рис. 129; г) рис. 130.

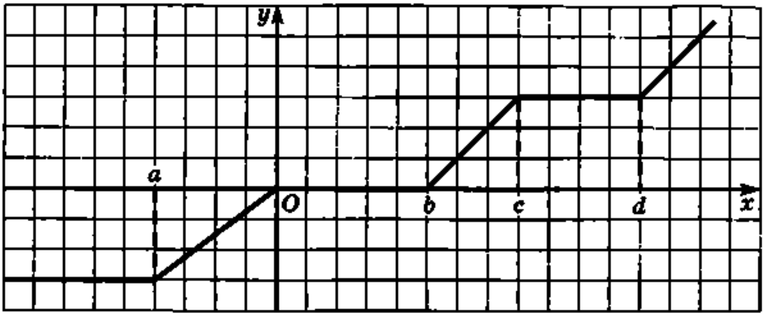

Рис. 127

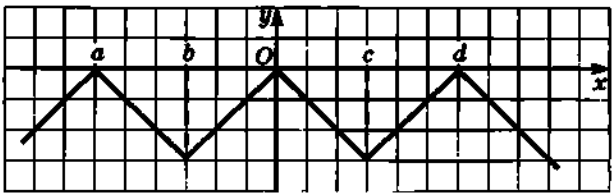

Рис. 128

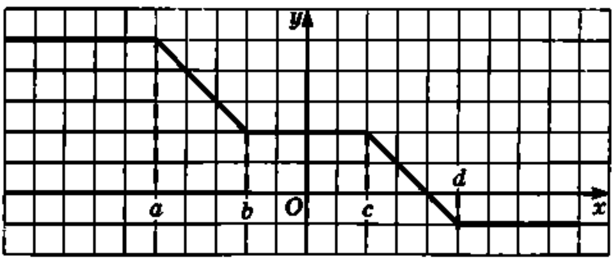

Рис. 129

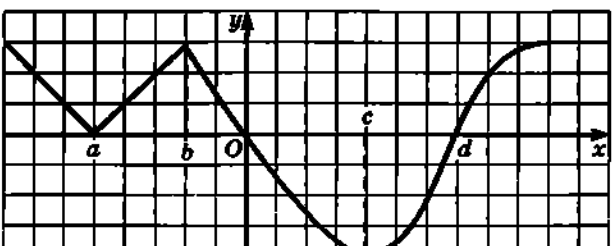

Рис. 130

Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер:

○44.48. а) $y = 2x^2 - 7x + 1$; в) $y = 4x^2 - 6x - 7$;
б) $y = 3 - 5x - x^2$; г) $y = -3x^2 - 12x + 50$.

○44.49. а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$; в) $y = x^3 - 7x^2 - 5x + 11$;
б) $y = x^3 - 27x + 26$; г) $y = 2x^3 - 21x^2 + 19$.

○44.50. а) $y = 5x^5 - 3x^3$; в) $y = x^4 - 50x^2$;
б) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13$; г) $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$.

○44.51. а) $y = x + \frac{4}{x}$; б) $y = \frac{x^2 + 9}{x}$.

○44.52. а) $y = x - 2\sqrt{x - 2}$; в) $y = 4\sqrt{2x - 1} - x$;
б) $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{5 - x}$; г) $y = \sqrt{x} + 2\sqrt{7 - x}$.

○44.53. а) $y = x - 2\cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$;
б) $y = 2\sin x - x$, $x \in [\pi, 3\pi]$.

○44.54. а) $y = (x^3 - 27x)^3$; в) $y = (x^3 - 3x^2)^4$;
б) $y = \sqrt{x^3 - 27x}$; г) $y = \sqrt{x^3 - 3x^2}$.

●44.55. а) $y = \arcsin x^2$; в) $y = \arccos x^2$;
б) $y = 3\operatorname{arcctg}\sqrt{x}$; г) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{2x}$.

○44.56. Докажите, что заданная функция не имеет ни точек максимума, ни точек минимума:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - 12$; в) $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x - 7$;

б) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 9$; г) $y = -x^3 - x^5 + 27$.

○44.57. Производная функции $y = ax^2 + 7x + 1$ в точке x_0 равна c. Найдите точку экстремума функции и определите, является она точкой максимума или точкой минимума, если:
а) $x_0 = 0{,}5$, $c = 15$; в) $x_0 = -1$, $c = 9$;
б) $x_0 = 3$, $c = -5$; г) $x_0 = -0{,}5$, $c = 7{,}1$.

●44.58. Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер:
а) $y = |x^4 + 1| + |x^4 - 1| + 2x^3$;
б) $y = |x^3 - 8| + |x^3 - 1| - x^2$.

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

○44.59. а) $y = \sin x - \frac{1}{2}x$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \cos x$;

б) $y = \frac{x}{2} - \cos x$; г) $y = x - \sin x$.

○44.60. а) $y = x - \sin 2x$; б) $y = x + 4\cos\frac{x}{2}$.

○44.61. а) $y = |x - 3| - 2$; в) $y = |(x - 2)(x + 3)|$;

б) $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$; г) $y = (|x| - 2)|x|$.

○44.62. а) $y = |x^3 - 3x|$; б) $y = |x - x^3|$.

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы и постройте ее график:

○44.63. а) $y = 3x^2 - 4x + 5$; в) $y = 7 - x - 2x^2$;

б) $y = 3 + 2x - x^2$; г) $y = 5x^2 - 15x - 4$.

○44.64. а) $y = 3x^2 - x^3$; в) $y = x^3 + 3x^2$;

б) $y = 6x + x^3$; г) $y = 3x - x^3$.

○44.65. а) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; в) $y = -x^3 + 4x^2 - 3$;

б) $y = -x^3 + 4x - 3$; г) $y = x^3 - 3x + 2$.

○44.66. а) $y = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$;

б) $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$;

в) $y = x^3 + x^2 - x - 1$;

г) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \frac{5}{3}$.

○44.67. а) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$; в) $y = 2x^4 - 9x^2 + 7$;

б) $y = x^5 - 5x$; г) $y = 5x^3 - 3x^5$

○44.68. а) $y = (x - 1)^2(x + 2)$; в) $y = (x + 2)^2(x - 3)$;

б) $y = \frac{256}{9}x(x - 1)^3$; г) $y = x^3(2 - x)$.

Решите уравнение:

○44.69. а) $x^5 + 5 = 15 - x$; в) $2x^5 + 3x^3 = 17 - 12x$;

б) $x^5 + 3x^3 + 7x - 11 = 0$; г) $x^5 + 4x^3 + 8x - 13 = 0$.

●44.70. а) $\sin 5x - 2\cos x - 8x = x^5 - 2$;

б) $4\cos 3x + 5\sin\frac{x}{2} + 15 = 4 - x^3$.

●44.71. а) $3\cos \pi x + 5\sin \frac{\pi x}{2} + 18x = 43 - x^5 - 22x^3$;

б) $2\sin \frac{\pi}{2}x - 2\cos \pi x - 10x = x^5 - 54$.

Докажите тождество:

●44.72. а) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

●44.73. а) $\arccos \sqrt{1 - x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arcsin x, & -1 \leqslant x < 0; \end{cases}$

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$

●44.74. Докажите, что функция $y = f(x)$ постоянна на указанном промежутке и найдите значение этой постоянной:

а) $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ при $x \geqslant 1$;

б) $f(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + \operatorname{arctg} x$ при $x < 0$.

Докажите неравенство:

●44.75. а) $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$, если $x > \frac{2}{3}$;

б) $2\sqrt{x} \geqslant 3 - \frac{1}{x}$, если $x > 0$.

●44.76. а) $\arcsin x > x$, если $0 < x < 1$;

б) $\operatorname{arctg} x > x - \frac{x^3}{3}$, если $x > 0$.

§ 45. Построение графиков функций

Исследуйте функцию и постройте ее график:

○45.1. а) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{-2}{x^2 + 4}$.

○45.2. а) $y = \frac{-1}{x^2 + 4x + 4}$; б) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$.

○**45.3.** а) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$; б) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

○**45.4.** а) $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$; б) $y = \frac{x - 2}{x^2 + 5}$.

○**45.5.** а) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$; б) $y = \frac{x - 3}{x^2 - 8}$.

○**45.6.** а) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; б) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

○**45.7.** а) $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$; б) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

●**45.8.** а) $y = 2\sqrt{x} - x$; б) $y = \sqrt{x + 4} + \frac{2}{3}\sqrt{9 - 3x}$.

●**45.9.** а) $y = \sqrt{\frac{x - 1}{x}}$; б) $y = (x - 3)\sqrt{x}$.

●**45.10.** а) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; б) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

○**45.11.** а) Постройте график функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$.

б) При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 2x^2 + 3 = a$ имеет три корня?

○**45.12.** а) Постройте график функции $y = -x^4 + 2x^2 + 8$.

б) При каких значениях параметра a уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней?

○**45.13.** Сколько корней имеет заданное уравнение при указанных ограничениях на параметр a:

а) $x^3 - 3x^2 = a$, $-4 < a < 0$;

б) $-x^3 + 3x^2 - 2 = a$, $a < -2$;

в) $3x^2 - x^3 = a$, $0 < a < 4$;

г) $x^3 - 3x^2 + 2 = a$, $a > 2$?

●**45.14.** Сколько корней имеет уравнение $x^3 + ax + 2 = 0$ при различных значениях параметра a?

○**45.15.** Решите уравнение:

а) $3\sqrt{x + 1} = -x^2 + 3x^2 + 6$;

б) $x^3 - 3x = (x + 1)^6 + 2$.

§ 46. Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном отрезке без помощи производной:

○46.1. а) $y = x^8 - 1$, $[-1; 2]$; в) $y = x^3 - 4$, $[0; 3]$;
б) $y = -x^5 + 2$, $[-2; 1]$; г) $y = -2x^4 + 8$, $[0; 3]$.

○46.2. а) $y = (x - 1)^3 + 4$, $[-2; 1]$;
б) $y = 7 - (2x - 8)^4$, $[-1; 3]$;
в) $y = 5 - (3x + 6)$, $[-2; 0]$;
г) $y = 2(x + 3)^6 - 4$, $[-1; 2]$.

○46.3. а) $y = \sin x - 3$, $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$;

б) $y = \cos x + 0{,}5$, $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$;

в) $y = -2\sin x + 1$, $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5}{6}\pi\right]$;

г) $y = 4 - 3\cos x$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7}{6}\pi\right]$.

○46.4. а) $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $y = \sqrt{1 + \sin x}$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$, $[0; \pi]$;

г) $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

●46.5. а) $y = \left||x| - 4\right|$, $[-3; 3]$; б) $y = \left|3 - |x|\right|$, $[-4; 4]$.

○46.6. а) $y = 2 - 3\sin x + 4\cos x$;
б) $y = 3\sin x - 4\cos x + 1$.

○46.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \begin{cases} -4x + 12, \text{ если } x < 2, \\ x^2 - 2x + 2, \text{ если } x \geqslant 2 \end{cases}$$

на отрезке:
а) $[-3; 0]$; б) $[3; 4]$; в) $[-1; 3]$; г) $[1; 4]$.

○46.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \begin{cases} (x+2)^2 - 3, \text{ если } x \leqslant -2, \\ x^2 - 4, \text{ если } x > -2. \end{cases}$$

на отрезке:

а) $[-4; -3]$; б) $[0; 2]$; в) $[-2; 3]$; г) $[-3; 0]$.

○46.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном отрезке:

а) $y = x^2 - 8x + 19$, $[-1; 5]$;

б) $y = x^2 + 4x - 3$, $[0; 2]$;

в) $y = 2x^2 - 8x + 6$, $[-1; 4]$;

г) $y = -3x^2 + 6x - 10$, $[-2; 9]$.

○46.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на отрезке:

а) $[-1; 3]$; б) $[3; 6]$; в) $[-2; 3]$; г) $[3; 5]$.

○46.11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 2$ на отрезке:

а) $[-6; 0]$; б) $[1; 2]$; в) $[-6; -1]$; г) $[0; 2]$.

○46.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ на отрезке:

а) $[0; 2]$; б) $[3; 6]$; в) $[-1; 3]$; г) $[2; 7]$.

○46.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$ на отрезке:

а) $[-1; 2]$; б) $[1; 6]$; в) $[-2; 3]$; г) $[1; 7]$.

○46.14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \dfrac{4}{x-1}$ на отрезке:

а) $[2; 4]$; б) $[-2; 0]$.

○46.15. Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на заданном отрезке:

а) $y = \operatorname{ctg} x + x$, $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$;

б) $y = 2\sin x - x$, $[0; \pi]$;

в) $y = 2\cos x + x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

г) $y = \operatorname{tg} x - x$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на заданном промежутке:

○46.16. а) $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $[0{,}5; +\infty)$;

б) $y = x - 2\sqrt{x}$, $[0; +\infty)$;

в) $y = \frac{1}{5}x^5 - x^2$, $(-\infty; 1]$;

г) $y = \frac{x^4}{x^4 + 1}$, $(-\infty; +\infty)$.

○46.17. а) $y = x + \frac{1}{x}$, $(-\infty; 0)$;

б) $y = \frac{3x}{x^2 + 3}$, $[0; +\infty)$;

в) $y = -2x - \frac{1}{2x}$, $(0; +\infty)$;

г) $y = \sqrt{2x + 6} - x$, $[-3; +\infty)$.

○46.18. а) $y = (2x - 1)^2(x - 2)$, $[-1; 2]$;

б) $y = \frac{x^2}{x^2 - 2x - 1}$, $[0; 2]$;

в) $y = (x + 4)(3x + 1)^2$, $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$;

г) $y = \frac{5x^3}{x^2 - 9}$, $[-1; 1]$.

○46.19. а) $y = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 21$, $[-3; 0]$;

б) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 9$, $[0; 4]$;

в) $y = 4x^3 - 21x^2 + 36x - 2$, $[1; 2]$;

г) $y = 0{,}25x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 + 3{,}5$, $[-1; 2]$.

○46.20. а) $y = x^2 - 5|x| + 6$, $[0; 4]$;

б) $y = x^2 - 5|x| + 6$, $[-5; 0]$;

в) $y = x^2 + 8|x| + 7$, $[1; 5]$;

г) $y = x^2 + 8|x| + 7$, $[-8; -2]$.

●46.21. а) $y = x^3 - 2x|x - 2|$, $[-1; 3]$;

б) $y = 3x|x + 1| - x^3$, $[-1; 2]$.

●46.22. а) $y = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, $[0;\ 4]$;
б) $y = |x^3 - 1| - 3x$, $[-1;\ 3]$.

○46.23. а) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $y = \sin^5 x - \cos^5 x$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

○46.24. а) $y = \sin^2 \frac{x}{2} \quad \sin x$, $[-\pi;\ 0]$;

б) $y = \cos^2 0{,}5x \quad \cos x$, $[0;\ \pi]$.

○46.25. а) $y = x^3 - 3x$, $(-\infty;\ 0]$;
б) $y = \frac{x}{x^4 + 8}$, $[0;\ +\infty)$;
в) $y = x^3 - 3x$, $[0;\ +\infty)$;
г) $y = \frac{x}{x^4 + 8}$, $(-\infty;\ 0]$.

○46.26. Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции:
а) $y = x^4 - 2x^2 - 6$ на отрезке $[-2;\ 2]$;
б) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-1;\ 2]$.

Найдите те значения аргумента, при которых заданная функция достигает наибольшего значения:

○46.27. а) $y = \sqrt{(x - 1)(10 - x)}$;
б) $y = \sqrt{(x + 2)(4 - x)}$;
в) $y = \sqrt{(2x - 6)(7 - x)}$;
г) $y = \sqrt{(5 - x)(x - 3)}$.

○46.28. а) $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{9 - x}$;
б) $y = 3\sqrt{x + 1} + \sqrt{-x}$;
в) $y = \sqrt{10 - 2x} + \sqrt{3x}$;
г) $y = \sqrt{8 - 3x} + \sqrt{x}$.

○46.29. Найдите те значения аргумента, при которых заданная функция достигает наименьшего значения:
а) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$;
б) $y = \sqrt{7(x + 9)(x - 6)}$;
в) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 10}$;
г) $y = \sqrt{2(x - 4)(x + 8)}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

○46.30. а) $y = \sqrt{(x - 5)(15 - x)}$;
б) $y = \sqrt{(2x + 4)(3 - x)}$;
в) $y = \sqrt{(12 - x)(x - 4)}$;
г) $y = \sqrt{(5 - x)(3x + 6)}$.

○46.31. а) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$;
б) $y = \sqrt{3x^2 + 6x + 4}$;
в) $y = \sqrt{x^2 + 6x \quad 7}$;
г) $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$.

○46.32. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = -x^3 + 2x^4 + 1$; б) $y = -x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}$.

○46.33. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \sqrt{5 - x^2} + \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{5 - x^2}$

○46.34. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y = 2|x| - 4$; в) $y = 3|x| + 9$;

б) $y = x^2 - 5|x| + 6$; г) $y = x^2 - 6|x| - 7$.

Найдите область значений функции:

○46.35. а) $y = 2x - \sqrt{16x - 4}$, $x \in \left[\frac{1}{4}; \frac{17}{4}\right]$;

б) $y = 2\sqrt{x - 1} - 0{,}5x$, $x \in [1; 10]$.

●46.36. а) $y = x\sqrt{x + 2}$; б) $y = x\sqrt{1 - 2x}$.

●46.37. $y = \dfrac{-2x^2 - 2x - 38}{x^2 + 6x + 34}$.

●46.38. а) При каком значении параметра a наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x + a}$ равно $-6\sqrt{3}$?

б) При каком значении параметра a наибольшее значение функции $y = (a - x)\sqrt{x}$ равно $10\sqrt{5}$?

●46.39. а) При каком значении параметра n сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2nx + 4n^2 + 3n = 0$ будет наибольшей?

б) При каком значенни параметра n сумма квадратов корней уравнения $x^2 + nx + 2n - 1 = 0$ будет наименьшей?

●46.40. Докажите, что при любых значениях x выполняется неравенство:

а) $x^5 + (1 - x)^5 \geqslant \frac{1}{16}$; б) $x^7 + (1 - x)^7 > \frac{\sqrt{2}}{100}$.

○46.41. а) Сумма двух целых чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

б) Произведение двух положительных чисел равно 484. Найдите эти числа, если известно, что их сумма принимает наименьшее значение.

○46.42. а) Разность двух чисел равна 10. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

б) Разность двух чисел равна 98. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

○46.43. а) Известно, что одно из двух чисел на 36 больше другого. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

б) Известно, что одно из двух чисел меньше другого на 28. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

○46.44. а) Представьте число 3 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма утроенного первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей.

б) Представьте число 5 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение первого слагаемого и куба второго слагаемого было наибольшим.

○46.45. а) Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

б) Периметр прямоугольника составляет 72 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

○46.46. а) Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

б) Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 240 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

○46.47. а) Площадь прямоугольника составляет 16 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

б) Площадь прямоугольника составляет 64 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

○46.48. Огораживают спортивную площадку прямоугольной формы площадью 2500 м^2. Каковы должны быть ее размеры, чтобы на забор ушло наименьшее количество сетки рабицы?

○46.49. Сторона квадрата $ABCD$ равна 8 см. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки P и E так, что $BP = BE = 3$ см. На сторонах AD и CD берутся точки соответственно K и M так, что четырехугольник $KPEM$ — трапеция. Чему равна наибольшая площадь такой трапеции?

○46.50. а) В арифметической прогрессии с разностью d девятый член равен 1. При каком значении d произведение четвертого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наибольшим?

б) В арифметической прогрессии с разностью d второй член равен 6. При каком значении d произведение первого, третьего и шестого членов будет наименьшим?

○46.51. а) Найдите длину отрезка наибольшей длины, который заключен между графиками функций $y = 2x^2$ (снизу), $y = 4x$ (сверху) и параллелен оси y.

б) Найдите длину отрезка наибольшей длины, который заключен между графиками функций $y = x^2$ (снизу), $y = -2x$ (сверху) и параллелен оси y.

○46.52. а) На графике функции $y = x^2$ найдите точку M, ближайшую к точке $A(0; 1{,}5)$.

б) На графике функции $y = \sqrt{x}$ найдите точку M, ближайшую к точке $A(4{,}5; 0)$.

●46.53. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей?

●46.54. Из прямоугольной трапеции с основанием a и b и высотой h вырезают прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если:

а) $a = 80$, $b = 60$, $h = 100$; б) $a = 24$, $b = 8$, $h = 12$?

●46.55. У пятиугольника $ABCDE$ углы A, B и E — прямые, $AB = a$, $BC = b$, $AE = c$, $DE = m$. Впишите в пятиугольник прямоугольник наибольшей площади, если:

а) $a = 7$, $b = 9$, $c = 3$, $m = 5$;

б) $a = 7$, $b = 18$, $c = 3$, $m = 1$.

●46.56. Памятник состоит из статуи и постамента. К памятнику подошел человек. Верхняя точка памятника находится выше уровня глаз человека на a м, а верхняя точка постамента — на b м. На каком расстоянии от памятника должен стать человек, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

●46.57. База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход по дороге идет со скоростью 5 км/ч, а по лесу — 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход может добраться от базы до станции?

○46.58. Открытый металлический бак с квадратным основанием должен вмещать 32 л воды. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

○46.59. Закрытый металлический бак с квадратным дном должен иметь объем 343 $м^3$. При каких размерах на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?

○46.60. Для перевозки груза требуется изготовить закрытый короб в форме прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относились бы как $2 : 3$, а объем составлял 576 $м^3$. Каковы должны быть размеры всех его сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

○46.61. Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна d. При какой длине бокового ребра объем призмы будет наибольшим?

○46.62. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна p. При какой высоте пирамиды ее объем будет наибольшим?

○46.63. Периметр осевого сечения цилиндра равен p см. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим?

○46.64. Объем цилиндра равен V $м^3$. Каким должен быть его радиус, чтобы полная поверхность цилиндра была наименьшей?

ГЛАВА 8 Комбинаторика и вероятность

§ 47. Правило умножения. Перестановки и факториалы

○47.1. Двузначное число составляют из цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6, 9 (повторения цифр допустимы).

а) Сколько всего можно составить чисел?

б) Сколько всего можно составить чисел, больших 50?

в) Сколько всего можно составить нечетных чисел?

г) Сколько всего можно составить нечетных чисел, меньших 55?

○47.2. Двузначное число составляют из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7 (повторения цифр допустимы).

а) Сколько всего можно составить чисел?

б) Сколько всего можно составить чисел, отличающихся от 40 менее чем на 10?

в) Сколько всего можно составить четных чисел?

г) Сколько можно составить чисел, отличающихся от 50 более чем на 20?

●47.3. а) Сколько имеется трехзначных чисел, составленных только из четных цифр?

б) Сколько имеется трехзначных чисел, которые не меняются при перемене местами первой и последней цифр?

в) Сколько имеется трехзначных чисел, кратных 5?

г) Сколько имеется трехзначных чисел, которые при перемене местами первой и второй цифр меняются менее чем на 90?

○47.4. На кусок белого, черного или ржаного хлеба можно положить сыр, колбасу или масло. Бутерброд можно запить чаем, кофе, молоком или кефиром, а после этого или погулять, или пойти в гости, или остаться дома.

а) Найдите общее число вариантов начала выходного дня.

б) В скольких случаях будет выпит молочный напиток?

в) Каков будет ответ в пункте а), если в доме привыкли масло мазать только на белый хлеб?

г) Каков будет ответ в пункте а), если хлеб надо сначала купить в одном из трех ближайших магазинов?

