

УДК 519.711  
ББК 32.965  
К40

**К и м Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 288 с. — ISBN 5-9221-0379-2.

Книга посвящена теории автоматического управления линейных стационарных систем. В ней даются основные понятия и принципы управления, математическое описание и методы анализа и синтеза непрерывных и дискретных систем управления.

Для студентов технических вузов, изучающих дисциплины «Теория автоматического управления» и «Основы теории управления». Может быть рекомендована инженерно-техническим и научным работникам, желающим изучить основы теории автоматического управления.

Табл. 13. Ил. 148. Библиогр. 19 назв.

#### Р е ц е н з е н т ы:

кафедра «Системы автоматического и интеллектуального управления» Московского авиационного института (зав. кафедрой — доктор технических наук, профессор *Г.Н. Лебедев*);

доктор технических наук, профессор *О.С. Колосов* (Московский энергетический институт).



# Оглавление

Предисловие .....	7
<b>Глава 1. Основные понятия и принципы управления .....</b>	<b>9</b>
1.1. Исходные понятия .....	9
1.2. Принципы управления .....	12
1.2.1. Принцип программного управления (12). 1.2.2. Принцип компенсации (12). 1.2.3. Принцип обратной связи (14). 1.2.4. Принцип комбинированного управления (16).	
1.3. Структура системы управления .....	17
1.4. Законы управления .....	18
1.5. Классификация систем управления .....	19
<b>Глава 2. Математическое описание систем управления ...</b>	<b>21</b>
2.1. Уравнения динамики и статики .....	21
2.2. Линеаризация. Формы записи дифференциальных уравнений	22
2.3. Преобразование Лапласа .....	25
2.4. Передаточные и временные функции .....	31
2.4.1. Передаточные функции (32). 2.4.2. Временные функции (35). 2.4.3. Связь между передаточной функцией и временными функциями (36).	
2.5. Частотные функции и характеристики .....	37
2.6. Различные типы звеньев и их характеристики .....	42
2.6.1. Типы элементарных звеньев (43). 2.6.2. Неминимально-фазовые элементарные звенья (49). 2.6.3. Звено чистого запаздывания (51). 2.6.4. Построение логарифмических частотных характеристик (51)	
2.7. Структурные схемы и дифференциальные уравнения систем управления .....	56
2.7.1. Преобразование структурных схем (56). 2.7.2. Вычисление передаточной функции одноконтурной системы (61). 2.7.3. Вычисление передаточной функции многоконтурной системы (62).	
2.8. Граф системы управления .....	66
2.8.1. Компоненты графа системы управления (66). 2.8.2. Связь между структурной схемой и графом системы управления (67).	

2.8.3. Преобразование графа системы управления. Формула Мейсона (68).	
2.9. Уравнения и передаточные функции элементов и систем управления .....	72
2.9.1. Датчики и преобразователи (72). 2.9.2. Усилители и корректирующие элементы (74). 2.9.3. Исполнительные устройства и объекты управления (78). 2.9.4. Уравнения и передаточные функции систем управления (81).	
Задачи .....	83
<b>Глава 3. Устойчивость систем управления .....</b>	<b>88</b>
3.1. Определение и условия устойчивости .....	88
3.1.1. Определение устойчивости (88). 3.1.2. Основное условие устойчивости (89). 3.1.3. Необходимое условие устойчивости (91). 3.1.4. Теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению (91).	
3.2. Алгебраические критерии устойчивости .....	92
3.2.1. Характеристическое уравнение (92). 3.2.2. Критерий Гурвица (93). 3.2.3. Критерий Ляенара-Шипара (93). 3.2.4. Критерий Рауса (95).	
3.3. Частотные критерии устойчивости .....	97
3.3.1. Принцип аргумента (97). 3.3.2. Критерий устойчивости Михайлова (98). 3.3.3. Критерий Найквиста (99). 3.3.4. Логарифмический частотный критерий устойчивости (102). 3.3.5. Устойчивость систем с чистым запаздыванием (103).	
3.4. Определение области устойчивости .....	105
3.4.1. Метод $D$ -разбиения (105). 3.4.2. Граничный коэффициент и условие граничной устойчивости (112).	
3.5. Робастная устойчивость .....	113
3.5.1. Полиномы Харитонова (114). 3.5.2. Теорема Харитонова (115).	
Задачи .....	120
<b>Глава 4. Качество систем управления .....</b>	<b>123</b>
4.1. Показатели качества и типовые воздействия .....	123
4.2. Показатели качества в переходном режиме .....	124
4.2.1. Прямые показатели качества (125). 4.2.2. Корневые показатели качества (127). 4.2.3. Интегральные показатели качества (130). 4.2.4. Частотные показатели качества (134).	
4.3. Показатели качества в установившемся режиме .....	135
4.4. Структура астатической системы управления .....	140
4.5. Инвариантность и принцип двухканальности .....	143
Задачи .....	144

<b>Глава 5. Синтез систем управления</b> .....	146
5.1. Исследование типовых законов управления .....	146
5.2. Синтез параметров регулятора по минимуму интегральных оценок .....	151
5.3. Условие граничной устойчивости и синтез систем управления максимальной степени устойчивости .....	154
5.3.1. Условие граничной устойчивости (154). 5.3.2. Метод синтеза систем управления максимальной степени устойчивости (157). 5.3.3. Синтез оптимальных по степени устойчивости параметров типовых регуляторов для объекта 2-го порядка (159). 5.3.4. Синтез оптимальных по степени устойчивости параметров типовых регуляторов для объекта 3-го порядка (162).	
5.4. Синтез системы управления по желаемой передаточной функции .....	171
5.4.1. Физическая осуществимость и грубость (171). 5.4.2. Синтез передаточной функции регулятора (172). 5.4.3. Определение желаемой передаточной функции (176).	
5.5. Метод обратной задачи динамики .....	180
5.5.1. Объект 2-го порядка (181). 5.5.2. Объект 3-го порядка (183).	
5.6. Синтез систем управления при наличии чистого запаздывания .....	185
Задачи .....	188
<b>Глава 6. Математическое описание дискретных систем</b> ...	190
6.1. Различные типы дискретных систем .....	190
6.2. Линейные разностные уравнения .....	192
6.3. Решетчатые функции и $z$ -преобразование .....	195
6.3.1. Решетчатые функции (195). 6.3.2. Определение $z$ -преобразования (196). 6.3.3. Основные свойства $z$ -преобразования (197). 6.3.4. $z$ -изображения основных функций (202).	
6.4. Уравнения и передаточные функции дискретных систем ....	205
6.5. Вычисление передаточных функций АИМ-системы .....	207
6.5.1. Эквивалентная схема АИМ-системы (207). 6.5.2. Дискретная модель АИМ-системы (209). 6.5.3. Вычисление $Z_T$ -изображения и $Z_T^e$ -изображения (211).	
6.6. Цифровые системы управления .....	216
6.7. ШИМ-системы управления .....	219
6.8. Вычисление передаточных функций дискретных систем в общем случае .....	222
6.9. Преобразование структурных схем дискретных систем .....	227
6.10. Дискретное преобразование Лапласа и частотные характеристики .....	229

6.11. Связь между дискретным и непрерывным преобразованиями Лапласа и непрерывная модель дискретной системы .....	230
6.11.1. Связь между дискретным и непрерывным преобразованиями Лапласа (231). 6.11.2. Непрерывная модель дискретной системы (231).	
Задачи .....	233
<b>Глава 7. Устойчивость дискретных систем .....</b>	<b>236</b>
7.1. Характеристическое уравнение и основное условие устойчивости .....	236
7.2. Алгебраические критерии устойчивости .....	237
7.2.1. Необходимое условие устойчивости (237). 7.2.2. Исследование устойчивости, основанное на преобразовании единичного круга в левую полуплоскость (238). 7.2.3. Критерий устойчивости Джури (240).	
7.3. Частотный критерий устойчивости .....	242
7.3.1. Принцип аргумента (243). 7.3.2. Критерий Найквиста (244). 7.3.3. Псевдочастотный критерий (247).	
7.4. Влияние квантования по времени на устойчивость .....	248
Задачи .....	250
<b>Глава 8. Оценка качества дискретных систем .....</b>	<b>252</b>
8.1. Показатели качества в переходном режиме .....	252
8.1.1. Прямые показатели качества (252). 8.1.2. Косвенные показатели качества (256). 8.1.3. Особенности переходного процесса дискретных систем (257).	
8.2. Показатели качества в установившемся режиме .....	258
8.2.1. Коэффициенты ошибки (258). 8.2.2. Вычисление коэффициентов ошибок (259).	
8.3. Статические и астатические системы .....	261
8.3.1. Вычисление коэффициентов ошибки астатических систем (261). 8.3.2. Структура астатических систем (263).	
Задачи .....	265
<b>Глава 9. Синтез дискретных систем .....</b>	<b>268</b>
9.1. Постановка задачи. Типовые законы управления .....	268
9.2. Синтез систем с фиксированной структурой .....	270
9.3. Метод полиномиальных уравнений .....	272
9.4. Синтез дискретной системы по непрерывной модели .....	276
Задачи .....	278
Список литературы .....	280
Предметный указатель .....	282

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие написано на основе лекций, читавшихся автором в Московском государственном институте радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА) в течение тридцати лет (с 1967 г.) студентам специальности «Автоматика и телемеханика» и других специальностей. Пособие посвящено теории линейных непрерывных и дискретных систем управления и включает первую часть программного материала курса «Теория автоматического управления», предназначенного студентам, обучающимся по направлению «Автоматизация и управление».

Учебное пособие состоит из девяти глав. Глава 1 знакомит с основными понятиями, фундаментальными принципами управления и структурами систем управления. Остальные главы можно разбить на две группы. Первую группу составляют главы 2–5, посвященные линейным непрерывным системам управления, вторую группу — главы 6–9, посвященные линейным дискретным системам управления. Обе эти группы изложены по единой методике.

В главе 2 рассмотрено математическое описание систем управления с помощью дифференциальных уравнений, передаточных функций, временных и частотных функций и характеристик, структурных схем и графов.

Глава 3 посвящена математическому определению устойчивости, основному и необходимым условиям устойчивости, методам исследования асимптотической и робастной устойчивости, выделению области устойчивости в пространстве параметров.

Глава 4 знакомит с методикой оценки качества в переходном и установившемся режимах и со структурой астатических систем.

В главе 5 излагаются методы синтеза систем управления: синтез параметров регулятора по минимуму интегральных квадратических оценок и по максимуму степени устойчивости; синтез систем управления по желаемой передаточной функции (метод полиномиальных уравнений). Здесь также рассмотрены условия граничной (маргинальной) устойчивости, на которых основан метод синтеза параметров регулятора по максимуму степени устойчивости.

В главе 6 рассмотрено получение и математическое описание дискретных моделей импульсных систем управления с амплитудно-импульсной и широтно-импульсной модуляцией 1-го рода, а также цифровых систем управления.

Главы 7–9 посвящены соответственно устойчивости, оценке качества и синтезу линейных дискретных систем управления.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В. М. Лохину за поддержку и помощь при работе над рукописью, доцентам В. В. Веселовскому, Н. Д. Дмитриевой и О. А. Тягунову, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд полезных замечаний.

Автор также благодарен заведующему кафедрой «Управление и информатика» МЭИ профессору О. С. Колосову и заведующему кафедрой «Системы автоматического и интеллектуального управления» МАИ профессору Г. Н. Лебедеву за рецензирование рукописи.



## Глава 1

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИНЦИПЫ УПРАВЛЕНИЯ

Процесс управления происходит в живой и неживой природе: в живых организмах, обществе, технике и т.д. Естественный отбор, благодаря которому одни особи исчезают, другие выживают и воспроизводятся, также является своего рода процессом управления, протекающим в природе.

Общим для всех процессов управления, где бы они ни протекали, является прием (получение), хранение, преобразование информации и выработка (организация) на ее основе управления. Осознание этой общности послужило предпосылкой к возникновению в конце сороковых годов XX века научного направления, названного его основателем Н. Винером *кибернетикой*. Хотя управление человеческим коллективом, экономикой, с одной стороны, и техническими объектами — с другой, имеет много общего, но коренные различия, которые существуют между этими объектами, делают необходимым их раздельное рассмотрение.

В теории (автоматического) управления рассматриваются методы исследования и построения систем управления в технике.

#### 1.1. Исходные положения

В технике *управлением* называют целенаправленное воздействие на какое-либо устройство, объект. Если управление осуществляет человек, то управление называют *ручным, неавтоматическим*. Управление называют *автоматическим*, если оно осуществляется без непосредственного участия человека.

Устройство (машина, агрегат, технологический процесс), состоянием которого можно и нужно управлять, называется *объектом управления* (ОУ) или *управляемым объектом*. Целью управления управляемым объектом является поддержание заданного режима. Под *заданным режимом* понимают изменение какого-либо параметра, характеризующего состояние объекта управления, по определенному закону. Указанный параметр, который может быть векторной величиной, называется *управляемой* или *выходной переменной*

(величиной) объекта управления. В частном случае заданным режимом может быть поддержание выходной переменной неизменной и равной некоторой заданной величине.

Примером объекта управления является генератор напряжения (рис. 1.1, а). Управляемой величиной является выходное напряже-

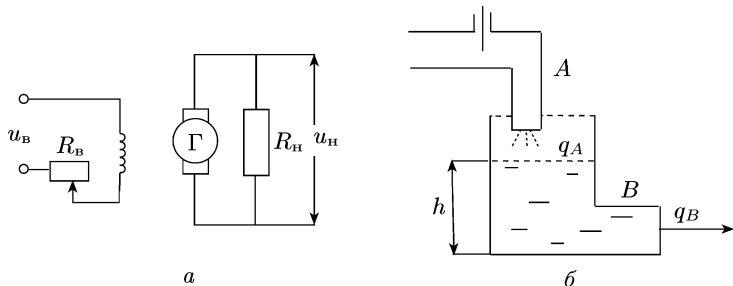


Рис. 1.1. Объекты управления: а — генератор напряжения; б — резервуар с жидкостью

ние  $u_H$ . Им можно управлять, изменяя напряжение возбуждения  $u_B$  или воздействуя на переменное сопротивление  $R_B$ , включенное в цепь возбуждения генератора.

Часть объекта управления, на которую оказывают воздействие при управлении, называют *управляющим (регулирующим) органом*. В случае генератора таким органом является переменное сопротивление  $R_B$  или обмотка возбуждения.

Другим простым примером объекта управления является резервуар с жидкостью (рис. 1.1, б), в котором нужно поддерживать жидкость на заданном уровне. Управляемой переменной является уровень  $h$ , регулирующим органом — вентиль на входной трубе А.

Устройство, осуществляющее управление управляемым объектом, называется *управляющим устройством (УУ)*.

Объект управления с взаимодействующим с ним управляющим устройством называют *системой управления*. Если система управления функционирует с участием человека, то она называется *автоматизированной системой управления (АСУ)*. Если система управления функционирует без непосредственного участия человека, то она называется *автоматической системой управления* или *системой автоматического управления (САУ)*.

В простейших случаях систему автоматического управления называют *системой автоматического регулирования (САР)*, управляющее устройство — *регулятором*, а объект управления — *объектом регулирования* или *регулируемым объектом*. Так как нет критериев, по которым можно было бы судить, какие системы управления считать сложными, а какие простыми, мы не будем делать принципиальных различий между терминами «система автоматического управления» и «система автоматического регулирования».

Блок-схему системы (автоматического) управления в общем случае можно представить так, как на рис. 1.2. Выходная переменная объекта управления  $y$  является выходной (управляемой) переменной системы управления.

Канал связи, по которому информация о текущем состоянии объекта управления (ОУ) поступает в управляющее устройство (УУ), называется *обратной связью*.

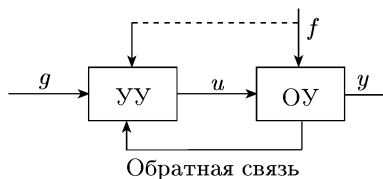


Рис. 1.2. Общая блок-схема САУ

Внешнее воздействие  $g$ , которое определяет требуемый (заданный) закон изменения выходной переменной, называется *задающим воздействием*. Здесь, как это часто делают, задающее воздействие выведено за пределы управляющего устройства, в то время как задающее воздействие вырабатывается задатчиком, входящим в состав УУ.

Как правило, на объект управления действует возмущение  $f$ , которое приводит к отклонению управляемой переменной от требуемого значения. Такое воздействие называется *возмущением* и *возмущающим воздействием*. Возмущение может действовать и на УУ. В частном случае в зависимости от принципа управления обратная связь или канал связи, по которому информация о возмущении поступает на УУ, может отсутствовать.

Выходная переменная УУ  $u$ , являющаяся входной переменной ОУ, называется *управляющим воздействием* или *управлением*. В случае генератора основным возмущающим воздействием является изменение (отклонение) нагрузки, а в случае резервуара с жидкостью — отклонение расхода жидкости от номинального значения (из-за подключения или отключения потребителей).

Объекты управления в зависимости от реакции на входные воздействия делятся на устойчивые, нейтральные и неустойчивые. Допустим, что при входных воздействиях  $u = u^0$  и  $f = f^0$  выходная переменная  $y = y^0$ . И пусть на какое-то время  $T$  хотя бы одно из входных воздействий изменяется ( $u = u^0 + \Delta u$  или  $f = f^0 + \Delta f$ ), а затем принимает первоначальное значение ( $\Delta u = 0$  и  $\Delta f = 0$  при  $t > t_0 + T$ ). Если при этом выходная переменная со временем принимает первоначальное значение ( $y(t) \rightarrow y^0$  при  $t \rightarrow \infty$ ), объект управления называется *устойчивым*; если переменная принимает новое постоянное значение ( $y(t) \rightarrow y^* \neq y^0$  при  $t \rightarrow \infty$ ), объект управления называется *нейтральным*; если переменная не стремится к первоначальному или новому постоянному значению, объект называется *неустойчивым*.

Если нагрузка генератора на какое-то время изменится, а затем примет первоначальное номинальное значение, то и выходное напряжение генератора со временем примет номинальное значение, т. е. генератор является устойчивым объектом управления.

Резервуар с жидкостью является нейтральным объектом управления. Действительно, пусть, например, расход жидкости увеличивается, тогда уровень жидкости будет падать. И если затем расход жидкости восстановится до первоначального значения, то установится такой уровень, какой достигается в момент восстановления расхода, т. е.  $h$  примет новое значение.

## 1.2. Принципы управления

Рассмотрим основные принципы управления, которые используются в настоящее время при разработке систем управления.

**1.2.1. Принцип программного управления.** Если об объекте управления все известно, то, точно зная, как зависит выходная переменная объекта управления от управляющего воздействия, управление можно формировать как известную функцию времени  $u = u^*(t)$ . Такой способ организации управления можно назвать *принципом программного управления*. При таком принципе управления УУ можно представить как устройство, состоящее из программатора (программирующего устройства) и исполнительного устройства (ИУ)

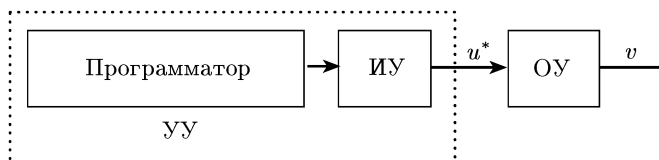


Рис. 1.3. Система программного управления

(рис. 1.3). В частном случае исполнительное устройство может отсутствовать.

Принцип программного управления неприменим при управлении объектом, на который действуют заранее не известные возмущения, оказывающие существенное влияние на управляемую величину. Он также неприменим, если объект управления является нейтральным или неустойчивым и система управления должна функционировать достаточно длительное время. Это связано с тем, что при нейтральном и неустойчивом объекте управления небольшая систематическая ошибка в программном управлении приводит к нарастающей ошибке управляемой переменной.

**1.2.2. Принцип компенсации.** Основной причиной, обуславливающей использование специальных УУ, содержащих, помимо программатора и ИУ, измерительные и усилительно-преобразующие устройства, является действие на систему управления возмущений, оказывающих существенное влияние на ее работу. Естественно напрашивается способ управления, при котором определяются (измеряются) действующие на систему управления возмущения и на их осно-

ве вырабатывается управляющее воздействие, которое полностью или частично компенсирует влияние возмущений на процесс управления.

Способ управления, при котором управляющее воздействие вырабатывается на основе действующих возмущений, называется *способом управления по возмущению* или *принципом компенсации*.

Принцип компенсации иногда также называют *принципом Понселе* (по имени французского инженера Ж. Понселе (Ponset), предложившего принцип регулирования паровой машины по моменту сопротивления на ее валу, т. е. по возмущению).

Достоинством способа управления по возмущению является принципиальная возможность полной компенсации возмущающего воздействия.

На рис. 1.4 представлена система автоматического регулирования (САР) генератора с компаундированием. Здесь управление производится не со стороны обмотки возбуждения, а с помощью компаундной обмотки КО, включенной в цепь якоря. Выходное напряжение

$$u_H = e_\Gamma - R_\text{я} i_H, \quad (1.1)$$

где  $e_\Gamma$  — ЭДС генератора,  $R_\text{я}$  — активное сопротивление якорной цепи (без учета сопротивления нагрузки). При некоторых допущениях ЭДС генератора  $e_\Gamma$  пропорциональна потоку возбуждения  $\varphi$ :

$$e_\Gamma = k_\text{в} \varphi.$$

Поток возбуждения  $\varphi$  складывается из постоянного потока возбуждения  $\varphi_\text{в}$  обмотки возбуждения и магнитного потока  $\varphi_\text{ко}$  компаундной обмотки:

$$\varphi = \varphi_\text{в} + \varphi_\text{ко}.$$

Поток  $\varphi_\text{ко}$  пропорционален току нагрузки:  $\varphi_\text{ко} = k_\text{о} i_H$ , где коэффициент  $k_\text{о}$  зависит от шунтирующего сопротивления  $R_\text{ш}$  и числа обмотки КО. Поэтому

$$e_\Gamma = k_\text{в} \varphi = k_\text{в} (\varphi_\text{в} + k_\text{о} i_H).$$

Подставив это выражение в (1.1), получим

$$u_H = k_\text{в} (\varphi_\text{в} + k_\text{о} i_H) - R_\text{я} i_H. \quad (1.2)$$

При номинальной нагрузке  $i_H = i_H^0$

$$u_H^0 = k_\text{в} (\varphi_\text{в} + k_\text{о} i_H^0) - R_\text{я} i_H^0.$$

При изменении нагрузки ( $i_H = i_H^0 + \Delta i_H$ ) уравнение (1.2) принимает вид

$$u_H = k_\text{в} (\varphi_\text{в} + k_\text{о} i_H^0) + k_\text{в} k_\text{о} \Delta i_H - R_\text{я} i_H^0 - R_\text{я} \Delta i_H.$$

Из двух последних уравнений следует, что выходное напряжение не изменится ( $u_H = u_H^0$ ) при изменении нагрузки, если  $k_\text{в} k_\text{о} \Delta i_H - R_\text{я} \Delta i_H = 0$  или  $k_\text{о} = R_\text{я} / k_\text{в}$ . Последнее равенство всегда можно обеспечить выбором сопротивления  $R_\text{ш}$  и числа обмоток КО.

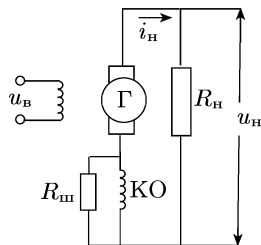


Рис. 1.4. Система управления генератора с компаундированием

Таким образом, в САР генератора с компаундированием можно полностью компенсировать возмущение, представляющее собой изменение нагрузки. Данная система является системой управления по возмущению, так как управление, которым является изменение потока возбуждения, пропорционально возмущению  $\Delta i_n$ .

В САР генератора компаундная обмотка является чувствительным элементом, и она без промежуточных элементов (усилительно-преобразовательного и исполнительного устройств) непосредственно воздействует на объект регулирования. Такие системы регулирования называются *системами прямого регулирования*. Системы управления (регулирования), в которых между измерительным элементом и регулирующим органом имеются усилительно-преобразовательные и исполнительные устройства, называются *системами непрямого управления (регулирования)*.

Недостатком метода компенсации является то, что он не всегда применим. Его нельзя применять, если возмущение нельзя измерить (из-за того, что его существование не известно или по другой причине). Его нецелесообразно использовать, когда на систему действует много различных возмущений, так как в этом случае УУ получается сложным. Кроме того, принцип компенсации нельзя использовать, если объект управления является нейтральным или неустойчивым.

Действительно, рассмотрим в качестве примера резервуар с жидкостью (см. рис. 1.1, б), который является нейтральным объектом управления. Пусть  $q_A$  — приток жидкости (объем жидкости, поступающей в резервуар за единицу времени),  $q_B$  — расход (объем жидкости, вытекающей из резервуара за единицу времени), и пусть в начальный момент времени  $t_0$  уровень жидкости равен требуемому значению. Чтобы сохранить этот уровень, нужно обеспечить равенство  $q_A = q_B$ . При управлении по возмущению измеряется расход жидкости и обеспечивается равенство  $q_A = \dot{q}_B$ , где  $\dot{q}_B$  — измеряемое значение расхода. На практике измерение всегда производится с ошибкой  $\Delta q = q_B - \dot{q}_B$ . Поэтому возникает разница между притоком и расходом  $q_A - q_B = \dot{q}_B - (\dot{q}_B + \Delta q) = -\Delta q$ . И если, например, ошибка измерения  $\Delta q = \text{const}$ , то в момент  $t$  количество жидкости увеличится (при  $\Delta q < 0$ ) или уменьшится (при  $\Delta q > 0$ ) на  $|\Delta q| (t - t_0)$  и соответственно уровень жидкости поднимется или опустится до значения, пропорционального времени.

**1.2.3. Принцип обратной связи.** *Управлением по отклонению* называется такой способ управления, при котором определяется отклонение текущего значения выходной переменной от требуемого значения и на его основе формируется управляющее воздействие.

На рис. 1.5 представлен поплавковый регулятор уровня бензина, устанавливаемый в карбюраторе автомобильных двигателей. В нем реализован способ управления по отклонению. Поплавок, который является одновременно измерителем уровня и сравнивающим устройством,

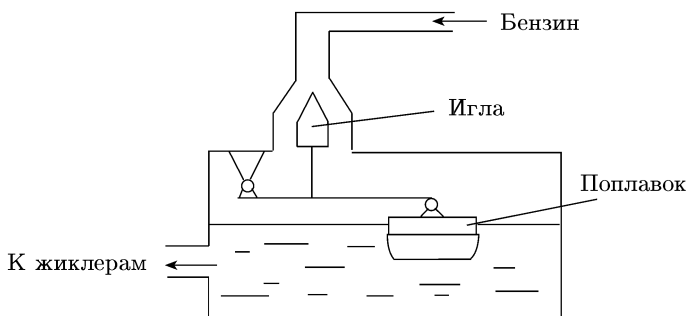


Рис. 1.5. Поплавковый регулятор карбюратора

вом, в зависимости от отклонения уровня бензина от требуемого значения с помощью иглы непосредственно регулирует приток бензина в камеру и поддерживает требуемый уровень. Таким образом, данная САР уровня бензина в камере является системой прямого регулирования.

Системы управления, основанные на способе управления по отклонению, непременно содержат *обратную связь* — канал связи, по которому информация об управляемой переменной поступает на управляющее устройство. Поэтому способ управления по отклонению называют также *принципом обратной связи*. Первыми промышленными регуляторами, построенными по принципу обратной связи, являются регулятор уровня котла паровой машины Ползунова (1765 г.) и регулятор угловой скорости паровой машины Уатта (1784 г.). Поэтому принцип обратной связи иногда называют *принципом Ползунова–Уатта*.

На рис. 1.6 представлена система автоматического регулирования (САР) напряжения генератора, которая функционирует следующим образом:

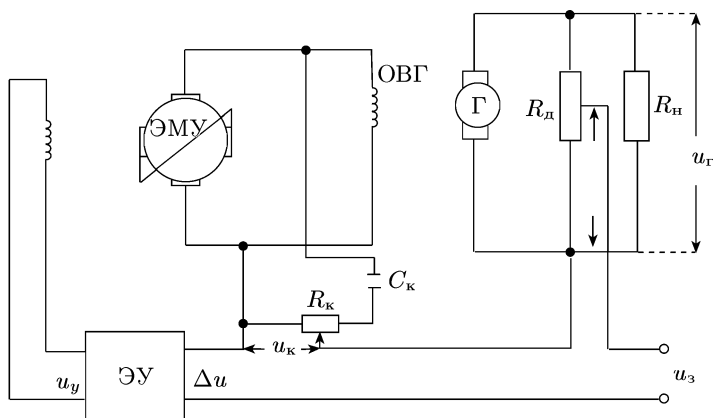


Рис. 1.6. САР генератора напряжения постоянного тока

щим образом. Напряжение, которое снимается с делителя напряжения  $R_d$ , служащего чувствительным элементом, пропорционально выходному напряжению. Это напряжение сравнивается с задающим напряжением  $u_z$  и определяется отклонение (ошибка)  $\Delta u$ , которое усиливается электронным усилителем (ЭУ) и подается на электромашинный усилитель (ЭМУ). На выход ЭМУ подключена обмотка возбуждения генератора.

Достоинством принципа обратной связи является его универсальность, возможность его использования в условиях отсутствия информации о возмущающих воздействиях. Действительно, для его реализации не надо знать, какие возмущения действуют на систему управления и чем вызвано отклонение управляемой переменной от требуемого значения.

Принцип обратной связи широко используется в технике, а также присущ живым организмам и обществу. Так, например, установлено, что, когда человек берет какой-либо предмет, управление кистью его руки производится по принципу обратной связи. Рыночная экономика представляет собой систему управления, функционирующую по принципу обратной связи. В данной системе регулятором, работающим по принципу обратной связи, является рынок, который определяет дисбаланс между предложением и спросом и воздействует на производство того или иного товара.

Недостатком способа управления по отклонению является принципиальная невозможность полной компенсации возмущающих воздействий. Это связано с тем, что при этом способе управления управляющее воздействие начинает вырабатываться и оказывать влияние на ход процесса управления только после того, как возмущение, начав действовать, вызывает отклонение управляемой величины от требуемого режима. Кроме того, следует отметить, что система управления с обратной связью может оказаться неустойчивой, хотя объект управления устойчив.

**1.2.4. Принцип комбинированного управления.** Выше при рассмотрении принципа компенсации и принципа обратной связи отмечались их достоинства и недостатки. Естественной является попытка поиска способа управления, в котором бы совмещались достоинства обоих принципов управления. Таким способом управления является принцип комбинированного управления, при котором одновременно используются способы управления как по возмущению, так и по отклонению.

Принцип комбинированного управления используется в тех случаях, когда на систему действует много различных возмущений, один (или несколько) из которых оказывает наибольшее влияние на работу системы управления и может быть измерен. В подобных случаях влияние преобладающего возмущения можно нейтрализовать, используя принцип компенсации, и нейтрализовать влияние остальных возмущений, используя принцип обратной связи.



### 1.3. Структура системы управления

Система управления включает управляющее устройство (УУ) и объект управления. Структура УУ зависит от используемого принципа управления. При использовании принципа программного управления УУ включает программатор и исполнительное устройство (см. рис. 1.3).

Управляющее устройство, построенное на основе принципа компенсации (рис. 1.7, *а*), включает: задатчик или задающее устрой-

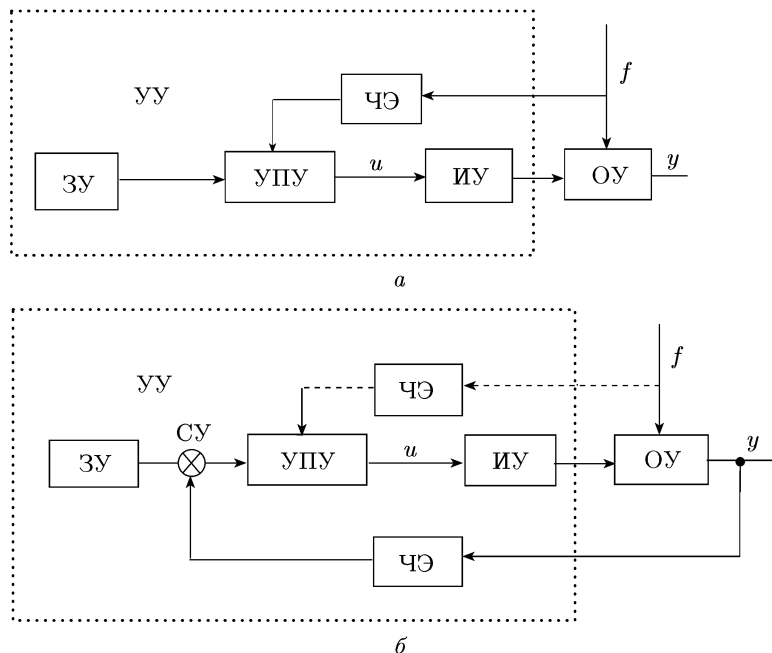


Рис. 1.7. Функциональная схема системы управления: *а* — по возмущению; *б* — с обратной связью

во (ЗУ), которое вырабатывает задающее воздействие; чувствительный элемент (ЧЭ), предназначенный для измерения возмущения; усилительно-преобразовательное устройство (УПУ), которое на основе задающего воздействия и измеренных значений возмущения вырабатывает управляющее воздействие; исполнительное устройство (ИУ), которое непосредственно воздействует на объект управления.

Управляющее устройство системы управления по отклонению (рис. 1.7, *б* без штриховой линии), помимо задающего устройства, усилительно-преобразующего устройства и исполнительного устройства, содержит сравнивающее устройство (СУ), которое определя-

ет ошибку  $e$ , равную или пропорциональную отклонению управляемой переменной от требуемого значения, и чувствительный элемент (ЧЭ), предназначенный для измерения управляемой переменной.

Управляющее устройство системы комбинированного управления (рис. 1.7, б со штриховой линией) по сравнению с управляющим устройством системы управления по отклонению включает дополнительно чувствительный элемент, предназначенный для измерения возмущения.

## 1.4. Законы управления

Как было установлено выше, управляющее устройство состоит из различных элементов. Однако при разработке и исследовании алгоритмов управления обычно исполнительное устройство и другие элементы, обладающие инерционностью, объединяют с объектом управ-

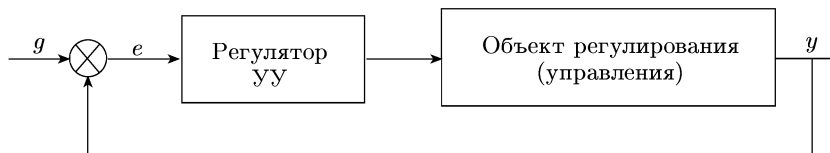


Рис. 1.8. Блок-схема замкнутой системы управления

ления, и блок-схему замкнутой системы управления представляют так, как это показано на рис. 1.8.

Здесь под регулятором или управляющим устройством понимают преобразующее устройство, формирующее на основе ошибки  $e$  управляющее воздействие, а объектом регулирования (управления) — собственно объект управления, объединенный с остальной (инерционной) частью управляющего устройства. Зависимость  $u = F(e)$  выходной переменной регулятора от его входной переменной называется *законом* или *алгоритмом управления*. Здесь  $F$  — оператор.

В промышленных регуляторах находят применение следующие типовые законы управления (в скобках указаны названия соответствующих регуляторов):

*пропорциональный закон* или *П-закон* (*пропорциональный регулятор* или *П-регулятор*)

$$u = k_{\text{п}} e;$$

*пропорционально-интегральный закон* или *ПИ-закон* (*пропорционально-интегральный регулятор* или *ПИ-регулятор*)

$$u = k_{\text{п}} e + k_{\text{и}} \int_0^t e(t) dt;$$

*пропорционально-дифференциальный закон* или *ПД-закон* (*пропорционально-дифференциальный регулятор* или *ПД-регулятор*)

$$u = k_{\text{п}} e + k_{\text{д}} \frac{de}{dt};$$

*пропорционально-интегро-дифференциальный закон или ПИД-закон (пропорционально-интегро-дифференциальный регулятор или ПИД-регулятор)*

$$u = k_{\text{п}}e + k_{\text{и}} \int_0^t e(t) dt + k_{\text{д}} \frac{de}{dt}.$$

Здесь  $k_{\text{п}}$ ,  $k_{\text{и}}$  и  $k_{\text{д}}$  — константы (передаточные коэффициенты).

Как влияет каждое слагаемое в законе управления на управляемый процесс, как выбирается закон управления и определяются передаточные коэффициенты, будет рассмотрено в гл. 5, посвященной синтезу алгоритмов управления.

## 1.5. Классификация систем управления

Системы управления классифицируют по различным признакам. Выше по наличию или отсутствию обратной связи были определены замкнутые и разомкнутые системы управления.

По виду задающего воздействия  $g$  различают:

*системы стабилизации:*  $g = \text{const}$ ;

*системы программного управления:*  $g = g(t)$ , т.е. задающее воздействие — заданная функция времени;

*следающие системы:* задающее воздействие заранее не известно и определяется внешними факторами (например, в радиолокационной станции слежения за самолетом задающее воздействие определяется движением наблюдаемого самолета).

В зависимости от использования текущей информации системы управления делятся на обычные (неадаптивные) и адаптивные. Система управления называется *неадаптивной*, если текущая информация используется только для выработки управляющего воздействия при неизменном алгоритме управления. Система называется *адаптивной*, если текущая информация используется также для изменения алгоритма управления и/или задающего воздействия.

В зависимости от вида сигнала на выходе элементов системы управления делят на непрерывные и дискретные. Если сигнал на выходе какого-либо элемента квантован по уровню (т.е. принимает дискретные значения) и/или по времени (т.е. представляет последовательность импульсов), то система управления называется *дискретной*; в противном случае, т.е. когда выходные переменные всех элементов системы управления являются непрерывными функциями, система называется *непрерывной*.

По тому, зависит характеристика (свойство) системы управления от времени или нет, различают стационарные и нестационарные системы управления. Систему управления называют *стационарной*, если ее характеристика не зависит от времени, и *нестационарной*, если ее характеристика зависит от времени.

По уравнениям, которыми описываются системы управления, они делятся на линейные и нелинейные. Система управления называется *линейной*, если она описывается линейными уравнениями, и *нелинейной*, если она описывается нелинейными уравнениями.

По характеру внешних (задающих и возмущающих) и внутренних (возмущающих) воздействий различают детерминированные и стохастические системы управления. Система управления называется *детерминированной*, если все воздействия являются

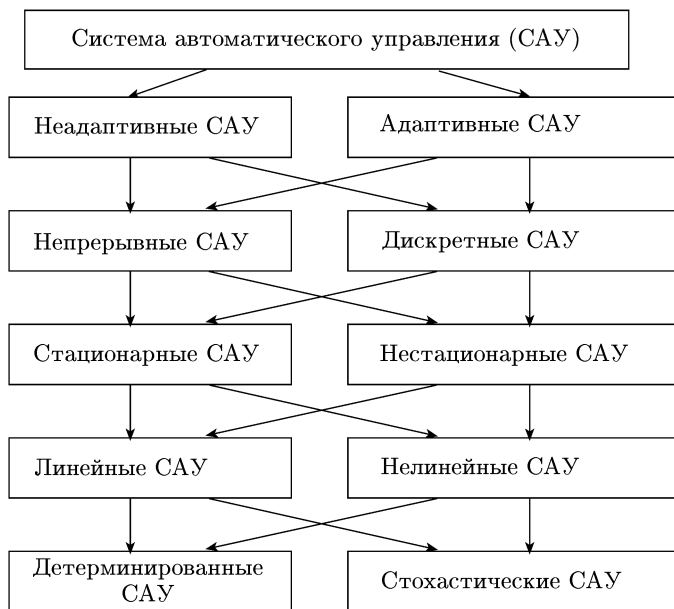


Рис. 1.9. Классификация САУ

детерминированными, и *стохастической*, если хотя бы одно воздействие является стохастическим (случайным).

На рис. 1.9 представлена классификация систем автоматического управления (САУ).

## Глава 2

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В теории управления при анализе и синтезе систем управления имеют дело с их математической моделью. *Математическая модель* представляет собой уравнения, передаточные или временные функции, которые описывают процессы, протекающие в системе управления. Математическая модель может быть получена аналитически (теоретически) на основе физических (химических и др.) законов, которым подчиняются процессы в системе управления, или экспериментально.

При математическом описании исходят из противоречивых требований. С одной стороны, математическая модель должна как можно полнее отражать свойства оригинала (исходной системы), а с другой стороны — быть по возможности простой, чтобы не усложнять исследование. Часто полезно на начальном этапе исследования принимать более простую модель, а затем при необходимости усложнять ее, принимая во внимание дополнительные факторы, которые на начальном этапе не учитывались.

#### 2.1. Уравнения динамики и статики

Система уравнения и любой ее элемент производят преобразование входного сигнала  $x(t)$  в выходной сигнал  $y(t)$ . С математической точкой зрения они осуществляют отображение

$$y(t) = Ax(t),$$

согласно которому каждому элементу  $x(t)$  из множества входных сигналов ставится в соответствие некоторый вполне определенный элемент  $y(t)$  из множества выходных сигналов. В приведенном соотношении  $A$  называется *оператором*. Оператор, определяющий отображение между входным и выходным сигналами системы управления (элемента), называется *оператором этой системы* (элемента). Задать оператор системы — это значит задать правило определения выходного сигнала этой системы по ее входному сигналу. В данной книге будем рассматривать системы, операторы которых могут быть

заданы с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Математическая модель системы управления может быть представлена в виде соединения звеньев. *Звено* — это математическая модель системы или любой ее части, определяемой некоторым оператором. В частном случае звено может быть математической моделью элемента.

Для примера рассмотрим звено, которое задается уравнением

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v) = 0, \quad (2.1)$$

где  $y$  — выходная переменная;  $u$  и  $v$  — входные переменные; точки над переменными обозначают дифференцирование по времени:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Пусть при постоянных входных воздействиях  $u = u^0$  и  $v = v^0$  процесс в звене установится: выходная переменная со временем принимает постоянное значение  $y = y^0$ . Тогда производные обращаются в нуль и уравнение (2.1) принимает вид

$$F^0 = F(y^0, 0, 0, u^0, 0, v^0) = 0. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1), описывающее процессы в звене при произвольных входных воздействиях, называется *уравнением динамики*. Уравнение (2.2) описывает статический режим, т.е. процесс в звене при постоянных входных воздействиях, и называется *уравнением статики*.

В общем случае, когда звено описывается дифференциальным уравнением, значение его выходной величины в момент  $t$  зависит от предыстории, т.е. от значений входной переменной до момента  $t$ . В этом случае говорят, что звено обладает *динамическим запаздыванием*.

Если звено описывается функцией, т.е. значения его выходной переменной в любой момент времени зависят только от значений входной переменной в тот же самый момент времени, то уравнение статики совпадает с уравнением динамики.

Статический режим можно описать графически с помощью статических характеристик. *Статической характеристикой* звена (элемента) называют кривую зависимости выходной переменной от входной в статическом режиме. Статическую характеристику элемента можно построить экспериментально, подавая на вход элемента постоянные воздействия и измеряя значения выходной переменной после окончания переходного процесса или вычисляя с использованием уравнения статики.

## 2.2. Линеаризация. Формы записи дифференциальных уравнений

Большинство систем управления описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Но во многих случаях их можно линеаризовать, т.е. заменить исходные нелинейные уравнения линейными. Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называют *линеаризацией*.

Назначение систем управления — это поддержание некоторого заданного режима. При этом режиме входные и выходные переменные звеньев системы изменяются по определенному закону. В частности, в системах стабилизации они принимают определенные постоянные значения. Но из-за различных возмущающих факторов фактический режим отличается от требуемого, и текущие значения входных и выходных переменных не равны значениям, соответствующим заданному режиму. Обычно систему управления проектируют таким образом, чтобы реальный процесс мало отличался от требуемого режима, т.е. чтобы отклонения от заданного режима были малы. Это позволяет производить линеаризацию, разлагая нелинейные функции, входящие в уравнения, в ряд Тейлора в точке, соответствующей заданному режиму, и отбрасывая нелинейные относительно отклонений и их производных слагаемые. Проиллюстрируем сказанное на примере звена (2.1).

Пусть заданному режиму соответствуют значения

$$y = y^0, \quad \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad u = u^0, \quad \dot{u} = 0, \quad v = v^0. \quad (2.3)$$

Обозначим отклонения реальных значений  $y$ ,  $u$  и  $v$  от требуемых через  $\Delta y$ ,  $\Delta u$  и  $\Delta v$ . Тогда получим  $y = y^0 + \Delta y$ ,  $\dot{y} = \Delta \dot{y}$ ,  $\ddot{y} = \Delta \ddot{y}$ ,  $u = u^0 + \Delta u$ ,  $\dot{u} = \Delta \dot{u}$ ,  $v = v^0 + \Delta v$ . Подставив эти выражения в исходное уравнение и рассматривая  $F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, v)$  как функцию от независимых переменных  $y$ ,  $\dot{y}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $u$ ,  $\dot{u}$  и  $v$ , разложим ее в ряд Тейлора в точке (2.3):

$$F^0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)^0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)^0 \Delta \ddot{y} + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^0 \Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right)^0 \Delta \dot{u} + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^0 \Delta v + \dots = 0.$$

Здесь многоточие обозначает слагаемые, содержащие произведения приращений и их производных. Пренебрегая этими слагаемыми как бесконечно малыми величинами более высокого порядка, чем сами приращения и их производные, а также учитывая, что  $F^0 = 0$  в силу (2.2), последнее уравнение можно представить в виде

$$a_0 \Delta \ddot{y} + a_1 \Delta \dot{y} + a_2 \Delta y - b_0 \Delta \dot{u} - b_1 \Delta u - c_0 \Delta v = 0, \quad (2.4)$$

$$\text{где } a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)^0, \quad a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)^0, \quad a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0, \quad b_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right)^0, \quad b_1 = \\ = -\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^0, \quad c_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^0.$$

Уравнение (2.4) получено при следующих предположениях:

1) отклонения выходной величины  $\Delta y$  и входных величин  $\Delta u$  и  $\Delta v$  достаточно малы;

2) функция  $F$  обладает непрерывными частными производными по всем аргументам в окрестности точки, соответствующей заданному режиму.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то, строго говоря, линеаризацию проводить нельзя. По поводу условия 1) необ-

ходимо отметить следующее: нельзя раз и навсегда установить, какие отклонения считать малыми; это зависит от вида нелинейности.

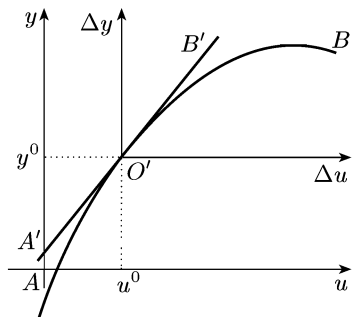


Рис. 2.1. Линеаризация

Иногда нелинейную зависимость между отдельными переменными, входящими в уравнение звена, задают в виде графика (кривой). В этих случаях линеаризацию можно проводить графически. Геометрически линеаризация нелинейной зависимости между двумя переменными означает замену исходной кривой  $AB$  отрезком касательной  $A'B'$  в точке  $O'$  (рис. 2.1), соответствующей заданному режиму, и параллельный перенос начала системы координат в эту точку.

**Символическая форма записи дифференциальных уравнений.** При описании систем управления удобно использовать символическую форму записи линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим ее на примере уравнения (2.4). Перепишем его, опустив для сокращения записи знак  $\Delta$  и оставив в левой части только члены, содержащие выходную переменную и ее производные:

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \dot{u} + b_1 u + c_0 v. \quad (2.5)$$

Введем для операции дифференцирования по времени обозначение  $p$ :

$$p \equiv \frac{d}{dt}, \quad p^i \equiv \frac{d^i}{dt^i}.$$

Здесь знак тождества обозначает равенство по определению.

Используя введенное обозначение, уравнения (2.5) можно записать в виде

$$a_0 p^2 y + a_1 p y + a_2 y = b_0 p u + b_1 u + c_0 v. \quad (2.6a)$$

Рассматривая оператор дифференцирования  $p$  как множитель, а выражение  $pu$  как произведение, не обладающее свойством коммутативности ( $pu \neq up$ ), уравнение (2.6a) можно записать в виде

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y = (b_0 p + b_1) u + c_0 v. \quad (2.6b)$$

Введем обозначения  $Q(p) = a_0 p^2 + a_1 p + a_2$ ,  $R_1(p) = b_0 p + b_1$ ,  $R_2(p) = c_0$ . Используя эти обозначения, последнее уравнение можно записать в виде

$$Q(p)y = R_1(p)u + R_2(p)v. \quad (2.6в)$$

Следует иметь в виду, что уравнения (2.6a)–(2.6в) представляют другую, *символическую (операторную)* форму записи уравнения (2.5). Иного смысла они не имеют.

Дифференциальный оператор при выходной переменной называют *собственным оператором*, дифференциальный оператор при входной переменной — *оператором воздействия*. В последнем уравнении



собственным оператором является  $Q(p)$ , а операторами воздействия  $R_1(p)$  и  $R_2(p)$ .

**Стандартная форма записи уравнения звена.** При исследовании систем управления удобно, если уравнение звена, описываемого дифференциальными уравнениями не выше 2-го порядка, представлено в стандартной форме. При стандартной форме записи члены уравнения, содержащие выходную величину и ее производные, располагают в левой части, а все остальные члены — в правой; коэффициент при выходной переменной делают равным единице. В правой части члены, содержащие одну и ту же входную переменную и ее производные, объединяют в одну группу и коэффициент при соответствующей входной переменной выносят за скобки.

Уравнение (2.5) в стандартной форме принимает вид

$$T_0^2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = k_1 (T_2 \dot{u} + u) + k_2 v$$

или

$$T_0^2 \ddot{y} + 2\zeta T_0 \dot{y} + y = k_1 (T_2 \dot{u} + u) + k_2 v, \quad (2.7)$$

где  $T_0^2 = \frac{a_0}{a_2}$ ,  $T_1 = \frac{a_1}{a_2}$ ,  $k_1 = \frac{b_1}{a_2}$ ,  $T_2 = \frac{b_0}{b_1}$ ,  $k_2 = \frac{c_0}{a_2}$ ,  $\zeta = \frac{T_1}{2T_0} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$ .

Здесь постоянные  $T_0$ ,  $T_1$  и  $T_2$  имеют размерность времени, и их называют *постоянными времени*, коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  — *передаточными коэффициентами* и безразмерный коэффициент  $\zeta$  (при  $0 < \zeta < 1$ ) — *коэффициентом демпфирования*. Если исходное уравнение (2.5) не содержит  $y$  ( $a_2 = 0$ ), то в стандартной форме коэффициент при  $\dot{y}$  должен быть равен единице: обе части уравнения делят на  $a_1$ .

В символической форме уравнение (2.7) принимает вид

$$(T_0^2 p^2 + 2\zeta T_0 p + 1)y = k_1 (T_2 p + 1)u + k_2 v.$$

## 2.3. Преобразование Лапласа

При рассмотрении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами удобно использовать преобразование Лапласа, так как оно решение дифференциальных уравнений сводит к алгебраическим операциям.

*Преобразованием Лапласа* называют соотношение

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt, \quad (2.8)$$

ставящее функции  $x(t)$  вещественного переменного в соответствие функцию  $X(s)$  комплексного переменного  $s$  ( $s = \sigma + j\omega$ ). При этом  $x(t)$  называют *оригиналом*,  $X(s)$  — *изображением* или *изображением по Лапласу* и  $s$  — *переменной преобразования Лапласа*. Оригинал обозначают строчной, а его изображение — одноименной прописной буквой.

Предполагается, что функция  $x(t)$ , подвергающаяся преобразованию Лапласа, обладает следующими свойствами:

- 1) функция  $x(t)$  определена и кусочно дифференцируема на интервале  $[0, \infty)$ ;
- 2)  $x(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ;
- 3) существуют такие положительные числа  $c$  и  $M$ , что  $|x(t)| < Me^{ct}$  при  $0 \leq t < \infty$ .

Функцию, обладающую указанными свойствами, называют *функцией-оригиналом*.

Соотношение

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} dt, \quad (2.9)$$

определяющее по известному изображению его оригинал, называют *обратным преобразованием Лапласа*. В нем интеграл берется вдоль любой прямой  $\operatorname{Re} s = \sigma > c$ .

Условно прямое и обратное преобразования Лапласа записывают соответственно в виде

$$X(s) = L\{x(t)\}, \quad x(t) = L^{-1}\{X(s)\},$$

где  $L$  — оператор Лапласа, а  $L^{-1}$  — обратный оператор Лапласа.

### **Основные свойства преобразования Лапласа.**

1<sup>0</sup>. *Свойство линейности.* Для любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$

$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha L\{x_1(t)\} + \beta L\{x_2(t)\},$$

т.е. преобразование Лапласа от суммы функций равно сумме преобразований слагаемых, и постоянные множители можно выносить за знак преобразования.

2<sup>0</sup>. *Дифференцирование оригинала.* Если производная  $\dot{x}(t)$  является функцией-оригиналом, то

$$L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0),$$

где  $X(s) = L\{x(t)\}$ ,  $x(0) = \lim_{t \rightarrow +0} x(t)$ . Здесь запись  $t \rightarrow +0$  обозначает, что  $t$  стремится к нулю, оставаясь положительным (предел справа).

Если  $n$ -я производная  $\overset{(n)}{x}(t)$  является функцией-оригиналом, то

$$L\{\overset{(n)}{x}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}\dot{x}(0) - \dots - \overset{(n-1)}{x}(0).$$

Здесь  $\overset{(k)}{x}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \overset{(k)}{x}(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

При  $x(0) = \dot{x}(0) = \dots = \overset{(n-1)}{x}(0) = 0$  последняя формула принимает вид

$$L\{\overset{(n)}{x}(t)\} = s^n X(s).$$

Таким образом, при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на  $s$ .

3<sup>0</sup>. *Интегрирование оригинала.* Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на  $s$ :

$$L\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}.$$

4<sup>0</sup>. *Теорема запаздывания.* Для любого  $\tau > 0$

$$L\{x(t - \tau)\} = e^{-\tau s} L\{x(t)\} = e^{-\tau s} X(s).$$

5<sup>0</sup>. *Теорема о свертке (умножении изображений).* Если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — оригиналы, а  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  — их изображения, то

$$X_1(s) \cdot X_2(s) = L\left\{\int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau\right\}.$$

Интеграл в правой части называют *сверткой функций*  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , его обозначают  $x_1(t) * x_2(t)$ :

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t x_2(\tau) x_1(t - \tau) d\tau.$$

Поэтому

$$X_1(s) \cdot X_2(s) = L\{x_1(t) * x_2(t)\}.$$

6<sup>0</sup>. *Теоремы о предельных значениях.* Если  $x(t)$  — оригинал, а  $X(s)$  — его изображение, то

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s);$$

и если существует предел  $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , то

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

7<sup>0</sup>. *Теорема разложения.* Если  $X(s) = B(s)/A(s)$  является дробно-рациональной функцией ( $A(s)$ ,  $B(s)$  — полиномы от  $s$ ) и степень полинома числителя меньше полинома знаменателя, то ее оригиналом является функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^q \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} (X(s)(s - s_k)^{n_k} e^{ts}), \quad (2.10)$$

где  $s_k$  — корни уравнения  $A(s) = 0$ ,  $n_k$  — их кратности и  $q$  — число различных корней. Если указанные корни простые, то

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t}. \quad (2.11)$$

Здесь  $n$  — степень полинома  $A(s)$  и  $A'(s_k) = \left. \frac{dA(s)}{ds} \right|_{s=s_k}$ .

Формулы (2.10) и (2.11) справедливы при  $t \geq 0$ . При  $t < 0$  по определению функции-оригинала  $x(t) \equiv 0$ .

**Пример 2.1.** Определить функцию  $x(t)$ , изображение которой имеет вид  $X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ .

**Решение.** В данном случае

$$B(s) = 1, \quad A(s) = s(s+1), \quad A'(s) = 2s+1.$$

Полюсами функции  $X(s)$  являются  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1$ , и они являются простыми. Поэтому согласно формуле (2.11)  $x(t) = 1 - e^{-t}$ .

**Пример 2.2.** Определить функцию  $x(t)$ , изображение которой имеет вид  $X(s) = \frac{4(s+1)}{s(s+2)^2}$ .

**Решение.** В данном случае

$$B(s) = 4(s+1), \quad A(s) = s(s+2)^2, \quad A'(s) = 3s^2 + 8s + 4.$$

Полюсами функции  $X(s)$  являются  $s_1 = 0$  и  $s_2 = -2$ . Первый полюс является простым, а второй — кратным кратности  $n_2 = 2$ . Слагаемое, соответствующее простому полюсу, можно вычислить по формуле (2.11):  $B(s_1)/A'(s_1) = (4/4)e^0 = 1$ .

Кратному полюсу согласно (2.10) соответствует слагаемое

$$\lim_{s \rightarrow s_2} \frac{d}{ds} [X(s)(s - s_2)^2 e^{st}] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[ \frac{4(s+1)}{s} e^{st} \right] = (2t - 1)e^{-2t}.$$

Поэтому  $x(t) = 1 + (2t - 1)e^{-2t}$ .

**Изображения Лапласа.** В табл. 2.1 приведены изображения Лапласа для часто используемых функций. Рассмотрим их вывод.

1) *Дельта-функция* ( $\delta$ -функция). Дельта-функция  $\delta(t)$  является обобщенной функцией, и ее можно определить следующим образом: для любой непрерывной функции  $\varphi(t)$  и бесконечно малого положительного числа  $\varepsilon$  выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0). \quad (2.12)$$

Производные от  $\delta$ -функции определяются следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(t) \varphi(t) dt = (-1)^m \varphi^{(m)}(0), \quad m = 1, 2, \dots,$$

где  $\delta^{(m)}(t)$  —  $m$ -я производная по времени от  $\delta$ -функции,  $\varphi(t)$  — обычная функция, обладающая  $m$ -й производной.

Если представить преобразование Лапласа (2.8) в виде

$$X(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\varepsilon}^{\infty} x(t) e^{-st} dt,$$

то согласно определению дельта-функции (2.12) имеем

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-0} = 1.$$

Таблица 2.1. Изображения Лапласа

№	Оригинал $x(t)$	Изображение $X(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$1(t - \tau)$	$\frac{1}{s} e^{-\tau s}$
4	$t$	$\frac{1}{s^2}$
5	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
7	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
8	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
9	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
10	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
11	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
12	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

2) *Единичная функция.* Единичная функция  $1(t)$  определяется следующим образом (рис. 2.2, а):

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

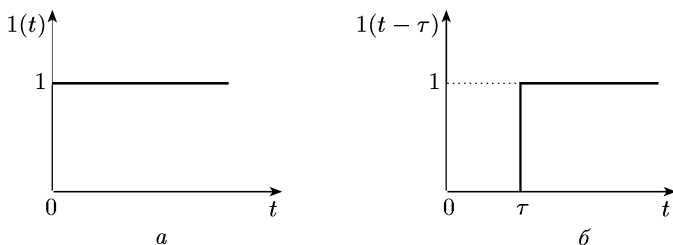


Рис. 2.2. Графики единичных функций: а — единичная функция; б — единичная функция с запаздывающим аргументом

Ее изображение согласно (2.8) имеет вид

$$X(s) = L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

3) *Единичная функция с запаздывающим аргументом.* Согласно теореме запаздывания (свойство 4<sup>0</sup> преобразования Лапласа)

$$X(s) = L\{1(t - \tau)\} = e^{-\tau s} L\{1(t)\} = e^{-\tau s} \frac{1}{s}.$$

4) Изображение  $X(s)$  функции  $x(t) = t$  определяется интегрированием по частям:

$$X(s) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -\frac{1}{s} t e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}.$$

То, что изображением функции  $x(t) = t^n$  является  $X(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ , докажем методом математической индукции.

При  $n = 1$  эта формула принимает вид  $L\{t\} = \frac{1}{s^2}$ , и она верна.

Предположим, что она справедлива при  $n = k - 1$ :  $L\{t^{k-1}\} = \frac{(k-1)!}{s^k}$ , и покажем, что она справедлива при  $n = k$ .

Так как

$$x(t) = t^k = k \int_0^t \tau^{k-1} d\tau,$$

то согласно интегрированию оригинала (свойство 3<sup>0</sup> преобразования Лапласа)

$$L\{t^k\} = L\left\{k \int_0^t \tau^{k-1} d\tau\right\} = \frac{k}{s} L\{t^{k-1}\}.$$

Отсюда, учитывая принятую выше формулу для  $L\{t^{k-1}\}$ , получаем искомое соотношение

$$L\{t^k\} = \frac{k}{s} \frac{(k-1)!}{s^k} = \frac{k!}{s^{k+1}}.$$

6) Изображение функции  $x(t) = e^{-\alpha t}$  определяется непосредственно из формулы преобразования Лапласа

$$L\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{1}{s + \alpha}.$$

7) Изображение функции  $x(t) = t e^{-\alpha t}$  получается интегрированием по частям:

$$L\{t e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} t e^{-(\alpha+s)t} dt = -\frac{1}{s + \alpha} \int_0^{\infty} t d e^{-(\alpha+s)t} = \frac{1}{(\alpha + s)^2}.$$

8) Формула для изображения функции  $x(t) = t^n e^{-\alpha t}$  доказывается методом математической индукции так же, как это было сделано при выводе формулы для изображения функции  $t^n$ .

9) Из формулы Эйлера  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$  следует, что  $\sin \omega t$  равен мнимой части  $e^{j\omega t}$ :  $\sin \omega t = \text{Im } e^{j\omega t}$ . Поэтому

$$L\{\sin \omega t\} = \int_0^{\infty} (\text{Im } e^{j\omega t}) e^{-st} dt.$$

Если рассматривать  $s$  как действительный параметр, то это равенство можно записать в виде

$$L\{\sin \omega t\} = \text{Im} \int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt.$$

Отсюда, проинтегрировав и выделив мнимую часть, получим

$$L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

10) Из формулы Эйлера получаем, что  $\cos \omega t$  равен действительной части  $e^{j\omega t}$ :  $\cos \omega t = \text{Re } e^{j\omega t}$ . Поэтому

$$L\{\cos \omega t\} = \text{Re} \int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

11) Учитывая, что

$$e^{-\alpha t} \sin \omega t = e^{-\alpha t} \text{Im } e^{j\omega t} = \text{Im } e^{(j\omega - \alpha)t},$$

получаем

$$L\{e^{-\alpha t} \sin \omega t\} = \text{Im} \int_0^{\infty} e^{(j\omega - \alpha)t} e^{-st} dt = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

12) Так как  $e^{-\alpha t} \cos \omega t = e^{-\alpha t} \text{Re } e^{j\omega t} = \text{Re } e^{(j\omega - \alpha)t}$ , то получаем

$$L\{e^{-\alpha t} \cos \omega t\} = \text{Re} \int_0^{\infty} e^{(j\omega - \alpha)t} e^{-st} dt = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

Таким образом, справедливость формул в табл. 2.1 доказана.

## 2.4. Передаточные и временные функции

Система или звено с одним выходом и двумя входами в общем случае описывается уравнением

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y &= b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots \\ &\dots + b_m u + c_0 v^{(l)} + c_1 v^{(l-1)} + \dots + c_l v. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В символической форме это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y &= (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) u + \\ &+ (c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \dots + c_l) v, \end{aligned} \quad (2.14a)$$

или

$$Q(p)y = P_1(p)u + P_2(p)v, \quad (2.14b)$$

где

$$\begin{aligned} Q(p) &= a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \\ P_1(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m, \\ P_2(p) &= c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \dots + c_l. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Наряду с дифференциальными уравнениями при описании линейных систем широко используются передаточные и временные функции.

**2.4.1. Передаточные функции.** Для описания линейных систем используются передаточные функции в операторной форме и передаточные функции в изображениях Лапласа.

*Передаточной функцией в операторной форме* называется отношение оператора воздействия к собственному оператору.

Напомним, что собственным оператором называют дифференциальный оператор при выходной переменной, а оператором воздействия — дифференциальный оператор при входной переменной.

Степень полинома знаменателя называют *порядком*, а разность между степенями знаменателя и числителя — *относительным порядком передаточной функции* и соответствующей системы.

*Нулями и полюсами* передаточной функции  $W(p) = P(p)/Q(p)$  называют нули ее числителя и знаменателя соответственно, т.е. корни уравнений  $P(p) = 0$  и  $Q(p) = 0$ , где  $p$  рассматривается как переменная, а не как оператор.

В случае системы управления, которая описывается уравнением (2.13) или (2.14), собственным оператором является  $Q(p)$ , а операторами воздействия — оператор воздействия  $P_1(p)$  по входу  $u$  и оператор воздействия  $P_2(p)$  по входу  $v$ .

Поэтому в этом случае система определяется двумя передаточными функциями — передаточной функцией

$$W_u(p) = \frac{P_1(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.16a)$$

относительно входа  $u$  и передаточной функцией

$$W_v(p) = \frac{P_2(p)}{Q(p)} = \frac{c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \dots + c_l}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.16b)$$

относительно входа  $v$ . Порядок этих передаточных функций равен  $n$ , а относительный порядок равен  $n - m$  для передаточной функции  $W_u(p)$  и  $n - l$  для передаточной функции  $W_v(p)$ .

С помощью передаточной функции уравнение рассматриваемой системы управления можно записать в виде

$$\begin{aligned} y = W_u(p)u + W_v(p)v &= \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u + \\ &+ \frac{c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \dots + c_l}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} v. \end{aligned} \quad (2.17)$$



Это уравнение следует рассматривать как еще одну символическую форму записи уравнения (2.13). Формально его можно получить из уравнений (2.14), разделив обе части на собственный оператор.

Передаточная функция в операторной форме является оператором. Ее нельзя рассматривать как обычную дробь. В частности, нельзя числитель и знаменатель сокращать на общий множитель, содержащий оператор дифференцирования.

**Пример 2.3.** Определить передаточную функцию звеньев, описываемых уравнениями:

$$\text{а) } 0,1 \dot{y} + y = 2u; \quad \text{б) } 0,1 \ddot{y} + 1,1 \dot{y} + y = 2(\dot{u} + u).$$

**Решение.** В символической форме эти уравнения записываются в виде:

$$\text{а) } (0,1p + 1)y = 2u; \quad \text{б) } (0,1p^2 + 1,1p + 1)y = 2(p + 1)u.$$

Их передаточные функции равны соответственно

$$W_1(p) = \frac{2}{0,1p + 1}, \quad W_2(p) = \frac{2(p + 1)}{0,1p^2 + 1,1p + 1}.$$

*Передаточной функцией системы (звена) в изображениях Лапласа* называют имеющее наименьший порядок отношение изображений ее выходной и входной переменных при нулевых начальных условиях. Согласно определению передаточная функция в изображениях Лапласа не может иметь равные между собой нули и полюсы, так как в этом случае ее порядок можно было бы понизить, сократив числитель и знаменатель на общий делитель.

Если система (звено) имеет несколько входов, то при определении передаточной функции относительно какой-либо одной входной переменной остальные входные переменные полагают равными нулю.

Найдем передаточные функции (в изображениях Лапласа) для системы, которая описывается уравнением (2.13). Применим к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа. Тогда, используя свойство линейности преобразования Лапласа, получим

$$\begin{aligned} a_0 L\{y^{(n)}\} + a_1 L\{y^{(n-1)}\} + \dots + a_n L\{y\} &= b_0 L\{u^{(m)}\} + b_1 L\{u^{(m-1)}\} + \dots \\ &\dots + b_m L\{u\} + c_0 L\{v^{(l)}\} + c_1 L\{v^{(l-1)}\} + \dots + c_l L\{v\}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение, учитывая свойство  $2^0$  преобразования Лапласа (дифференцирование оригинала при нулевых начальных условиях), можно записать в виде

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)Y(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m)U(s) + (c_0 s^l + c_1 s^{l-1} + \dots + c_l)V(s), \quad (2.18)$$

где  $Y(s) = L\{y(t)\}$ ,  $U(s) = L\{u(t)\}$ ,  $V(s) = L\{v(t)\}$ .

Отсюда, положив  $V(s) = 0$ , находим передаточную функцию относительно входа  $u(t)$ :

$$W_u(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Аналогично, положив  $U(s) = 0$ , находим передаточную функцию относительно входа  $v(t)$ :

$$W_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{c_0 s^l + c_1 s^{l-1} + \dots + c_l}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Как легко заметить, уравнение в изображениях Лапласа (2.18) получается из дифференциального уравнения (2.14а), т.е. дифференциального уравнения, записанного в символической форме, при подстановке  $p = s$  и замене переменных их изображениями. Поэтому передаточная функция  $W(s)$  произвольной стационарной линейной системы связана с ее передаточной функцией (в операторной форме)  $W(p)$  соотношением

$$W(s) = W(p) \Big|_{p=s}. \quad (2.19)$$

В тех случаях, когда  $W(p)$  имеет равные между собой нули и полюсы, предполагается, что в правой части (2.19) после подстановки  $p = s$  производится сокращение, и передаточная функция  $W(s)$  не имеет равных между собой нулей и полюсов.

Обратное соотношение

$$W(p) = W(s) \Big|_{s=p} \quad (2.20)$$

справедливо, если передаточная функция  $W(p)$  не имеет одинаковых нулей и полюсов.

**Пример 2.4.** Определить передаточные функции звеньев, описываемых уравнениями:

$$\text{а) } \dot{y} + y = u; \quad \text{б) } \ddot{y} - y = \dot{u} - u.$$

**Решение.** В символической форме эти уравнения записываются в виде:

$$\text{а) } (p+1)y = u; \quad \text{б) } (p^2-1)y = (p-1)u.$$

Их передаточные функции в операторной форме соответственно равны

$$W_1(p) = \frac{1}{p+1}, \quad W_2(p) = \frac{p-1}{p^2-1}.$$

Передаточные функции в изображениях Лапласа имеют вид

$$W_1(s) = W_1(p) \Big|_{p=s} = \frac{1}{s+1}, \quad W_2(s) = W_2(p) \Big|_{p=s} = \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}.$$

Как видим, они совпадают, хотя рассматриваемые звенья описываются разными дифференциальными уравнениями и общие решения однородных уравнений, описывающие свободные движения систем, различаются между собой:

$$y = Ce^{-t}, \quad y = C_1 e^{-t} + C_2 e^t.$$

При  $t \rightarrow \infty$  первое решение при произвольных начальных условиях стремится к нулю, в то время как второе решение при  $C_2 \neq 0$  стремится к бесконечности.

Таким образом, *передаточная функция второго звена в изображениях Лапласа не может служить его описанием при произвольных начальных условиях*. Это связано с тем, что его передаточная функция в операторной форме имеет равные между собой нули и полюсы.

**2.4.2. Временные функции.** Помимо дифференциальных уравнений и передаточных функций при описании и исследовании линейных систем используют переходные и импульсные переходные функции и их графики — временные характеристики.

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции, который можно сформулировать следующим образом: *реакция системы на несколько одновременно действующих воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности*.

Принцип суперпозиции позволяет сводить исследование систем при нескольких одновременно действующих входных воздействиях к исследованию системы с одним входным воздействием. Например, пусть требуется найти реакцию системы при двух одновременно действующих входных воздействиях:  $u = u(t)$  и  $v = v(t)$ . При этом эти воздействия могут быть приложены в одной точке или в разных точках системы. Находим сначала реакцию системы  $y_u(t)$  при действии одного входа  $u = u(t)$  ( $v = 0$ ), затем реакцию системы  $y_v(t)$  при действии другого входа  $v = v(t)$  ( $u = 0$ ). Реакция системы при одновременном действии обоих воздействий ( $u = u(t)$  и  $v = v(t)$ ) равна сумме найденных реакций:  $y = y_u(t) + y_v(t)$ .

Принцип суперпозиции позволяет во многих случаях ограничиться изучением систем только с одним входом.

*Переходной функцией* системы (звена) называют функцию, описывающую реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях.

Переходную функцию будем обозначать  $h(t)$ . График переходной функции — кривую зависимости  $h(t)$  от времени  $t$  — называют *переходной или разгонной характеристикой*.

*Импульсной переходной или весовой функцией (функцией веса)* называют функцию, описывающую реакцию системы (звена) на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях.

Физически единичный импульс можно представить как очень узкий импульс, ограничивающий единичную площадь. Математически он описывается дельта-функцией  $\delta(t)$ .

Весовую функцию будем обозначать  $w(t)$ . График импульсной переходной функции — кривую зависимости функций  $w(t)$  от времени  $t$  — называют *импульсной переходной характеристикой*.

Переходную и импульсную переходную функции называют *временными функциями*, а их графики — *временными характеристиками*.

**2.4.3. Связь между передаточной функцией и временными функциями.** Между передаточной функцией в изображениях Лапласа, переходной функцией и весовой функцией существует взаимно-

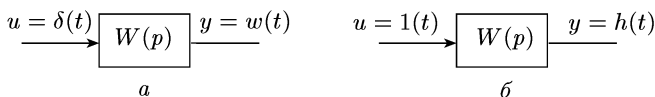


Рис. 2.3. Определение временных функций: *а* — весовой функции; *б* — переходной функции

однозначное соответствие. Для установления этого соответствия рассмотрим звено (рис. 2.3), которое описывается уравнением

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_n y = b_0 \overset{(m)}{u} + b_1 \overset{(m-1)}{u} + \dots + b_m u.$$

В изображениях Лапласа это уравнение принимает вид

$$Y(s) = W(s)U(s), \quad (2.21)$$

где  $Y(s) = L\{y(t)\}$ ,  $U(s) = L\{u(t)\}$ ,

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Из определения весовой функции следует, что  $y = w(t)$  при  $u = \delta(t)$  (см. рис. 2.3, *а*). И так как при этом  $Y(s) = L\{w(t)\}$  и  $U(s) = L\{\delta(t)\} = 1$ , то из уравнения (2.21) получаем

$$W(s) = L\{w(t)\} = \int_0^{\infty} w(t) e^{-st} dt, \quad (2.22)$$

т.е. *передаточная функция в изображениях Лапласа равна изображению Лапласа весовой функции.*

Из определения переходной функции следует, что  $y = h(t)$  при  $u = 1(t)$  (см. рис. 2.3, *б*). И так как при этом  $U(s) = L\{1(t)\} = 1/s$  и  $Y(s) = L\{h(t)\}$ , то из уравнения (2.21) получаем

$$L\{h(t)\} = W(s) \frac{1}{s},$$

или

$$W(s) = sL\{h(t)\}.$$

Если в последнем уравнении произвести обратное преобразование Лапласа, то в силу (2.22) в левой части получим  $w(t)$ , а в правой части в силу свойства преобразования Лапласа, связанного с дифференцированием оригинала, — производную от  $h(t)$ :

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (2.23)$$

При произвольном входном воздействии из уравнения (2.21) на основании свойства преобразования Лапласа (теорема свертки) получаем

$$y(t) = \int_0^t w(t - \tau) u(\tau) d\tau. \quad (2.24)$$

Если известна одна из функций  $W(s)$ ,  $w(t)$  и  $h(t)$ , то две другие могут быть определены с помощью формул (2.22), (2.23).

**Пример 2.5.** Определить переходную и весовую функции звена с передаточной функцией  $W(p) = \frac{2}{0,5p + 1}$ .

**Решение.** В соответствии с определением передаточной функции дифференциальное уравнение рассматриваемой системы имеет вид

$$(0,5p + 1)y = 2u \quad \text{или} \quad 0,5\dot{y} + y = 2u.$$

По определению переходная функция есть решение этого уравнения при  $u = 1(t)$ , т. е. уравнения

$$0,5\dot{y} + y = 2$$

при нулевом начальном условии:  $y(0) = 0$ .

Характеристическое уравнение имеет вид

$$0,5\lambda + 1 = 0.$$

Его корень  $\lambda_1 = -2$ . Общее решение однородного уравнения  $y_c(t) = Ce^{-2t}$  и частное решение неоднородного уравнения  $y_b(t) = 2$ . Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$y = y_c(t) + y_b(t) = Ce^{-2t} + 2.$$

Из начального условия  $y(0) = C + 2 = 0$  имеем  $C = -2$ . Следовательно, переходная функция

$$h(t) = -2e^{-2t} + 2 = 2(1 - e^{-2t}).$$

Весовая функция  $w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 4e^{-2t}$ .

Итак, *линейная система (звено) может быть задана (описана) с помощью дифференциальных уравнений, передаточных функций в операторной форме и в изображениях Лапласа, переходной и весовой функциями. При этом в общем случае дифференциальные уравнения и передаточные функции в операторной форме описывают систему при произвольных начальных условиях, а передаточные функции в изображениях Лапласа и временные (переходные и весовые) функции — только при нулевых начальных условиях.*

## 2.5. Частотные функции и характеристики

Важную роль при исследовании линейных стационарных систем играют частотные характеристики. Они представляют собой еще один способ описания систем.

В общем случае уравнение линейной системы с одним входом можно записать в виде

$$a_0^{(n)}y + a_1^{(n-1)}\dot{y} + \dots + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1^{(m-1)}\dot{u} + \dots + b_m u. \quad (2.25)$$

Ее передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.26)$$

Функцию  $W(j\omega)$ , которая получается из передаточной функции в изображениях Лапласа при подстановке  $s = j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n},$$

называют *частотной передаточной функцией*. Она является комплекснозначной функцией от действительной переменной  $\omega$ , называемой *частотой*.

Частотную передаточную функцию можно представить в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega).$$

Если  $|\arg W(j\omega)| \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ .

На комплексной плоскости частотная передаточная функция  $W(j\omega)$  определяет вектор  $OC$  (рис. 2.4), длина которого равна  $A(\omega)$ , а аргумент равен углу  $\varphi(\omega)$ , образованному этим вектором с положительной действительной полуосью.

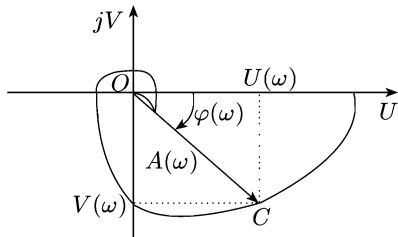


Рис. 2.4. Годограф вектора  $W(j\omega)$

Годограф этого вектора, т.е. кривую, описываемую концом вектора  $W(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $\infty$  или от  $-\infty$  до  $\infty$ , называют *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ).

АФЧХ, получаемую при изменении частоты от  $-\infty$  до  $\infty$ , также называют *диаграммой Найквиста*.

Модуль  $A(\omega) = |W(j\omega)|$  называют *амплитудной частотной функцией*, ее график — *амплитудной частотной характеристикой*.

Аргумент  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$  называют *фазовой частотной функцией*, а его график (при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ ) — *фазовой частотной характеристикой*.

Частотную передаточную функцию  $W(j\omega)$  называют также *амплитудно-фазовой частотной функцией*. Ее действительную  $U(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$  и мнимую  $V(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$  части называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотными функциями*, а их графики — кривые зависимостей  $U = U(\omega)$  и  $V = V(\omega)$  называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотными характеристиками*.

Кроме перечисленных частотных характеристик, имеются логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) — логарифмические амплитудные частотные характеристики и логарифмические фазовые частотные характеристики.

Функцию  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$  называют *логарифмической амплитудной (частотной) функцией*, а график зависимости функции  $L(\omega)$  от логарифма частоты  $\lg \omega$  называют *логарифмической амплитудной частотной характеристикой* (ЛАЧХ).

При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают значение частоты в логарифмическом масштабе, при этом на отметке, соответствующей значению  $\lg \omega$ , записывают значение  $\omega$ ; по оси ординат откладывают и записывают значение  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ .

*Логарифмической фазовой частотной характеристикой* (ЛФЧХ) называют график зависимости функции  $\varphi(\omega)$  от логарифма частоты  $\lg \omega$ . При ее построении по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению  $\lg \omega$ , записывают значение  $\omega$ .

В ЛЧХ единицей  $L(\omega)$  является децибел, а единицей  $\lg \omega$  — декада. *Декадой* называют интервал, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что частота *изменилась на одну декаду*.

**Правило вычисления модуля и аргумента.** В дальнейшем при вычислении амплитудной и фазовой частотной функций полезно следующее правило вычисления модуля и аргумента произведения и дроби комплексных чисел (функций).

1) Модуль произведения  $Z = z_1 z_2 \dots z_n$  комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей:

$$|Z| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|, \quad (2.27a)$$

а аргумент — сумме аргументов сомножителей:

$$\arg Z = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n. \quad (2.27b)$$

2) Модуль дроби комплексных чисел (функций)  $Z = Z_1/Z_2$  равен дроби модулей:

$$|Z| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \quad (2.28a)$$

а аргумент — разности аргументов числителя и знаменателя:

$$\arg Z = \arg Z_1 - \arg Z_2. \quad (2.28b)$$

Действительно, представив  $z_i = |z_i| e^{j \arg z_i}$ , имеем

$$Z = |z_1| |z_2| \dots |z_n| e^{j(\arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n)}.$$

Отсюда получаем формулы (2.27a), (2.27b).

Аналогично находим  $Z = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} e^{j(\arg Z_1 - \arg Z_2)}$ , откуда получаем формулы (2.28a), (2.28b).

Если комплексная функция представляет отношение произведений комплексных чисел (функций)  $Z = \left( \prod_{i=1}^m z_i \right) / \left( \prod_{k=1}^n z_k \right)$ , то на основании приведенных выше формул получаем

$$|Z| = \left( \prod_{i=1}^m |z_i| \right) / \left( \prod_{k=1}^n |z_k| \right), \quad \arg Z = \sum_{i=1}^m \arg z_i - \sum_{k=1}^n \arg z_k. \quad (2.29)$$

**Физический смысл частотных характеристик.** При гармоническом входном воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса выходная переменная также изменяется по гармоническому закону с той же частотой, но с другими амплитудой и фазой; амплитуда равна амплитуде входного сигнала, умноженной на модуль частотной передаточной функции, а сдвиг фазы равен ее аргументу.

Иными словами, *амплитудная частотная функция показывает изменение отношения амплитуд выходного и входного сигналов, а фазовая частотная функция — сдвиг фазы между ними в зависимости от частоты.*

Таким образом, если система (2.25) устойчива, то при входном воздействии

$$u = u_m \cos(\omega t + \alpha);$$

после окончания переходного процесса выходной сигнал имеет вид

$$y = |W(j\omega)| u_m \cos(\omega t + \alpha + \varphi(\omega)).$$

Здесь  $u_m$  — постоянная амплитуда входного сигнала;  $\alpha$  — начальный сдвиг фазы;  $W(j\omega)$  — частотная передаточная функция рассматриваемой системы;  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ . Покажем справедливость приведенной формулы, положив для простоты записи  $\alpha = 0$ .

Общее решение уравнения (2.25) имеет вид

$$y = y_c(t) + y_b(t),$$

где  $y_c(t)$  — общее решение однородного уравнения,  $y_b(t)$  — частное решение неоднородного уравнения (2.25). Общее решение  $y_c(t)$  описывает свободное движение, т. е. движение, определяемое начальным условием. В устойчивых системах оно со временем стремится к нулю:  $y_c(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Частное решение  $y_b(t)$  описывает вынужденное (установившееся) движение, определяемое внешним воздействием.

Чтобы найти частное решение при  $u = u_m \cos \omega t$ , используя равенство  $\cos \omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$ , представим входное воздействие в виде  $u = u_1(t) + u_2(t)$ , где

$$u_1(t) = \frac{u_m}{2} e^{j\omega t}, \quad u_2(t) = \frac{u_m}{2} e^{-j\omega t}.$$

На основе принципа суперпозиции частное решение рассматриваемого уравнения можно представить в виде суммы

$$y_b(t) = y_1(t) + y_2(t),$$



где  $y_1(t)$  — частное решение уравнения (2.25) при  $u = u_1(t)$  и  $y_2(t)$  — частное решение того же уравнения при  $u = u_2(t)$ . Найдём эти решения.

Так как

$$\begin{aligned} pu_1(t) &= \frac{u_m}{2} pe^{j\omega t} = \frac{u_m}{2} (j\omega) e^{j\omega t} = (j\omega) u_1(t), \\ p^2 u_1(t) &= p(pu_1(t)) = p[(j\omega) u_1(t)] = (j\omega)^2 u_1(t), \\ &\dots\dots\dots \\ p^m u_1(t) &= p(p^{m-1} u_1(t)) = (j\omega)^m u_1(t), \end{aligned}$$

то при подстановке в уравнение (2.25) вместо  $u$  выражения для  $u_1(t)$ , получим

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y_1 = [b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m] u_1(t).$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$y_1 = A_1 u_1(t) = A_1 \frac{u_m}{2} e^{j\omega t}.$$

При его подстановке в (2.25) указанное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} [a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n] A_1 u_1(t) &= \\ &= [b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m] u_1(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Очевидно, это выражение совпадает с частотной передаточной функцией рассматриваемой системы. Поэтому

$$A_1 = W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

и соответственно

$$y_1 = A_1 u_1(t) = |W(j\omega)| \frac{u_m}{2} e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}. \quad (2.30)$$

Теперь найдём решение  $y_2(t)$ , подставив в (2.25) вместо  $u$  выражение  $u_2 = \frac{u_m}{2} e^{-j\omega t}$ . Так как

$$\begin{aligned} pu_2(t) &= \frac{u_m}{2} pe^{-j\omega t} = \frac{u_m}{2} (-j\omega) e^{-j\omega t} = (-j\omega) u_2(t), \\ p^2 u_2(t) &= p(pu_2(t)) = (-j\omega)^2 u_2(t), \\ &\dots\dots\dots \\ p^m u_2(t) &= (-j\omega)^m u_2(t), \end{aligned}$$

имеем

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y_2 = [b_0 (-j\omega)^m + b_1 (-j\omega)^{m-1} + \dots + b_m] u_2(t).$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$y_2 = A_2 u_2(t) = A_2 \frac{u_m}{2} e^{-j\omega t}.$$

Проделав те же выкладки, что и при нахождении частного решения  $y_1(t)$ , и учитывая, что  $|W(-j\omega)| = |W(j\omega)|$  и  $\arg W(-j\omega) = -\arg W(j\omega)$ , получим

$$A_2 = W(-j\omega) = |W(-j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)} = |W(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$$

и соответственно

$$y_2 = |W(j\omega)| \frac{u_m}{2} e^{-j[\omega t + \varphi(\omega)]}.$$

Следовательно,

$$y_{\text{в}}(t) = y_1(t) + y_2(t) = |W(j\omega)| u_m \cos(\omega t + \alpha + \varphi(\omega)),$$

что и требовалось показать.

## 2.6. Различные типы звеньев и их характеристики

Так как произвольный полином можно разложить на простые множители, то передаточную функцию системы (звена)

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

всегда можно представить в виде произведения простых множителей и дробей вида

$$k, \quad s, \quad \frac{1}{s}, \quad Ts \pm 1, \quad \frac{1}{Ts \pm 1}, \quad T^2 s^2 \pm 2\zeta Ts + 1, \quad \frac{1}{T^2 s^2 \pm 2\zeta Ts + 1}. \quad (2.31)$$

Напомним, что  $k$  называется передаточным коэффициентом,  $T$  — постоянной времени и  $\zeta$  ( $0 < \zeta < 1$ ) — коэффициентом демпфирования.

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, называют *элементарными звеньями*. Их также называют *типовыми*. Однако типовыми называют и другие звенья, которые не являются элементарными.

Системы и звенья и их передаточные функции делятся на минимально-фазовые и неминимально-фазовые.

Передаточная функция  $W(s) = P(s)/Q(s)$  называется *минимально-фазовой*, если все ее нули (корни уравнения)  $P(s) = 0$  и полюсы (корни уравнения  $Q(s) = 0$ ) располагаются в левой полуплоскости, и называется *неминимально-фазовой*, если хотя бы один нуль или полюс располагается в правой полуплоскости.

Система и звено называются *минимально-фазовыми*, если их передаточные функции являются минимально-фазовыми, и называются *неминимально-фазовыми*, если их передаточные функции являются неминимально-фазовыми.

Передаточные функции и системы (звенья), не являющиеся ни минимально-фазовыми, ни неминимально-фазовыми, будем называть *маргинальными*. Иначе говоря, передаточная функция будет называть-

ся маргинальной, если она имеет нуль или полюс на мнимой оси, но не имеет их в правой полуплоскости.

**2.6.1. Типы элементарных звеньев.** Тип звена определяется видом его передаточной функции. При этом если передаточные функции звеньев отличаются только на постоянный множитель, то их относят к одному типу. Поэтому при определении типа элементарных звеньев будем исходить из передаточных функций, получаемых из (2.31) умножением на константу  $k$  (кроме первой).

*Пропорциональное звено.* Так называют звено с передаточной функцией  $W(s) = k$ . Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = k, \quad U(\omega) = k, \quad V(\omega) = 0, \quad A(\omega) = k, \quad \varphi(\omega) = 0, \\ L(\omega) = 20 \lg k, \quad h(t) = k1(t), \quad w(t) = k\delta(t).$$

*Дифференцирующее звено.* Так называют звено с передаточной функцией  $W(s) = ks$ . Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = jk\omega, \quad U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = k\omega, \quad A(\omega) = k\omega, \quad \varphi(\omega) = \pi/2, \\ L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega, \quad h(t) = k\delta(t), \quad w(t) = k\dot{\delta}(t).$$

*Интегрирующее звено.* Так называют звено с передаточной функцией  $W(s) = k/s$ . Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = -jk/\omega, \quad U(\omega) = 0, \quad V(\omega) = -k/\omega, \quad A(\omega) = k/\omega, \\ \varphi(\omega) = -\pi/2, \quad L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega, \quad h(t) = kt, \quad w(t) = k.$$

*Форсирующее звено 1-го порядка.* Так называют звено с передаточной функцией  $W(s) = k(Ts + 1)$ . Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1), \quad U(\omega) = k, \quad V(\omega) = kT\omega, \\ A(\omega) = k\sqrt{(T\omega)^2 + 1}, \quad \varphi(\omega) = \arctg(T\omega), \\ L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}, \quad h(t) = k[\delta(t) + 1(t)], \\ w(t) = k[T\dot{\delta}(t) + \delta(t)].$$

*Апериодическое звено.* Так называют звено с передаточной функцией  $W(s) = k/(Ts + 1)$ . Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}, \quad U(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}, \quad V(\omega) = -\frac{kT\omega}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}, \\ A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg(T\omega),$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}, \quad h(t) = k[1 - e^{-t/T}],$$

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T}.$$

В рассмотренных выше элементарных звеньях фазовая частотная функция по модулю не превышает  $\pi/2$ . Поэтому она определяется как  $\arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ . Кроме того, в случае интегрирующего и апериодического звеньев амплитудную и фазовую функции можно определить по правилу вычисления модуля и аргумента дроби.

**Форсирующее звено 2-го порядка.** Так называют звено с передаточной функцией  $W(s) = k(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)$  ( $0 < \zeta < 1$ ). Его частотные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = k[1 - (T\omega)^2 + j2\zeta T\omega], \quad U(\omega) = k[1 - (T\omega)^2],$$

$$V(\omega) = 2k\zeta T\omega, \quad A(\omega) = k\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\zeta T\omega)^2},$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{2\zeta T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T}, \\ \pi + \arctg \frac{2\zeta T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T}, \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\zeta T\omega)^2}.$$

Временные функции не приведены, так как они практически не используются.

Фазовая частотная функция  $\varphi(\omega)$  не удовлетворяет условию  $|\varphi(\omega)| \leq \pi/2$  на всем диапазоне частот. Поэтому для ее определения рассмотрим амплитудно-фазовую частотную характеристику.

Таблица 2.2. Данные для построения АФЧХ

$\omega$	0	$0 < \omega < 1/T$	$1/T$	$1/T < \omega < \infty$	$\infty$
$U(\omega)$	$k$	$> 0$	0	$< 0$	$-\infty$
$V(\omega)$	0	$> 0$	$2k\zeta$	$> 0$	$\infty$

В табл. 2.2 приведены значения  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  в характерных точках, а на рис. 2.5 показан примерный вид АФЧХ. Из этого рисунка

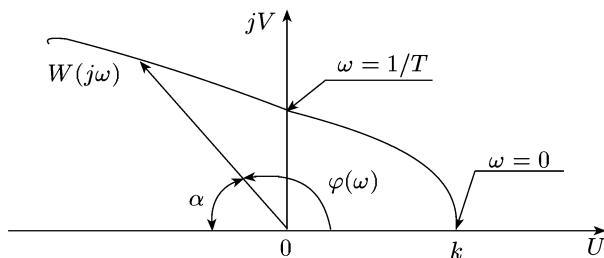


Рис. 2.5. АФЧХ форсирующего звена 2-го порядка

видно, что  $0 \leq \varphi(\omega) \leq \pi/2$  при  $0 \leq \omega \leq 1/T$ . Поэтому на этом интервале

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - (\omega T)^2}.$$

При  $\omega > 1/T$  (см. рис. 2.5)  $\varphi(\omega) = \pi - \alpha$ , где

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{|U(\omega)|} = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - (\omega T)^2}.$$

Поэтому на этом диапазоне частот

$$\varphi(\omega) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - (\omega T)^2},$$

что и доказывает справедливость приведенной выше формулы для  $\varphi(\omega)$ .

*Колебательное звено.* Так называют звено с передаточной функцией  $W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$  ( $0 < \zeta < 1$ ). К такому виду приводится передаточная функция  $W(s) = \frac{b_0}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2}$ , если ее полюсы являются комплексно сопряженными числами с отрицательной вещественной частью.

Частотные и временные функции колебательного звена имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - (T\omega)^2 + j2\zeta T\omega}, \quad U(\omega) = \frac{k[1 - (T\omega)^2]}{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\zeta T\omega)^2},$$

$$V(\omega) = -\frac{2\zeta k T\omega}{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\zeta T\omega)^2}, \quad A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\zeta T\omega)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T}, \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T}, \end{cases}$$

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\zeta T\omega)^2},$$

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \right],$$

$$w(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

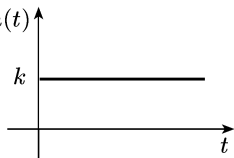
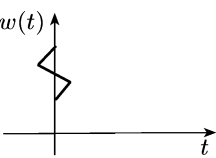
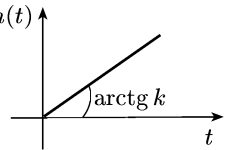
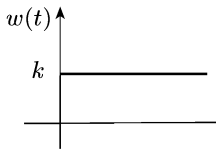
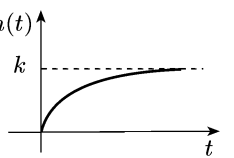
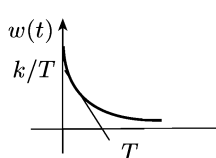
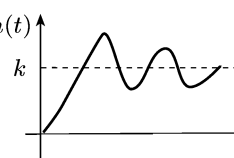
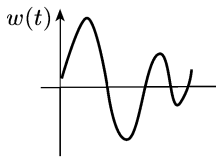
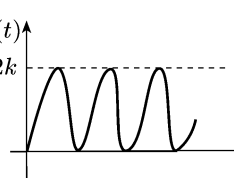
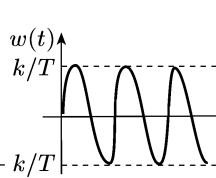
где  $\alpha = \frac{\zeta}{T}$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T}$ ,  $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$ .

Здесь фазовую частотную функцию можно получить, используя правило вычисления аргумента дроби и основываясь на фазовой функции форсирующего звена 2-го порядка.

Таблица 2.3. Частотные характеристики элементарных звеньев

Звено и ее частотная передаточная функция	Амплитудно-фазовая частотная характеристика	Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики
Пропорциональное звено, $W(j\omega) = k$		
Дифференцирующее звено, $W(j\omega) = kj\omega$		
Интегрирующее звено, $W(j\omega) = k/j\omega$		
Форсирующее звено, $W(j\omega) = k(Tj\omega + 1)$		
Апериодическое звено, $W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$		
Колебательное звено, $W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 + j2\xi T\omega}$		

Таблица 2.4. Временные характеристики элементарных звеньев

Звено	Переходная характеристика	Импульсная переходная характеристика
Пропорциональное		
Интегрирующее		
Апериодическое		
Колебательное		
Консервативное		

В табл. 2.3 приведены частотные характеристики, а в табл. 2.4 — временные характеристики элементарных звеньев.

**Асимптотические логарифмические амплитудные частотные характеристики.** Логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) пропорционального, дифференцирующего и интегрирующего звеньев являются прямыми, и их легко построить. Построение ЛАЧХ других элементарных звеньев требует трудоемких вычислений. Поэтому на практике часто ограничиваются построением приближенных асимптотических ЛАЧХ.

При построении асимптотической ЛАЧХ апериодического звена в выражении  $L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$  при  $\omega \leq 1/T$  под корнем пренебрегают слагаемым  $(T\omega)^2$ , меньшим единицы, а при  $\omega > 1/T$  — единицей. Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \omega \leq 1/T, \\ 20 \lg k - 20 \lg (T\omega) & \text{при } \omega > 1/T. \end{cases}$$

При построении асимптотической ЛАЧХ колебательного звена в выражении

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\zeta T\omega)^2}$$

при  $\omega \leq 1/T$  под корнем оставляют только единицу, а при  $\omega > 1/T$  — только наибольшее слагаемое  $(T\omega)^4$ . Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \omega \leq 1/T, \\ 20 \lg k - 40 \lg (T\omega) & \text{при } \omega > 1/T. \end{cases}$$

Аналогично поступают при построении асимптотических ЛАЧХ форсирующих звеньев. Частоты, на которых асимптотические ЛАЧХ прерываются изломом, называются *сопрягающими частотами*.

**Переходная и весовая функции.** Вычисление временных функций проиллюстрируем на примере колебательного звена.

**Пример 2.6.** Определить переходную и весовую функции колебательного звена.

**Решение.** По определению передаточная функция колебательно-го звена

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \quad (0 < \zeta < 1),$$

и соответственно дифференциальное уравнение имеет вид

$$(T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1)y = k u.$$

Для определения переходной функции нужно решить это уравнение при входном воздействии  $u = 1(t)$  и нулевых начальных условиях

$$(T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1)y = k 1(t), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$T^2 \lambda^2 + 2\zeta T \lambda + 1 = 0,$$

и его корнями являются

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\zeta}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta}{T}\right)^2 - \frac{1}{T^2}} \quad \text{или} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{\zeta}{T} \pm j \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T}.$$

Положив  $\alpha = \zeta/T$  и  $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}/T$ , общее решение однородного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$y_c = (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) e^{-\alpha t}.$$



Частное решение неоднородного уравнения есть  $y_b = k$ . Поэтому общее решение имеет вид

$$y = y_c + y_b = (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) e^{-\alpha t} + k.$$

Производная от этого решения —

$$\dot{y} = [\beta(C_1 \cos \beta t - C_2 \sin \beta t) - \alpha(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t)] e^{-\alpha t}.$$

Начальные условия принимают вид

$$y(0) = C_2 + k = 0, \quad \dot{y}(0) = \beta C_1 - \alpha C_2 = 0.$$

Отсюда  $C_2 = -k$ ,  $C_1 = -\alpha k / \beta$ . Поэтому переходная функция есть

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{1}{\beta} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t) e^{-\alpha t} \right],$$

или, после элементарных преобразований,

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) \right],$$

где  $\varphi_0 = \arctg(\beta/\alpha)$ . Весовая функция принимает вид

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} [\alpha \sin(\beta t + \varphi_0) - \beta \cos(\beta t + \varphi_0)],$$

или, после преобразований,

$$w(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

**2.6.2. Неминимально-фазовые элементарные звенья.** Рассмотренные выше дифференцирующее и интегрирующее звенья являются маргинальными, а остальные — минимально-фазовыми. Здесь мы остановимся на неминимально-фазовых и двух других маргинальных элементарных звеньях. При этом ограничимся рассмотрением только фазовых частотных функций, так как их вычисление вызывает определенные сложности.

Так как формула  $\tg \varphi(\omega) = V(\omega)/U(\omega)$  справедлива при произвольном  $\varphi(\omega)$ , в общем случае фазовая частотная функция имеет вид

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} + l\pi, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.32)$$

**Неустойчивое форсирующее звено.** Так называется звено с передаточной функцией  $W(s) = k(Ts - 1)$ . Фазовая частотная функция имеет вид

$$\varphi(\omega) = \pi - \arctg(T\omega). \quad (2.33)$$

Для получения этой и последующих формул для фазовой частотной функции неминимально-фазовых элементарных звеньев рассмотрим пределы их частотных передаточных и фазовых частотных функций при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ .

Для частотной передаточной функции неустойчивого форсирующего звена  $W(j\omega) = k(Tj\omega - 1)$  имеем:

при  $\omega \rightarrow 0$   $W(j\omega) \rightarrow -k$ , и соответственно фазовая частотная функция  $\varphi(\omega) \rightarrow l\pi$  ( $= \pm 1, \pm 3, \dots$ );

при  $\omega \rightarrow \infty$   $W(j\omega) \rightarrow kTj\omega$ , и соответственно  $\varphi(\omega) \rightarrow \pi/2$ .

В силу того, что  $\text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\text{arctg}(T\omega)$ , формула (2.32) будет удовлетворять полученным предельным соотношениям при  $l = 1$ . А при этом значении  $l$  формула (2.32) совпадает с (2.33).

**Неустойчивое апериодическое звено.** Так называется звено с передаточной функцией  $W(s) = k/(Ts - 1)$ . Так как частотная передаточная функция  $W(j\omega) = k/(Tj\omega - 1)$ , фазовая частотная функция по правилу вычисления аргумента дроби имеет вид  $\varphi(\omega) = -\arg(Tj\omega - 1)$ , т. е. она равна фазовой частотной функции неустойчивого форсирующего звена с противоположным знаком:

$$\varphi(\omega) = -\pi + \text{arctg}(T\omega).$$

**Неустойчивое форсирующее звено 2-го порядка.** Так называется звено с передаточной функцией

$$W(s) = k(T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1) \quad (0 < \zeta < 1).$$

Частотная передаточная функция  $W(j\omega) = k(1 - T^2\omega^2 - j2\zeta T\omega)$  и  $\text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\text{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}$ . В данном случае при  $\omega \rightarrow 0$   $W(j\omega) \rightarrow k$ , и соответственно фазовая частотная функция  $\varphi(\omega) \rightarrow 0$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$   $W(j\omega) \rightarrow (-1)^2 k T^2 (j\omega)^2$ , и соответственно  $\varphi(\omega) \rightarrow \pm\pi$ . Формула (2.32), которая принимает вид  $\varphi(\omega) = -\text{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2} + l\pi$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , удовлетворяет приведенным предельным соотношениям, и  $\varphi(\omega)$  не терпит разрыва при  $\omega = 1/T$ , если  $l = 0$  при  $\omega \leq 1/T$  и  $l = -1$  при  $\omega > 1/T$ :

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\text{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T}, \\ -\pi - \text{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases} \quad (2.34)$$

**Неустойчивое колебательное звено.** Так называется звено с передаточной функцией  $W(s) = \frac{k}{T^2s^2 - 2\zeta Ts + 1}$  ( $0 < \zeta < 1$ ). Частотная передаточная функция  $W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2 - j2\zeta T\omega}$ , и фазовая частотная функция, определяемая как разность между аргументами числителя и знаменателя, равна фазовой частотной функции неустойчивого форсирующего звена 2-го порядка с отрицательным знаком:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \text{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega \leq \frac{1}{T}, \\ \pi + \text{arctg} \frac{2\zeta T\omega}{1 - (T\omega)^2} & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

**Консервативное звено.** Так называется звено с передаточной функцией  $W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}$ , которая получается из передаточной функции колебательного звена при  $\zeta = 0$ . Поэтому, положив  $\zeta = 0$  в фазовой частотной функции колебательного звена, получим

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 1/T, \\ -\pi & \text{при } \omega > 1/T. \end{cases}$$

Это звено является маргинальным.

Еще одно маргинальное элементарное звено с передаточной функцией  $W(s) = k(T^2 s^2 + 1)$  получим, если положим  $\zeta = 0$  в передаточной функции форсирующего звена 2-го порядка. Из фазовой частотной функции указанного звена при  $\zeta = 0$  имеем

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 1/T, \\ \pi & \text{при } \omega > 1/T. \end{cases}$$

**2.6.3. Звено чистого запаздывания.** Некоторые объекты могут обладать запаздыванием. Запаздывание проявляется в том, что при изменении входного воздействия выходная переменная начинает изменяться не сразу, а спустя некоторый промежуток времени  $\tau$ , называемый временем *чистого* или *транспортного запаздывания*. К такому роду объектам относятся объекты, содержащие трубопроводы, длинные линии, транспортеры. Математические модели таких объектов включают звено, которое описывается передаточной функцией  $W(s) = ke^{-\tau s}$ . Такое звено называется *звеном чистого запаздывания*. Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= ke^{-j\tau\omega} = k(\cos \tau\omega - j \sin \tau\omega), & U(\omega) &= k \cos \tau\omega, \\ V(\omega) &= -k \sin \tau\omega, & A(\omega) &= k, & \varphi(\omega) &= -\tau\omega, & L(\omega) &= 20 \lg k, \\ h(t) &= k1(t - \tau), & w(t) &= k\delta(t - \tau). \end{aligned}$$

**2.6.4. Построение логарифмических частотных характеристик.** Для построения логарифмической амплитудной (ЛАЧХ) и фазовой (ЛФЧХ) частотной характеристик звена с произвольной дробно-рациональной передаточной функцией  $W(s)$  нужно ее числитель и знаменатель разложить на элементарные множители и представить  $W(s)$  в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев:

$$W(s) = \prod_i W_i(s) \quad (2.35)$$

или в виде

$$W(s) = \frac{k}{s^\nu} W^0(s), \quad (2.36)$$

где  $W^0(s)$  представляет собой отношение произведений элементарных множителей 1-го и 2-го порядков с единичным передаточным коэффициентом, т.е. множителей вида  $Ts \pm 1$  и  $as^2 \pm bs + 1$  ( $b^2 - 4a < 0$ ).

Из (2.35) получаем

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = \sum_i \lg |W_i(\omega)|, \quad (2.37a)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \sum_i \arg W_i(j\omega). \quad (2.37b)$$

Из (2.37a) следует, что для построения ЛАЧХ произвольного звена достаточно построить ЛАЧХ элементарных звеньев, на которые оно разлагается, а затем их геометрически сложить. Однако для построения асимптотических ЛАЧХ можно использовать несколько иное, более простое правило. Проиллюстрируем это сначала на частном примере.

Пусть  $W(s) = \frac{100(s+1)}{s(10s+1)(0,01s^2+0,1s+1)}$ . Логарифмическая амплитудная частотная функция имеет вид

$$L(\omega) = 40 + 20 \lg \sqrt{\omega^2 + 1} - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{(10\omega)^2 + 1} - \\ - 20 \lg \sqrt{(1 - 0,01\omega^2)^2 + (0,1\omega)^2}.$$

Вычислим сопрягающие частоты и пронумеруем их в порядке возрастания:

$$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0,1, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = \frac{1}{0,1} = 10.$$

Здесь  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  — сопрягающие частоты апериодического, форсирующего и колебательного звеньев соответственно.

Напомним, что при построении асимптотических ЛАЧХ при частотах, меньших сопрягающей частоты, под корнем оставляют только единицу (остальными членами пренебрегают); при частотах, больших сопрягающей частоты, оставляют член с наивысшей степенью  $\omega$ . Поэтому в рассматриваемом примере при  $\omega < \omega_1$

$$L(\omega) \cong 40 - 20 \lg \omega.$$

Это уравнение прямой, которая проходит через точку с координатами  $\omega = 1$  и  $L = 40$  с наклоном  $-20$  дБ/дек. Прямая имеет наклон  $-20$  дБ/дек (20 дБ/дек); это означает, что при увеличении частоты на декаду (т.е. в 10 раз)  $L(\omega)$  уменьшается (увеличивается) на 20 дБ (рис. 2.6, а).

Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте (рис. 2.6, б).

При  $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$  аналогично имеем

$$L(\omega) \cong 40 - 20 \lg \omega - 20 \lg (10\omega) = 20 - 40 \lg \omega.$$

Это уравнение второй асимптоты. Ее наклон по отношению к первой асимптоте изменяется на  $-20$  дБ/дек и обуславливается апериодическим звеном, т.е. множителем 1-го порядка в знаменателе рассматриваемой передаточной функции. Вторую асимптоту проводят от конца

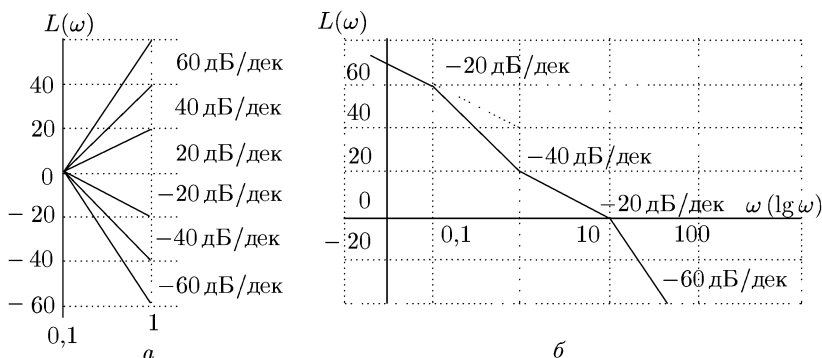


Рис. 2.6. К построению асимптотических ЛАЧХ: *а* — наклоны асимптот; *б* — асимптотическая ЛАЧХ

первой асимптоты до второй сопрягающей частоты согласно ее уравнению под наклоном  $-40$  дБ/дек.

При  $\omega_2 \leq \omega < \omega_3$

$$L(\omega) \cong 20 - 40 \lg \omega + 20 \lg \omega = 20 - 20 \lg \omega.$$

Это уравнение третьей асимптоты. Ее наклон по отношению ко второй асимптоте изменяется на  $20$  дБ/дек и обуславливается форсирующим звеном, т.е. множителем 1-го порядка в числителе. Третью асимптоту проводят от конца второй асимптоты до третьей сопрягающей частоты под наклоном  $-20$  дБ/дек.

При  $\omega \geq \omega_3$

$$L(\omega) \cong 20 - 20 \lg \omega - 20 \lg (0,1 \omega)^2 = 60 - 60 \lg \omega.$$

Это уравнение последней, четвертой асимптоты. Ее наклон изменяется по отношению к третьей асимптоте на  $-40$  дБ/дек и обуславливается колебательным звеном, т.е. множителем 2-го порядка в знаменателе.

Теперь нетрудно сформулировать правило построения асимптотических ЛАЧХ в общем случае.

### **Правило построения асимптотических ЛАЧХ.**

1) Пользуясь представлением (2.36), вычислить  $20 \lg k$  и сопрягающие частоты  $\omega_i = 1/T_i$ , которые следует пронумеровать в порядке возрастания:  $\omega_1 < \omega_2 < \dots$

2) На оси абсцисс отметить сопрягающие частоты, а на координатной плоскости — точку  $(1, 20 \lg k)$ . Построить первую асимптоту — прямую под наклоном —  $\nu 20$  дБ/дек, проходящую через отмеченную точку на координатной плоскости. Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте  $\omega_1$ .

3) Построить вторую асимптоту, которая начинается с конца первой асимптоты и проводится до второй сопрягающей частоты  $\omega_2$ . Его наклон изменяется на  $\pm 20$  дБ/дек или  $\pm 40$  дБ/дек в зависимости от

того, обуславливается  $\omega_1$  элементарным множителем 1-го или 2-го порядка. Берется знак плюс, если указанный множитель находится в числителе, и знак минус, если этот множитель находится в знаменателе.

4) Построить остальные асимптоты, которые строятся аналогично второй асимптоте:  $i$ -я асимптота начинается с конца предыдущей,  $(i - 1)$ -й асимптоты и проводится до сопрягающей частоты  $\omega_i$ . Его наклон определяется сопрягающей частотой  $\omega_{i-1}$ .

Последняя асимптота представляет прямую, которая начинается с конца асимптоты, закачивающейся на последней сопрягающей частоте, и уходит в бесконечность.

**Примечание.** Асимптотическая ЛАЧХ наиболее сильно отличается от точной ЛАЧХ в точках излома (при сопрягающих частотах). Причем в точках излома, где наклон изменяется на  $\pm 20$  дБ/дек, это отличие (при условии, что соседние точки излома располагаются не очень близко) примерно равно 3 дБ/дек. В точках излома, где наклон изменяется на  $\pm 40$  дБ/дек, т.е. при сопрягающих частотах, обуславливаемых форсирующим звеном 2-го порядка или колебательным звеном, отклонение зависит от коэффициента  $\zeta$  и при малых  $\zeta$  может быть значительным.

**Пример 2.7.** Построить асимптотическую ЛАЧХ звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{10(s+1)}{s^\nu(10s+1)(0,01s^2+0,1s+1)}, \quad \nu = 0, -1.$$

**Решение.** 1)  $\nu = 0$ . Вычислим  $20 \lg k$  и сопрягающие частоты:  $20 \lg k = 20 \lg 10 = 20$ ;  $\omega_1 = \frac{1}{10} = 0,1$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $\omega_3 = \frac{1}{0,1} = 10$ .

Проводим через точку с координатами  $(1, 20)$  первую асимптоту под наклоном 0 дБ/дек (т.е. параллельно оси абсцисс) до первой сопрягающей частоты  $\omega_1 = 0,1$  (рис. 2.7, а).

Так как первая сопрягающая частота  $\omega_1$  обусловлена множителем 1-го порядка  $(10s+1)$ , расположенного в знаменателе, наклон второй асимптоты изменяется на  $-20$  дБ/дек. Поэтому вторую

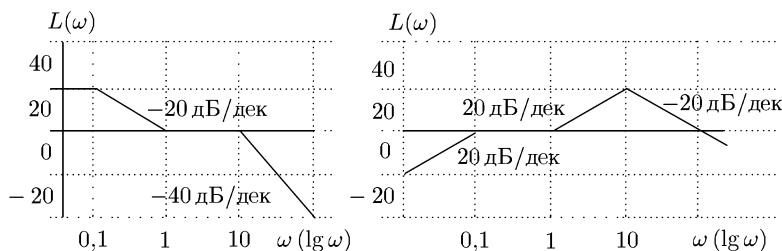


Рис. 2.7. Асимптотические ЛАЧХ (к примеру 2.7):  $\nu = 0$  (а);  $\nu = -1$  (б)

асимптоту проводим от конца первой асимптоты до сопрягающей частоты  $\omega_2 = 1$  под наклоном  $-20$  дБ/дек.

Сопрягающая частота  $\omega_2$  обусловлена элементарным множителем  $s + 1$ , расположенным в числителе. Поэтому наклон третьей асимптоты отличается от наклона второй на  $20$  дБ/дек и составляет  $0$  дБ/дек. Третью асимптоту проводим от конца второй асимптоты до сопрягающей частоты  $\omega_3 = 10$ .

Сопрягающая частота  $\omega_3$  обусловлена элементарным множителем  $0,01 s^2 + 0,1 s + 1$ , расположенным в знаменателе. Поэтому наклон последней, четвертой асимптоты отличается от наклона третьей асимптоты на  $-40$  дБ/дек и составляет  $-40$  дБ/дек. Последнюю асимптоту проводим от конца третьей асимптоты до бесконечности.

2)  $\nu = -1$ . Значения  $20 \lg k$  и сопрягающих частот те же, что и в предыдущем случае. Первую асимптоту проводим через точку с координатами  $(1, 20)$  под наклоном  $-\nu 20$  дБ/дек  $= 20$  дБ/дек до первой сопрягающей частоты (рис. 2.7, б). Все последующие асимптоты строятся так же, как и в предыдущем случае.

**Построение ЛФЧХ.** Напомним: при построении ЛФЧХ по оси ординат откладываются значения фазовой функции  $\varphi(\omega)$ , а по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, — частота в логарифмическом масштабе, т. е. наносятся деления, соответствующие значениям  $\lg \omega$ , а указываются значения  $\omega$ .

ЛФЧХ системы (звена) можно построить следующим образом: разложить числитель и знаменатель передаточной функции на элементарные множители и представить ее в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев, затем построить ЛФЧХ элементарных звеньев и в соответствии с формулой (2.37б) их геометрически сложить.

ЛФЧХ пропорционального, дифференцирующего и интегрирующего звеньев представляют собой прямые (см. табл. 2.3) и строятся легко.

Форма ЛФЧХ аperiodического и форсирующего звеньев не зависит от значений параметров и для их построения можно воспользоваться шаблоном, причем одним шаблоном, так как ЛФЧХ аperiodического звена получается из ЛФЧХ форсирующего звена зеркальным отображением относительно оси частот (рис. 2.8, а). В зависимости от постоянной времени  $T$  они перемещаются вдоль оси абсцисс: при  $\omega = 1/T$  фазовая частотная функция форсирующего звена принимает значение  $\pi/4$ , а аperiodического звена — значение  $-\pi/4$ .

Форма ЛФЧХ форсирующего звена 2-го порядка и колебательного звена зависит от коэффициента демпфирования  $\zeta$ . Положение вдоль оси частот зависит от постоянной времени  $T$ : при  $\omega = 1/T$  фазовая частотная функция форсирующего звена 2-го порядка принимает значение  $\pi/2$ , а колебательного звена — значение  $-\pi/2$ . ЛФЧХ колебательного звена получается из ЛФЧХ форсирующего звена 2-го поряд-

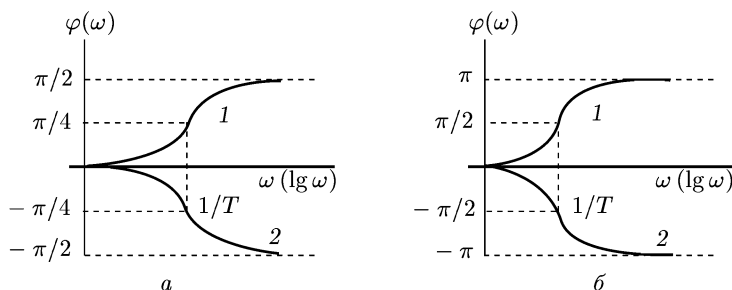


Рис. 2.8. Шаблоны ЛФЧХ элементарных звеньев: *а* — форсирующего (кривая 1) и аperiodического (2) звеньев; *б* — форсирующего 2-го порядка (1) и колебательного (2) звеньев

ка зеркальным отображением относительно оси частот (рис. 2.8, *б*), и для их построения можно воспользоваться одним шаблоном. Однако в данном случае нужны шаблоны для различных значений параметра  $\zeta$ .

Раньше при построении ЛФЧХ довольно часто использовались шаблоны. В настоящее время в связи с компьютеризацией необходимость использования шаблонов отпадает.

## 2.7. Структурные схемы и дифференциальные уравнения систем управления

*Структурной схемой* системы управления называют графическое представление ее математической модели в виде соединений звеньев, изображаемых в виде прямоугольников или кругов (для сумматора), с указанием входных и выходных переменных. Обычно внутри прямоугольника указывается условное обозначение оператора изображаемого им звена, а сам оператор в виде передаточной функции или дифференциального уравнения задается вне структурной схемы.

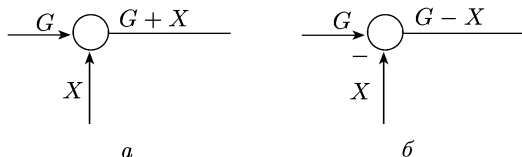


Рис. 2.9. Изображение сумматоров: *а* — суммирование; *б* — вычитание

В сумматоре входные переменные складываются (рис. 2.9, *а*). Однако если перед каким-либо входом стоит знак минус, переменная по этому входу вычитается (складывается со знаком минус) (рис. 2.9, *б*).

**2.7.1. Преобразование структурных схем.** Рассмотрим основные типы соединений и правила их преобразования. Звенья будем описывать передаточной функцией в изображениях Лапласа. При этом



для краткости записи аргументы передаточных функций и переменных будем опускать.

**Последовательное соединение.** Так называется соединение, при котором выходная переменная предшествующего звена является

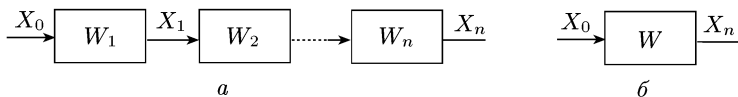


Рис. 2.10. Последовательное соединение

входной переменной последующего звена (рис. 2.10, *a*). При последовательном соединении передаточные функции отдельных звеньев перемножаются, и при преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией  $W(s) = W_1(s)W_2(s) \dots W_n(s)$  (рис. 2.10, *б*).

**Параллельное соединение.** Так называется соединение, при котором на входы всех звеньев подается одно и то же воздействие, а их выходные переменные складываются (рис. 2.11, *a*). При параллельном

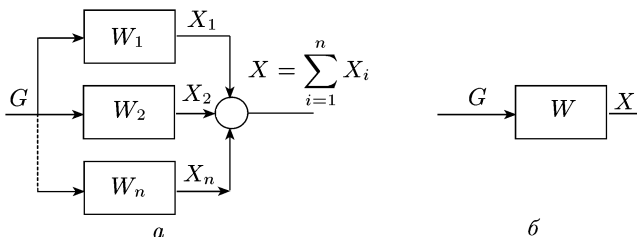


Рис. 2.11. Параллельное соединение звеньев

соединении звеньев передаточные функции складываются, и при преобразовании их можно заменить одним звеном с передаточной функцией  $W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)$  (рис. 2.11, *б*). Если выход какого-либо звена поступает на сумматор с отрицательным знаком, то передаточная функция этого звена складывается с отрицательным знаком, т.е. вычитается.

**Обратное соединение, или звено, охваченное обратной связью.** Так называется соединение двух звеньев, при котором выход звена прямой цепи подается на вход звена обратной связи, выход которого складывается с входом первого звена (рис. 2.12, *a*). Если сигнал обратной связи (выход звена обратной связи) вычитается (т.е. складывается с отрицательным знаком), то обратная связь называется *отрицательной*, в противном случае — *положительной*. Когда передаточная функция звена обратной связи равна единице ( $W_{oc}(s) = 1$ ), обратное соединение изображается так, как показано на рис. 2.12, *б*.

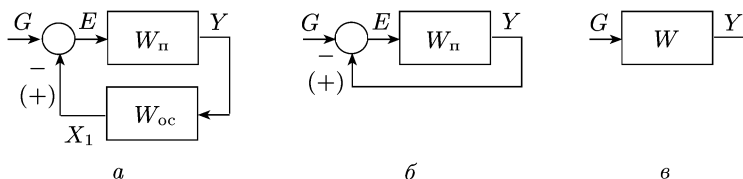


Рис. 2.12. Обратное соединение

При размыкании обратной связи перед сумматором получаем последовательное соединение, передаточная функция которого равна  $W_p(s) = W_n(s)W_{oc}(s)$ . Эта передаточная функция называется *передаточной функцией разомкнутой цепи*.

Передаточную функцию  $W_k(s) = W_n(s)W_{oc}(s)W_\Sigma(s)$ , в которой учитывается передаточная функция сумматора по входу обратной связи, будем называть *передаточной функцией контура*. Здесь  $W_\Sigma(s)$  — передаточная функция сумматора по входу обратной связи, и она равна  $-1$  (минус единице) при отрицательной обратной связи (перед соответствующим входом стоит знак минус) и  $1$  (плюс единице) при положительной обратной связи.

Передаточная функция при обратном соединении равна  $W(s) = \frac{W_n(s)}{1 - W_k(s)}$ , и при преобразовании обратное соединение заменяется одним звеном с указанной передаточной функцией (рис. 2.12, в).

Передаточные функции при последовательном, параллельном и обратном соединениях выводятся следующим образом: выписываются уравнения всех звеньев, входящих в соединение, и исключаются все промежуточные переменные.

Для примера получим передаточную функцию обратного соединения. Обратное соединение (см. рис. 2.12, а) описывается следующими уравнениями:

$$E = G + W_\Sigma X_1, \quad X = W_n E, \quad X_1 = W_{oc} X.$$

Исключим переменные  $E$  и  $X_1$ . Для этого выражение для  $X_1$  из последнего уравнения подставим в первое уравнение и полученное выражение для  $E$  подставим во второе уравнение. Тогда получим

$$X = W_n G + W_n W_\Sigma W_{oc} X,$$

или

$$(1 - W_n W_\Sigma W_{oc}) X = W_n G.$$

Отсюда передаточная функция обратного соединения есть  $W = \frac{X}{G} = \frac{W_n(s)}{1 - W_k(s)}$ , что и требовалось получить.

**Перенос сумматора.** При переносе сумматора по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится звено (рис. 2.13, а). При переносе сумматора против хода сигнала добавляется звено с пере-

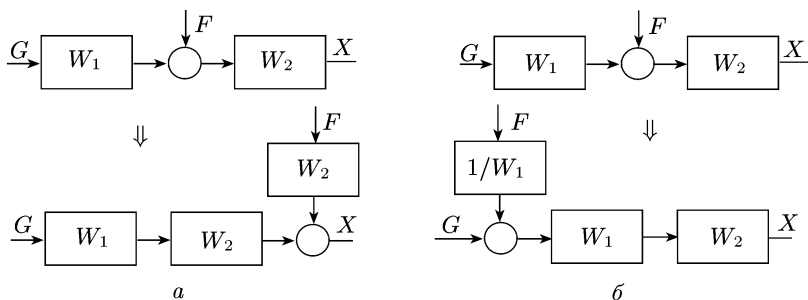


Рис. 2.13. Перенос сумматора: *a* — по ходу сигнала; *б* — против хода сигнала

даточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис. 2.13, б).

При переносе сумматора участок цепи, через который переносится сумматор, становится неэквивалентным. Поэтому при преобразовании структурных схем нельзя переносить сумматор через точку съема сигнала.