●47.5. За четверть в классе прошли пять тем по алгебре. Контрольная работа будет состоять из пяти задач: по одной задаче из каждой темы. К каждой теме заранее был составлен список из 10 задач, одна из которых будет входить в вариант контрольной. Ученик умеет решать только по 8 задач в каждой теме. Найдите:

а) общее число всех вариантов контрольной работы;

б) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все пять задач;

в) число тех вариантов, в которых ученик ничего не может решить;

г) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все задачи, кроме первой.

●47.6. В каждую клетку квадратной таблицы 3×3 произвольно ставят крестик или нолик.

а) Сколькими способами можно заполнить эту таблицу?

б) В скольких случаях в первом столбце будут одни крестики?

в) В скольких случаях по диагоналям будут стоять одни нолики?

г) В скольких случаях во второй строке будет стоять ровно один крестик?

○47.7. В один день происходят выборы мэра города и префекта округа. На первую должность свои кандидатуры выставили Алкин, Балкин, Валкин, а на вторую — Эшкин, Юшкин, Яшкин.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов голосования на выборах.

б) В скольких вариантах будет кандидатура Эшкина?

в) В скольких вариантах фамилии кандидатов состоят из разного числа букв?

г) Как изменятся ответы в пунктах а) и б), если учесть еще кандидата «против всех»?

○47.8. Ученик помнит, что в формуле азотной кислоты подряд идут буквы H, N, O и что есть один нижний индекс — то ли двойка, то ли тройка.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов, из которых ученику придется выбирать ответ.

б) Сколько среди них тех, в которых индекс стоит не на втором месте?

в) Как изменится дерево вариантов, если ученик помнит, что на первом месте точно стоит H, а порядок остальных букв забыл?

г) Как изменится дерево вариантов, если буквы могут идти в любом порядке?

○47.9. В урне лежат три неразличимых на ощупь шара, два белых и один черный. При вытаскивании черного шара его возвращают обратно, а вытащенный белый шар откладывают в сторону. Такую операцию производят два раза подряд.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов.

б) В скольких случаях оба вытащенных шара будут черными?

в) В скольких случаях вытащенные шары будут разного цвета?

г) Нарисуйте дерево возможных вариантов для трех вытаскиваний из двух черных и двух белых шаров.

○47.10. Из пяти одноклассниц A, $Б$, $В$, $Г$, $Д$ только $В$ и $Д$ дружат со всеми, $Б$ дружит, кроме $В$ и $Д$, только с $Г$, остальные не дружат между собой. Для проведения соревнования надо из этих одноклассниц выбрать капитана и его заместителя, которые дружат между собой.

а) Нарисуйте дерево возможных вариантов выбора.

б) В скольких вариантах капитаном будет $А$?

в) В скольких вариантах выбора будет присутствовать $В$?

г) В скольких вариантах выбора $Г$ будет заместителем?

Вычислите:

○47.11. а) $\dfrac{7! + 8!}{5! + 6!}$; в) $\dfrac{17 \cdot 6! + 8!}{7! + 9!}$;

б) $\dfrac{7}{11} \cdot \dfrac{(10!)^2 - (9!)^2}{(8!)^2 - (7!)^2}$; г) $\dfrac{(7!)^2 \cdot (6!)^2}{4! \cdot 5! \cdot 8! \cdot 9!}$.

○47.12. а) $\dfrac{1}{4!} + \dfrac{10}{5!} + \dfrac{630}{6!}$; б) $\dfrac{1}{6!} + \dfrac{1}{5!} - \dfrac{49}{7!}$.

○47.13. Сколькими нулями оканчивается число:

а) $10!$; б) $15!$; в) $26!$; г) $100!$?

○47.14. Укажите наибольшее натуральное число n, для которого:

а) $10!$ кратно 2^n; в) $26!$ кратно 5^n;

б) $16!$ кратно 2^n; г) $28!$ кратно 3^n.

○**47.15.** Докажите тождество:

а) $(n + 1)! - n! = n \; n!$;

б) $(2n + 1)! - (2n - 1)! \; 2n = 4n! \; (2n - 1)!$.

○**47.16.** Решите уравнение:

а) $n! = 42(n - 2)!$;

б) $(k + 17)! = 420(k + 15)!$;

в) $0{,}125n! = (n - 1)! - 90$;

г) $(3x)! = 504(3x - 3)!$.

○**47.17.** При каких натуральных значениях n выполняется неравенство:

а) $n! > (n + 1)(n - 2)!$;

б) $7 \; (2n + 1)! \; (2n - 1)! < 8 \; ((2n)!)^2$?

Докажите неравенство:

●**47.18.** а) $n! > (n + 3)^2$ при $n \geqslant 5$;

б) $n! > (n + 2)^3$ при $n \geqslant 6$;

в) $n! > 2^n$ при $n \geqslant 4$;

г) $n! > 4^n$ при $n \geqslant 9$.

●**47.19.** а) $2{,}66 < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ при всех $n \geqslant 3$;

б) $\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 0{,}125$ при всех $n \geqslant 4$;

в) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3$ при всех n (используйте пункт б) и номер 47.18 в));

г) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2{,}75$ при всех n.

○**47.20.** У мамы и папы — один сын. К ним в гости пришла другая семья — мама, папа и дочь. За круглым обеденным столом есть 6 мест. Сколькими способами можно рассадить людей за столом, если:

а) место хозяина дома неприкосновенно;

б) первыми садятся дети, и они садятся рядом;

в) первыми садятся дети, но не рядом друг с другом;

г) жены садятся рядом со своими мужьями?

○**47.21.** а) В каждом из двух заплывов по шести дорожкам участвует по 6 пловцов. Дорожки между пловцами в каждом заплыве разыгрываются по жребию. Найдите число всех возможных распределений пловцов по дорожкам.

б) То же, но если в каждом заплыве один из пловцов — победитель отборочных соревнований — плывет по четвертой дорожке.

в) То же, но если во втором заплыве участвуют 5 пловцов.

г) То же, но если в обоих заплывах участвует по 4 пловца.

○47.22. Две команды по 5 шахматистов проводят матч из пяти одновременно проходящих партий, в каждой из которых встречаются по одному из шахматистов каждой команды.
а) Найдите число всех возможных распределений встреч в матче.
б) То же, но для двух, независимо проводимых матчей.
в) То же, но если во втором матче участвует только по три лучших шахматиста из каждой команды.
г) То же, что и в пункте б), но если во втором матче капитаны команд обязательно играют между собой.

○47.23. Одинаковый текст приглашения напечатан на семи разных открытках. Их надо разослать директорам семи разных школ.
а) Найдите число всех возможных рассылок приглашений.
б) То же, что и в пункте а), но если самую красивую открытку послать директору школы № 1.
в) То же, что и в пункте а), но если в трех каких-либо приглашениях надо дописать и приглашения завучам по учебной работе.
г) То же, что и в пункте в), но если надо пригласить еще трех завучей по воспитательной работе из трех других школ.

○47.24. В зоопарке пять львов надо распределить по одному по пяти клеткам, четырех тигров — по четырем другим клеткам и трех слонов — по трем вольерам.
а) Найдите число всех возможных распределений львов, тигров и слонов в зоопарке.
б) То же, но если есть четыре льва и львица и одного льва (известно какого именно) вместе с львицей надо посадить в одну клетку.
в) То же, что и в пункте а), но если у львов есть две семейные пары.
г) То же, что и в пункте а), но если между клетками для тигров и клетками для львов нет разницы.

§ 48. Выбор нескольких элементов. Биномиальные коэффициенты

○48.1. Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Рукопожатий было от 60 до 70. Сколько человек встретилось, если известно, что:
а) каждый здоровался с каждым;
б) только один человек не здоровался ни с кем;

в) только двое не поздоровались между собой;

г) четверо поздоровались только между собой и остальные поздоровались только между собой.

○48.2. Каждую из n точек, являющихся вершинами выпуклого n-угольника, соединили отрезками с каждой другой вершиной.

а) Сколько провели отрезков?

б) Сколько провели диагоналей?

в) Сколько есть двузвенных ломаных, соединяющих вершину A с вершиной B?

г) Сколько есть трехзвенных ломаных, соединяющих вершину A с вершиной B (самопересекающиеся ломаные допускаются)?

○48.3. В футбольной команде — 11 человек: вратарь, 4 защитника, 4 полузащитника и 2 нападающих. Команда выбирает капитана и его заместителя.

а) Найдите число всех возможных вариантов выбора.

б) Найдите число всех возможных вариантов, если в команде 3 новичка и они не могут быть капитаном или заместителем.

в) Найдите число всех возможных вариантов, если капитан — точно не нападающий, а его заместитель — точно не вратарь.

г) Найдите в пунктах а) и б), число всех возможных вариантов выбора пары кандидатов, из которых тренеры позже будут делать окончательный выбор.

●48.4. Все станции пригородной железной дороги разделены на 10 зон, в каждой зоне более одной станции. В билете на проезд в одну сторону указывают номер зоны отправления и номер зоны прибытия.

а) Сколько существует различных типов билетов?

б) Сколько существует различных стоимостей билетов, если стоимость проезда из зоны x в зону y рассчитывается по формуле $S = 7 + 6|x - y|$?

в) Сколько различных типов билетов можно купить не более чем за 50 руб.?

г) Сколько существует различных типов билетов по цене, кратной 5 руб.?

Вычислите:

48.5. а) C^2_{17}; б) C^2_{100}; в) C^3_5; г) C^4_8.

48.6. а) A^3_{10}; б) A^5_8; в) A^2_{20}; г) A^1_{100}.

48.7. а) $C^2_{27} - C^2_{26}$; б) $\dfrac{A^6_8}{A^2_{10}}$; в) $C^5_{11} + C^6_{11}$; г) $\dfrac{A^3_{10}}{C^3_{10}}$.

○48.8. Упростите выражение:

а) $\dfrac{P_n \ C^3_{n+1}}{A^{n-2}_n}$; б) $\dfrac{P_{n+1} \ C^{n-2}_n}{A^n_{n-1}}$.

○48.9. Составив частное двух чисел, выясните, какое из них больше:

а) C^3_{17} или C^4_{18}; в) C^5_{19} или C^6_{18};

б) C^4_{18} или C^5_{19}; г) C^7_n или C^8_{n+1}.

Решите уравнение:

○48.10. а) $C^3_x = 2C^2_x$; в) $C^2_x + C^2_{x-1} = 49$;

б) $C^{x-2}_x = 15$; г) $C^x_8 = 70$.

○48.11. а) $A^5_x = 18A^4_{x-2}$; б) $A^2_{x-1} - C^1_x \quad 79$.

○48.12. а) $C^3_x = A^2_x$; в) $C^4_x = A^3_x + C^6_x$;

б) $C^4_x = A^3_x$; г) $0{,}5A^4_x = 3(A^3_{x-1} + C^3_{x-1})$.

○48.13. Решите неравенство:

а) $120 < A^2_{x-1} < 140$; в) $C^2_{10} < A^2_x < 60$;

б) $C^2_6 < A^2_n < C^2_8$; г) $C^2_{19} < A^2_x + C^2_x < 200$.

○48.14. Три ноты из семи нот (до, ре, ми, фа, соль, ля, си) одной октавы можно нажать либо одновременно (аккорд), либо поочередно (трезвучие).

а) Найдите число всех возможных трезвучий.

б) Найдите число всех возможных аккордов.

в) Найдите число всех возможных аккордов, содержащих ноту «соль».

г) Найдите число всех возможных трезвучий, в которых подряд не идут две соседние ноты (до и си — не соседние ноты).

○48.15. «Проказница Мартышка, Осел, Козел и косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Сколькими способами они могут:

а) выбрать каждый для себя по одному инструменту из 15 данных;

б) выбрать набор из пяти инструментов из имеющихся 12 инструментов;

в) сесть по одному за какие-то четыре из выбранных в пункте б) инструмента;

г) выгнать одного из участников квартета, и потом сесть за какие-то три выбранных в пункте б) инструмента?

○48.16. Из колоды в 36 карт выбирают 5 карт и потом одновременно открывают их. Найдите:

а) число всех возможных вариантов выбранных карт;

б) число вариантов, при которых среди полученных карт есть четыре туза;

в) число вариантов, при которых все полученные карты — пики;

г) число вариантов, при которых все полученные карты — одной масти.

●48.17. По программе в концерте должен выступить хор из пяти певцов и трех певиц. Предварительное согласие на выступление дали 10 певцов и 8 певиц.

а) Сколько существует различных вариантов состава хора?

б) То же, но если известно, что певцы A и $Б$ ни за что не будут петь вместе.

в) То же, но если известно, что певец A будет петь тогда и только тогда, когда будет петь певица B.

г) То же, если 6 певцов накануне сорвали голос на футболе и вместо недостающего певца придется выступать одной певице.

●48.18. Пусть $y(n) = \dfrac{C_n^3}{A_{n-1}^3}$, $n \geqslant 4$.

а) Укажите дробно-линейную функцию, на графике которой лежат все точки $(n; y(n))$.

б) Постройте график этой функции.

в) Укажите наибольшее n, при котором $y(n) > 0{,}25$.

г) Укажите наименьшее n, при котором $y(n)$ отличается от $\dfrac{1}{6}$ менее чем на 0,01.

●48.19. Пусть $y(n) = \dfrac{A_n^5}{C_{n-2}^3}$, $n \geqslant 4$.

а) Укажите многочлен, на графике которого лежат все точки $(n; y(n))$.

б) Постройте график этого многочлена.

в) Укажите наибольшее n, при котором $y(n) < 600$.

г) Укажите наименьшее n, при котором $y(n) > 6000$.

○**48.20.** а) Докажите, что последовательность $\frac{A_{n+1}^4}{C_{n-2}^4}$, $n = 3, 4, 5,$ монотонно возрастает.

б) Докажите, что все члены этой последовательности больше числа 4.

в) Укажите номер, начиная с которого члены этой последовательности будут больше 20.

г) Найдите предел этой последовательности при $n \to \infty$.

○**48.21.** Найдите n, при котором:

а) число C_{n+1}^2 составляет 80% от числа C_n^3;

б) число C_{n+1}^3 составляет 120% от числа C_n^4;

в) число C_{2n}^{n-1} составляет 56% от числа C_{2n+1}^{n-1};

г) число C_{2n+3}^n составляет 150% от числа C_{2n+2}^{n+2}.

●**48.22.** Докажите тождество:

а) $C_n^3 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3$;

б) $C_n^{n-4} = C_{n-1}^3 + C_{n-1}^{n-4}$;

в) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;

г) $C_n^k = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{n-k-2}$

●**48.23.** Выпишите треугольник Паскаля до седьмой строки включительно.

а) Найдите сумму всех чисел в третьей строке треугольника Паскаля.

б) Найдите сумму всех чисел в четвертой строке треугольника Паскаля.

в) Найдите сумму всех чисел в седьмой строке треугольника Паскаля.

г) Методом математической индукции докажите, что сумма чисел в n-й строке треугольника Паскаля равна 2^n.

48.24. Раскройте скобки в выражении:

а) $(x + 1)^7$; б) $(2x - y)^6$; в) $(x^2 + 2)^5$; г) $(1 - x^3)^4$

○**48.25.** У многочлена P найдите коэффициент при x^3:

а) $P(x) = (1 + 3x)^4$;

б) $P(x) = (3 - 2x)^5$;

в) $P(x) = (x + 2)^5 - (2x + 1)^4$;

г) $P(x) = (x^2 - x)^4 + \left(3 - \frac{x}{3}\right)^4$

○**48.26.** В разложении $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$ по степеням x укажите:

а) член, содержащий x^8;

б) член, содержащий x^4;

в) член, содержащий x^{-2};

г) член, не содержащий x.

●48.27. Найдите член разложения, не содержащий переменных:

а) $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$;

б) $\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)^5$

в) $\left(3\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$;

г) $\left(x^{0,75} + x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17}$

○48.28. Известно, что сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a + b)^n$ равна 1024.

а) Найдите n.

б) Найдите наибольший биномиальный коэффициент этого разложения.

в) Сколько в разложении членов с этим наибольшим коэффициентом?

г) Дайте ответы на вопросы пунктов а), б), в), если сумма биномиальных коэффициентов разложения $(a + b)^n$ равна 512.

○48.29. Найдите k, при котором достигается наибольшее значение выражения:

а) C_5^k; б) C_{16}^k; в) C_{61}^k; г) $C_{999}^{k-1} + C_{999}^k$.

●48.30. а) Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ и любого $x > 0$ верно неравенство $(1 + x)^n > 1 + nx$ (*неравенство Бернулли*).

б) Используя неравенство пункта а), укажите какое-нибудь решение неравенства $1{,}001^n > 1000$.

в) Используя неравенство пункта а), укажите какое-нибудь решение неравенства $0{,}99^n < 0{,}01$.

г) Докажите, что для любого $0 < q < 1$ и любого $a > 0$ неравенство $q^n < a$ верно для всех натуральных n, начиная с некоторого номера.

§ 49. Случайные события и их вероятности

○49.1. Случайным образом выбирают двузначное натуральное число. Найдите вероятность того, что оно:

а) делится на 5;

б) делится на 13;

в) делится или на 15, или на 25;

г) не делится на 29.

○49.2. Случайным образом выбирают нечетное двузначное натуральное число. Найдите вероятность того, что:

а) его квадрат меньше 1000;

б) его квадрат больше 9000;

в) сумма квадратов его цифр больше 140;

г) сумма квадратов его цифр не больше 10.

○49.3. Два ученика независимо друг от друга написали по одному двузначному натуральному числу. Найдите вероятность того, что:

а) эти два числа различны между собой;

б) сумма чисел равна 100;

в) сумма чисел не больше 25;

г) сумма чисел больше 190.

○49.4. Из набора домино случайно выбирают одну фишку. Найдите вероятность того, что:

а) это дубль;

б) одна из ее половинок — «пустышка»;

в) различие между очками на ней больше 4;

г) сумма очков на ней больше 7.

○49.5. Из значений $n!$ для $n = 1, 2, 3, \ldots, 25$ случайно выбирают одно число. Найдите вероятность того, что это число:

а) меньше миллиона;

б) больше миллиарда;

в) делится на миллион;

г) не делится на тысячу.

○49.6. Из чисел, расположенных в пяти первых строчках треугольника Паскаля случайно выбирают одно число. Найдите вероятность того, что это число:

а) двузначно;

б) нечетно;

в) кратно трем;

г) не является простым числом.

●49.7. В круге с центром в начале координат и радиусом π случайно выбрали точку с целыми координатами. Найдите вероятность того, что:

а) сумма координат этой точки больше 3;

б) произведение координат этой точки меньше 4;

в) эта точка лежит в круге с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{3}$;

г) эта точка лежит вне треугольника с вершинами (0; 2), (−2; −2), (1; −2).

●49.8. Двузначное число составляют так. Его первая цифра получается в результате первого бросания игрального кубика, грани которого пронумерованы цифрами от 1 до 6, а вторая цифра — в результате второго бросания этого кубика. Найдите вероятность того, что это число:

а) состоит из разных цифр;

б) больше 20;

в) кратно 7;

г) простое.

○49.9. Красивых учеников в классе — 22, а умных — 18. Всего в классе 30 учеников и каждый из них умный или красивый, или и умный, и красивый.

а) Сколько учеников, которые и умны, и красивы?

б) Сколько учеников, которые умны, но не красивы?

в) Сколько учеников, которые красивы, но не умны?

г) Измените в условии общее число учеников так, чтобы ответы в пунктах а) и в) были одинаковы.

○49.10. При подготовке к экзамену один ученик решил 44 задачи из общего списка в 50 задач, а второй ученик решил 26 задач из этого же списка. Известно, что каждую задачу из общего списка задач кто-то из учеников решил.

а) Сколько задач были решены и первым, и вторым учеником?

б) Сколько задач были решены первым, но не решены вторым учеником?

в) Сколько задач были решены вторым, но не решены первым учеником?

г) Измените в условии общее число задач так, чтобы ответы в пунктах а) и б) были одинаковы.

●49.11. У каждого из туристов есть или тугрики, или «еврики». У 100 туристов есть только тугрики, у 38 туристов есть только «еврики», а у 31% туристов есть обе валюты.

а) Сколько всего было туристов?

б) Сколько туристов имеют тугрики?

в) Сколько туристов имеют «еврики»?

г) Измените в условии задачи 31% так, чтобы ответ в пункте а) стал наибольшим из всех возможных.

●49.12. Каждый из 30 учеников умный или красивый. Красивых учеников всего 26, умных — 24, а 14 учеников — ростом выше 180 см.

а) Про скольких учеников гарантированно можно утверждать, что они и умные, и красивые, и выше 180 см?

б) Каков ответ в пункте а), если известно, что все умные, но не красивые — ростом ниже 180 см?

в) Каков ответ в пункте а), если известно, что все красивые, но не умные — ростом выше 180 см?

г) Каков ответ в пункте а), если известно, что 12 умных — ростом выше 180 см?

○49.13. Экзамен пересдавали три ученика. Рассматриваются события: A — экзамен сдал ровно один ученик; B — хотя бы один ученик; C — не менее двух учеников; D — ровно два ученика. Опишите события:
а) $A + C$; б) $A + D$; в) $B + D$; г) $A + B + C + D$.

○49.14. Опишите события, противоположные событиям из пунктов а) — г) предыдущей задачи.

●49.15. Из чисел 0, 1, 2, …, 9 выбирают одно. Рассматриваются события: A — это четное число; B — это число больше 7; C — это число кратно 3 и не равно 0; D — это или 1, или 4, или 9. Опишите события:
а) AB; б) CD; в) BC; г) $ABCD$.

49.16. Опишите события, противоположные событиям A, B, C, D из предыдущей задачи.

○49.17. В темном ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета. Найдите вероятность того, что:
а) все билеты выигрышные;
б) есть ровно один проигрышный билет;
в) есть ровно два выигрышных билета;
г) есть хотя бы один выигрышный билет.

●49.18. В темном ящике n выигрышных билетов и n проигрышных, $n > 2$. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета.
а) Найдите вероятность того, что есть ровно один проигрышный билет.
б) Докажите, что эта вероятность убывает с ростом n.
в) К какому числу стремится эта вероятность при $n \to \infty$?
г) Найдите n, начиная с которого эта вероятность будет меньше 0,4.

●49.19. В темном ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно n билетов, $n = 1$, 2, 3, … , 9. Найдите вероятность $p(n)$ того, что у вас есть ровно один выигрышный билет. Численные результаты соберите в таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(n)$									

○49.20. В темном ящике 6 билетов, из которых n билетов выигрышных и $6 - n$ проигрышных, $n = 0, 1, 2, 3, …, 6$. Вы случайно вытаскиваете одновременно 2 билета. Найдите вероятность $p(n)$ того, что у вас есть ровно один выигрышный билет. Численные результаты соберите в таблицу.

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$							

○**49.21.** В темном ящике 8 белых и 7 черных шаров. Вы случайно вытаскиваете одновременно 4 шара. Найдите вероятность того, что:

а) все шары белые;

б) имеется, как минимум, три белых шара;

в) имеется, как минимум, два черных шара;

г) есть хотя бы один белый шар.

●**49.22.** В темном ящике n белых и $n - 1$ черных шаров. Вы случайно вытаскиваете одновременно 4 шара.

а) Найдите вероятность того, что имеется, как минимум, три белых шара.

б) Докажите, что эта вероятность убывает с ростом n.

в) К какому числу стремится эта вероятность при $n \to \infty$?

г) Найдите n, начиная с которого эта вероятность будет меньше 0,35.

○**49.23.** Какова вероятность того, что при трех бросаниях монеты:

а) ни разу не выпадет «орел»;

б) ни разу не выпадет «решка»;

в) «орел» выпадет ровно один раз;

г) «решка» выпадет хотя бы один раз?

○**49.24.** Решите задачу 49.23 для четырех бросаний монеты.