**Перенос узла.** При переносе узла по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 2.14, а). При переносе узла против хода сигнала добавляется звено с передаточной функ-

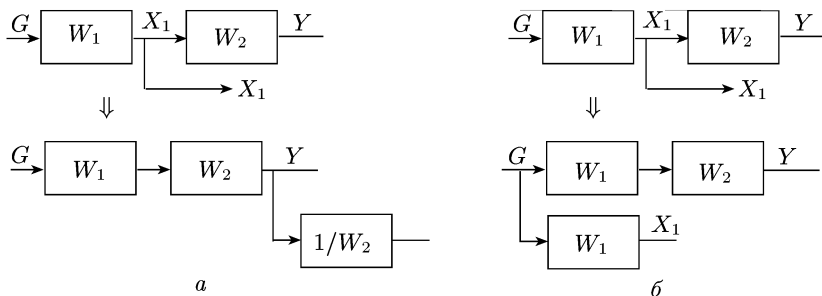


Рис. 2.14. Перенос узла: *a* — по ходу сигнала; *б* — против хода сигнала

цией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 2.14, б).

**Перестановка сумматоров.** Сумматоры можно переставлять местами и объединять. Перестановка двух сумматоров соответствует переносу одного сумматора через другой и подчиняется правилу переноса сумматора через звено.

Сумматор 1 (рис. 2.15) переносится через сумматор 2 по направлению распространения сигнала, а сумматор 2 — через сумматор 1 против направления распространения сигнала. Но так как переда-

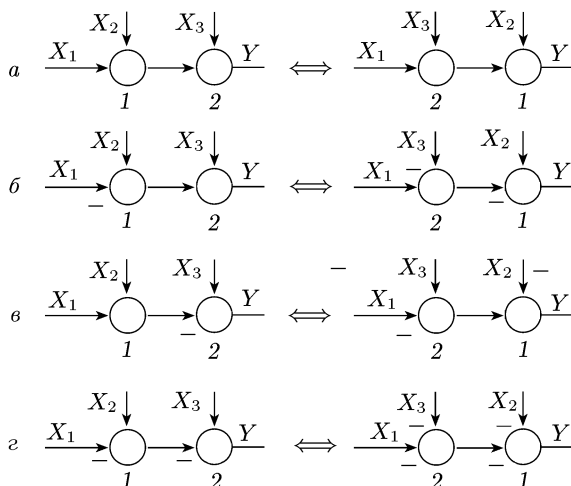


Рис. 2.15. Перестановка сумматоров

точная функция сумматора по каждому входу равна 1 или  $-1$ , то и передаточная функция звена, которое добавляется при переносе сумматора, независимо от направления переноса равна 1 или  $-1$ . Поэтому если сумматор переносится через другой сумматор вдоль входа со знаком плюс, добавляется звено с передаточной функцией 1, т.е. в действительности ничего не добавляется (см. рис. 2.15, а); если сумматор переносится вдоль входа со знаком минус, то добавляется звено с передаточной функцией  $-1$ , т.е. знак по входу, куда должно быть добавлено звено, меняется на обратный (см. рис. 2.15, б–г).

**Перестановка узлов.** Узлы можно переставлять местами и объединять (рис. 2.16).

**Примечание.** Все рассмотренные преобразования корректны, когда переменные и передаточные функции представлены в изобра-

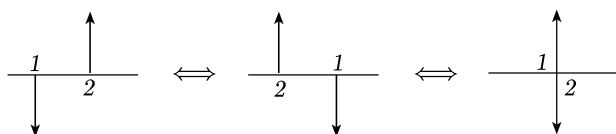


Рис. 2.16. Перестановка и объединение узлов

жениях Лапласа. В том случае, когда переменные представлены как функции времени и соответственно передаточные функции в операторной форме, преобразования, связанные с переносом сумматора через звено против хода сигнала и узла по ходу сигнала, справедливы, если существует обратный оператор звена, через которое переносится сумматор или узел, т.е. если  $\frac{1}{W_1} W_1 = W_1^{-1} W_1 = 1$  в случае переноса

сумматора (см. рис. 2.13, б) и  $W_2 \frac{1}{W_2} = W_2 W_2^{-1} = 1$  в случае переноса узла (см. рис. 2.14, а).

**2.7.2. Вычисление передаточной функции одноконтурной системы.** Замкнутая система называется *одноконтурной*, если при ее размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается цепь (схема) без параллельных и обратных соединений (рис. 2.17).

Цепь по ходу сигнала от точки приложения входной переменной до точки съема выходной переменной называется *прямой цепью*. Пря-

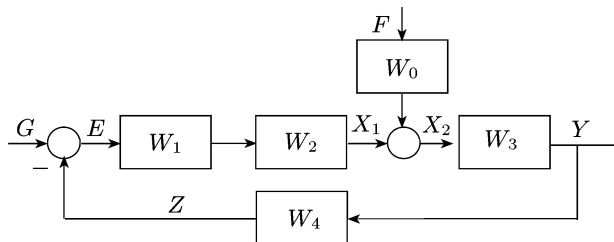


Рис. 2.17. Одноконтурная система управления

мая цепь представляет последовательное соединение звеньев. Поэтому передаточная функция прямой цепи  $W_{\text{п}}$  равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в эту цепь, включая и сумматоры.

Передаточная функция контура  $W_{\text{к}}$  равна произведению передаточных функций всех звеньев, входящих в замкнутый контур, включая сумматоры. Напомним: передаточная функция сумматора по входу со знаком плюс равна плюс единице, а по входу со знаком минус — минус единице.

Прямая цепь системы (см. рис. 2.17) относительно входа  $g$  и выхода  $y$  представляет последовательное соединение двух сумматоров и звеньев с передаточными функциями  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$ . Входы сумматоров в этой цепи имеют знак плюс. Поэтому передаточные функции сумматоров равны единице и соответственно передаточная функция прямой цепи  $W_{\text{п}} = W_1 W_2 W_3$ .

Прямая цепь рассматриваемой системы относительно входа  $f$  и выхода  $e$  представляет последовательное соединение двух сумматоров и звеньев с передаточными функциями  $W_0$ ,  $W_3$  и  $W_4$ . Вход первого сумматора имеет знак плюс, и его передаточная функция равна 1; вход второго сумматора имеет знак минус, и его передаточная функция равна  $-1$ . Поэтому в этом случае передаточная функция прямой цепи  $W_{\text{п}} = -W_0 W_3 W_4$ .

**Правило вычисления передаточной функции замкнутой одноконтурной системы.** Передаточная функция одноконтурной системы относительно внешнего воздействия (входа)  $u$  и выхода  $x$  равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу минус передаточная функция контура:

$$W_{xu} = \frac{W_{\text{п}}}{1 - W_{\text{к}}}. \quad (2.38)$$

Согласно этой формуле передаточная функция рассматриваемой системы (см. рис. 2.17) относительно входа  $g$  и выхода  $y$  равна

$$W_{yg} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4},$$

относительно входа  $f$  и выхода  $e$  равна

$$W_{ef} = \frac{-W_0 W_3 W_4}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4}.$$

Покажем справедливость формулы (2.38) на примере вывода передаточной функции  $W_{ef}$ . Так как вычисляется передаточная функция относительно внешнего воздействия  $f$ , полагаем  $g = 0$ . При этом уравнения системы можно записать в виде

$$E = -Z, \quad X_1 = W_1 W_2 E, \quad X_2 = X_1 + W_0 F, \quad Z = W_3 W_4 X_2.$$

Для получения искомой передаточной функции нужно из этой системы уравнений исключить все переменные, кроме  $E$  и  $F$ . Подставив выражение для  $X_1$  из второго уравнения в третье, а найденное выражение для  $X_2$  в четвертое, получим

$$Z = W_3 W_4 (W_1 W_2 E + W_0 F) = W_3 W_4 W_1 W_2 E + W_3 W_4 W_0 F.$$

Подставим это выражение в первое уравнение приведенной системы уравнений:

$$E = -W_3 W_4 W_1 W_2 E - W_3 W_4 W_0 F.$$

Отсюда для искомой передаточной функции находим

$$W_{ef} = \frac{E}{F} = \frac{-W_0 W_3 W_4}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4}.$$

Очевидно, эта передаточная функция совпадает с передаточной функцией, полученной выше по формуле (2.38).

**2.7.3. Вычисление передаточной функции многоконтурной системы.** Замкнутая система называется *многоконтурной*, если при ее размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается цепь, содержащая параллельное или обратное или то и другое соединение.

Многоконтурная система не имеет перекрестных связей, если любые два контура, образованные параллельными или обратными соединениями, не имеют общих участков (рис. 2.18, а) или если какие-либо два контура имеют общий участок, то один из них вложен внутрь другого (рис. 2.18, б).

Многоконтурная система имеет *перекрестные связи*, если она содержит два контура, которые имеют общий участок, и при этом ни один из них не вложен внутрь другого (рис. 2.18, в).

Порядок вычисления передаточной функции многоконтурной системы следующий:

1) путем переноса узлов и сумматоров освободиться от перекрестных связей;

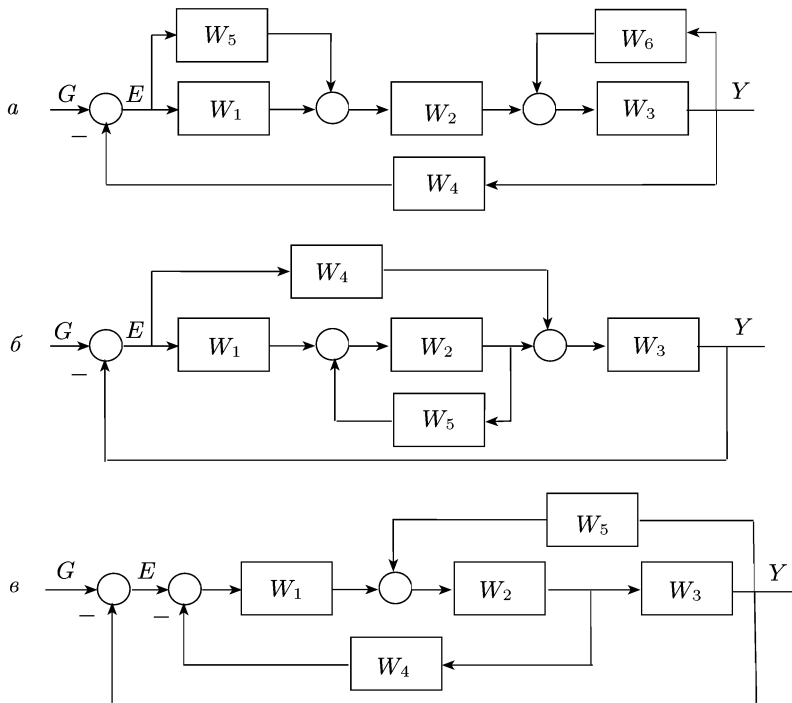


Рис. 2.18. Многоконтурные системы управления

2) используя правила преобразования параллельных и обратных соединений, преобразовать многоконтурную систему в одноконтурную;

3) по правилу вычисления передаточной функции одноконтурной системы определить искомую передаточную функцию.

При преобразовании структурной схемы нужно позаботиться о том, чтобы не исчезли точки сема переменных, относительно которых ищутся передаточные функции, или чтобы эти точки не оказались на неэквивалентном участке (т. е. не следует переносить сумматор через эти точки).

**Пример 2.8.** Определить передаточные функции  $W_{yg}$  и  $W_{yf}$  системы управления, представленной на рис. 2.19, а.

**Решение.** Сначала освободимся от перекрестных связей. Для этого перенесем сумматор 3 против хода сигнала через звено с передаточной функцией  $W_2$  и сумматор 2. То же самое сделаем с сумматором 4 (рис. 2.19, б).

Далее, заменив параллельное соединение звеном с передаточной функцией

$$W' = W_1 + W_5 \frac{1}{W_2} = \frac{W_1 W_2 + W_5}{W_2}$$

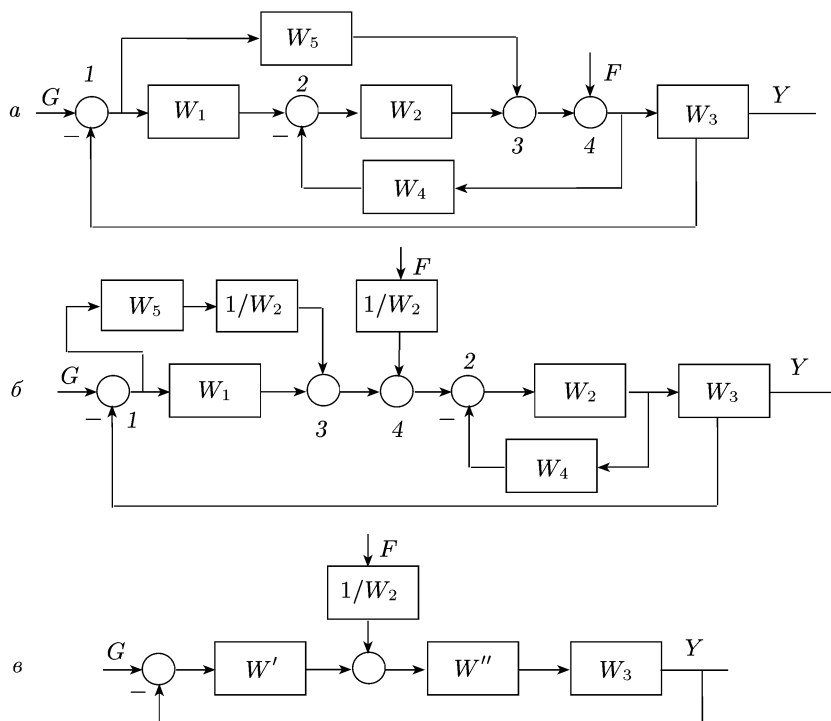


Рис. 2.19. Преобразование структурной схемы (к примеру 2.8)

и обратное соединение звеном с передаточной функцией

$$W'' = \frac{W_2}{1 + W_2 W_4},$$

получим одноконтурную систему (рис. 2.19, в). Из последней схемы по правилу вычисления передаточной функции одноконтурной системы находим

$$W_{yg} = \frac{W' W'' W_3}{1 + W' W'' W_3}, \quad W_{yf} = \frac{W'' W_3}{W_2 (1 + W' W'' W_3)}.$$

При вычислении передаточных функций многоконтурных систем с перекрестными связями во многих случаях целесообразно, а иногда и необходимо, если возможно, предварительно упростить схему, используя правила преобразования параллельных и обратных соединений, затем следовать приведенному выше порядку вычисления передаточных функций многоконтурных систем.

**Пример 2.9.** Определить передаточные функции  $W_{yg}$  и  $W_{eg}$  системы управления, представленной на рис. 2.20, а.

**Решение.** Чтобы избавиться от перекрестных связей, нужно вывести сумматор 3 из основного контура. Но для этого сначала упростим схему, заменив местное обратное и параллельное соединения экви-



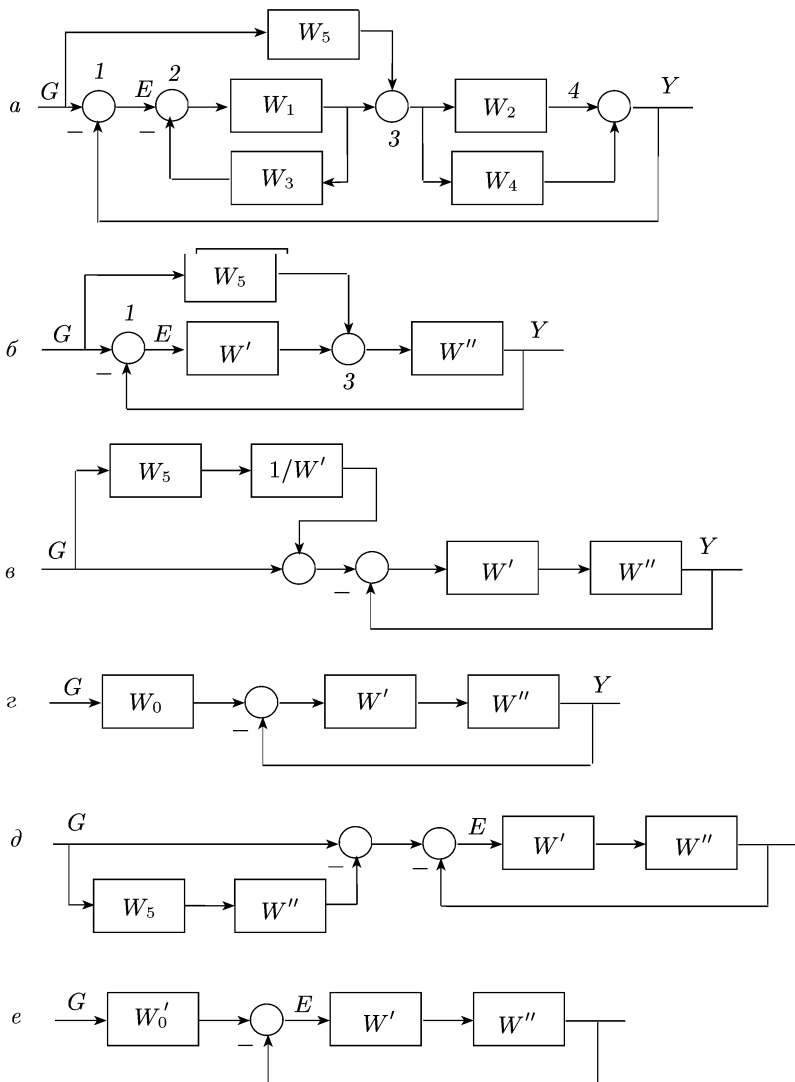


Рис. 2.20. Преобразование структурной схемы (к примеру 2.9)

валентными звеньями с передаточными функциями  $W' = \frac{W_1}{1 + W_1 W_3}$  и  $W'' = W_2 + W_4$  (рис. 2.20, б).

Для вычисления передаточной функции  $W_{yg}$  перенесем сумматор 3 против хода сигнала через звено с передаточной функцией  $W'$  и сумматор 1 (рис. 2.20, в). Затем заменим параллельное соединение звеном с передаточной функцией  $W_0 = 1 + \frac{W_5}{W'}$  (рис. 2.20, г). Далее по правилу

вычисления передаточной функции одноконтурной системы находим  $W_{yg} = \frac{W_0 W' W''}{1 + W' W''}$ .

Схема на рис. 2.20, г не имеет точки съема переменной  $e$ . Поэтому по ней нельзя определить передаточную функцию  $W_{eg}$ .

Вернемся к схеме на рис. 2.20, б. Перенесем сумматор 3 по ходу сигнала через звено с передаточной функцией  $W''$  и сумматор 1. Тогда получим схему на рис. 2.20, д. Заменяем параллельное соединение звеном с передаточной функцией  $W'_0 = 1 - W_5 W''$  (рис. 2.20, е).

Из последней схемы находим  $W_{eg} = \frac{W'_0}{1 + W' W''}$ .

## 2.8. Граф системы управления

Граф прохождения сигнала, или сигнальный граф, разработал Мейсон (S.J. Mason, 1953) для наглядного представления и описания связи между переменными устройств, описываемых системой линейных алгебраических уравнений. Так как стационарная линейная система управления в изображениях Лапласа также описывается системой линейных алгебраических уравнений, сигнальный граф стал использоваться для описания систем управления и называться *графом системы управления*.

Граф системы управления удобен тем, что он позволяет вычислять передаточные функции сложных многоконтурных систем без предварительного преобразования их структурных схем.

**2.8.1. Компоненты графа системы управления.** Граф системы управления состоит из дуг и вершин. *Дуга* на схеме изображается отрезком прямой или кривой со стрелкой, указывающей направление распространения сигнала. Дуга соответствует звену и характеризуется оператором (передаточной функцией). Дуга начинается и кончается в вершине.

*Вершина* на схеме изображается точкой или кругом и представляет переменную. Если к вершине подходит (входит в нее) одна дуга, то соответствующая ей переменная является выходной величиной дуги (рис. 2.21, а). Если же в вершину входят несколько дуг, то соответствующая ей переменная равна сумме выходных переменных этих дуг (рис. 2.21, б). Если из вершины исходят несколько дуг, то входная переменная всех этих дуг одна и та же (рис. 2.21, в).

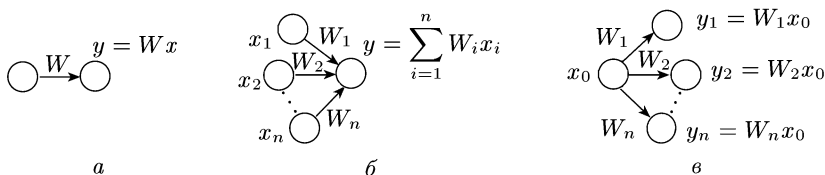


Рис. 2.21. Типы соединений дуг и вершин

Начальная вершина дуги определяет ее входную переменную. Вершина графа, имеющая только выходящие из нее дуги, определяет внешнюю переменную (внешнее воздействие) и называется *входной вершиной* графа.

На графе системы управления для обозначения дуги и ее оператора, а также вершины и соответствующей ей переменной будем использовать одну и ту же букву (с индексом или без индекса). Иначе говоря, в выражениях «дуга  $W$ » и «вершина  $x$ » буква  $W$  обозначает одновременно идентификатор дуги и ее оператор, а буква  $x$  — идентификатор вершины и соответствующую ей переменную.

Последовательность дуг  $W_1, W_2, \dots, W_n$  (не обязательно разных), для которых конечная вершина  $x_i$  дуги  $W_i$  является начальной вершиной дуги  $W_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), называется *ориентированным маршрутом* или *ормаршрутом*. Ормаршрут называется *замкнутым*, если конечная вершина дуги  $W_n$  совпадает с начальной вершиной дуги  $W_1$ , и *незамкнутым* в противном случае.

Ормаршрут, в котором нет повторяющихся дуг (т.е. все дуги разные), называется *путем* от начальной вершины  $x_0$  к конечной вершине  $x_n$ , если он не замкнут, и *контуром*, если он замкнут.

Путь и контур называют *простыми*, если все вершины  $x_0, x_1, \dots, x_n$  различны. В случае контура вершины  $x_0$  и  $x_n$  совпадают. Простой путь также называют *прямым путем*.

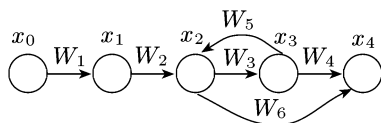


Рис. 2.22. Ормаршруты, пути, прямые пути

Граф на рис. 2.22 имеет три пути от начальной вершины  $x_0$  к конечной вершине  $x_n$ :

$$П_1: x_0 W_1 x_1 W_2 x_2 W_3 x_3 W_4 x_4,$$

$$П_2: x_0 W_1 x_1 W_2 x_2 W_6 x_4,$$

$$П_3: x_0 W_1 x_1 W_2 x_2 W_3 x_3 W_5 x_2 W_6 x_4.$$

Из них  $П_1$  и  $П_2$  являются прямыми путями.

Ормаршрутов на этом графе четыре. Помимо приведенных путей, ормаршрутом является

$$П_4: x_0 W_1 x_1 W_2 x_2 W_3 x_3 W_5 x_2 W_3 x_3 W_4 x_4.$$

Два контура называются *несоприкасающимися*, если они не имеют общих вершин. Очевидно, несоприкасающиеся контуры не могут иметь общих дуг. Три, четыре и т.д. контура называются *несоприкасающимися*, если любая пара из этих контуров является несоприкасающейся.

**2.8.2. Связь между структурной схемой и графом системы управления.** Граф системы управления можно построить по структурной схеме, и, наоборот, по графу системы управления можно построить структурную схему.

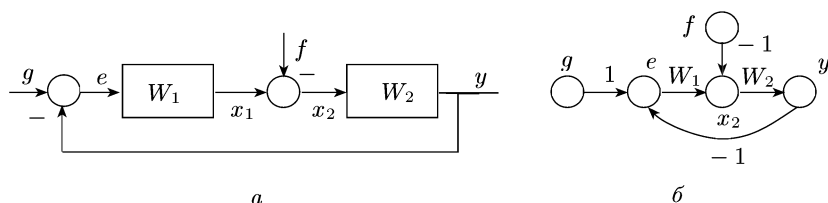


Рис. 2.23. Преобразование структурной схемы в граф системы управления:  
 а — структурная схема; б — граф системы управления

Для построения графа системы управления по ее структурной схеме нужно произвести следующее (рис. 2.23):

1) сумматор с выходной переменной  $x$  заменить вершиной  $x$ ;  
 2) звено с передаточной функцией  $W$  заменить дугой  $W$ ; если выходная переменная подается на сумматор по отрицательному входу, то указанное звено заменить дугой  $-W$  (т. е. оператор принимает обратный знак);

3) каждой переменной, в том числе переменной, соответствующей внешнему воздействию, сопоставить свою вершину; при этом внешнему воздействию соответствует входная вершина, т. е. вершина, которая не имеет входящих в нее дуг.

Если нужно изобразить выход одной из дуг, входящих в общую вершину (например, дуги  $W_1$  на рис. 2.24, а), то следует ввести допол-

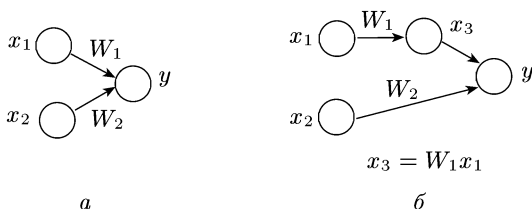


Рис. 2.24. Преобразование графа для получения дополнительных вершин  
 нительную, конечную для этой дуги вершину и соединить эту вершину с исходной вершиной дугой с единичным оператором (рис. 2.24, б).

**2.8.3. Преобразование графа системы управления. Формула Мейсона.** Параллельные дуги, т. е. дуги, имеющие общие начальные и конечные вершины, можно заменить одной дугой с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций исходных дуг (рис. 2.25, а).

Простой путь, если нет не принадлежащих ему дуг, входящих или выходящих из промежуточных вершин этого пути, можно заменить одной дугой с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций дуг этого пути (рис. 2.25, б).

Для преобразования графа и вычисления передаточной функции системы управления по ее графу можно воспользоваться теоремой

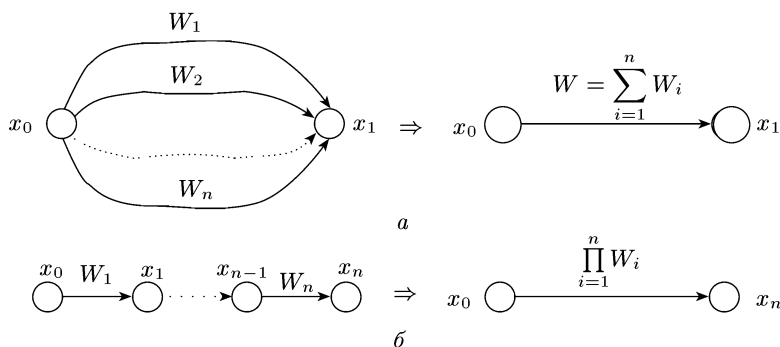


Рис. 2.25. Преобразование графов: а — параллельное соединение; б — прямой путь

(формулой) Мейсона. Но для ее формулировки необходимо познакомиться с дополнительными понятиями.

*Определителем графа* называется передаточная функция  $\Delta$ , которая определяется следующим образом:

$$\Delta = 1 - \sum_j W_{0j} + \sum_{j,k} W_{0j}W_{0k} - \sum_{j,k,l} W_{0j}W_{0k}W_{0l} + \dots \quad (2.39)$$

Здесь в первой сумме  $W_{0j}$  — передаточная функция  $j$ -го простого контура, равная произведению передаточных функций дуг, входящих в этот контур, и суммирование производится по всем простым контурам; во второй сумме  $W_{0j}W_{0k}$  произведение передаточных функций  $j$ -го и  $k$ -го простых контуров и суммирование производится по всем непересекающимся парам контуров; в третьей сумме  $W_{0j}W_{0k}W_{0l}$  — произведение передаточных функций  $j$ -го,  $k$ -го и  $l$ -го простых контуров, и суммирование производится по всем непересекающимся тройкам контуров и т. д.

Граф на рис. 2.26, а имеет пять простых контуров с передаточными функциями:

$$\begin{aligned} W_{01} &= W_{12}W_{14}, & W_{02} &= W_{11}W_{12}W_{13}W_{33}W_{34}W_{35}W_{31}, \\ W_{03} &= W_{21}W_{22}W_{33}W_{34}W_{35}W_{31}, & W_{04} &= W_{22}W_{33}W_{34}W_{36}, \\ & & W_{05} &= W_{32}W_{34}W_{35}, \end{aligned}$$

и три непересекающихся пары контуров с передаточными функциями  $W_{01}$  и  $W_{03}$ ,  $W_{01}$  и  $W_{04}$ ,  $W_{01}$  и  $W_{05}$ . Непересекающихся троек и большего числа контуров этот граф не содержит. Поэтому в соответствии с формулой (2.39) его определитель есть

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (W_{01} + W_{02} + W_{03} + W_{04} + W_{05}) + \\ &\quad + (W_{01}W_{03} + W_{01}W_{04} + W_{01}W_{05}). \end{aligned}$$

Подграф, получающийся при удалении дуг и вершин  $i$ -го прямого пути, а также всех дуг, выходящих и входящих в удаляющиеся вершины, называется *подграфом  $i$ -го прямого пути*.

Указанный граф имеет два прямых пути от вершины  $g$  к вершине  $y$  с передаточными функциями

$$W_{п1} = W_0 W_{11} W_{12} W_{13}, \quad W_{п2} = W_0 W_{21} W_{22},$$

представляющими произведение передаточных функций дуг, входящих в эти пути. Подграфы этих путей представлены на рис. 2.26, б, в.

**Формула Мейсона.** Передаточная функция системы управления относительно каких-либо входа  $x$  и выхода  $z$  определяется следующим образом:

$$W_{zx} = \frac{\sum_{i=1}^m W_{pi} \Delta_i}{\Delta}, \quad (2.40)$$

где  $\Delta$  — определитель графа системы управления;  $W_{pi}$  — передаточная функция  $i$ -го прямого пути от начальной вершины  $x$  к конечной вершине  $z$ ;  $m$  — общее число таких прямых путей;  $\Delta_i$  — определитель подграфа  $i$ -го прямого пути.

**Пример 2.10.** Определить передаточные функции  $W_{yg}$  и  $W_{eg}$  системы управления, представленной на рис. 2.26, а.

**Решение.** Найдем сначала передаточную функцию  $W_{yg}$ . Как отмечалось выше, от начальной вершины  $g$  к конечной вершине  $y$  имеются два прямых пути с передаточными функциями  $W_{п1}$  и  $W_{п2}$ . Поэтому по формуле Мейсона получим

$$W_{pi} = \frac{1}{\Delta} (W_{п1} \Delta_1 + W_{п2} \Delta_2).$$

Определитель графа  $\Delta$  и передаточные функции  $W_{п1}$  и  $W_{п2}$  были получены выше. Так что достаточно вычислить определители  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  подграфов прямых путей.

Подграф первого прямого пути (рис. 2.26, б) имеет только один простой контур с передаточной функцией  $W_{05} = W_{32} W_{34} W_{35}$ . Поэтому по формуле (2.39) получаем  $\Delta_1 = 1 - W_{05} = 1 - W_{32} W_{34} W_{35}$ .

Подграф второго прямого пути (рис. 2.26, в) имеет два простых контура с передаточными функциями:  $W_{01} = W_{12} W_{14}$  и  $W_{05} = W_{32} W_{34} W_{35}$ . Эти контуры являются непересекающимися. Поэтому определитель этого подграфа есть

$$\Delta_2 = 1 - (W_{01} + W_{05}) + W_{01} W_{05}.$$

Перейдем к определению передаточной функции  $W_{eg}$ . От начальной вершины  $g$  к конечной вершине  $e$  имеется один прямой путь с передаточной функцией  $W'_{п1} = W_0$ . Подграф этого пути (рис. 2.26, г) имеет три простых контура с передаточными функциями:  $W_{01}$ ,  $W_{04}$ ,  $W_{05}$ . Из них две пары контуров с передаточными функциями  $W_{01}$  и  $W_{04}$ ,  $W_{01}$  и  $W_{05}$  являются непересекающимися. Тройки непересекающихся контуров нет. Поэтому определитель этого подграфа

$$\Delta'_1 = 1 - (W_{01} + W_{04} + W_{05}) + (W_{01} W_{04} + W_{01} W_{05}).$$

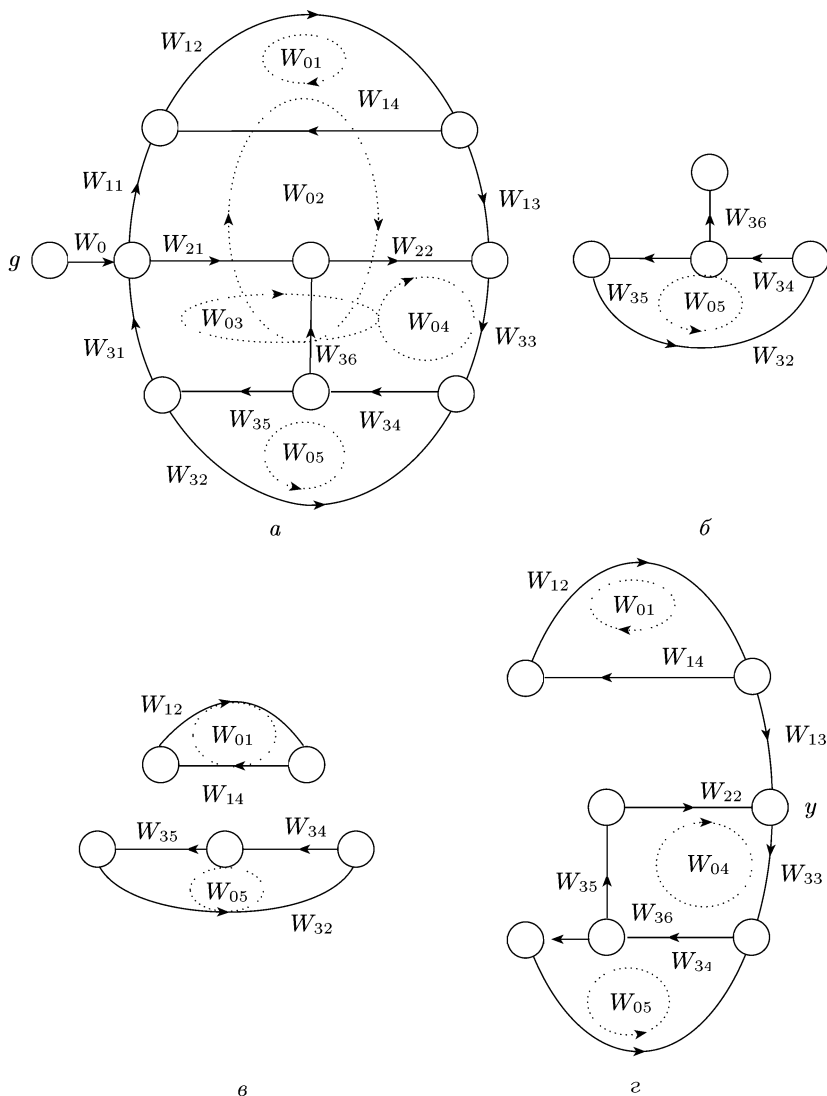


Рис. 2.26. Граф и подграфы прямых путей: а — искомый граф; б — подграф 1-го прямого пути от  $g$  к  $y$ ; в — подграф 2-го прямого пути от  $g$  к  $y$ ; г — подграф прямого пути от  $g$  к  $e$

Теперь по формуле (2.40) нетрудно записать передаточные функции  $W_{yg}$  и  $W_{eg}$ . Например, для  $W_{eg}$  имеем

$$W_{eg} = \frac{W_0 \Delta'_1}{\Delta} = \frac{W_0}{\Delta} [1 - (W_{01} + W_{04} + W_{05}) + (W_{01}W_{04} + W_{01}W_{05})].$$

## 2.9. Уравнения и передаточные функции элементов и систем управления

В этом параграфе рассмотрим уравнения и передаточные функции некоторых элементов (датчиков, усилителей, корректирующих звеньев) и систем управления.

**2.9.1. Датчики и преобразователи.** Как отмечалось в гл. 1, для получения информации, необходимой для управления, используются датчики или, как их еще называют, чувствительные элементы. Датчики служат для измерения различных физических величин: перемещения, угла поворота, температуры, напряжения, давления и т. д.

Датчик называется *идеальным*, если вырабатываемый им сигнал пропорционален измеряемой величине. Строго говоря, все реальные датчики являются неидеальными. Отличие реальных датчиков от идеальных зависит от различных факторов: диапазона изменения измеряемой величины, относительной быстроты протекания измеряемого процесса, условий, в которых происходит измерение. Однако при определенных условиях во многих случаях датчики можно считать идеальными.

**Потенциометрические датчики относительного перемещения.** Напряжение  $u_x$ , снимаемое движком потенциометра, пропорционально перемещению  $x$  движка относительно средней точки (рис. 2.27, а). Если связать движок с вращающим телом, то получим датчик углового перемещения (рис. 2.27, б). В данном случае идеальность датчика существенно зависит от входного сопротивления элемента, подключаемого на выход датчика (нагрузки  $R_H$ ).

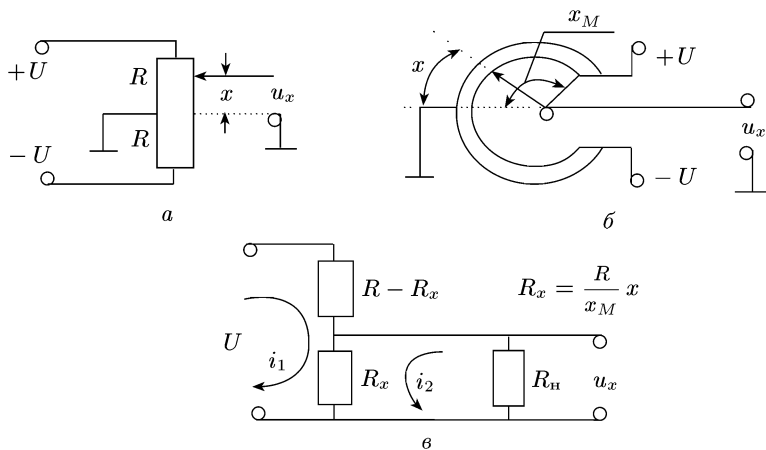


Рис. 2.27. Потенциометрические датчики перемещения: а — поступательного перемещения; б — углового перемещения; в — эквивалентная электрическая схема



Действительно, из эквивалентной электрической схемы (рис. 2.27, в) имеем

$$U = i_1(R - R_x) + R_x(i_1 - i_2),$$

$$R_x(i_2 - i_1) + R_{\text{н}}i_2 = 0, \quad u_x = R_{\text{н}}i_2,$$

где  $R_x = \frac{R}{x_{\text{М}}} x$ ;  $i_1, i_2$  — контурные токи;  $x$  — перемещение;  $x_{\text{М}}$  — максимальное перемещение.

Исключив токи  $i_1$  и  $i_2$ , получим

$$u_x = \frac{UR_x}{R(1 + R_x/R_{\text{н}} - R_x^2/RR_{\text{н}})},$$

или, подставив выражения для  $R_x$ ,

$$u_x = \frac{Ux/x_{\text{М}}}{1 + Rx/(x_{\text{М}}R_{\text{н}}) - Rx^2/(x_{\text{М}}^2R_{\text{н}})} = \frac{Ux}{x_{\text{М}} + Rx/R_{\text{н}} - Rx^2/(R_{\text{н}}x_{\text{М}})}.$$

Отсюда видно, что только при  $R_{\text{н}} \gg R$

$$u_x = k_x x, \quad k_x = U/x_{\text{М}}.$$

**Датчик угловой скорости (тахогенератор).** Тахогенератор представляет собой миниатюрный генератор постоянного тока с независимым возбуждением. Если ротор тахогенератора связать с вращающимся телом (например, валом двигателя), то вырабатываемое им напряжение  $u_{\omega}$  пропорционально угловой скорости  $\omega$  вращающегося тела:  $u_{\omega} = k_{\omega}\omega$ .

**Датчик температуры.** В качестве датчиков температуры используются термопара, терморезисторы и другие элементы. Термопара представляет собой два проводника (электрода), выполненных из различных металлов и спаянных на концах. Если концы термопары поместить в точках поля с разной температурой, то между спаями образуется ЭДС, величина которой зависит от разности температур между спаями. Концы электродов, расположенных в точке измерения температуры, называются *горячим спаем*. Горячий спай помещают в защитный кожух. Спай, покрытый защитным кожухом, нагревается до окружающей температуры не мгновенно. Поэтому термопара описывается передаточной функцией  $W = k/(Tp + 1)$  с постоянной времени  $T$ , которая колеблется от долей секунд до сотен секунд. Измерительное устройство, построенное на термопаре, можно считать идеальным (т.е. представить как пропорциональное звено), если постоянная времени объекта управления намного больше постоянной времени измерительного устройства.

**Терморезистор.** Это чувствительный элемент, принцип действия которого основан на изменении электрического сопротивления металла или сплава при изменении его температуры. Удельное сопротивление чистых металлов  $\rho = \rho_0 + \rho(t)$ , где  $\rho_0$  — константа,  $\rho(t)$  — функция от температуры, причем в определенном диапазоне изменения температуры  $\rho(t) = kt$  ( $k$  — константа).

Многие датчики являются одновременно преобразователями: они преобразуют величины одной физической природы в другие. Например, потенциометрические датчики преобразуют механическую величину (перемещение, поворот) в электрическую; термопара — термодинамическую величину в электрическую.

**2.9.2. Усилители и корректирующие элементы.** Выходные сигналы датчиков являются слабыми. Поэтому их обычно усиливают, используя различные типы усилителей: электрические (электронные, магнитные, электромашинные), гидравлические и пневматические.

Математическая модель электронных ненагруженных усилителей при изменении входного напряжения в определенном диапазоне представляет пропорциональное звено. Нагружая и охватывая его отрицательной обратной связью из различных схем, можно получить звено с передаточными функциями, необходимыми для формирования того или иного закона управления. Звенья, предназначенные для получения нужного закона управления, называются *корректирующими звеньями*. Часто в качестве корректирующих звеньев используют схемы (четыреполюсники), составленные из омического сопротивления, емкости и индуктивности и подключаемые на вход и в обратную связь усилителей.

*Передаточные функции четырехполюсников.* При вычислении передаточных функций четырехполюсников удобно воспользоваться операторными сопротивлениями (рис. 2.28): омическим оператор-

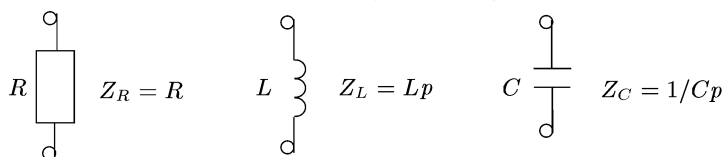


Рис. 2.28. Операторные сопротивления

ным сопротивлением  $Z_R = R$ , индуктивным операторным сопротивлением  $Z_L = Lp$  и емкостным операторным сопротивлением  $Z_C = 1/(Cp)$ . Здесь  $p$  — оператор дифференцирования.

При использовании операторных сопротивлений  $RLC$ -схемы можно рассчитывать как  $R$ -схемы, т. е. схемы, составленные из одних омических сопротивлений. Как и в случае  $R$ -схемы, при последовательном соединении операторных сопротивлений (рис. 2.29, а) операторное

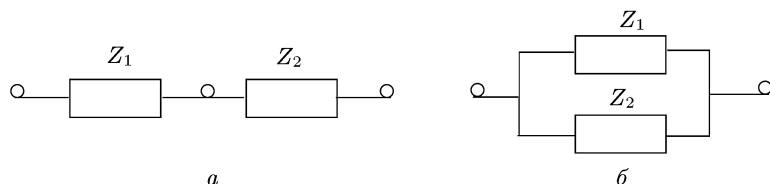
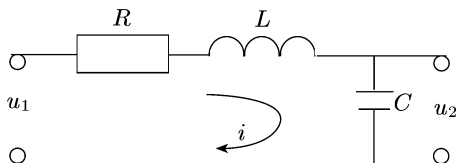


Рис. 2.29. Соединения операторных сопротивлений: а — последовательное; б — параллельное

сопротивление равно сумме:  $Z_{\text{пс}} = Z_1 + Z_2$ , а при параллельном соединении (рис. 2.29, б) проводимость равна сумме проводимостей:

$$\frac{1}{Z_{\text{пр}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \text{или} \quad Z_{\text{пр}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Получим передаточную функцию и дифференциальное уравнение  $RLC$ -цепочки (рис. 2.30). Рассматривая данный четырехполюсник

Рис. 2.30.  $RLC$ -схема

как схему, состоящую из одних сопротивлений, можем записать

$$i = \frac{u_1}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{u_1}{R + Lp + 1/(Cp)} = \frac{Cp}{LCp^2 + RCp + 1} u_1,$$

$$u_2 = Z_C i = \frac{1}{Cp} \frac{Cp}{LCp^2 + RCp + 1} u_1 = \frac{1}{T_0^2 p^2 + T_1 p + 1} u_1,$$

где  $T_0 = \sqrt{LC}$ ,  $T_1 = RC$ .

Из последнего уравнения получаем передаточную функцию

$$W = \frac{1}{T_0^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

и дифференциальное уравнение

$$T_0^2 \ddot{u}_2 + T_1 \dot{u}_2 + u_2 = u_1.$$

В табл. 2.5 приведены передаточные функции и асимптотические ЛАЧХ некоторых  $RC$ -схем.

Четырехполюсники сами по себе не являются направленными элементами. Поэтому при их последовательном соединении передаточная функция не равна произведению передаточных функций отдельных четырехполюсников.

Например, передаточная функция  $W_{\text{пс}}$  двух одинаковых последовательно соединенных четырехполюсников с передаточной функцией  $W = 1/(Tp + 1)$  (рис. 2.31, а) не равна произведению  $W \cdot W$ .

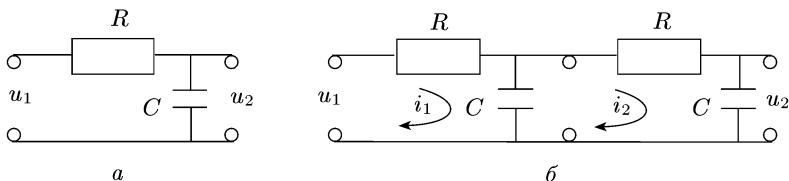
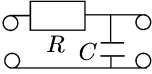
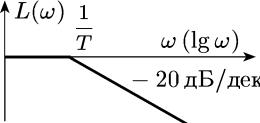
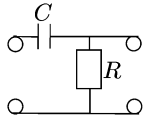
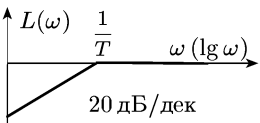
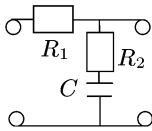
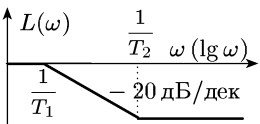
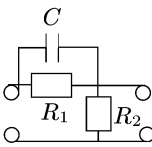
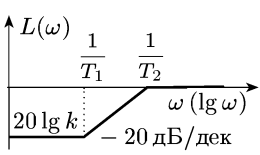
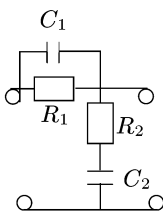
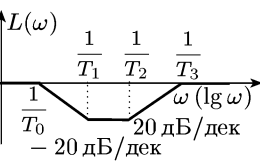


Рис. 2.31. К выводу передаточных функций двух  $RC$ -схем: а —  $RC$ -схема; б — последовательное соединение двух  $RC$ -схем

Таблица 2.5. Передаточные функции и асимптотические ЛАЧХ пассивных четырехполюстников

№	RC-схема	Передаточные функции	Асимптотические ЛАЧХ
1		$\frac{1}{Tp + 1}, \quad T = RC$	
2		$\frac{Tp}{Tp + 1}, \quad T = RC$	
3		$\frac{T_2p + 1}{T_1p + 1}, \quad T_2 = R_2C, \\ T_1 = (R_1 + R_2)C$	
4		$\frac{k(T_1p + 1)}{T_2p + 1}, \quad T_1 = R_1C, \\ T_2 = \frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2}, \\ k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	
5		$\frac{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}{(T_0p + 1)(T_3p + 1)}, \\ T_1 = R_1C, \quad T_2 = R_2C, \\ T_0 = \frac{2T_1T_2}{T - \sqrt{T^2 - 4T_1T_2}}, \\ T = T_1 + T_2 + T_3, \\ T_3 = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4T_1T_2}}{2}$	

Действительно, методом контурных токов для схемы на рис. 2.31, б можем записать

$$u_1 = Ri_1 + \frac{1}{Cp}(i_1 - i_2),$$

$$Ri_2 + \frac{1}{Cp}i_2 + \frac{1}{Cp}(i_2 - i_1) = 0, \quad u_2 = \frac{1}{Cp}i_2.$$

Исключив из этой системы уравнений контурные токи, получим

$$(T^2p^2 + 3Tp + 1)u_2 = u_1.$$

Отсюда получаем передаточную функцию  $W_{\text{пс}} = \frac{1}{T^2p^2 + 3Tp + 1}$ , в то время как произведение передаточных функций есть

$$W \cdot W = \frac{1}{(Tp + 1)^2} = \frac{1}{T^2p^2 + 2Tp + 1}.$$

В качестве корректирующих устройств в последнее время все чаще используют микропроцессоры. С их помощью можно реализовать самые сложные алгоритмы управления.

*Электромашинный усилитель (ЭМУ).* Это электрический агрегат постоянного тока, предназначенный для усиления мощности. По числу каскадов различают одно-, двух- и трехкаскадные ЭМУ. По ориентации управляющего магнитного потока второй степени двухкаскадные делятся на ЭМУ с поперечным и продольным полем. В ЭМУ с поперечным полем магнитный поток второй ступени ориентирован перпендикулярно относительно потока управления первой ступени.

Рассмотрим двухкаскадный ЭМУ с поперечным полем (рис. 2.32, а).

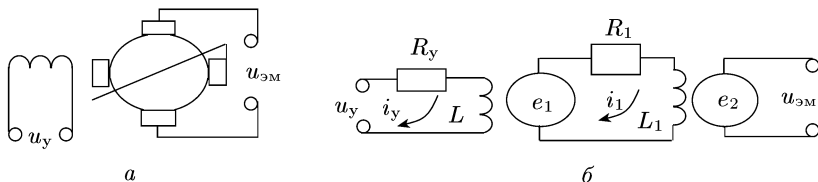


Рис. 2.32. Электромашинный усилитель: а — схема ЭМУ; б — электрическая схема ЭМУ

В режиме холостого хода (на выходе ничего не подключено) он описывается уравнениями (рис. 2.32, б)

$$L_y p i_y + R_y i_y = u_y, \quad L_1 p i_1 + R_1 i_1 = e_1.$$

ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  пропорциональны току управления  $i_y$  и току первого каскада  $i_1$  соответственно:

$$e_1 = m_1 i_y, \quad e_2 = m_2 i_1.$$

С учетом этих зависимостей имеем

$$T_y p e_1 + e_1 = \frac{m_1}{R_y} u_y, \quad T_1 p e_2 + e_2 = \frac{m_2}{R_1} e_1,$$

где  $T_y = L_y/R_y$ ,  $T_1 = L_1/R_1$ .

Исключив из приведенных уравнений  $e_1$ , получим уравнения ЭМУ холостого хода

$$(T_y p + 1)(T_1 p + 1)e_2 = k_{\text{ЭМУ}} u_y, \quad k_{\text{ЭМУ}} = \frac{m_1 m_2}{R_y R_1}.$$

При холостом ходе  $u_{\text{ЭМ}} = e_2$ . Поэтому передаточная функция ЭМУ

$$W_{\text{ЭМУ}} = \frac{k_{\text{ЭМУ}}}{(T_y p + 1)(T_1 p + 1)}.$$

### 2.9.3. Исполнительные устройства и объекты управления.

В качестве примера исполнительного устройства рассмотрим двигатель постоянного тока, а в качестве объектов управления — резервуар с жидкостью и генератор постоянного тока.

**Двигатель постоянного тока** (рис. 2.33, а). Составим уравнение двигателя без учета влияния гистерезиса, вихревых токов и других факторов, оказывающих несущественное влияние на его работу.

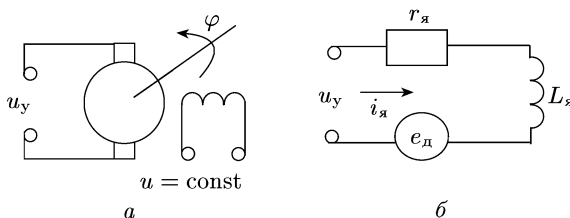


Рис. 2.33. Двигатель постоянного тока: а — схема двигателя; б — электрическая схема цепи якоря

При управлении со стороны якорной цепи напряжение возбуждения  $u$  остается постоянным. Математическое описание двигателя, являющегося электромеханическим устройством, включает уравнения электрической цепи и механической части.

На рис. 2.33, б приведена эквивалентная электрическая схема цепи якоря, где  $r_y$  и  $L_y$  — омическое и индуктивное сопротивления обмотки якоря,  $i_y$  — ток якоря,  $e_d$  — ЭДС, наводимая в обмотке якоря при его вращении. Из этой схемы имеем

$$u_y = r_y i_y + L_y p i_y + e_d.$$

ЭДС  $e_d$  пропорциональна угловой скорости  $\omega = \dot{\varphi}$  вала двигателя:  $e = c_1 \omega$ . Значение коэффициента  $c_1$  зависит от тока возбуждения и конструкции двигателя. Учитывая эту связь, приведенное выше уравнение можно представить в виде

$$(T_y p + 1)i_y + \frac{c_1}{r_y} \omega = \frac{1}{r_y} u_y, \quad (2.41)$$

где  $T_y = L_y / r_y$  — электрическая постоянная времени цепи якоря.

Уравнение механической части имеет вид

$$J p \omega = M_{\text{вр}} - M_c,$$

где  $J$  — приведенный к валу двигателя суммарный момент инерции вращающихся частей;  $M_{\text{вр}}$  — вращающий момент;  $M_c$  — момент сопротивления.

Вращающий момент пропорционален току якоря:  $M_{\text{вр}} = c_2 i_{\text{я}}$ , где значение коэффициента  $c_2$ , как и значение  $c_1$ , зависит от тока возбуждения и конструкции двигателя. С учетом этой связи уравнение моментов принимает вид

$$Jp\omega = c_2 i_{\text{я}} - M_c.$$

Исключая из этого уравнения и уравнения (2.41) ток  $i_{\text{я}}$ , получим

$$(T_{\text{я}} T_{\text{эм}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)\omega = k_{\text{д1}} u_{\text{y}} - k_{\text{д2}} (T_{\text{я}} p + 1) M_c. \quad (2.42)$$

Здесь  $T_{\text{эм}} = J r_{\text{я}} / (c_1 c_2)$  — электромеханическая постоянная времени;  $k_{\text{д1}} = c_1$  и  $k_{\text{д2}} = r_{\text{я}} / (c_1 c_2)$  — передаточные коэффициенты.

Если уравнение двигателя записать относительно угла  $\varphi$ , то в силу равенства  $\omega = p\varphi$  оно принимает вид

$$(T_{\text{я}} T_{\text{эм}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)p\varphi = k_{\text{д1}} u_{\text{y}} - k_{\text{д2}} (T_{\text{я}} p + 1) M_c. \quad (2.43)$$

Двигатель описывается двумя передаточными функциями: передаточной функцией  $W_u$  по управляющему воздействию  $u_{\text{y}}$  и передаточной функцией  $W_M$  по возмущению (моменту сопротивления)  $M_c$ . Для указанных передаточных функций имеем:

из (2.42)

$$W_u = \frac{k_{\text{д1}}}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1}, \quad W_M = -\frac{k_{\text{д2}} (T_{\text{я}} p + 1)}{T_{\text{я}} T_{\text{эм}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1},$$

если выходом является угловая скорость;

и из (2.43)

$$W_u = \frac{k_{\text{д1}}}{(T_{\text{я}} T_{\text{эм}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)p}, \quad W_M = -\frac{k_{\text{д2}} (T_{\text{я}} p + 1)}{(T_{\text{я}} T_{\text{эм}} p^2 + T_{\text{эм}} p + 1)p},$$

если выходом является угол поворота вала двигателя.

*Генератор постоянного тока* (рис. 2.34, а). На рис. 2.34, б представлена эквивалентная электрическая схема генератора, на которой:  $r_{\text{в}}$  и  $L_{\text{в}}$  — соответственно омическое и индуктивное сопротивление обмотки возбуждения;  $e_{\text{г}}$  — ЭДС генератора;  $r_{\text{я}}$  — омическое сопротивление обмотки якоря (его индуктивным сопротивлением пре-

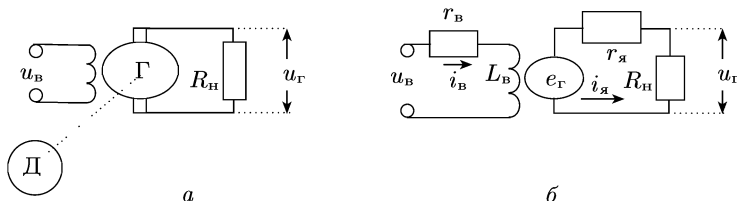


Рис. 2.34. Генератор постоянного тока: а — схема генератора; б — электрическая схема генератора

небрегаем);  $R_{\text{н}}$  — сопротивление нагрузки (нагрузка предполагается активной);  $u_{\text{г}}$  — выходное напряжение генератора. Параллельно нагрузке включают делитель  $R_{\text{д}}$  (см. рис. 1.6) для измерения выходного напряжения. Однако сопротивление  $R_{\text{д}}$  выбирают намного большим  $R_{\text{н}}$  ( $R_{\text{д}} \gg R_{\text{н}}$ ), и током, протекающим через него, можно пренебречь. Поэтому сопротивление  $R_{\text{д}}$  на схеме рис. 2.34 не показано.

Исходя из электрической схемы генератора можем записать уравнения:

для цепи возбуждения

$$u_{\text{в}} = r_{\text{в}} i_{\text{в}} + L_{\text{в}} p i_{\text{в}};$$

и для якорной цепи

$$e_{\text{г}} = (r_{\text{я}} + R_{\text{н}}) i_{\text{я}}, \quad u_{\text{г}} = R_{\text{н}} i_{\text{я}}.$$

ЭДС генератора  $e_{\text{г}}$  связана с током возбуждения  $i_{\text{в}}$  нелинейной зависимостью, которую можно линеаризовать и представить в виде

$$e_{\text{г}} = m_{\text{г}} i_{\text{в}}.$$

Учитывая эту зависимость, уравнения якорной цепи можно преобразовать к виду

$$m_{\text{г}} i_{\text{в}} = r_{\text{я}} i_{\text{я}} + u_{\text{г}}.$$

Исключив из этого уравнения и уравнения цепи возбуждения ток  $i_{\text{в}}$ , получим

$$u_{\text{г}} = \frac{k_{\text{г}}}{T_{\text{в}} p + 1} u_{\text{в}} - r_{\text{я}} i_{\text{я}}, \quad (2.44)$$

где  $k_{\text{г}} = m_{\text{г}}/r_{\text{в}}$  — передаточный коэффициент по управляющему воздействию;  $T_{\text{в}} = L_{\text{в}}/r_{\text{в}}$  — постоянная времени генератора.

Ток якоря можно рассматривать как возмущение. Поэтому из уравнения (2.44) для передаточных функций генератора по управлению  $W_u$  и по возмущению  $W_i$  имеем

$$W_u = \frac{k_{\text{г}}}{T_{\text{в}} p + 1}, \quad W_i = -r_{\text{я}}.$$

**Резервуар с жидкостью** (см. рис. 1.1, б). Изменение  $\Delta h$  уровня жидкости  $h$  в резервуаре за короткий промежуток времени  $\Delta t$  определяется соотношением

$$\Delta h = \frac{(q_{\text{п}} - q_{\text{р}})}{S} \Delta t,$$

где  $q_{\text{п}}$  — пополнение жидкости (объем жидкости, поступающий в резервуар за единицу времени);  $q_{\text{р}}$  — расход жидкости (объем жидкости, расходуемый за единицу времени);  $S$  — площадь поперечного сечения резервуара.

Здесь предполагается, что резервуар имеет цилиндрическую форму и площадь его поперечного сечения не зависит от высоты.

Разделив в приведенном соотношении обе части на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\dot{h} = \frac{1}{S} (q_{\text{п}} - q_{\text{р}}). \quad (2.45)$$



Пополнение жидкости  $q_{\text{п}}$  зависит от угла поворота  $\varphi$  входного вентиля, и эта зависимость является нелинейной:

$$q_{\text{п}} = F(\varphi). \quad (2.46)$$

Пусть при номинальном режиме

$$q_{\text{п}} = q_{\text{п}}^0, \quad q_{\text{р}} = q_{\text{р}}^0, \quad h = h^0, \quad \varphi = \varphi^0.$$

При этом уравнение статики принимает вид

$$\frac{1}{S} (q_{\text{п}}^0 - q_{\text{р}}^0) = 0, \quad q_{\text{п}}^0 = F(\varphi^0). \quad (2.47)$$

Произведем линеаризацию в уравнении (2.46):

$$\Delta q_{\text{п}} = a \Delta \varphi. \quad (2.48)$$

Здесь  $a = \left. \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi^0}$ ,  $\Delta q_{\text{п}} = q_{\text{п}} - q_{\text{п}}^0$ ,  $\Delta \varphi = \varphi - \varphi^0$ .

Перейдем от уравнения (2.45) к уравнениям в отклонениях. Тогда, учитывая (2.48), получим линеаризованное уравнение

$$\Delta \dot{h} = k_1 \Delta \varphi - k_2 \Delta q_{\text{р}},$$

где  $k_1 = a/S$ ,  $k_2 = 1/S$ .

В данном случае  $\Delta \varphi$  является управлением, а  $\Delta q_{\text{р}}$  — возмущением. Из последнего уравнения для передаточных функций объекта относительно управления  $W_{\varphi}$  и возмущения  $W_q$  находим

$$W_{\varphi} = k_1/p, \quad W_q = k_2/p.$$

**2.9.4. Уравнения и передаточные функции систем управления.** В качестве примера рассмотрим уравнения и передаточные функции системы автоматического управления (САУ) напряжения генератора постоянного тока (см. рис. 1.6), блок-схема которой при-

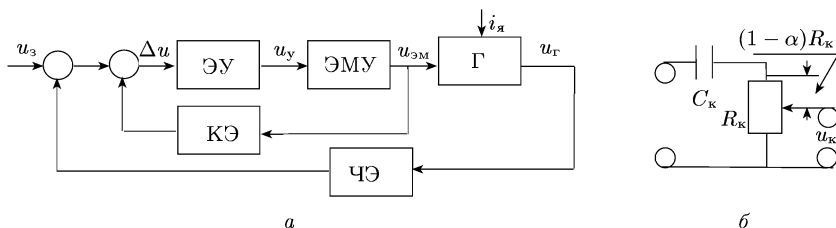


Рис. 2.35. Блок-схема САУ генератора постоянного тока: *а* — блок-схема; *б* — схема КЭ

ведена на рис. 2.35. На блок-схеме все элементы являются однонаправленными и их передаточные функции были получены выше. Выпишем их.

Передаточная функция электронного усилителя ЭУ:  $W_y = k_y$ .

Передаточная функция ЭМУ:  $W_{\text{эму}} = \frac{k_{\text{эму}}}{(T_y p + 1)(T_1 p + 1)}$ .

Корректирующий элемент КЭ представляет  $RC$ -цепочку (рис. 2.35, б), и ее передаточная функция  $W_k = \alpha T_k p / (T_k p + 1)$ . Здесь  $\alpha$  — коэффициент деления,  $T_k = R_k C_k$ .

Передаточные функции генератора:  $W_u = k_r / (T_b p + 1)$ ,  $W_i = -r_a$ .

Чувствительный элемент ЧЭ представляет делитель напряжения, и передаточная функция  $W_d = k_d$ .

Теперь можем построить структурную схему (рис. 2.36, а). Для вычисления передаточных функций преобразуем ее в одноконтурную

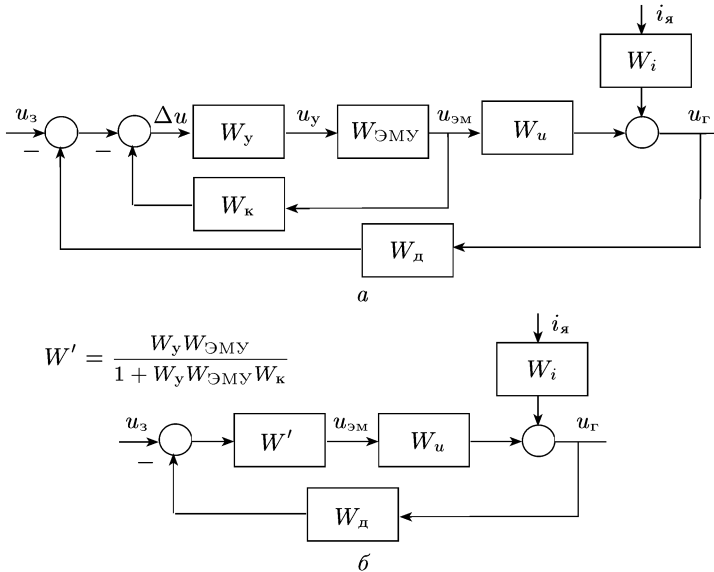


Рис. 2.36. Структурная схема САР генератора постоянного тока: а — исходная схема; б — преобразованная схема

схему (рис. 2.36, б). Передаточная функция преобразованного звена

$$W' = \frac{W_y W_{\text{ЭМУ}}}{1 + W_y W_{\text{ЭМУ}} W_k} = \frac{k'(T_k p + 1)}{d_0 p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + d_3},$$

где

$$\begin{aligned} k' &= k_y k_{\text{ЭМУ}}, & d_0 &= T_k T_y T_1, & d_1 &= T_k (T_y + T_1) + T_y T_1, \\ d_2 &= T_k + T_y + T_1 + k_y k_{\text{ЭМУ}} \alpha T_k, & d_3 &= 1. \end{aligned}$$

Из преобразованной структурной схемы для передаточных функций  $W_{u_r u_3}$  и  $W_{u_r i_a}$  относительно выхода  $u_r$  и внешних воздействий  $u_3$  и  $i_a$  имеем

$$\begin{aligned} W_{u_r u_3} &= \frac{W' W_u}{1 + W' W_u W_d} = -\frac{b_0 p + b_1}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}, \\ W_{u_r i_a} &= \frac{W_i}{1 + W' W_u W_d} = -\frac{c_0 p^4 + c_1 p^3 + c_2 p^2 + c_3 p + c_4}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4}. \end{aligned}$$

Здесь

$$b_0 = k'k_{\Gamma}T_{\kappa} = k_y k_{\Theta MY} k_{\Gamma} T_{\kappa}, \quad b_1 = k'k_{\Gamma} = k_y k_{\Theta MY} k_{\Gamma},$$

$$a_0 = d_0 T_{\text{B}} = T_{\kappa} T_y T_1 T_{\text{B}},$$

$$a_1 = d_0 + d_1 T_{\text{B}} = T_{\kappa} T_y T_1 + T_{\text{B}} [T_{\kappa} (T_y + T_1) + T_y T_1],$$

$$a_2 = d_1 + d_2 T_{\text{B}} = T_{\kappa} (T_y + T_1) + T_y T_1 + T_{\text{B}} (T_{\kappa} + T_y + T_1 + k_y k_{\Theta MY} \alpha T_{\kappa}),$$

$$a_3 = d_2 + d_3 T_{\text{B}} = T_{\kappa} + T_y + T_1 + k_y k_{\Theta MY} \alpha T_{\kappa} + T_{\text{B}},$$

$$a_4 = d_3 + k'k_{\Gamma}k_{\text{д}}T_{\kappa} = 1 + k_y k_{\Theta MY} k_{\Gamma} k_{\text{д}}T_{\kappa},$$

$$c_0 = r_i d_0 T_{\text{B}} = r_i T_{\kappa} T_y T_1 T_{\text{B}},$$

$$c_1 = r_i (d_0 + d_1 T_{\text{B}}) = r_i [T_{\kappa} T_y T_1 + T_{\text{B}} T_{\kappa} (T_y + T_1)],$$

$$c_2 = r_i (d_1 + d_2 T_{\text{B}}) = r_i [T_{\kappa} (T_y + T_1) + T_y T_1 + \\ + T_{\text{B}} (T_{\kappa} + T_y + T_1 + k_y k_{\Theta MY} \alpha T_{\kappa})],$$

$$c_3 = r_i (d_2 + d_3 T_{\text{B}}) = r_i (T_{\kappa} + T_y + T_1 + k_y k_{\Theta MY} \alpha T_{\kappa} + T_{\text{B}}),$$

$$c_4 = r_i d_3 = r_i.$$

Уравнение САР генератора постоянного тока имеет вид

$$u_{\Gamma} = W_{u_{\Gamma} u_3} u_3 + W_{u_{\Gamma} i_{\text{я}}} i_{\text{я}}.$$

Подставив выражения для передаточных функций, можем записать

$$(a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4) u_{\Gamma} = (b_0 p + b_1) u_3 + \\ + (c_0 p^4 + c_1 p^3 + c_2 p^2 + c_3 p + c_4) i_{\text{я}},$$

или

$$a_0 \frac{d^4 u_{\Gamma}}{dt^4} + a_1 \frac{d^3 u_{\Gamma}}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 u_{\Gamma}}{dt^2} + a_3 \frac{du_{\Gamma}}{dt} + a_4 u_{\Gamma} = b_0 \frac{du_3}{dt} + b_1 u_3 + \\ + c_0 \frac{d^4 i_{\text{я}}}{dt^4} + c_1 \frac{d^3 i_{\text{я}}}{dt^3} + c_2 \frac{d^2 i_{\text{я}}}{dt^2} + c_3 \frac{di_{\text{я}}}{dt} + c_4 i_{\text{я}}.$$

## Задачи

1. Даны звенья, которые описываются уравнениями:

а)  $\ddot{y} + 2\dot{y} = 10u$ ; б)  $\ddot{y} + 2\dot{y} = 5\dot{u} + 10u$ ; в)  $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 4\dot{u} + 10u$ ;

г)  $3\ddot{y} + 2\dot{y} + 6y = 5\dot{u} + 10u + 2,5v$ ; д)  $2y = 5\dot{u} + 10u + 2v$ .

Здесь  $y$  — выходная переменная,  $u$  и  $v$  — входные переменные.

Для каждого звена определить:

- 1) постоянные времени и передаточные коэффициенты;
- 2) собственные операторы и операторы воздействия;
- 3) передаточные функции.

**2.** Записать дифференциальные уравнения звеньев, заданных передаточными функциями:

$$\text{а) } W(p) = \frac{5(p+1)}{p(p^2+0,2p+4)}; \quad \text{б) } W(p) = \frac{5(p+1)}{0,2p+4};$$

$$\text{в) } W(p) = \frac{5p+2}{p^3+0,2p+1}.$$

**3.** Определить переходную и весовую функции следующих звеньев:

$$\text{а) } W(s) = \frac{5}{s}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{5}{0,1s+1}; \quad \text{в) } W(s) = \frac{5}{0,01s^2+0,1s+1};$$

$$\text{г) } W(s) = \frac{5(s+1)}{s(0,1s+1)}; \quad \text{д) } W(s) = \frac{5(s+1)}{(s+2)(s+3)^2};$$

$$\text{е) } W(s) = \frac{2(s+1)}{s(s+2)^2(s+3)^2}.$$

**4.** Определить реакцию в установившемся режиме на входное воздействие  $u = 3 \sin 0,2t$  для следующих звеньев:

$$\text{а) } 0,1\dot{y} + y = 2u; \quad \text{б) } 0,01\ddot{y} + 0,1\dot{y} + y = 2u;$$

$$\text{в) } W(s) = \frac{5(s+1)}{s(0,1s+1)}; \quad \text{г) } W(s) = \frac{5}{(s+1)(0,01s^2+0,1s+1)}.$$

**5.** Построить амплитудно-фазовую частотную характеристику для следующих звеньев:

$$\text{а) } W(s) = \frac{5}{0,1s+1}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{5}{s^2+s+1};$$

$$\text{в) } W(s) = \frac{5}{(s+1)(0,01s^2+0,1s+1)}; \quad \text{г) } W(s) = \frac{10}{s(s^2+s+1)}.$$

**6.** Выяснить, последовательным соединением каких элементарных звеньев можно представить следующие системы:

$$\text{а) } W(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2+s+1)}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{5(s^2+0,4s+1)}{(s+1)(0,25s^2+4s+1)};$$

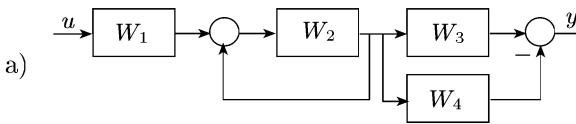
$$\text{в) } W(s) = \frac{5(s^2+0,4s+1)}{0,25s^3+4s^2+s}; \quad \text{г) } W(s) = \frac{2(s^2+0,4s)}{(s+1)(0,25s^2+0,5s+1)}.$$

**7.** Определить значения фазовой частотной функции при частотах  $\omega = 0,1$  и  $\omega = 10$  для следующих звеньев:

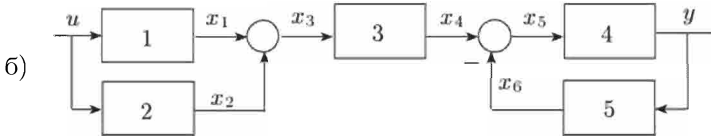
$$\text{а) } W(s) = \frac{2(s+1)}{s^2+s+1}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{2(s^2+4s+4)}{0,25s^3+0,5s^2+s};$$

$$\text{в) } W(s) = \frac{2(s-1)}{s^2-s+1}; \quad \text{г) } W(s) = \frac{5(s^2+0,4s+1)}{0,25s^3+4s^2+s}.$$

8. Определить передаточные функции следующих систем:

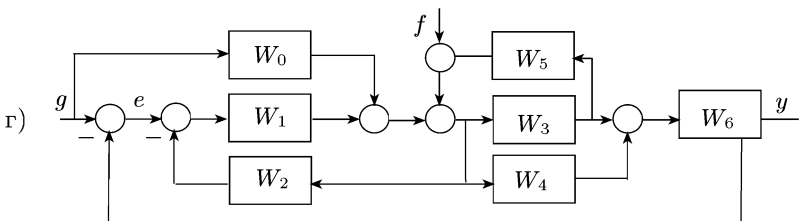
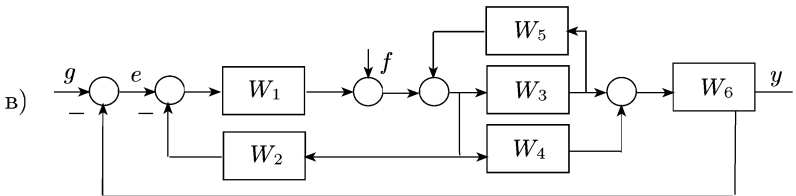
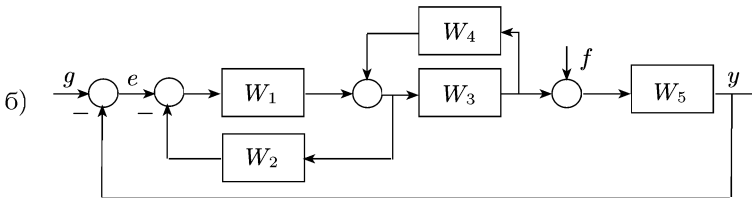
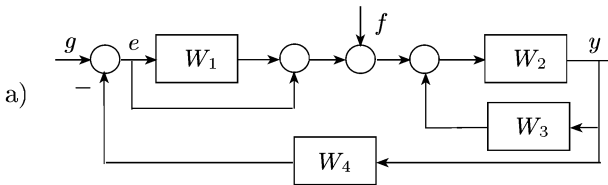


$$W_1 = 2, \quad W_2 = \frac{1}{p}, \quad W_3 = p, \quad W_4 = 5;$$



$$\dot{x}_1 = 2u, \quad x_2 = 2u, \quad \dot{x}_4 + x_4 = 4x_3, \quad \ddot{y} + \dot{y} = 5x_5, \quad x_6 = 0,2y.$$

9. Определить передаточные функции  $W_{yg}$ ,  $W_{yf}$ ,  $W_{eg}$  и  $W_{ef}$ :



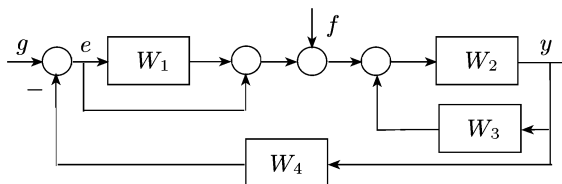
10. Построить асимптотические ЛАЧХ:

а)  $W(s) = \frac{100(s+1)}{(0,1 s^2 + s)(0,0001 s^2 + 0,01 s + 1)}$ ;

б)  $W(s) = \frac{10(0,01 s^2 + 0,1 s + 1)}{(5s+1)(0,25 s^3 + 0,5 s^2 + s)}$ ;

в)  $W(s) = \frac{5(0,1 s^2 + 1s + 10)}{(s+5)(0,25 s^3 + 0,5 s^2 + s)}$ .

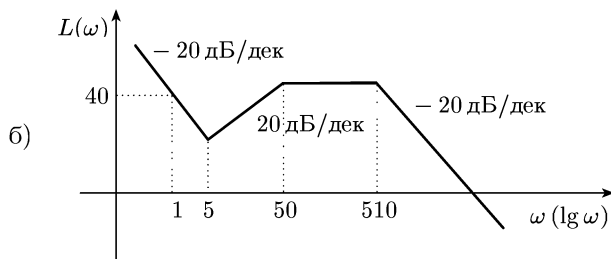
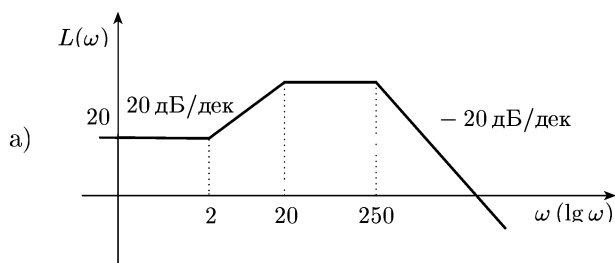
11. Записать дифференциальное уравнение, связывающее выходную переменную  $y$  с внешними воздействиями  $g$  и  $f$  для системы

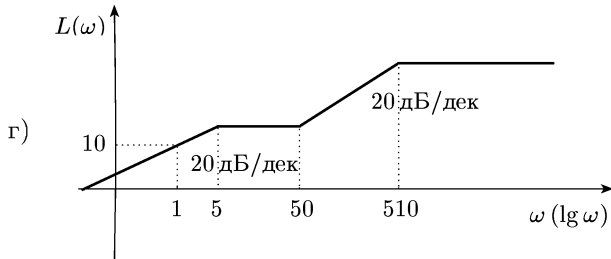
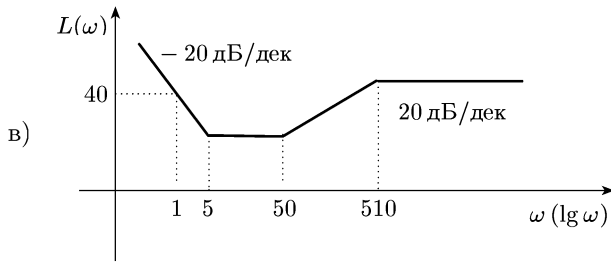


$$W_1 = 0,1 p + 0,2 \frac{1}{p}, \quad W_2 = \frac{5}{p(0,5 p + 1)}, \quad W_3 = 0,4, \quad W_4 = 0,5.$$

12. Для системы, представленной в предыдущем пункте, записать дифференциальное уравнение, связывающее ошибку  $e$  с внешними воздействиями  $g$  и  $f$ .

13. По асимптотическим ЛАЧХ звеньев записать их передаточные функции, не имеющие нулей и полюсов в правой полуплоскости:





14. Нарисуйте граф системы управления по ее структурной схеме (см. задачу 9, г) и определите передаточные функции  $W_{yg}$ ,  $W_{yf}$ ,  $W_{eg}$ ,  $W_{ef}$  по формуле Мейсона.

## Глава 3

### УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Устойчивость является одним из основных требований к системам автоматического управления (САУ). Поэтому важно уметь определять (исследовать) и соответствующим выбором структуры и параметров системы управления обеспечивать ее устойчивость.

В данной главе будут рассмотрены определение устойчивости, условия и различные критерии устойчивости.

#### 3.1 Определение и условия устойчивости

Если на систему управления действуют два внешних воздействия — задающее воздействие  $g$  и возмущение  $f$ , — то в общем случае она описывается уравнением

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_n y = b_0 \overset{(m)}{g} + b_1 \overset{(m-1)}{g} + \dots + b_m g + \\ + c_0 \overset{(l)}{f} + c_1 \overset{(l-1)}{f} + \dots + c_l f, \quad (3.1a)$$

или, в символической форме,

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) g + \\ + (c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \dots + c_l) f. \quad (3.1b)$$

Учитывая, что  $g$  и  $f$  — некоторые функции времени, выполнив необходимые операции в правой части, получим

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n p) y = \varphi_g(t) + \varphi_f(t), \quad (3.2a)$$

где  $\varphi_g(t)$  и  $\varphi_f(t)$  — функции, получаемые соответственно из первого и второго слагаемого в правой части уравнения (3.1б).

Из уравнения (3.1б) при  $g \equiv 0$  и  $f \equiv 0$  получаем однородное дифференциальное уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y = 0. \quad (3.2b)$$

**3.1.1. Определение устойчивости.** Назначением систем управления является поддержание некоторого заданного режима, называемого *невозмущенным движением*. Если на систему действует возму-



шение, то фактическое движение (которое называется *возмущенным движением*) будет отличаться от невозмущенного движения. Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым*, если после окончания действия возмущения возмущенное движение  $y(t)$  с течением времени стремится к невозмущенному движению  $y_n(t)$ :  $y(t) \rightarrow y_n(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Линейная система управления называется *устойчивой* или *асимптотически устойчивой*, если любое ее невозмущенное движение, определяемое задающим воздействием, асимптотически устойчиво.

Общее решение уравнения (3.2а) имеет вид

$$y(t) = y_v(t) + y_c(t), \quad (3.3)$$

где  $y_v(t)$  — частное решение уравнения (3.2а),  $y_c(t)$  — общее решение однородного уравнения (3.2б).

Частное решение  $y_v(t)$  можно представить (в силу принципа суперпозиции) в виде

$$y_v(t) = y_g(t) + y_f(t),$$

где  $y_g(t)$  — частное решение уравнения (3.2а) при  $\varphi_f(t) \equiv 0$ ,  $y_f(t)$  — частное решение этого уравнения при  $\varphi_g(t) \equiv 0$ .

Общее решение  $y_c(t)$  однородного уравнения описывает свободное движение системы управления (т.е. движение при отсутствии внешних воздействий), определяемое только начальными условиями. Частное решение  $y_v(t)$  описывает вынужденное движение, определяемое внешними воздействиями. В частности, при отсутствии возмущающего воздействия ( $f \equiv 0$ ) частное решение  $y_v(t) = y_g(t)$  описывает невозмущенное движение:  $y_v(t) = y_n(t)$ . Таким образом, если после начального момента  $t_0$  возмущение перестает действовать, решение (3.3) можно записать в виде

$$y(t) = y_n(t) + y_c(t) \quad (t \geq t_0).$$

Возмущение, которое действует до начального момента  $t_0$ , влияет на начальные условия, от которых зависит только свободное движение. Поэтому для того чтобы возмущенное движение было асимптотически устойчиво (т.е. для  $y(t) \rightarrow y_n(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ ), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = 0. \quad (3.4)$$

Это соотношение можно принять за математическое определение устойчивости (асимптотической устойчивости) линейных стационарных систем управления.

**3.1.2. Основное условие устойчивости.** Характеристическое уравнение системы управления, которая описывается уравнением (3.1), совпадает с характеристическим уравнением дифференциальных уравнений (3.2) и имеет вид

$$Q(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.5)$$

Левая часть этого уравнения ( $Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ ) называется *характеристическим полиномом*. Характеристический полином получается из собственного оператора системы

$$Q(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n$$

при подстановке  $p = \lambda$ :  $Q(\lambda) = Q(p)|_{p=\lambda}$ .

Если  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) — корни характеристического уравнения кратности  $k_i$  ( $k_1 + k_2 + \dots + k_q = n$ ), то общее решение однородного уравнения  $y_c$  имеет вид

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^q P_i(t)e^{\lambda_i t}, \quad (3.6)$$

где  $P_i(t) = C_1^{(i)} + C_2^{(i)}t + \dots + C_{k_i}^{(i)}t^{k_i-1}$ ;  $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, \dots, C_{k_i}^{(i)}$  — постоянные интегрирования. В частном случае, когда все корни простые,

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}.$$

По правилу Лопиталя можно показать, что  $P_i(t)e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда действительная часть корня  $\lambda_i$  отрицательна:  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ . Поэтому правая часть в (3.6) будет стремиться к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. будет выполнено (необходимое и достаточное) условие устойчивости (3.4), если

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (3.7)$$

Это условие является основным условием устойчивости. Оно непосредственно вытекает из математического определения устойчивости.

*Основное условие устойчивости. Для того чтобы система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть.*

На комплексной плоскости корни, имеющие отрицательную вещественную часть, располагаются в левой полуплоскости и поэтому называются *левыми*; корни, имеющие положительную вещественную часть, располагаются в правой полуплоскости и называются *правыми*; а корни, расположенные на мнимой оси, называются *нейтральными*.

Таким образом, основное условие устойчивости можно также сформулировать следующим образом: *для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (нули характеристического полинома) были левыми.*

Согласно основному условию устойчивости определение устойчивости сводится к исследованию корней характеристического уравнения. Однако для этого нет необходимости вычислять эти корни. Существуют различные критерии устойчивости, которые позволяют судить о том, находятся ли корни полинома в левой полуплоскости, не вычисляя их.

**3.1.3. Необходимое условие устойчивости.** Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все коэффициенты ее характеристического уравнения были строго одного знака:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0 \quad (3.8a)$$

или

$$a_0 < 0, \quad a_1 < 0, \quad \dots, \quad a_n < 0. \quad (3.8б)$$

Если условие (3.8a) или (3.8б) не выполняется, то система неустойчива; если оно выполняется, система может быть устойчивой.

Так как коэффициент  $a_0$  ( $a_0 \neq 0$ ) всегда можно сделать положительным, дальше, если не оговаривается противное, в качестве необходимого условия устойчивости будем рассматривать условие (3.8a) и критерий устойчивости будем формулировать для случая  $a_0 > 0$ .

Покажем справедливость необходимого условия устойчивости. Для этого представим характеристический полином в виде разложения

$$Q(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n), \quad (3.9)$$

где  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — корни характеристического уравнения (нули характеристического полинома).

Действительному отрицательному корню  $\lambda_k = -\alpha_k$  ( $\alpha_k > 0$ ) в разложении (3.9) соответствует множитель  $\lambda - \lambda_k = \lambda + \alpha_k$ . Пары комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью

$$\lambda_l = -\alpha_l + j\beta_l \quad \text{и} \quad \lambda_{l+1} = -\alpha_l - j\beta_l \quad (\alpha_l, \beta_l > 0)$$

соответствует множитель

$$(\lambda - \lambda_l)(\lambda - \lambda_{l+1}) = (\lambda + \alpha_l - j\beta_l)(\lambda + \alpha_l + j\beta_l) = (\lambda + \alpha_l)^2 + \beta_l^2,$$

представляющий собой полином второй степени с положительными коэффициентами. Следовательно, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то характеристический полином может быть представлен как произведение полиномов первой и второй степени с положительными коэффициентами, и соответственно все его коэффициенты при  $a_0 > 0$  будут положительными и при  $a_0 < 0$  — отрицательными.

**3.1.4. Теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.** Как отмечалось в гл. 2, практически все системы управления являются нелинейными, а линейные системы управления следует рассматривать как приближенные, линеаризованные модели нелинейных систем.

Линеаризация производится относительно заданного номинального режима  $y^0(t)$ , называемого в теории устойчивости *невозмущенным* движением. Невозмущенное движение  $y^0(t)$  нелинейной системы называется *асимптотически устойчивым*, если существует некоторая окрестность вокруг невозмущенного движения такая, что любое возмущенное движение  $y(t)$ , начинающееся в момент  $t_0$  окончания действия возмущения в этой окрестности, в дальнейшем не выходит из этой окрестности и  $y(t) \rightarrow y^0(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Возникает вопрос: можно ли судить об асимптотической устойчивости невозмущенного движения нелинейной системы на основании исследования устойчивости ее линеаризованной модели? Впервые этот вопрос был поставлен и решен А.М. Ляпуновым в 1892 г. в его диссертационной работе.

**Теоремы Ляпунова.** 1. *Если все корни характеристического уравнения линеаризованной модели являются левыми, то невозмущенное движение соответствующей нелинейной системы асимптотически устойчиво.*

2. *Если среди корней характеристического уравнения линеаризованной модели имеется правый корень, то невозмущенное движение соответствующей нелинейной системы неустойчиво.*

3. *Случай, когда среди корней характеристического уравнения линеаризованной модели имеются нейтральные корни (корни на мнимой оси), но нет правых корней, называют критическим. В критическом случае по линеаризованной модели нельзя судить об устойчивости невозмущенного движения нелинейной системы.*

## 3.2. Алгебраические критерии устойчивости

*Алгебраическими критериями устойчивости* называются такие условия, составленные из коэффициентов характеристического уравнения, при выполнении которых система устойчива, а при невыполнении — неустойчива.

При проведении исследования устойчивости с помощью алгебраических критериев следует прежде всего проверить выполнение необходимого условия устойчивости, так как его проверка не требует никаких вычислений, и в то же время при его невыполнении не надо проводить дальнейших исследований, так как становится известным, что система неустойчива.

**3.2.1. Характеристическое уравнение.** Для того чтобы исследовать устойчивость с помощью алгебраических критериев, необходимо иметь характеристический полином. Рассмотрим, как он определяется.

Как отмечалось выше, характеристический полином  $Q(\lambda)$  получается из собственного оператора  $Q(p)$  простой заменой оператора  $p$  на комплексную переменную  $\lambda$ . Поэтому достаточно найти собственный оператор.

Если дано уравнение системы управления, и оно записано в символической форме, то дифференциальный оператор при выходной переменной и будет собственным оператором. Если дана передаточная функция, то можно принять, что собственный оператор совпадает с ее знаменателем.

При исследовании замкнутой системы (рис. 3.1, а) нет необходимости находить ее передаточную функцию, если известна передаточ-

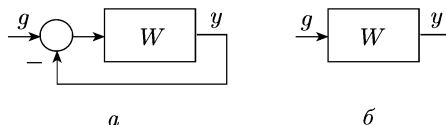


Рис. 3.1. Замкнутая (а) и разомкнутая (б) системы

ная функция  $W(p) = R(p)/S(p)$  разомкнутой системы (рис. 3.1, б). Ее собственный оператор  $Q(p)$  равен сумме полиномов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы:

$$Q(p) = R(p) + S(p).$$

**3.2.2. Критерий Гурвица.** Из коэффициентов характеристического полинома

$$Q(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

составляется определитель  $n$ -го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_5 \end{vmatrix}, \quad (3.10)$$

который строится следующим образом. На главной диагонали выписываются элементы  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Затем при движении от этих элементов вверх размещаются коэффициенты в порядке возрастания индексов, при движении вниз — в порядке убывания. Например, при построении  $i$ -го столбца, двигаясь от элемента  $a_1$  вверх, записывают коэффициенты  $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$ , двигаясь вниз, записывают коэффициенты  $a_{i-1}, a_{i-2}, \dots$ . При этом, если индекс превышает  $n$  или принимает отрицательное значение, соответствующий коэффициент принимают равным нулю.

Главные миноры определителя  $\Delta_n$

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

включая сам определитель  $\Delta_n$ , называют *определителями Гурвица*.

**Критерий Гурвица (Hurwitz, 1895).** Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы определители Гурвица, составленные из коэффициентов ее характеристического уравнения, при  $a_0 > 0$  были больше нуля:

$$a_0 > 0, \quad \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

**3.2.3. Критерий Лъенара–Шипара.** Как отмечалось выше, при исследовании устойчивости с помощью алгебраических критериев нужно прежде всего проверить необходимое условие устойчи-

вости. Если необходимое условие устойчивости выполняется, то оказывается, что для определения устойчивости, нет необходимости вычислять все определители Гурвица.

**Критерий Лъенара–Шипара** (Lienard, Chipard, 1914). При выполнении необходимого условия устойчивости ( $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_n > 0$ ) для устойчивости системы управления необходимо и достаточно, чтобы все ее определители Гурвица с четными индексами или все ее определители Гурвица с нечетными индексами были положительными:

$$\Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \dots \quad (3.11a)$$

или

$$\Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0, \quad \Delta_5 > 0, \quad \dots \quad (3.11b)$$

Для уменьшения вычислений целесообразно при нечетном  $n$  использовать условие (3.11a), а при четном  $n$  — условие (3.11b).

Здесь приведена несколько упрощенная формулировка критерия Лъенара–Шипара. При выполнении одного из условий (3.11a) или (3.11b) не все неравенства в необходимом условии устойчивости оказываются независимыми. Поэтому часть неравенств можно опустить. Но так как проверка необходимого условия устойчивости не связана с вычислением, на этом мы останавливаться не будем.

Выпишем необходимые и достаточные условия устойчивости для  $n = 1, 2, 3$ . Из критерия Лъенара и Шипара получаем:

$$n = 1 : a_0 > 0, a_1 > 0;$$

$$n = 2 : a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0;$$

$$n = 3 : a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Отсюда следует, что при  $n = 1$  и  $n = 2$  необходимое условие устойчивости является и достаточным. Однако уже при  $n = 3$  для устойчивости, кроме выполнения необходимого условия устойчивости, нужно, чтобы была положительной разность между произведениями средних и крайних коэффициентов.

**Пример 3.1.** Передаточная функция разомкнутой системы  $W(p) = \frac{k}{p^3 + 0,5 p^2 + 4p + 1}$ ,  $k = 0,5; 2$ . Исследовать устойчивость разомкнутой и замкнутой систем.

**Решение.** Характеристический полином разомкнутой системы  $\lambda^3 + 0,5 \lambda^2 + 4\lambda + 1$ . Все коэффициенты больше нуля и определитель  $\Delta_2 = 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 1 > 0$ . Поэтому разомкнутая система устойчива.

Характеристический полином замкнутой системы

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 0,5 \lambda^2 + 4\lambda + 1 + k.$$

Все коэффициенты этого полинома при обоих значениях  $k$  положительны, а определитель  $\Delta_2$  при  $k = 0,5$  равен

$$0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 1,5 = 0,5 > 0,$$

а при  $k = 2$

$$\Delta_2 = 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = -1 < 0.$$

Следовательно, замкнутая система при  $k = 0,5$  устойчива, а при  $k = 2$  неустойчива.

**Пример 3.2.** Передаточная функция разомкнутой системы  $W(p) = \frac{k}{(p^2 + p + 1)p}$ ,  $k = 0,5; 2$ . Исследовать устойчивость разомкнутой и замкнутой систем.

**Решение.** Характеристический полином разомкнутой системы  $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda$ . Его коэффициенты  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$  и  $a_3 = 0$ . Необходимое условие устойчивости не выполняется, и поэтому разомкнутая система неустойчива.

Характеристический полином замкнутой системы

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + k.$$

Все коэффициенты при обоих значениях  $k$  положительны, определитель  $\Delta_2$  при  $k = 0,5$  равен

$$\Delta_2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1,5 = 0,5 > 0,$$

а при  $k = 2$

$$\Delta_2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1 < 0.$$

Следовательно, замкнутая система при  $k = 0,5$  устойчива, а при  $k = 2$  неустойчива.

Из рассмотренных примеров следует, что разомкнутая система может быть устойчивой, а замкнутая система неустойчивой, и наоборот. Кроме того, устойчивость замкнутых систем зависит от передаточного коэффициента разомкнутой системы.

**Пример 3.3.** Исследовать устойчивость системы, у которой характеристический полином имеет вид

$$Q(\lambda) = 0,5 \lambda^4 + 3 \lambda^3 + 2 \lambda^2 + 2 \lambda + 1.$$

**Решение.** В данном случае  $n = 4$  — четное число. Поэтому целесообразно воспользоваться условием (3.116). Необходимое условие устойчивости выполняется: все коэффициенты  $a_0 = 0,5$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 2$ ,  $a_4 = 1$  положительны. В соответствии с условием (3.116) достаточно вычислить определитель  $\Delta_3$ :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0,5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Система устойчива.

**3.2.4. Критерий Рауса.** Для формулировки этого критерия составляется так называемая таблица Рауса. По числу перемен знаков элементов первого столбца этой таблицы определяется количество левых и правых корней рассматриваемого полинома.

Таблица Рауса составляется следующим образом. В первой строке выписываются коэффициенты характеристического полинома с четными индексами, а во второй строке — коэффициенты с нечетными

Таблица 3.1. Таблица Рауса ( $r_k = c_{k-2,1}/c_{k-1,1}$ )

№	1	2	3	
1	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$	
2	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23} = a_5$	
3	$c_{31} = c_{12} - r_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - r_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - r_3 c_{24}$	
4	$c_{41} = c_{22} - r_4 c_{32}$	$c_{42} = c_{23} - r_4 c_{33}$	$c_{43} = c_{24} - r_4 c_{34}$	
...	...	...	...	...
$n+1$	$c_{n+1,1} = c_{n-1,2} + r_{n+1} c_{n2}$			

индексами в порядке их возрастания (табл. 3.1). Элементы последующих строк вычисляются по формуле

$$c_{kl} = c_{k-2,l+1} - r_k c_{k-1,l+1}, \quad r_k = \frac{c_{k-2,1}}{c_{k-1,1}}, \quad k = 3, 4, \dots; \quad l = 1, 2, \dots$$

Здесь  $r_k$  равен отношению элементов предыдущих двух (т. е.  $(k-2)$ -й и  $(k-1)$ -й) строк первого столбца. Элемент  $c_{kl}$  равен разности элементов предыдущих двух (т. е.  $(k-2)$ -й и  $(k-1)$ -й) строк следующего,  $(l+1)$ -го столбца. При этом последний элемент (т. е. вычитаемое) умножается на  $r_k$ .

**Критерий Рауса** (Routh, 1877). Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы Рауса при  $a_0 > 0$  были положительны:  $c_{k1} > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ .

Таблица Рауса содержит  $n+1$  строку. Число столбцов по мере роста номера строки убывает. Элементы второго и последующих столбцов следует вычислять по мере надобности при вычислении элементов первого столбца. При этом вычисление можно прекратить, как только какой-либо элемент первого столбца принимает нулевое или отрицательное значение.

**Пример 3.4.** Исследовать устойчивость системы управления с характеристическим полиномом

$$Q(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6.$$

**Решение.** Необходимое условие устойчивости выполняется. Для определения устойчивости воспользуемся критерием Рауса. Вычислим элементы таблицы Рауса:

$$c_{11} = a_0 = 1, \quad c_{12} = a_2 = 3, \quad c_{13} = a_4 = 5,$$

$$c_{21} = a_1 = 2, \quad c_{22} = a_3 = 4, \quad c_{23} = a_5 = 6,$$

$$c_{31} = c_{12} - \frac{c_{11}}{c_{21}} c_{22} = 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 1, \quad c_{32} = c_{13} - \frac{c_{11}}{c_{21}} c_{23} = 5 - \frac{1}{2} \cdot 6 = 2,$$

$$c_{41} = c_{22} - \frac{c_{21}}{c_{31}} c_{32} = 4 - \frac{2}{1} \cdot 2 = 0.$$



Так как элемент первого столбца  $c_{41} = 0$ , система неустойчива. В данном примере  $n = 5$ , и если бы система была устойчива, пришлось бы продолжить вычисление до определения  $c_{61}$ .

### 3.3. Частотные критерии устойчивости

*Частотными критериями устойчивости* называются условия устойчивости, основанные на построении частотных характеристик и так называемой кривой Михайлова.

Выражение

$$Q(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n,$$

которое получается при подстановке  $\lambda = j\omega$  в характеристический полином, называется *характеристическим вектором*; переменная  $\omega$  называется *частотой*.

Частотные критерии получаются из принципа аргумента. Поэтому мы сначала рассмотрим этот принцип.

**3.3.1. Принцип аргумента.** Если  $l$  нулей полинома  $Q(\lambda) = a_0(\lambda)^n + a_1(\lambda)^{n-1} + \dots + a_n$  расположены в правой полуплоскости, а остальные  $n - l$  нулей — в левой полуплоскости, то при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  аргумент вектора  $Q(j\omega)$  изменяется на  $(n - 2l)\pi/2$ :

$$\Delta \arg Q(j\omega) = (n - 2l) \frac{\pi}{2}. \quad (3.12)$$

Здесь  $\Delta \arg Q(j\omega)$  — приращение аргумента  $Q(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

Доказательство. Если разложить полином  $Q(\lambda)$  на элементарные множители и сделать постановку  $\lambda = j\omega$ , то получим

$$Q(j\omega) = a_0(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n),$$

где  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — нули полинома  $Q(\lambda)$ . Из этого соотношения получим  $\arg Q(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - \lambda_i)$  и соответственно

$$\Delta \arg Q(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \psi_i.$$

Здесь  $\Delta \psi_i$  — приращение аргумента множителя  $j\omega - \lambda_i$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

Найдем  $\Delta \psi_i$  отдельно для случаев, когда  $\lambda_i$  является вещественным числом и когда  $\lambda_i$  — комплексное число.

а)  $\lambda_i = \alpha_i$ ,  $\alpha_i$  — вещественное число. В этом случае

$$\psi_i(\omega) = \arg(j\omega - \alpha_i) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha_i},$$

$$\psi_i(0) = -\operatorname{arctg} 0 = 0, \quad \psi_i(\infty) = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } \alpha_i < 0, \\ -\pi/2 & \text{при } \alpha_i > 0, \end{cases}$$

$$\Delta\psi_i = \psi_i(\infty) - \psi_i(0) = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } \alpha_i < 0, \\ -\pi/2 & \text{при } \alpha_i > 0. \end{cases}$$

Таким образом, если вещественный нуль является левым ( $\alpha_i < 0$ ), приращение  $\Delta\psi_i = \pi/2$ ; если правым ( $\alpha_i > 0$ ), приращение  $\Delta\psi_i = -\pi/2$ .

б)  $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$ ,  $\alpha_i, \beta_i$  — вещественные числа. В этом случае существует комплексно-сопряженный нуль  $\lambda_{i+1} = \alpha_i - j\beta_i$ . Приращения множителей, соответствующих этим нулям, определяются следующим образом:

$$\psi_i(\omega) = \arg(j\omega - \alpha_i - j\beta_i) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega - \beta_i}{\alpha_i},$$

$$\psi_i(0) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right), \quad \psi_i(\infty) = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } \alpha_i < 0, \\ -\pi/2 & \text{при } \alpha_i > 0, \end{cases}$$

$$\Delta\psi_i = \psi_i(\infty) - \psi_i(0) = \begin{cases} \pi/2 - \operatorname{arctg}(\beta_i/\alpha_i) & \text{при } \alpha_i < 0, \\ -\pi/2 - \operatorname{arctg}(\beta_i/\alpha_i) & \text{при } \alpha_i > 0. \end{cases}$$

Аналогично получаем

$$\Delta\psi_{i+1} = \begin{cases} \pi/2 + \operatorname{arctg}(\beta_i/\alpha_i) & \text{при } \alpha_i < 0, \\ -\pi/2 + \operatorname{arctg}(\beta_i/\alpha_i) & \text{при } \alpha_i > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем суммарное приращение  $\Delta\psi_i + \Delta\psi_{i+1} = 2 \cdot (\pi/2)$ , если комплексно-сопряженные нули левые ( $\alpha_i < 0$ ), и  $\Delta\psi_i + \Delta\psi_{i+1} = -2 \cdot (\pi/2)$ , если указанные нули правые ( $\alpha_i > 0$ ).

Так как комплексно-сопряженные числа отличаются только мнимой частью, они оба являются левыми или оба являются правыми. Поэтому и в случае комплексных нулей «в среднем» на каждый левый нуль приходится приращение  $\pi/2$ , на каждый правый корень — приращение  $-\pi/2$ .

Таким образом, если полином имеет  $l$  правых нулей и  $n - l$  левых нулей при изменении частоты от 0 до  $\infty$ , приращение есть

$$\Delta \arg Q(j\omega) = l \cdot \left( -\frac{\pi}{2} \right) + (n - l) \frac{\pi}{2} = (n - 2l) \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

**3.3.2. Критерий устойчивости Михайлова.** Годограф характеристического вектора, т. е. кривую, которую описывает характеристический вектор при изменении частоты от 0 до  $\infty$ , называют *кривой Михайлова*. При  $a_n > 0$  кривая Михайлова начинается в положительной вещественной полуоси.

Из принципа аргумента следует, что если все нули характеристического полинома левые, то приращение аргумента характеристического вектора есть  $\Delta \arg Q(j\omega) = n\pi/2$ . Отсюда вытекает следующий критерий устойчивости.

**Критерий Михайлова.** Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  ее кривая Михайлова, начинаясь с положительной вещественной полуоси,

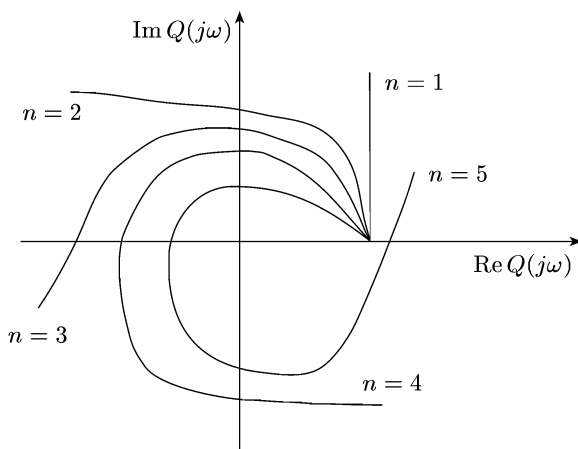


Рис. 3.2. Кривые Михайлова устойчивых систем

последовательно обходила  $n$  квадрантов в положительном направлении (против часовой стрелки).

Кривые Михайлова устойчивых систем не пересекают начало координат и уходят в бесконечность в  $n$ -м квадранте (рис. 3.2).

**3.3.3. Критерий Найквиста.** При использовании алгебраических критериев и критерия Михайлова было не важно, устойчивость каких систем — разомкнутых или замкнутых — исследуется. Критерий Найквиста используется для исследования устойчивости замкнутых систем. Он позволяет по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы судить об устойчивости замкнутой системы.

**Критерий Найквиста (Nyquist, 1932).** Для того чтобы замкнутая система с отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутой системы охватывала точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении  $l/2$  раз, где  $l$  — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Здесь предполагается, что у характеристического уравнения разомкнутой системы  $l$  корней являются правыми, а остальные  $n - l$  корней — левыми. Случай, когда имеются нейтральные корни, рассматривается отдельно.

Когда разомкнутая система устойчива,  $l = 0$ , и критерий Найквиста формулируется следующим образом.

Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы с отрицательной обратной связью необходимо

и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала точку  $(-1, j0)$ .

**Доказательство.** Пусть передаточная функция разомкнутой системы  $W(p) = R(p)/S(p)$ , где степень числителя  $m$ , а степень знаменателя  $n$ , причем  $n \geq m$ . Очевидно, степень полинома  $Q(p) = S(p) + R(p)$  равна  $n$ .

Рассмотрим функцию

$$M(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{S(j\omega) + R(j\omega)}{S(j\omega)}. \quad (3.13)$$

Здесь в правой части в числителе стоит характеристический вектор замкнутой системы, а в знаменателе — характеристический вектор разомкнутой системы. Из принципа аргумента следует, что для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta \arg [S(j\omega) + R(j\omega)] = n \frac{\pi}{2}.$$

Так как по условию характеристический полином разомкнутой системы  $S(\lambda)$  имеет  $l$  правых нулей и  $n - l$  левых нулей, то из принципа аргумента получаем

$$\Delta \arg S(j\omega) = (n - 2l) \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, если замкнутая система устойчива, приращение аргумента функции  $M(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  есть

$$\begin{aligned} \Delta M(j\omega) &= \Delta \arg [S(j\omega) + R(j\omega)] - \Delta \arg S(j\omega) = \\ &= n \frac{\pi}{2} - (n - 2l) \frac{\pi}{2} = l\pi = \frac{l}{2} (2\pi). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф функции  $M(j\omega)$  охватывал начало координат  $l/2$  раз в положительном направлении.

Из (3.13) получаем  $W(j\omega) = M(j\omega) - 1$ . Поэтому если сместить годограф  $M(j\omega)$  влево на единицу, то получится годограф частотной передаточной функции  $W(j\omega)$  разомкнутой системы. Следовательно, если годограф  $M(j\omega)$  охватывает начало координат  $l/2$  раз, то годограф  $W(j\omega)$  охватывает  $l/2$  раз точку  $(-1, j0)$ . Критерий доказан.

**Пример 3.5.** Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы есть:

$$\text{а) } W(p) = \frac{5}{p-1}; \quad \text{б) } W(p) = \frac{10}{(p+1)^3}.$$

**Решение.** Частотные передаточные функции и вещественные и мнимые частотные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{а) } W(j\omega) &= \frac{5}{j\omega - 1} = \frac{5(-j\omega - 1)}{1 + \omega^2} = U(\omega) + jV(\omega), \\ U(\omega) &= -\frac{5}{1 + \omega^2}, \quad V(\omega) = -\frac{5\omega}{1 + \omega^2}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } W(j\omega) = \frac{10}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{10[1 - 3\omega^2 - j(3\omega - \omega^3)]}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2},$$

$$U(\omega) = -\frac{10(1 - 3\omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2}, \quad V(\omega) = -\frac{10\omega(3 - \omega^2)}{(1 - 3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2}.$$

Для исследования устойчивости АФЧХ можно построить качественно (приблизительно), достаточно точно определив только точки ее пересечения с осями координат. Необходимые расчетные данные при-

Таблица 3.2. Расчетные данные (к примеру 3.5)

$W(p) = \frac{5}{p-1}$							
$\omega$	0	$0 < \omega < \infty$	$\infty$				
$U(\omega)$	-5	$< 0$	0				
$V(\omega)$	0	$< 0$	0				
$W(p) = \frac{10}{(p+1)^3}$							
$\omega$	0	$0 < \omega < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} < \omega < \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\omega > \sqrt{3}$	$\infty$
$U(\omega)$	10	$> 0$	0	$< 0$	-1,25	$< 0$	0
$V(\omega)$	0	$< 0$	-6,6	$< 0$	0	$> 0$	0

ведены в табл. 3.2. На основе этих данных построена АФЧХ (рис. 3.3).

В случае а) характеристический полином разомкнутой системы имеет один правый нуль и АФЧХ (рис. 3.3, а) 1/2 раз охватывает точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении (вектор  $AB$  описывает

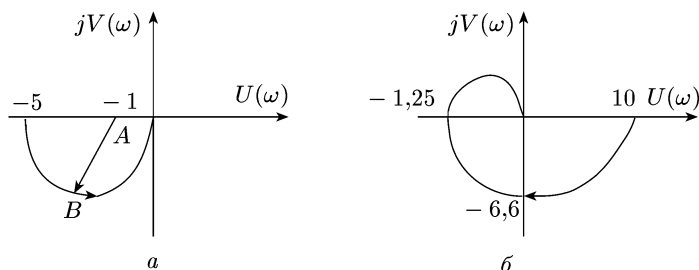


Рис. 3.3. АФЧХ разомкнутых систем (к примеру 3.5): а — годограф

$$W(j\omega) = \frac{5}{j\omega - 1}; \quad \text{б} — \text{годограф } W(j\omega) = \frac{10}{(j\omega + 1)^3}$$

угол  $\pi$ ). Следовательно, в этом случае согласно критерию Найквиста замкнутая система устойчива.

В случае б) разомкнутая система устойчива, а ее АФЧХ (рис. 3.3, б) охватывает точку  $(-1, j0)$ . Следовательно, в этом случае замкнутая система неустойчива.

**Случай наличия нулевых корней.** Если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет нулевые корни, т. е. ее передаточная функция может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{k}{p^v} W_0(p), \quad W_0(0) = 1, \quad v \geq 1,$$

то АФЧХ при  $\omega \rightarrow 0$  уходит в бесконечность (рис. 3.4). В этом случае АФЧХ дополняются дугой  $-v(\pi/2)$  окружности бесконечно большого

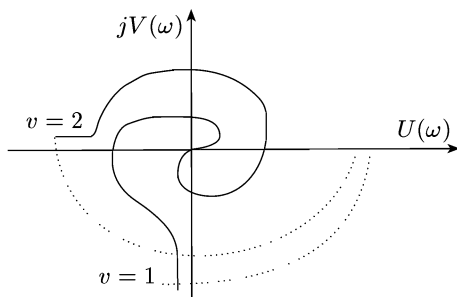


Рис. 3.4. АФЧХ при нулевых полюсах

радиуса (на рис. 3.4 пунктирные линии). И для устойчивости замкнутой системы дополненная АФЧХ должна  $l/2$  раз охватывать или при  $l = 0$  (разомкнутая система устойчива) не охватывать точку  $(-1, j0)$ .

**3.3.4. Логарифмический частотный критерий устойчивости.** В сложных случаях и для получения логарифмического частотного критерия устойчивости удобно воспользоваться другой формулировкой критерия Найквиста, которую мы сейчас и рассмотрим.

Если АФЧХ охватывает точку  $(-1, j0)$ , то она пересекает отрезок  $(-\infty, -1)$  вещественной оси. Точку пересечения АФЧХ с указанным отрезком называют *положительным переходом*, если пересечение происходит при возрастании частоты сверху вниз (т. е. в положительном направлении), и *отрицательным переходом*, если пересечение происходит снизу вверх (рис. 3.5, а). Если АФЧХ начинается или кончается на отрезке  $(-\infty, -1)$ , то говорят о  $1/2$ -переходе (см. рис. 3.3, а).

**Критерий Найквиста.** Для того чтобы замкнутая система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами была равна  $l/2$  ( $l$  — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).

При пересечении АФЧХ отрезка  $(-\infty, -1)$  (рис. 3.5, б) амплитудная частотная функция  $A(\omega) > 1$  и соответственно  $L(\omega) > 0$ , фазовая частотная функция  $\varphi(\omega) = \pm(2k+1)\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Поэтому на логарифмических частотных характеристиках (ЛЧХ) положитель-

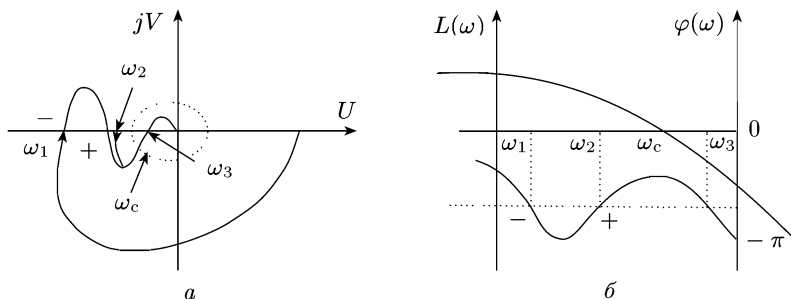


Рис. 3.5. Положительные и отрицательные переходы: а — АФЧХ; б — ЛАЧХ и ЛФЧХ

ным переходам соответствуют точки пересечения логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) прямой  $\varphi(\omega) = \pm(2k+1)\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) снизу вверх (в сторону возрастания  $\varphi(\omega)$ ), отрицательным переходам — сверху вниз при частотах, когда  $L(\omega) > 0$  (рис. 3.5, б). Поэтому на основании критерия Найквиста получаем следующий критерий устойчивости.

Логарифмический частотный критерий устойчивости. Для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами ЛФЧХ прямой  $\varphi(\omega) = \pm(2k+1)\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) при частотах, когда  $L(\omega) > 0$  (логарифмическая амплитудная частотная характеристика положительна), была равна  $l/2$  ( $l$  — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).

### 3.3.5. Устойчивость систем с чистым запаздыванием.

Системы управления прокатным станом, различные системы управления, содержащие ленточные конвейеры, обладают чистым (или транспортным) запаздыванием. Передаточная функция в изображении Лапласа звена чистого запаздывания, как отмечалось, имеет вид  $W(s) = ke^{-\tau s}$ .

Рассмотрим замкнутую систему управления, передаточная функция разомкнутой системы которой имеет вид

$$W_\tau(s) = W(s)e^{-\tau s}, \quad W(s) = R(s)/S(s), \quad (3.14)$$

где  $R(s)$ ,  $S(s)$  — полиномы степени  $m$  и  $n$  соответственно ( $m \leq n$ ). Для исследования устойчивости такой системы может быть использован критерий Найквиста, формулировка которого практически остается без изменения.

Для того чтобы замкнутая система, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид (3.14), была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы охватывала точку  $(-1, j0)$  в положительном направлении  $l/2$  раз, где  $l$  — число правых нулей характеристического полинома разомкнутой системы  $S(s)$ .

Замкнутая система без звена чистого запаздывания (в (3.14)  $\tau = 0$ ) может быть устойчивой, а с возникновением транспортного запаздывания может стать неустойчивой. В этом случае с ростом запаздывания  $\tau$  АФЧХ будет приближаться к точке  $(-1, j0)$ , и при некотором значении запаздывания  $\tau_k$  она пересечет эту точку и окажется на границе устойчивости. Значение  $\tau_k$  называют *критическим*. Рассмотрим, как можно определить критическое запаздывание.

Частотная передаточная функция, амплитудная и фазовая частотные функции разомкнутой системы имеют вид

$$W_\tau(j\omega) = W(j\omega)e^{-j\tau\omega}, \quad W(j\omega) = R(j\omega)/S(j\omega),$$

$$|W_\tau(j\omega)| = |W(j\omega)|, \quad \varphi_\tau(\omega) = \varphi(\omega) - \tau\omega,$$

где  $\varphi_\tau(\omega) = \arg W_\tau(j\omega)$ ,  $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ . Отсюда видно, что появление транспортного запаздывания не меняет модуль, а только вносит

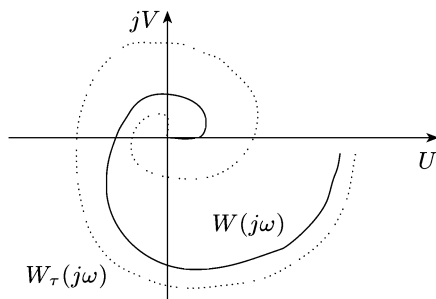


Рис. 3.6. АФЧХ системы с чистым запаздыванием

дополнительный отрицательный фазовый сдвиг  $-\omega\tau$ , что приводит к закручиванию АФЧХ (рис. 3.6).

Критическое запаздывание находится из условия

$$|W(j\omega)| = 1, \quad \varphi(\omega) - \tau_k\omega = -\pi. \quad (3.15)$$

Решив эту систему, найдем критическое запаздывание и частоту  $\omega_k$ , которая называется *критической частотой*.

**Пример 3.6.** Определить критическое запаздывание и критическую частоту для системы, у которой передаточная функция в разомкнутом состоянии  $W_\tau(s) = \frac{\sqrt{2}}{s+1} e^{-s\tau}$ .

**Решение.** Без запаздывания замкнутая система устойчива. Условие (3.15) принимает вид

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega^2 + 1}} = 1, \quad -\arctg \omega - \omega\tau = -\pi.$$

Из первого уравнения получаем  $\omega_k = 1$ . Подставив это значение частоты во второе уравнение и решив его, найдем

$$\tau_k = \pi - \arctg 1 = 3\pi/4.$$



### 3.4. Определение области устойчивости

Структура системы определяется составом элементов звеньев и связями между ними. Поэтому изменить структуру системы — это значит изменить состав ее элементов или связи между ними.

При заданной структуре какие-либо параметры могут быть не фиксированными, т. е. их можно изменять. Такие параметры называют *варьируемыми*. При наличии варьируемых параметров возникает проблема определения области устойчивости.

*Областью устойчивости* в пространстве параметров называют множество всех значений варьируемых параметров, при которых система устойчива.

Если существует область устойчивости в пространстве параметров, т. е. существуют такие значения варьируемых параметров, при которых система устойчива, то она называется *структурно устойчивой* или *структурно устойчивой относительно заданных варьируемых параметров*. В противном случае, т. е. если нет таких значений варьируемых параметров, при которых система устойчива, она называется *структурно неустойчивой* или *структурно неустойчивой относительно заданных варьируемых параметров*.

Область устойчивости можно определить с помощью алгебраических критериев устойчивости. Рассмотрим это на примере.

**Пример 3.7.** Передаточная функция разомкнутой системы  $W(p) = \frac{k}{(Tp + 1)^3}$ . Определить область устойчивости замкнутой системы на плоскости параметров  $(k, T)$ .

**Решение.** Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = T^3\lambda^3 + 3T^2\lambda^2 + 3T\lambda + 1 + k.$$

По критерию Лъенара–Шипара имеем

$$\begin{aligned} T^3 > 0, \quad 3T^2 > 0, \quad 3T > 0, \quad 1 + k > 0, \\ \Delta_2 = 3T^2 \cdot 3T - T^3 \cdot (1 + k) = T^3(8 - k) > 0. \end{aligned}$$

Очевидно, эти неравенства будут выполнены, если

$$T > 0, \quad -1 < k < 8.$$

Эта система неравенств определяет область устойчивости.

Разработан специальный метод определения области устойчивости, названный методом *D*-разбиения.

**3.4.1. Метод *D*-разбиения.** Если имеются варьируемые параметры, то корни характеристического уравнения зависят от этих параметров, и пространство параметров можно разбить на области, которым соответствует фиксированное количество левых корней. Область, которой соответствует  $k$  левых корней характеристического уравнения, обозначим  $D(k)$ . В общем случае все пространство пара-

метров можно разбить на области  $D(0), D(1), \dots, D(n)$ . Область  $D(n)$  является областью устойчивости, так как при значениях параметров из этой области  $n$  корней (т. е. все корни) являются левыми.

В частном случае какие-либо области могут отсутствовать. Если система структурно неустойчива, то будет отсутствовать область устойчивости  $D(n)$ .

Разбиение пространства параметров на все возможные области  $D(k)$  называется *D-разбиением*. Кривая, разделяющая области  $D(k)$  с различными индексами  $k$ , называется *кривой D-разбиения*. Так как во время движения в пространстве параметров при пересечении кривой *D-разбиения* происходит переход из области  $D(k')$  с числом левых корней  $k = k'$  в область  $D(k'')$  с числом левых корней  $k = k''$ , то часть левых корней становятся правыми ( $k' > k''$ ) или часть правых корней становятся левыми ( $k' < k''$ ). Но так как переход корней на комплексной плоскости из одной полуплоскости в другую происходит только через мнимую ось (включающую и бесконечно удаленную точку), то уравнение кривой *D-разбиения* получается из характеристического уравнения  $Q(\lambda) = 0$  при подстановке в него  $\lambda = j\omega$ :

$$Q(j\omega) = 0. \quad (3.16)$$

**Метод D-разбиения** (Ю.И. Неймарк, 1948). *Методом D-разбиения* называется метод выделения области устойчивости, основанный на *D-разбиении*, и он включает следующие три операции:

- 1) *D-разбиение* пространства параметров;
- 2) определение среди областей  $D(k)$  области, имеющей наибольший индекс. Эта область называется *областью-претендентом*, так как только эта область может быть областью устойчивости;
- 3) проверка, является ли область-претендент областью устойчивости. Для этого фиксируется какая-либо точка внутри области-претендента и при значении варьируемых параметров, соответствующих фиксированной точке, проверяется устойчивость системы. Если система устойчива, область-претендент является областью устойчивости.

Очевидно, если заранее известно, что система структурно устойчива, то указанную проверку устойчивости можно не выполнять.

Порядок *D-разбиения* и выделения области-претендента зависит от числа варьируемых параметров. Поэтому отдельно рассмотрим случаи одного и двух варьируемых параметров.

**Выделение области устойчивости на плоскости одного параметра.** Параметры системы могут принимать только действительные значения, и пространство параметров в случае одного варьируемого параметра представляет собой прямую, а область устойчивости — интервал. Однако при выделении интервала устойчивости методом *D-разбиения*, предполагая, что параметр принимает комплексные значения, сначала находят область устойчивости на комплексной плоскости. Затем, выделяя вещественную часть, находят интервал устойчивости.

Пусть варьируемый параметр  $\mu$  входит линейно в характеристическое уравнение  $Q(\lambda) = S(\lambda) + \mu R(\lambda) = 0$  ( $S(\lambda)$ ,  $R(\lambda)$  — полиномы от  $\lambda$ ). Для получения уравнения кривой  $D$ -разбиения сделаем подстановку  $\lambda = j\omega$  и разрешим его относительно параметра  $\mu$ , обозначив его, когда он принимает комплексное значение, через  $\bar{\mu}$  ( $\bar{\mu} = \mu + j\mu'$ ):

$$\bar{\mu} = \frac{S(j\omega)}{R(j\omega)} = u(\omega) + jv(\omega),$$

или

$$\mu = u(\omega), \quad \mu' = v(\omega). \quad (3.17)$$

Здесь  $u(\omega)$  является четной, а  $v(\omega)$  нечетной функцией от  $\omega$ . Поэтому для построения кривой  $D$ -разбиения, которая строится при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , достаточно построить кривую  $D$ -разбиения при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , а затем для получения кривой, соответствующей отрицательным  $\omega$ , зеркально отобразить ее относительно вещественной оси.

Для выделения области-претендента кривую  $D$ -разбиения штрихуют слева при движении по ней в сторону возрастания  $\omega$  (рис. 3.7).