●**49.25.** а) Какова вероятность того, что при n бросаниях монеты «решка» выпадет хотя бы один раз?

б) Как меняется эта вероятность с изменением n?

в) Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

г) При каком наименьшем n вероятность появления хотя бы одной «решки» будет больше 0,999?

○**49.26.** Три ученика независимо друг от друга написали по одной цифре от 0 до 9. Какова вероятность того, что среди написанных цифр:

а) не будет ни одной цифры 0;

б) будет хотя бы одна цифра 5;

в) не будет ни одной четной цифры;

г) будет хотя бы одна нечетная цифра?

●**49.27.** Каждый из n учеников независимо друг от друга написал по одной цифре от 0 до 9.

а) Какова вероятность того, что среди написанных цифр будет хотя бы одна цифра 5?

б) Как меняется эта вероятность с изменением n?

в) Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

г) При каком наименьшем n вероятность появления хотя бы одной цифры 5 будет больше вероятности ее отсутствия?

●**49.28.** Буквы русского алфавита написаны на карточках. Вы случайно вытаскиваете одну карточку, читаете букву, возвращаете карточку и повторяете выбор. Как только появится гласная буква — процедура заканчивается. (В русском алфавите 33 буквы, из них 10 гласных.)

а) Какова вероятность того, что никаких повторений не потребуется?

б) Какова вероятность того, что хватит двух повторений?

в) Какова вероятность того, что хватит именно n повторений?

г) Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

○**49.29.** Стрелок не очень меток: вероятность того, что он попадет в мишень одним выстрелом, равна всего 0,1. Независимо от предыдущих промахов он повторяет выстрелы до первого попадания и после этого прекращает стрельбу.

а) Какова вероятность $p(n)$ того, что ему хватит n выстрелов?

б) Найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

в) Численные результаты для $n = 1, 2, 3, \quad 7$ соберите в таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$							

г) Найдите предел суммы $p(1) + p(2) + \quad + p(n)$ при $n \to \infty$.

●**49.30.** Найдите вероятность p встречи с контролером при одной поездке, если известно, что вероятность хотя бы одной встречи:

а) при трех поездках равна 0,875;

б) при четырех поездках равна 0,9984;

в) при пяти поездках равна 0,98976;

г) при шести поездках равна 0,468559.

ОТВЕТЫ

Повторение

П.1. а) 1,35; б) $\frac{16}{17}$; в) $\frac{24}{25}$; г) $-\frac{1}{19}$. П.2. а) $\frac{3x-1}{x}$; б) $\frac{5x-4}{x}$; в) $\frac{2x-1}{x+4}$; г) $\frac{2x-1}{x-3}$. П.3. а) $y = x - 5$, x — любое число; б) $y = t - 2$, $t \neq \pm 2$; в) $y = p - 4$, $p \neq \pm\sqrt{5}$; г) $y = m - 2$, $m \neq 2$. П.4. а) $y = \frac{1}{14}$; $x \neq 3$; б) $y = -\frac{3}{4}$; $x \neq 3$; в) $y = \frac{4}{15}$; $x \neq 2$; г) $y = -1\frac{1}{6}$; $x \neq -1$. П.5. а) $y = x + 2$, $x \neq 2$, $x \neq -5$; б) $y = x + 4$, $x \neq 2$, $x \neq 4$; в) $y = x + 3$, $x \neq 3$, $x \neq 4$; г) $y = x - 2$, $x \neq -2$, $x \neq -1$. П.6. а) $x = \frac{3}{y-4} + 2$; б) $x = 1 \quad \frac{4}{y+2}$; в) $x = \frac{7}{y+1} - 3$; г) $x = 3 - \frac{2}{y-5}$. П.7. а) $2(5 - b)$; б) $m + 2$; в) $5(a + 1)$; г) $3 + x$. П.8. а) $\frac{2}{m+2}$; б) $\frac{1}{2-b}$; в) $\frac{1}{a+2}$; г) $\frac{1}{c-1}$. П.9. а) $a + 1$; б) $b - 3$; в) $p + 4$; г) $x - 5$. П.10. а) $\frac{1}{x-1}$; б) a; в) y; г) $\frac{b}{b-2}$. П.11. а) $\frac{x}{x-3}$; б) $\frac{3}{x-4}$; в) $\frac{3}{x-3}$; г) $\frac{x}{x+3}$. П.12. а) $\frac{x-1}{3x^2}$; -10; б) $\frac{m(m-3n)}{m-n}$; $\frac{13}{25}$. П.13. -1. П.14. а) $\frac{\sqrt{10}}{3}$; б) $\frac{2\sqrt{14}}{3}$; в) $3\sqrt{15}$; г) $-\frac{3\sqrt{21}}{2}$. П.15. а) 7; б) 12; в) 12; г) 4,4. П.16. а) 1; б) 1; в) $2\sqrt{17}$; г) $\sqrt{2}$. П.18. а) $A < B$; б) $A < B$. П.19. а) Ни при каких; б) 9. П.20. а) $-\frac{1}{3\sqrt{y} + 4\sqrt{x}}$; б) $14m \quad 13\sqrt{n}$; в) $5\sqrt{p} - 7\sqrt{q}$; г) $-\frac{1}{9\sqrt{c} + 6\sqrt{ab}}$. П.21. а) $\frac{p\sqrt{p} + q\sqrt{q}}{p-q}$; б) $\frac{8 - t\sqrt{t}}{4-t}$; в) $\frac{x\sqrt{x} + 27}{x-9}$; г) $\frac{a\sqrt{a} - 8b\sqrt{b}}{a-4b}$. П.22. а) $\frac{3}{4\sqrt{x}}$; б) $3\frac{1}{3}$; в) 1; г) $\frac{\sqrt{c} - \sqrt{d}}{\sqrt{c}}$. П.23. а) $2b(a - b)$; б) a; в) $\frac{1-m}{\sqrt{m}}$; г) $\frac{\sqrt{ab}}{b}$, если $a > b > 0$; $\frac{\sqrt{ab}}{a}$, если $b > a > 0$. П.24. а) 3; б) 3; в) $-0,5$; г) $-1\frac{1}{3}$. П.25. а) 0; б) 9; в) -1; $-3,5$; г) $-\frac{1}{3}$. П.26. а) 20; б) 2; в) -10; г) -88. П.27. При $m = 1$. П.28. $1 < a < 2$.

П.29. $a = \pm\frac{1}{2}$. **П.30.** а) $x > -1{,}5$; б) $x \leq 5$; в) $x \leq 1$; г) $x < -2$. **П.31.** а) $x < -4$; $x > 2{,}5$; б) $-2{,}5 < x < 3$; в) $x \leq -1\frac{1}{3}$; $x > 1$; г) $x < \frac{3}{4}$; $x > 2$. **П.32.** а) x — любое число; б) $3 \leq x \leq 9$; в) $x \leq -9$; $x \geq 4$; г) таких x нет. **П.33.** а) $x \leq -2$; $x > 2$; б) $x < 1{,}5$; $x > 4$; в) $x < -3$; $-0{,}5 < x < 0{,}5$; $x > 2$; г) $x < 1$; $1 < x \leq 3$; $x > 5$. **П.34.** а) $0 \leq x < 1$; $x > 2$; б) $x < 0$; $1\frac{3}{5} < x < 2$; $x > 4$; в) $x < -3$; $-2 < x < 0$; г) $x < 1$; $x > 2$. **П.35.** При $a < 0$ и $a > 1$. **П.36.** $a > 3$; таких значений нет. **П.37.** а) $x > 16$; б) $-0{,}2 \leq x < 2{,}5$; в) $x > 6{,}2$; г) $-4{,}25 \leq x \leq 4{,}75$.

§ 1

1.3. 112, 113, 114, ... , 147. Наименьшее 112, наибольшее 963. **1.14.** а) 1; 2; 4; б) 8; в) 1; 2; 3; 4; 6; 12; г) 6; 7; 28; 51. **1.15.** а) 2; 3; 4; 6; 12. б) 1; 2; 3; 6. **1.17.** а) 2; (1; 1); б) 114; (1; 1). **1.18.** а) Да; б) да. **1.19.** а) 1; 2; 4; б) 0,5; 1; 1,5; 3. **1.20.** а) 0,5 и 1; б) таких значений нет. **1.21.** а) 0; 3; 5; б) −1; 3. **1.23.** а) 1; б) 1; в) 5; г) 6. **1.24.** а) Да, например 6 и 2; б) да, например 2 и 1. **1.35.** а) 8; б) 24; в) 18; г) 16. **1.36.** а) 8; б) 18; в) 38; г) 98. **1.37.** а) 2; б) 4; в) 9; г) 24. **1.38.** а) Двумя; б) четырьмя; в) девятью; г) двадцатью четырьмя. **1.39.** а) $23! + 2$ делится на 2, $23! + 3$ делится на 3; $23! + 4$ делится на 4, ... , $23! + 23$ делится на 23; б) $101! + 2$ делится на 2, $101! + 3$ делится на 3; $101! + 4$ делится на 4, ... , $101! + 101$ делится на 101; в) 22, 100; г) $1000001! + 2$; $1000001! + 3$; $1000001! + 2$; ; $1000001! + 1000001$. **1.41.** $p = 3$; $q = 2$. **1.42.** а) $p = 11$; $q = 5$; б) $p = 11$; $q = 3$ или p 5; q 17. **1.56.** а) $\begin{cases} x = 1 + 2k; \\ y = 8 - k; \end{cases}$ $k \in Z$; б) $\begin{cases} x = 4 + k; \\ y = 6k - 1; \end{cases}$ $k \in Z$; в) $\begin{cases} x = 17 - 4k; \\ y = 1 + 7k; \end{cases}$ $k \in Z$; г) $\begin{cases} x = 6 + 7k; \\ y = 1 + 5k; \end{cases}$ $k \in Z$. **1.57.** а) (1; 15); (−1; −15); (15; 1); (−15; −1); (3; 5); (−3; −5); (5; 3); (−5; −3); б) (1; 3); (−1; −3); (1; −3); (−1; 3); в) (1; 1); (−1; −1); г) решений нет. **1.58.** а) 12; б) 48; в) 35; г) 180.

§ 2

2.6. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) 1; г) $\frac{2}{5}$. **2.11.** а) 3; б) 7; в) 1; г) 6. **2.13.** а) $\frac{4}{11}$; б) $12\frac{1}{1665}$; в) $-1\frac{7}{30}$; г) $-\frac{137}{11100}$. **2.17.** а) 0,(6); б) 1,8(6); в) 1,(3); г) 2,08(3).

§ 3

3.4. а); б); в); г) Иррациональным. 3.6. а); б); г) — числа рациональные; в) — число иррациональное. 3.7. а) $\sqrt{7} - 3$ и $1 - \sqrt{7}$; б) $\sqrt{7} - 3$ и $1 + \sqrt{7}$; в) $\sqrt{7} - 3$ и $\sqrt{7} + 3$; г) $\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$. 3.8. а) Нет таких чисел; б) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{28}$. 3.9. а) $x^2 \quad 2 = 0$; б) $x^2 + 10x \quad 22 \quad 0$; в) $3x^2 + 12x - 3 = 0$; г) составить такое уравнение невозможно. 3.10. а) Например, $\alpha = 2 + \sqrt{3}$; $\beta = 4\sqrt{3}$; б) например, $\alpha = 3 - \sqrt{2}$; $\beta = 4\sqrt{2}$. 3.11. а) Существует, например, при $a = 2 + \sqrt{3}$ число $c = 4$; б) существует, например, при $a = \dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}$ число $c = 3$. 3.13. а) 1,5; б) 1; в) 2; г) 3,99. 3.14. а) $\sqrt{0{,}7}$; б); в); г) $\sqrt{1{,}44001}$. 3.15. а) 1,6; б) 0,49. 3.16. а) $\sqrt{1{,}7}$; б) $\sqrt{3} \quad 1{,}4$. 3.17. а); б) Единственная точка $(0; -2)$. 3.18. а) $\left(\sqrt{3};\ 5\sqrt{3} - 2\right)$; б) $\left(7\sqrt{2};\ 2 + \sqrt{2}\right)$. 3.19. а) Такой треугольник существует, так как $\sqrt{2} + 1 > \sqrt{3}$; б) такого треугольника не существует, так как $\sqrt{3} + \sqrt{5} < 4$.

§ 4

4.5. а), б) Не существует. 4.12. а) 1; б) 1; в) 1; г) 6. 4.13. а) 0; б) 0; в) 0; г) 5. 4.14. а) $3 \leqslant b < 4$; б) $3 < b \leqslant 4$; в) $0 < b < 1$; г) таких b не существует. 4.15. а) $[-20; 12]$; б) $(17; 22)$. 4.16. а) $a > 2{,}5$; б) $\dfrac{1 - \sqrt{7}}{6} < a < 1$; $a > 1$. 4.17. а) $\left(-1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3};\ -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$; $a > 2{,}5$; б) $\left(-\dfrac{11}{6};\ 0\right)$; $a > 1$. 4.18. $3 \leqslant p \leqslant 4$. 4.22. а) $n \geqslant 2$; б) $n \geqslant 11$; в) $n \geqslant 10\,001$; г) $n \geqslant 307$. 4.25. а) $1 \leqslant x < 2$; б) $-11 \leqslant x < -10$; в) $-1 \leqslant x < 0$; г) $11 \leqslant x < 12$. 4.26. а) x — любое целое число; б) -2; в) 0; г) -3. 4.31. а) $x = k + 0{,}123$, где k принимает любые целочисленные значения; б) 999,123. 4.34. а) $[1; 33]$; б) $[-6{,}25; 0]$; в) $[-320; 0]$; г) $\left[-1; \dfrac{7}{13}\right]$.

§ 5

5.3. а) $x \geqslant 0$; б) $x \geqslant 7$; в) $x \leqslant 0$; г) $3 \leqslant x \leqslant 4$. 5.10. а) $4 - \pi$; б) 1; в) $7 - 2\pi$; г) $5{,}3 - 2\sqrt{7}$. 5.11. а) 4; б) 8; в) 21; г) 66. 5.13. а) 1; -9; б) 7; в) 19; -11; г) -1; $\dfrac{2}{3}$. 5.14. а); б) Решений нет; в) 4; г) -4. 5.15. а) 4; б) 2; в) 0; 7; 1; г) 2; -1. 5.16. а) $x > 4$; б) $x \geqslant 2$; в) $1 < x < 7$; г) $-1 \leqslant x \leqslant 2$. 5.17. а) $x < 3$; б) $(-\infty; 1) \cup (1 + \sqrt{6}; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\dfrac{5}{6}\right] \cup [1; +\infty)$;

г) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. **5.18.** а) 3 или 9; б) 9 или 23. **5.19.** а) 0,5; 1,5; б) 1; 2. **5.20.** а) 9 или 23; б) 9 или 23. **5.21.** а) 0 или 1; б) $\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}; 1\right)$. **5.25.** а) 2; б) 7; в) −7; г) 0.

§ 6

6.2. а) $\frac{(n+13)n}{2}$; б) $\frac{(9n-5)n}{2}$; в) $0{,}025n(33+n)$; г) $\frac{(n+2)n}{18}$. **6.3.** а) $-k$ при $n = 2k$; k при $n = 2k - 1$; б) $k(2k+1)$ при $n = 2k$; $k(1-2k)$ при $n = 2k \quad 1$; в) $\frac{n(n+1)}{2}$ при $n \quad 2k$; $\frac{n(n+1)}{2} \quad 1$ при $n = 2k - 1$; г) $-2k(k+1)$ при $n = 2k$; $2k^2$ при $n = 2k - 1$. **6.10.** а) $\frac{29}{596}$; б) $\frac{292}{447}$. **6.16.** а); б) Первое равенство неверно уже для $n = 1$. Второе равенство верно для $n = 1$, но не для всех k из $A(k)$ следует $A(k+1)$. Таким образом, равенство неверно. Третье равенство верно.

§ 7

7.9. а) $S(x) = \frac{(4-x)x}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$; б) $S(x) = \begin{cases} 5(x+4), & -4 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2x + 26, & 2 < x \leqslant 8. \end{cases}$

7.11. а) $y = \pm\sqrt{\frac{2x+12}{3}}$; $x = \frac{3y^2-12}{2}$; уравнение задает функцию вида $x = \varphi(y)$ и не задает функцию вида $y = f(x)$; б) $y = x$ или $y = -x - 1$; $x = y$ или $x = -y - 1$ при $x \neq 3, -4$, $y \neq 3, -4$. **7.21.** а) $[-1; 7]$; б) $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$; в) $(0; 1]$; г) $[-1{,}5; 11]$. **7.22.** а) $D(f) = [-3; 2]$, $E(f) = [1; 5]$; б) $D(f) = [-3; 2]$, $E(f) = [0; 9]$. **7.24.** а) $[12; +\infty)$; б) $[-8; 1]$; в) $[-12; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $[-3; 1]$. **7.25.** а) $3x + 2$; б) $-3x - 13$; в) 5; г) $f(f(x)) = 9x - 4$. **7.26.** а) $4x^2$; б) $(x-5)^2$; в) 81; г) x^4. **7.27.** а) $\frac{2x+3}{1-2x}$; б) $\frac{6x-1}{2x-3}$; в) $f(f(5)) = 5\frac{2}{11}$; г) $\frac{11x+2}{x+6}$. **7.29.** а) Если $a > 1$, то $[a; +\infty)$; если $a = 1$, то $(1; +\infty)$; если $-1 < a < 1$, то $[a; 1) \cup (1; +\infty)$; если $a = -1$, то $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$; если $a < -1$, то $[a; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; б) если $a \leqslant 0$, то R; если $a > 0$, то $\left[-\frac{1}{a}; \frac{1}{a}\right]$; в) если $a > 4$, то $(-\infty; 3] \cup [4; a) \cup (a; +\infty)$; если $a = 4$, то $(-\infty; 3] \cup (4; +\infty)$; если $3 < a < 4$, то $[a; 4) \cup (4; +\infty)$; если $a = 3$, то $(3; 4) \cup (4; +\infty)$; если $a < 3$, то $[a; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$; г) если $a > 1$, то $\varnothing$; если $a = 1$, то $\{1\}$; если $-8 < a < 1$, то $[a; 1)$; если $a \leqslant -8$, то $[-8; 1]$. **7.30.** а) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1]$; б) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1]$; в) $(-\infty; -3) \cup$

$\cup\ (-3;\ -0{,}5]\cup(-0{,}5;\ 1]$; г) $(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ 1]$. **7.31.** а) $[4;\ 5]$; б) $[-1;\ 0]\cup[4;\ 5]$; в) $[4;\ 5)$; г) $(-1;\ 0]\cup(4;\ 5]$. **7.32.** а) $[-4;\ 1]$; б) $[-4;\ 1]$; в) $(-4;\ 1]$; г) $[-4;\ -2)\cup(-2;\ 1]$. **7.33.** а) $[-10;\ 5]$; б) $[-10;\ 5]$; в) $[-10;\ 10]$; г) $[-5;\ 5]$. **7.34.** а) $[-1;\ 10]$; б) $[-13;\ -2]$; в) $[-2;\ 9]$; г) $[-2;\ 9]$. **7.35.** а) $a \leqslant -11$; б) $a \geqslant 4$. **7.36.** а) $a \geqslant 0$; б) $-\frac{4}{3} < a < 0$; в) $a = -\frac{4}{3}$; г) $a < -\frac{4}{3}$. **7.38.** а) $b = -31$; $-3 < b \leqslant -2$; б) $b = -29$; $5{,}5 \leqslant b < 6{,}5$; в) $(-\infty;\ -31)\cup(-31;\ -30)\cup(-30;\ -29)\cup$ $\cup\ (-29;\ -3]\cup[6{,}5;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -32)\cup(-31;\ -4]\cup[4{,}5;\ +\infty)$. **7.40.** а) $[0;\ 25]$; б) $[0;\ 5]$; в) $[-27;\ 125]$; г) $[1;\ 3]$. **7.41.** а) $[-3;\ 5]$; б) $[0;\ 8]$; в) $[0;\ 8]$; г) $[a-5;\ a+3]$. **7.42.** а) $[-3;\ 5]$; б) $[0;\ 8]$; в) $[0;\ 8]$; г) $[a-5;\ a+3]$. **7.43.** а) 1, 2, 3; б) нет таких значений; в) 2, 3, 4, 5, 6, 7; г) 0, 1, 2, 3, 4, 5. **7.44.** а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$. **7.45.** а) $E(f) = [-5;\ +\infty)$ при $b \geqslant -5$; б) при $a \geqslant -7$; $E(f) = [-7;\ +\infty)$. **7.46.** а) При $|a| \geqslant 2\sqrt{3}$; $E(f) = \left(-\infty;\ -2\sqrt{3}\right]\cup$ $\cup\ \left[2\sqrt{3};\ +\infty\right)$; б) при $|a| \leqslant 2$; $E(f) = [-2;\ 2]$. **7.47.** а) $\left(-\infty;\ -4\sqrt{2}\right]\cup$ $\cup\ \left[4\sqrt{2};\ +\infty\right)$; б) $(-\infty;\ -8]\cup[4;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ +\infty)$.

§ 8

8.4. а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -7)\cup$ $\cup\ (-7;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. **8.5.** а) $y \quad \frac{1}{100-x}$; б) $\sqrt{(100-x)(x-101)}$; в) $y \quad \sqrt[4]{100-x}$; г) $y \quad \sqrt{-(100-x)^2}$ **8.6.** а) $y \quad \frac{1}{(1-x)(10-x)}$; б) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; в) $y = \sqrt{(x-1)(x-2)}$; г) $y = \frac{\sqrt{21-x^2-4x}}{x-2}$.

8.10. а) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -12)\cup(-12;\ +\infty)$; г) $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. **8.11.** а) $[5;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 1]$; в) $(-\infty;\ 2]$; г) $[-1;\ +\infty)$.

8.12. а) $\{1;\ 3\}$; б) $(-1;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ +\infty)$; г) $[0;\ +\infty)$. **8.13.** а) $\{0;\ \pm2;\ \pm4\}$; б) $\{0;\ 2\}$. **8.14.** а) $[3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 36]$; г) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

8.15. а) $[-3{,}25;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ 13\frac{1}{8}\right]$. **8.16.** а) $[-4;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$.