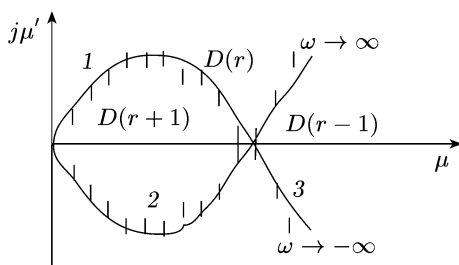


Рис. 3.7. Выделение области устойчивости на плоскости одного параметра

При пересечении кривой со стороны штриховки один левый корень становится правым, а при пересечении с обратной стороны один правый корень становится левым. Поэтому если, например, область 1 (см. рис. 3.7) принять за область  $D(r)$ , то область 2 будет областью  $D(r+1)$  и область 3 — областью  $D(r-1)$ . Следовательно, областью-претендентом будет область 2.

**Пример 3.8.** Определить область устойчивости для системы с характеристическим уравнением

$$\lambda^3 + \mu\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

**Решение.** Сделав подстановку  $\lambda = j\omega$  и разрешив уравнение относительно комплексного параметра  $\bar{\mu} = \mu + j\mu'$ , получим

$$\mu = 1/\omega^2, \quad \mu' = -\omega + 1/\omega.$$

Произведем расчеты при характерных значениях  $\omega$  (табл. 3.3). На основе этих данных построим  $D$ -кривую, нанесем на нее штриховку и произведем индексацию областей (рис. 3.8). Областью-претендентом является область  $D(r+2)$ .

Таблица 3.3. Расчетные данные (к примеру 3.8)

$\omega$	0	$0 < \omega < 1$	1	$1 < \omega < \infty$	$\infty$
$\mu$	$\infty$	$> 0$	1	$> 0$	0
$\mu'$	$\infty$	$> 0$	0	$< 0$	$-\infty$

Как легко проверить, система при  $\mu = 2$  и  $\mu' = 0$  (точка внутри этой области) устойчива. Следовательно, область  $D(r + 2)$  являет-

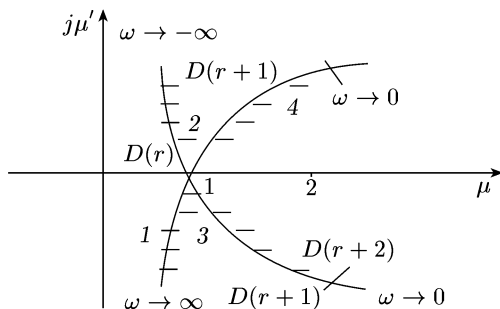


Рис. 3.8. Определение области устойчивости (к примеру 3.8)

ся областью устойчивости на комплексной плоскости, и множеством значений параметра, при котором система устойчива, является полуинтервал  $\mu > 1$ .

**Выделение области устойчивости на плоскости двух параметров.** Пусть характеристическое уравнение имеет вид

$$\mu S(\lambda) + \eta R(\lambda) + T(\lambda) = 0,$$

где  $S(\lambda)$ ,  $R(\lambda)$ ,  $T(\lambda)$  — полиномы от  $\lambda$ ;  $\mu$ ,  $\eta$  — вещественные параметры. Подставив  $\lambda = j\omega$  и обозначив через  $S_1(\omega)$ ,  $R_1(\omega)$  и  $T_1(\omega)$  вещественные части, а через  $S_2(\omega)$ ,  $R_2(\omega)$  и  $T_2(\omega)$  мнимые части  $S(j\omega)$ ,  $R(j\omega)$  и  $T(j\omega)$  соответственно, получим

$$\mu [S_1(\omega) + jS_2(\omega)] + \eta [R_1(\omega) + jR_2(\omega)] + T_1(\omega) + jT_2(\omega) = 0.$$

Приравняв отдельно вещественную и мнимую части нулю:

$$\mu S_1(\omega) + \eta R_1(\omega) + T_1(\omega) = 0,$$

$$\mu S_2(\omega) + \eta R_2(\omega) + T_2(\omega) = 0.$$

Решив эту систему, получим

$$\mu = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \eta = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (3.18)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_1(\omega) & R_1(\omega) \\ S_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix} = S_1(\omega)R_2(\omega) - R_1(\omega)S_2(\omega),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -T_1(\omega) & R_1(\omega) \\ -T_2(\omega) & R_2(\omega) \end{vmatrix} = -T_1(\omega)R_2(\omega) + T_2(\omega)R_1(\omega),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} S_1(\omega) & -T_1(\omega) \\ S_2(\omega) & -T_2(\omega) \end{vmatrix} = -S_1(\omega)T_2(\omega) + S_2(\omega)T_1(\omega).$$

Так как  $S_1(\omega)$ ,  $R_1(\omega)$  и  $T_1(\omega)$  являются четными функциями, а  $S_2(\omega)$ ,  $R_2(\omega)$  и  $T_2(\omega)$  — нечетными функциями, то  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  как разности произведений четной функции и нечетной функции являются нечетными функциями.

Функции (3.18) как отношения нечетных функций будут четными функциями. Поэтому кривую  $D$ -разбиения, построенную с помощью этих функций, будем обходить дважды: при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до 0 в одном направлении и при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  в обратном направлении.

При построении кривой  $D$ -разбиения возможны следующие три случая:

1)  $\Delta \neq 0$ . В этом случае уравнения (3.18) определяют по одному значению  $\mu$  и  $\eta$  для каждого значения  $\omega$ , и, изменяя  $\omega$ , по точкам можно построить кривую  $D$ -разбиения;

2)  $\Delta = 0$ ,  $\Delta_1 \neq 0$ ,  $\Delta_2 \neq 0$ . Частоте, удовлетворяющей этому условию, не соответствуют никакие значения параметров, и такую частоту можно не рассматривать;

3)  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ . При частоте, удовлетворяющей этому условию, одно из уравнений (3.18) является следствием другого, и эти уравнения определяют прямую, которая называется *особой*.

Если коэффициент при старшей степени и свободный член характеристического уравнения зависят от параметров, то, приравняв их нулю, получим особые прямые, отвечающие  $\omega = \infty$  и  $\omega = 0$  соответственно.

Штриховка на кривую  $D$ -разбиения наносится следующим образом. При движении в сторону возрастания  $\omega$  штриховка наносится слева при  $\Delta > 0$  и справа при  $\Delta < 0$ . И так как кривую  $D$ -разбиения проходим дважды при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $\infty$  (в одном направлении при отрицательных и в обратном направлении при положительных  $\omega$ ) и знак функции  $\Delta$  в силу ее нечетности при изменении направления движения меняется, на нее наносится двойная штриховка. На особые прямые, соответствующие  $\omega = \pm\infty$  и  $\omega = 0$ , наносится одинарная штриховка. На особые прямые, соответствующие ненулевой конечной частоте  $\omega_k$  ( $0 < \omega_k < \infty$ ), такой, что знак  $\Delta$  при переходе через эту частоту меняется, наносится двойная штриховка. Штриховки на особые прямые наносятся так, чтобы вблизи точки сопряжения особой прямой и кривой (там, где  $\Delta$  меняет знак) заштрихованные и незаштрихованные стороны были направлены друг к другу (рис. 3.9, а–в).

Особые прямые, соответствующие конечной частоте, при переходе которой определитель  $\Delta$  не меняет знака, не штрихуются (рис. 3.9, г). Такие особые прямые можно исключить из рассмотрения.

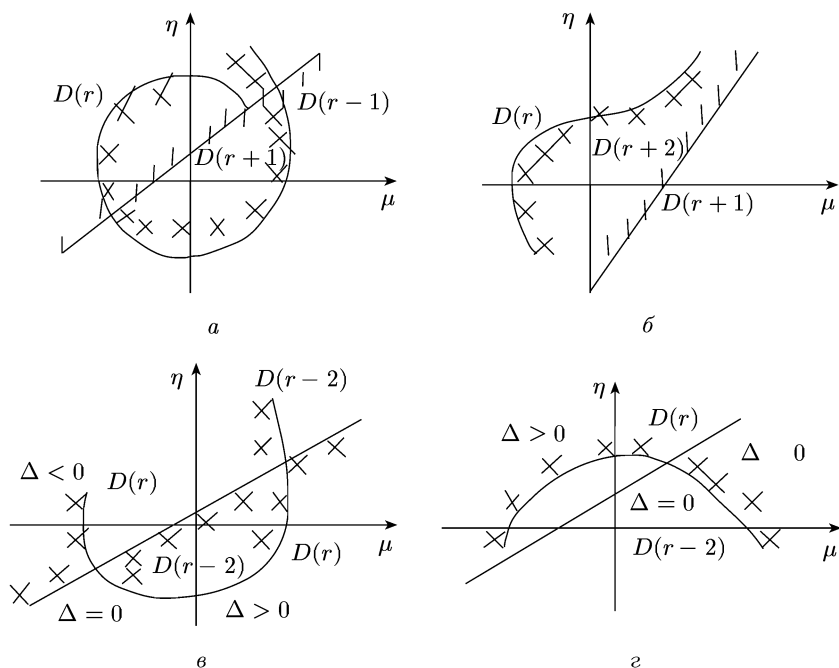


Рис. 3.9. Штриховка особых прямых: *а* —  $\omega = 0$ ; *б* —  $\omega = \pm\infty$ ; *в* —  $\omega = \omega_k$ ; *г* —  $\omega = \omega_k$

При переходе через границу с двумя штриховками два левых корня становятся правыми, если переход осуществляется против штриховки, и два правых корня становятся левыми, если переход осуществляется в сторону штриховки.

**Пример 3.9.** Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \mu\lambda + \eta = 0.$$

Определить область устойчивости на плоскости параметров.

**Решение.** При подстановке  $\lambda = j\omega$  уравнение принимает вид

$$\omega^4 - j\omega^3 - \omega^2 + \mu j\omega + \eta = 0.$$

Приравняв нулю вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} 0 \cdot \mu + \eta + \omega^4 - \omega^2 &= 0, \\ \omega \cdot \mu + 0 \cdot \eta - \omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{vmatrix} = -\omega, & \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -\omega^4 + \omega^2 & 1 \\ \omega^3 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^3, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 0 & -\omega^4 + \omega^2 \\ \omega & \omega^3 \end{vmatrix} = \omega^5 - \omega^3, \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \omega^2, \quad \eta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \omega^2(1 - \omega^2). \quad (3.19)$$

Исключив из системы уравнений (3.19)  $\omega^2$ , получим уравнение  $D$ -кривой, которое можно представить в виде

$$\eta = \mu(1 - \mu) = \frac{1}{4} - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Это уравнение параболы. Она пересекает ось абсцисс при  $\mu = \mu_1 = 0$  и  $\mu = \mu_2 = 1$  и достигает максимума  $\eta = 1/4$  при  $\mu = 1/2$ .

Из (3.19) следует, что  $\mu$  принимает только неотрицательные значения. Поэтому кривая  $D$ -разбиения имеет вид, показанный на рис. 3.10.

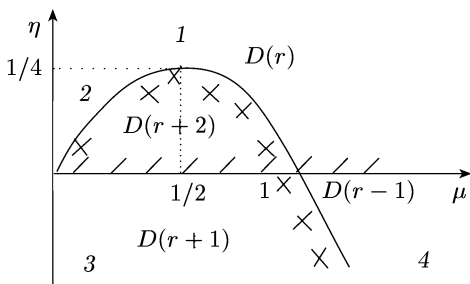


Рис. 3.10. Выделение области устойчивости (к примеру 3.9)

При положительных  $\omega$  определитель  $\Delta < 0$ . Поэтому при  $\omega > 0$  и движении в сторону возрастания  $\omega$  штрихуется правая сторона.

Все определители одновременно обращаются в нуль только при  $\omega = 0$ . При этом значении из уравнения (3.19) имеем  $\mu = 0$  и  $\eta = 0$ . Но уравнением особой прямой является  $\eta = 0$ , которое получается приравнением нулю свободного члена характеристического уравнения.

Из рис. 3.10 следует, что областью-претендентом является область  $D(r+2)$ . Для проверки, является ли эта область областью устойчивости, исследуем устойчивость рассматриваемой системы в точке с координатами  $\mu = 0,5$  и  $\eta = 0,1$ . В этой точке характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 0,5\lambda + 0,1 = 0.$$

Необходимое условие устойчивости выполняется. Кроме того,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 1 & 1 & 0,1 \\ 1 & 1 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,15 > 0.$$

Поэтому согласно критерию Льенара–Шипара система в указанной точке устойчива. Следовательно, область-претендент, определяемый системой неравенств

$$\eta > 0, \quad \eta + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0,$$

является областью устойчивости.

**3.4.2. Граничный коэффициент и условие граничной устойчивости.** Говорят, что система находится на границе устойчивости или имеет место *граничная* или *маргинальная устойчивость*, если среди корней характеристического уравнения имеются нейтральные (т. е. расположенные на мнимой оси) корни и нет правых корней.

Если все нейтральные корни являются нулевыми (т. е. расположены в начале координат), то говорят, что система находится на *границе аperiodической устойчивости*, если корни являются мнимыми — система находится на *границе колебательной устойчивости*.

**Граничный коэффициент.** Представим передаточную функцию разомкнутой систем в виде

$$W(p) = \frac{k}{p^\nu} W^0(p), \quad W^0(0) = 1.$$

Если при малых значениях передаточного коэффициента  $k$  замкнутая система устойчива, а с его ростом она становится неустойчивой, то значение  $k = k_r$ , при котором замкнутая система находится на границе устойчивости, называется *граничным* или *предельным* (предаточным) *коэффициентом*.

**Условия граничной устойчивости.** Граничный коэффициент можно определить с помощью условий граничной устойчивости, которые мы здесь рассмотрим вкратце. Более подробно эти условия будут рассмотрены в гл. 5, где они используются при решении задач синтеза.

**Алгебраическое условие граничной колебательной устойчивости.** Система управления находится на границе колебательной устойчивости (два корня характеристического уравнения мнимые, а остальные левые), если при  $a_0 > 0$  предпоследний определитель Гурвица равен нулю, а все определители Гурвица более низкого порядка и свободный член положительны:

$$\Delta_{n-1} = 0, \quad \Delta_{n-2} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_1 > 0, \quad a_n > 0. \quad (3.20)$$

**Условие граничной устойчивости Михайлова.** Система находится на границе устойчивости (колебательной), если ее кривая Михайлова при  $a_0 > 0$ , начинаясь с положительной вещественной полуоси, проходит через начало координат и при малой ее деформации в окрестности начала координат удовлетворяет критерию устойчивости Михайлова.

Так как, когда система находится на границе устойчивости, годограф ее характеристического вектора  $Q(j\omega)$  проходит через начало координат, то

$$Q(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega) = 0, \quad \text{или} \quad u(\omega) = 0, \quad v(\omega) = 0. \quad (3.21)$$

Это условие является только необходимым условием граничной устойчивости.

**Условие граничной устойчивости Найквиста.** Замкнутая система находится на границе устойчивости, если АФЧХ разомкнутой системы проходит через точку  $(-1, j0)$  и при малой ее деформации выполняется критерий устойчивости Найквиста.



Граничный коэффициент легко определяется с помощью условия граничной устойчивости Найквиста, если построен годограф харак-

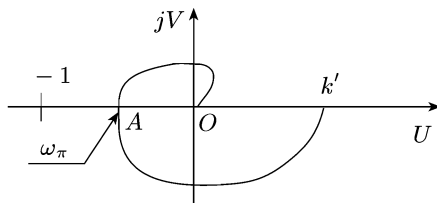


Рис. 3.11. Годограф  $W(j\omega) = \frac{k'}{(j\omega)^\nu} W^0(j\omega)$  ( $\nu = 0$ )

теристического вектора (т. е. АФЧХ) разомкнутой системы при некотором значении  $k = k'$ .

Пусть АФЧХ пересекает отрицательную вещественную полуось при частоте  $\omega = \omega_\pi$  в точке  $A$  (рис. 3.11). Тогда

$$W(j\omega_\pi) = \frac{k'}{(j\omega_\pi)^\nu} W^0(j\omega_\pi) = -|OA|. \quad (3.22)$$

Из условия граничной устойчивости Найквиста имеем

$$\frac{k_\Gamma}{(j\omega_\pi)^\nu} W^0(j\omega_\pi) = -1.$$

Разделив это равенство на (3.22), получим  $k_\Gamma = k'/|OA|$ .

### 3.5. Робастная устойчивость

Параметры стационарных систем с течением времени в силу старения или других причин могут меняться. Кроме того, при разработке регуляторов параметры объекта могут быть точно не известны. В подобных случаях возникает необходимость построения систем управления таким образом, чтобы она была устойчива не при одних фиксированных значениях параметров, а при всех возможных их значениях. В последнем случае говорят, что система *робастно устойчива*. Более строго робастная устойчивость определяется следующим образом.

Рассмотрим характеристический полином

$$Q(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n. \quad (3.23)$$

Полином называется *устойчивым полином* или *полином Гурвица*, если все его нули являются левыми.

Введем в рассмотрение  $(n+1)$ -вектор  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Пусть в  $(n+1)$ -мерном пространстве коэффициентов задано множество  $A$  ( $A \subset R^{n+1}$ ).

Полином (3.23) называется *робастно устойчивым* или *робастно устойчивым в  $A$* , если он является устойчивым при любых значениях коэффициентов  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) из множества  $A$  ( $a \in A$ ).

Система называется *робастно устойчивой* или *робастно устойчивой на множестве*  $A$ , если ее характеристический полином является робастно устойчивым полиномом в  $A$ .

**3.5.1. Полиномы Харитонова.** Пусть множество  $A$  является (гипер)параллелепипедом:

$$A = \{a: \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, i = 0, 1, \dots, n\}. \quad (3.24)$$

Здесь  $\underline{a}_i$  и  $\bar{a}_i$  — минимальное и максимальное значения коэффициента  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Подставим в характеристический полином  $\lambda = j\omega$  и выделим вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} Q(j\omega) &= a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = u(\omega) + jv(\omega), \\ u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - a_{n-6}\omega^6 + \dots, \end{aligned} \quad (3.25a)$$

$$v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - a_{n-7}\omega^7 + \dots \quad (3.25b)$$

При фиксированном  $\omega$ , когда вектор  $a$  пробегает все значения из множества (3.24), характеристический вектор описывает прямоуголь-

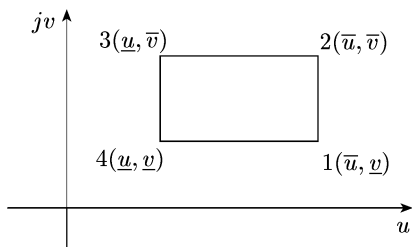


Рис. 3.12. К определению полиномов Харитонова

ник (рис. 3.12). Очевидно, на вершинах прямоугольника  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  как функции от  $a$  принимают минимальные или максимальные значения. Обозначим минимумы  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  через  $\underline{u}(\omega)$  и  $\underline{v}(\omega)$ , максимумы через  $\bar{u}(\omega)$  и  $\bar{v}(\omega)$  соответственно:

$$\underline{u} = \underline{u}(\omega) = \min_{a \in A} u(\omega), \quad \underline{v} = \underline{v}(\omega) = \min_{a \in A} v(\omega),$$

$$\bar{u} = \bar{u}(\omega) = \max_{a \in A} u(\omega), \quad \bar{v} = \bar{v}(\omega) = \max_{a \in A} v(\omega).$$

Функции  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  примут минимальные значения, когда в (3.25) слагаемые с положительным знаком принимают минимальные значения, а слагаемые с отрицательным знаком — максимальные значения. И наоборот,  $u(\omega)$  и  $v(\omega)$  примут максимальные значения, когда слагаемые с положительным знаком принимают максимальные значения, а слагаемые с отрицательным знаком — минимальные значения. Поэтому из (3.25) имеем

$$\underline{u}(\omega) = \underline{a}_n - \bar{a}_{n-2}\omega^2 + \underline{a}_{n-4}\omega^4 - \bar{a}_{n-6}\omega^6 + \dots, \quad (3.26a)$$

$$\underline{v}(\omega) = \underline{a}_{n-1}\omega - \bar{a}_{n-3}\omega^3 + \underline{a}_{n-5}\omega^5 - \bar{a}_{n-7}\omega^7 + \dots, \quad (3.26b)$$

$$\bar{u}(\omega) = \bar{a}_n - \underline{a}_{n-2}\omega^2 + \bar{a}_{n-4}\omega^4 - \underline{a}_{n-6}\omega^6 + \dots, \quad (3.26\text{в})$$

$$\bar{v}(\omega) = \bar{a}_{n-1}\omega - \underline{a}_{n-3}\omega^3 + \bar{a}_{n-5}\omega^5 - \underline{a}_{n-7}\omega^7 + \dots \quad (3.26\text{г})$$

Как следует из рис. 3.12, вершинам прямоугольника 1, 2, 3 и 4 соответствуют характеристические векторы

$$Q_1(j\omega) = \bar{u}(\omega) + j\underline{v}(\omega), \quad Q_2(j\omega) = \bar{u}(\omega) + j\bar{v}(\omega),$$

$$Q_3(j\omega) = \underline{u}(\omega) + j\bar{v}(\omega), \quad Q_4(j\omega) = \underline{u}(\omega) + j\underline{v}(\omega).$$

Подставив в формулу для  $Q_1(j\omega)$  выражения для  $\bar{u}(\omega)$  из (3.26в) и для  $\underline{v}(\omega)$  из (3.26б), получим

$$Q_1(j\omega) = \bar{a}_n - \underline{a}_{n-2}\omega^2 + \bar{a}_{n-4}\omega^4 - \dots$$

$$\dots + j(\underline{a}_{n-1}\omega - \bar{a}_{n-3}\omega^3 + \underline{a}_{n-5}\omega^5 - \dots) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1}(j\omega) + \\ + \underline{a}_{n-2}(j\omega)^2 + \bar{a}_{n-3}(j\omega)^3 + \bar{a}_{n-4}(j\omega)^4 + \underline{a}_{n-5}(j\omega)^5 + \dots$$

Отсюда, положив  $j\omega = \lambda$ , получим характеристический полином  $Q_1(\lambda)$ . Аналогично можно получить характеристические полиномы, соответствующие остальным вершинам прямоугольника.

Выпишем коэффициенты при  $\lambda$  в порядке возрастания степени  $\lambda$  всех четырех полиномов:

$$Q_1(\lambda): \bar{a}_n, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-3}, \bar{a}_{n-4}, \underline{a}_{n-5}, \dots, \quad (3.27\text{а})$$

$$Q_2(\lambda): \bar{a}_n, \bar{a}_{n-1}, \underline{a}_{n-2}, \underline{a}_{n-3}, \bar{a}_{n-4}, \bar{a}_{n-5}, \dots, \quad (3.27\text{б})$$

$$Q_3(\lambda): \underline{a}_n, \bar{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-2}, \underline{a}_{n-3}, \underline{a}_{n-4}, \bar{a}_{n-5}, \dots, \quad (3.27\text{в})$$

$$Q_4(\lambda): \underline{a}_n, \underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-3}, \underline{a}_{n-4}, \underline{a}_{n-5}, \dots \quad (3.27\text{г})$$

Полиномы  $Q_1(\lambda)$ ,  $Q_2(\lambda)$ ,  $Q_3(\lambda)$  и  $Q_4(\lambda)$  называются *полиномами Харитонова*.

### 3.5.2. Теорема Харитонова.

**Необходимое условие робастной устойчивости.** Так как при робастной устойчивости в параллелепипеде (3.24) должны быть устойчивыми характеристические полиномы при всех значениях коэффициентов из этого параллелепипеда, необходимо, чтобы был устойчивым характеристический полином при  $a_i = \underline{a}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Поэтому для робастной устойчивости в параллелепипеде (3.24) необходимо, чтобы при  $\underline{a}_0 > 0$  выполнялось условие

$$\underline{a}_0 > 0, \quad \underline{a}_1 > 0, \quad \dots, \quad \underline{a}_n > 0. \quad (3.28)$$

**Теорема Харитонова (1978).** Для того чтобы система с характеристическим полиномом  $Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda + \dots + a_n$  была робастно устойчива в параллелепипеде

$$A = \{a: \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n\},$$

необходимо и достаточно, чтобы все полиномы Харитонова были устойчивыми.

**Доказательство.** Необходимость. Так как по определению робастной устойчивости характеристический полином должен

быть устойчивым при всех значениях  $a \in A$ , то должны быть устойчивыми и полиномы Харитонова как характеристические полиномы, соответствующие четырем различным значениям  $a$  из множества  $A$ .

**Достаточность.** По критерию Михайлова для робастной устойчивости при  $a_0 > 0$  достаточно, чтобы годограф характеристического вектора при всевозможных  $a \in A$ , начавшись на положительной вещественной полуоси, последовательно охватывал  $n$  квадрантов. Иначе говоря, прямоугольник на рис. 3.12 должен последовательно охватывать  $n$  квадрантов. Вещественная и мнимая части характеристического вектора  $Q'(j\omega) = u'(\omega) + jv'(\omega)$ , соответствующего произвольному  $a' \in A$ , удовлетворяет неравенствам

$$\underline{u}(\omega) \leq u'(\omega) \leq \bar{u}(\omega), \quad \underline{v}(\omega) \leq v'(\omega) \leq \bar{v}(\omega).$$

Поэтому если вершины прямоугольника последовательно охватывают  $n$  квадрантов, то и все точки прямоугольника будут последовательно охватывать  $n$  квадрантов. Теорема доказана.

**Случай  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ .** Как известно, для полиномов первого и второго порядков положительность его коэффициентов является достаточным условием устойчивости. Поэтому в случае  $n = 1, 2$ , очевидно, для робастной устойчивости в параллелепипеде необходимо и достаточно, чтобы выполнялось необходимое условие робастной устойчивости (3.28).

**Следствие.** Для того чтобы система с характеристическим полиномом  $Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  была робастно устойчива в параллелепипеде при выполнении необходимого условия робастной устойчивости (3.28), необходимо и достаточно, чтобы были устойчивыми:

- а) в случае  $n = 3$  полином Харитонова  $Q_1(\lambda)$ ;
- б) в случае  $n = 4$  полиномы Харитонова  $Q_1(\lambda)$  и  $Q_2(\lambda)$ ;
- в) в случае  $n = 5$  полиномы Харитонова  $Q_1(\lambda)$ ,  $Q_2(\lambda)$  и  $Q_3(\lambda)$ .

**Доказательство.** Необходимость очевидна. Поэтому докажем достаточность. Вершины прямоугольника 1, 2, 3, 4 в 1-м квадранте преобразуются при переходе во 2-й квадрант в  $1', 2', 3', 4'$ , при переходе

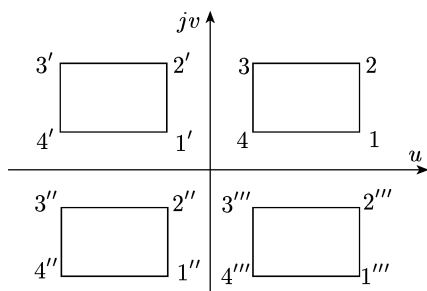


Рис. 3.13. К выводу следствия

в 3-й квадрант в  $1'', 2'', 3'', 4''$  и при переходе в 4-й квадрант в  $1''', 2''', 3''', 4'''$  соответственно (рис. 3.13).

а) Если при увеличении  $\omega$  вершина 1 прямоугольника переходит во 2-й квадрант, то и все остальные вершины также перейдут во 2-й квадрант. Далее, если вершина 1' при дальнейшем увеличении  $\omega$  не пересекает мнимую ось, то остальные вершины также ее не пересекут. И так как характеристический вектор 3-го порядка с положительными коэффициентами при  $\omega \rightarrow \infty$  располагается в 3-м квадранте, при  $n = 3$  годографы характеристических векторов  $Q_2(j\omega)$ ,  $Q_3(j\omega)$  и  $Q_3(j\omega)$  будут последовательно охватывать три квадранта, если годограф характеристического вектора  $Q_1(j\omega)$  последовательно охватит три квадранта. Следовательно, при  $n = 3$  для робастной устойчивости достаточно, чтобы годограф характеристического вектора  $Q_1(j\omega)$  последовательно охватывал три квадранта, т. е. чтобы полином  $Q_1(\lambda)$  был устойчивым.

б) Если с ростом  $\omega$  вершины 1 и 2 прямоугольника, последовательно охватывая 1-й и 2-й квадранты, окажутся в 3-м квадранте, то то же самое произойдет с вершинами 3 и 4. И если при дальнейшем росте  $\omega$  вершина 2'' не пересечет действительную ось, то и вершины 3'' и 4'' не пересекут эту ось. И так как характеристический вектор 4-го порядка с положительными коэффициентами при  $\omega \rightarrow \infty$  располагается в 4-м квадранте, при  $n = 4$  годографы характеристических векторов  $Q_3(j\omega)$  и  $Q_4(j\omega)$  будут последовательно охватывать четыре квадранта, если годографы характеристических векторов  $Q_1(j\omega)$  и  $Q_2(j\omega)$  последовательно охватят четыре квадранта. Следовательно, при  $n = 4$  для робастной устойчивости достаточно, чтобы годографы характеристических векторов  $Q_1(j\omega)$  и  $Q_2(j\omega)$  последовательно охватывали четыре квадранта, т. е. чтобы полиномы  $Q_1(\lambda)$  и  $Q_2(\lambda)$  были устойчивыми.

в) Если вершины 1, 2 и 3 с ростом  $\omega$ , последовательно пройдя 1-й, 2-й и 3-й квадранты, окажутся в 4-м квадранте, то то же самое произойдет с вершиной 4. И если при дальнейшем росте  $\omega$  вершина 3''' не пересекает мнимую ось, то и вершина 4''' не пересечет эту ось. И так как годограф характеристического вектора 5-го порядка с положительными коэффициентами при  $\omega \rightarrow \infty$  заканчивается в 1-м квадранте, годограф характеристического вектора  $Q_4(j\omega)$  при  $n = 5$  последовательно охватит пять квадрантов, если годографы характеристических векторов  $Q_1(j\omega)$ ,  $Q_2(j\omega)$  и  $Q_3(j\omega)$  последовательно охватят пять квадрантов.

Таким образом, при  $n = 5$  для робастной устойчивости достаточно, чтобы полиномы  $Q_1(\lambda)$ ,  $Q_2(\lambda)$  и  $Q_3(\lambda)$  были устойчивыми полиномами.

Пример 3.10. Исследовать робастную устойчивость системы, характеристический полином которой имеет вид

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0, \quad 4 \leq \alpha \leq 5, \quad 2 \leq \beta \leq 3, \quad 1 \leq \gamma \leq 2.$$

Решение. В данном случае

$$A = \{a: a_0 = 1, a_1 = 3, 4 \leq a_2 \leq 5, 2 \leq a_3 \leq 3, 1 \leq a_4 \leq 2\},$$

$$\begin{aligned}\underline{a}_0 = \bar{a}_0 = 1, \quad \underline{a}_1 = \bar{a}_1 = 3, \quad \underline{a}_2 = 4, \quad \bar{a}_2 = 5, \\ \underline{a}_3 = 2, \quad \bar{a}_3 = 3, \quad \underline{a}_4 = 1, \quad \bar{a}_4 = 2.\end{aligned}$$

Так как  $n = 4$ , то достаточно рассмотреть полиномы  $Q_1(\lambda)$  и  $Q_2(\lambda)$ .

Из (3.27а) и (3.27б) имеем

$$Q_1(\lambda): \bar{a}_4, \underline{a}_3, \underline{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_0,$$

$$Q_2(\lambda): \bar{a}_4, \bar{a}_3, \underline{a}_2, \underline{a}_1, \bar{a}_0,$$

или

$$Q_1(\lambda) = \bar{a}_0 \lambda^4 + \bar{a}_1 \lambda^3 + \underline{a}_2 \lambda^2 + \underline{a}_3 \lambda + \bar{a}_4 = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 2,$$

$$Q_2(\lambda) = \bar{a}_0 \lambda^4 + \underline{a}_1 \lambda^3 + \underline{a}_2 \lambda^2 + \bar{a}_3 \lambda + \bar{a}_4 = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Необходимое условие устойчивости для обоих полиномов выполняется.

Для полинома  $Q_1(\lambda)$  определитель Гурвица

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \underline{a}_3 & 0 \\ \bar{a}_0 & \underline{a}_2 & \bar{a}_4 \\ 0 & \bar{a}_1 & \underline{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(4 \cdot 2 - 3 \cdot 2) - 1(2 \cdot 2 - 3 \cdot 0) = 2 > 0,$$

а для полинома  $Q_2(\lambda)$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \underline{a}_1 & \bar{a}_3 & 0 \\ \bar{a}_0 & \underline{a}_2 & \bar{a}_4 \\ 0 & \underline{a}_1 & \bar{a}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3(4 \cdot 3 - 3 \cdot 2) - 1(2 \cdot 2 - 3 \cdot 0) = 2 > 0.$$

На основе критерия Лъенара–Шипара  $Q_1(\lambda)$  и  $Q_2(\lambda)$  являются устойчивыми полиномами. Следовательно, в силу следствия система робастно устойчива.

**Пример 3.11.** Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{(T^2 p^2 + 2\xi p + 1)p}, \quad 0,1 \leq k \leq 1, \quad 0,1 \leq T \leq 0,5, \quad 0,1 \leq \xi \leq 0,5.$$

**Решение.** Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3,$$

где

$$a_0 = T^2, \quad a_1 = 2\xi, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = k.$$

Коэффициенты характеристического полинома удовлетворяют следующим условиям:

$$0,01 \leq a_0 \leq 0,25, \quad 0,2 \leq a_1 \leq 1, \quad a_2 = 1, \quad 0,1 \leq a_3 \leq 1.$$

Следовательно, в принятых выше обозначениях имеем

$$\underline{a}_0 = 0,01, \quad \bar{a}_0 = 0,25, \quad \underline{a}_1 = 0,2, \quad \bar{a}_1 = 1,$$

$$\underline{a}_2 = \bar{a}_2 = 1, \quad \underline{a}_3 = 0,1, \quad \bar{a}_3 = 1.$$

Необходимое условие робастной устойчивости выполняется. Так как  $n = 3$ , то для робастной устойчивости достаточно, чтобы полином  $Q_1(\lambda)$  был устойчивым.

Из (3.27а) получаем

$$Q_1(\lambda) = \bar{a}_3 + \underline{a}_2\lambda + \underline{a}_1\lambda^2 + \bar{a}_0\lambda^3 = 1 + \lambda + 0,2\lambda^2 + 0,25\lambda^3.$$

Определитель Гурвица

$$\Delta_2 = 1 \cdot 0,2 - 0,25 < 0.$$

Поэтому замкнутая система не будет робастно устойчива (т.е. устойчива при всевозможных значениях параметров).

Теорема Харитонова справедлива при условии, что коэффициенты характеристического полинома изменяются на заданных интервалах независимо друг от друга. Однако когда множества возможных значений коэффициентов характеристического полинома определяются заданными множествами возможных значений параметров системы и при этом одни и те же параметры входят в выражение для разных коэффициентов, эти коэффициенты уже не являются независимыми. В таких случаях условия робастной устойчивости, вытекающие из теоремы Харитонова, являются только достаточными. Из того, что они не выполняются, не следует, что система не может быть робастно устойчива.

**Пример 3.12.** Исследовать устойчивость замкнутой системы при всевозможных заданных значениях параметров при условии, что передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{(Tp + 1)^3}, \quad 0,5 \leq k \leq 2, \quad 1 \leq T \leq 2.$$

**Решение.** Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3,$$

где

$$a_0 = T^3, \quad a_1 = 3T^2, \quad a_2 = 3T, \quad a_3 = 1 + k.$$

Для граничных значений коэффициентов характеристического полинома имеем

$$\begin{aligned} \underline{a}_0 = 1, \quad \bar{a}_0 = 8, \quad \underline{a}_1 = 3, \quad \bar{a}_1 = 12, \quad \underline{a}_2 = 3, \\ \bar{a}_2 = 6, \quad \underline{a}_3 = 1,5, \quad \bar{a}_3 = 3. \end{aligned}$$

В данном случае коэффициенты характеристического полинома не являются независимыми. Но, тем не менее, воспользуемся сначала теоремой Харитонова.

Так как  $n = 3$ , достаточно рассмотреть полином (см. (3.27а))

$$Q_1(\lambda) = \bar{a}_3 + \underline{a}_2\lambda + \underline{a}_1\lambda^2 + \bar{a}_0\lambda^3 = 3 + 3\lambda + 3\lambda^2 + 8\lambda^3.$$

Все коэффициенты больше нуля, но определитель Гурвица

$$\Delta_2 = \underline{a}_2\underline{a}_1 - \bar{a}_3\bar{a}_0 = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 8 < 0.$$

Следовательно, условие робастной устойчивости не выполняется. Однако, как покажем, замкнутая система устойчива при всевозможных заданных значениях параметров.

Действительно, при положительных значениях параметров необходимое условие устойчивости выполняется, и определитель Гурвица 2-го порядка

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_2 = 3T^2 3T - T^3(1+k) = T^3(8-k)$$

будет положительным при  $k < 8$ .

Таким образом, система устойчива при любых значениях параметров из области, определяемой неравенствами

$$T > 0, \quad 0 < k < 8.$$

Очевидно, заданные значения параметров принадлежат этой области.

## Задачи

**1.** По заданным характеристическим уравнениям исследовать устойчивость системы:

а)  $\lambda^6 + 2\lambda^5 + 3\lambda^4 + 4\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ ; б)  $\lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$ ;

в)  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ; г)  $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ ;

д)  $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$ .

**2.** По заданным передаточным функциям разомкнутой системы исследовать устойчивость замкнутой системы с помощью критерия Найквиста:

а)  $W(s) = \frac{10}{s-1}$ ; б)  $W(s) = \frac{0,5}{s-1}$ ; в)  $W(s) = \frac{0,5(s+1)}{s(s-1)}$ ;

г)  $W(s) = \frac{10(s+1)}{s(s-1)}$ ; д)  $W(s) = \frac{10e^{-0,1s}}{s+1}$ ; е)  $W(s) = \frac{10e^{-s}}{s+1}$ .

**3.** По заданным передаточным функциям разомкнутой системы определить критическое значение запаздывания:

а)  $W(s) = \frac{10e^{-\tau s}}{s+1}$ ; б)  $W(s) = \frac{5e^{-\tau s}}{s+1}$ ;

в)  $W(s) = \frac{2e^{-\tau s}}{s(s+1)}$ ; г)  $W(s) = \frac{6e^{-\tau s}}{s(s+1)}$ .

**4.** По заданным передаточным функциям разомкнутой системы определить область устойчивости замкнутой системы:

а)  $W(s) = \frac{k}{(0,1s+1)^3}$ ; б)  $W(s) = \frac{k}{s(0,1s+1)^2}$ ;

в)  $W(s) = \frac{5}{(Ts+1)^3}$ ; г)  $W(s) = \frac{5}{s(Ts+1)^2}$ .

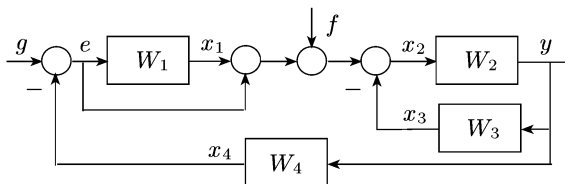


5. Заданы передаточные функции разомкнутых систем. Определить граничное значение передаточных коэффициентов:

а)  $W(s) = \frac{k}{(s+1)(0,1s+1)^3}$ ; б)  $W(s) = \frac{k}{(s+1)^2(0,1s+1)}$ ;

в)  $W(s) = \frac{k}{s(s+1)^2}$ ; г)  $W(s) = \frac{k}{s(0,2s+1)^2}$ .

6. Исследовать устойчивость системы



а)  $W_1 = 0,1p + 0,2\frac{1}{p}$ ,  $W_2 = \frac{5}{p(0,5p+1)}$ ,  $W_3 = 0,4$ ,  $W_4 = 0,5$ ;

б)  $\dot{x}_1 = 0,1e$ ,  $\ddot{y} + 5\dot{y} = 10x_2$ ,  $x_3 = 0,1y$ ,  $x_4 = 0,5y$ .

7. При заданных ниже характеристических уравнениях систем управления и множествах возможных значений их коэффициентов исследовать робастную устойчивость:

а)  $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + 0,5 = 0$ ,  $1 \leq a_1 \leq 2$ ,  $0,5 \leq a_2 \leq 1,5$ ;

б)  $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ ,  $1 \leq a_1 \leq 2$ ,  $0,5 \leq a_2 \leq 1,5$ ,  
 $0,2 \leq a_3 \leq 0,5$ ;

в)  $\lambda^4 + a_1\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + a_3 = 0$ ,  $1 \leq a_1 \leq 2$ ,  $0,2 \leq a_3 \leq 0,5$ ;

г)  $\lambda^4 + a_1\lambda^3 + 2\lambda^2 + a_3\lambda + 1 = 0$ ,  $1 \leq a_1 \leq 2$ ,  $0,2 \leq a_3 \leq 0,5$ .

8. Исследовать устойчивость системы управления, приведенной в задаче 6 данного задания, при следующих передаточных функциях и множествах значений параметров:

$W_1(p) = \frac{k}{p}$ ,  $W_2(p) = \frac{5}{(Tp+1)p}$ ,  $W_3(p) = 0,2$ ,

$W_4(p) = 0,5$ ,  $0,2 \leq k \leq 1$ ,  $0,1 \leq T \leq 0,5$ .

9. Задана структурная схема замкнутой системы (с отрицательной обратной связью), состоящая из регулятора и объекта с передаточными функциями  $W_p(s)$  и  $W_o(s)$  соответственно. Передаточная функция объекта равна  $W_o(s) = \frac{5}{s(s+1)^2}$ . Исследовать устойчивость системы при типовых законах управления:

а)  $W_p(s) = 0,2$  и  $W_p(s) = 2$ ;

б)  $W_p(s) = 2 + 0,2s$  и  $W_p(s) = 2 + 2s$ ;

$$\text{в) } W_p(s) = 2 + \frac{0,2}{s} \text{ и } W_p(s) = 0,2 + \frac{2}{s};$$

$$\text{г) } W_p(s) = 2 + 0,2s + \frac{0,2}{s} \text{ и } W_p(s) = 2 + 2s + \frac{2}{s}.$$

**10.** Задана структурная схема замкнутой системы (с отрицательной обратной связью), состоящая из регулятора и объекта с передаточными функциями  $W_p(s)$  и  $W_o(s)$  соответственно. Передаточная функция объекта равна  $W_o(s) = \frac{5}{s^2(s+1)}$ . Исследовать, при каких типовых законах управления (передаточных функциях  $W_p(s)$ ) система структурно устойчива.

## Глава 4

### КАЧЕСТВО СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Помимо требования устойчивости, к системе управления предъявляются определенные требования по ее качеству. Под *качеством* системы управления понимается совокупность требований, которые прямо или косвенно характеризуют точность ее работы.

В данной главе рассматриваются различные показатели качества. Кроме того, вводятся понятия статических и астатических систем и определяется структура астатических систем.

#### 4.1. Показатели качества и типовые воздействия

Наиболее полной характеристикой качества системы управления является ошибка (рис. 4.1, а)

$$e(t) = g(t) - y(t).$$

Так как  $y(t) = W_{yg}(p)g(t) + W_{yf}(p)f(t)$ , где  $W_{yg}(p)$  и  $W_{yf}(p)$  — передаточные функции относительно выхода  $y$  и входов  $g$  и  $f$  соответственно, то

$$e(t) = g(t) - y(t) = W_{eg}(p)g(t) - W_{yf}(p)f(t). \quad (4.1a)$$

Здесь  $W_{eg}(p) = 1 - W_{yg}(p)$  — передаточная функция относительно выхода  $e$  и входа  $g$ , которая называется *передаточной функцией ошибки по задающему воздействию*.

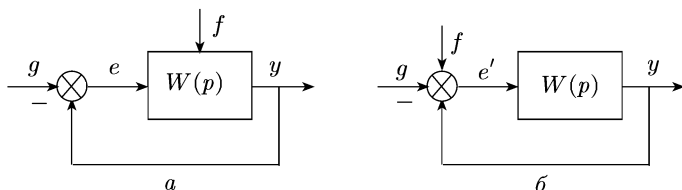


Рис. 4.1. Схемы приложения возмущений; возмущение приложено не на входе (а) и на входе (б) сравнивающего устройства

Используя передаточную функцию  $W_{ef}(p)$  относительно выхода  $e$  и входа  $f$ , называемую *передаточной функцией ошибки по возмущению*, формулу (4.1а) можно записать в виде

$$e(t) = W_{eg}(p)g(t) + W_{ef}(p)f(t). \quad (4.1б)$$

Эта формула совпадает с (4.1а) и определяет ошибку только в том случае, когда возмущение  $f$  приложено не на входе сравнивающего устройства, как это показано на рис. 4.1, а. Только в этом случае  $W_{ef}(p) = -W_{yf}(p)$ . Если возмущение приложено на входе сравнивающего устройства (рис. 4.1, б), то для определения ошибки нужно пользоваться формулой (4.1а).

Как видно из (4.1а)–(4.1в), ошибку можно представить в виде суммы

$$e(t) = e_g(t) + e_f(t), \quad (4.1в)$$

где

$$e_g(t) = W_{eg}(p)g(t), \quad e_f(t) = W_{ef}(p)f(t),$$

или, если возмущение приложено на входе сравнивающего устройства (в точке приложения задающего воздействия),

$$e_f = -W_{yf}(p)f. \quad (4.2)$$

Первая составляющая  $e_g(t)$  называется *ошибкой от задающего воздействия*, вторая составляющая — *ошибкой от возмущения*. Если на систему действует несколько возмущений, то ошибка от возмущений будет равна сумме ошибок от каждого возмущения.

Ошибка  $e(t)$ , являясь функцией от времени, не очень удобна для оценки качества систем управления. Поэтому на практике при оценке качества чаще используют числовые показатели, которые прямо или косвенно характеризуют точность воспроизведения заданного движения. Показатели качества делятся на показатели качества в переходном режиме и показатели качества в установившемся режиме.

О качестве системы управления имеет смысл говорить, если она устойчива. Поэтому показатели качества определяют при предположении, что система устойчива.

Ошибка  $e(t)$  зависит как от свойства системы управления (т. е. от уравнения), так и от внешнего воздействия. По этой причине показатели качества как характеристики свойства системы определяют при определенных внешних воздействиях, называемых *типовыми*.

При оценке качества в переходном режиме в качестве типового воздействия используют ступенчатую функцию  $A \cdot 1(t)$  ( $A$  — константа), а при оценке качества в установившемся режиме — полиномы времени  $t$ :  $At$ ,  $At^2$ , ...

## 4.2. Показатели качества в переходном режиме

Показатели качества в переходном режиме делятся на прямые и косвенные показатели. Последние делятся на корневые, частотные и интегральные.

**4.2.1. Прямые показатели качества.** Как отмечалось, при определении показателей качества в переходном режиме в качестве типового воздействия используется ступенчатое воздействие  $A \cdot 1(t)$ . Характер переходного процесса не зависит от величины  $A$ . Реакция системы  $y(t)$  на входное воздействие  $A \cdot 1(t)$  пропорциональна переходной функции  $h(t)$ , являющейся реакцией системы на единичное ступенчатое воздействие  $1(t)$ :  $y(t) = Ah(t)$ . Поэтому обычно принимают  $A = 1$ .

При ступенчатом воздействии ошибка

$$e(t) = 1(t) - h(t)$$

отличается от переходной функции на постоянную величину. Поэтому при оценке качества в переходном режиме вместо ошибки также используют переходную функцию.

*Прямыми показателями качества* называются показатели, которые получаются непосредственно по переходной характеристике. Из прямых показателей качества наиболее часто используют время регулирования и перерегулирование.

*Временем регулирования*  $t_p$  называется минимальное время, по истечении которого (с момента подачи ступенчатого воздействия) отклонение выходной величины от установившегося значения  $h(\infty)$  не превышает некоторой заданной величины  $\Delta$ .

Математически это определение можно записать следующим образом:

$$t_p = \min_{T_p} \{T_p : |h(t) - h(\infty)| \leq \Delta, t \geq T_p\}.$$

Обычно принимают  $\Delta = (0,05 \div 0,1)h(\infty)$ .

Для определения времени регулирования по переходной характеристике нужно провести по обе стороны от прямой  $h(t) = h(\infty)$  на расстоянии  $\Delta$  параллельные ей прямые (рис. 4.2). И время регули-

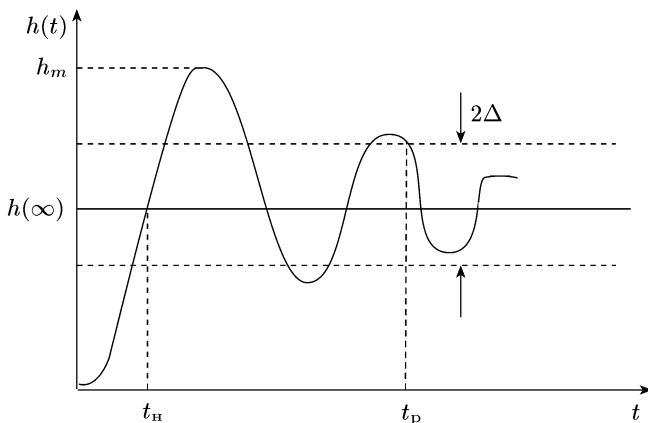


Рис. 4.2. Переходная характеристика

рования определяется как время  $t_p$ , когда переходная характеристика в последний раз пересекает любую из проведенных прямых.

*Перерегулирование* обозначают через  $\sigma$  и определяют следующим образом:

$$\sigma = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100 \%,$$

где  $h_m$  — максимальное значение переходной функции.

Иначе говоря, *перерегулирование* называется максимальное отклонение переходной функции от установившегося значения  $h(\infty)$ , выраженное в процентах по отношению к  $h(\infty)$ .

Если ступенчатое воздействие подать на вход, где действует возмущение ( $f(t) = A_0 \cdot 1(t)$ ), то установившееся значение выходной пе-

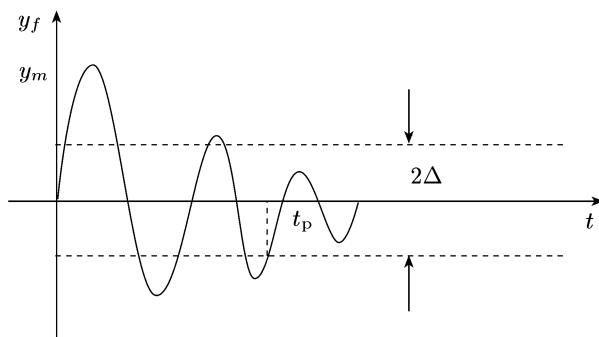


Рис. 4.3. Кривая переходного процесса (по возмущению)

ременной может быть малым или равным нулю, и кривая переходного процесса будет иметь вид, показанный на рис. 4.3.

В этом случае перерегулирование определяется как максимальное отклонение, выраженное в процентах по отношению к величине входного воздействия:

$$\sigma = \frac{y_m}{A_0} \cdot 100 \, \%.$$

Кроме времени регулирования и перерегулирования, иногда также рассматривают число колебаний за время регулирования  $t_p$  и время нарастания  $t_n$  — время первого достижения установившегося значения (см. рис. 4.2).

Число колебаний за время регулирования  $N_k$  можно рассматривать как прямой численный показатель интуитивного понятия «колебательность» системы. Когда говорят, что колебательность системы повышается, как правило, имеют в виду, что увеличивается амплитуда или частота колебаний, колебания медленнее затухают. Во всех этих случаях  $N_k$  увеличивается.

Переходную характеристику проще всего построить с помощью компьютера, решив дифференциальное уравнение при единичной входной функции и нулевых начальных условиях.

**4.2.2. Корневые показатели качества.** В качестве корневых показателей используют степень устойчивости и колебательность (степень колебательности).

Степенью устойчивости  $\eta$  системы управления (или характеристического полинома) называют расстояние от мнимой оси до

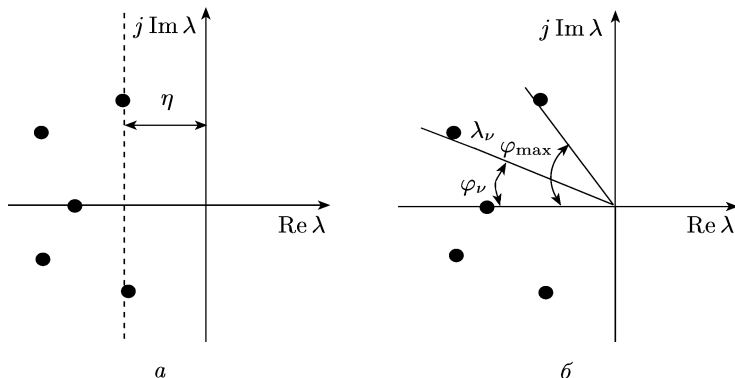


Рис. 4.4. К определению корневых показателей качества. Определение степени устойчивости (а) и степени колебательности (б)

ближайшего корня ее характеристического уравнения (рис. 4.4, а). Иначе ее можно определить следующим образом:

$$\eta = \min_{\nu} |\operatorname{Re} \lambda_{\nu}| = \min_{\nu} (-\operatorname{Re} \lambda_{\nu}) = -\max_{\nu} \operatorname{Re} \lambda_{\nu}. \quad (4.3)$$

Степень устойчивости характеризует быстродействие системы. Это связано с тем, что быстрота затухания переходного процесса в значительной мере определяется вещественной частью корня, наиболее близко расположенного к мнимой оси.

Обозначим через  $\varphi_{\nu}$  угол, образованный отрицательной вещественной полуосью и прямой, проведенной из начала координат к  $\nu$ -му корню (рис. 4.4, б). Тогда *степень колебательности* системы (или ее характеристического полинома) можно определить следующим образом:

$$\mu = \max_{\nu} \operatorname{tg} \varphi_{\nu} = \operatorname{tg} \varphi_{\max}, \quad (4.4a)$$

или, что то же,

$$\mu = \max_{\nu} \left| \frac{\operatorname{Im} \lambda_{\nu}}{\operatorname{Re} \lambda_{\nu}} \right|. \quad (4.4b)$$

Степень колебательности, называемая также колебательностью, косвенно характеризует колебательность системы. Если степень колебательности равна нулю, то переходный процесс будет апериодическим. В общем случае можно ожидать, что при одинаковой степени устойчивости число колебаний за время регулирования будет больше у той системы, у которой больше степень колебательности.

При исследовании степени устойчивости удобно воспользоваться следующим преобразованием. Исходный характеристический полином

$$Q(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

преобразуем, сделав подстановку  $\lambda = q - c$ . Тогда получим

$$Q_{\text{п}}(q) = Q(\lambda)|_{\lambda=q-c} = a_{0\text{п}} q^n + a_{1\text{п}} q^{n-1} + \dots + a_{n\text{п}}, \quad (4.5)$$

где

$$a_{k\text{п}} = \frac{1}{(n-k)!} \left. \frac{\partial^{n-k} Q(\lambda)}{\partial \lambda^{n-k}} \right|_{\lambda=-c}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

Преобразование  $\lambda = q - c$  соответствует сдвигу мнимой оси влево на  $c$ , и преобразованный полином  $Q_{\text{п}}(q)$  будет устойчивым полиномом, если  $c < \eta$  ( $\eta$  — степень устойчивости исходного полинома), и неустойчивым полиномом, если  $c > \eta$ . Поэтому исследование степени устойчивости полинома  $Q(\lambda)$  сводится к исследованию устойчивости преобразованного полинома  $Q_{\text{п}}(q)$ .

**Вывод формулы (4.6).** В силу равенства  $Q_{\text{п}}(q) = Q(\lambda)|_{\lambda=q-c}$  имеем

$$\begin{aligned} Q_{\text{п}}(q)|_{q=0} &= Q(\lambda)|_{\lambda=-c}, & \left. \frac{\partial Q_{\text{п}}(q)}{\partial q} \right|_{q=0} &= \left. \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=-c}, \\ \left. \frac{\partial^2 Q_{\text{п}}(q)}{\partial q^2} \right|_{q=0} &= \left. \frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=-c}, & \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.5) и (4.7) следует

$$\begin{aligned} a_{n\text{п}} &= Q_{\text{п}}(q)|_{q=0} = Q(\lambda)|_{\lambda=-c}, \\ 1! a_{n\text{п}-1} &= \left. \frac{\partial Q_{\text{п}}(q)}{\partial q} \right|_{q=0} = \left. \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=-c}, \\ 2! a_{n\text{п}-2} &= \left. \frac{\partial^2 Q_{\text{п}}(q)}{\partial q^2} \right|_{q=0} = \left. \frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=-c}, \\ &\dots\dots\dots \\ i! a_{n-i\text{п}} &= \left. \frac{\partial^i Q_{\text{п}}(q)}{\partial q^i} \right|_{q=0} = \left. \frac{\partial^i Q(\lambda)}{\partial \lambda^i} \right|_{\lambda=-c}. \end{aligned}$$

При подстановке  $n - i = k$  последняя формула принимает вид

$$(n-k)! a_{k\text{п}} = \left. \frac{\partial^{n-k} Q_{\text{п}}(q)}{\partial q^{n-k}} \right|_{q=0} = \left. \frac{\partial^{n-k} Q(\lambda)}{\partial \lambda^{n-k}} \right|_{\lambda=-c}.$$

Отсюда получаем (4.6).

**ПРИМЕР 4.1.** Задан характеристический полином

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

Исследовать, превышает ли степень устойчивости заданного полинома 1.



Решение. Убедимся сначала, что рассматриваемый полином является устойчивым полиномом, для чего вычислим определитель Гурвица 3-го порядка, составленный из его коэффициентов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(15 - 2) - 9 = 17 > 0.$$

Полином  $Q(\lambda)$  является устойчивым. Сделаем подстановку  $\lambda = q - 1$  и вычислим коэффициенты преобразованного полинома. В данном случае  $n = 4$  и  $c = 1$ . Поэтому из (4.6) получаем

$$a_{п4} = Q(\lambda)|_{\lambda=-1} = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1|_{\lambda=-1} = 2,$$

$$a_{п3} = \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=-1} = 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda + 3 \Big|_{\lambda=-1} = -5.$$

Без дальнейших вычислений ясно, что необходимое условие устойчивости преобразованного полинома не выполняется, и он является неустойчивым полиномом. Следовательно, степень устойчивости  $\eta < 1$ .

Пример 4.2. Определить, превышает ли 1 степень устойчивости характеристического полинома

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2.$$

Решение. Сначала проверим устойчивость заданного полинома. Для этого достаточно проверить знак определителя Гурвица 2-го порядка:

$$\Delta_2 = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 > 0.$$

Полином  $Q(\lambda)$  устойчив.

Произведем подставку  $\lambda = q - 1$  и найдем коэффициенты преобразованного полинома. В данном случае  $n = 3$  и  $c = 1$ . Поэтому из (4.6) получаем

$$a_{п3} = Q(\lambda)|_{\lambda=-1} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2|_{\lambda=-1} = 0,$$

$$a_{п2} = \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=-1} = 3\lambda^2 + 6\lambda + 4 \Big|_{\lambda=-1} = 1,$$

$$a_{п1} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=-1} = \frac{1}{2} (6\lambda + 6) \Big|_{\lambda=-1} = 0,$$

$$a_{п0} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 Q(\lambda)}{\partial \lambda^3} \Big|_{\lambda=-1} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1.$$

Преобразованное характеристическое уравнение имеет вид

$$Q_{п}(q) = q^3 + q = 0.$$

Все корни этого уравнения ( $q_1 = 0$ ,  $q_{2,3} = \pm j$ ) располагаются на мнимой оси. Следовательно, степень устойчивости рассматриваемой системы  $\eta = 1$ .

**4.2.3. Интегральные показатели качества.** Ошибку системы можно представить в виде суммы:

$$e(t) = e_{\text{п}}(t) + e_{\infty},$$

где  $e_{\text{п}}(t)$  — переходная составляющая ошибки,  $e_{\infty}$  — установившаяся ошибка.

В качестве интегральных оценок наиболее часто используют *интегральную квадратическую ошибку*

$$J_{20} = \int_0^{\infty} e_{\text{п}}^2(t) dt \quad (4.8)$$

(которую также называют *интегральной квадратической оценкой*) и *обобщенные интегральные квадратические оценки*

$$J_{2k} = \int_0^{\infty} \left[ e_{\text{п}}^2(t) + \tau_1^2 \dot{e}_{\text{п}}^2(t) + \dots + \tau_k^2 e_{\text{п}}^{(k)}(t) \right] dt, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (4.9)$$

где  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) — весовые константы.

Смысл показателя  $J_{20}$  ясен из его названия, и  $J_{20} \rightarrow 0$  при  $\max_t |e_{\text{п}}(t)| \rightarrow 0$ . Однако возможны случаи, когда при малых  $J_{20}$  система становится сильно колебательной. Это послужило одной из причин использования обобщенных интегральных квадратических оценок.

Рассмотрим, в чем смысл этих показателей. Сделаем это сначала на примере показателя  $J_{21}$ , представив его в виде

$$J_{21} = \int_0^{\infty} [e_{\text{п}}(t) + \tau \dot{e}_{\text{п}}(t)]^2 dt - 2\tau \int_0^{\infty} e_{\text{п}}(t) \dot{e}_{\text{п}}(t) dt.$$

Учитывая, что  $e_{\text{п}}(\infty) = 0$  и

$$\int_0^{\infty} e_{\text{п}}(t) \dot{e}_{\text{п}}(t) dt = \int_0^{\infty} e_{\text{п}}(t) de_{\text{п}}(t) = -\frac{1}{2} e_{\text{п}}^2(0),$$

имеем

$$J_{21} = \int_0^{\infty} [e_{\text{п}}(t) + \tau \dot{e}_{\text{п}}(t)]^2 dt + \tau e_{\text{п}}^2(0).$$

Отсюда следует, что  $J_{21}$  достигает минимума, если  $e_{\text{п}}(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\tau \dot{e}_{\text{п}}(t) + e_{\text{п}}(t) = 0. \quad (4.10)$$

Таким образом, минимизация  $J_{21}$  соответствует приближению переходной составляющей ошибки к решению уравнения (4.10).

Аналогично можно показать, что интегральный показатель  $J_{2k}$  достигает минимума, если  $e_{\text{п}}(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\tau_k e_{\text{п}}^{(k)}(t) + \tau_{k-1} e_{\text{п}}^{(k-1)}(t) + \dots + e_{\text{п}}(t) = 0. \quad (4.11)$$

**Равенство Парсеваля.** Рассмотрим равенство Парсеваля, которое используется при вычислении интегральных квадратических оценок. Если  $X(s)$  является изображением Лапласа функции  $x(t)$  и его полюсы расположены в левой полуплоскости, то справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4.12)$$

**Вывод формулы (4.12).** Равенство

$$\int_0^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^{\infty} x^2(t) e^{-st} dt \Big|_{s=0},$$

используя обратное преобразование Лапласа

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(q) e^{qt} dq,$$

можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^2(t) dt &= \int_0^{\infty} x(t) \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(q) e^{qt} dq \right) e^{-st} dt \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(q) \left( \int_0^{\infty} x(t) e^{-(s-q)t} dt \right) dq \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(q) X(s-q) dq \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

Так как по условию все полюсы  $X(q)$  находятся в левой полуплоскости, можно положить  $c = 0$  и  $q = j\omega$ . Прделав это, из последнего равенства получим (4.12).