8.18. а) Убывает на $(-\infty;\ 0{,}75]$; возрастает на $[0{,}75;\ +\infty)$; б) убывает на $(-\infty;\ 1]$; в) убывает на $(-\infty;\ -0{,}6]$; возрастает на $[-0{,}6;\ +\infty)$; г) возрастает на $[-0{,}6;\ +\infty)$. **8.21.** а) Убывает на $[5;\ +\infty)$; б) возрастает на $[1{,}5;\ +\infty)$; в) убывает на $(-\infty;\ 2]$; г) убывает на $(-\infty;\ 0{,}75]$. **8.23.** а) Убывает на $(-\infty;\ 0]$;

возрастает на $[0; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; 0]$; возрастает на $[0; +\infty)$; в) убывает на $(-\infty; 1,5]$; возрастает на $[1,5; +\infty)$; г) убывает на $(-\infty; 0]$; возрастает на $[0; +\infty)$. **8.24.** а) Убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$; возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$; б) убывает на $(-\infty; -3]$ и на $[0; 3]$; возрастает на $[-3; 0]$ и на $[3; +\infty)$; в) убывает на $(-\infty; -2]$ и на $[1,5; 5]$; возрастает на $[-2; 1,5]$ и на $[5; +\infty)$; г) убывает на $(-\infty; -4]$ и на $[0,5; 5]$; возрастает на $[-4; 0,5]$ и на $[5; +\infty)$. **8.27.** а) Возрастает на $(-\infty; 0]$; убывает на $[0; +\infty)$; б) возрастает на $(-\infty; -3]$; убывает на $[-3; +\infty)$; в) возрастает на $(-\infty; -1)$ и на $(-1; 0]$; убывает на $[0; 1)$ и на $(1; +\infty)$; г) возрастает на $(-\infty; -2)$ и на $(-2; 2]$; убывает на $[2; 6)$ и на $(6; +\infty)$. **8.28.** а) Возрастает на $[-3; -1]$ и на $[0; 2]$; убывает на $[-1; 0]$ и на $[2; 3]$; б) возрастает на $[-2; -1]$ и на $[1; 3]$; убывает на $[-1; 1]$; в) постоянна на $[-3; -1)$; возрастает на $[-1; 0)$ и на $(0; 1]$; убывает на $[1; 2)$ и на $(2; 3]$; г) убывает на $[-3; -2)$, $(-2; -1]$, $[1; 2)$ и $(2; 3]$; возрастает на $[-1; 0)$ и на $(0; 1]$. **8.29.** а) $-0,5$; 1; б) $(-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$; в) -8; 6; г) $[-8; 6]$. **8.30.** а) -2; б) $[-\infty; -2,5) \cup \left(-2\frac{1}{3}; -2\right] \cup (1; +\infty)$. **8.31.** а) $-0,5$; б) $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{8}; -0,5\right)$. **8.32.** а) $-0,5$; б) $\left(-0,5; -\frac{1}{3}\right]$. **8.34.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 1. **8.35.** а) 9; б) $\frac{1}{4}$; в) 4; г) 0. **8.38.** а) $y = \begin{cases} -\frac{4}{3}x \quad 3, & 3 \leqslant x < 0; \\ -\frac{4}{3}x + 2, & 0 < x \leqslant 3; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \frac{5}{9}(x \quad 1)^2 \quad 2, & -2 < x < 1; \\ \frac{5}{9}(x \quad 1)^2 \quad 2, & 1 < x < 4. \end{cases}$ **8.43.** а) $y_{наиб} = -73$, $y_{наим} = -148$; б) наибольшего значения нет; $y_{наим} = y(0) = -100$; в) наибольшего значения нет; $y_{наим} = y(4) = -148$; г) наибольшего значения нет; $y_{наим} = y(4) = -148$. **8.44.** а) $y_{наиб} = 13$; $y_{наим} = -51$; б) $y_{наиб} = 19$; наименьшего значения нет; в) $y_{наиб} = 21$; наименьшего значения нет; г) $y_{наиб} = y(-3) = 21$; наименьшего значения нет. **8.45.** а) 2; б) 2; в) $\frac{1}{3}$; г) 2. **8.46.** а) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = -1$; б) $y_{наиб} = 0,5$; $y_{наим} = -0,5$; в) $y_{наиб} = 2,5$; $y_{наим} = -2,5$; г) $y_{наиб} = 3,5$; $y_{наим} = -3,5$. **8.47.** а) 2; б) 4; в) 4; г) если n – четное число, то $y_{наим} = \frac{n(n+2)}{4}$; если n — нечетное число, то $y_{наим} = \frac{(n+1)^2}{4}$. **8.48.** а) $y_{наиб} = y(1) = 5(a + 1)$; $y_{наи} = y(-1) = 5a - 3$; б) $y_{наиб} = y(2) = 4 \quad a$; $y_{наим} = y(-1) = -5 - a$. **8.49.** а) Если $-1 < a \leqslant 2$, то $y_{наиб} = y(-1) = 5$, $y_{наим} = y(a) = a^2 - 4a$; если $2 < a \leqslant 5$, то $y_{наиб} = y(-1) = 5$, $y_{наим} = y(2) = -4$; если $a > 5$, то $y_{наиб} = y(a) = a^2 - 4a$, $y_{наим} = y(2) = -4$; б) если $1 \leqslant a < 3$, то $y_{наиб} = y(a) = -a^2 + 2a - 3$, $y_{наим} = y(3) = -6$; если $-1 \leqslant a < 1$, то $y_{наиб} = y(1) = -2$, $y_{наим} = y(-1) = -6$; если $a < -1$, то $y_{наиб} = y(1) = -2$, $y_{наим} = y(a) = -a^2 + 2a - 3$. **8.50.** а) 3; б) -2. **8.52.** а) 0; б) 1; в) 0; г) корней нет.

§ 9

9.5. а) 7; 11; 13; 0; б) 0; 0; 0; в) 11; 11; 7; г) 0; 0. **9.6.** а) $f(1) > f(31)$; б) $f(11) > f(110)$; в) $f(-17) = f(831)$; г) $f\left(6 + \sqrt[3]{3}\right) = f\left(\sqrt[3]{3} - 6\right)$. **9.7.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **9.17.** а) — г) Нет. **9.18.** а) — в) Нет; г) да. **9.19.** а) — в) Да; г) нет. **9.20.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **9.21.** а) 1; 1; 1; 1; б) 0,5; 0,5; 0,5; 0,5; в) 2; 2; 2; 2; г) $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{7}$. **9.22.** а) $T = 1$; $T = 3$; б) $T = 1$; $T = \frac{1}{6}$; в) $T = 20$; $T = 20$; г) $T = 12$; $T = 4{,}4$. **9.24.** а) Нет; б) может, например: $y = \sqrt{1 - 2\{x\}}$; в) нет; г) может, например: $y = \frac{1}{\{x\}}$. **9.25.** а) Нет; б) $y = \{x\} + 6$; в) нет; г) $y = \{x\} + 8$. **9.26.** а) Нет; б) может, например: $y = \{-x\}$; в) может, например: $y = \{x\}$; г) может, например: $y = \left\{\frac{3 - x}{8}\right\}$. **9.30.** а) Наибольшее значение 5; наименьшее -2; б) наибольшее 5; наименьшее -2; в) определить невозможно; г) наибольшее 5; наименьшее -2. **9.31.** а) $x = 1 + 4k$, $k \in Z$; б) $(1 + 4l; 4 + 4l]$, $l \in Z$. **9.32.** а) $x = -2 + 5k$; $x = 5l$, $k \in Z$; $l \in Z$; б) $(1 + 5r; 2 + 5r]$, $r \in Z$; в) $x = 2 + 5t$, $t \in Z$; г) $(-2 + 5n; 5n)$, $n \in Z$. **9.33.** а) $x \quad 4k$, $k \in Z$; б) $x \in R$; в) $x \quad -3 + 2n$, $n \in Z$; г) $(-3 + 4l; -1 + 4l)$, $l \in Z$. **9.34.** а) Существует, например: $f(x) = 3 + \sqrt{x} - \sqrt{x}$; б) существует, например: $f(x) = 3 + \sqrt{-x} - \sqrt{-x}$. **9.35.** а) Существует, например: $f(x) = 1$; б) нет.

§ 10

10.7. а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **10.9.** а) $y = \frac{3 + x}{x}$; б) $y = \frac{7 + 5x}{2x \quad 1}$; в) $y \quad -\frac{2 + 4x}{x}$; г) $y \quad \frac{3x + 1}{2 \quad x}$. **10.10.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **10.11.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **10.12.** а) $y = \begin{cases} 0{,}5x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{3}x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} \frac{-x - 1}{3}, \text{ если } x < 2, \\ -\frac{x + 3}{5}, \text{ если } x \geqslant 2; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} \frac{1}{3}x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ -x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 0{,}5(x - 1), \text{ если } x \leqslant 5, \\ 2x - 8, \text{ если } x \geqslant 5. \end{cases}$ **10.13.** а) $y = x^2 - 3$, $x \geqslant 0$; б) $y = 2 - x^2$,

$x \leqslant 0$; в) $y = \dfrac{x^2+1}{2}$, $x \geqslant 0$; г) $y = \dfrac{3-x^2}{5}$, $x \leqslant 0$. **10.14.** а) Может; б) не может; в) может; г) может. **10.15.** а) — г) Да. **10.16.** а) Нет, не может (если область ее определения не состоит из одного нуля); б) может; в) не может; г) может. **10.17.** а) Да, может; б) может; в) не может; г) может. **10.19.** а) Нет; б) $y = \sqrt{x}$; в) нет; г) $y = -\sqrt{x}$. **10.20.** а) Нет; б) $y = \sqrt{x+2}$; $D(f) = [-1; 2)$; $E(f) = [1; 2)$; в) нет; г) $y = -\sqrt{x+2}$; $D(f) = [-2; 4]$; $E(f) = [-2; 0]$. **10.21.** а) Нет; б) $y = \sqrt{x+2} - 3$; $D(f) = [-2; +\infty)$; $E(f) = [-3; +\infty)$; в) $y = -\sqrt{x+2} - 3$; $D(f) = [-2; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; -3]$; г) нет. **10.23.** а) $y = \dfrac{x+5}{2}$, $y = x + 6$, на R обратной функции нет; б) $y = 5 \quad x$, $y = \dfrac{7-x}{2}$,

$y = \begin{cases} \dfrac{7-x}{2}, \text{ если } x < 3; \\ 5 - x, \text{ если } x \geqslant 3; \end{cases}$ в) $y = \dfrac{x-5}{3}$, $y = \sqrt{x}$, на R обратной фукиции

нет; г) $y = 3 - x$, $y = \dfrac{2-x}{7}$, $y = \begin{cases} \dfrac{2-x}{7}, \text{ если } x < 2; \\ 3 - x, \text{ если } x \geqslant 3. \end{cases}$ **10.25.** а) $f(x) = 7$;

$x = 1$ и $g(x) = 3$; $x = 5$; б) $f(x^2) = 25$; корни: -3; 3 и $g(x^2) = 4$; корни: -2; 2;

в) $f(t) = -7$; $t = 1$ и $g(t) = 15$; $t = -3$; г) $f(3x) = 7$; $x = \dfrac{1}{3}$ и $g(5 - x) = 7$;

$x = 0$. **10.33.** а) Да; б) нет. **10.34.** а) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{4}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ б) нет;

в) $y = \begin{cases} -\dfrac{x}{3}, \text{ если } x \leqslant 0, \\ -\dfrac{x}{7}, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ г) нет. **10.35.** а) $y = \begin{cases} -\sqrt{-x}, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ б) нет;

в) $y = \begin{cases} -\sqrt{2-x}, \text{ если } x \leqslant 2, \\ -\sqrt{x-2}, \text{ если } x > 2; \end{cases}$ г) нет.

§ 11

11.11. а) IV; б) II; в) III; г) I. **11.12.** а) III; б) II; в) IV; г) IV. **11.13.** а) 6; б) 8; в) 3; г) 5. **11.18.** а) πn; б) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$; в) $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; г) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$.

11.19. а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{4}$. **11.20.** а) $\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$; в) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; г) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$. **11.21.** а) $\frac{2\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$; в) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; г) $\frac{\pi n}{3}$.
11.22. а) $2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \pi n$. **11.23.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; б) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; г) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.
11.24. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < t < \pi n$; б) $\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + \pi n$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n < t < \frac{3\pi}{4} + \pi n$; г) $\frac{\pi n}{2} \quad t < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **11.25.** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$.
11.26. а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad t \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; в) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < 2\pi n$; г) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$. **11.29.** а) πn; б) $\frac{\pi n}{2}$; в) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; г) $\frac{\pi n}{2}$. **11.30.** а) $\frac{\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; в) $\frac{2\pi n}{3}$; г) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$.
11.31. а) $\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$; б) $\frac{\pi n}{3}$; в) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$; г) $\frac{\pi n}{4}$. **11.32.** а) $\frac{\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, -\frac{2\pi}{5}$; б) $\pm\frac{\pi}{8}, \pm\frac{3\pi}{8}$; в) $-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$; г) $\pm\frac{3\pi}{7}, \pm\frac{2\pi}{21}, \pm\frac{5\pi}{21}$. **11.33.** а) $\pm\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; в) $\pm\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}$.
11.34. а) $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; б) $-1{,}5; 0{,}5; 2{,}5; 4{,}5$; в) $-3, -1, 1, 3, 5$. г) $-2\frac{2}{3}, -1\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 1\frac{5}{6}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{5}{6}$;

§ 12

12.6. а) $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$; в) $\frac{7\pi}{6}$; г) $-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. **12.8.** а) $x < 0, y > 0$; б) $x < 0, y \quad 0$; в) $x < 0, y < 0$; г) $x > 0, y > 0$. **12.9.** а) $x > 0, y < 0$; б) $x < 0, y < 0$; в) $x > 0, y < 0$; г) $x > 0, y < 0$. **12.10.** а) $x < y$; б) $x < y$; в) $x \quad y$; г) $x < y$. **12.11.** а) $|x| > |y|$; б) $|x| < |y|$; в) $|x| > |y|$; г) $|x| < |y|$.
12.20. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; г) $\frac{\pi}{6} + \pi n$. **12.21.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$;

г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$. **12.22.** а) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **12.23.** а) $2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; б) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\pi + 2\pi n < t < 2\pi n$. **12.24.** а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; б) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$. **12.25.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$. **12.26.** а) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; б) $2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; в) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t \quad \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < 2\pi n$. **12.27.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant t \leqslant 2\pi + 2\pi n$; б) $-\pi + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; г) $2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$. **12.28.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; в) $2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **12.29.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{3} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n < t < \frac{3\pi}{4} + \pi n$; в) $-\frac{\pi}{3} + \pi n < t < \frac{\pi}{3} + \pi n$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n$.

§ 13

13.19. а) 3; 5; б) 3; 4; в) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; г) 1; 2,5. **13.21.** а); б); в) Минус; г) плюс. **13.22.** а); в); г) Минус; б) плюс. **13.23.** а); б); г) Минус; в) плюс. **13.24.** а) Минус; б); в); г) плюс. **13.25.** а) Плюс; б) минус. **13.26.** а) 0; б) 0. **13.31.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; в) πn; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **13.32.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **13.33.** а) $x > \frac{1}{2}$; б) $x < -2$; $x > 2$. **13.34.** а) $x \leqslant \frac{1}{3}$; б) $-3 \leqslant x \leqslant 3$. **13.35.** а) $x \leqslant 1$; б) $-6 < x < 6$; в) $x \geqslant 1{,}4$; г) $-\infty < x < +\infty$. **13.36.** а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a < b$. **13.37.** а) $a < b$; б) $a > b$; в) $a < b$; г) $a < b$.

13.38. а) $\sin\frac{4\pi}{3}$, $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{7\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{8}$. **13.39.** а) $\cos 4$, $\sin 3$, $\cos 5$, $\sin 2$; б) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 7$, $\cos 6$; в) $\sin 4$, $\sin 6$, $\sin 3$, $\sin 7$; г) $\cos 3$, $\sin 5$, $\sin 4$, $\cos 2$. **13.40.** а) $\cos 1$, $\sin 1$, 1, $\operatorname{tg} 1$; б) $\operatorname{ctg} 2$, $\cos 2$, $\sin 2$, 2. **13.41.** а) 0,5; б) 0,5. **13.42.** а) -1; б) 1. **13.43.** а) $2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; б) $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; в) $-\pi + 2\pi n < t < 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **13.44.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **13.45.** а) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; г) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$. **13.46.** а) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; б) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; в) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **13.47.** а) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; б) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$. **13.48.** а) $2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **13.49.** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \pi + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **13.50.** а) $\pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $t = 2\pi n$; в) $\pi + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n < t < 2\pi + 2\pi n$; г) $t \neq \frac{\pi n}{2}$.

§ 14

14.17. а) $\sin t = -\frac{5}{13}$, $\cos t = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} t = \frac{5}{12}$; б) $\sin t = \frac{24}{25}$, $\cos t = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} t = \frac{24}{7}$; в) $\sin t = -\frac{12}{13}$, $\cos t = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} t = -\frac{12}{5}$; г) $\sin t = \frac{15}{17}$, $\cos t = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg} t = -\frac{15}{8}$. **14.18.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{12}{5}$. **14.19.** а) $-\frac{12}{13}$, б) $-1{,}4$. **14.20.** а) $-0{,}18$; б) 4. **14.21.** а) 0,792; б) $-2{,}475$. **14.22.** а) 3,29; б) 5,267. **14.23.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{8}$. **14.24.** а) $-\frac{49}{12}$; б) $\frac{2113}{144}$. **14.25.** а) 1,4; б) 1. **14.26.** а) 5; б) $\frac{11}{9}$. **14.27.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $-\frac{3}{4}$. **14.28.** а) $-\frac{1}{3}$; б) 0. **14.29.** а) $\frac{1}{(1+a^2)^2}$; б) $\frac{a}{1+a^2}$; в) $\frac{a^4}{(1+a^2)^2}$; г) $\frac{a^3}{(1+a^2)^2}$. **14.30.** а) $\frac{3a^2+2}{a^2+1}$; б) $\frac{2-3a-5a^2}{1+a^2}$. **14.31.** а) 0; б) $\frac{1}{\cos t}$. **14.32.** а) $3\sin t$; б) $3\cos t$. **14.33.** а) $\sin\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\sin\frac{13}{24}$; б) $\cos 1{,}1$; $\frac{1}{2}$; $\cos 1$. **14.34.** а) -6; -2; б) -5; $1\frac{1}{4}$; в) -3; 6; г) -7; 2.

§ 15

15.7. а) $\sin 160°$, $\sin 40°$, $\sin 120°$, $\sin 80°$; б) $\cos 160°$, $\cos 120°$, $\cos 80°$, $\cos 40°$. **15.8.** а) $\sin 1000°$, $\sin 210°$, $\sin 380°$, $\sin 830°$; б) $\cos 920°$, $\cos 460°$, $\cos 650°$, $\cos 390°$. **15.9.** а) $\sin 990°$, $\cos 990°$, $\sin 22{,}5°$, $\cos 37{,}4°$; б) $\operatorname{tg} 100°$, $\cos 94{,}3°$, $\sin 77°$, $\operatorname{ctg} 225°$. **15.13.** $BC = 8$ см; $AC = 4(\sqrt{3}+1)$ см; $S = 8(\sqrt{3}+1)$ см². **15.14.** а) $\frac{25(3+\sqrt{3})}{6}$ см². **15.15.** а) $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15°$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\sin 22{,}5°$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos 22{,}5°$ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

15.16. а) 1; б) 3. **15.17.** а) 1; б) 0. **15.18.** а) 45,5; б) 90. **15.20.** а) $n = 1, 2, 3, \quad 179$; б) ни при каких; в) $n > 180$. **15.21.** а) $n = 1, 2, 3, \quad 89$; б) ни при каких; в) $n \geqslant 90$. **15.22.** а) При любых $n \in N$, кроме чисел вида $n = 360k$, $n = 360k - 1$, $k \in N$; б) ни при каких; в) $n = 360k$, $n = 360k - 1$, $k \in N$. **15.23.** а) $n = 1, 2, 3, \quad , 178$; б) $n = 180, 181, \quad , 359$; в) $n = 360k$, $n = 360k - 181$, $k \in N$. **15.24.** $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$; $\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$; $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

§ 16

16.10. а) Четная; б) нечетная; в) четная; г) нечетная. 16.11. а) Нечетная; б) четная; в) нечетная; г) четная. 16.12. а) Нечетная; б) четная; в) нечетная; г) четная. 16.13. а) Четная; б) нечетная; в) четная; г) нечетная. 16.14. а) $[-1;\ 1]$; б) $[-1;\ 1]$; в) $[-1;\ 1]$; г) $[-1;\ 1]$. 16.18. а) π; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) 4π; г) $\frac{8\pi}{3}$. 16.19. а) $\sin(8 - 2\pi)$; б) $\cos(-10 + 4\pi)$; в) $\sin(-25 + 8\pi)$; г) $\cos(35 - 10\pi)$. 16.22. а) $[-2;\ 2]$; б) $[0;\ 625]$; в) $[-1;\ 5]$; г) $[0;\ 25]$. 16.23. а) $\left[\frac{1}{3};\ 1\right]$; б) $[-4;\ -1]$; в) $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right]$; г) $[3;\ 5]$. 16.24. а) $[3;\ 15]$; б) $\left[1;\ \sqrt{3}\right]$; в) $\left[1\frac{3}{4};\ 4\right]$; г) $[0;\ 2]$. 16.25. а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; б) 0, 1, 2, 3; в) 1, 2, 3, 4, 5; г) 3. 16.26. а) 5; $2\pi n < x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq x < \pi + 2\pi n$; $n \in Z$; б) 4; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; $n \in Z$. 16.32. а) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; б) $y_{наим} = -\frac{1}{2}$; $y_{наиб}$ не существует; в) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$; $\frac{3}{2}$; г) $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{2}$. 16.35. а) 1,5; 2,5; б) 0,5; 2,5; в) 0,5; 2,5; г) $y_{наим} = 1$; $y_{наиб}$ не существует. 16.44. а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 16.45. а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 16.48. а) $-\pi$; б) 0; в) 0; г) π. 16.49. а) $\pm\frac{\pi}{2}$; 0; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) нет корней. 16.50. а) $\frac{\pi}{3}$; б) π; в) $\frac{\pi}{3}$; г) 0. 16.51. а) $-\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) 0; г) $\frac{\pi}{2}$. 16.52. а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) π; г) 0. 16.53. а) 2; б) бесконечное множество; в) 0; г) 1. 16.54. а) 0; б) бесконечное множество; в) 2; г) 2. 16.55. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. 16.56. а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{3}$. 16.57. а) $x = 0$; б) $x = \frac{3\pi}{2}$. 16.58. а) $x < -\frac{5\pi}{6}$; $0 < x < \frac{5\pi}{6}$; б) $x > \frac{\pi}{3}$.

§ 17

17.11. а) $y = 2\sin x + 1$; б) $y = -1{,}5\cos x + 2$; в) $y = -0{,}5\sin x - 2$; г) $y = 3\cos x - 0{,}5$. **17.12.** а) $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = 1{,}5\sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$; г) $y = -3\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

17.13. а) $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 1{,}5\cos x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, \text{ если } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

17.15. а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; б) $\pm\frac{\pi}{3}$. **17.16.** а) $x < 0$; $x > 0$; б) $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$.

§ 18

18.10. а) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \sin 2x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} \cos 3x, \text{ если } -\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}, \\ -1, \text{ если } x > \frac{\pi}{3}; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \sin 2x, \text{ если } x < 0, \\ 2\cos x, \text{ если } x > 0; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -2\sin x, \text{ если } -2\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \cos\frac{x}{2}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$

18.11. а) Возрастает на $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$; б) убывает на $\left(-1, -\frac{\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right)$; в) возрастает на $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$, убывает на $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$, убывает на $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$; г) убывает на $\left(3, \frac{7\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[\frac{7\pi}{6}, 4\right)$. **18.12.** а) Возрастает на $[0, 2\pi]$, убывает на $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$; б) убывает на $(-3; 0]$, возрастает на $[0; 2)$; в) убывает на $\left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$, возрастает на $\left[0, \frac{5\pi}{3}\right)$; г) возрастает на $(3, 2\pi]$, убывает на $[2\pi, 9)$.

18.13. а) $\frac{3\pi}{4} + 3\pi n \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in Z$; б) $-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in Z$. **18.14.** а) $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}$, $n \in Z$; б) $\frac{4\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi n}{3}$, $n \in Z$. **18.18.** а) $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.

§ 19

19.5. а) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = -1{,}5\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. **19.6.** а) $y = -2\cos\frac{3x}{2}$; б) $y = 3\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$. **19.7.** а) $\frac{3\pi}{2} + 4\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$. **19.8.** а) $-\frac{5\pi}{6} + \pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **19.9.** а) 4π; б) π. **19.10.** а) Убывает на $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, возрастает на $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$; б) убывает; в) возрастает на $\left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; г) убывает. **19.11.** а) Убывает на $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$; б) возрастает; в) возрастает на $\left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right]$, убывает на $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$; г) убывает на $\left(-1, \frac{\pi}{6}\right]$, возрастает на $\left[\frac{\pi}{6}, 1\right)$. **19.12.** а) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant a \leqslant 4\pi n$, $n \in Z$; б) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n \leqslant a \leqslant \frac{13\pi}{6} + 4\pi n$, $n \in Z$. **19.13.** а) $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{4}$; б) $a = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in N$.