**Вычисление интегральных квадратных оценок.** На основе равенства Парсеваля (4.12) имеем

$$J_{20} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\Pi}(j\omega)|^2 d\omega, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} J_{2k} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\Pi}(j\omega)|^2 d\omega + \tau_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{E}_{\Pi}(j\omega)|^2 d\omega + \dots \right. \\ \left. \dots + \tau_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| E_{\Pi}^{(k)}(j\omega) \right|^2 d\omega \right], \quad (4.14) \end{aligned}$$

где

$$E_{\Pi}(s) = L\{e_{\Pi}(t)\}, \quad \dot{E}_{\Pi}(s) = L\{\dot{e}_{\Pi}(t)\}, \quad \dots \quad E_{\Pi}^{(k)}(s) = L\{e_{\Pi}^{(k)}(t)\}.$$

Так как

$$\dot{E}_{\Pi}(s) = L\{\dot{e}_{\Pi}(t)\} = sE_{\Pi}(s) - e_{\Pi}(0),$$

то формулу для  $J_{21}$  можно записать в виде

$$J_{21} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\pi}(j\omega)|^2 d\omega + \tau^2 \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega E_{\pi}(j\omega) - e_{\pi}(0)|^2 d\omega \right]. \quad (4.15)$$

Аналогичным образом можно представить формулы и для  $J_{2k}$  ( $k = 2, 3, \dots, m$ ).

Определение интегральных показателей по формулам (4.13), (4.14) и (4.15) сводится к вычислению интеграла вида

$$I_{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{b_0(j\omega)^{n-1} + b_1(j\omega)^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} \right|^2 d\omega. \quad (4.16)$$

Этот интеграл вычисляется с помощью теории вычетов и для  $n = 1, 2, 3$  имеет следующий вид:

$$n = 1: I_1 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1}; \quad (4.17a)$$

$$n = 2: I_2 = \frac{b_0^2a_2 + b_1^2a_0}{2a_0a_1a_2}; \quad (4.17б)$$

$$n = 3: I_3 = \frac{b_0^2a_2a_3 + (b_1^2 - 2b_0b_2)a_0a_3 + b_2^2a_0a_1}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}. \quad (4.17в)$$

**Пример 4.3.** Вычислить интегральные показатели  $J_{20}$  и  $J_{21}$  системы (см. рис. 4.1,  $a, f \equiv 0$ ), когда передаточная функция  $W(p) = \frac{3}{0,1p + 1}$ .

**Решение.** Вычислим  $E_{\pi}(s)$  и  $e_{\pi}(0)$ , необходимые для вычисления указанных показателей. Но прежде всего найдем  $E(s)$ . Учитывая, что  $g(t) = 1(t)$  и  $G(s) = L\{g(t)\} = 1/s$ , можно записать

$$E(s) = W_{eg}(s)G(s) = \frac{1}{1 + W(s)} \frac{1}{s} = \frac{0,1s + 1}{(0,1s + 4)s}.$$

Установившееся значение

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Так как  $e_{\pi}(t) = e(t) - e_{\infty}$ , то

$$E_{\pi}(s) = L\{e(t)\} - L\{e_{\infty}\} = E(s) - 0,25 \frac{1}{s} = \frac{0,075}{0,1s + 4}.$$

На основании свойства преобразования Лапласа получаем

$$e_{\pi}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE_{\pi}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{0,075}{0,1s + 4} = 0,75.$$

В соответствии с (4.13) имеем

$$J_{20} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{0,075}{0,1j\omega + 4} \right|^2 d\omega.$$

В данном случае (см. (4.16))  $n = 1$ ,  $b_0 = 0,075$ ,  $a_0 = 0,1$ ,  $a_1 = 4$ . Поэтому согласно (4.17а)

$$J_{20} = \frac{b_0^2}{2a_0a_1} = 0,007.$$

Теперь найдем  $J_{21}$ . Учитывая (4.13), из (4.15) получаем

$$J_{21} = J_{20} + \tau^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega E_{\pi}(j\omega) - e_{\pi}(0)|^2 d\omega.$$

Так как

$$sE_{\pi}(s) - e_{\pi}(0) = \frac{0,075 s}{0,1 s + 4} - 0,75 = -\frac{3}{0,1 s + 4},$$

имеем

$$J_{21} = J_{20} + \tau^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{3}{0,1 j\omega + 4} \right|^2 d\omega = J_{20} + \tau^2 I_1 = 0,007 + 11,25 \tau^2.$$

О т в е т:  $J_{20} = 0,007$ ,  $J_{21} = 0,007 + 11,25 \tau^2$ .

**Пример 4.4.** Определить интегральные показатели  $J_{20}$  и  $J_{21}$  системы (см. рис. 4.1,  $a$ ,  $f \equiv 0$ ) при условии, что передаточная функция  $W(p) = \frac{k}{(Tp+1)p}$ .

**Решение.** Найдем сначала изображение ошибки  $E(s)$  и установившуюся ошибку  $e_{\infty}$ :

$$E(s) = W_{eg}(s)G(s) = \frac{1}{1+W(s)} \frac{1}{s} = \frac{Ts+1}{Ts^2+s+k},$$

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(Ts+1)s}{Ts^2+s+k} = 0.$$

Отсюда получаем

$$e_{\pi}(t) = e(t) - e_{\infty} = e(t), \quad E_{\pi}(s) = E(s) = \frac{Ts+1}{Ts^2+s+k},$$

$$e_{\pi}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE_{\pi}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(Ts+1)s}{Ts^2+s+k} = 1,$$

$$sE_{\pi}(s) - e_{\pi}(0) = \frac{(Ts+1)s}{Ts^2+s+k} - 1 = \frac{-k}{Ts^2+s+k}.$$

Поэтому

$$J_{20} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\pi}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{Tj\omega+1}{T(j\omega)^2+j\omega+k} \right|^2 d\omega = I_2.$$

В данном случае  $n = 2$ ,  $b_0 = T$ ,  $b_1 = 1$ ,  $a_0 = T$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = k$  и соответственно (см. (4.17б))

$$J_{20} = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{T^2 k + 1 \cdot T}{2Tk} = \frac{Tk + 1}{2k}.$$

Для  $J_{21}$  имеем

$$\begin{aligned} J_{21} &= J_{20} + \tau^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega E_{\pi}(j\omega) - e_{\pi}(0)|^2 d\omega = \\ &= J_{20} + \tau^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{k}{Tj\omega^2 + j\omega + k} \right|^2 d\omega = J_{20} + \tau^2 \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_0 a_1 a_2}. \end{aligned}$$

Здесь  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = k$ ,  $a_0 = T$ ,  $a_1 = 1$  и  $a_2 = k$ . Поэтому

$$J_{21} = \frac{Tk + 1}{2Tk} + \tau^2 \frac{k^2 T}{2Tk} = \frac{\tau^2 k^2 + Tk + 1}{2k}.$$

Ответ:  $J_{20} = \frac{Tk + 1}{2k}$ ,  $J_{21} = \frac{\tau^2 k^2 + Tk + 1}{2k}$ .

**4.2.4. Частотные показатели качества.** В качестве частотных показателей качества используют резонансный пик, полосу пропускания, запас устойчивости по фазе и запас устойчивости по амплитуде.

Резонансный пик и полосы пропускания определяются по амплитудной частотной характеристике (рис. 4.5). *Резонансным пиком* или

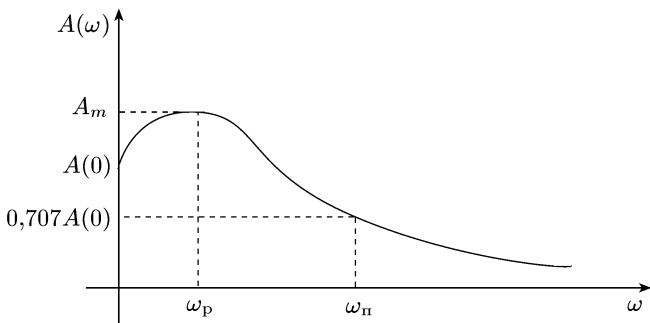


Рис. 4.5. Амплитудная частотная характеристика

*показателем колебательности* называется отношение максимального значения  $A_m$  к начальному значению  $A(0)$ :  $M = A_m/A(0)$ . В большинстве систем управления считается желательным, чтобы резонансный пик находился в пределах от 1,1 до 1,5. Частота  $\omega_p$ , при которой  $A(\omega)$  достигает максимального значения ( $A_m = A(\omega_p)$ ), называется *резонансной частотой*.

*Полосой пропускания* называют диапазон частот  $(0, \omega_n)$ , где  $\omega_n$  — частота, при которой  $A(\omega_n)$  принимает значение  $0,707A(0)$ .

*Запасы устойчивости по фазе и амплитуде* характеризуют близость системы к границе устойчивости и определяются по амплитудно-фазовой частотной характеристике (АФЧХ) и логарифмическим частотным характеристикам (ЛЧХ) разомкнутой системы.

По АФЧХ запас устойчивости по амплитуде  $L_y$  и запас устойчивости по фазе  $\varphi_y$  определяются следующим образом. Пусть АФЧХ пересекает окружность единичного радиуса при частоте  $\omega_c$ , а отрицательную вещественную полуось при частоте  $\omega_\pi$  (рис. 4.6, а).

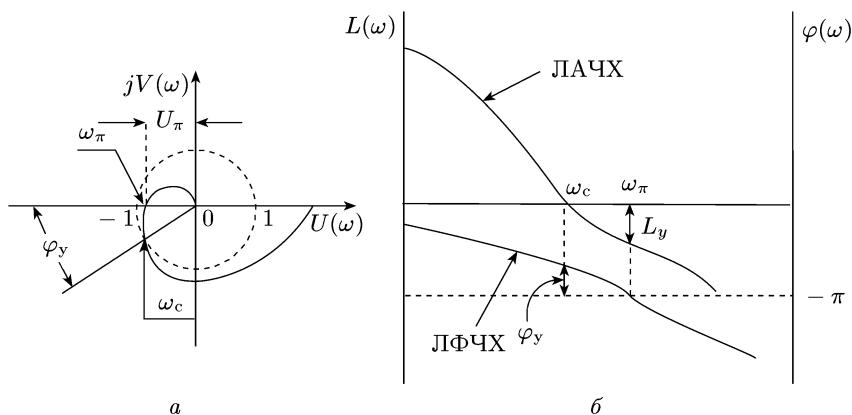


Рис. 4.6. Частотные характеристики разомкнутой системы: а — АФЧХ; б — ЛАЧХ и ЛФЧХ

Запас устойчивости по амплитуде  $L_y = 20 \lg \frac{1}{U_\pi}$  ( $U_\pi = |U(\omega_\pi)|$ ) и запас устойчивости по фазе  $\varphi_y = \pi + \varphi(\omega_c)$ . Определение запасов устойчивости по ЛЧХ показано на рис. 4.6, б.

### 4.3. Показатели качества в установившемся режиме

Наиболее полной характеристикой качества системы в установившемся режиме является установившаяся ошибка. Когда внешние воздействия являются функциями времени, установившаяся ошибка как вынужденная составляющая ошибки также является функцией времени. Поэтому в общем случае установившуюся ошибку будем обозначать  $e_{\text{в}}(t)$ . Установившаяся ошибка определяется следующим образом:

$$e_{\text{в}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t).$$

Если на систему действуют два внешних воздействия — задающие воздействия  $g(t)$  и возмущения  $f(t)$ , то установившуюся ошибку можно представить в виде суммы:

$$e_{\text{в}}(t) = e_{\text{в}g}(t) + e_{\text{в}f}(t),$$

где  $e_{\text{в}g}(t)$  и  $e_{\text{в}f}(t)$  — установившиеся ошибки от задающего воздействия  $g(t)$  и возмущения  $f(t)$  соответственно.

**Коэффициенты ошибок.** Числовыми показателями качества в установившемся режиме являются коэффициенты ошибок, которые определяются следующим образом.

Как покажем ниже, установившуюся ошибку  $e_{\text{вг}}(t)$  можно представить в виде ряда

$$e_{\text{вг}}(t) = C_{g0}g(t) + C_{g1} \frac{dg(t)}{dt} + C_{g2} \frac{d^2g(t)}{dt^2} + \dots, \quad (4.18a)$$

где

$$C_{g0} = W_{eg}(0), \quad C_{gi} = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_{eg}(s)}{ds^i} \right|_{s=0}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.18б)$$

Здесь  $W_{eg}(s)$  — передаточная функция относительно входа  $g(t)$  и выхода  $e(t)$ . Коэффициенты  $C_{gk}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) называются *коэффициентами ошибки по задающему воздействию*.

Аналогично можно представить установившуюся ошибку  $e_{\text{вф}}(t)$ :

$$e_{\text{вф}}(t) = C_{f0}f(t) + C_{f1} \frac{df(t)}{dt} + C_{f2} \frac{d^2f(t)}{dt^2} + \dots, \quad (4.19a)$$

$$C_{f0} = W_{ef}(0), \quad C_{fi} = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W_{ef}(s)}{ds^i} \right|_{s=0}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.19б)$$

Здесь  $W_{ef}(s)$  — передаточная функция относительно входа  $f(t)$  и выхода  $e(t)$ . Предполагается, что возмущение не приложено в одной точке с задающим устройством. Коэффициенты  $C_{fk}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) называются *коэффициентами ошибки по возмущению*.

Первые три коэффициента ошибок имеют специальные названия:  $C_{g0}$  и  $C_{f0}$  — *коэффициенты позиционной ошибки*;  $C_{g1}$  и  $C_{f1}$  — *коэффициенты скоростной ошибки*;  $C_{g2}$  и  $C_{f2}$  — *коэффициенты ошибки по ускорению*.

**Вывод формул (4.18).** Если воздействие  $g(t)$  начинает действовать в момент  $t_0 \geq 0$ , то ошибка  $e_g(t)$  определяется по формуле:

$$e_g(t) = \int_0^t w_{eg}(t - \tau)g(\tau) d\tau,$$

где  $w_{eg}(t)$  — весовая функция относительно входа  $g(t)$  и выхода  $e(t)$ .

Если воздействие  $g(t)$  начинает действовать в момент  $t_0 = -\infty$ , то к моменту  $t$  ошибка  $e_g(t)$  установится и станет равной  $e_{\text{вг}}(t)$ . Поэтому имеем

$$e_{\text{вг}}(t) = \int_{-\infty}^t w_{eg}(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Сделав замену переменных  $\xi = t - \tau$ , получим

$$e_{\text{вг}}(t) = \int_0^{\infty} w_{eg}(\xi)g(t - \xi) d\xi.$$

Разложим функцию  $g(t - \xi)$  в ряд Тейлора в точке  $t$ :

$$g(t - \xi) = g(t) + \frac{1}{1!} \frac{dg(t)}{dt}(-\xi) + \frac{1}{2!} \frac{d^2g(t)}{dt^2} \xi^2 + \dots$$



Подставив это выражение, верхнюю формулу для  $e_{vg}(t)$  можно представить в виде

$$e_{vg}(t) = \tilde{C}_0 g(t) + \tilde{C}_1 \frac{dg(t)}{dt} + \tilde{C}_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots,$$

где

$$\tilde{C}_0 = \int_0^\infty w_{eg}(\xi) d\xi, \quad \tilde{C}_i = \frac{1}{i!} \int_0^\infty w_{eg}(\xi) (-1)^i \xi^i d\xi, \quad i = 1, 2, \dots$$

Остается показать, что  $\tilde{C}_k = C_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Передаточная функция  $W_{eg}(s)$  связана с весовой функцией преобразованием Лапласа:

$$W_{eg}(s) = \int_0^\infty w_{eg}(t) e^{-st} dt.$$

Дифференцируя обе части этого равенства  $i$  раз по  $s$ , получим

$$\frac{d^i W_{eg}(s)}{ds^i} = \int_0^\infty (-1)^i t^i w_{eg}(t) e^{-st} dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0 &= \int_0^\infty w_{eg}(t) dt = \int_0^\infty w_{eg}(t) e^{-st} dt \Big|_{s=0} = W_{eg}(0) = C_0, \\ \tilde{C}_i &= \frac{1}{i!} \int_0^\infty (-1)^i t^i w_{eg}(t) dt = \frac{1}{i!} \int_0^\infty (-1)^i t^i w_{eg}(t) e^{-st} dt \Big|_{s=0} = \\ &= \frac{1}{i!} \frac{d^i W_{eg}(s)}{ds^i} \Big|_{s=0} = C_i. \end{aligned}$$

**Статические и астатические системы.** Установившаяся ошибка при постоянном внешнем воздействии называется *статической ошибкой*.

Система называется *статической*, если статическая ошибка отлична от нуля, и *астатической*, если статическая ошибка равна нулю.

Можно говорить о статической и астатической системах относительно того или иного внешнего воздействия.

Система называется *статической относительно задающего воздействия (возмущения)*, если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) отлична от нуля, и *астатической относительно задающего воздействия (возмущения)*, если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) равна нулю.

Формулы (4.18) и (4.19) при постоянных  $g$  и  $f$  принимают вид

$$e_{vg}(t) = e_{g\infty} = C_{g0} g, \quad C_{g0} = W_{eg}(0),$$

$$e_{vf}(t) = e_{f\infty} = C_{f0} f, \quad C_{f0} = W_{ef}(0).$$

Отсюда следует, что система будет статической относительно воздействия  $g$  (возмущения  $f$ ), если  $C_{g0} \neq 0$  ( $C_{f0} \neq 0$ ), и астатической

относительно задающего воздействия  $g$  (возмущения  $f$ ), если  $C_{g0} = 0$  ( $C_{f0} = 0$ ).

Говорят, что астатическая система относительно задающего воздействия обладает *астатизмом  $r$ -го порядка*, если

$$C_{g0} = C_{g1} = \dots = C_{gr-1} = 0, \quad C_{gr} \neq 0.$$

Аналогично определяется астатическая система с астатизмом  $r$ -го порядка относительно возмущения.

Если система обладает астатизмом  $r$ -го порядка, то коэффициенты ошибок  $C_{gi}$  ( $C_{fi}$ ) при  $i = 1, 2, \dots, r$  можно определить следующим образом:

$$C_{gi} = \frac{W_{eg}(s)}{s^i} \Big|_{s=0} \left( C_{fi} = \frac{W_{ef}(s)}{s^i} \Big|_{s=0} \right), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.20)$$

Иначе говоря, этими более простыми, чем (4.186) и (4.196), формулами можно пользоваться при вычислении до первого отличного от нуля коэффициента включительно.

**Вывод формул (4.20).** Первые  $r$  коэффициентов ошибки по задающему воздействию равны нулю, если

$$W_{eg}(0) = 0, \quad \frac{d^i W_{eg}(s)}{ds^i} \Big|_{s=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r-1.$$

Последнее имеет место, если  $s = 0$  является  $r$ -кратным нулем передаточной функции  $W_{eg}(s)$ , т.е. если  $W_{eg}(s)$  можно представить в виде

$$W_{eg}(s) = s^r W_0(s), \quad W_0(0) \neq 0. \quad (4.21)$$

Отсюда видно, что формулы (4.20) при  $i = 1, 2, \dots, r-1$  справедливы. Остается показать, что они справедливы и при  $i = r$ .

Продифференцируем  $W_{eg}(s)$   $r$  раз по  $s$ :

$$\frac{dW_{eg}(s)}{ds} = rs^{r-1}W_0(s) + s^rW_1(s), \quad W_1(s) = \frac{dW_0(s)}{ds};$$

$$\frac{d^2W_{eg}(s)}{ds^2} = r(r-1)s^{r-2}W_0(s) + s^{r-1}W_2(s),$$

$$W_2(s) = r \frac{dW_0(s)}{ds} + rW_1(s) + s \frac{dW_1(s)}{ds};$$

$$\frac{d^3W_{eg}(s)}{ds^3} = r(r-1)(r-2)s^{r-3}W_0(s) + s^{r-2}W_3(s),$$

$$W_3(s) = r(r-1) \frac{dW_0(s)}{ds} + (r-1)W_2(s) + s \frac{dW_2(s)}{ds};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^r W_{eg}(s)}{ds^r} = r! W_0(s) + s W_r(s),$$

$$W_r(s) = r(r-1) \dots 2 \frac{dW_0(s)}{ds} + 2W_{r-1}(s) + s \frac{dW_{r-1}(s)}{ds}.$$

Из последнего соотношения получаем

$$C_r = \frac{1}{r!} \frac{d^r W_{eg}(s)}{ds^r} \Big|_{s=0} = W_0(s) \Big|_{s=0} = \frac{W_{eg}(s)}{s^r} \Big|_{s=0},$$

что и требовалось показать.

Пример 4.5. Определить установившуюся ошибку системы (рис. 4.7) при  $W_1 = 0,5$ ,  $W_2 = \frac{4}{p(p+1)}$ ,  $g(t) = 1 + 0,1t$  и  $f(t) = 0,2$ .

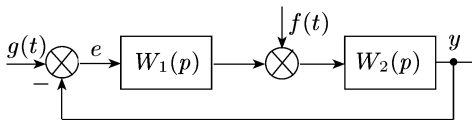


Рис. 4.7. Типовая схема системы управления

Решение. Так как все производные от  $f(t)$  и производные 2-го порядка и выше от  $g(t)$  равны нулю, формулы (4.18a) и (4.19a) принимают вид

$$e_{bg}(t) = C_{g0}g(t) + C_{g1}\frac{dg(t)}{dt}, \quad e_{bf}(t) = C_{f0}f(t).$$

Поэтому для определения искомой ошибки достаточно вычислить коэффициенты ошибок  $C_{g0}$ ,  $C_{g1}$ ,  $C_{f0}$ .

Передаточные функции ошибки имеют вид

$$W_{eg}(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{s(s+1)}{s(s+1)+2},$$

$$W_{ef}(s) = \frac{-W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{-4}{s(s+1)+2}.$$

Отсюда  $C_{g0} = W_{eg}(0) = 0$ ,  $C_{f0} = W_{ef}(0) = -2$ . Так как  $C_{g0} = 0$ , то  $C_{g1}$  можно вычислить по формуле (4.20):

$$C_{g1} = \left. \frac{W_{eg}(s)}{s} \right|_{s=0} = \left. \frac{s+1}{s(s+1)+2} \right|_{s=0} = 0,5.$$

Таким образом, для ошибок имеем

$$e_{bg} = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05, \quad e_{bf} = -2 \cdot 0,2 = -0,4,$$

$$e_b = e_{bg} + e_{bf} = 0,05 - 0,4 = -0,35.$$

Пример 4.6. Определить установившуюся ошибку системы (см. рис. 4.7) при  $W_1(p) = 0,5 + \frac{0,1}{p}$ ,  $W_2(p) = \frac{4}{p(p+1)}$ ,  $g(t) = 1 + 0,1t$ ,  $f(t) = 0,2(1+t)$ .

Решение. Так как производные от  $g(t)$  и  $f(t)$  2-го порядка и выше равны нулю, то формулы (4.18a) и (4.19a) принимают вид

$$e_{bg}(t) = C_{g0}g(t) + C_{g1}\frac{dg(t)}{dt},$$

$$e_{bf}(t) = C_{f0}f(t) + C_{f1}\frac{df(t)}{dt}.$$

Поэтому для определения ошибки достаточно вычислить первые два коэффициента ошибок. Передаточные функции ошибки имеют вид

$$W_{eg}(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{s^2(s+1)}{s^2(s+1) + 2s + 0,4},$$

$$W_{ef}(s) = \frac{-W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{-4s}{s^2(s+1) + 2s + 0,4}.$$

Отсюда

$$C_{g0} = W_{eg}(0) = 0, \quad C_{f0} = W_{ef}(0) = 0.$$

Так как коэффициенты позиционной ошибки равны нулю, коэффициенты скоростной ошибки можно вычислить по формуле (4.20):

$$C_{g1} = \left. \frac{W_{eg}(s)}{s} \right|_{s=0} = \frac{s(s+1)}{s^2(s+1) + 2s + 0,4} = 0,$$

$$C_{f1} = \left. \frac{W_{ef}(s)}{s} \right|_{s=0} = \frac{-4}{s^2(s+1) + 2s + 0,4} \Big|_{s=0} = -10.$$

Таким образом, для ошибок имеем

$$e_{vg} = 0, \quad e_{vf} = -10 \cdot 0,2 = -2, \quad e_{\text{в}} = e_{vg} + e_{vf} = -2.$$

#### 4.4. Структура астатической системы управления

Рассмотрим систему управления с двумя входами (см. рис. 4.7). Пусть передаточные функции  $W_1$  и  $W_2$  имеют вид

$$W_1(s) = \frac{P_1(s)}{R_1(s)}, \quad W_2(s) = \frac{P_2(s)}{R_2(s)}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{P(s)}{R(s)},$$

где  $P(s) = P_1(s)P_2(s)$ ,  $R(s) = R_1(s)R_2(s)$ .

Передаточная функция ошибки по задающему воздействию имеет вид

$$W_{eg}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{R(s)}{R(s) + P(s)}.$$

Для того чтобы система управления была астатической с астатизмом  $r$ -го порядка относительно задающего воздействия, как было показано, передаточная функция  $W_{eg}(s)$  должна иметь вид (4.21). А это возможно, если передаточную функцию разомкнутой системы можно представить в виде

$$W(s) = \frac{k}{s^r} W_0(s), \quad W_0(0) = \frac{P_0(0)}{R_0(0)} = 1. \quad (4.22)$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет такой вид, если система содержит  $r$  последовательно соединенных интегрирующих звеньев.

Интегрирующие звенья должны быть включены в основной контур, а не в контур, образованный местной обратной связью. При этом они могут быть включены параллельно с какими-либо другими элементами. Например, предположим, что  $W_1(s)$  — передаточная функция ПИД-регулятора:

$$W_1(s) = k_{\text{п}} + k_{\text{д}}s + \frac{k_{\text{и}}}{s}.$$

В данном случае интегрирующее звено включено параллельно с пропорциональным и дифференцирующим звеньями. После приведения к общему знаменателю получим

$$W_1(s) = (k_n s + k_d s^2 + k_i) \frac{1}{s},$$

что соответствует последовательному соединению форсирующего звена 2-го порядка и интегрирующего звена.

Таким образом, для того чтобы система управления была астатической с астатизмом  $r$ -го порядка относительно задающего воздействия, нужно чтобы она содержала  $r$  последовательно соединенных интегрирующих звеньев. При этом не важно, в какой точке замкнутого контура они включены.

Передаточная функция ошибки по возмущению имеет вид

$$W_{ef}(s) = \frac{-W_2(s)}{1 + W(s)} = -\frac{P_2(s)R_1(s)}{R_1(s)R_2(s) + P_1(s)P_2(s)}.$$

Передаточная функция  $W(s)$  разомкнутой системы и соответственно передаточные функции  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  не могут содержать множитель  $s$ , так как, если  $W(s)$  имеет множитель  $s$ , через такую систему не передается постоянная составляющая. Поэтому для того чтобы передаточная функция  $W_{ef}(s)$  могла быть представлена в виде  $W_{ef}(s) = s^r W_0(s)$ ,  $W(0) \neq 0$ , нужно, чтобы  $R_1(s)$ , т.е. знаменатель передаточной функции  $W_1(s)$ , содержал множитель  $s^r$ .

Таким образом, для того чтобы система управления была астатической с астатизмом  $r$ -го порядка относительно возмущения, нужно, чтобы она содержала  $r$  последовательно соединенных интегрирующих звеньев, включенных между точкой съема ошибки и у точкой приложения возмущения  $f$ .

Если система управления является астатической с астатизмом  $r$ -го порядка, то

$$C_{gi} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-1; \quad C_{gr} = \frac{1}{k}, \quad (4.23a)$$

когда система является астатической относительно задающего воздействия, и

$$C_{fi} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, r-1; \quad C_{fr} = \frac{1}{k_1}, \quad (4.23b)$$

когда система является астатической относительно возмущения. Здесь  $k$  — передаточный коэффициент разомкнутой системы,  $k_1$  — передаточный коэффициент звена, включенного между точкой съема ошибки и точкой приложения возмущения.

Первые  $r$  равенств в (4.23) следуют из определения астатической системы с астатизмом  $r$ -го порядка. Последнее равенство в (4.23a) получается следующим образом.

В силу (4.22)

$$W_{eg} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s^r}{s^r + kW_0(s)},$$

откуда

$$C_{gr} = \left. \frac{W_{eg}(s)}{s^r} \right|_{s=0} = \frac{1}{k}.$$

Когда система является астатической с астатизмом  $r$ -го порядка относительного возмущения, передаточные функции  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  можно представить в виде

$$W_1(s) = \frac{k_1}{s^r} W_{10}(s), \quad W_2(s) = \frac{k_2}{s^\nu} W_{20}(s),$$

$$W_{10}(0) = W_{20}(0) = 1 \quad (\nu \geq 0),$$

и передаточная функция ошибки относительно возмущения имеет вид

$$W_{eg}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = \frac{s^r k_2 W_{20}(s)}{s^{r+\nu} + k_1 k_2 W_{10}(s)W_{20}(s)}.$$

Отсюда

$$C_{fr} = \left. \frac{W_{ef}(s)}{s^r} \right|_{s=0} = \frac{1}{k_1}.$$

Если возмущение  $f(t)$  действует на входе сравнивающего устройства, то (см. (4.2))

$$e_f(t) = -W_{yf}(p)f(t),$$

и коэффициенты ошибки по возмущению определяются по передаточной функции  $-W_{yf}(s)$ . В этом случае, чтобы система управления была астатической с астатизмом  $r$ -го порядка относительно возмущения, нужно, чтобы передаточная функция  $W_{yf}(s)$  могла быть представлена в виде (4.21). Так как

$$W_{yf}(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{P(s)}{R(s) + P(s)},$$

где  $W(s) = P(s)/R(s)$  — передаточная функция разомкнутой системы, то она не может быть представлена в виде (4.21).

Таким образом, *если возмущение приложено в точке приложения задающего воздействия, система управления не может быть астатической относительно этого возмущения.*

**Пример 4.7.** Определите порядок астатизма и установившуюся ошибку системы (см. рис. 4.7) при  $W_1(p) = k_n + \frac{k_n}{p}$ ,  $W_2 = \frac{k_d}{(Tp+1)p}$ ,  $g(t) = \alpha + \beta t$ ,  $f(t) = c$  ( $c = \text{const}$ ).

Так как передаточная функция  $W_1(s) = k_n + \frac{k_n}{s} = \frac{k_n s + k_n}{s}$  и передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{k_d(k_n s + k_n)}{(Ts+1)s^2},$$

то рассматриваемая система управления является астатической с астатизмом 2-го порядка относительно задающего воздействия и астатической с астатизмом 1-го порядка относительно возмущения. Следовательно, коэффициенты ошибки  $C_{g0} = C_{g1} = 0$  и  $C_{f0} = 0$ . Установившаяся ошибка

$$e_b(t) = e_{bg}(t) + e_{bf}(t) = C_{g0}g(t) + C_{g1}\frac{dg(t)}{dt} + C_{f0}f(t) = 0.$$

## 4.5. Инвариантность и принцип двухканальности

Как отмечалось при рассмотрении принципов управления, способ управления по возмущению позволяет полностью компенсировать влияние возмущающего воздействия на выходную (управляемую) переменную. При полной компенсации возмущения  $f(t)$  выходная переменная  $y(t)$  при действии  $f(t)$  остается такой же, как и при его отсутствии, т. е. остается неизменной (инвариантной). Поэтому если выходная переменная системы не зависит от какого-либо воздействия, то такую систему (выходную переменную) называют *инвариантной* от этого воздействия. Таким образом, *инвариантность системы* от воздействия  $f(t)$  означает независимость ее выходной переменной от  $f(t)$ . Рассмотрим условия инвариантности.

Пусть на систему действуют два внешних воздействия,  $g(t)$  и  $f(t)$ . Тогда выходную переменную  $y(t)$  можно представить в виде

$$y(t) = y_g(t) + y_f(t),$$

где  $y_g(t)$  — реакция системы на  $g(t)$  при  $f(t) \equiv 0$ ;  $y_f(t)$  — реакция системы на  $f(t)$  при  $g(t) \equiv 0$ .

Если  $W_{yf}(p)$  — передаточная функция относительно входа  $f(t)$  и выхода  $y(t)$  и, следовательно,

$$y_f(t) = W_{yf}(p)f(t),$$

то  $y_f(t) \equiv 0$  только при

$$W_{yf}(p) = 0. \quad (4.24a)$$

Рассмотрим, как можно реализовать это *условие инвариантности*.

Пусть в системе используется принцип управления по возмущению  $f(t)$  и  $W_{yf}^B(p)$  — передаточная функция канала возмущения,  $W_{yf}^K(p)$  — передаточная функция канала компенсации (рис. 4.8).

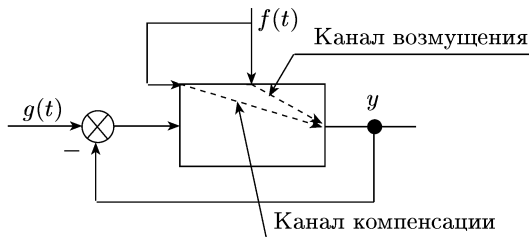


Рис. 4.8. Принцип двухканальности

Так как канал возмущения и канал компенсации соединены параллельно, то  $W_{yf}(p) = W_{yf}^B(p) + W_{yf}^K(p)$ , и условие инвариантности (4.24) можно представить в виде

$$W_{yf}^K(p) = -W_{yf}^B(p). \quad (4.24б)$$

Необходимость наличия по меньшей мере двух каналов для реализуемости условия инвариантности Б.Н. Петров сформулировал в виде следующего принципа.

**Принцип двухканальности.** В динамической системе должно быть по меньшей мере два канала прохождения возмущающего воздействия к переменной, инвариантность которой от этого воздействия должна быть обеспечена.

## Задачи

**1.** Определить, обладают ли заданные системы управления степенью устойчивости  $\eta \geq 0,5$ :

а)  $W(s) = \frac{5}{s^2 + 5s + 6}$ ; б)  $W(s) = \frac{2}{s^2 + s + 1}$ ;

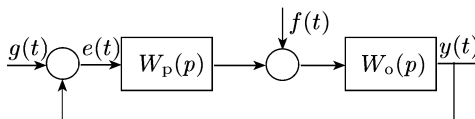
в)  $W(s) = \frac{10(s+1)}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$ ; г)  $W(s) = \frac{10(s^2 + s + 1)}{s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1}$ .

**2.** По заданным передаточным функциям разомкнутой системы определить интегральные квадратическую оценку  $J_{20}$  и обобщенную квадратическую оценку  $J_{21}$  замкнутой системы:

а)  $W(s) = \frac{2}{s}$ ; б)  $W(s) = \frac{5}{s(s+1)}$ ;

в)  $W(s) = \frac{0,2}{s(s^3 + 3s + 1)}$ ; г)  $W(s) = \frac{0,2(s+1)}{s(s^3 + 3s + 1)}$ .

**3.** Определить установившуюся ошибку системы



для следующих данных:

а)  $g(t) = 0,1t$ ,  $f(t) = 0,2$ ,  $W(p) = 1 + 0,1p$ ,  $W(p) = \frac{10}{p(p+1)}$ ;

б)  $g(t) = 0,1t$ ,  $f(t) = 0,2$ ,  $W(p) = 1 + \frac{0,1}{p}$ ,  $W(p) = \frac{10}{p+1}$ ;

в)  $g(t) = 0,1$ ,  $f(t) = 0,2t$ ,  $W(p) = 1 + \frac{0,1}{p}$ ,  $W(p) = \frac{10}{p+1}$ ;

г)  $g(t) = 0,1$ ,  $f(t) = 0,2t$ ,  $W(p) = 1 + \frac{0,1}{p}$ ,  $W(p) = \frac{10}{p+1}$ .

**4.** Какая из систем, приведенных в задаче 3, является астатической относительно задающего воздействия, относительно возмущения, относительно задающего воздействия и возмущения и почему?



**5.** В системе управления, приведенной в задаче 3, передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{10}{s+1}$ . Выяснить, каким порядком астатизма обладает система относительно задающего воздействия и относительно возмущения при следующих законах управления:

а)  $W_p(s) = 1 + 0,1 s$ ;   б)  $W_p(s) = 1 + \frac{0,1}{s}$ ;

в)  $W_p(s) = 1 + 0,2 s + \frac{0,1}{s}$ .

**6.** В системе управления, приведенной в задаче 3, передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{10}{s(s+1)}$ . Каким порядком астатизма обладает система относительно задающего воздействия и относительно возмущения при следующих законах управления:

а)  $W_p(s) = 1 + 0,1 s$ ;   б)  $W_p(s) = 1 + \frac{0,1}{s}$ ;

в)  $W_p(s) = 1 + 0,2 s + \frac{0,1}{s}$ .

## Глава 5

### СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В теории управления основными задачами, которые в ней рассматриваются, являются задачи анализа и синтеза. Задача анализа сводится к исследованию устойчивости и качества системы управления. Методы ее решения были рассмотрены в предыдущих главах. Настоящая глава посвящена методам решения задачи синтеза, которая формируется следующим образом:

- задана структура системы управления и по заданным показателям качества требуется определить ее параметры;
- задан объект управления и требуется по заданным показателям качества определить алгоритм управления.

#### 5.1. Исследование типовых законов управления

В гл. 1 были рассмотрены типовые законы управления. Для выбора того или иного закона управления необходимо знать, какое влияние оказывает каждое из слагаемых, входящее в закон управления, на устойчивость и качество системы управления. Для выяснения

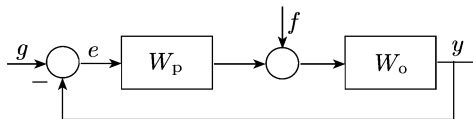


Рис. 5.1. Типовая схема системы управления

этого вопроса рассмотрим систему управления (рис. 5.1) при типовых законах управления, когда передаточная функция объекта имеет вид

$$W_o(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1}.$$

**П-з а к о н.** При П-законе передаточная функция регулятора  $W_p(p) = k_{\pi}$ , и передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = \frac{k_{\pi}}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1}.$$

Характеристическое уравнение

$$T^2\lambda^2 + 2\zeta T\lambda + 1 + k_{\pi} = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - (1 + k_{\pi})}}{T}.$$

Отсюда видно, что если объект управления является колебательным звеном ( $0 < \zeta < 1$ ), то замкнутая система при любом  $k_{\pi} > 0$  является также колебательным звеном, и степень колебательности  $\mu = \frac{k_{\pi} + 1 - \zeta^2}{\zeta}$  с ростом  $k_{\pi}$  возрастает.

Когда объект является апериодическим звеном 2-го порядка ( $\zeta \geq 0$ ), замкнутая система также является апериодическим звеном 2-го порядка при  $k_{\pi} \leq \zeta^2 - 1$  и колебательным звеном при  $k_{\pi} > \zeta^2 - 1$ .

Передаточные функции ошибки по задающему воздействию и по возмущению имеют вид

$$W_{eg}(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1 + k_{\pi}},$$

$$W_{ef}(p) = \frac{-W_o(p)}{1 + W(p)} = \frac{-1}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1 + k_{\pi}},$$

и для коэффициентов позиционной ошибки имеем

$$C_{g0} = W_{eg}(0) = \frac{1}{1 + k_{\pi}}, \quad C_{f0} = W_{ef}(0) = \frac{-1}{1 + k_{\pi}}.$$

Отсюда видно, что при П-регуляторе рассматриваемая система является статической, и статическая ошибка убывает с ростом  $k_{\pi}$ . Однако начиная с  $k_{\pi} = \zeta^2 - 1$  с ростом  $k_{\pi}$  увеличивается степень колебательности.

Таким образом, можно сделать вывод: с увеличением  $k_{\pi}$  качество системы в установившемся режиме улучшается, а в переходном режиме ухудшается.

ПИ-закон. В этом случае  $W_p(p) = k_{\pi} + \frac{k_{\text{и}}}{p}$ , передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = \frac{k_{\pi}p + k_{\text{и}}}{p(T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1)},$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$T^2\lambda^3 + 2\zeta T\lambda^2 + (1 + k_{\pi})\lambda + k_{\text{и}} = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения положительны, определитель Гурвица 2-го порядка

$$\Delta_2 = 2\zeta T(1 + k_{\pi}) - T^2 k_{\text{и}}$$

при  $k_{\text{и}} < \frac{2\zeta}{T}(1 + k_{\pi})$  больше нуля и система устойчива, а при  $k_{\text{и}} \geq \frac{2\zeta}{T}(1 + k_{\pi})$  меньше или равен нулю и система неустойчива. Следо-

вательно, увеличение коэффициента при интегральном члене приводит к неустойчивости системы. Естественно ожидать, что с увеличением  $k_{\text{и}}$  в области устойчивости запасы устойчивости убывают, а степень колебательности увеличивается.

Так как передаточные функции ошибки имеют вид

$$W_{eg}(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{p(T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1)}{p(T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1) + k_{\text{и}} p + k_{\text{и}}},$$

$$W_{ef}(p) = \frac{-W_o(p)}{1 + W(p)} = \frac{-p}{p(T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1) + k_{\text{и}} p + k_{\text{и}}},$$

то коэффициенты ошибок имеют вид

$$C_{g0} = W_{eg}(0) = 0, \quad C_{g1} = \left. \frac{W_{eg}(p)}{p} \right|_{p=0} = \frac{1}{k_{\text{и}}},$$

$$C_{f0} = W_{ef}(0) = 0, \quad C_{f1} = \left. \frac{W_{ef}(p)}{p} \right|_{p=0} = -\frac{1}{k_{\text{и}}}.$$

Таким образом, при включении интегрального слагаемого в закон управления система становится астатической, и с увеличением  $k_{\text{и}}$  уменьшается скоростная ошибка. Однако при этом ухудшается качество системы в переходном режиме, и с определенного  $k_{\text{и}}$  система становится неустойчивой.

ПД-закон. При этом законе  $W_p(p) = k_{\text{п}} + k_{\text{д}} p$ , а передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = \frac{k_{\text{п}} + k_{\text{д}} p}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1},$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$T^2 \lambda^2 + (2\zeta T + k_{\text{д}}) \lambda + 1 + k_{\text{п}} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k_{\text{д}} + 2\zeta T) \pm \sqrt{(k_{\text{д}} + 2\zeta T)^2 - 4T^2(1 + k_{\text{п}})}}{2T^2}.$$

Когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е.

$$(k_{\text{д}} + 2\zeta T)^2 - 4T^2(1 + k_{\text{п}}) \geq 0,$$

или

$$k_{\text{д}} \geq 2T(\sqrt{k_{\text{п}} + 1} - \zeta), \quad (5.1)$$

система управления является аperiodическим звеном 2-го порядка. Если выполняется противоположное неравенство, т. е.

$$k_{\text{д}} < 2T(\sqrt{k_{\text{п}} + 1} - \zeta), \quad (5.2)$$

то система является колебательным звеном, а степень устойчивости  $\eta$  и степень колебательности  $\mu$  соответственно принимают вид

$$\eta = \frac{k_{\text{д}} + 2\zeta T}{2T^2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{4T^2(k_{\text{п}} + 1)}{(k_{\text{д}} + 2\zeta T)^2} - 1}.$$

Следовательно, при выполнении условия (5.2) с ростом  $k_{\text{д}}$  степень устойчивости возрастает, а степень колебательности убывает.

При выполнении условия (5.1) степень устойчивости имеет вид

$$\eta = \frac{k_d + 2\zeta T - \sqrt{(k_d + 2\zeta T)^2 - 4T^2(k_n + 1)}}{2T^2},$$

и, продифференцировав это выражение по  $k_d$ , получим

$$\frac{d\eta}{dk_d} = \frac{1}{2T^2} \left[ 1 - \frac{k_d + 2\zeta T}{\sqrt{(k_d + 2\zeta T)^2 - 4T^2(k_n + 1)}} \right] < 0.$$

Следовательно, в этом случае степень устойчивости с ростом  $k_d$  убывает.

Передаточные функции ошибки имеют вид

$$W_{eg}(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1}{T^2 p^2 + (2\zeta T + k_d)p + 1 + k_n},$$

$$W_{ef}(p) = \frac{-W_o(p)}{1 + W(p)} = \frac{-1}{T^2 p^2 + (2\zeta T + 1)p + k_n p + k_n},$$

и для коэффициентов позиционной ошибки имеем

$$C_{g0} = W_{eg}(0) = \frac{1}{1 + k_n}, \quad C_{f0} = W_{ef}(0) = \frac{-1}{1 + k_n}.$$

Таким образом, введение в закон управления дифференцирующего члена улучшает качество системы в переходном режиме. На качество системы в установившемся режиме (при постоянных внешних воздействиях) он никакого влияния не оказывает. Но следует иметь в виду, что при чрезмерном увеличении  $k_d$  качество системы в переходном режиме может ухудшиться.

ПИД-закон. В этом случае  $W_p(p) = k_n + k_d p + \frac{k_i}{p}$ , передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = \frac{k_n p + k_d p^2 + k_i}{(T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1)p}$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$T^2 \lambda^3 + (2\zeta T + k_d) \lambda^2 + (1 + k_n) \lambda + k_i = 0.$$

Определитель Гурвица 2-го порядка

$$\Delta_2 = (2\zeta T + k_d)(1 + k_n) - T^2 k_i$$

выбором  $k_d$  всегда можно сделать положительным.

Таким образом, введение в закон управления интегрирующего члена может сделать устойчивую систему неустойчивой, а введение дифференцирующего члена может сделать неустойчивую систему устойчивой.

Для коэффициентов ошибки имеем

$$C_{g0} = W_{eg}(0) = 0, \quad C_{g1} = \left. \frac{W_{eg}(p)}{p} \right|_{p=0} = \frac{1}{k_n},$$

$$C_{f0} = W_{ef}(0) = 0, \quad C_{f1} = \left. \frac{W_{ef}(p)}{p} \right|_{p=0} = -\frac{1}{k_n}.$$

Все основные выводы о влиянии дифференцирующего и интегрирующего членов на качество системы, полученные на основе рассмотрения ПИ-закона и ПД-закона управления, сохранятся и при рассмотрении ПИД-закона.

Итак, основные выводы таковы:

1) введение в закон управления интегрирующего члена делает систему астатической и улучшает качество системы в установившемся режиме, но оказывает дестабилизирующее влияние (т. е. может сделать систему неустойчивой) и ухудшает качество системы в переходном режиме;

2) введение в закон управления дифференцирующего члена оказывает стабилизирующее влияние (может сделать неустойчивую систему устойчивой) и улучшает качество системы в переходном режиме, не оказывая влияния на качество системы в установившемся режиме.

Хотя эти выводы получены на основе исследования системы с объектом 2-го порядка, есть основания считать, что они в основном справедливы и в более общем случае.

**Пример 5.1.** Определить, при каких типовых законах управления статическая ошибка системы (см. рис. 5.1) будет равна нулю, когда передаточная функция объекта  $W_o(p) = \frac{1}{p+1}$ .

**Решение.** Статическая ошибка будет равна нулю, если система будет астатической относительно задающего воздействия и возмущения. А для этого нужно, чтобы регулятор содержал интегрирующее звено. Поэтому искомыми законами управления будут ПИ-закон и ПИД-закон.

**Пример 5.2.** Определить, при каких типовых законах управления установившаяся ошибка системы (см. рис. 5.1) будет равна нулю при условии, что  $W_o(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$ ,  $g(t) = at$  и  $f(t) = b$  ( $a, b$  — константы).

**Решение.** Так как установившаяся ошибка от задающего воздействия и возмущения имеет вид

$$e_{g\infty}(t) = C_{g0}at + C_{g1}a, \quad e_{f\infty} = C_{f0}b,$$

то установившаяся ошибка будет равна нулю, если  $C_{g0} = C_{g1} = 0$  и  $C_{f0} = 0$ . Следовательно, система должна быть астатической с астатизмом 2-го порядка относительно задающего воздействия и с астатизмом 1-го порядка относительно возмущения. Так как объект включает два последовательно соединенных интегрирующих звена, система будет астатической с астатизмом не менее 2-го порядка относительно задающего воздействия при любом типовом законе управления. Однако она будет астатической относительно возмущения только при ПИ-законе и ПИД-законе. При ПИ-законе передаточная функция

разомкнутой системы есть

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = \frac{k_{\pi}p + k_{\text{и}}}{p^3(p+1)},$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^3 + k_{\pi}\lambda + k_{\text{и}} = 0.$$

В этом уравнении коэффициент при  $\lambda^2$  равен нулю, и необходимое условие устойчивости не выполняется. Поэтому система при ПИ-законе структурно неустойчива.

При ПИД законе передаточная функция разомкнутой системы есть

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = \frac{k_{\text{д}}p^2 + k_{\pi}p + k_{\text{и}}}{p^3(p+1)},$$

и характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^3 + k_{\text{д}}\lambda^2 + k_{\pi}\lambda + k_{\text{и}} = 0.$$

Определитель Гурвица 3-го порядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & k_{\pi} & 0 \\ 1 & k_{\text{д}} & k_{\text{и}} \\ 0 & 1 & k_{\pi} \end{vmatrix} = k_{\text{д}}k_{\pi} - k_{\text{и}} - k_{\pi}^2$$

соответствующим выбором параметров регулятора можно сделать положительным. Следовательно, при ПИД-законе система структурно устойчива, и искомым законом управления является ПИД-закон.

## 5.2. Синтез параметров регулятора по минимуму интегральных оценок

Рассмотрим задачу синтеза в следующей постановке. Структура системы задана, и нужно определить ее параметры так, чтобы какая-либо заданная интегральная оценка  $J_{2k}$  приняла минимальное значение. После вычисления интеграла с помощью формулы Парсеваля получим некоторую функцию от параметров

$$J_{2\nu} = J_{2\nu}(\alpha).$$

Здесь  $\alpha$  обозначает вектор, компонентами которого являются параметры системы.

На параметры системы могут быть наложены ограничения в виде равенств и неравенств:

$$F_i(\alpha) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad G_k(\alpha) \leq 0, \quad k = m+1, m+2, \dots, M.$$

Поэтому в общем случае рассматриваемая задача синтеза сводится к следующей задаче на условный минимум:

$$J_{2\nu}(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha}, \quad F_i(\alpha) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$G_k(\alpha) \leq 0, \quad k = m+1, m+2, \dots, M. \quad (5.3)$$

Эта задача может быть решена разными способами. В частности, заменив введение дополнительных неизвестных параметров  $\beta_k$  неравенства равенствами

$$F_k(\alpha, \beta) = G_k(\alpha) + \beta_k^2 = 0, \quad k = m+1, m+2, \dots, M,$$

преобразуем задачу (5.3) к виду

$$J_{2\nu}(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha, \beta}, \quad F_l(\alpha, \beta) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (5.4)$$

где  $\beta = (\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \dots, \beta_M)$ ,  $F_l(\alpha, \beta) = F_l(\alpha)$  при  $l = 1, 2, \dots, m$ .

Задача (5.4) в принципе может быть решена методом неопределенных множителей Лагранжа. Согласно этому методу составляется функция Лагранжа

$$L(\alpha, \beta, \mu) = \mu_0 J_{2\nu} + \sum_{l=1}^M \mu_l F_l(\alpha, \beta),$$

и задача (5.4) сводится к задаче на безусловный экстремум

$$L(\alpha, \beta, \mu) \rightarrow \min_{\alpha, \beta, \mu}.$$

Здесь  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$  и  $\mu_0 = 1$  в неособом случае (т.е. когда постановка задачи имеет смысл).

**Пример 5.3.** При условии, что  $W_p(s) = k_n$ ,  $W_o(s) = \frac{1}{s(0,1s+1)}$  и  $f(t) \equiv 0$  определить параметр  $k_n$ , при котором переходный процесс системы (см. рис. 5.1) является аperiодическим и интегральная квадратическая ошибка  $J_{20}$  принимает минимальное значение.

**Решение.** Переходный процесс будет аperiодическим, если корни характеристического уравнения рассматриваемой системы

$$0,1\lambda^2 + \lambda + k_n = 0$$

будут вещественными, т.е. если детерминант этого уравнения

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 0,1 k_n \geq 0, \quad \text{или} \quad k_n \leq 2,5.$$

Так как  $f(t) \equiv 0$ , то ошибка  $e(t) = e_g(t)$ . Объект включает интегрирующее звено. Поэтому система является астатической относительно задающего воздействия и статическая ошибка  $e_{g\infty}(t) = 0$ . Переходная составляющая ошибки

$$e_n(t) = e_g(t) - e_{g\infty}(t) = e_g(t).$$

Переходя к изображениям Лапласа, получим

$$E_n(s) = E_g(s) = W_{eg}(s) \frac{1}{s} = \frac{0,1s+1}{0,1s^2+s+k_n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_{20} &= \int_0^\infty e_n^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |E_n(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{0,1j\omega+1}{0,1(j\omega)^2+j\omega+k_n} \right|^2 d\omega = I_2. \end{aligned}$$



В данном случае (см. (4.16))  $n = 2$ ,  $b_0 = 0,1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $a_0 = 0,1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = k_{\pi}$ . Поэтому (см. (4.176))

$$J_{20} = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2 a_0 a_1 a_2} = \frac{0,01 k_{\pi} + 0,1}{2 \cdot 0,1 k_{\pi}} = 0,05 + \frac{0,5}{k_{\pi}}.$$

Очевидно, что  $J_{20}$  принимает минимальное значение при условии  $k_{\pi} \leq 2,5$ , когда  $k_{\pi} = 2,5$ .

Пример 5.4. При условии, что  $W_p(s) = k_{\pi}$ ,  $W_o(s) = \frac{1}{s(0,1 s + 1)}$  и  $f(t) \equiv 0$  (см. рис. 5.1), определить значение параметра  $k_{\pi}$ , при котором обобщенная интегральная квадратическая оценка  $J_{21}$  при  $\tau = 0,5$  принимает минимальное значение.

Решение. Согласно формуле (4.15)

$$\begin{aligned} J_{21} &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\pi}(j\omega)|^2 d\omega + \tau^2 \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega E_{\pi}(j\omega) - e_{\pi}(0)|^2 d\omega \right] = \\ &= J_{20} + 0,5^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega E_{\pi}(j\omega) - e_{\pi}(0)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Как было вычислено (см. пример 5.3),

$$E_{\pi}(s) = \frac{0,1 s + 1}{0,1 s^2 + s + k_{\pi}}, \quad J_{20} = \frac{0,01 k_{\pi} + 0,1}{0,2 k_{\pi}}.$$

Для  $e_{\pi}(0)$  имеем

$$e_{\pi}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s E_{\pi}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(0,1 s + 1)}{0,1 s^2 + s + k_{\pi}} = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} s E_{\pi}(s) - e(0) &= \frac{s(0,1 s + 1)}{0,1 s^2 + s + k_{\pi}} - 1 = \frac{k_{\pi}}{0,1 s^2 + s + k_{\pi}}, \\ J_{21} &= J_{20} + 0,5^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-k_{\pi}}{0,1(j\omega)^2 + j\omega + k_{\pi}} \right|^2 d\omega = J_{20} + 0,25 I_2. \end{aligned}$$

В данном случае  $n = 2$ ,  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = -k_{\pi}$ ,  $a_0 = 0,1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = k_{\pi}$  и

$$I_2 = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2 a_0 a_1 a_2} = \frac{0,1 k_{\pi}^2}{2 \cdot 0,1 k_{\pi}} = 0,5 k_{\pi}.$$

Подставив это выражение и выражение для  $J_{20}$  в полученную выше формулу для  $J_{21}$ , найдем

$$J_{21} = \frac{0,01 k_{\pi} + 0,1}{0,2 k_{\pi}} + 0,25 \cdot 0,5 k_{\pi} = \frac{0,01 k_{\pi} + 0,1 + 0,025 k_{\pi}^2}{0,2 k_{\pi}}.$$

Из условия

$$\frac{dJ_{21}}{dk} = \frac{0,025 k_{\pi}^2 - 0,1}{0,2 k_{\pi}^2} = 0$$

следует, что  $J_{21}$  достигает экстремума при  $k_{\Pi} = \sqrt{\frac{0,1}{0,025}} = 2$ . Чтобы установить, чему (минимуму или максимуму) соответствует это значение, найдем вторую производную:

$$\frac{d^2 J_{21}}{dk_{\Pi}^2} = \frac{1}{k_{\Pi}^3}.$$

В точке экстремума эта производная положительна. Следовательно, в ней достигается минимум, и соответственно решением будет  $k = 2$ .

### 5.3. Условие граничной устойчивости и синтез систем управления по максимальной степени устойчивости

Задача синтеза систем управления максимальной степени устойчивости ставится следующим образом. Задана структура системы управления и требуется определить параметры регулятора, доставляющие максимум степени устойчивости.

Коэффициенты характеристического уравнения и соответственно степень устойчивости  $\eta$  будут функциями от указанных параметров. Рассматриваемую задачу синтеза можно сформулировать как следующую задачу на экстремум: определить  $\alpha$  ( $\alpha$  — вектор параметров регулятора) из условия

$$\eta^* = \eta(\alpha^*) = \max_{\alpha} \eta(\alpha).$$

Значение  $\eta^*$  называется *оптимальной степенью устойчивости* и  $\alpha^*$  — *оптимальным (векторным) параметром*.

Число параметров регулятора (размерность вектора  $\alpha$ )  $m$  не должно превышать  $n - 1$  ( $n$  — степень характеристического уравнения):  $m \leq n - 1$ . Если  $m \geq n$  и с помощью параметров можно произвольно изменять  $n$  коэффициентов характеристического уравнения, то в этом случае корни характеристического уравнения и соответственно степень устойчивости можно сделать равными произвольно заданным числам.

Метод решения сформулированной задачи основан на условиях граничной устойчивости. Поэтому прежде всего рассмотрим эти условия.

**5.3.1. Условия граничной устойчивости.** Напомним, что система находится на границе устойчивости, или имеет место граничная (маргинальная) устойчивость, если ее характеристический полином имеет нейтральные (т.е. расположенные на мнимой оси) нули и не имеет правых нулей. Такой полином называют *маргинально устойчивым*.

Следует заметить, что условие, которое получается при замене в критерии Гурвица знака строгого неравенства на нестрогий, не яв-

ляется условием граничной устойчивости. Действительно, например, полином

$$f(z) = z^4 + a_2 z^2 + a_4,$$

где

$$a_2 = 2(\beta^2 - \alpha^2), \quad a_4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2, \quad \beta > \alpha > 0,$$

удовлетворяет полученному таким путем условию:  $a_0 > 0$  и все определители Гурвица данного полинома равны нулю. Тем не менее среди его нулей  $z_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ ,  $z_{3,4} = \alpha \pm j\beta$  два нуля являются правыми.

Рассмотрим полином с вещественными коэффициентами

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 > 0). \quad (5.5)$$

Утверждение 5.1 (необходимое условие маргинальной устойчивости). *Если полином (5.5) маргинально устойчив, то все его коэффициенты неотрицательны:*

$$a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6)$$

Доказательство. Если полином (5.5) маргинально устойчив и имеет  $l$  нейтральных нулей, его можно представить в виде

$$f(z) = f_l(z) f_{n-l}(z),$$

где  $f_l(z)$  — полином  $l$ -й степени, все нули которого расположены на мнимой оси,  $f_{n-l}(z)$  — устойчивый полином  $(n-l)$ -й степени.

При разложении полинома  $f_l(z)$  на элементарные множители нулевому корню соответствует множитель  $z$ , а мнимым корням  $j\beta$  и  $-j\beta$  — множитель  $(z - j\beta)(z + j\beta) = z^2 + \beta^2$ . Поэтому его коэффициенты будут положительны или равны нулю. В силу необходимого условия устойчивости все коэффициенты полинома  $f_{n-l}(z)$  положительны. Следовательно, коэффициенты полинома  $f(z)$  будут положительны или равны нулю.

Ноль  $z'$  полинома (5.5) называют *особым*, если  $-z'$  также является нулем этого полинома. В частности, все нули, расположенные на мнимой оси, являются особыми.

Полином (5.5) имеет  $l$  особых нулей в том и только том случае, когда  $l$  старших определителей Гурвица равны нулю, а  $(n-l)$ -й определитель отличен от нуля [5]:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} = \dots = \Delta_{n-l+1} = 0, \quad \Delta_{n-l} \neq 0. \quad (5.7)$$

При наличии  $s$  нейтральных нулей число правых нулей  $k$  определяется по формуле [5]

$$k = k_1 + \frac{l}{2} - \frac{s}{2}, \quad (5.8)$$

где  $l$  — число особых нулей,  $k_1$  — число неособых правых нулей, определяемое соотношением

$$k_1 = V(1, \Delta_1, \Delta_3, \dots) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots). \quad (5.9)$$

В (5.9) исключены  $l$  старших определителей, которые входят в условие (5.7);  $V(1, \Delta_i, \Delta_j, \dots)$  обозначает число перемен знаков в ряду  $1, \Delta_i, \Delta_j, \dots$ . Число неособых правых нулей  $k_1$  равно нулю тогда

и только тогда, когда все определители, входящие в (5.9), положительны.

Если имеются особые нули, расположенные вне мнимой оси, то, как следует из их определения, среди них обязательно будет правый нуль.

Из изложенного выше вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5.2. *Полином (5.5) маргинально устойчив и  $l$  нулей располагаются на мнимой оси в том и только том случае, если выполняются следующие два условия.*

1<sup>0</sup>.  *$l$  старших определителей Гурвица равны нулю, а остальные  $n - l$  определителей положительны:*

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} = \dots = \Delta_{n-l+1}, \quad \Delta_{n-l} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_1 > 0. \quad (5.10)$$

2<sup>0</sup>. *Полином (5.5) не имеет особых нулей, расположенных не на мнимой оси.*

При использовании данного утверждения и установлении условия 2<sup>0</sup> важную роль играет следующее утверждение.

Утверждение 5.3. *При выполнении необходимого условия (5.6) особый нуль не может быть вещественным числом, и если имеются особые нули, расположенные не на мнимой оси, то их количество равно числу, кратному 4.*

Доказательство. Представим полином (5.5) в виде

$$f(z) = g(z^2) + zh(z^2),$$

где

$$g(z^2) = a_n + a_{n-2}z^2 + a_{n-4}z^4 + \dots,$$

$$h(z^2) = a_{n-1} + a_{n-3}z^2 + a_{n-5}z^4 + \dots$$

Если вещественное число  $\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) является особым нулем полинома  $f(z)$ , то

$$f(\alpha) = g(\alpha^2) + \alpha h(\alpha^2) = 0,$$

$$f(-\alpha) = g(\alpha^2) - \alpha h(\alpha^2) = 0.$$

Складывая и вычитая приведенные выражения, получим

$$g(\alpha^2) = 0, \quad h(\alpha^2) = 0.$$

А эти равенства при выполнении условия (5.6) невозможны.