§ 20

20.6. а) Ни четная, ни нечетная; б) нечетная; в) четная; г) нечетная. **20.7.** а) Нечетная; б) четная; в) четная; г) ни четная, ни нечетная. **20.8.** а) Нечетная; б) четная; в) нечетная; г) нечетная. **20.11.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) 3π;

в) $\frac{\pi}{5}$; г) $\frac{5\pi}{2}$. **20.12.** а) π; б) 2π. **20.15.** а) Минус; б) минус; в) плюс; г) минус. **20.21.** а) Возрастает на $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

б) убывает на $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

в) убывает на $\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in Z$;

г) возрастает на $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

20.28. а) $-\frac{\pi}{2} + \pi n \quad x < \frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\pi n \quad x \quad \frac{\pi}{6} + \pi n$;

в) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; г) $\frac{3\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \pi + \pi n$. **20.29.** а) $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; б) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < 2\pi n$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; г) $2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$.

§ 21

21.3. а) $[-1; 1]$; б) $[2; 3]$; в) $[-2; 2]$; г) $\left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$. **21.4.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **21.5.** а) $[-\pi; \pi]$; б) $[-2\pi; 2\pi]$; в) $[0; \pi]$; г) $[0; 2\pi]$. **21.6.** а) Нечетная; б) четная; в) ни четная, ни нечетная; г) нечетная. **21.16.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{5\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{7\pi}{12}$. **21.17.** а) 0; б) $\frac{\pi}{3}$. **21.18.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 0; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **21.19.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1; в) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\sqrt{3}$. **21.21.** а) $[-1; 1]$; б) $[0; 2]$; в) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; г) $[1; 2]$. **21.23.** а) $[0; 2\pi]$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; г) $[-\pi; \pi]$. **21.24.** а) Четная; б) нечетная; в) ни четная, ни нечетная; г) нечетная. **21.33.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{7\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{6}$. **21.34.** а) $-\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{11\pi}{3}$; в) π; г) π.

21.35. а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 1; г) –1. **21.36.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **21.37.** а) $[-1; 1]$; б) $[0; 2]$; в) $\left[-\frac{1}{4}; 0\right)\cup\left(0; \frac{3}{4}\right]$; г) $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$. **21.38.** а) Нечетная; б) четная; в) ни четная, ни нечетная; г) ни четная, ни нечетная. **21.39.** а) $(-\pi; \pi)$; б) $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, г) $(0; 2\pi)$. **21.46.** а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{15}{17}$; г) $-\frac{3}{4}$. **21.47.** а) $\frac{4}{5}$; б) $-\frac{12}{5}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{4}{3}$. **21.48.** а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{12}{13}$. **21.54.** а) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) нет корней; в) 1; г) $-\frac{1}{2}$. **21.55.** а) 0; $1\frac{2}{3}$; б) 3; в) $\frac{1}{3}$, 3; г) 0; 3; 5. **21.56.** а) 4; б) $\frac{2}{3}$. **21.57.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, –1; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) ±1. **21.58.** а) –1,5; б) 9; –1; в) нет корней; г) 2; 3. **21.59.** а) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1; г) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. **21.60.** а) $-1 \le x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x > -1$; в) $-1 \le x \le 1$; г) $x \ge -\sqrt{3}$. **21.61.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-1 \le x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $x \ge \frac{\sqrt{3}}{3}$. **21.62.** а) $-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x \le -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x \ge \sqrt{3}$; в) $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$; г) $x < -1$; $x > 1$.

§ 22

22.3. а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; б) $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{10\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; г) $\pm\pi$. **22.5.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$; б) $\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n$. **22.6.** а) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$; г) $\pm\frac{5\pi}{4}$, $\pm\frac{3\pi}{4}$. **22.7.** а) 2; б) 3. **22.11.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{2}{3} + \pi n$; в) $(-1)^n\arcsin\frac{3}{4} + \pi n$, πn; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **22.12.** а) $(-1)^n\frac{\pi}{6}\quad\pi n$; $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **22.13.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$.

22.15. а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$; в) $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. **22.16.** а) 3; б) 2. **22.25.** а) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$; $4\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 3\pi n$; в) $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$. **22.26.** а) $\frac{7\pi}{12} + \pi n$; б) $\pi + 2\pi n$; в) $8\pi n$, $-\frac{4\pi}{3} + 8\pi n$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $\frac{2\pi n}{3}$. **22.27.** а) $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$; б) $\pm\frac{\pi}{18}$, $\pm\frac{11\pi}{18}$, $\pm\frac{13\pi}{18}$; в) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{16}$, $\frac{7\pi}{16}$, $\frac{11\pi}{16}$, $\frac{15\pi}{16}$. **22.28.** а) $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$; б) 0, 2π, 4π. **22.29.** а) -2π, 0, 2π, 4π; б) $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$. **22.30.** а) $\frac{7\pi}{8}$; б) $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$; в) $-\frac{\pi}{8}$, г) $-\frac{\pi}{8}$. **22.31.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) 0, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$; в) $-\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{\pi}{3}$. **22.32.** а) -3, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n = -1, -2, -3, \ldots)$; б) 6, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $(n = 0, -1, -2, \ldots)$. **22.33.** а) 0, π, $-\pi$, 4, -4; б) 1; $\frac{3}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$; в) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, 0, 7; г) 1, $1\frac{1}{3}$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

22.34. а) $x \ne \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $x \ne \pi n$; в) $x > 0$, $x \ne \pi n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; г) $x > 5$, $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. **22.35.** а) $\{-1, 1\}$; б) $\{-1, 1\}$. **22.36.** а) $\{-1, 1\}$; б) $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **22.37.** а) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{3} + \pi n$; в) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$; г) πn, $\frac{3\pi}{4} + \pi n$. **22.38.** а) 2, πn; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$. **22.39.** а) 3, πn; б) -2, $\frac{\pi}{2} + \pi n$.

22.40. а) 1, 4, πn; б) -5, -7, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **22.41.** а) 8; б) 7. **22.42.** а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; в) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$. **22.43.** а) $\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$; б) $-\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n < t < \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n$; в) $-\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n < t < \arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi n$.

22.44. а) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n \leq t \leq 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$; в) $-\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n < t < \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$; г) $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n \leq t \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq t \leq \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$. 22.45. а) $\frac{\pi}{3} + \pi n < t < \frac{2\pi}{3} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < -\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $-\arccos\frac{1}{3} + \pi n < t < \arccos\frac{1}{3} + \pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < t < \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$. 22.47. а) $-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n < t < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$; б) $-\arcsin 0{,}6 + 2\pi n \leq t \leq \pi + \arcsin 0{,}6 + 2\pi n$; в) $\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n \leq t \leq \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$; г) $\pi + \arcsin 0{,}6 + 2\pi n < t < 2\pi - \arcsin 0{,}6 + 2\pi n$.

22.48. а) $\pi + \arcsin 0{,}8 + 2\pi n < t < 2\pi - \arcsin 0{,}8 + 2\pi n$; б) $-\arcsin 0{,}8 + 2\pi n \leq t \leq \pi + \arcsin 0{,}8 + 2\pi n$. 22.49. а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < t < \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$; $\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; б) $\arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n \leq t \leq \pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq t \leq \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$. 22.50. а) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$; б) $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; в) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi n$; г) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$. 22.51. а) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} 3 + \pi n$; б) $\pi n < x < \operatorname{arcctg}\frac{1}{3} + \pi n$; в) $\operatorname{arcctg} 2 + \pi n \leq x \leq \pi + \pi n$; г) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \pi n$. 22.52. а) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; в) $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n < x < \operatorname{arctg} 3 + \pi n$; г) $\pi n < x < \operatorname{arctg} 2 + \pi n$. 22.53. а) $-\frac{7\pi}{12} + \pi n < x < \frac{\pi}{12} + \pi n$; б) $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}$;

в) $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$; г) $-2 \arcsin \frac{1}{7} + 4\pi n < x < 2\pi + 2 \arcsin \frac{1}{7} + 4\pi n$. **22.54.** а) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{18} \quad \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{2\pi n}{3}$; г) $\frac{5\pi}{12} + 2\pi n < x < \frac{25\pi}{12} + 2\pi n$. **22.55.** а) $2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x < 2\pi n$, $2\pi n < x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; в) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < 2\pi n$, $2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **22.56.** а) $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2$; б) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 1$. **22.57.** а) πn; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$. **22.58.** а), б) Нет решений. **22.59.** а) $0 \leqslant a \leqslant 1$; б) $0 \leqslant a \leqslant 0{,}5$, $2 \leqslant a \leqslant 2{,}5$; в) $\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 1$; г) $-2 \leqslant a < -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} < a \leqslant 2$. **22.60.** а) $-\frac{5}{2} \leqslant a \leqslant \frac{5}{3}$; б) $-1 \leqslant a \leqslant \frac{7}{3}$. **22.61.** а) $\frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{a-1}{a+1} + \frac{\pi n}{2}$, если $a \geqslant 0$; нет решений, если $a < 0$; б) $-\frac{\pi}{2} \pm 2 \arccos \frac{2a-1}{a-2} + 4\pi n$, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$; нет решений, если $a < -1$ или $a > 1$. **22.62.** а) $\pm\frac{1}{6} + n$, $n \in Z$; б) $\pm\arccos \frac{1}{12} + 2\pi n$, $\pm\arccos \frac{5}{12} + 2\pi n$, $\pm\arccos \left(-\frac{7}{12}\right) + 2\pi n$, $\pm\arccos \left(-\frac{11}{12}\right) + 2\pi n$. **22.63.** а) $-2 \leqslant x \leqslant 0$, $x = 2$; б) $-1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $x = 2$. **22.64.** а) $-2 < a < 2$; б) $1 \leqslant a \leqslant 2$. **22.65.** а) $-\arcsin \frac{4}{5} + 2\pi n < x < \arccos \left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$; б) $\pi - \arcsin \frac{2}{7} + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos 0{,}6 + 2\pi n$. **22.66.** а) $\operatorname{arctg} 1{,}5 + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\pi + \operatorname{arctg} 1{,}5 + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \arccos \left(-\frac{3}{7}\right) + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \operatorname{arctg}(-0{,}1) + 2\pi n$. **22.67.** а) $\arcsin(-0{,}8) + 2\pi n < x < 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$; б) $\arccos \frac{4}{9} + 2\pi n < x < \operatorname{arcctg}(-3) + 2\pi n$;

$\pi + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos \frac{4}{9} + 2\pi n$. **22.68.** а) $-\frac{19\pi}{12} < x < -\frac{11\pi}{12}$; $-\frac{7\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12} < x \leqslant 5$; б) $-5 < x < -\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{4\pi}{3} < x < -\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{6}$; $0 < x < 1$.

§ 23

23.1. а) $(-1)^{n-1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$; б) $(-1)^{n+1} \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}$; в) $(-1)^n \arcsin \frac{1}{4} + \pi n$; г) $\pi + 4\pi n$; $(-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **23.2.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\pm\arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$; б) $\pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$; в) $\pi + 2\pi n$; г) $\pm\pi + 6\pi n$. **23.3.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^n \arcsin \frac{1}{5} + \pi n$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. **23.4.** а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arcctg} \frac{1}{3} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2} \operatorname{arcctg} 5 + \frac{\pi n}{2}$; в) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; г) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $2 \operatorname{arcctg} \frac{5}{7} + 2\pi n$. **23.5.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$; в) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $-\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$; г) $\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arcctg} \frac{3}{4} + \pi n$. **23.6.** а) $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{5\pi}{3} + 4\pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, πn; в) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$; г) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. **23.7.** а) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. **23.8.** а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. **23.9.** а) $\frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. **23.10.** а) πn; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi n}{3}$; г) $2\pi n$. **23.11.** а) $\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi n$; б) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n$; в) $-\operatorname{arctg} 2{,}5 + \pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$. **23.12.** а) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; в) $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$; г) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$. **23.13.** а) πn, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{6} + \pi n$; в) πn, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{3} + \pi n$. **23.14.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n$. **23.15.** а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$; в) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$;

г) $\frac{\pi}{51} + \frac{\pi n}{17}$. 23.16. а) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{2}$; б) $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3 +$ $+ \frac{\pi n}{3}$, $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}$. 23.17. а) $\pm\frac{2\pi}{3}\quad 2\pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$. 23.18. а) $\operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$. 23.19. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) πn, $-\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n$. 23.20. а) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{4}$, $-\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 1{,}5 +$ $+ \frac{\pi n}{4}$. 23.21. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$; б) $\frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 3\pi n$. 23.22. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. 23.23. а) πn, $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 7 + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$. 23.24. а) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n$; б) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. 23.25. а) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = \pi + 2\pi k; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \\ y = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}. \end{cases}$ 23.26. а) $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, \\ y = \pi + 2\pi k; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = \pi + 4\pi n, \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k. \end{cases}$ 23.27. а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \pi n$. 23.28. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$. 23.29. а) Нет решений; б) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; в) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; г) нет решений. 23.30. а) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $\frac{\pi n}{3}$. 23.31. а) Нет решений, если $-1 < a < 1$; $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, если $a < -\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, если $a = \sqrt{2}$; $(-1)^n\arcsin\frac{1}{a} + \pi n$, если $a < -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < a \leqslant -1$; $1 \leqslant a < \sqrt{2}$; $a > \sqrt{2}$; б) нет решений, если $-1 <$ $a \quad 1$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, если $a \quad -\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, если $a \quad \sqrt{2}$; $\pm\arccos\frac{1}{a} + 2\pi n$, если $a < -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < a \leqslant -1$; $1 \leqslant a < \sqrt{2}$; $a > \sqrt{2}$.

23.32. а) -1; б) ± 1. **23.33.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, πn. **23.34.** а) $\frac{3\pi}{2} + 3\pi n$; б) $\pi + 2\pi n$. **23.35.** а) $\varnothing$; б) $2\pi + 24\pi n$. **23.36.** а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **23.37.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $-\operatorname{arctg} 3 + \pi(2n + 1)$; б) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi(2n + 1)$. **23.38.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\pi + 2\pi n$. **23.39.** а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$. **23.40.** а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi n$. **23.41.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$; б) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; в) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$; г) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. **23.42.** а) $\operatorname{arctg} 5 + \pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \operatorname{arctg} 5 + \pi n$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \operatorname{arctg} 2 + \pi n$; г) $-\frac{\pi}{2} + \pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi n$.

§ 24

24.20. а) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$; в) $(-1)^n \frac{\pi}{42} + \frac{\pi n}{7}$; г) $\pm\frac{5\pi}{72} + \frac{\pi n}{6}$. **24.21.** а) $15°$; б) $15°$. **24.22.** а) $\pi + 2\pi n$; б) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. **24.23.** а) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; б) $-\frac{5\pi}{8}$, $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$. **24.24.** а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n$. **24.25.** а) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$. **24.26.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; б) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **24.27.** а) $\frac{4\sqrt{3} + 3}{10}$; б) $-\frac{3}{5}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$. **24.28.** а) $\frac{12\sqrt{3} - 5}{26}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{-5\sqrt{3} - 12}{26}$; г) $\frac{5}{13}$. **24.29.** а) $\frac{77}{85}$; б) $\frac{36}{85}$. **24.30.** а) $-\frac{84}{85}$; б) $\frac{13}{85}$.

24.31. а) $-\frac{1519}{1681}$; б) $\frac{720}{1681}$. 24.32. а) $-\frac{12\sqrt{3}+5}{26}$; б) $\frac{5}{13}$; в) $-\frac{12}{13}$; г) $\frac{5\sqrt{3}-12}{26}$. 24.33. а) $-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$. 24.34. а) $-\frac{36}{85}$; б) $\frac{77}{85}$. 24.35. а) $-\frac{63}{65}$; б) $-\frac{16}{65}$. 24.36. а) $\frac{\pi}{12}+\pi n \quad x \quad \frac{5\pi}{12}+\pi n$; б) $2\arccos\left(-\frac{2}{7}\right)+4\pi n < x < 2\pi + 2\arccos\frac{2}{7}+4\pi n$; в) $-4\arcsin\frac{1}{3}+$ $+ 8\pi n \quad x \quad 4\pi + 4\arcsin\frac{1}{3}+8\pi n$; г) $\frac{-5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3} < x < \frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$.

24.37. а) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2} \quad x < \frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{1}{7}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{2\pi n}{7} \quad x <$ $\frac{2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)}{7}+\frac{2\pi n}{7}$; в) $\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}\arcsin\frac{2}{7}+\frac{4\pi n}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ $\frac{2}{3}\arcsin\frac{2}{7}+\frac{4\pi n}{3}$; г) $-\frac{\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3}$. 24.39. а) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$; б) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$. 24.40. а) $a < 0$; б) $a > 0$. 24.41. а) $a > b$; б) $a < b$. 24.42. а) $a < b$; б) $a > b$. 24.43. а) $a < b$; б) $a < b$. 24.44. а) $\frac{b-a}{b+a}$; б) $\frac{a+b}{a-b}$. 24.48. а) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$; б) $-\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; г) $\frac{5}{13}$. 24.49. а) $\frac{6\sqrt{2}-4}{15}$; б) 1.

§ 25

25.10. а) $\frac{1}{5}$; б) $-\frac{41\sqrt{3}+80}{23}$. 25.11. а) 1; б) $\frac{1}{7}$. 25.12. а) -2; б) $-\frac{3}{2}$. 25.13. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-1\frac{1}{6}$. 25.14. а) $-\frac{17}{7}$; б) $\frac{7}{17}$. 25.15. а) $-\frac{25\sqrt{3}+48}{39}$; б) $\frac{1}{7}$. 25.17. а) $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$. 25.18. а) $-\frac{11\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}$; б) $-\frac{17\pi}{30}, -\frac{\pi}{15}, \frac{13\pi}{30}, \frac{14\pi}{15}, \frac{43\pi}{30}, \frac{29\pi}{15}$. 25.19. а) $-\frac{7\pi}{10}+\pi n < x < \frac{\pi}{20}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3} <$ $x \quad \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$. 25.20. а) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4}+\pi n, \\ y = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n, \\ y = -\frac{\pi}{4}+\pi k; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ y = \mathrm{arctg}\, 3 + \pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, 4{,}5 + \pi n, \\ y = -\mathrm{arctg}\, 4 + \pi k. \end{cases}$ **25.21.** а) $\beta = \frac{3\pi}{4}$. **25.22.** а) 1,8; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{6 - 5\sqrt{3}}{13}$; г) $-3\frac{3}{7}$. **25.24.** 3.

§ 26

26.7. а) –0,5; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\sqrt{3}$. **26.8.** а) –1,5; б) 2; в) $-\sqrt{2}$; г) –1. **26.9.** а) 0; б) $2\cos t$. **26.10.** а) $\mathrm{ctg}\,\alpha$; б) $\cos t$; в) $\mathrm{ctg}\,\alpha$; г) $-\cos t$. **26.11.** а) –1; б) $-\frac{1}{\cos t}$. **26.12.** а) $\cos\alpha$; б) $-\frac{\cos 2y}{\sin^2 y}$. **26.14.** а) 36; б) 5. **26.15.** а) –6; б) 7. **26.16.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$. **26.17.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$. **26.18.** а) 1; б) 1. **26.19.** а) 1; б) $\sqrt{3}$. **26.20.** а) $\frac{11}{13}$; б) 17. **26.21.** а) $2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; г) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **26.22.** а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **26.23.** а) Корней нет; б) любое действительное число. **26.24.** а) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; б) $-\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{3}$. **26.25.** а) $-2\,\mathrm{arctg}\,3 + 2\pi n$; б) $-\pi + 3\pi n$. **26.26.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\mathrm{arctg}\,2 + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,3 + \frac{\pi n}{3}$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\mathrm{arctg}\,3 + \pi n$; г) $-\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,4 + \frac{\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$. **26.27.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4} + 2\pi n$; в) πn, $-\frac{\pi}{3} + \pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \pi n$. **26.28.** а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$; в) $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. **26.29.** а) $\frac{\pi n}{2}$, $-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,6 + \frac{\pi n}{3}$. **26.30.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\mathrm{arctg}\,2 + \pi n$; в) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $-\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{4}$; г) $\mathrm{arctg}\,2 + \pi n$, $-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$. **26.31.** а) πn; б) $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **26.35.** а) $\frac{2\pi}{5}$; б) $\frac{\pi}{10}$; в) $-\frac{2\pi}{5}$; г) $\frac{2\pi}{5}$. **26.36.** а) $\frac{3\pi}{10}$; б) $\frac{4\pi}{5}$; в) $-\frac{3\pi}{10}$; г) $\frac{9\pi}{14}$.

27.18. а) $2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$; в) $2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$; г) $-2\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$. **27.20.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{16}$. **27.21.** а) 1; б) 0. **27.22.** а) 2; б) -2. **27.23.** а) $\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$; г) $\frac{14+\sqrt{3}}{64}$. **27.24.** а) $2\frac{3}{8}$; б) $-\frac{23\sqrt{2}}{16}$. **27.25.** а) $\frac{1}{32}$; б) $\frac{1}{64}$. **27.27.** а) $-\frac{120}{169}$; б) $\frac{119}{169}$; в) $-\frac{120}{119}$; г) $-\frac{119}{120}$. **27.28.** а) $\frac{24}{25}$; б) $\frac{7}{25}$; в) $\frac{24}{7}$; г) $\frac{7}{24}$. **27.29.** а) $\frac{24}{25}$; б) $\frac{7}{25}$; в) $\frac{24}{7}$; г) $\frac{7}{24}$. **27.30.** а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\frac{\sqrt{7}}{7}$, $\sqrt{7}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, -2, $-\frac{1}{2}$. **27.31.** а) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$, -3, $-\frac{1}{3}$ или $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $-\frac{1}{3}$, -3; б) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$, $-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, 3. **27.32.** а) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$; $-\frac{2a}{1+a^2}$; б) $\frac{1-a^2}{1+a^2}$; $\frac{2a}{1+a^2}$. **27.33.** а) $\frac{4}{5}$; б) $-2\sqrt{2}$. **27.34.** а) $1-2a^2$; б) $1-2a^2$. **27.35.** а) $\frac{17}{18}$; б) $-\frac{1}{5}$. **27.36.** а) $\frac{97}{169}$; б) $-\frac{485}{2197}$. **27.37.** а) $a > b$; б) $a < b$. **27.38.** а) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; б) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. **27.39.** а) $x = \pi n$; б) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. **27.40.** а) 0,296; б) $\pm\frac{7\sqrt{15}}{32}$; в) 0,296; г) $-\frac{79}{81}$. **27.41.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **27.44.** а) $\frac{24}{25}$, $-\frac{7}{25}$, $-\frac{24}{7}$, $-\frac{7}{24}$; б) $-\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $-\frac{24}{7}$, $-\frac{7}{24}$; в) $-\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$, $-\frac{120}{119}$, $-\frac{119}{120}$; г) $\frac{120}{169}$, $\frac{119}{169}$, $\frac{120}{119}$, $\frac{119}{120}$. **27.45.** а) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$, $\frac{5\sqrt{26}}{26}$, $-\frac{1}{5}$; г) $\frac{\sqrt{26}}{26}$, $\frac{5\sqrt{26}}{26}$, $\frac{1}{5}$. **27.48.** а) $0, \pi, 2\pi$; б) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; в) $0, \pi, 2\pi$; г) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. **27.49.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$; в) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; г) $\frac{\pi}{4} + \pi n$. **27.50.** а) $-120°$; б) $-240°$. **27.51.** а) πn, $\mathrm{arctg}\, 3 + \pi n$; б) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, 2 + \frac{\pi n}{2}$. **27.52.** а) $0, \pi, 2\pi$; б) $\frac{7\pi}{9}$. **27.53.** а) 2; б) 3. **27.54.** а) $2\pi n$, $\pi + 4\pi n$; б) $2\pi n$; в) $\pi + 2\pi n$, $4\pi n$; г) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. **27.55.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}$; в) $\frac{\pi n}{2}$ $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; г) $-\frac{\pi}{3} + \pi n$. **27.56.** а) $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{3\pi}{4}$, $\pm\frac{5\pi}{4}$; б) $\pm\frac{\pi}{6}$,

$\pm\frac{5\pi}{6}$, $\pm\frac{7\pi}{6}$. **27.57.** а) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi n$. **27.59.** а) $2 \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi n; -2 \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$; б) $2 \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n; -2\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 2\pi n$. **27.60.** а) $\frac{1}{3}$; б) -3. **27.61.** а) $-\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$; б) $-\frac{4\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$. **27.62.** а) $\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2} \quad x < \frac{13\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$; б) $-\frac{2\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$. **27.63.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$; в) $\frac{\pi n}{3}$; г) $-\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi n}{2}$. **27.64.** а) 2; -1; б) 3; -1. **27.65.** а) $4\frac{1}{8}$; 1; б) 2; -4. **27.66.** а) $2\frac{1}{8}$; -4; б) 4; $-2\frac{1}{8}$.

§ 28

28.7. а) $2\sin\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $4\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. **28.8.** а) $4\sin 6x \cos^2\frac{x}{2}$; б) $4\cos x\cos^2\frac{3x}{2}$. **28.9.** а) $4\cos t \cos\frac{t}{2} \sin\frac{5t}{2}$; б) $-4\sin t \sin 2t \cos 5t$. **28.14.** а) -1; б) -1; в) $-\sqrt{3}$; г) -1. **28.15.** а) 5; б) $-\frac{3}{4}$. **28.16.** а) 1,5; б) 0,5. **28.17.** а) $\frac{1}{2}$; б) 4. **28.23.** а) $\frac{a}{b}$; б) $-\frac{a}{b}$. **28.26.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{8}$; в) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi n}{3}$; г) $\frac{\pi n}{7}$, $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}$. **28.27.** а) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi n}{4}$, $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$. **28.28.** а) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$; б) $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$; в) $\frac{\pi}{40} + \frac{\pi n}{10}$, $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$; г) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$. **28.29.** а) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi n}{6}$; в) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8} \quad \frac{\pi n}{4}$. **28.30.** а) $\frac{2\pi n}{7}$, $\frac{2\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$. **28.31.** а) $\frac{\pi n}{6}$, $n \neq 3 + 6k$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$; в) $\frac{\pi n}{2}$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pi + 2\pi n$. **28.32.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $(-1)^n\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$. **28.33.** а) 3; б) 2. **28.34.** а) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{9}$; б) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$. **28.35.** а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{2\pi n}{9}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$. **28.36.** а) $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n$.

§ 29

29.4. а) $\frac{1}{4}(\sin 24° - \sin 4° + \sin 12° + \sin 8°)$; б) $\cos 35° - \cos 45° + \cos 5° - \cos 15°$. 29.5. а) $\frac{1}{4}(\sin(x + y - z) + \sin(x + z - y) + \sin(y + z - x) - \sin(x + y + z))$; б) $\frac{1}{4}(\cos(x + y - z) + \cos(x + z - y) + \cos(y + z - x) + \cos(x + y + z))$. 29.6. а) $\frac{1}{4}(2\cos 4x - \cos 2x - \cos 6x)$; б) $\frac{1}{4}(2\sin 3x + \sin 7x - \sin x)$. 29.12. а) 1; б) $\frac{1}{4}$. 29.13. а) 1; б) 2. 29.14. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 29.15. а) $-\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; б) $\sqrt{2}$. 29.16. а) $\frac{3}{16}$; б) $\frac{1}{16}$. 29.17. а) $a < b$; б) $a > b$. 29.19. а) 5; б) 82. 29.20. а) πn; б) $\frac{\pi}{6} + \pi n$. 29.21. а) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. 29.22. а) πn, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; в) πn; г) $2\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. 29.23. а) $\pm\frac{\pi}{6}$; б) $\pm\frac{\pi}{4}$. 29.24. а) $\frac{\pi n}{2}$; б) πn. 29.25. а) $\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{7\pi}{8} + \pi n$; б) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; в) $-\frac{7\pi}{12} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12} + \pi n$; г) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. 29.26. а) $\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n, \\ y = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \\ y = \pi k. \end{cases}$ 29.27. а) $y_{наиб} = \frac{3}{4}$, $y_{наим} = -\frac{1}{4}$; б) $y_{наиб} = \frac{1}{4}$, $y_{наим} = -\frac{3}{4}$.

§ 30

30.4. а) $3\sqrt{3}\sin\left(t + \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$, где $\varphi = \arcsin\frac{5\sqrt{3}}{9}$; б) $6\sin\left(t - \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$, где $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{34}}{6}$. 30.5. а) -1; б) -2; в) 1; г) 1. 30.6. а) -2; 2; б) -2; 2; в) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$; г) $-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$. 30.7. а) $[-5; 5]$; б) $[-13; 13]$; в) $[-25; 25]$; г) $[-17; 17]$. 30.8. а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. 30.10. а) $-\sqrt{5} - 1$, $\sqrt{5} - 1$; б) 4; 30; в) -10; 0; г) 15; 40. 30.11. а) -4; 4; б) -3; 3. 30.12. а) 7; б) -42. 30.13. а) 16; б) 11,5. 30.14. а) -23; б) 15. 30.15. а) $2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$;

б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$; в) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $\pi + 2\pi k$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\pi + 2\pi k$. 30.16. а) $(-1)^k \frac{\pi}{8}$

$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; б) $(-1)^k \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$; в) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi k$, $-2\pi + 4\pi k$; г) $6\pi k$, $\frac{3\pi}{2} + 6\pi k$. 30.17. а) $\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{4}{5} + 2\pi k$; б) $(-1)^k \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi k}{2}$; в) $\pi + \arccos \frac{5}{13} + 2\pi k$; г) $\pm\frac{2\pi}{3} - 2 \arccos \frac{5}{13} + 4\pi k$. 30.18. а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{5}$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $\frac{2\pi}{3} + \pi k$; в) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{3}$; г) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$. 30.19. а) $-\frac{\pi}{66}$ $\frac{\pi k}{11}$, $\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{6}$; б) $\frac{1}{4} \arccos \frac{5}{13} + \frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13} + \pi k$. 30.20. а) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k$; б) $2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. 30.21. а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{4}$. 30.22. а) $2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; б) $\arcsin \frac{4}{5} - \frac{7\pi}{6} + 2\pi k < x < \arcsin \frac{4}{5} + \frac{\pi}{6} + 2\pi k$. 30.23. а) $a > 7$; $a < -6$; б) $a > \sqrt{6}$; $a < -\sqrt{6}$. 30.26. а) $a > \frac{1}{2}$; $a < -\frac{1}{2}$; б) $a \leqslant 2$.

§ 31

31.1. а) $-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{4} - 2 + \pi n$, $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi n}{2}$. 31.2. а) $\frac{\pi}{10}(1 + 2n)$; б) $\frac{\pi n}{5}$. 31.3. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. 31.4. а) $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} n$, $\frac{\pi}{13} + \frac{2\pi}{13} n$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$. 31.5. а) $-\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n$; б) $-\operatorname{arctg} 2{,}5 + \pi n$. 31.6. а) $\frac{\pi}{8}(1 + 2n)$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; б) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$; $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$. 31.7. а) $\frac{\pi}{6}(1 + 2n)$, $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}(1 + 2n)$; $\frac{\pi}{10}(1 + 2n)$. 31.8. $45° + 180°n$. 31.9. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. 31.10. а) πn; $\pm\frac{1}{2} \arccos(-0{,}7) + \pi n$; б) $\frac{\pi}{2}$ πn; $\pm\frac{1}{2} \arccos \frac{5}{7} + \pi n$. 31.11. а) $\operatorname{arctg} 2{,}5 + 2\pi n$, $\pi - \operatorname{arctg} 0{,}5 + 2\pi n$, $\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + 2\pi n$, $-\operatorname{arctg} \frac{5}{8} + 2\pi n$; б) $\operatorname{arctg} 0{,}6 + 2\pi n$, $\pi - \operatorname{arctg} 2{,}2 + 2\pi n$, $\pi + \operatorname{arctg} 11 + 2\pi n$, $-\operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$. 31.12. а) $\pi + 2\pi n$, $(-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) $2\pi + 4\pi n$, $(-1)^n \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$.

31.13. $\varnothing$. 31.14. а) $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n, \pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+$ $+\pi n$. 31.15. а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n$. 31.16. а) $\frac{\pi}{4}+\pi n, (-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+$ $+\frac{\pi}{2}n$. 31.17. а) $\pi+2\pi n, 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}+2\pi n$. 31.18. а) $\mathrm{arctg}\,\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\pi n$; б) $\frac{\pi}{2}n, \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,2+\frac{\pi}{2}n$. 31.19. $\frac{\pi}{4}+\pi n$. 31.20. а) $2\pi n, -\frac{\pi}{2}+2\pi n$. 31.21. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, \pi+2\pi n$; б) $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+2\pi n$. 31.22. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi n$. 31.23. а) $3\pi n, \pm\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}n$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n$. 31.24. а) $\frac{\pi}{72}+\frac{\pi n}{9}, -\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{4}$. 31.25. а) -1 $-\arccos\frac{3}{5}+2\pi n$; б) $1{,}5+\frac{1}{2}\arccos\frac{8}{17}\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. 31.26. а) $-\frac{\varphi}{6}-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi}{3}n$, $\frac{\varphi}{8}+\frac{5\pi}{48}+\frac{\pi}{4}n$, где $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$. 31.27. $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}n$. 31.28. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. 31.29. $-\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$. 31.30. $\varnothing$. 31.31. $\varnothing$. 31.32. $\frac{\pi}{2}+\pi n, \mathrm{arctg}\,\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}+\pi n$. 31.33. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n=\pm1, \pm2$, $\pm3, \ldots$ $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, где $k=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ 31.34. а) $\frac{1}{12}\mathrm{arctg}\,8+\frac{\pi n}{12}$; б) $\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{16}$. 31.35. а) $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi n, \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n$. 31.36. $\frac{\pi}{2}+$ $+2\pi n$. 31.37. $\frac{\pi}{6}+\pi n$. 31.38. πn. 31.39. $\frac{\pi}{4}+2\pi n$. 31.40. $\pm\frac{\pi}{2}; \pm3$. 31.41. а) 0, $\pm1, \pm2, \pm\frac{5}{2}$; б) $\pm1, \pm3, \pm\frac{7}{2}$. 31.42. а) $-1, 5, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$; б) $-2, 0, 1, -\frac{\pi}{3}$. 31.43. $2\pi n, -\frac{\pi}{4}+\pi n$. 31.44. а) $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\pi n, (-1)^n\frac{5\pi}{18}+\pi n, (-1)^n\frac{7\pi}{18}+\pi n, \pi n$; б) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{5\pi}{12}+2\pi n$. 31.45. а) $\pm\frac{\sqrt{11}}{6}, \pm\frac{\sqrt{155}}{6}, \pm\frac{\sqrt{179}}{6}$; б) $\pm\frac{\sqrt{47}}{3}$, $\pm\frac{\sqrt{59}}{3}$. 31.46. а) $2\pm\sqrt{3}$. 31.47. а) $2\pi n, -\mathrm{arctg}\,6+2\pi n$; б) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}+2\pi n$. 31.48. а) $\pm\frac{\sqrt{81}}{6}, \pm\frac{\sqrt{155}}{6}, \pm\frac{\sqrt{179}}{6}$; б) $\pm\frac{\sqrt{47}}{3}, \pm\frac{\sqrt{59}}{3}$.

§ 32

32.6. а) i; б) $-32i$; в) 2; г) 0. 32.8. а) $-2i$; б) $\sqrt{2i}$; в) $18i$; г) 0. 32.9. а) i, 1, $-i$, -1, i, 1, $-i$; б) $-i$; в) 1; г) 0. 32.11. а) $z_1 + z_2 = 2 - i$, $z_1 - z_2 = 3i$; б) $z_1 + z_2 = -1 + 3i$, $z_1 - z_2 = 5 - i$; в) $z_1 + z_2 = 15$, $z_1 - z_2 = -15 - 2i$; г) $z_1 + z_2 = -34 - 14i$, $z_1 - z_2 = -2 + 16i$. 32.12. а) $(4 - n) + (n - 3)i$; б) $-11 + 12i$; в) $-130 + 150i$; г) $-651 + 682i$. 32.14. а) 0,5; б) 0,1; в) −0,1; г) таких a не существует. 32.15. а) $1 + 3i$; б) $1 - 14i$; в) $1 - 5i$; г) $34 - 21i$. 32.16. а) −2; б) 0; в) 0,125; г) таких a не существует. 32.17. а) 1; б) $\frac{13}{6}$; в) 1,5; г) $\frac{1}{12}$. 32.18. а) $a = 3$, $b = 2$; б) $a = 3$, $b = 2$; в) $a = 4$, $b = -1$; г) $a = 2$, $b = 1$. 32.23. а) 2; б) $16i$; в) на 1-м, 5-м, 9-м, местах; г) на 3-м, 7-м, 11-м, местах. 32.24. а) $-i$; б) $-1 - i$; в) $-i$; г) i. 32.25. а) −2; б) 0; в) $-2i$; г) 0. 32.26. а) $\frac{-20 + 28i}{65}$; б) 0,6. 32.27. а) $-1 - i$; б) $-i$; в) $0{,}5 + 0{,}5i$; г) $i - 1$. 32.28. а) $a = -0{,}25$, $b = 0$; б) $a = -1$, $b = 0$; в) $a = 0{,}2$, $b = -0{,}48$; г) $a = 0{,}56$, $b = -0{,}24$. 32.29. а) $1 + 2i$; б) 1; в) $3i$; г) $2 + 2i$. 32.30. б) −44. 32.31. а) 0; б) 1; $-\frac{4}{5}$. 32.32. а) $\bar z = -i$; $z\bar z = 1$; $\bar z : z = -1$; б) $\bar z = i$; $z\bar z = 1$; $\bar z : z = -1$; в) $\bar z = 3 + 7i$; $z\bar z = 58$; $\bar z : z = \frac{-20 + 21i}{29}$; г) $\bar z = -5 + 6i$; $z\bar z = 61$; $\bar z : z = \frac{-11 - 60i}{61}$. 32.33. а) $z = -2i$; $z\bar z = 4$; $z \quad \bar z = -1$; б) $z = 3i$; $z\bar z = 9$; $z \quad \bar z = -1$; в) $z = 1 + i$; $z\bar z = 2$; $z \quad \bar z = i$; г) $z = -1 - 3i$; $z\bar z = 10$; $z \quad \bar z = -0{,}8 + 0{,}6i$. 32.34. а) $\frac{5 - 3i}{17}$; б) $\frac{16 - 30i}{289}$; в) $\frac{5 + 3i}{17}$; г) $\frac{2 + 8i}{17}$. 32.35. а) $\frac{17 + 7i}{13}$; б) $\frac{-55 + 37i}{13}$; в) $\frac{1 + 5i}{2}$; г) $-\frac{1 - 15i}{4}$. 32.36. а) $z_1 = i$; $z_2 = 3$; б) $z_1 = 1$; $z_2 = 2i$; в) $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 3 + 2i$; г) $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 2 + 3i$. 32.37. а) 2; −2; б) $\sqrt{5} + i$; $-\sqrt{5} + i$; в) таких корней нет; г) $\frac{3 + i}{\sqrt{2}}$. 32.38. а) −2; б) $-1 - i$; в) 0; г) $\frac{1 - \sqrt{2} + i}{\sqrt{2}}$.

§ 33

33.8. б) 45°; в) 3 3 = 9; г) z^8 и z^7. 33.15. б) 0,6; г) −0,5. 33.16. б) $\frac{5}{3}$; г) −2. 33.17. б) $y = 0{,}5(9 - x)$; в) $-5 + 7i$; г) $-7 + 8i$. 33.18. б) $y = x^2 - 3x + 2$; в) 15; г) 13. 33.19. б) $y = \frac{3}{x - 1}$; в) $z_6 = 7 + 0{,}5i$; г) $z_2 = 3 + 1{,}5i$. 33.20. а) ± 1; б) нет решений; в) 1; г) −1. 33.21. а) $\pm i$; б) нет решений; в) i; г) $-i$.

33.22. а) 0; б) 0; в) 0; г) любое действительное или чисто мнимое число. **33.23.** а) $2 - 0{,}5i$; б) $7 - i$; в) $3 + 7i$; г) $5 - 2i$.

§ 34

34.3. а) $|z_1| = 13$, $|z_2| = 5$; б) $z_1z_2 = 56 + 33i$, $|z_1z_2| = 65$; в) $\frac{1}{z_1} = \frac{12 + 5i}{169}$; г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{16 - 63i}{25}$. **34.5.** а) 6; б) $2\sqrt{5}$; в) 7; г) $5\sqrt{2}$. **34.8.** а) 1; б) 2; в) 3; г) 4. **34.9.** а) 1; б) 3; в) 3; г) 4. **34.11.** а) $z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $z = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; в) $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$; г) $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$. **34.12.** а); б) $z = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$; г) $z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$.

34.13. а) $z = \cos(-0{,}8\pi) + i\sin(-0{,}8\pi)$; б) $z = \cos(-0{,}3\pi) + i\sin(-0{,}3\pi)$; в) $z = \cos\pi + i\sin\pi$; г) $z = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$. **34.15.** а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{2}$. **34.21.** а) $5(\cos 0 + i\sin 0)$; б) $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$; в) $8(\cos\pi + i\sin\pi)$; г) $0{,}5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

34.22. а) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; в) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; г) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

34.23. а) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; в) $6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; г) $4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

34.24. а) $8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; б) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; в) $4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; г) $\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

34.25. а) $5(\cos(-\arccos 0{,}6) + i\sin(-\arccos 0{,}6))$;
б) $13\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right) + i\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)\right)$;

в) $10(\cos(\arccos 0{,}6) + i\sin(\arccos 0{,}6))$;

г) $17\left(\cos\left(-\arccos\left(\frac{15}{17}\right)\right) + i\sin\left(-\arccos\left(\frac{15}{17}\right)\right)\right)$.

34.26. а) $\cos(-55^\circ) + i\sin(-55^\circ)$; б) $\cos 113^\circ + i\sin 113^\circ$; в) $\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ$; г) $\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ$. **34.27.** а) $2\sin 50^\circ(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$; б) $2\sin\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$; в) $2\sin\frac{3\pi}{11}\left(\cos\frac{3\pi}{11} + i\sin\frac{3\pi}{11}\right)$; г) $2\sin 125^\circ(\cos(-35^\circ) + i\sin(-35^\circ))$. **34.28.** а) $2{,}5(-\sqrt{3} + i)$; б) $0{,}5(1 + i\sqrt{3})$; в) $2{,}5(-1 + i\sqrt{3})$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$. **34.29.** а) $2i$; б) $-5i\sqrt{2}$; в) $3(\sqrt{3} + i)$; г) $i\sqrt{3}$. **34.30.** а) $-\sqrt{3} + i$; б) $-5i$; в) $40i$; г) $\sqrt{3} + i$. **34.33.** а) π; б) $-\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{2}$. **34.34.** а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) π. **34.35.** а) $-\frac{5\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 0. **34.36.** а) $-\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{5\pi}{6}$. **34.40.** а) 3; б) 5; в) 8; г) 10. **34.41.** а) $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$; б) $1 + i\sqrt{3}$. **34.42.** а) Круг радиуса 1 с центром в $3 + 4i$, $|z| = 6$ — наибольшее значение; б) круг радиуса 1 с центром в $4 - 3i$, $|z| = 4$ — наименьшее значение.

§ 35

35.1. а) 4; б) $a < 4$; в) $a > 4$; г) $a < 0$. **35.2.** а) $|a| \geqslant 6$; б) $-6 < a < 6$; в) $a > 6$; г) $-10 < a < -6$. **35.3.** а) $a = 1$ или $a = 0$; б) $a < 0$; в) $a < 0$; г) $a = -16 - 8\sqrt{5}$. **35.4.** а) $\pm 12i$; б) $\pm 2i$; в) $\pm 21i$; г) $\pm 32i$. **35.5.** а) $z^2 + 1 = 0$; б) $z^2 - 14z + 53 = 0$; в) $z^2 + 49 = 0$; г) $z^2 - 2z + 2 = 0$. **35.6.** а) $z^2 + 4 = 0$; б) $z^2 - 2z + 10 = 0$; в) $64z^2 + 1 = 0$; г) $z^2 + 648^2 = 0$. **35.8.** а) $0{,}5 \pm 1{,}5i$; б) $-1{,}5 \pm 2{,}5i$; в) $2{,}5 \pm 0{,}5i$; г) $-5{,}5 \pm 2{,}5i$. **35.9.** а) 2; б) 10; в) ± 4; г) -7; 3. **35.10.** а) $a = -4$; б) $a = 4$; в) $a = \pm 3$; г) $a = -4$ или $a = 2$. **35.11.** а) ± 2; б) $\pm 2i$; в) $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; г) $\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}(1 - i)$. **35.12.** а) $\pm(2 \quad i)$; б) $\pm(2 + i)$; в) $\pm\frac{3 - i}{\sqrt{2}}$; г) $\pm\frac{5 + i}{\sqrt{2}}$. **35.13.** а) $\pm(4 + i)$; б) $\pm(4 - i)$; в) $\pm\frac{7 - i}{\sqrt{2}}$; г) $\pm\frac{9 + i}{\sqrt{2}}$. **35.17.** а) $z^2 - 3z + (3 + i) = 0$; б) $z^2 + (i \quad 5)z + (8 \quad i) \quad 0$; в) $z^2 \quad 8z + (11 + 12i) = 0$; г) $z^2 + (i - 9)z + (40 - 9i) = 0$. **35.18.** а) $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$; б) $z_1 = 0$, $z_2 = -4i$; в) $z_1 = 2 \quad i$, $z_2 = 1 + i$; г) $z_1 = 7 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$. **35.19.** а) $1 + 2i$; б) $30i$; в) $1 + 6i$; г) $-89 + 120i$. **35.20.** а) $a = 4i$; б) $a = -4{,}5i$; в) $a = -13 - 13i$; г) $a = \frac{40 - 21i}{13}$.