Пусть комплексное число  $z' = \alpha + j\beta$  ( $\alpha\beta \neq 0$ ) является особым нулем полинома  $f(z)$ . Тогда нулями будут число  $z'' = -z'$  и числа, комплексно-сопряженные  $z'$  и  $z''$ :  $\tilde{z}' = \alpha - j\beta$  и  $\tilde{z}'' = -\alpha + j\beta$ .

Таким образом, мы доказали, что при выполнении условия (5.6) вещественное число не может быть особым нулем и количество особых нулей, расположенных вне мнимой оси, равно числу, кратному 4.

Утверждение 5.4. *Если выполняются необходимые условия маргинальной устойчивости (5.6) и условие (5.10) при  $1 \leq l \leq 3$ , то полином (5.5) маргинально устойчив.*

Это утверждение непосредственно вытекает из утверждений 5.2 и 5.3.

Утверждение 5.5. Если все коэффициенты полинома (5.5) с нечетными индексами равны нулю:

$$a_1 = a_3 = \dots = a_n = 0 \quad \text{при нечетном } n, \quad (5.11a)$$

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{n-1} = 0 \quad \text{при четном } n, \quad (5.11б)$$

то все определители Гурвица равны нулю ( $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$ ). И наоборот, если все определители Гурвица равны нулю, то все коэффициенты полинома (5.5) с нечетными индексами равны нулю.

В справедливости этого утверждения можно убедиться, последовательно вычисляя определители Гурвица, начиная с определителя 1-го порядка.

В силу утверждения 5.5, когда все нули полинома  $f(z)$  являются особыми, вместо условия (5.10) можно рассматривать условие (5.11).

Нейтральные нули полинома  $f(z)$  являются нулями функции  $f(j\omega)$ , и их число совпадает с числом действительных корней системы уравнений

$$u(\omega) = \operatorname{Re} f(j\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots = 0, \quad (5.12a)$$

$$v(\omega) = \operatorname{Im} f(j\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots = 0. \quad (5.12б)$$

Поэтому, в силу утверждения 5.3, если при выполнении условий (5.6) и (5.10) будет установлено, что система (5.12) имеет по меньшей мере  $l - 3$  вещественных корней, то полином  $f(z)$  будет маргинально устойчив.

Пусть все нули полинома  $f(z)$  являются особыми. Тогда в силу (5.11) при  $n = 4$   $v(\omega) = 0$ , и система (5.12) вырождается в уравнение

$$a_0\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4 = 0, \quad (5.13)$$

а при  $n = 5$   $u(\omega) = 0$ , и система (1.8) вырождается в уравнение

$$(a_0\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4)\omega = 0. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.13) имеет по меньшей мере два, а уравнение (5.14) три действительных корня, если

$$\Delta = a_2^2 - 4a_0a_4 > 0. \quad (5.15)$$

Поэтому, в силу утверждения 5.3, при  $n = 4$  и  $n = 5$  все нули полинома  $f(z)$  будут нейтральными, если выполняются условия (5.6), (5.11) и (5.15).

**5.3.2. Метод синтеза систем управления максимальной степени устойчивости.** Метод решения этой задачи основан на преобразовании характеристического полинома  $Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  путем подстановки  $\lambda = q - \eta$ . При этой подстановке преобразованный полином

$$Q_{\Pi}(q) = Q(q - \eta) = c_0q^n + c_1q^{n-1} + \dots + c_n, \quad (5.16)$$

где

$$c_k = \frac{1}{(n-k)!} \left. \frac{\partial^{n-k} Q(\lambda)}{\partial \lambda^{n-k}} \right|_{\lambda=-\eta}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (5.17)$$

становится маргинально устойчивым полиномом. И для  $Q_{\Pi}(q)$  выписываются условия маргинальной устойчивости, включающие условия (5.6), (5.10) и (5.12):

$$c_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (c_0 > 0), \quad (5.18a)$$

$$\Delta_n^{\Pi} = \Delta_{n-1}^{\Pi} = \dots = \Delta_{n-l+1}^{\Pi} = 0, \quad \Delta_{n-l}^{\Pi} > 0, \quad \dots, \quad \Delta_1^{\Pi} > 0, \quad (5.18б)$$

$$u_n(\omega) = \operatorname{Re} Q_{\Pi}(j\omega) = 0, \quad v_n(\omega) = \operatorname{Im} Q_{\Pi}(j\omega) = 0. \quad (5.18в)$$

Здесь  $\Delta_i^{\Pi}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — определители Гурвица преобразованного полинома  $Q_{\Pi}(q)$ .

Коэффициенты исходного характеристического полинома зависят от параметров регулятора, а коэффициенты преобразованного полинома зависят еще и от степени устойчивости  $\eta$ . Рассматриваемый метод состоит в следующем: решается система (5.18a)–(5.18в) относительно неизвестных параметров регулятора и степени устойчивости  $\eta$  и находятся решения, у которых  $\eta$  имеет наибольшее значение.

При использовании этого метода важно знать максимально возможное значение  $\eta_m$ , которое может принять степень устойчивости.

**Утверждение 5.6.** *При фиксированных  $a_0$  и  $a_1$  степень устойчивости  $\eta$  устойчивого полинома  $Q(\lambda)$  принимает максимально возможное значение, равное*

$$\eta_m = \frac{1}{n} \frac{a_1}{a_0}, \quad (5.19)$$

*когда вещественные части всех нулей  $Q(\lambda)$  равны между собой.*

Максимально возможное значение  $\eta_m$  будем также называть *граничным значением* ( $0 < \eta \leq \eta_m$ ).

**Доказательство.** Разложим полином  $Q(\lambda)$  на элементарные множители:

$$Q(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

Перемножив выражения в правой части, получим, что коэффициент при  $\lambda^{n-1}$  равен  $a_0(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$ . Учитывая, что тот же коэффициент равен  $a_1$ , получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \frac{a_1}{a_0}.$$

Пусть нули  $\lambda_i$  имеют вид  $\lambda_i = -\alpha_i + j\beta_i$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . В силу того, что  $Q(\lambda)$  является полиномом с вещественными коэффициентами, если какой-либо корень  $\lambda_k$  является комплексным ( $\beta_k \neq 0$ ), существует комплексно-сопряженный корень  $\lambda_{i+1} = -\alpha_i - j\beta_i$ . Поэтому мнимые части сокращаются, и полученное выше равенство принимает вид

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \frac{a_1}{a_0}.$$

Отсюда следует, что степень устойчивости принимает максимально возможное значение, определяемое равенством (5.19), когда все  $\alpha_i$  равны между собой. Действительно, если  $\alpha_i$  не равны между собой

и какое-либо  $\alpha_{i_0} > \eta_m = \frac{1}{n} \frac{a_1}{a_0}$ , то существует другое  $\alpha_i$ , которое меньше  $\eta_m$ . И так как  $\eta = \min_i \operatorname{Re} |\lambda_i| = \min_i \alpha_i$ , то степень устойчивости в этом случае будет меньше  $\eta_m$ .

Поиск решения задачи синтеза максимальной степени устойчивости следует начинать со случая, когда степень устойчивости принимает граничное (максимально возможное) значение. Так как это возможно, когда все нули исходного полинома имеют одинаковые вещественные части или все нули преобразованного полинома  $Q_{\Pi}(q)$  располагаются на мнимой оси, в силу утверждения 5.5 условие маргинальной устойчивости (5.18) можно представить в виде

$$c_1 = 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 \geq 0, \quad \dots, \quad (5.20a)$$

$$c_0 \omega^n - c_2 \omega^{n-2} + c_4 \omega^{n-4} - \dots = 0. \quad (5.20b)$$

Если система (5.20a), (5.20b) не имеет решения, то нужно перейти к системе (5.18a)–(5.18в) и решить ее при  $l \leq n - 1$ .

В общем случае (5.18a)–(5.18в) и (5.20a), (5.20b) являются необходимыми, но не достаточными условиями граничной устойчивости полинома  $Q_{\Pi}(q)$ . Поэтому, решив систему (5.18a)–(5.18в) или (5.20a), (5.20b), нужно убедиться, что при найденных значениях параметров среди особых нулей полинома  $Q_{\Pi}(q)$  нет правых нулей.

При решении систем (5.18a)–(5.18в) и (5.20a), (5.20b)  $\omega$  рассматривается как (вещественный) параметр. Если удастся найти требуемое решение указанных систем при  $\omega \neq 0$ , то это значит, что уравнение  $Q_{\Pi}(j\omega) = 0$  имеет по меньшей мере два вещественных корня. И в этом случае указанную дополнительную проверку нужно производить только при  $l \geq 6$  или  $n \geq 6$ , когда  $l = n$ .

**5.3.3. Синтез оптимальных по степени устойчивости параметров типовых регуляторов для объекта 2-го порядка.** Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$W_o(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_2}, \quad b_0 > 0, \quad a_1 > 0. \quad (5.21)$$

Найдем оптимальные параметры П-регулятора и ПИ-регулятора. В случае ПД-регулятора и ПИД-регулятора число параметров равно степени характеристического уравнения и степень устойчивости может быть сделана равным произвольному заданному числу.

#### **П-регулятор.**

Утверждение 5.7. *Оптимальный параметр П-регулятора ( $W_p(s) = k_{\Pi}$ ) определяется следующим образом:*

$$k_{\Pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 + \frac{a_1^2}{4} - a_2 \right), \quad (5.22a)$$

где  $\omega$  — свободный параметр, пропорциональный степени колебательности, и оптимальная степень устойчивости равна максимально возможному значению:

$$\eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{2}. \quad (5.22b)$$

При  $\frac{a_1^2}{4} - a_2 > 0$  степень колебательности можно сделать равной нулю, положив  $\omega = 0$ . Если при  $\frac{a_1^2}{4} - a_2 \leq 0$  принять  $\omega = 0$ , то  $k_{\pi}^*$  получается отрицательным или равным нулю.

Доказательство. Передаточная функция разомкнутой системы есть

$$W(s) = W_p(s)W_o(s) = \frac{b_0 k_{\pi}}{s^2 + a_1 s + a_2},$$

и характеристический полином принимает вид

$$Q(\lambda) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 + b_0 k_{\pi}.$$

Для коэффициентов преобразованного полинома

$$Q_{\pi} = c_0 q^2 + c_1 q + c_2$$

в соответствии с (5.17) имеем

$$c_2 = Q(\lambda)|_{\lambda=-\eta} = (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 + b_0 k_{\pi})|_{\lambda=-\eta} = \eta^2 - a_1 \eta + a_2 + b_0 k_{\pi},$$

$$c_1 = \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=-\eta} = (2\lambda + a_1)|_{\lambda=-\eta} = -2\eta + a_1,$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda^2}|_{\lambda=-\eta} = 1.$$

В данном случае условия граничной устойчивости (5.20) принимают следующий вид:

$$c_1 = -2\eta + a_1 = 0,$$

$$c_2 = \eta^2 - a_1 \eta + a_2 + b_0 k_{\pi} \geq 0,$$

$$u_{\pi}(\omega) = -c_0 \omega^2 + \eta^2 - a_1 \eta + a_2 + b_0 k_{\pi} = 0.$$

Решив эту систему, получим

$$\eta = \frac{a_1}{2}, \quad k_{\pi} = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 - \frac{a_1^2}{4} - a_2 \right).$$

Так как степень устойчивости принимает граничное значение, найденное решение является искомым. Это решение совпадает с (5.22).

Подставив выражение для  $k_{\pi}$  в характеристическое уравнение, получим уравнение

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + \frac{a_1^2}{4} + \omega^2 = 0,$$

корнями которого будут  $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\omega$ . Отсюда степень колебательности  $\mu = 2 \frac{\omega}{a_1}$ , и она пропорциональна  $\omega$ .

### **ПИ-регулятор.**

Утверждение 5.8. *Оптимальные параметры ПИ-регулятора  $(W_p(s) = k_{\pi} + \frac{k_n}{s})$  и оптимальная степень устойчивости определяются следующим образом:*

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 + \frac{a_1^2}{3} - a_2 \right), \quad (5.23a)$$



$$k_{\text{и}}^* = \frac{a_1}{3b_0} \left( \omega^2 + \frac{a_1^2}{9} \right), \quad (5.23б)$$

$$\eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{3}, \quad (5.23в)$$

где  $\omega$  — свободный параметр, пропорциональный степени колебательности.

Доказательство. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = W_{\text{п}}(s)W_{\text{о}}(s) = \frac{b_0(k_{\text{п}}s + k_{\text{и}})}{s(s^2 + a_1s + a_2)},$$

и характеристический полином принимает вид

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + (a_2 + b_0k_{\text{п}})\lambda + b_0k_{\text{и}}.$$

Коэффициенты преобразованного полинома

$$Q_{\text{п}}(q) = c_0q^3 + c_1q^2 + c_2q + c_3$$

определяются следующим образом (см. (5.17)):

$$\begin{aligned} c_3 = Q(\lambda)|_{\lambda=-\eta} &= [\lambda^3 + a_1\lambda^2 + (a_2 + b_0k_{\text{п}})\lambda + b_0k_{\text{и}}]|_{\lambda=-\eta} = \\ &= -\eta^3 + a_1\eta^2 - (a_2 + b_0k_{\text{п}})\eta + b_0k_{\text{и}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 = \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=-\eta} &= (3\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2 + b_0k_{\text{п}})|_{\lambda=-\eta} = \\ &= 3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0k_{\text{п}}, \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda^2}|_{\lambda=-\eta} = \frac{1}{2} (6\lambda + 2a_1)|_{\lambda=-\eta} = -3\eta + a_1,$$

$$c_0 = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 Q(\lambda)}{\partial \lambda^3}|_{\lambda=-\eta} = 1.$$

Условия граничной устойчивости (5.20) принимают вид

$$c_1 = -3\eta + a_1 = 0, \quad c_2 = 3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0k_{\text{п}} \geq 0,$$

$$c_3 = -\eta^3 + a_1\eta^2 - (a_2 + b_0k_{\text{п}})\eta + b_0k_{\text{и}} = 0,$$

$$u(\omega) = -c_0\omega^3 + c_2\omega = 0.$$

Из первого уравнения получаем  $\eta = \frac{a_1}{3}$ . Подставив выражения для коэффициентов в последнее уравнение, его можно записать в виде

$$3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0k_{\text{п}} = \omega^2.$$

Решив это уравнение совместно со вторым уравнением относительно  $k_{\text{и}}$  и  $k_{\text{п}}$ , затем подставив найденное значение для степени устойчивости, получим (5.23а) и (5.23б). Из последнего уравнения получим  $c_2 = \omega^2 \geq 0$ .

Таким образом, параметры, определяемые соотношениями (5.23а)–(5.23в), являются решением приведенной выше системы неравенств и уравнений, определяющих условие граничной устойчивости. В связи с тем, что в решении  $\eta$  принимает максимально возможное значение, параметры являются оптимальными.

Так как при синтезированных параметрах регулятора  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \omega^2$  и  $c_3 = 0$ , преобразованный полином имеет вид

$$Q(q) = q^3 + \omega^2 q.$$

Его нулями являются  $q_1 = 0$ ,  $q_{2,3} = \pm j\omega$ . В силу преобразования  $\lambda = q - \eta$  нулями характеристического полинома синтезированной системы будут

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{3}, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{a_1}{3} \pm j\omega.$$

Следовательно, степень колебательности  $\mu = \frac{3\omega}{a_1}$  пропорциональна  $\omega$  и обращается в нуль при  $\omega = 0$ .

**Пример 5.5.** Определить оптимальные параметры П-регулятора и ПИ-регулятора в случае, когда передаточная функция объекта есть

$$W_o(s) = \frac{1}{s(0,1s + 1)}.$$

**Решение.** Передаточную функцию объекта можно представить в виде  $W_o(s) = \frac{10}{s^2 + 10s}$ . Отсюда в принятых выше обозначениях  $b_0 = 10$ ,  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 0$ . И в случае П-регулятора в соответствии с равенствами (5.22а), (5.22б) имеем

$$k_{\Pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 + \frac{a_1^2}{4} - a_2 \right) = 0,1(\omega^2 + 25),$$

$$\eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{2} = 5.$$

В случае ПИ-регулятора в соответствии с (5.23а)–(5.23в) получаем

$$k_{\Pi} = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 + \frac{a_1^3}{3} - a_2 \right) = 0,1(\omega^2 + 25),$$

$$k_{\Pi}^* = \frac{a_1}{3b_0} \left( \omega^2 + \frac{a_1^2}{9} \right) = \frac{1}{3} \left( \omega^2 + \frac{100}{9} \right),$$

$$\eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{3} = \frac{10}{3}.$$

**5.3.4. Синтез оптимальных по степени устойчивости параметров типовых регуляторов для объекта 3-го порядка.** В случае объекта 3-го порядка с передаточной функцией

$$W_o(s) = \frac{b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}, \quad b_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad (5.24)$$

найдем оптимальные по степени устойчивости параметры типовых регуляторов.

#### **П-регулятор.**

**Утверждение 5.9.** *Оптимальный параметр П-регулятора ( $W_p(s) = k_{\Pi}$ ) и оптимальная степень устойчивости определяются следующим образом:*

а) при условии  $a_2 - \frac{a_1^2}{3} \geq 0$  (5.25)

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left[ \frac{a_1}{3} \left( a_2 - \frac{2a_1^2}{9} \right) - a_3 \right], \quad (5.26a)$$

$$\eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{3}; \quad (5.26b)$$

б) при условии  $a_2 - \frac{a_1^2}{3} < 0$  (5.27)

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} (\eta^{*3} - a_1 \eta^{*2} + a_2 \eta^* - a_3), \quad (5.28a)$$

$$\eta^* = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}. \quad (5.28b)$$

Доказательство. Передаточная функция разомкнутой системы есть

$$W(s) = W_p(s)W_o(s) = \frac{b_0 k_{\pi}}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3},$$

и характеристический полином имеет вид

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 + b_0 k_{\pi}.$$

Для коэффициентов преобразованного полинома

$$Q_{\pi}(q) = q^3 + c_1 q^2 + c_2 q + c_3$$

имеем

$$\begin{aligned} c_3 = Q(\lambda) \Big|_{\lambda=-\eta} &= [\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 + b_0 k_{\pi}] \Big|_{\lambda=-\eta} = \\ &= -\eta^3 + a_1 \eta^2 - a_2 \eta + a_3 + b_0 k_{\pi}, \end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=-\eta} = (3\lambda^2 + 2a_1 \lambda + a_2) \Big|_{\lambda=-\eta} = 3\eta^2 - 2a_1 \eta + a_2,$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=-\eta} = \frac{1}{2} (6\lambda + 2a_1) \Big|_{\lambda=-\eta} = -3\eta + a_1,$$

$$c_0 = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 Q(\lambda)}{\partial \lambda^3} \Big|_{\lambda=-\eta} = 1.$$

Условия граничной устойчивости (5.20) принимают вид

$$c_1 = -3\eta + a_1 = 0, \quad c_2 = 3\eta^2 - 2a_1 \eta + a_2 \geq 0,$$

$$c_3 = -\eta^3 + a_1 \eta^2 - a_2 \eta + a_3 + b_0 k_{\pi} = 0,$$

$$v_{\pi} = -\omega^3 + c_2 \omega = 0.$$

Из первого уравнения получаем  $\eta = \eta_m = \frac{a_1}{3}$ . Подставив это выражение во второе уравнение и решив его, получим (5.26a). Неравенство

$$c_2 \Big|_{\eta=a_1/3} = a_2 - \frac{a_1^2}{3} \geq 0$$

выполняется при условии (5.25). И последнее равенство будет выполнено при соответствующем  $\omega$ .

Следовательно, при выполнении условия (5.25) пара  $(k_{\pi}^*, \eta^*)$ , определяемая формулами (5.26а), (5.26б), удовлетворяет условию граничной устойчивости, и так как  $\eta^*$  равна граничному значению, она является искомым решением.

Если выполняется условие (5.27), то степень устойчивости не может принять граничное значение, так как при этом  $c_2 < 0$ . Поэтому будем искать оптимальную степень устойчивости из условия

$$c_2 = 3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 = 0.$$

При выполнении условия (5.27) это уравнение имеет вещественные корни

$$\eta_1 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}, \quad \eta_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3}.$$

Коэффициент  $c_2 < 0$  в интервале  $\eta_1 < \eta < \eta_2$  и  $c_2 \geq 0$  вне этого интервала. Корень  $\eta_2$  не может быть степенью устойчивости, так как  $\eta_2 > \eta_m = \frac{a_1}{3}$ . Поэтому рассмотрим, может ли корень  $\eta_1$ , совпадающий со значением (5.28б), быть оптимальной степенью устойчивости. Так как  $c_1 > 0$  и  $c_2 = 0$  при  $\eta = \eta_1$ , пара  $(\eta_1, k_{\pi})$  будет удовлетворять условию граничной устойчивости, если  $\Delta_2 = c_1 c_2 - c_3 = -c_3 = 0$  и  $c_3 \geq 0$ . Последнее возможно только в том случае, когда  $c_3|_{\eta=\eta_1} = -\eta^3 + a_1\eta^2 - a_2\eta + a_3 + b_0k_{\pi} = 0$ , или

$$k_{\pi} = \frac{1}{b_0} (\eta_1^3 - a_1\eta_1^2 + a_2\eta_1 - a_3).$$

Подставив сюда  $\eta^*$  вместо  $\eta_1$ , получим (5.28а). Таким образом, пара  $(k_{\pi}^*, \eta^*)$ , определяемая формулами (5.28а), (5.28б), удовлетворяет условиям граничной устойчивости, и так как при условии (5.27) степень устойчивости не может быть больше  $\eta_1$  (иначе  $c_2 < 0$ ),  $k_{\pi}^*$  является оптимальным параметром, а  $\eta^* = \eta_1$  — оптимальной степенью устойчивости.

### **ПД-регулятор.**

Утверждение 5.10. *Оптимальные параметры ПД-регулятора и оптимальная степень устойчивости определяются следующим образом:*

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( \frac{a_1^3}{27} + \omega^2 \frac{a_1}{3} - a_3 \right), \quad (5.29а)$$

$$k_d^* = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 + \frac{a_1^2}{3} - a_2 \right), \quad (5.29б)$$

$$\eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{3}, \quad (5.29в)$$

где  $\omega$  — свободный параметр, пропорциональный степени колебательности.

Доказательство. Передаточная функция разомкнутой системы есть

$$W(s) = W_p(s)W_o(s) = \frac{b_0(k_{\pi} + k_d s)}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3},$$

и характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + (a_2 + b_0k_d)\lambda + a_3 + b_0k_p.$$

Для коэффициентов преобразованного полинома

$$Q_{\Pi}(q) = q^3 + c_1q^2 + c_2q + c_3$$

имеем

$$\begin{aligned} c_3 &= Q(\lambda) \Big|_{\lambda=-\eta} = [\lambda^3 + a_1\lambda^2 + (a_2 + b_0k_d)\lambda + a_3 + b_0k_p] \Big|_{\lambda=-\eta} = \\ &= -\eta^3 + a_1\eta^2 - (a_2 + b_0k_d)\eta + a_3 + b_0k_p, \\ c_2 &= \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=-\eta} = (3\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2 + b_0k_d) \Big|_{\lambda=-\eta} = \\ &= 3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0k_d, \\ c_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=-\eta} = \frac{1}{2} (6\lambda + 2a_1) \Big|_{\lambda=-\eta} = -3\eta + a_1, \\ c_0 &= \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 Q(\lambda)}{\partial \lambda^3} \Big|_{\lambda=-\eta} = 1. \end{aligned}$$

Условия граничной устойчивости (5.20) принимают вид

$$\begin{aligned} c_1 &= -3\eta + a_1 = 0, \quad c_2 = 3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0k_d \geq 0, \\ c_3 &= -\eta^3 + a_1\eta^2 - (a_2 + b_0k_d)\eta + a_3 + b_0k_p \geq 0, \\ v(\omega) &= -\omega^3 + c_2\omega = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем  $\eta = \eta_m = \frac{a_1}{3}$ . Подставив выражение для  $c_2$  в последнее уравнение, представим его в виде

$$3\eta^2 - 2a_1\eta + a_2 + b_0k_d = \omega^2.$$

Решив это уравнение совместно со вторым уравнением относительно  $k_p$  и  $k_d$ , а затем подставив найденное выражение для  $\eta$ , получим (5.29а) и (5.29б).

Из последнего уравнения системы получаем  $c_2 = \omega^2 \geq 0$ .

Следовательно, тройка  $(k_p^*, k_d^*, \eta^*)$ , определяемая формулами (5.29а)–(5.29в), удовлетворяет условию граничной устойчивости, и так как степень устойчивости принимает максимально возможное значение, эта тройка и будет искомым решением.

При полученных значениях параметров регулятора  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \omega^2$  и  $c_3 = 0$ . Поэтому преобразованный полином имеет вид

$$Q(q) = q^3 + \omega^2q = 0,$$

и его нулями являются  $q_1 = 0$  и  $q_{2,3} = \pm j\omega$ . Соответственно для нулей исходного характеристического полинома имеем

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{3}, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{a_1}{3} \pm j\omega.$$

Таким образом, степень колебательности  $\mu = \frac{3\omega}{a_1}$  пропорциональна свободному параметру.

### **ПИ-регулятор.**

Утверждение 5.11. *Оптимальные параметры ПИ-регулятора и оптимальная степень устойчивости определяются следующим образом:*

$$a) \text{ при условии } a_2 - \frac{3}{8} a_1^2 \geq 0 \quad (5.30)$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( \frac{a_1 a_2}{2} - \frac{a_1^3}{8} - a_3 \right), \quad (5.31a)$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left[ \omega^2 \left( a_2 - \frac{8}{3} a_1^2 - \omega^2 \right) - \frac{5}{256} a_1^4 + \frac{a_1^2 a_2}{16} \right], \quad (5.31б)$$

$$\eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{4}; \quad (5.31в)$$

$$б) \text{ при условии } a_2 - \frac{3}{8} a_1^2 < 0 \quad (5.32)$$

$$\eta^* = \frac{1}{4} \left( a_1 - \sqrt{a_1^2 - \frac{8}{3} a_2} \right), \quad (5.33a)$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} (4\eta^{*3} - 3a_1\eta^{*2} + 2a_2\eta^* - a_3), \quad (5.33б)$$

$$k_{\pi}^* = \frac{\eta^{*2}}{b_0} (3\eta^{*2} - 2a_1\eta^* + a_2). \quad (5.33в)$$

Здесь  $\omega$  — свободный параметр, подчиненный условию  $\omega^2 \leq a_2 - \frac{3}{8} a_1^2$ .

Доказательство. Передаточная функция разомкнутой системы есть

$$W(s) = W_p(s)W_o(s) = \frac{b_0(k_{\pi}s + k_{\pi})}{s(s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3)},$$

и характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + (b_0k_{\pi} + a_3)\lambda + b_0k_{\pi}.$$

Для коэффициентов преобразованного полинома

$$Q_{\pi}(q) = q^4 + c_1q^3 + c_2q^2 + c_3q + c_4$$

имеем

$$c_4 = Q(\lambda) \Big|_{\lambda=-\eta} = \eta^4 - a_1\eta^3 + a_2\eta^2 - (a_3 + b_0k_{\pi})\eta + b_0k_{\pi},$$

$$c_3 = \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=-\eta} = -4\eta^3 + 3a_1\eta^2 - 2a_2\eta + a_3 + b_0k_{\pi},$$

$$c_2 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=-\eta} = 6\eta^2 - 3a_1\eta + a_2,$$

$$c_1 = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 Q(\lambda)}{\partial \lambda^3} \Big|_{\lambda=-\eta} = -4\eta + a_1.$$

Условия граничной устойчивости (5.20) принимают вид

$$\begin{aligned}c_1 &= -4\eta + a_1 = 0, & c_2 &= 6\eta^2 - 3a_1\eta + a_2 \geq 0, \\c_3 &= -4\eta^3 + 3a_1\eta^2 - 2a_2\eta + a_3 + b_0k_{\text{п}} = 0, \\c_4 &= \eta^4 - a_1\eta^3 + a_2\eta^2 - (a_3 + b_0k_{\text{п}})\eta + b_0k_{\text{и}} \geq 0, \\u_{\text{п}}(\omega) &= \omega^4 - c_2\omega^2 + c_4 = 0.\end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем  $\eta = \eta_m = \frac{a_1}{4}$ . Подставив выражения для коэффициентов в последнее уравнение, можно представить его в виде

$$\omega^4 - (6\eta^2 - 3a_1\eta + a_2)\omega^2 + \eta^4 - a_1\eta^3 + a_2\eta^2 - (a_3 + b_0k_{\text{п}})\eta + b_0k_{\text{и}} = 0.$$

Решив это уравнение совместно со вторым уравнением относительно неизвестных  $k_{\text{п}}$  и  $k_{\text{и}}$  и подставив найденное  $\eta = \frac{a_1}{4}$ , получим формулы (5.31a) и (5.31б).

Для выполнения условия граничной устойчивости достаточно, чтобы  $c_2 \geq 0$  и  $c_4 \geq 0$ . Из последнего равенства приведенной выше системы получаем  $c_4 = c_2\omega^2 - \omega^4$ . Поэтому указанные неравенства будут выполнены, если

$$c_2 \geq \omega^2 \quad \text{или} \quad 6\eta^2 - 3a_1\eta + a_2 \geq \omega^2.$$

Подставив сюда  $\eta = \frac{a_1}{4}$ , получаем неравенство  $a_2 - \frac{3}{8}a_1^2 \geq \omega^2$ . В силу условия (5.30) это неравенство может быть выполнено. При его выполнении тройка  $(k_{\text{п}}^*, k_{\text{и}}^*, \eta^*)$ , определяемая формулами (5.31a)–(5.31b), будет удовлетворять условиям граничной устойчивости, и  $k_{\text{п}}^*$  и  $k_{\text{и}}^*$  будут оптимальными параметрами, а  $\eta^*$  — оптимальной степенью устойчивости.

При выполнении условия (5.32) нельзя обеспечить, чтобы оптимальная степень устойчивости была равна максимально возможному значению  $\eta_m$ , так как коэффициент  $c_2$  становится отрицательным.

Попытаемся найти оптимальную степень устойчивости из условия

$$c_2 = 6\eta^2 - 3a_1\eta + a_2 = 0.$$

При выполнении условия (5.32) корни этого уравнения являются вещественными и равны

$$\eta_1 = \frac{1}{4} \left( a_1 - \sqrt{a_1^2 - \frac{8}{3}a_2} \right), \quad \eta_2 = \frac{1}{4} \left( a_1 + \sqrt{a_1^2 - \frac{8}{3}a_2} \right).$$

Коэффициент  $c_2 < 0$  при  $\eta_1 < \eta < \eta_2$  и  $c_2 \geq 0$  вне этого интервала. Корень  $\eta_2$  не может быть степенью устойчивости, так как он больше граничного значения  $\eta_m$ . Ясно, что оптимальная степень устойчивости  $\eta^*$  не может быть больше  $\eta_1$ . Покажем, что она равна  $\eta_1$ .

Когда  $\eta = \eta_1$ ,  $c_1 > 0$  и  $c_2 = 0$ . При  $\omega = 0$  из необходимого условия граничной устойчивости Михайлова

$$u_{\text{п}}(\omega) = \omega^4 - c_2\omega^2 + c_4 = 0, \quad v(\omega) = -c_1\omega^3 + c_3\omega = 0$$

имеем  $c_4 = 0$  и  $c_3 = 0$  или

$$\begin{aligned}\eta^4 - a_1\eta^3 + a_2\eta^2 - (a_3 + b_0k_{\pi})\eta + b_0k_{\pi} &= 0, \\ -4\eta^3 + 3a_1\eta^2 - 2a_2\eta + a_3 + b_0k_{\pi} &= 0.\end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений относительно  $k_{\pi}$  и  $k_{\pi}$  и подставив  $\eta = \eta_1$ , получим  $k_{\pi}^*$  и  $k_{\pi}^*$ , определяемые формулами (5.33а)–(5.33в). При таких параметрах  $\Delta_3 = 0$ . Следовательно, при выполнении условия (5.32) тройка  $(k_{\pi}^*, k_{\pi}^*, \eta^*)$ , определяемая формулами (5.33а)–(5.33в), удовлетворяет условиям граничной устойчивости, и  $\eta^*$  является оптимальной степенью устойчивости, а  $k_{\pi}^*$  и  $k_{\pi}^*$  — оптимальными параметрами.

### **ПИД-регулятор.**

Утверждение 5.12. *Оптимальные параметры ПИД-регулятора и оптимальная степень устойчивости определяются следующим образом:*

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( (\omega^2 + \beta^2) \frac{a_1}{2} + \frac{a_1^3}{16} - a_3 \right), \quad (5.34а)$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 + \beta^2 + \frac{3}{8} a_1^2 - a_2 \right), \quad (5.34б)$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left[ \frac{1}{256} a_1^4 + (\omega^2 + \beta^2) \frac{a_1^2}{16} + \omega^2 \beta^2 \right], \quad (5.34в)$$

$$\eta^* = \eta_m = \frac{a_1}{4}, \quad (5.34г)$$

где свободные параметры  $\omega$  и  $\beta$  являются мнимыми частями корней характеристического уравнения  $\left( \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{4} \pm j\omega, \lambda_{3,4} = -\frac{a_1}{4} \pm j\beta \right)$ .

**Доказательство.** Характеристический полином синтезируемой системы и преобразованный полином имеют соответственно вид

$$Q(z) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + (a_2 + b_0k_{\pi})\lambda^2 + (a_3 + b_0k_{\pi})\lambda + b_0k_{\pi},$$

$$Q_{\pi}(q) = q^4 + c_1q^3 + c_2q^2 + c_3q + c_4,$$

где

$$c_4 = Q(\lambda) \Big|_{\lambda=-\eta} = \eta^4 - a_1\eta^3 + (a_2 + b_0k_{\pi})\eta^2 - (a_3 + b_0k_{\pi})\eta + b_0k_{\pi},$$

$$c_3 = \frac{\partial Q(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=-\eta} = -4\eta^3 + 3a_1\eta^2 - 2(a_2 + b_0k_{\pi})\eta + a_3 + b_0k_{\pi},$$

$$c_2 = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 Q(\lambda)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=-\eta} = 6\eta^2 - 3a_1\eta + a_2 + b_0k_{\pi},$$

$$c_1 = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 Q(\lambda)}{\partial \lambda^3} \Big|_{\lambda=-\eta} = -4\eta + a_1.$$



Условие маргинальной устойчивости (5.20а), (5.20б) принимает вид

$$c_1 = 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 \geq 0, \\ \omega^4 - c_2\omega^2 + c_4 = 0.$$

Из последнего равенства получаем

$$c_4 = (c_2 - \omega^2)\omega^2.$$

Неравенства  $c_4 \geq 0$  и  $c_2 \geq 0$  будут выполнены, если  $c_2 - \omega^2 \geq 0$ . Вводя дополнительный параметр  $\beta$ , последнее неравенство преобразуем в равенство

$$c_2 - \omega^2 - \beta^2 = 0,$$

и условие граничной устойчивости можно записать в виде

$$c_1 = -4\eta + a_1 = 0,$$

$$c_2 = 6\eta^2 - 3a_1\eta + a_2 + b_0k_d = \omega^2 + \beta^2,$$

$$c_3 = -4\eta^3 + 3a_1\eta^2 - 2(a_2 + b_0k_d)\eta + a_3 + b_0k_{\pi} = 0,$$

$$c_4 = \eta^4 - a_1\eta^3 + (a_2 + b_0k_d)\eta^2 - (a_3 + b_0k_{\pi})\eta + b_0k_{\pi} = \omega^2\beta^2.$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$\eta = \eta_m = \frac{a_1}{4},$$

$$k_d = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 + \beta^2 + \frac{3}{8} a_1^2 - a_2 \right),$$

$$k_{\pi} = \frac{1}{b_0} \left( (\omega^2 + \beta^2) \frac{a_1}{2} + \frac{a_1^3}{16} - a_3 \right),$$

$$k_{\pi} = \frac{1}{b_0} \left( \frac{a_1^4}{256} + (\omega^2 + \beta^2) \frac{a_1^2}{16} + \omega^2\beta^2 \right),$$

где  $\omega$  и  $\beta$  — произвольные параметры, которые могут быть заданы исходя из дополнительных требований к качеству системы. Они представляют мнимые части корней характеристического уравнения синтезированной системы, и поэтому отношение  $\max(\omega, \beta)/\eta$  соответствует степени колебательности системы. Действительно, подставив выражения для коэффициентов  $c_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) из полученной выше системы уравнений в полином  $Q_{\pi}(q)$ , получим

$$Q_{\pi}(q) = q^4 + (\omega^2 + \beta^2)q^2 + \omega^2\beta^2.$$

Нулями этого полинома являются  $q_{1,2} = \pm j\omega$  и  $q_{3,4} = \pm j\beta$  и соответственно нулями исходного полинома  $\lambda_{1,2} = -\eta \pm j\omega$  и  $\lambda_{3,4} = -\eta \pm j\beta$ .

В полученных решениях степень устойчивости принимает максимально возможное значение. Следовательно, они являются искомыми решениями и совпадают с (5.34а)–(5.34г).

**Пример 5.6.** Определить оптимальные параметры П-регулятора, ПД-регулятора, ПИ-регулятора и ПИД-регулятора в случае объекта, у которого передаточная функция равна

$$W_o(s) = \frac{1}{s(0,5s^2 + 1,5s + 1)}.$$

Решение. Преобразовав передаточную функцию объекта к виду

$$W_o(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s},$$

получаем  $b_0 = 2$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2$  и  $a_3 = 0$ .

*П-регулятор.* Проверим, какое из условий, (5.25) или (5.27), выполняется:

$$a_2 - \frac{a_1^2}{3} = 2 - 3 = -1 < 0.$$

Выполняется условие (5.27). Поэтому согласно формулам (5.28а), (5.28б) имеем

$$\eta^* = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} = \frac{3 - \sqrt{9 - 6}}{3} \cong 0,43,$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} (\eta^{*3} - a_1 \eta^{*2} - a_2 \eta^* - a_3) = \frac{1}{2} (0,43^3 - 3 \cdot 0,43^2 + 2 \cdot 0,43) \cong 0,19,$$

*ПД-регулятор.* Согласно формулам (5.29а) и (5.19б)

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( \frac{a_1^3}{27} + \omega^2 \frac{a_1}{3} - a_3 \right) = 0,5 (1 + \omega^2),$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 + \frac{a_1^2}{3} - a_2 \right) = 0,5 (1 + \omega^2).$$

Напомним, что  $\omega$  является произвольным параметром, который можно задать исходя из дополнительных требований.

*ПИ-регулятор.* Проверим, какое их условий, (5.30) или (5.32), выполняется:

$$a_2 - \frac{3}{8} a_1^2 = 2 - \frac{3}{8} \cdot 9 < 0.$$

Выполняется условие (5.32). Поэтому в соответствии с формулами (5.33) имеем

$$\eta^* = \frac{1}{4} \left( a_1 - \sqrt{a_1^2 - \frac{8}{3} a_2} \right) \cong 0,27,$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} (4\eta^{*3} - 3a_1\eta^{*2} + 2a_2\eta^* - a_3) \cong 0,25,$$

$$k_{\pi}^* = \frac{\eta^{*2}}{b_0} (3\eta^{*2} - 2a_1\eta^* + a_2) \cong 0,022.$$

*ПИД-регулятор.* Согласно формулам (5.34а), (5.34б) и (5.34в) имеем

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( (\omega^2 + \beta^2) \frac{a_1}{2} + \frac{a_1^3}{16} - a_3 \right) = 0,5 [1,5(\omega^2 + \beta^2) + 1,69],$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left( \omega^2 + \beta^2 + \frac{3}{8} a_1^2 - a_2 \right) = 0,5 (\omega^2 + \beta^2 + 1,375),$$

$$k_{\pi}^* = \frac{1}{b_0} \left[ \frac{1}{256} a_1^4 + (\omega^2 + \beta^2) \frac{a_1^2}{16} + \omega^2 \beta^2 \right] = 0,5 [0,32 + 0,56 (\omega^2 + \beta^2) + \omega^2 \beta^2].$$

## 5.4. Синтез системы управления по желаемой передаточной функции

Пусть задана передаточная функция объекта  $W_o(s)$  и желаемая передаточная функция  $W_{\text{ж}}(s)$  замкнутой системы. Тогда передаточная функция регулятора  $W_p(s)$  может быть получена из равенства передаточной функции  $W_{\text{yg}}(s)$  замкнутой системы (см. рис. 5.1) желаемой передаточной функции:

$$W_{\text{yg}}(s) = \frac{W_p(s)W_o(s)}{1 + W_p(s)W_o(s)} = W_{\text{ж}}(s).$$

Разрешив это равенство относительно передаточной функции регулятора, получим

$$W_p(s) = \frac{1}{W_o(s)} \frac{W_{\text{ж}}(s)}{1 - W_{\text{ж}}(s)},$$

или, если принять  $W_o(s) = \frac{P(s)}{R(s)}$ ,

$$W_p(s) = \frac{R(s)}{P(s)} \frac{W_{\text{ж}}(s)}{1 - W_{\text{ж}}(s)}. \quad (5.35)$$

При задании желаемой передаточной функции  $W_{\text{ж}}(s)$  и определении передаточной функции регулятора  $W_p(s)$  необходимо учитывать физическую осуществимость определяемого регулятора и грубость синтезируемой системы. Поэтому прежде всего рассмотрим эти понятия.

### 5.4.1. Физическая осуществимость и грубость.

Под *физической осуществимостью* или *реализуемостью* передаточной функции или системы, заданной этой передаточной функцией, понимают принципиальную возможность построения такой системы.

Передаточная функция физически осуществима, если ее относительный порядок, равный разности степени знаменателя и степени числителя, неотрицателен. Условие физической осуществимости передаточной функции

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

имеет вид

$$n - m \geq 0. \quad (5.36)$$

Если система определяется весовой функцией  $w(t)$ , то условие ее физической осуществимости имеет вид

$$w(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \quad \text{или} \quad w(t - \tau) < 0 \quad \text{при} \quad t < \tau.$$

Это условие выражает тот факт, что реакция системы не может возникнуть до начала приложения воздействия, вызывающего эту реакцию, или следствие не может предшествовать причине.

Система называется *грубой* или *робастной*, если при малом изменении ее параметров свойство системы качественно не меняется. В случае линейной системы негрубость означает, что устойчивая система при малом изменении параметров становится неустойчивой.

При синтезе систем по желаемой передаточной функции грубость может быть нарушена, если правый полюс передаточной функции объекта компенсируется правым нулем передаточной функции регулятора, а правый нуль объекта — правым полюсом регулятора.

Например, если передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{1}{Ts-1}$  и желаемая передаточная функция  $W_o(s) = \frac{1}{s+2}$ , то по формуле (5.35) передаточная функция регулятора  $W_p(s) = \frac{Ts-1}{s+1}$ . Передаточная функция разомкнутой системы есть

$$W(s) = W_p(s)W_o(s) = \frac{Ts-1}{s+1} \frac{1}{Ts-1} = \frac{1}{s+1},$$

и синтезированная система в разомкнутом и замкнутом состоянии устойчива. Однако допустим, что постоянная времени принимает значение  $T + \delta T$  ( $\delta T$  — малая величина). Тогда

$$W_p(s) = \frac{(T + \delta T)s - 1}{s + 1},$$

$$W(s) = \frac{(T + \delta T)s - 1}{s + 1} \cdot \frac{1}{Ts - 1},$$

и характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$T\lambda^2 + (2T + \delta T - 1)\lambda - 2 = 0.$$

Таким образом, при малом изменении параметра система (в замкнутом и разомкнутом состоянии) неустойчива и, следовательно, синтезированная система не обладает свойством грубости. В данном случае это происходит из-за того, что правый полюс объекта компенсируется правым нулем регулятора.

Итак, при использовании метода синтеза системы по желаемой передаточной функции нельзя допускать компенсации правых полюсов и нулей передаточной функции объекта соответственно правыми нулями и полюсами передаточной функции регулятора.

**5.4.2. Синтез передаточной функции регулятора.** Представим передаточную функцию объекта следующим образом:

$$W_o(s) = \frac{P(s)}{R(s)} = \frac{P^-(s)P^+(s)}{R^-(s)R^+(s)}, \quad (5.37)$$

где  $P^-(s)$ ,  $R^-(s)$  — полиномы с левыми нулями;  $P^+(s)$ ,  $R^+(s)$  — полиномы с правыми и нейтральными нулями.

Если полиномы  $P(s)$  и  $R(s)$  не содержат левых нулей, то  $P^-(s)$  и  $R^-(s)$  равны константе; если они не содержат правых нулей, то  $P^+(s)$  и  $R^+(s)$  равны константе.

Подставив (5.37) в (5.35), получим

$$W_p(s) = \frac{R^-(s)R^+(s)}{P^-(s)P^+(s)} \frac{W_{\text{ж}}}{1 - W_{\text{ж}}}. \quad (5.38)$$

Для того чтобы правые полюсы и нули передаточной функции объекта (5.37) не компенсировались соответственно правыми нулями и полюсами передаточной функции регулятора (5.38), последняя не должна содержать полиномы  $P^+(s)$  и  $R^+(s)$ . Это возможно, если в (5.38)  $W_{\text{ж}}(s)$  содержит множитель  $P^+(s)$ , а  $1 - W_{\text{ж}}(s)$  — множитель  $R^+(s)$ , т.е. если желаемая передаточная функция удовлетворяет условиям

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{P^+(s)M(s)}{G(s)}, \quad (5.39)$$

$$1 - W_{\text{ж}}(s) = \frac{R^+(s)N(s)}{G(s)},$$

где  $G(s)$  — знаменатель желаемой передаточной функции, определяемый требованиями к качеству синтезируемой системы в переходном режиме;  $M(s)$  и  $N(s)$  — неопределенные полиномы, которые находятся из полиномиального уравнения, получаемого ниже.

Если объект управления содержит  $\nu_0$  интегрирующих звеньев, то для того, чтобы синтезируемая система была астатической и обладала астатизмом  $\nu$ -го порядка относительно задающего воздействия и  $(\nu - \nu_0)$ -го порядка относительно возмущения, передаточная функция регулятора должна содержать в знаменателе множитель  $s^r$  ( $r = \nu - \nu_0$ ). А это возможно, если этот множитель будет включен в  $1 - W_{\text{ж}}(s)$ :

$$1 - W_{\text{ж}}(s) = \frac{R^+(s)N(s)s^r}{G(s)}. \quad (5.40)$$

Подставив (5.39) и (5.40) в (5.38), получим

$$W_p(s) = \frac{R^-(s)}{P^-(s)} \frac{M(s)}{N(s)s^r}. \quad (5.41)$$

Исключив  $W_{\text{ж}}(s)$  из (5.39) и (5.40), найдем *полиномиальное уравнение*

$$P^+(s)M(s) + R^+(s)N(s)s^r = G(s). \quad (5.42)$$

Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять степени неопределенных полиномов, чтобы регулятор был физически реализуем и полиномиальное уравнение было разрешимо. При этом условимся степень полинома обозначать буквой  $n$  с индексом, обозначающим сам полином. Например,  $n_T$  будет обозначать степень полинома  $T(s)$ .

*Условие разрешимости.* Коэффициенты полиномов  $M(s)$  и  $N(s)$  определяются из системы уравнений, которые получаются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях обеих частей полиномиального уравнения (5.42). Число уравнений равно  $n_G + 1$ , а число неизвестных равно  $n_M + n_N + 2$ . И чтобы система была раз-

решима, число уравнений не должно превышать числа неизвестных:

$$n_G + 1 \leq n_M + n_N + 2, \quad \text{или} \quad n_G \leq n_M + n_N + 1. \quad (5.43)$$

**Условие физической осуществимости.** Очевидно, относительный порядок передаточной функции регулятора (5.41) будет неотрицательным, если

$$n_{R-} + n_M \leq n_{P-} + n_N + r. \quad (5.44)$$

Относительный порядок передаточной функции в левой части соотношения (5.40) равен нулю. И так как относительный порядок передаточной функции в правой части также должен быть равен нулю, получаем еще одно условие

$$n_G = n_{R+} + n_N + r, \quad (5.45)$$

которое нужно учитывать при определении степеней неопределенных полиномов.

Метод синтеза регулятора по желаемой передаточной функции состоит в следующем. Исходя из условий (5.43), (5.44) и (5.45) определяют степени неопределенных полиномов  $n_M$  и  $n_N$ . Чтобы не усложнять регулятор, находят наименьшие возможные значения. Затем составляют полиномы  $M(s)$  и  $N(s)$  с неопределенными коэффициентами, подставляют их в полиномиальное уравнение и определяют неизвестные коэффициенты. Найденные полиномы  $M(s)$  и  $N(s)$  подставляют в (5.41) и получают искомую передаточную функцию регулятора.

**Пример 5.7.** Передаточная функция объекта имеет вид  $W_o(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ . Определить передаточную функцию регулятора, при которой переходная составляющая ошибки  $x(t)$  изменяется в соответствии с

$$x(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{-t}$$

и установившаяся ошибка равна нулю при:

а) постоянном задающем воздействии ( $g(t) = \text{const}$ ) и отсутствии возмущения ( $f(t) \equiv 0$ );

б) постоянных внешних воздействиях ( $g(t) = \text{const}$ ,  $f(t) = \text{const}$ ).

**Решение.** Переходная составляющая ошибки будет изменяться в соответствии с заданной функцией, если характеристический полином синтезируемой системы имеет трехкратный нуль, равный  $-1$  ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ ). Поэтому знаменатель желаемой передаточной функции  $G(s)$ , равный с точностью до обозначений аргумента характеристическому полиному, имеет вид

$$G(s) = (s+1)^3.$$

Числитель и знаменатель передаточной функции объекта раскладываются на множители  $P^-(s) = P^+(s) = P(s) = 1$ ,  $R^-(s) = s+1$ ,  $R^+(s) = s$ .

Степени полиномов равны  $n_G = 3$ ,  $n_{P-} = n_{P+} = 0$ ,  $n_{R-} = n_{R+} = 1$ .

а) Статическая ошибка  $e_{g\infty} = 0$ , если система обладает астатизмом 1-го порядка ( $\nu = 1$ ) относительно задающего воздействия. Так как объект содержит одно интегрирующее звено ( $\nu_0 = 1$ ),  $r = \nu - \nu_0 = 0$ .

Условия (5.43), (5.44) и (5.45) принимают соответственно вид

$$3 \leq n_M + n_N + 1, \quad 1 + n_M \leq n_N, \quad 3 = 1 + n_N.$$

Из последнего равенства получаем  $n_N = 2$ . Наименьшим  $n_M$ , удовлетворяющим приведенным условиям, является  $n_M = 0$ . Поэтому  $M(s) = b_0$  и  $N(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2$ . Подставив эти полиномы в полиномиальное уравнение (5.42), получим

$$b_0 + s(a_0 s^2 + a_1 s + a_2) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получим

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 3, \quad b_0 = 1$$

и  $N(s) = s^2 + 3s + 3$ ,  $M(s) = 1$ . Подставляя эти полиномы, а также выражения для  $P^-(s)$  и  $R^-(s)$  в (5.41), получим искомую передаточную функцию регулятора  $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+3}$ .

б) Чтобы статическая ошибка была равна нулю при действии возмущения, регулятор должен включать одно интегрирующее звено. Поэтому в данном случае  $r = 1$ . И условия (5.43), (5.44) и (5.45) принимают соответственно вид

$$3 \leq n_M + n_N + 1, \quad 1 + n_M \leq n_N + 1, \quad 3 = 1 + n_N + 1.$$

Отсюда  $n_N = 1$ ,  $n_M = 1$  и  $N(s) = a_0 s + a_1$ ,  $M(s) = b_0 s + b_1$ . Подставив найденные полиномы в полиномиальное уравнение (5.42), получим

$$b_0 s + b_1 + s(a_0 s + a_1) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

Из этого уравнения находим  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$ ,  $b_0 = 3$ ,  $b_1 = 1$ . Следовательно,  $N(s) = s + 3$ ,  $M(s) = 3s + 1$ .

Подставив эти полиномы и выражения для  $P^-(s)$  и  $R^-(s)$  в (5.41), получим искомую передаточную функцию

$$W_p(s) = \frac{(s+1)(3s+1)}{(s+3)s}.$$

Пример 5.8. Передаточная функция объекта имеет вид  $W_o(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$ . Синтезировать регулятор, при котором ошибка  $x(t)$  в переходном режиме (ее переходная составляющая) изменяется в соответствии с

$$x(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{-t},$$

а в установившемся режиме при постоянных внешних воздействиях (статическая ошибка) равна нулю.

Решение. Переходная составляющая ошибки будет изменяться в соответствии с приведенной выше функцией, если знаменатель желаемой передаточной функции имеет вид  $G(s) = (s + 1)^3$ .

Статическая ошибка будет равна нулю, если порядок астатизма  $\nu = 1$ . В данном случае  $r = \nu = 1$ .

Числитель и знаменатель передаточной функции объекта раскладываются на множители  $P^-(s) = P^+(s) = P(s) = 1$ ,  $R^-(s) = s + 1$ ,  $R^+(s) = s - 1$ .

Степени полиномов равны  $n_G = 3$ ,  $n_{P^-} = n_{P^+} = 0$ ,  $n_{R^-} = n_{R^+} = 1$ . Условия (5.43), (5.44) и (5.45) принимают соответственно вид

$$3 \leq n_M + n_N + 1, \quad 1 + n_M \leq n_N + 1, \quad 3 = 1 + n_N + 1.$$

Отсюда  $n_N = 1$ ,  $n_M = 1$ . Поэтому  $N(s) = a_0s + a_1$ ,  $M(s) = b_0s + b_1$ . При подстановке этих полиномов полиномиальное уравнение (5.42) принимает вид

$$b_0s + b_1 + (s - 1)(a_0s + a_1)s = s^3 + 3s^2 + 3s + 1.$$

Из этого уравнения находим  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 4$ ,  $b_0 = 7$ ,  $b_1 = 1$ . И соответственно  $N(s) = s + 4$ ,  $M(s) = 7s + 1$ . Подставляя их и выражения для  $P^-(s)$  и  $R^-(s)$  в (5.41), найдем искомую передаточную функцию  $W_p(s) = \frac{(s+1)(7s+1)}{(s+4)s}$ .

**5.4.3. Определение желаемой передаточной функции.** Желаемая передаточная функция должна быть определена исходя из заданных требований к качеству синтезируемой системы. На ее выбор определенные ограничения накладывают условия грубости и физической осуществимости. В силу этих ограничений желаемая передаточная функция имеет вид (см. (5.39))

$$W_{\text{ж}} = \frac{P^+(s)M(s)}{G(s)},$$

где  $P^+(s)$  — полином с правыми нулями передаточной функции объекта (5.37);  $M(s)$  — полином, определяемый в процессе синтеза. Поэтому определение желаемой передаточной функции сводится к выбору полинома  $G(s)$ .

Здесь мы рассмотрим определение желаемой передаточной функции, основанное на использовании типовых нормированных передаточных функций.

**А. Нормированная передаточная функция.** Пусть задана передаточная функция

$$\Phi(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (5.46)$$

Произведем замену переменных

$$q = \alpha s, \quad \alpha = \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}.$$



Тогда получим

$$\tilde{\Phi}(q) = \frac{\tilde{b}_0 q^m + \tilde{b}_1 q^{m-1} + \dots + \tilde{b}_m}{q^n + \tilde{a}_1 q^{n-1} + \dots + \tilde{a}_{n-1} q + 1}, \quad (5.47)$$

где

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i}{a_n \alpha^{m-i}}, \quad \tilde{a}_k = \frac{a_k}{a_n \alpha^{n-k}}, \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5.48)$$

$\tilde{\Phi}(q)$  называется *нормированной передаточной функцией* или *передаточной функцией в форме Вышнеградского*. Нормированная передаточная функция характеризуется тем, что в знаменателе коэффициент при старшей степени и свободный член равны единице.

Рассмотрим преобразования Лапласа функций  $x(t)$  и  $x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ :

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} x\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-q\tau} d\tau = X(q).$$

Отсюда следует, что преобразование  $q = \alpha s$  для переменной преобразования Лапласа равносильно преобразованию  $\tau = t/\alpha$  для переменной оригинала и умножению оригинала на  $1/\alpha$ . И так как умножение переходной функции на константу не влияет на время регулирования, то время регулирования  $t_p$  исходной системы (5.46) и время регулирования  $\tau_p$  для системы с нормированной передаточной функцией (5.47) связаны соотношением

$$t_p = \alpha \tau_p, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{t_p}{\tau_p}. \quad (5.49)$$

На последнем равенстве основано определение желаемой передаточной функции, когда, наряду с другими требованиями, нужно обеспечить заданное время регулирования.

По заданным требованиям к качеству синтезируемой системы, кроме требования к времени регулирования, находится стандартная нормированная передаточная функция

$$W_n(q) = \frac{\tilde{b}_0 q^m + \tilde{b}_1 q^{m-1} + \dots + \tilde{b}_m}{s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \dots + \tilde{a}_{n-1} q + 1},$$

и для нее определяется  $\tau_p$ . По полученному  $\tau_p$  и заданному  $t_p$  находится  $\alpha = t_p/\tau_p$ . Учитывая равенство  $\alpha = \sqrt{a_0/a_n}$  и формулы (5.48), положив  $a_n = 1$ , для коэффициентов желаемой передаточной функции находим

$$b_i = \tilde{b}_i \alpha^{m-i}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (5.50a)$$

$$a_0 = \alpha^n, \quad a_k = \tilde{a}_k \alpha^{n-k}, \quad a_n = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5.50b)$$

### **Б. Стандартные нормированные передаточные функции.**

Сначала рассмотрим стандартные передаточные функции, которые не имеют нулей: числители являются константами [10]. Так как зна-

чения этих констант не влияют на характер переходного процесса, примем их равными единице.

1. Передаточная функция с одинаковыми полюсами

$$W_n(q) = \frac{1}{(q+1)^n}$$

обладает монотонной переходной характеристикой, неплохим быстродействием и среди передаточных функций  $n$ -го порядка с одинаковыми коэффициентами при  $s^{n-1}$  имеет наибольшую степень устойчивости. Ее знаменатель при  $n = 4, 5, 6$  принимает следующий вид:

$$n = 4: G_4(s) = q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1;$$

$$n = 5: G_5(s) = q^5 + 5q^4 + 10q^3 + 10q^2 + 5q + 1;$$

$$n = 6: G_6(s) = q^6 + 6q^5 + 15q^4 + 20q^3 + 15q^2 + 6q + 1.$$

2. Передаточная функция с полюсами, имеющими одинаковые действительные части  $\eta$  и мнимые части, образующие арифметические прогрессии с разностью и первым членом, равными  $\gamma$ . Существует оптимальное  $\mu = \gamma/\eta$ , которому соответствует наименьшее время регулирования.

Приведем полиномы знаменателя для шести значений степеней при оптимальных  $\mu$ :

$$n = 1: G_1(s) = q + 1;$$

$$n = 2: G_2(s) = q^2 + 1,38q + 1;$$

$$n = 3: G_3(s) = q^3 + 2,05q^2 + 2,3q + 1;$$

$$n = 4: G_4(s) = q^4 + 2,6q^3 + 3,8q^2 + 2,8q + 1;$$

$$n = 5: G_5(s) = q^5 + 2,5q^4 + 5,3q^3 + 5,46q^2 + 3,64q + 1;$$

$$n = 6: G_6(s) = q^6 + 3,73q^5 + 8q^4 + 10,3q^3 + 8,56q^2 + 4,18q + 1.$$

Передаточные функции с рассмотренными полиномами в знаменателе оказываются неудовлетворительными при наличии у них нулей из-за больших перерегулирований. Разработаны рекомендации по расположению полюсов на действительной оси, обеспечивающие приемлемые величины перерегулирования, для астатических систем 2-го и 3-го порядков с передаточными функциями, имеющими один и два нуля соответственно.

3. Для астатической системы с астатизмом 2-го порядка при передаточной функции с одним нулем [10]

$$W_n(q) = \frac{\tilde{a}_{n-1}q + 1}{q^n + \tilde{a}_1q^{n-1} + \dots + \tilde{a}_{n-1}q + 1}$$

рекомендуют располагать полюсы на вещественной полуоси по арифметической прогрессии. При этом перерегулирование не превышает 10 %.

Приведем полиномы знаменателя для этого случая (в конце каждого полинома в скобках укажем разность прогрессии):

$$n = 2: G_2(s) = q^2 + 2,5q + 1 \quad (d = 1,5);$$

$$n = 3: G_3(s) = q^3 + 5,1q^2 + 6,35q + 1 \quad (d = 1,517);$$

$$n = 4: G_4(s) = q^4 + 7,22q^3 + 16,3q^2 + 11,83q + 1 \quad (d = 1,138);$$

$$n = 5: G_5(s) = q^5 + 9q^4 + 29q^3 + 38q^2 + 18q + 1 \quad (d = 0,86685);$$

$$n = 6: G_6(s) = q^6 + 11q^5 + 45,8q^4 + 93,3q^3 + 82,3q^2 + 27,7q + 1 \quad (d = 0,039).$$

4. Для астатической системы с астатизмом 3-го порядка при передаточной функции с двумя нулями [10]

$$W_n(q) = \frac{\tilde{a}_{n-2}q^2 + \tilde{a}_{n-1}q + 1}{q^n + \tilde{a}_1q^{n-1} + \dots + \tilde{a}_{n-1}q + 1}$$

рекомендуют располагать корни на вещественной полуоси по геометрической прогрессии. Полиномы знаменателя в этом случае имеют следующий вид (в скобках приводятся первый член  $\lambda_1$  и знаменатель  $\rho$  прогрессии):

$$n = 3: G_3(s) = q^3 + 6,7q^2 + 6,7q + 1 \quad (\lambda_1 = 0,182; \rho = 5,5);$$

$$n = 4: G_4(s) = q^4 + 7,9q^3 + 15q^2 + 7,9q + 1 \quad (\lambda_1 = 0,185; \rho = 3,08);$$

$$n = 5: G_5(s) = q^5 + 18q^4 + 69q^3 + 69q^2 + 18q + 1 \quad (\lambda_1 = 0,0755; \rho = 3,63);$$

$$n = 6: G_6(s) = q^6 + 36q^5 + 251q^4 + 485q^3 + 251q^2 + 26q + 1 \quad (\lambda_1 = 0,038; \rho = 3,7).$$

В табл. 5.1 представлены время регулирования и перерегулирование для приведенных стандартных нормированных передаточных функций. Время регулирования определено при  $\Delta = 0,05 h(\infty)$ .