§ 36

36.2. а) Нет; б) нет; в) да; г) да. **36.3.** а) z, z^2, z^3, z^4, z^5; б) z, z^3, z^8, z^9, z^{10}; в) z, z^2; г) $z^3, z^4, z^5, z^8, z^9, z^{10}$. **36.4.** а) z^3, z^4; б) $z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7, z^8$; в) z, z^2, z^{10}; г) z^9, z^{10}. **36.5.** а) z^1, z^2, z^3, z^4, z^5; б) z, z^2, z^9, z^{10}; в) $z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7$; г) $z^5, z^6, z^7, z^8, z^9, z^{10}$. **36.6.** а) z^3, z^4; б) z, z^2; в) z, z^2, z^9, z^{10}; г) z^{10}. **36.8.** а) -4; б) $-8i$; в) $-32i$; г) -1024. **36.9.** а) -8; б) $16\left(1 - i\sqrt{3}\right)$; в) $-64\left(\sqrt{3} + i\right)$; г) $-512i$. **36.10.** а) $-i$; б) $0{,}5\left(\sqrt{3} + i\right)$; в) $-0{,}5\left(1 + i\sqrt{3}\right)$; г) 1. **36.11.** а) $-\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{8}i$; в) $\frac{1}{32}i$; г) $-\frac{1}{1024}$. **36.12.** а) $-0{,}125$; б) $2^{-6}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$; в) $2^{-6}\left(-\sqrt{3} + i\right)$; г) $2^{-9}i$. **36.13.** а) 128; б) $-i$; в) $-32\sqrt{3}$; г) 1. **36.14.** а) $-64i$; б) i. **36.15.** а) 3; б) 8; в) 10; г) 10. **36.16.** а) 17; б) 34; в) 100; г) 200. **36.17.** а) 6; б) 11; в) 20; г) 0. **36.18.** а) 101; б) 200; в) 4; г) 0. **36.19.** а) z^4, z^8, z^{12}; б) z^7, z^8, z^9; в) $z^3, z^4, z^5, z^{11}, z^{12}$; г) z^9, z^{10}, z^{11}. **36.20.** а) $4, 2\left(-1 + \sqrt{3}i\right)$, $-2\left(1 + i\sqrt{3}\right)$; б) $1{,}5\left(1 + i\sqrt{3}\right), -3, 1{,}5\left(1 - i\sqrt{3}\right)$; в) $2{,}5\left(\sqrt{3} + i\right), 2{,}5\left(-\sqrt{3} + i\right)$, $-5i$; г) $4\left(\sqrt{3} - i\right), -4\left(\sqrt{3} + i\right), 8i$. **36.23.** а) $-i, 0{,}5\left(\pm\sqrt{3} + i\right), -2, 1 \pm i\sqrt{3}$; б) $\pm\sqrt{2}(1 + i), \pm i\sqrt{2}$. **36.24.** а) -4; 1; б) -9; 1.

§ 37

37.12. а) 1,5; 3; 4,5; 6; 7,5; 9; $a_n = 1{,}5n$; б) -1; 1; -1; 1; -1; $a_n = (-1)^n$; в) 8; 4; $2\frac{2}{3}$; 2; 1,6; $a_n \quad \frac{8}{n}$; г) 1; -2; 3; -4; 5; $a_n \quad (-1)^{n+1}n$. **37.19.** а) 7, 12, 17, 22, 27; б) 102. **37.20.** а) 1027; б) $3^5, 3^8, 3^{27}, 3^{2n}, 3^{2n+1}, 3^{2n-3}$. **37.21.** а) $a_n = 4n - 2$; $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 4$; б) $a_n = 13n + 5$; $a_1 = 18$; $a_n = a_{n-1} + 13$; в) $a_n = 21n$; $a_1 = 21$, $a_n = a_{n-1} + 21$; г) $a_n = 30n$; $a_1 = 30$, $a_n = a_{n-1} + 30$. **37.22.** а) $a_n = -n$; б) $a_n = 6n$; в) $a_n = 11 - n$; г) $a_n = 4n$. **37.23.** а) 3^n; б) $(n + 2)^2$; в) n^3; г) $n^2 + 1$. **37.24.** а) $\frac{1}{2^{n-1}}$; б) $\frac{2n + 1}{2n + 2}$; в) $\frac{1}{n^3}$; г) $\frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)}$. **37.25.** а) $a_n = \frac{3^n}{2^{2n}}$; б) $a_n = \frac{2n - 1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; в) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}n^2}{\sqrt{n(n + 1)}}$; г) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}(5n - 1)}{n(n + 1)(n + 2)}$. **37.27.** а) 2; б) 5; в) 13; г) 45. **37.28.** а) $P_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}4$; 4; $4\sqrt{2}$; 8; $8\sqrt{2}$; 16; б) $S_n = \left(\sqrt{2}\right)^{2n-2}$ 1; 2; 4; 8; 16; в) 32; г) 65 536. **37.29.** а) 1; б) 4. **37.30.** а) 6; б) 5. **37.31.** б) 11; в) 4. **37.32.** а) 6; б) 124; в) 6; г) 55. **37.33.** а) -6; -4; б) $-22\frac{5}{8}$; -181; в) -1; г) нет. **37.34.** а) 3; б) 10;

в) 4; г) 29. 37.35. а) -428; б) -128. 37.36. а) 19; б) 16. 37.37. а) 2; б) 62; в) 15; г) 1. 37.38. а) 17; б) -81; в) 19; г) 1. 37.39. а) $y_2 = -5$; б) $y_3 = -3$; в) $y_2 = -3$; г) $y_1 = -\frac{4}{5}$. 37.40. а) $y_3 = 13$; б) $y_3 = 3$; в) $y_1 = 5$; г) $y_1 = \frac{4}{5}$.

37.41. а) Нет; б) да; в) нет; г) да. 37.42. а) Да; б) да; в) да; г) да. 37.43. а) Да; б) нет; в) да; г) да. 37.44. а) Да; б) да; в) да; г) да. 37.45. а) $p < 1$; б) p — любое. 37.46. а) $p \leqslant -2$; б) $-3 \leqslant p \leqslant 3$. 37.47. а) $p \leqslant 0$; б) $p > -1$. 37.50. а) Убывает; б) не является монотонной; в) убывает; г) возрастает. 37.51. а) Убывает; б) возрастает; в) не является монотонной; г) убывает. 37.54. а) Возрастает; б) убывает; в) убывает; г) возрастает. 37.55. а) $p > 0$; б) $p > 1$; в) $p < 0$; г) $p < -2$. 37.56. а) $p > 0$; б) $p < 0$; в) $p < 0$; г) $p < 0$. 37.57. а) Ограничена, возрастает; б) неограничена, возрастает; в) ограничена, убывает; г) ограничена, убывает. 37.58. а) Возрастает, ограничена; б) убывает, ограничена. 37.59. а) $y_n = n^2$; б) $y_n = n^2 + 5$; в) $y_n = \frac{n^2}{n^2 - 5}$; г) $y_n = -n$.

§ 38

38.4. а) Да; б) нет; в) нет; г) да. 38.5. а) 6; б) 3; в) 15; г) 31. 38.6. а) 4; б) 7; в) 8; г) 5. 38.7. а) $y = 0$; б) $y = 0$; в) $y = 0$; г) $y = 0$. 38.8. а) $y = -1$; б) $y = 2$; в) $y = 2$; г) $y = -3$. 38.9. а) $y = 2$; в) $y = -3$. 38.10. а) Нет; б) нет; в) нет; г) нет. 38.14. а) 0; б) 6; в) 0; г) -4. 38.15. а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. 38.16. а) 5; б) 7; в) 3; г) $\frac{2}{3}$. 38.17. а) 2; б) 1; в) -1; г) -2. 38.18. а) 2; б) 12; в) 6; г) -2. 38.19. а) 7; б) 0; в) 1; г) 0. 38.20. а) 1; б) $\frac{1}{2}$. 38.21. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.

38.27. а) $2\frac{2}{9}$; б) $-0{,}128$; в) $-0{,}022$; г) $3\frac{1}{9}$. 38.28. а) 12,5; б) $-8\frac{2}{3}$; в) 22,5; г) 36. 38.29. а) $41\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{27}$. 38.30. а) $b_1 = 12$; $q = 0{,}5$; б) $\frac{1}{625}$. 38.31. а) $b_1 = 12$; $q = \frac{1}{3}$; б) $1\frac{1}{3}$. 38.32. а) 4; б) $57\frac{1}{6}$; в) 0,9; г) 156,25. 38.33. а) $-5{,}4$; б) $\frac{3}{2}\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$; в) $38\frac{1}{9}$; г) $4\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$. 38.34. а) 111; б) $2500\frac{2}{7}$; в) 396,25; г) $1717\frac{1}{9}$. 38.35. а) $\frac{\sin x}{1 - \sin x}$; б) $\frac{\cos x}{1 + \cos x}$; в) $\operatorname{ctg}^2 x$; г) $\frac{1}{1 + \sin^2 x}$.

38.36. а) 0,8; б) 0,3. 38.37. а) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; $-\frac{7}{9}$. 38.38. а) $(-1)^k \arcsin\frac{5}{6} + \pi k$, $k \in Z$; б) нет корней; в) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; г) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

§ 39

39.3. а) -10; б) -12; в) 4; г) -54. **39.4.** а) 0,2; б) 0; в) 1,2; г) -1. **39.13.** а) 0; б) -2; в) 0; г) 6. **39.14.** а) 1; б) 1,5; в) 1; г) $1\frac{1}{6}$. **39.15.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **39.16.** а) $-\frac{1}{5}$; б) 1; в) $-\frac{2}{3}$; г) 0. **39.17.** а) 4; б) 2; в) 3; г) 2. **39.24.** а) 3; б) $\frac{1}{4}$; в) 1; г) $\frac{7}{9}$. **39.25.** а) 0; б) 0,2; в) 0,5; г) $-0{,}2$. **39.26.** а) $\frac{4}{3}\pi$; б) 1; в) $\frac{\pi}{2}$; г) -2. **39.27.** а) 0; б) -1; в) 3; г) 0,2. **39.28.** а) 2; б) -4; в) 10; г) $-\frac{1}{6}$. **39.29.** а) 4; б) $\frac{1}{7}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) 7. **39.30.** а) $\frac{1}{12}$; б) 1,5; в) $\frac{1}{27}$; г) $\frac{1}{6}$. **39.31.** а) 1; б) 0; в) 1; г) 0. **39.32.** а) $\frac{1}{18}$; б) 0; в) 12; г) 0. **39.33.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$. **39.37.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0,5; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-0{,}5$. **39.38.** а) 0,2; б) $-0{,}1$; в) 0,1; г) 0,05. **39.40.** а) 0,5; б) $-0{,}66$; в) 1,5; г) 0,74. **39.41.** а) $3\Delta x$; б) $-2x\Delta x - (\Delta x)^2$; в) $-2\Delta x$; г) $4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$. **39.42.** а) 0,1; б) $-0{,}1$; в) 0,5; г) $-0{,}5$. **39.44.** а) k; б) $2ax + a\Delta x$; в) $\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$; г) $\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$. **39.45.** а) k; б) $2ax$; в) $-\frac{1}{x^2}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

§ 40

40.4. а) 4; б) $2t - 1$; в) 3; г) $2t - 2$. **40.9.** а) $2x + 2$; б) $-\frac{1}{x^2}$; в) $6x - 4$; г) $-\frac{4}{x^2}$. **40.10.** а) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{-2}{x^3}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $3x^2$. **40.11.** а) Не существует; б) 0; в) не существует; г) 2. **40.12.** а) Не существует; б) 0; в) 0; г) 0. **40.14.** а) 4; б) -1; в) -4; г) -4. **40.15.** а) 2 м/с, 2 м/с^2; б) 4,2 м/с, 2 м/с^2; в) 4 м/с; 2 м/с^2; г) 7 м/с, 2 м/с^2. **40.16.** а) 3 м/с, 2 м/с^2; б) 5,2 м/с; 2 м/с^2; в) 5 м/с, 2 м/с^2; г) 8 м/с, 2 м/с^2.

§ 41

41.15. а) $2 + \frac{3}{x^2}$; б) $42 + \frac{1}{x^2}$; в) $40 + \frac{2}{x^2}$; г) $27 + \frac{2}{x^2}$. **41.16.** а) $3x^2\ \mathrm{tg}\, x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$; б) $-\cos x - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; в) $-\frac{\mathrm{ctg}\, x}{x^2} \quad \frac{1}{x \sin^2 x}$; г) $\sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

41.17. а) $3x^2$; б) $3x^2$; в) $3x^2$; г) $3x^2$. **41.18.** а) $\frac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$; б) $-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$; в) $\frac{2x(3-2x)}{(3-4x)^2}$; г) $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. **41.19.** а) $\frac{3(9-2x)}{2\sqrt{x}(2x+9)^2}$; б) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; в) $-\frac{3x+8}{\sqrt{x}(8-3x)^2}$; г) $\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$. **41.20.** а) $\frac{6x^9+9}{x^4}$; б) $\frac{5x^{14}(x^{10}+3)}{(x^{10}+1)^2}$; в) $-\frac{4x^5+5x^4+1}{(x^5-1)^2}$; г) $\frac{x^{12}(9x^4-26)}{(x^4-2)^2}$. **41.21.** а) $-\sin x$; б) $\cos x$; в) 0; г) $-\frac{1}{2}\cos x$.

41.22. а) $\cos x$; б) $\cos x$; в) $-\sin x$; г) $-\sin x$. **41.29.** а) $-\frac{4}{\pi^2}$; б) -2; в) $\frac{1}{\pi^2}$; г) 2.

41.32. а) $x < -1$ и $x > 1$; б) $0 < x < 1$; в) $x > 0$; г) $2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n$. **41.34.** а) 14; б) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; в) 72; г) $\sqrt{2}-4$. **41.35.** а) 0; б) 0. **41.36.** а) -1; 1; не существует; б) не существует; не существует; 0. **41.39.** а) $\frac{1}{16}$; б) $\frac{1}{4}$.

41.40. а) $\pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **41.43.** а) π; б) 0; в) $2\frac{1}{3}$; г) $-\frac{5+3\sqrt{3}}{6}$.

41.44. а) $x = 2$; б) $x = 0$; $x = -4$. **41.45.** а) $x < 0$; $x > 2$; б) $0 < x < 4$; в) $x < 0$; $0 < x < \frac{3}{4}$; г) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n$. **41.46.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$; б) $-3 < x < -1$; $1 < x < 3$; в) $-\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{9} + \pi k < x < \frac{1}{2}\arccos\frac{7}{9} + \pi k$; г) $x < 0$, $0 < x < \frac{1}{4}$. **41.47.** а) $a = \frac{7}{8}$; б) $a = 1$, $a = -\frac{1}{3}$.

41.48. а) $\frac{1}{49}$; б) $\frac{1}{16}$. **41.49.** а) $x > \frac{3}{4}$; б) $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$; $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

41.50. а) $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3}{4}\pi + \pi k$; б) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

41.51. а) $-\frac{3}{4} < x < 0$, $x > 0$; б) $x < \frac{2}{5}$; $x > \frac{2}{5}$. **41.52.** а) $-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$; б) $2\pi n \quad x \quad \pi + 2\pi n$. **41.53.** а) 1; 16; б) $\sqrt[3]{4}$. **41.54.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. **41.55.** а) $x < 0$; $x > 3$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n$. **41.56.** а); б) Таких значений нет. **41.57.** а) $\frac{\pi}{6} + \pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + \pi k$; б) $2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + \pi n$, $-\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi k$; $n = 0, 1, 2,$

3, $k = 0, -1, -2, -3$, **41.59.** а) $x^3 + x^2$; б) $\frac{7}{x}$; в) $x^5 - x$; г) $9\sqrt{x}$.

41.60. а) $y = \frac{x^2}{3} - 3x$; б) $y = \begin{cases} -x^2 - 4x, \text{ если } x < -2{,}5, \\ \frac{1}{7}x^2 + \frac{12}{7}x, \text{ если } -2{,}5 < x < 1, \\ \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x, \text{ если } x > 1 \end{cases}$ (вершины ломаной не учтены). **41.61.** а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \pi n$; б) $\frac{1}{2}$. **41.62.** а) $a + b = -2$; б) $a = 0$, $b = -2$. **41.63.** а) $a + + b = -1$; б) $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{5}{4}$. **41.64.** а) $12x^2$; б) $20x^3$; в) $-\sin x$; г) $-2\cos x$. **41.65.** а) 12; б) 0; в) -4; г) -1. **41.66.** а) 9 м/с²; б) 9 кгм/с². **41.67.** а) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$; б) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. **41.68.** а) $y'' = 2\cos x - x\sin x$; б) $y'' = -a\sin x - b\cos x$. **41.69.** а) $y = \operatorname{tg} 15°\left(50 - \frac{x^2}{200}\right)$. **41.70.** а) $\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\pm\sqrt{2}$, ± 1.

§ 42

42.4. а) $-2\sin 2x$; б) $2\cos 2x$; в) $-6\sin 6x$; г) 0. **42.5.** а) $8\cos 8x$; б) $-10\sin 10x$; в) $4\cos 4x$; г) $-\frac{1}{6}\sin\frac{x}{6}$. **42.6.** а) $-15x^2(1 \quad x^3)^4$; б) $\frac{3x^2 + 6x - 2}{2\sqrt{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}}$; в) $\frac{14 - 4x}{(x^2 - 7x + 8)^3}$; г) $\frac{6x}{(x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 5} \quad \sqrt{x^2 - 1}}$.

42.7. а) $3\sin^2 x\cos x$; б) $-\frac{1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$; в) $\frac{5\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$; г) $\frac{1 + 3x^2}{\cos^2(x + x^3)}$.

42.8. а) $\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} - 3\cos^2 x\sin x$; б) $\frac{x^2 + 1 - 2x\sin 2x}{2(x^2 + 1)^2\sqrt{\operatorname{tg} x\cos^2 x}}$; в) $\sin 2x\cos\sqrt{x} - \frac{\sin^2 x\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; г) $-\frac{x\sqrt{\operatorname{tg} x} + 6\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{2x^4\sin^2 x}$. **42.9.** а) $3 \quad 7^7$; б) $-1\frac{1}{8}$; в) -35; г) 0,7. **42.10.** а) 2; б) 4; в) -2; г) 3. **42.11.** а) -7; б) $\frac{3}{16}$; в) $-1\frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{16}$. **42.12.** а) 6; б) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$; в) 0; г) -4. **42.13.** а) 10; б) 1,75; в) $-\frac{48}{361}$; г) $-\frac{5}{8}$. **42.14.** а) 0; б) 12; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{4}{9}$. **42.15.** а) 2; б) $-\frac{1}{2}$; в) 5; г) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **42.16.** а) 4π; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$; в) 0; г) 0. **42.17.** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$; $(-1)^{k+1}\frac{1}{6}\arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi k}{6}$; в) $\frac{\pi k}{2}$; г) таких значений нет. **42.18.** а) Таких значений нет; б) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$. **42.19.** а) -8; б) $-1\frac{1}{8}$;

в) $-0{,}5$; г) 1. **42.20.** а) $\pm\frac{3}{8}\pi + \pi n$; б) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. **42.21.** а) $x = \pi n$; б) $\frac{\pi}{2}n$; $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$. **42.22.** а) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$. **42.23.** а) $a = 2$, $b = 0$; б) $a = 2{,}5$, $b = 0{,}75$. **42.24.** а) $\frac{\pi n}{2}$; б) πn; в) $\frac{\pi n}{2}$; г) $\frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$. **42.25.** а) $\frac{1}{3}$, $x > \frac{17}{42}$; б) $-9{,}1 \leqslant x \leqslant -1{,}5$. **42.26.** а) $\frac{1}{2} < x < 5\frac{1}{6}$; б) $x < -\frac{4}{5}$, $x > \frac{4}{3}$. **42.28.** а) $\frac{12-\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; б) 9. **42.29.** а) $2\frac{2}{3}$; б) $\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$. **42.30.** а) $(2x - 1)^3 + C$; б) $(4 - 5x)^4 + C$, где C — любое число. **42.31.** а) $\frac{1}{2x+3} + C$; б) $\sqrt{5x-7} + C$, где C — любое число. **42.32.** а) $-\frac{1}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + C$; б) $\frac{4}{5}\operatorname{tg}(5x - 1) + C$, где C — любое число. **42.33.** а) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$; б) $\frac{2x}{1+x^4}$; в) $\frac{-3(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$. **42.34.** а) $-\frac{3\pi^2}{4}$; б) 1; в) 1; г) 2. **42.35.** а) -3; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) -2; г) $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. **42.36.** а) 3; б) $\frac{\pi}{2}$. **42.37.** а) 0; б) нет таких значений. **42.38.** а) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$; б) $0 < x < 1$.

§ 43

43.6. а) 1; б) $-0{,}5$; в) -8; г) 0. **43.7.** а) 27; б) 0; в) 6; г) -1. **43.8.** а) -4; б) -1; в) $-103{,}2$; г) 1. **43.9.** а) -4, 0, 6; б) 2, 0, 4; в) -3, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$, нет, 1. **43.10.** а) -5, 0, 7; б) -2, 0, 0. **43.11.** а) -5, 0, 3; б) -6, 0, -2. **43.12.** а) 1; б) нет таких точек; в) 0, $\frac{4}{3}$; г) $-\frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **43.13.** а) 0; б) 0; в) -1, 1; г) нет таких точек. **43.21.** а) 0; б) π — $\operatorname{arctg} 7$; в) $\operatorname{arctg} 2$; г) касательной не существует. **43.23.** а) $y = 7x - 10$; б) $y = -3x - 10$; в) $y = 5x - 17$; г) $y = -x + \frac{5}{4}$. **43.24.** а) $y = 3x - 4$; б) $y = -x + 4$. **43.25.** а) $y = 1$; б) $y = \frac{\pi}{2} - 2x$; в) $y = 1$; г) $y = \frac{2}{3}x$. **43.26.** а) $y = \frac{\pi}{2} - x$; б) $y = -x$; в) $y = 2{,}5x + 0{,}5 + \frac{\pi}{2}$; г) $y = x - 5\operatorname{arctg} 2$. **43.27.** а) $y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{8} \quad \frac{\pi\sqrt{3}}{16}$; б) $y = \frac{6}{\pi}x + 2 \quad \frac{2}{\pi}$; в) $y = -2x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$; г) $y = \pi$.

43.28. а) $y = -2x - 4$; б) $y = 5x - 16$; в) $y = 2x + 1$; г) $y = 5x + 9$. **43.29.** а) $y = -6x + 18$, $y = 6x + 18$; б) $y = 27x - 81$; в) $y = -4x$, $y = 8x + 16$, $y = 8x - 16$; г) $y = 0$, $y = -x + 1$. **43.30.** а) $y = 5x - 16$; $y = -5x - 1$; б) $y = x - 4$, $y = -x + 9$. **43.31.** а) $x = 1$; б) $x = -\frac{1}{4}$; в) $x = \frac{3}{8}$; г) $x = -0{,}5$. **43.32.** а) $y = x - \frac{8}{3}$, $y = x - \frac{4}{3}$; б) $y = 9x - 20$, $y = 9x + 16$. **43.33.** а) $y = 2x + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$, $y = 2x - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$; б) $y = x$. **43.34.** а) $x = 3$; б) $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$; в) $x = 1$; г) $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}6$. **43.35.** а) $x = \pi + 2\pi n$; б) $x = \frac{\pi}{3}n$; в) $x = \pi n$; г) $x = \pi + 2\pi n$. **43.36.** а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) 0; в) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; г) 0. **43.37.** а) $y = -x$, $y = 20\frac{5}{6} - x$; б) $y = 1\frac{1}{3} - x$; $y = -x$. **43.38.** а) $y = 14 - x$, $y = -x - 2$; б) $y = -x - 5$, $y = -x - 9$. **43.39.** а) $y = -x - 11$; б) $y = 1 - x$. **43.40.** а) $y = \frac{\pi}{2} - x$; б) $y = \frac{\pi}{2} - x$. **43.41.** а) $x_1 = 0$, $y = x + 1$, $x_2 = 2$, $y = x - 3$; б) $x_1 = -3$, $y = -x - 1$, $x_2 = -1$, $y = -x + 3$. **43.42.** а) $y = \sqrt{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{3}$, $y = \sqrt{3}x + \frac{16\sqrt{3}}{3}$; б) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **43.43.** а) (0; 1), (0; 21); б) (0; 0), (0; 12). **43.44.** а) $y = x^2 - 3x + 3$. **43.45.** а) $y = -6x - 8$, $y = 2x$; б) $y = 2x$, $y = -2x$; в) $y = 4x - 3$, $y = -4x - 3$; г) $y = 1$, $y = -4x - 3$. **43.46.** а) $y = 8 - 7x$, $y = -11x + 12$; б) $y = -9x + 9$, $y = -5x + 9$. **43.47.** а) $y = -0{,}1x + 2{,}8$, $y = -0{,}5x + 2$; б) $y = -0{,}5x + 2$. **43.48.** а) $y = 2x - 1$, $y = 0{,}4x + 2{,}2$; б) $y = x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. **43.49.** а) $a = \frac{\pi}{4}n$, $a = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$; б) $a = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $a = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$. **43.50.** а) $y = 3 - 2x$; б) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. **43.51.** а) $y = 3x - 2$; б) $y = \frac{27}{4}x + \frac{27}{4}$. **43.52.** а) $B(0;\ 3{,}5)$; б) $y = x - 3$, $y = -x - 3$. **43.53.** а) $B(0;\ 0)$; б) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$. **43.54.** а) $\left(-\frac{3}{4};\ -25\right)$; б) (17; 204). **43.55.** а) $p = 0{,}5$; б) $p = -1$. **43.56.** а) (1; –1); б) не является. **43.57.** а) $\frac{6}{7}$; б) $\frac{4}{5}$. **43.58.** а) $a = 2$; б) $a = 0$. **43.59.** а) 1; б) $1 + \sqrt{3}$. **43.60.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{10}$. **43.61.** а) –1; б) 4. **43.62.** а) $y = x$; б) (0; –4). **43.63.** а) arctg 3; б) $\frac{\pi}{2}$, arctg $\frac{3}{4}$. **43.65.** а) $\left(0;\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; б) $y = -\frac{1}{4}$. **43.66.** а) –1; 2;

б) 10. **43.67.** а) 5; б) 9. **43.68.** а) $b = 2$; $c = -3$; б) $a = 3$; $b = -5$; $c = 2$. **43.69.** $S = 2a^2$. **43.70.** $y = 2ax - a^2$ — уравнение касательной, $x = \frac{a}{2}$ — абсцисса точки пересечения.

§ 44

44.31. а) $a \geqslant 0$; б) $-\sqrt{5} \leqslant a \leqslant \sqrt{5}$. **44.32.** а) $a \geqslant 1$; б) $a \leqslant -4$. **44.33.** а) $b \leqslant -\frac{1}{3}$; б) $b \leqslant 0$; в) ни при каких b; г) $b \geqslant 0$. **44.34.** а) -2; б) $-2{,}5 < a \leqslant -1{,}5$; $a \geqslant 1{,}5$; в) 2; г) $a \leqslant -0{,}5$; $a \geqslant 3{,}5$. **44.35.** а) $a \leqslant -1$; $a \geqslant 2$; б) $a \leqslant -1{,}5$; $a \geqslant 1$. **44.36.** а) b, d; б) c; в) a, 0; г) нет таких точек. **44.37.** а) e; б) a, b; в) b, c; г) a, b, c, d, e. **44.38.** а) При $a = \pm 3$; б) при $a = \pm 5$. **44.45.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **44.48.** а) $x = \frac{7}{4}$, точка минимума; б) $x = -2{,}5$ — точка максимума; в) $x = \frac{3}{4}$ — точка минимума; г) $x = -2$ — точка максимума. **44.49.** а) $x = 2$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; б) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; в) $x = -\frac{1}{3}$ точка максимума, $x = 5$ — точка минимума; г) $x = 7$ — точка минимума, $x = 0$ — точка максимума. **44.50.** а) $x = -0{,}6$ — точка максимума, $x = 0{,}6$ — точка минимума; б) $x = -1$, $x = 4$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; в) $x = -5$, $x = 5$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума; г) $x = -3$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума. **44.51.** а) $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума; б) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума. **44.52.** а) $x = 3$ — точка минимума; б) $x = 2$ — точка максимума; в) $x = 8{,}5$ — точка максимума; г) $x = 1{,}4$ — точка максимума. **44.53.** а) $x = -\frac{\pi}{6}$ — точка минимума, $x = -\frac{5\pi}{6}$ — точка максимума; б) $x = \frac{5\pi}{3}$ — точка минимума, $x = \frac{7}{3}\pi$ — точка максимума. **44.54.** а) $x = -3$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума; б) $x = -3$ — точка максимума; в) $x = 0$ и $x = 3$ — точка минимума; $x = 2$ — точка максимума; г) нет таких точек. **44.55.** а) $x = 0$ — точка минимума; б) нет; в) $x = 0$ — точка максимума; г) нет. **44.56.** а) $y' = = (x + 2)^2 \geqslant 0$ при всех x; б) $y' = -x^2 + 3x - 3 < 0$ при всех x; в) $y' = x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всех x; г) $y' = -5x^4 - 3x^2 \leqslant 0$ при всех x. **44.57.** а) 8; $x = -\frac{7}{16}$ — точка минимума; б) -2; $x = \frac{7}{4}$ — точка максимума; в) -1; $x = 3{,}5$ — точка максимума; г) $a = -0{,}1$; $x = 35$ — точка максимума. **44.58.** а) Нет; б) $x = 0$ — точка максимума; $x = \frac{1}{3}$

и $x = 2$ — точки минимума; $x = 2$ — точка минимума. **44.59.** а) Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ — точки минимума, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ — точки максимума; б) убывает на $\left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right]$, возрастает на $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7}{6}\pi + 2\pi n\right]$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ — точки минимума, $x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n$ — точки максимума; в) убывает на $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, возрастает на $\left[-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ — точки максимума, $x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$ — точки минимума; г) возрастает на R. **44.60.** а) Убывает на $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, возрастает на $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right]$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$ — точки минимума, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$ — точки максимума; б) убывает на $\left[\frac{\pi}{3} + 4\pi n; \frac{5\pi}{3} + 4\pi n\right]$, возрастает на $\left[-\frac{7\pi}{3} + 4\pi n; \frac{\pi}{3} + 4\pi n\right]$, $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n$ — точки максимума, $x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi n$ — точки минимума. **44.61.** а) Убывает на $(-\infty; 3]$, возрастает на $[3; +\infty)$, $x = 3$ — точка минимума; б) возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $x = 1$ — точка минимума; в) убывает на $(-\infty; -3]$ и на $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$, возрастает на $\left[-3; -\frac{1}{2}\right]$ и на $[2; +\infty)$, $x = -3$ и $x = 2$ — точки минимума, $x = -\frac{1}{2}$ — точка максимума; г) возрастает на $[-1; 0]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[0; 1]$, $x = -1$, $x = 1$ — точки минимума, $x = 0$ — точка максимума. **44.62.** а) Убывает на $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right]$, на $[-1; 0]$ и на $\left[1; \sqrt{3}\right]$, возрастает на $\left[-\sqrt{3}; -1\right]$, на $[0; 1]$ и на $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$, $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ — точки минимума, $x = -1$, $x = 1$ — точки максимума; б) возрастает на $\left[-1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, на $\left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$, на $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right]$ и на $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right]$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ — точки минимума, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ —

точки максимума. **44.64.** г) Возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$, $x = -1$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума. **44.65.** г) Возрастает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $[-1; 1]$, $x = -1$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума. **44.66.** г) Возрастает на $(-\infty; -3]$ и на $[1; +\infty)$, убывает на $[-3; 1]$, $x = -3$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума. **44.67.** г) Возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$, $x = -1$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума. **44.68.** г) Возрастает на $(-\infty; 1{,}5]$, убывает на $[1{,}5; +\infty)$, $x = 1{,}5$ — точка максимума. **44.69.** а) 2; б) 1; в) 1; г) 1. **44.70.** а) 0, б) 0. **44.71.** а) 1; б) 2. **44.74.** а) $\frac{2\pi}{3}$; б) 0.

§ 45

45.13. а) 3; б) 1; в) 3; г) 1. **45.14.** а) 1 корень, если $a > -3$; 2 корня, если $a = -3$; 3 корня, если $a < -3$. **45.15.** а) 3; б) -1.

§ 46

46.1. а) 255; -1; б) 34; 1; в) 23; -4; г) 8; -154. **46.2.** а) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -23$; б) $y_{\text{наиб}} = -9$; $y_{\text{наим}} = -9993$; в) $y_{\text{наиб}} = 5$; $y_{\text{наим}} = -1$; г) $y_{\text{наиб}} = 31\,246$; $y_{\text{наим}} = 124$. **46.3.** а) $y_{\text{наиб}} = -2$; $y_{\text{наим}} = -4$; б) $y_{\text{наиб}} = 1{,}5$; $y_{\text{наим}} = -0{,}5$; в) $y_{\text{наиб}} = 0$; $y_{\text{наим}} = -1$; г) $y_{\text{наиб}} = 7$; $y_{\text{наим}} = 1$. **46.4.** а) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$; $y_{\text{наим}} = 0$; б) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$; $y_{\text{наим}} = 1$; в) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$; $y_{\text{наим}} = 0$; г) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{2}$; $y_{\text{наим}} = 1$. **46.5.** а) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = 1$; б) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 3$. **46.6.** а) $y_{\text{наиб}} = 7$; $y_{\text{наим}} = -3$; б) $y_{\text{наиб}} = 6$; $y_{\text{наим}} = -4$. **46.7.** а) $y_{\text{наиб}} = 24$; $y_{\text{наим}} = 12$; б) $y_{\text{наиб}} = 10$; $y_{\text{наим}} = 5$; в) $y_{\text{наиб}} = 16$; $y_{\text{наим}} = 2$; г) $y_{\text{наиб}} = 10$; $y_{\text{наим}} = 2$. **46.8.** а) $y_{\text{наиб}} = 1$; $y_{\text{наим}} = -2$; б) $y_{\text{наиб}} = 0$; $y_{\text{наим}} = -4$; в) $y_{\text{наиб}} = 5$; $y_{\text{наим}} = -4$; г) $y_{\text{наиб}}$ не существует; $y_{\text{наим}} = -4$. **46.9.** а) $y_{\text{наиб}} = 28$; $y_{\text{наим}} = 3$; б) $y_{\text{наиб}} = 9$; $y_{\text{наим}} = -3$; в) $y_{\text{наиб}} = 16$; $y_{\text{наим}} = -2$; г) $y_{\text{наиб}} = -7$; $y_{\text{наим}} = -199$. **46.10.** а) $y_{\text{наиб}} = 19$; $y_{\text{наим}} = -35$; б) $y_{\text{наиб}} = 35$; $y_{\text{наим}} = 15$; в) $y_{\text{наиб}} = 19$; $y_{\text{наим}} = -93$; г) $y_{\text{наиб}} = 19$; $y_{\text{наим}} = 15$. **46.11.** а) $y_{\text{наиб}} = 173$; $y_{\text{наим}} = -2$; б) $y_{\text{наиб}} = -43$; $y_{\text{наим}} = -72$; в) $y_{\text{наиб}} = 173$; $y_{\text{наим}} = 45$; г) $y_{\text{наиб}} = -2$; $y_{\text{наим}} = -72$. **46.12.** а) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -3$; б) $y_{\text{наиб}} = -12$; $y_{\text{наим}} = -28$; в) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -28$; г) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -28$. **46.13.** а) $y_{\text{наиб}} = 20$; $y_{\text{наим}} = -7$; б) $y_{\text{наиб}} = 4$; $y_{\text{наим}} = -124$; в) $y_{\text{наиб}} = 121$; $y_{\text{наим}} = -44$; г) $y_{\text{наиб}} = 148$; $y_{\text{наим}} = -124$. **46.14.** а) $y_{\text{наиб}} = 6$; $y_{\text{наим}} = 5$; б) $y_{\text{наиб}} = -3$; $y_{\text{наим}} = -4$. **46.15.** а) $y_{\text{наиб}} = \frac{\pi}{4} + 1$; $y_{\text{наим}} = \frac{3\pi}{4} \quad 1$; б) $y_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$; $y_{\text{наим}} = -\pi$; в) $y_{\text{наиб}} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$; $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi}{2}$; г) $y_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$; $y_{\text{наим}} = 0$. **46.16.** а) $y_{\text{наиб}}$ не существует; $y_{\text{наим}} = -\frac{5}{27}$; б) $y_{\text{наиб}}$ не существует; $y_{\text{наим}} = -1$; в) $y_{\text{наиб}} = 0$; $y_{\text{наим}}$ не существует; г) $y_{\text{наиб}}$ не существует; $y_{\text{наим}} = 0$.

46.17. а) $y_{наиб} = -0$; $y_{наим}$ не существует; б) $y_{наиб} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $y_{наим} = -2$; в) $y_{наиб} = -2$; $y_{наим}$ не существует; г) $y_{наиб} = 3{,}5$; $y_{наим}$ не существует. **46.18.** а) $y_{наиб} = 0$; $y_{наим} = -27$; б) $y_{наиб} = 0$; $y_{наим} = -4$; в) $y_{наиб} = 50$; $y_{наим} = 0{,}875$; г) $y_{наиб} = \frac{5}{8}$; $y_{наим} = -\frac{5}{8}$. **46.19.** а) $y_{наиб} = 21$; $y_{наим} = 5$; б) $y_{наиб} = 71$; $y_{наим} = -10$; в) $y_{наиб} = 18{,}25$; $y_{наим} = 17$; г) $y_{наиб} = 6\frac{1}{12}$; $y_{наим} = -11\frac{1}{6}$. **46.20.** а) и б) $y_{наиб} = 6$; $y_{наим} = -0{,}25$; в) $y_{наиб} = 72$; $y_{наи}$ 16; г) $y_{наи}$ 135; $y_{наим} = 27$. **46.21.** а) $y_{наиб} = 21$; $y_{наим} = -\frac{40}{27}$; б) $y_{наиб} = 10$; $y_{наим} = 5 - 4\sqrt{2}$. **46.22.** а) $y_{наиб} = 8$; $y_{наим} = 1\frac{3}{4}$; б) $y_{наиб} = 17$; $y_{наим} = -3$. **46.23.** а) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $y_{наиб} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $y_{наим} = -1$. **46.24.** а) $y_{наиб} = 0$; $y_{наим} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$; б) $y_{наиб} = 1$; $y_{наим} = -\frac{1}{8}$. **46.25.** а) $y_{наиб} = 2$; $y_{наим}$ не существует; б) $y_{наиб} = \frac{1}{4}$; $y_{наим} = 0$; в) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = -2$; г) $y_{наиб} = 0$; $y_{наим} = -\frac{1}{4}$. **46.26.** а) –5; б) –9, 6; г) –8, 4. **46.27.** а) 5,5; б) 1; в) 5; г) 4. **46.28.** а) 7; б) –0,1; в) 3; г) $\frac{2}{3}$. **46.29.** а) 4; б) –1,5; в) –2; г) –2. **46.30.** а) $y_{наиб} = 5$; $y_{наим} = 0$; б) $y_{наиб} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$; $y_{наим} = 0$; в) $y_{наиб} = 4$; $y_{наим} = 0$; г) $y_{наиб} = 3{,}5\sqrt{3}$; $y_{наим} = 0$. **46.31.** а) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = 0$; б) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = 1$; в) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = 0$; г) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **46.32.** а) 2; б) 1. **46.33.** а) 3; б) 3. **46.34.** а) –4; б) –0,25; в) 9; г) –16. **46.35.** а) $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$; б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. **46.36.** а) $\left[-\frac{4\sqrt{6}}{9}, +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$. **46.37.** $[-3; -1]$. **46.38.** а) 9; б) 15. **46.39.** а) $n = -\frac{3}{4}$; б) $n = 4 - 2\sqrt{3}$. **46.41.** а) 12; 12; б) 22; 22. **46.42.** а) –5; 5; б) –49; 49. **46.43.** а) –18; 18; б) –14; 14. **46.44.** а) 2; 1; б) $1\frac{1}{4}$; $3\frac{3}{4}$. **46.45.** а) 14 см; 14 см; б) 18 см, 18 см. **46.46.** а) 50 м × 50 м; б) 60 м × 60 м. **46.47.** а) 4 см × 4 см; б) 8 см × 8 см. **46.48.** а) 50 м × 50 м. **46.49.** 32 см^2. **46.50.** а) 0,8; б) –4. **46.51.** а) 2; б) 1. **46.52.** а) (1; 1); (–1; 1); б) (4; 2). **46.53.** 30 см. **46.54.** а) 6000; б) 108. **46.55.** а) 21; б) 32,4. **46.56.** $\sqrt{ab}$. **46.57.** 3 ч 44 мин.

46.58. 4 дм, 4 дм, 2 дм. **46.59.** 7 м, 7 м, 7 м. **46.60.** $4\sqrt[3]{5}$ м, $6\sqrt[3]{5}$ м, $\frac{24\sqrt[3]{5}}{5}$ м.

46.61. $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **46.62.** $\frac{p\sqrt{3}}{3}$. **46.63.** $\frac{p}{6}$. **46.64.** $\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$.

§ 47

47.1. а) 42; б) 20; в) 24; г) 14. **47.2.** а) 42; б) 7; в) 24; г) 20. **47.3.** а) 100; б) 90; в) 180; г) 90. **47.4.** а) 108; б) 54; в) 84; г) 324. **47.5.** а) 100 000; б) 32 768; в) 32; г) 8192. **47.6.** а) 512; б) 64; в) 16; г) 192. **47.7.** б) 3; в) 6; г) Эшкин будет в 4 вариантах. **47.8.** б) 4. **47.9.** б) 1; в) 3. **47.10.** б) 8; в) 3. **47.11.** а) 54; б) 5184; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{5}{16}$. **47.12.** а) 1; б) 0. **47.13.** а) 2; б) 3; в) 6; г) 24. **47.14.** а) 8; б) 15; в) 6; г) 13. **47.16.** а) 7; б) 4; в) 7; г) 3. **47.17.** а) $n > 3$; б) $n > 4$. **47.18.** а); б); в); г) Начиная с указанного номера n, левая часть растет быстрее правой части. **47.20.** а) 120; б) 288; в) 432; г) 72. **47.21.** а) $(6!)^2$; б) $(5!)^2$; в) $(6!)^2$; г) $(6 \quad 5 \quad 4 \quad 3)^2$. **47.22.** а) 120; б) 14 400; в) 720; г) 2880. **47.23.** а) 7!; б) 6!; в) $7! \quad C_7^3 = 176\,400$; г) $7! \quad C_7^3 \quad C_7^4 = 529\,200$.

47.24. а) $5! \quad 4! \quad 3! = 17\,280$; б) 17 280; в) $(5 \quad 4 \quad 3) \quad 4! \quad 3! = 8640$; г) 2 177 280.

§ 48

48.1. а) 12; б) 13; в) 12; г) 15. **48.2.** а) $\frac{n(n-1)}{2}$; б) $\frac{n(n-3)}{2}$; в) $n - 2$; г) $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$. **48.3.** а) 110; б) 56; в) 82; г) 55; 28. **48.4.** а) 100; б) 10; в) 94; г) 18. **48.8.** Упростите выражение: а) $\frac{(n+1)n(n-1)}{3}$; б) $\frac{n(n-1)}{2}$.

48.9. а) $C_{17}^3 < C_{18}^4$; б) $C_{18}^4 < C_{19}^5$; в) $C_{19}^5 < C_{18}^6$; г) $C_n^7 \quad C_{n+1}^8$ при $n > 7$, $C_n^7 = C_{n+1}^8$ при $n = 7$. **48.10.** а) 8; б) 6; в) 7; г) 4. **48.11.** а) $x = 9$ или $x = 10$; б) $x = 11$. **48.12.** а) 8; б) 27; в) 31; г) 7. **48.13.** а) 15; б) 5; в) 8; г) 12. **48.14.** а) 210; б) 35; в) 15; г) 100. **48.15.** а) 32 760; б) 792; в) 120; г) 240. **48.16.** а) 376 992; б) 32; в) 126; г) 504. **48.17.** а) 14 112; б) 10 976; в) 7056; г) 280. **48.18.** а) $y = \frac{x}{6(x-3)}$; в) 8; г) 54. **48.19.** а) $y = 6x(x-1)$; в) 10; г) 33. **48.20.** а) $y = 24\left(1 - \frac{4}{x+2}\right)$ — монотонно возрастает; в) 23; г) 24.

48.21. а) 7; б) 8; в) 12; г) 3. **48.23.** а) 8; б) 16; в) 128. **48.25.** а) 108; б) −720; в) 8; г) $-\frac{4}{9}$. **48.26.** а) $10x^6$; б) $120x^4$; в) $210x^{-2}$; г) 252. **48.27.** а) 60; б) 5; в) 61 236; г) 24 310. **48.28.** а) 10; б) 252; в) один; г) 9; 126; два. **48.29.** а) $k = 2$

или $k = 3$; б) 8; в) $k = 30$ или $k = 31$; г) 500. **48.30.** б) 999 001; в) 9802; г) указание: найти номер, начиная с которого $\frac{1}{q^n} = \left(1 + \frac{1-q}{q}\right)^n > \frac{1}{a}$.

§ 49

49.1. а) 0,2; б) 0,077; в) 0,088; г) 0,966. **49.2.** а) 0,244; б) 0,067; в) 0,044; г) 0,088. **49.3.** а) 0,989; б) 0,01; в) 0,0026; г) 0,044. **49.4.** а) 0,25; б) 0,25; в) 0,107; г) 0,321. **49.5.** а) 0,36; б) 0,52; в) 0,04; г) 0,56. **49.6.** а) 0,1; б) 0,7; в) 0,15; г) 0,75. **49.7.** а) 0,04; б) 0,92; в) 0,36; г) 0,6. **49.8.** а) 0,833; б) 0,833; в) 0,167; г) 0,222. **49.9.** а) 10; б) 8; в) 12; г) 29. **49.10.** а) 20; б) 24; в) 6; г) 48. **49.11.** а) 200; б) 162; в) 100; г) 99. **49.12.** а) 4; б) 8; в) 4; г) 8. **49.13.** а) Это событие B; б) есть ученик, сдавший экзамен, но есть и ученик, не сдавший экзамен; в) это событие B; г) это событие B. **49.14.** а) Все трое не сдали экзамен; б) или все трое сдали экзамен, или все трое не сдали экзамен; в) никто не сдал экзамен; г) ни один ученик не сдал экзамен. **49.15.** а) Это цифра 8; б) это цифра 9; в) это цифра 9; г) невозможное событие. **49.17.** а) 0,119; б) 0,476; в) 0,476; г) 0,952. **49.18.** а) $\frac{3n}{4(2n-1)}$; б) указание: постройте график функции из а); в) 0,375; г) 9.

49.19.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(n)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{5}{126}$	0	0	0	0

49.20.

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$	0

49.21. а) 0,051; б) 0,338; в) 0,662; г) 0,974. **49.22.** а) $\frac{5n^2 - 7n}{4(2n-1)(2n-3)}$; б) указание: исследуйте функцию из а) на монотонность; в) 0,3125; г) 6. **49.23.** а) 0,125; б) 0,125; в) 0,375; г) 0,875. **49.24.** а) 0,0625; б) 0,0625; в) 0,25; г) 0, 9375. **49.25.** а) $1 - 2^{-n}$; б) возрастает; в) 1; г) 10. **49.26.** а) 0,729; б) 0,271; в) 0,125; г) 0,875. **49.27.** а) $1 - 0,9^n$; б) возрастает; в) 1; г) 7. **49.28.** а) 0,303; б) 0,211; в) $\left(\frac{23}{33}\right)^{n-1}\left(\frac{10}{33}\right)$; г) 0.

49.29. а) $0,9^{n-1}0,1$; б) 0;

в)

n	1	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,06561	0,059049	0,0531441

г) 1. **49.30.** а) 0,5; б) 0,8; в) 0,6; г) 0,1.

ОГЛАВЛЕНИЕ