Таблица 5.1. Время регулирования и перерегулирование для стандартных нормированных передаточных функций

	Время регулирования						
	$n$	1	2	3	4	5	6
ПФ с одинаковыми полюсами	$\tau_p$	3	4,6	6,2	7,6	9	10,3
ПФ с одинаковой вещественной частью полюсов	$\tau_p$	3	3,2	4	4,5	5,7	6,2
Астатическая система с астатизмом 2-го порядка	$\tau_p$	—	3,7	7,2	12	18	24
Астатическая система с астатизмом 3-го порядка	$\tau_p$	—	—	1,5	4,3	8,5	19
	Перерегулирование						
	$n$	1	2	3	4	5	6
ПФ с одинаковой вещественной частью полюсов	$\sigma$	0	5	0	5	0	5
Астатическая система с астатизмом 2-го порядка	$\sigma$	—	10	10	10	10	10
Астатическая система с астатизмом 3-го порядка	$\sigma$	—	—	10	20,2	20	16

Пример 5.9. Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$W_o(s) = \frac{1}{(s+1)(0,5s+1)(0,2s+1)} = \frac{1}{0,1s^3 + 0,8s^2 + 1,7s + 1}.$$

Синтезировать регулятор, при котором переходный процесс является монотонным, время регулирования  $t_p \leq 3,15$  и статическая ошибка равна нулю.

Решение. Статическая ошибка будет равна нулю, если система будет астатической. Примем степень астатизма  $r = 1$ .

В качестве стандартной передаточной функции выберем нормированную передаточную функцию с одинаковыми полюсами

$$W_n(q) = \frac{1}{(q+1)^3} = \frac{1}{q^3 + 3q^2 + 3q + 1}.$$

Для нее  $\tau_p = 6,2$  и  $\alpha = 3,15/6,2 \cong 0,5$ . Учитывая равенство  $\alpha = \sqrt[n]{a_0/a_n}$  и формулы (5.50б), положив  $a_3 = 1$ , для коэффициентов полинома знаменателя  $G(s)$  желаемой передаточной функции получаем

$$a_0 = \alpha^3 = 0,125, \quad a_1 = \alpha^2 \tilde{a}_1 = 0,75, \quad a_2 = \alpha \tilde{a}_2 = 1,5, \quad a_3 = 1.$$

Отсюда  $G(s) = 0,125s^3 + 0,75s^2 + 1,5s + 1$ .

Числитель и знаменатель передаточной функции объекта раскладываются на множители  $P^-(s) = P^+(s) = 1$ ,  $R^+(s) = 1$ ,  $R^-(s) = 0,1s^3 + 0,8s^2 + 1,7s + 1$ .

Степени полиномов равны  $n_G = 3$ ,  $n_{P^-} = n_{P^+} = 0$ ,  $n_{R^-} = 3$ ,  $n_{R^+} = 0$ . Условия (5.43), (5.44) и (5.45) принимают вид

$$3 \leq n_M + n_N + 1, \quad 3 + n_M \leq n_N + 1, \quad 3 = n_N + 1.$$

Этим условиям удовлетворяют  $n_N = 2$ ,  $n_M = 0$  и соответственно  $N(s) = a_0s^2 + a_1s + a_2$ ,  $M(s) = b_0$ . При подстановке этих полиномов полиномиальное уравнение (5.42) принимает вид

$$b_0 + (a_0s^2 + a_1s + a_2)s = 0,125s^3 + 0,75s^2 + 1,5s + 1.$$

Отсюда  $a_0 = 0,25$ ,  $a_1 = 0,75$ ,  $a_2 = 1,5$ ,  $b_0 = 1$  и соответственно  $N(s) = 0,25s^2 + 0,75s + 1,5$ ,  $M(s) = 1$ . Подставляя их и выражения для  $P^-(s)$  и  $R^-(s)$  в (5.41), найдем искомую передаточную функцию:

$$W_p(s) = \frac{0,1s^3 + 0,8s^2 + 1,7s + 1}{(0,25s^2 + 0,75s + 1,5)s}.$$

## 5.5. Метод обратной задачи динамики

В механике обратной называют задачу, когда по заданному уравнению движений или его свойствам требуется определить силы, вызывающие такое движение. Поэтому с точки зрения механики задача синтеза, когда по заданным свойствам движения системы нужно определить закон управления (по существу силу), является обратной задачей механики, или, конкретнее, обратной задачей динамики.

*Методом обратной задачи динамики* будем называть метод синтеза систем, когда по заданным уравнению объекта и требованиям к качеству системы управления определяется желаемое дифференциальное уравнение, решение которого удовлетворяет заданным требованиям, а затем из найденного уравнения выражается старшая производная и подстановкой ее вместо старшего производного в уравнение объекта находится требуемый закон управления.

Данный метод был предложен Л.М. Бойчуком прежде всего для синтеза структуры нелинейных систем управления [3].

**5.5.1. Объект 2-го порядка.** Пусть объект управления описывается уравнением

$$a_0 \ddot{y} + f(\dot{y}, y, t) = b_0 u, \quad a_0 > 0, \quad b_0 \neq 0. \quad (5.51)$$

Задан требуемый закон изменения  $y^0(t)$  выходной переменной  $y$ . Требуется найти алгоритм управления, при котором ошибка

$$x(t) = y^0(t) - y(t)$$

изменяется следующим образом:

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}. \quad (5.52)$$

Здесь  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные;  $\lambda_1, \lambda_2$  — заданные положительные постоянные. Решим эту задачу методом обратной задачи динамики. Для этого найдем желаемое дифференциальное уравнение.

Функция (5.52) является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \Lambda_1 \dot{x} + \Lambda_2 x = 0, \quad \Lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \Lambda_2 = \lambda_1 \lambda_2. \quad (5.53)$$

Учитывая, что  $y = y^0(t) - x(t)$ , имеем  $\ddot{y} = \ddot{y}^0(t) - \ddot{x}(t)$ . Из уравнения (5.53) получаем  $-\ddot{x} = \Lambda_1 \dot{x} + \Lambda_2 x$ . Поэтому желаемый закон изменения высшей производной имеет вид

$$\ddot{y} = \ddot{y}^0(t) + \Lambda_1 \dot{x} + \Lambda_2 x.$$

Подставив это выражение в (5.51) и исключив переменную  $y$ , получим

$$u = \frac{1}{b_0} [a_0(\ddot{y}^0(t) + \Lambda_1 \dot{x} + \Lambda_2 x) + f(\dot{y}^0(t) - \dot{x}, y^0(t) - x, t)]. \quad (5.54)$$

Линейный стационарный объект 2-го порядка

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 u, \quad a_0 > 0, \quad b_0 \neq 0,$$

является частным случаем уравнения (5.51), когда  $f(\dot{y}, y, t) = a_1 \dot{y} + a_2 y$ . Поэтому в этом случае (5.54) принимает вид

$$u = \frac{1}{b_0} \left\{ a_0 \left[ \left( \Lambda_1 - \frac{a_1}{a_0} \right) \dot{x} + \left( \Lambda_2 - \frac{a_2}{a_0} \right) x \right] + a_0 \ddot{y}^0(t) + a_1 \dot{y}^0(t) + a_2 y^0(t) \right\}. \quad (5.55)$$

**Пример 5.10.** Передаточная функция объекта управления есть  $W_o(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$ , задающее воздействие  $g(t) = y^0(t) = A$  ( $A$  — константа). Определить алгоритм управления, при котором ошибка  $x(t) = y^0(t) - y(t)$  изменяется следующим образом:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}.$$

**Решение.** В данном случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ,  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 4$ , уравнение объекта имеет вид

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u.$$

Следовательно,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2$ ,  $b_0 = 1$  и согласно (5.55)

$$u = \dot{x} + 2x + 2A = (p + 2)x + 2g(t) \quad (g(t) = A).$$

Используя передаточные функции относительно входов  $x$  и  $g$ , полу-

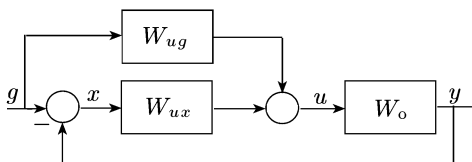


Рис. 5.2. Структурная схема (к примеру 5.10)

ченный алгоритм управления можно записать в следующем виде:

$$u = W_{ux}(p)x + W_{ug}(p)g, \quad W_{ux}(p) = p + 2, \quad W_{ug}(p) = 2.$$

На рис. 5.2 представлена структурная схема синтезированной системы.

**Астатический закон управления.** В примере 5.10 синтезированный регулятор определяется двумя передаточными функциями. Хотя система не является астатической, статическая ошибка от задающего воздействия равна нулю. Это обусловлено наличием звена с передаточной функцией  $W_{ug}(p)$ . Однако при неточном знании модели объекта или действии неконтролируемых (не учтенных в уравнениях) возмущений статическая ошибка не будет равна нулю. Поэтому желательно, чтобы закон управления (5.55) включал интегральный член. Такой закон управления будем называть *астатическим*.

Астатический закон управления можно получить следующим образом. В уравнении (5.52) и равенстве, которое получается дифференцированием (5.52), сделаем подстановку  $C_1 e^{-\lambda_1 t} = z_1$  и  $C_2 e^{-\lambda_2 t} = z_2$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} x(t) &= z_1 + z_2, \\ \dot{x}(t) &= -\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2. \end{aligned}$$

Разрешим эту систему равенств относительно  $z_1$  и  $z_2$ :

$$z_1 = -\frac{\lambda_2 x(t) + \dot{x}(t)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad z_2 = \frac{\lambda_1 x(t) + \dot{x}(t)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Проинтегрировав (5.52) по  $t$ , получим

$$\int_0^t x(\tau) d\tau = -\frac{1}{\lambda_1} z_1 - \frac{1}{\lambda_2} z_2.$$

Подставив сюда найденные выше выражения для  $z_1$  и  $z_2$ , умножим обе части на  $\alpha$  ( $\alpha$  — константа):

$$\alpha \int_0^t x(\tau) d\tau = -\frac{\alpha}{\lambda_1 \lambda_2} [(\lambda_1 + \lambda_2)x(t) + \dot{x}(t)].$$

Учитывая обозначения  $\Lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2$  и  $\Lambda_2 = \lambda_1 \lambda_2$  (см. (5.53)), это равенство можно представить в виде

$$\alpha \Lambda_2 \int_0^t x(\tau) d\tau = -\alpha \Lambda_1 x(t) - \alpha \dot{x}(t). \quad (5.56)$$

Прибавляя и вычитая  $\frac{a_0}{b_0} (\alpha \Lambda_1 x + \alpha \dot{x})$ , закон управления (5.55) преобразуем к виду

$$u = \frac{1}{b_0} \left\{ a_0 \left[ \left( \Lambda_1 - \frac{a_1}{a_0} \right) \dot{x} + \left( \Lambda_2 - \frac{a_2}{a_0} \right) x + (\alpha \dot{x} + \alpha \Lambda_1 x) - (\alpha \dot{x} + \alpha \Lambda_1 x) \right] + a_1 \ddot{y}^0 + a_1 \dot{y}^0 + a_2 y^0 \right\}.$$

Отсюда с учетом (5.56) получим астатический закон управления

$$u = \frac{1}{b_0} \left\{ a_0 \left[ \left( \Lambda_1 - \frac{a_1}{a_0} + \alpha \right) \dot{x} + \left( \Lambda_2 - \frac{a_2}{a_0} + \alpha \Lambda_1 \right) x + \alpha \Lambda_2 \int_0^t x(\tau) d\tau \right] + a_1 \ddot{y}^0 + a_1 \dot{y}^0 + a_2 y^0 \right\}.$$

Здесь  $\alpha$  можно задать исходя из дополнительных требований.

**5.5.2. Объект 3-го порядка.** Пусть объект управления описывается уравнением

$$a_0 \ddot{y} + f(\ddot{y}, \dot{y}, y, t) = b_0 u, \quad a_0 > 0, \quad b_0 \neq 0. \quad (5.57)$$

Задан требуемый закон изменения  $y^0(t)$  выходной переменной  $y$ . Требуется найти алгоритм управления, при котором ошибка

$$x(t) = y^0(t) - y(t)$$

изменяется следующим образом:

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} + C_3 e^{-\lambda_3 t}.$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — заданные положительные постоянные.

Эта функция является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \Lambda_1 \dot{x} + \Lambda_2 x + \Lambda_3 x = 0,$$

$$\Lambda_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \Lambda_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \quad \Lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Поэтому в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{y}^0 - \ddot{x} = \ddot{y}^0 + \Lambda_1 \ddot{x} + \Lambda_2 \dot{x} + \Lambda_3 x, \\ \ddot{y} &= \ddot{y}^0 - \ddot{x}, \quad \dot{y} = \dot{y}^0 - \dot{x}, \quad y = y^0 - x.\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (5.57), получим

$$u = \frac{1}{b_0} [a_0 \ddot{y}^0(t) + a_0(\Lambda_1 \ddot{x} + \Lambda_2 \dot{x} + \Lambda_3 x) + f(\ddot{y}^0(t) - \ddot{x}, \dot{y}^0(t) - \dot{x}, y^0(t) - x, t)]. \quad (5.58)$$

Линейный стационарный объект 3-го порядка

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y + a_3 y = b_0 u, \quad a_0 > 0, \quad b_0 \neq 0,$$

является частным случаем нелинейного объекта (5.57), когда  $f(\ddot{y}, \dot{y}, y, t) = a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y$ . Поэтому из (5.58) имеем

$$u = \frac{1}{b_0} \left\{ a_0 \left[ \left( \Lambda_1 - \frac{a_1}{a_0} \right) \ddot{x} + \left( \Lambda_2 - \frac{a_2}{a_0} \right) \dot{x} + \left( \Lambda_3 - \frac{a_3}{a_0} \right) x \right] + a_0 \ddot{y}^0(t) + a_1 \dot{y}^0(t) + a_2 y^0(t) + a_3 y^0(t) \right\}. \quad (5.59)$$

**Пример 5.11.** Пусть передаточная функция объекта имеет вид  $W_o(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)}$  и задающее воздействие  $g(t) = A$  ( $A$  — константа). Определить алгоритм управления, при котором ошибка  $x(t) = A - y(t)$  изменяется в соответствии с

$$x(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^3) e^{-2t}.$$

**Решение.** В данном случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ,  $\Lambda_1 = 6$ ,  $\Lambda_2 = 12$  и  $\Lambda_3 = 8$ , уравнение объекта имеет вид

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u.$$

Поэтому  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 0$ ,  $b_0 = 1$  и из (5.59) получаем  $u = 3\ddot{x} + 10\dot{x} + 8x$ .

Передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_p(p) = 3p^2 + 10p + 8.$$

**Физическая осуществимость.** Алгоритм управления, определяемый методом обратной задачи динамики, как правило, не удовлетворяет условию физической осуществимости: относительная степень передаточной функции синтезированного регулятора отрицательна. Поэтому его точно осуществить (реализовать) не удастся. Это связано с тем, что нельзя реализовать точный (идеальный) дифференциатор. Однако при решении вопроса о реализуемости алгоритма управления его нужно рассматривать с учетом заданного объекта управления. Может оказаться, что требуемые производные можно определить путем измерения.



Например, пусть передаточная функция объекта имеет вид  $W_o(p) = \frac{1}{p(p+1)}$ , передаточная функция регулятора  $W_p(p) = k_{\pi} + k_{\text{д}}p$  и задающее воздействие  $g(t) = y^0(t) = g_0$  ( $g_0$  — константа). В данном

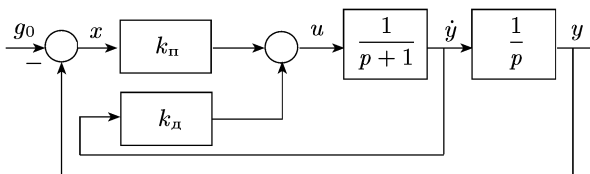


Рис. 5.3. Структурная схема (к вопросу о реализуемости)

случае производную можно измерить и алгоритм управления можно точно реализовать (рис. 5.3).

В случае линейных систем, имея желаемое дифференциальное уравнение, легко получить желаемую передаточную функцию. Поэтому, казалось бы, нет особой разницы между методом обратной задачи динамики (ОЗД) и методом желаемой передаточной функции (ЖПФ). Однако между этими двумя методами существует принципиальная разница, заключающаяся в следующем.

1) Алгоритм управления, полученный методом ОЗД, в общем случае нельзя точно реализовывать, в то время как вопрос реализуемости передаточной функции регулятора, которая находится методом ЖПФ, решается в процессе ее получения.

2) Если на объект управления действуют контролируемые возмущения и они учтены в его уравнении, то при использовании метода ОЗД получается комбинированный закон управления, полностью компенсирующий действие указанных возмущений. Метод ЖПФ не позволяет синтезировать инвариантную от возмущений систему управления.

## 5.6. Синтез систем управления при наличии чистого запаздывания

Если объект управления содержит звено чистого запаздывания, то можно его передаточную функцию  $W_{\tau}(s) = e^{-\tau t}$  аппроксимировать дробно-рациональной функцией и при синтезе регулятора использовать рассмотренные выше методы.

Для аппроксимации воспользуемся разложением экспоненты  $e^{-\tau s}$  в ряд Тейлора:

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2!} - \frac{(\tau s)^3}{3!} + \dots,$$

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{1 + \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2!} + \frac{(\tau s)^3}{3!} + \dots}.$$

Если ограничиться первыми тремя слагаемыми разложения, то получим

$$W_{\tau}^{-}(s) = 1 - \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2!} = T^2 s^2 - 2\zeta T s + 1, \quad (5.60a)$$

$$W_{\tau}^{+}(s) = \frac{1}{1 + \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2!}} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}, \quad (5.60b)$$

где  $T = \frac{\tau}{\sqrt{2}}$ ,  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Амплитудные и фазовые частотные функции имеют вид

$$A_{\tau}^{-}(\omega) = |W_{\tau}^{-}(j\omega)| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + \tau^4 \omega^4} \geq 1,$$

$$A_{\tau}^{+}(\omega) = |W_{\tau}^{+}(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{4 + \tau^4 \omega^4}} \leq 1,$$

$$\varphi_{\tau}^{-}(\omega) = \varphi_{\tau}^{+}(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\tau\omega}{2 - (\tau\omega)^2} & \text{при } \omega \leq \frac{\sqrt{2}}{\tau}, \\ -\pi - \arctg \frac{2\tau\omega}{2 - (\tau\omega)^2} & \text{при } \omega \geq \frac{\sqrt{2}}{\tau}. \end{cases}$$

Представив передаточную функцию звена чистого запаздывания в виде  $W_{\tau}(s) = e^{-\tau s} = e^{-\tau s/2} / e^{\tau s/2}$ , разложим числитель и знаменатель в ряд Тейлора. Тогда, ограничиваясь двумя и тремя членами разложения, получим соответственно

$$W_{\tau}^1(s) = \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s}, \quad (5.61a)$$

$$W_{\tau}^{(2)} = \frac{1 - \frac{1}{2}\tau s + \frac{1}{8}(\tau s)^2}{1 + \frac{1}{2}\tau s + \frac{1}{8}(\tau s)^2} = \frac{T^2 s^2 - 2\zeta T s + 1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}, \quad (5.61b)$$

где  $T = \frac{\tau}{\sqrt{8}}$ ,  $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Амплитудные частотные функции обеих передаточных функций совпадают с амплитудной частной функцией исходной передаточной функцией звена чистого запаздывания:

$$|W_{\tau}^{(1)}(j\omega)| = |W_{\tau}^{(2)}(j\omega)| = |W_{\tau}(j\omega)| = 1.$$

Фазовые частотные функции имеют вид

$$\varphi_{\tau}^{(1)}(\omega) = \arg W_{\tau}^{(1)}(j\omega) = -2 \arctg \frac{\tau\omega}{2},$$

$$\varphi_{\tau}^2(\omega) = \arg W_{\tau}^{(2)}(j\omega) = \begin{cases} -2 \arctg \frac{4\tau\omega}{8 - (\tau\omega)^2} & \text{при } \omega \leq \frac{\sqrt{8}}{\tau}, \\ -2\pi - 2 \arctg \frac{4\tau\omega}{8 - (\tau\omega)^2} & \text{при } \omega \geq \frac{\sqrt{8}}{\tau}. \end{cases}$$

Фазовая частотная функция  $\varphi_{\tau}^{(2)}(\omega)$  по модулю превышает частотную функцию  $\varphi_{\tau}^{(1)}(\omega)$ :

$$|\varphi_{\tau}^{(1)}(\omega)| \leq |\varphi_{\tau}^{(2)}(\omega)|. \quad (5.62)$$

Равенство имеет место только при  $\omega = 0$ .

Действительно, при  $\omega \leq \sqrt{8}/\tau$  неравенство (5.62) принимает вид

$$\arctg \frac{\tau\omega}{2} \leq \arctg \frac{4\tau\omega}{8 - (\tau\omega)^2}, \quad \text{или} \quad \frac{\tau\omega}{2} \leq \frac{4\tau\omega}{8 - (\tau\omega)^2}.$$

Справедливость последнего неравенства очевидна, если его представить в виде  $8 - (\tau\omega)^2 \leq 8$ . Равенство имеет место только при  $\omega = 0$ .

При  $\omega \geq \sqrt{8}/\tau$  неравенство (5.62) имеет вид

$$\arctg \frac{\tau\omega}{2} \leq \pi + \arctg \frac{4\tau\omega}{8 - (\tau\omega)^2}.$$

Справедливость этого неравенства, причем строгого, следует из очевидных неравенств

$$\arctg \frac{\tau\omega}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \pi + \arctg \frac{4\tau\omega}{8 - (\tau\omega)^2} > \frac{\pi}{2}.$$

В табл. 5.2 приведены отклонения (разности) фазовых частотных функций  $\varphi_{\tau}^{+}(\omega)$ ,  $\varphi_{\tau}^{-}(\omega)$ ,  $\varphi_{\tau}^{(1)}(\omega)$  и  $\varphi_{\tau}^{(2)}(\omega)$  от фазовой частотной функции звена чистого запаздывания  $\varphi_{\tau}(\omega)$ ,

$$\Delta^{\pm} = \varphi_{\tau}(\omega) - \varphi_{\tau}^{\pm}(\omega) = \varphi_{\tau}(\omega) - \varphi_{\tau}^{-}(\omega),$$

$$\Delta^{(i)} = \varphi_{\tau}(\omega) - \varphi_{\tau}^{(i)}(\omega), \quad i = 1, 2,$$

при частотах  $\omega \leq 1,4/\tau$ ,  $\tau \leq 1$ .

Сравнивая частотные функции передаточных функций (5.60) и (5.61), можно заметить, что формулы (5.61) более точно аппроксими-

Таблица 5.2. Фазовые погрешности звеньев, аппроксимирующих звено чистого запаздывания

$\omega\tau$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\Delta^{\pm}$	0,0000	0,0002	0,0013	0,0044	0,0101	0,0191	0,0317	0,0667
$\Delta^{(1)}$	0,0000	-0,0001	-0,0007	-0,0022	-0,0052	-0,0100	-0,0171	-0,0267
$\Delta^{(2)}$	0,0000	0,0000	0,0003	0,0011	0,0026	0,0051	0,0087	0,0137
$\omega\tau$	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	
$\Delta^{\pm}$	0,0663	0,0866	0,1071	0,1260	0,1416	0,1521	0,1565	
$\Delta^{(1)}$	-0,0390	-0,0543	-0,0727	-0,0943	-0,1192	-0,1472	-0,1785	
$\Delta^{(2)}$	0,0203	0,0284	0,0383	0,0500	0,0634	0,0785	0,0952	

руют передаточную функцию звена чистого запаздывания, чем формулы (5.60), по крайней мере при малых  $\tau\omega$ .

Действительно, амплитудные частотные функции аппроксимирующих звеньев (5.61) и звена чистого запаздывания совпадают. И, как следует из табл. 5.2, при малых  $\tau\omega$  фазовые частотные функции этих звеньев отличаются от фазовой частотной функции звена чистого запаздывания меньше, чем фазовая частотная функция звеньев (5.60).

## Задачи

1. Заданы передаточные функции регулятора  $W_p(s) = k_n$  и объекта  $W_o(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  системы управления (рис. 5.4). Определить пара-

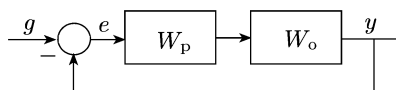


Рис. 5.4. Схема системы управления

метр регулятора  $k_n$  по минимуму интегральной квадратической ошибки  $J_{20}$  при условии  $k_n \leq 50$ .

2. Заданы передаточные функции регулятора  $W_p(s) = 2 + \frac{k_n}{s}$  и объекта  $W_o(s) = \frac{1}{s+1}$  системы управления (см. рис. 5.4). Определить параметр регулятора  $k_n$  по минимуму интегральной квадратической ошибки  $J_{20}$  при условии  $k_n \leq 1$ .

3. Заданы задающее воздействие  $g(t) = 0,5t$  и передаточные функции регулятора  $W_p(s) = 2 + \frac{k_n}{s}$  и объекта  $W_o(s) = \frac{1}{s+1}$  системы управления (см. рис. 5.4). Определить параметр регулятора  $k_n$  по минимуму интегральной квадратической ошибки  $J_{20}$  при условии, что установившаяся ошибка  $|e_{g\infty}| \leq 0,1$ .

4. Заданы передаточные функции регулятора  $W_p(s) = 2 + \frac{k_n}{s}$  и объекта  $W_o(s) = \frac{1}{s+1}$  системы управления (см. рис. 5.4). Определить параметр регулятора  $k_n$  по минимуму обобщенной интегральной квадратической ошибки  $J_{21}$ .

5. Задана передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{2}{s(0,5s+1)}$ . Синтезировать оптимальные по степени устойчивости П-регулятор и ПИ-регулятор.

6. Задана передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{2}{s(0,5s^2+4s+1)}$ . Синтезировать оптимальные по степени устойчивости П-регулятор, ПД-регулятор, ПИ-регулятор и ПИД-регулятор.

7. Задана передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{2(s+1)}{(s-1)(0,5s+1)}$ .

Синтезировать регулятор, при котором переходный процесс описывается функцией  $x(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{-2t}$  и статическая ошибка равна нулю.

8. Задана передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{2(s-1)}{(s+1)(0,5s+1)}$ .

Синтезировать регулятор, при котором переходный процесс описывается функцией  $x(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{-2t}$  и статическая ошибка равна нулю.

9. Задана передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{2}{s(0,5s+1)}$ .

Синтезировать регулятор, при котором получается монотонный переходный процесс, статическая ошибка от задающего воздействия равна нулю и время регулирования  $t_p \leq 0,8$ .

10. Задана передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{2}{s^2(0,5s+1)}$ .

Синтезировать регулятор, при котором время регулирования  $t_p \leq 0,8$  и перерегулирование  $\sigma \leq 15\%$ .

11. Задана передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{2(s-2)}{(s+1)(0,5s+1)}$ .

Синтезировать регулятор, при котором характеристический полином синтезированной системы имеет вид  $G(s) = (s+1)^3$ .

12. Задана передаточная функция объекта  $W_o(s) = \frac{2}{s(0,5s+1)}$ .

Синтезировать регулятор, при котором характеристический полином синтезированной системы имеет вид  $G(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$ .

## Глава 6

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

#### 6.1. Различные типы дискретных систем

Система управления называется *дискретной*, если она содержит дискретный элемент. Элемент называется *дискретным*, если его выходной сигнал квантован по времени или по уровню. Говорят, что сигнал *квантован по времени*, если он представляет собой последовательность импульсов, и *квантован по уровню*, если он принимает дискретные значения, т. е. значения, кратные некоторой минимальной величине, называемой *уровнем квантования* или *квантом*.

Дискретные системы разделяются на импульсные, цифровые и релейные.

Система управления называется *импульсной*, если она содержит импульсный элемент — дискретный элемент, преобразующий непрерывный сигнал в импульсный, т. е. в последовательность импульсов. На выходе импульсного элемента сигнал квантован по времени.

Система управления называется *цифровой*, если она содержит цифровое устройство. На выходе цифрового устройства сигнал квантован по уровню и по времени.

Система управления называется *релейной*, если она содержит релейный элемент. Релейные системы управления являются существен-

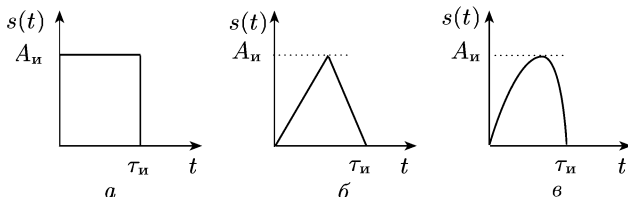


Рис. 6.1. Формы импульса: а — прямоугольный импульс; б — треугольный импульс; в — синусоидальный импульс

но нелинейными. Они не подлежат обычной линеаризации и в этой части книги не рассматриваются.

Рассмотрим различные типы импульсных систем. Но для этого прежде всего остановимся на характеристике импульсов и импульсной модуляции.

*Импульсом длительности  $\tau_{\text{и}}$*  называется сигнал (физическая величина), который описывается функцией, не обращающейся в нуль только на некотором конечном интервале времени длительности  $\tau_{\text{и}}$ . По форме различают прямоугольные, треугольные, синусоидальные (рис. 6.1) и другие импульсы. Они характеризуются шириной (длительностью)  $\tau_{\text{и}}$  и амплитудой (высотой)  $A_{\text{и}}$ . Последовательность импульсов, помимо указанных параметров, еще характеризуется периодом следования импульсов  $T$  и относительной длительностью  $\gamma = \tau_{\text{и}}/T$  (рис. 6.2).

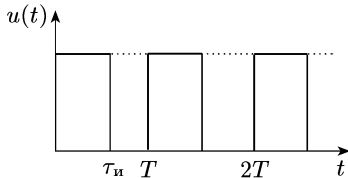


Рис. 6.2. Последовательность импульсов

В импульсном элементе происходит модуляция, т.е. в соответствии с входным сигналом изменяется один из параметров последовательности импульсов на выходе. В зависимости от того, какой параметр изменяется, различают амплитудно-импульсную модуляцию (АИМ), широтно-импульсную модуляцию (ШИМ) и другие.

При АИМ изменяется амплитуда  $A_{\text{и}}$ , а при ШИМ — ширина (длительность) импульса. Импульсный элемент, осуществляющий амплитудно-импульсную модуляцию, называют *АИМ-элементом*, а импульсный элемент, осуществляющий широтно-импульсную модуляцию, называют *ШИМ-элементом*.

Импульсную систему управления, содержащую АИМ-элемент, называют *АИМ-системой управления*, а импульсную систему управления, содержащую ШИМ-элемент, называют *ШИМ-системой управления*.

Различают импульсную модуляцию 1-го и 2-го родов. При импульсной модуляции 1-го рода модулируемый параметр изменяется в соответствии со значениями входного (модулирующего) сигнала

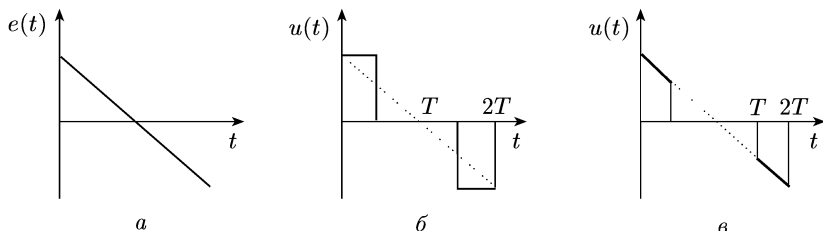


Рис. 6.3. Модуляции 1-го и 2-го родов: а — модулирующий сигнал; б — АИМ 1-го рода; в — АИМ 2-го рода

(рис. 6.3, а) в дискретные моменты времени, называемые *моментами съема сигнала* (рис. 6.3, б).

При модуляции 2-го рода модулируемый параметр изменяется в соответствии со значениями модулирующего сигнала в течение всего времени существования импульса (рис. 6.3, в).

## 6.2. Линейные разностные уравнения

Линейные дискретные системы описываются линейными разностными уравнениями. Поэтому кратко рассмотрим теорию таких уравнений.

Пусть дана дискретная функция, т.е. функция  $x(t)$ , у которой аргумент принимает дискретные значения, кратные  $T$ :  $t = nT$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Функция  $\Delta x(t)$ , определяемая формулой

$$\Delta x(t) = x(t + T) - x(t),$$

называется *первой (конечной) разностью*. Рекуррентно  $n$ -я (конечная) разность определяется следующим образом:

$$\Delta^0 x(t) = x(t), \quad \Delta^n x(t) = \Delta^{n-1} x(t + T) - \Delta^{n-1} x(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Введем в рассмотрение *оператор смещения*  $E$ , который определяется соотношением

$$Ex(t) = x(t + T).$$

Используя этот оператор, конечные разности можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= Ex(t) - x(t) = (E - 1)x(t), \\ \Delta^2 x(t) &= E\Delta x(t) - \Delta x(t) = (E - 1)\Delta x(t) = (E - 1)^2 x(t), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\Delta^n x(t) = E\Delta^{n-1} x(t) - \Delta^{n-1} x(t) = (E - 1)\Delta^{n-1} x(t) = (E - 1)^n x(t).$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$(E - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k E^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Поэтому

$$\Delta^n x(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k E^k x(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k x(t + kT). \quad (6.1)$$

Уравнение

$$c_0 \Delta^n y(t) + c_1 \Delta^{n-1} y(t) + \dots + c_n y(t) = \varphi(t) \quad (c_0 \neq 0), \quad (6.2)$$

где  $y(t)$  — неизвестная дискретная функция, называется *(конечным) разностным уравнением  $n$ -го порядка*. Используя формулу (6.1), уравнение (6.2) всегда можно преобразовать к виду

$$a_0 y(t + nT) + a_1 y(t + (n-1)T) + \dots + a_n y(t) = \varphi(t). \quad (6.3)$$

Если  $a_0 \neq 0$  и  $a_n \neq 0$ , то уравнение (6.3) также называют *(конечным) разностным уравнением  $n$ -го порядка*.

Здесь всюду коэффициенты уравнения предполагаются вещественными и постоянными.



Уравнение

$$a_0 y(t + nT) + a_1 y(t + (n-1)T) + \dots + a_n y(t) = 0, \quad (6.4)$$

которое получается из уравнения (6.3) приравниванием нулю правой части, называется *однородным* (конечным) разностным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (6.3).

Используя оператор смещения  $E$ , уравнение (6.3) можно записать в *операторной* (символической) *форме*

$$a_0 E^n y(t) + a_1 E^{n-1} y(t) + \dots + a_n y(t) = \varphi(t),$$

или

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = \varphi(t). \quad (6.5)$$

Соответствующее однородное уравнение в операторной форме принимает вид

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = 0. \quad (6.6)$$

Общее решение неоднородного разностного уравнения (6.3) имеет вид

$$y(t) = y_{\text{в}}(t) + y_{\text{с}}(t),$$

где  $y_{\text{в}}(t)$  — частное решение этого уравнения, определяющее вынужденное движение, и  $y_{\text{с}}(t)$  — общее решение соответствующего однородного уравнения (6.4), определяющее свободное движение.

Решение однородного уравнения ищется в виде  $y(t) = \lambda^t$ . Подставив это выражение в (6.4), получим

$$(a_0 \lambda^{nT} + a_1 \lambda^{(n-1)T} + \dots + a_n) \lambda^t = 0.$$

Это равенство будет выполнено тождественно относительно  $t$ , если

$$a_0 \lambda^{nT} + a_1 \lambda^{(n-1)T} + \dots + a_n = 0.$$

Положив  $\lambda^T = z$ , получим алгебраическое уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (6.7)$$

которое называется *характеристическим уравнением*. Левая часть этого уравнения получается из разностного оператора при неизвестной функции в уравнениях (6.5) и (6.6) при замене  $E$  на  $z$ .

Таким образом, решением однородного разностного уравнения (6.4) будет

$$y = \lambda_i^t = z_i^{t/T},$$

где  $z_i$  — корень характеристического уравнения (6.7).

Если все корни  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) характеристического уравнения простые (т. е. различные), то общее решение однородного разностного уравнения (6.4) имеет вид

$$y_{\text{с}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i z_i^{t/T}, \quad (6.8)$$

где  $C_i$  — произвольные постоянные. Если среди корней характеристического уравнения имеется кратный корень  $z_j$  кратности  $k_j$ , то

ему в (6.8) соответствует слагаемое

$$\left(C_1^j + C_2^j \frac{t}{T} + \dots + C_{k_j}^j \left(\frac{t}{T}\right)^{k_j-1}\right) z_j^{t/T}. \quad (6.9)$$

Если имеются простые комплексно-сопряженные корни  $z_{k,k+1} = \alpha \pm j\beta$ , то соответствующие им два слагаемых можно заменить на

$$\rho^{t/T} \left( A \cos \frac{t}{T} \varphi + B \sin \frac{t}{T} \varphi \right),$$

где  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$ ,  $A, B$  — произвольные константы.

**Пример 6.1.** Найти общее решение разностного уравнения

$$y(t+2T) - 5y(t+T) + 6y(t) = 4t.$$

**Решение.** Частное решение будем искать в виде

$$y_{\text{в}}(t) = at + b.$$

Подставив это выражение в данное уравнение, получим

$$a(t+2T) + b - 5[a(t+T) + b] + 6(at+b) = 4t,$$

или, после приведения подобных членов,

$$2at - 3aT + 2b = 4t.$$

Отсюда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получаем

$$2a = 4, \quad -3aT + 2b = 0 \Rightarrow a = 2, \quad b = 3T.$$

Следовательно, частное решение есть

$$y_{\text{в}} = 2t + 3T.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2 - 5z + 6 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются

$$z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow z_1 = 3, \quad z_2 = 2.$$

Поэтому общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$y_{\text{с}} = C_1 3^{t/T} + C_2 2^{t/T},$$

а общее решение неоднородного разностного уравнения есть

$$y(t) = y_{\text{в}}(t) + y_{\text{с}}(t) = 2t + 3T + C_1 3^{t/T} + C_2 2^{t/T}.$$

**Пример 6.2.** Определить решение разностного уравнения

$$y(t+2T) + y(t+T) + 0,25y(t) = 1$$

при нулевых начальных условиях ( $y(0) = y(T) = 0$ ).

Решение. Частное решение будем искать в виде константы  $y_b(t) = a$ . Подставив это выражение в данное уравнение, получим

$$a + a + 0,25a = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{9}.$$

Характеристическое уравнение

$$z^2 + z + 0,25 = 0$$

имеет двукратный корень  $z_{1,2} = -0,5$ . Общее решение однородного разностного уравнения —

$$y_c(t) = \left( C_1 + C_2 \frac{t}{T} \right) (-0,5)^{t/T}$$

и общее решение неоднородного уравнения —

$$y(t) = y_b(t) + y_c(t) = \frac{4}{9} + \left( C_1 + C_2 \frac{t}{T} \right) (-0,5)^{t/T}.$$

Из начальных условий имеем

$$y(0) = \frac{4}{9} + C_1 = 0,$$

$$y(T) = \frac{4}{9} + (C_1 + C_2)(-0,5) = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим  $C_1 = -4/9$ ,  $C_2 = 4/3$ .

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$y(t) = \frac{4}{9} - \left( \frac{4}{9} - \frac{4}{3} \frac{t}{T} \right) (-0,5)^{t/T}.$$

## 6.3. Решетчатые функции и $z$ -преобразование

При рассмотрении разностных уравнений важную роль играет  $z$ -преобразование. Но прежде чем приступить к изучению этого преобразования, познакомимся с классом дискретных функций, называемых решетчатыми функциями.

**6.3.1. Решетчатые функции.** Дискретная функция  $x(t)$  по определению есть функция, которая определена в дискретные моменты времени  $t = lT$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). Далее дискретную функцию будем записывать в виде  $x[lT]$ , используя  $t$  как непрерывную переменную. В теории дискретных систем рассматривают особый тип дискретных функций, называемых *решетчатыми функциями*. Решетчатая функция  $x[lT]$  характеризуется тем, что она определяется непрерывной функцией (функцией непрерывного аргумента)  $x(t)$  и принимает ее значения в моменты  $t = lT$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). Кроме того, используется *смещенная решетчатая функция*  $x[(l + \varepsilon)T]$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ), которая принимает значения непрерывной функции в моменты  $t = (l + \varepsilon)T$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). Поэтому когда говорят о решетчатой и смещенной решетчатой функциях, предполагают, что существует непрерывная функция, которая определяет эти функции.

**6.3.2. Определение  $z$ -преобразования.**  $z$ -преобразованием, или преобразованием Лорана, называется соотношение

$$X^*(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x[lT] z^{-l}, \quad (6.10)$$

ставящее в соответствие дискретной функции  $x[lT]$  функцию комплексного переменного  $X^*(z)$ . При этом  $x[lT]$  называют *оригиналом*, а  $X^*(z)$  — *изображением* или  *$z$ -изображением*. Оригинал и его изображение обозначают одноименными буквами: оригинал — строчной буквой, а изображение — прописной буквой со звездочкой.

$z$ -преобразование также условно записывают в виде

$$X^*(z) = Z\{x[lT]\},$$

а обратное  $z$ -преобразование — в виде

$$x[lT] = Z^{-1}\{X^*(z)\}.$$

Предполагается, что в  $z$ -преобразовании (6.10) дискретная функция обладает следующими свойствами:

1<sup>0</sup>) существуют положительные числа  $M$  и  $q$  такие, что  $|x[lT]| < Mq^l$  при любых  $l \geq 0$ ;

2<sup>0</sup>)  $x[lT] = 0$  при всех  $l < 0$ .

Свойство 1<sup>0</sup>) необходимо для существования области сходимости ряда в правой части (6.10), а свойство 2<sup>0</sup>) используется при выводе некоторых свойств  $z$ -преобразования. Функции, удовлетворяющие указанным двум свойствам, называют *функциями-оригиналами*.

$z$ -преобразование от смещенной решетчатой функции  $x[(l + \varepsilon)T]$ , т. е. соотношение

$$X^*(z, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} x[(l + \varepsilon)T] z^{-l},$$

называют *модифицированным  $z$ -преобразованием*. Модифицированное  $z$ -преобразование также записывают в виде

$$X^*(z, \varepsilon) = Z\{x[(l + \varepsilon)T]\} = Z^\varepsilon\{x[lT]\}.$$

Функцию  $X^*(z, \varepsilon)$  называют  *$z$ -изображением смещенной решетчатой функции  $x[(l + \varepsilon)T]$*  или *модифицированным  $z$ -изображением* решетчатой функции  $x[lT]$ .

**Пример 6.3.** Определить  $z$ -изображение единичной решетчатой функции  $x[lT] = 1[lT]$  и смещенной решетчатой функции  $x[(l + \varepsilon)T] = 1[(l + \varepsilon)T]$ .

**Решение.** Так как при всех  $l \geq 0$   $1[lT] = 1[(l + \varepsilon)T] = 1$ , то

$$X^*(z) = X^*(z, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} z^{-l}.$$

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$Z\{1[lT]\} = Z\{1[(l + \varepsilon)T]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (|z| > 1). \quad (6.11)$$

**6.3.3. Основные свойства  $z$ -преобразования.** Так как  $z$ -преобразование от  $x[lT]$  можно рассматривать как частный случай модифицированного  $z$ -преобразования при  $\varepsilon = 0$ , то рассмотрим свойства модифицированного  $z$ -преобразования. Доказательства приводятся в конце, после рассмотрения всех свойств.

1<sup>0</sup>. *Линейность.* Модифицированное  $z$ -преобразование от линейной комбинации дискретных функций равно линейной комбинации их модифицированных  $z$ -преобразований:

$$Z\left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i[(l + \varepsilon)T]\right\} = \sum_{i=1}^n a_i Z\{x_i[(l + \varepsilon)T]\}.$$

Здесь  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — константы.

2<sup>0</sup>. *Теорема запаздывания.* Модифицированное  $z$ -преобразование от функции с запаздывающим аргументом  $x[(l - m)T]$  определяется следующим образом:

$$Z^\varepsilon\{x[(l - m)T]\} = z^{-m} Z^\varepsilon\{x[lT]\} = z^{-m} X^*(z, \varepsilon). \quad (6.12)$$

3<sup>0</sup>. *Теорема опережения.* Модифицированное  $z$ -преобразование от функции с опережающим аргументом  $x[(l + m)T]$  определяется следующим образом:

$$Z^\varepsilon\{x[(l + m)T]\} = z^m \left[ X^*(z, \varepsilon) - \sum_{k=0}^{m-1} x[(k + \varepsilon)T] z^{-k} \right].$$

Если  $x[\varepsilon T] = x[(1 + \varepsilon)T] = \dots = x[(m - 1 + \varepsilon)T] = 0$  (начальные условия нулевые), то

$$Z^\varepsilon\{x[(l + m)T]\} = z^m X^*(z, \varepsilon). \quad (6.13)$$

4<sup>0</sup>. *Умножение оригинала на  $(l + \varepsilon)T$ .*  $z$ -преобразование от произведения  $x[(l + m)T](l + \varepsilon)T$  определяется следующим образом:

$$Z\{x[(l + \varepsilon)T](l + \varepsilon)T\} = \varepsilon T X^*(z, \varepsilon) - Tz \frac{dX^*(z, \varepsilon)}{dz}. \quad (6.14)$$

При  $\varepsilon = 0$  имеем

$$Z\{x[lT]lT\} = -Tz \frac{dX^*(z)}{dz}. \quad (6.15)$$

Пользуясь полученным свойством, найдем обычное и модифицированное  $z$ -изображения функции  $y[lT] = lT$ .

Модифицированное  $z$ -изображение для единичной функции (см. формулу (6.11)) имеет вид

$$Z\{1[(l + \varepsilon)T]\} = \frac{z}{z - 1}.$$

Поэтому если в (6.14) положим  $x[(l + \varepsilon)T] = 1[(l + \varepsilon)T]$ , то получим

$$Z\{(l + \varepsilon)T\} = Z\{1[(l + \varepsilon)T](l + \varepsilon)T\} = \varepsilon T \frac{z}{z - 1} + \frac{Tz}{(z - 1)^2}. \quad (6.16)$$

Отсюда при  $\varepsilon = 0$  имеем

$$Z\{lT\} = \frac{Tz}{(z-1)^2}. \quad (6.17)$$

5<sup>0</sup>. Умножение оригинала на  $a^{-(l+\varepsilon)\alpha T}$ .  $z$ -преобразование от произведения  $x[(l+m)T]a^{-(l+\varepsilon)\alpha T}$  определяется следующим образом:

$$Z\{x[(l+\varepsilon)T]a^{-(l+\varepsilon)\alpha T}\} = a^{-\varepsilon\alpha T} X^*(a^{\alpha T} z, \varepsilon). \quad (6.18)$$

При  $\varepsilon = 0$  имеем

$$Z\{x[lT]a^{-l\alpha T}\} = X^*(a^{\alpha T} z). \quad (6.19)$$

Найдем обычное и модифицированное  $z$ -изображения функции  $y[lT] = e^{-\alpha lT}$ . Положив в (6.18)  $x[(l+\varepsilon)T] = 1[(l+\varepsilon)T]$  и  $a = e$ , получим

$$Z\{e^{-(l+\varepsilon)\alpha T}\} = e^{-\varepsilon\alpha T} \frac{e^{\alpha T} z}{e^{\alpha T} z - 1} = e^{-\varepsilon\alpha T} \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}. \quad (6.20)$$

При  $\varepsilon = 0$  имеем

$$Z\{e^{-l\alpha T}\} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}}. \quad (6.21)$$

6<sup>0</sup>. Теорема о свертке. Произведение изображений  $X_1^*(z, \varepsilon)$  и  $X_2^*(z, \varepsilon)$  равно  $z$ -преобразованию от свертки их оригиналов  $x_1[(l+\varepsilon)T]$  и  $x_2[(l+\varepsilon)T]$ :

$$\begin{aligned} X_1^*(z, \varepsilon) X_2^*(z, \varepsilon) &= Z\left\{\sum_{k=0}^l x_1[(k+\varepsilon)T] x_2[(l-k+\varepsilon)T]\right\} = \\ &= Z\left\{\sum_{k=0}^l x_2[(k+\varepsilon)T] x_1[(l-k+\varepsilon)T]\right\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

При  $\varepsilon = 0$  имеем

$$\begin{aligned} X_1^*(z) X_2^*(z) &= Z\left\{\sum_{k=0}^l x_1[kT] x_2[(l-k)T]\right\} = \\ &= Z\left\{\sum_{k=0}^l x_2[kT] x_1[(l-k)T]\right\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

7<sup>0</sup>. Теоремы о граничных значениях. Начальное значение решетчатой функции  $x[lT]$  по ее обычному и модифицированному  $z$ -изображению определяется следующим образом:

$$x[\varepsilon T] = \lim_{z \rightarrow \infty} X^*(z, \varepsilon), \quad x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X^*(z). \quad (6.24)$$

Предел  $x(\infty) = \lim_{l \rightarrow \infty} x[lT]$  при условии, что он существует, определяется следующим образом:

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X^*(z, \varepsilon) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X^*(z). \quad (6.25)$$

**Доказательство свойств  $z$ -преобразований.**

1<sup>0</sup>. *Линейность.* Согласно определению модифицированного  $z$ -преобразования

$$\begin{aligned} Z\left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i[(l+\varepsilon)T]\right\} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i[(l+\varepsilon)T]\right) z^{-l} = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{l=0}^{\infty} x_i[(l+\varepsilon)T] z^{-l} = \sum_{i=1}^n a_i Z\{x_i[(l+\varepsilon)T]\}. \end{aligned}$$

2<sup>0</sup>. *Теорема запаздывания.* В  $z$ -преобразовании

$$Z\{x[(l-m+\varepsilon)T]\} = \sum_{l=0}^{\infty} x[(l-m+\varepsilon)T] z^{-l}$$

в правой части сделаем подстановку  $l-m=k$ :

$$Z\{x[(l-m+\varepsilon)T]\} = \sum_{l=-m}^{\infty} x[(k+\varepsilon)T] z^{-(k+m)}.$$

Так как функция-оригинал обращается в нуль при отрицательных аргументах, из последнего равенства получаем

$$Z\{x[(l-m+\varepsilon)T]\} = z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} x[(k+\varepsilon)T] z^{-k} = z^{-m} X^*(z, \varepsilon).$$

3<sup>0</sup>. *Теорема опережения.* Эта теорема доказывается так же, как и теорема запаздывания.

4<sup>0</sup>. *Умножение оригинала на  $(l+\varepsilon)T$ .* Продифференцируем обе части  $z$ -преобразования

$$X^*(z, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} x[(l+\varepsilon)T] z^{-l}$$

по  $z$  и умножим на  $Tz$ :

$$Tz \frac{dX^*(z, \varepsilon)}{dz} = -lTz \sum_{l=0}^{\infty} x[(l+\varepsilon)T] z^{-(l+1)}.$$

Вычтем это выражение из предыдущего равенства, предварительно умножив его на  $\varepsilon T$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon T X^*(z, \varepsilon) - Tz \frac{dX^*(z, \varepsilon)}{dz} &= \varepsilon T \sum_{l=0}^{\infty} x[(l+\varepsilon)T] z^{-l} + \\ &+ lTz \sum_{l=0}^{\infty} x[(l+\varepsilon)T] z^{-(l+1)} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+\varepsilon)Tx[(l+\varepsilon)T] z^{-l} = \\ &= Z\{(l+\varepsilon)Tx[(l+\varepsilon)T]\}. \end{aligned}$$

5<sup>0</sup>. Умножение оригинала на  $a^{-(l+\varepsilon)\alpha T}$ . Согласно определению  $z$ -преобразования

$$\begin{aligned} Z\{a^{-(l+\varepsilon)\alpha T}x[(l+\varepsilon)T]\} &= \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+\varepsilon)\alpha T}x[(l+\varepsilon)T]z^{-l} = \\ &= a^{-\varepsilon\alpha T} \sum_{l=0}^{\infty} x[(l+\varepsilon)T](a^{\alpha T}z)^{-l} = a^{-\varepsilon\alpha T} X^*(a^{\alpha T}z, \varepsilon). \end{aligned}$$

6<sup>0</sup>. Теорема о свертке. Воспользовавшись определением  $z$ -преобразования, можем записать

$$X_1^*(z, \varepsilon)X_2^*(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1[(k+\varepsilon)T]z^{-k}X_2^*(z, \varepsilon).$$

По теореме запаздывания (см. (6.12))

$$z^{-k}X_2^*(z, \varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} x_2[(l-k+\varepsilon)T]z^{-l}.$$

Подставив это выражение в предыдущее равенство, находим

$$\begin{aligned} X_1^*(z, \varepsilon)X_2^*(z, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} x_1[(k+\varepsilon)T] \sum_{l=0}^{\infty} x_2[(l-k+\varepsilon)T]z^{-l} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_1[(k+\varepsilon)T]x_2[(l-k+\varepsilon)T]z^{-l}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что  $x_2[(l-k+\varepsilon)T] = 0$  при  $l-k < 0$ , получаем

$$\begin{aligned} X_1^*(z, \varepsilon)X_2^*(z, \varepsilon) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l x_1[(k+\varepsilon)T]x_2[(l-k+\varepsilon)T]z^{-l} = \\ &= Z\left\{\sum_{k=0}^l x_1[(k+\varepsilon)T]x_2[(l-k+\varepsilon)T]\right\}. \end{aligned}$$

Аналогично, используя равенство

$$X_1^*(z, \varepsilon)X_2^*(z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_2[(k+\varepsilon)T]z^{-k}X_1^*(z, \varepsilon),$$

получим

$$X_1^*(z, \varepsilon)X_2^*(z, \varepsilon) = Z\left\{\sum_{k=0}^l x_2[(k+\varepsilon)T]x_1[(l-k+\varepsilon)T]\right\}.$$

7<sup>0</sup>. Теоремы о граничных значениях. Представим  $z$ -преобразование от функции  $x[(l+\varepsilon)T]$  в виде

$$X^*(z, \varepsilon) = x[\varepsilon T] + S, \quad S = \sum_{l=1}^{\infty} x[(l+\varepsilon)T]z^{-l}.$$



По определению функции-оригинала существуют положительные числа  $M$  и  $q$  такие, что  $|x[(l + \varepsilon)T]| < Mq^l$ . Поэтому

$$|S| \leq \sum_{l=1}^{\infty} |x[(l + \varepsilon)T]| |z|^{-l} < M \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{q}{|z|}\right)^l.$$

При  $|z| > q$  по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{q}{|z|}\right)^l = \frac{q/|z|}{1 - q/|z|} = \frac{q}{|z| - q}.$$

И так как  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{q}{|z| - q} = 0$ , то  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} S = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |S| = 0$  и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X^*(z, \varepsilon) = \lim_{z \rightarrow \infty} (x[\varepsilon T] + S) = x[\varepsilon T].$$

Отсюда при  $\varepsilon = 0$  имеем

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X^*(z).$$

Итак, формулы (6.24) доказаны.

Теперь докажем формулу (6.25). Используя свойство линейности z-преобразования и теорему опережения, можем записать

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} Z \{x[(l + \varepsilon)T] - x[(l + 1 + \varepsilon)T]\} &= \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} [X^*(z, \varepsilon) - (zX^*(z, \varepsilon) - x[\varepsilon T])] = \\ &= - \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X^*(z, \varepsilon) + x[\varepsilon T]. \end{aligned}$$

Левую часть верхнего равенства можно также преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} Z \{x[(l + \varepsilon)T] - x[(l + 1 + \varepsilon)T]\} &= \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left( \sum_{l=0}^{\infty} x[(l + \varepsilon)T] z^{-l} - \sum_{l=0}^{\infty} x[(l + 1 + \varepsilon)T] z^{-l} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \lim_{L \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^L x[(l + \varepsilon)T] z^{-l} - \sum_{l=0}^L x[(l + 1 + \varepsilon)T] z^{-l} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \lim_{L \rightarrow \infty} (x[\varepsilon T] - x[(l + 1 + \varepsilon)T] z^{-L}) = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} (x[\varepsilon T] - x[(l + 1 + \varepsilon)T]) = x[\varepsilon T] - x[\infty]. \end{aligned}$$

Приравняв правые части полученных равенств:

$$x[\varepsilon T] - x[\infty] = - \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X^*(z, \varepsilon) + x[\varepsilon T].$$

Отсюда получаем

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X^*(z, \varepsilon)$$

и при  $\varepsilon = 0$

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X^*(z).$$

**6.3.4.  $z$ -изображения основных функций.** В табл. 6.1 и табл. 6.2 представлены соответственно обычные и модифицированные  $z$ -изображения основных решетчатых функций. Как отмечалось, решетчатая функция  $x[lT]$  получается путем квантования (дискретизации) по времени непрерывной функции  $x(t)$ . В дальнейшем потребуется вычислять  $z$ -изображение решетчатой функции по известному изображению Лапласа  $X(s)$  непрерывной функции  $x(t)$ . И при этом чтобы избежать этапов вычисления  $x(t)$  путем обратного преобразования Лапласа и дискретизации, в указанных таблицах в первом столбце приведены изображения Лапласа соответствующих непрерывных функций.

Рассмотрим вывод формул, приведенных в табл. 6.1 и табл. 6.2. И так как формулы для обычных  $z$ -изображений получаются из формул для модифицированных  $z$ -изображений при  $\varepsilon = 0$ , ограничимся выводом формул, приведенных в табл. 6.2.

Таблица 6.1.  $z$ -изображения

№	$F(s)$	$f[lT]$	$F^*(z, \varepsilon)$
1	$\frac{1}{s}$	$1[lT]$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	$lT$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} (lT)^2$	$\frac{1}{2} \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha lT}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
5	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$lT e^{-\alpha lT}$	$\frac{Tz e^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
6	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin \beta lT$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
7	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos \beta lT$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
8	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha lT} \sin \beta lT$	$\frac{ze^{-\alpha T} \sin \beta T}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$
9	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha lT} \cos \beta lT$	$\frac{z(z-e^{-\alpha T} \cos \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$

Таблица 6.2. Модифицированные  $z$ -изображения

$\mathbb{N}$	$F(s)$	$f[lT]$	$F^*(z, \varepsilon)$
1	$\frac{1}{s}$	$1[lT]$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	$lT$	$\varepsilon T \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} (lT)^2$	$\frac{1}{2} \left[ \varepsilon T \left( \frac{\varepsilon T z}{z-1} + \frac{2Tz}{(z-1)^2} \right) + \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} \right]$
4	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha lT}$	$e^{-\varepsilon \alpha T} \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
5	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$lT e^{-\alpha lT}$	$e^{-\varepsilon \alpha T} \left[ \frac{\varepsilon T z}{z-e^{-\alpha T}} + \frac{Tz e^{-\alpha T}}{(z-e^{-\alpha T})^2} \right]$
6	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\sin \beta lT$	$\frac{z^2 \sin \varepsilon \beta T + z \sin (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
7	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\cos \beta lT$	$\frac{z^2 \cos \varepsilon \beta T - z \cos (1-\varepsilon) \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
8	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha lT} \sin \beta lT$	$\frac{ze^{-\varepsilon \alpha T} [z \sin \varepsilon \beta T + e^{-\alpha T} \sin (1-\varepsilon) \beta T]}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$
9	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha lT} \cos \beta lT$	$\frac{ze^{-\varepsilon \alpha T} [z \cos \varepsilon \beta T - e^{-\alpha T} \cos (1-\varepsilon) \beta T]}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}$

1) Модифицированное  $z$ -изображение для единичной функции  $f[lT] = 1[lT]$  было получено при рассмотрении примера 6.3 (см. формулу (6.11)).

2) Модифицированное  $z$ -изображение для функции  $f[lT] = lT$  было получено при рассмотрении свойства 4<sup>0</sup>  $z$ -преобразования (см. (6.16)).

3) Для получения модифицированного  $z$ -изображения для функции  $f[lT] = \frac{1}{2} (lT)^2$  представим ее в виде  $f[lT] = lT x[lT]$ , где  $x[lT] = \frac{1}{2} lT$ , и воспользуемся формулой (6.14)

$$F^*(z, \varepsilon) = \varepsilon T X^*(z, \varepsilon) - Tz \frac{dX^*(z, \varepsilon)}{dz}.$$

Так как

$$X^*(z, \varepsilon) = Z \left\{ \frac{1}{2} (l + \varepsilon) T \right\} = \frac{1}{2} Z \{ (l + \varepsilon) T \} = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon T \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} \right],$$

то, подставив это выражение в приведенную выше формулу, получим искомое выражение для  $F^*(z, \varepsilon)$ .

4) Модифицированное  $z$ -изображение для функции  $f[lT] = e^{-\alpha lT}$  было получено при рассмотрении свойства  $5^0$   $z$ -преобразования (см. выражение (6.20)).

5) Для получения модифицированного  $z$ -изображения функции  $f[lT] = lT e^{-\alpha lT}$  представим ее в виде  $f[lT] = e^{-\alpha lT} x[lT]$ , где  $x[lT] = lT$ , и воспользуемся формулой (6.18)

$$F^*(z, \varepsilon) = e^{-\varepsilon \alpha T} X^*(e^{\alpha T} z, \varepsilon).$$

Так как

$$X^*(z, \varepsilon) = Z\{(l + \varepsilon)T\} = \varepsilon T \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2},$$

то

$$\begin{aligned} F^*(z, \varepsilon) &= e^{-\varepsilon \alpha T} \left[ \varepsilon T \frac{e^{\alpha T} z}{e^{\alpha T} z - 1} + \frac{T e^{\alpha T} z}{(e^{\alpha T} z - 1)^2} \right] = \\ &= e^{-\varepsilon \alpha T} \left[ \frac{\varepsilon T z}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{T z}{(z - e^{-\alpha T})^2} \right]. \end{aligned}$$

При получении формул 6–9 из табл. 6.2 используется модифицированное  $z$ -изображение  $G^*(z, \varepsilon)$  функции  $g[lT] = e^{-(\alpha - j\beta)lT}$ . Для нахождения  $G^*(z, \varepsilon)$  представим последнюю функцию в виде  $g[lT] = e^{-(\alpha - j\beta)lT} x[lT]$ , где  $x[lT] = 1[lT]$ , и воспользуемся формулой (6.18):

$$G^*(z, \varepsilon) = e^{-\varepsilon(\alpha - j\beta)T} X^*(e^{(\alpha - j\beta)T} z, \varepsilon).$$

Учитывая, что модифицированное  $z$ -изображение единичной функции имеет вид

$$X^*(z, \varepsilon) = Z\{1(l + \varepsilon)T\} = \frac{z}{z-1},$$

находим

$$G^*(z, \varepsilon) = e^{-\varepsilon(\alpha - j\beta)T} \frac{z}{z - e^{-(\alpha - j\beta)T}}.$$

Умножим числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю число:

$$G^*(z, \varepsilon) = \frac{ze^{-\varepsilon(\alpha - j\beta)T}(z - e^{-(\alpha + j\beta)T})}{(z - e^{-(\alpha - j\beta)T})(z - e^{-(\alpha + j\beta)T})}.$$

Используя формулу Эйлера  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ , последнее выражение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} G^*(z, \varepsilon) &= \frac{ze^{-\varepsilon \alpha T}(z \cos \varepsilon \beta T - e^{-\alpha T} \cos(1 - \varepsilon)\beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} + \\ &+ j \frac{ze^{-\varepsilon \alpha T}(z \sin \varepsilon \beta T + e^{-\alpha T} \sin(1 - \varepsilon)\beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}. \quad (6.26) \end{aligned}$$

6) Функция  $f[lT] = \sin \beta lT$  связана с функцией  $g[lT] = e^{-(\alpha - j\beta)lT}$  соотношением

$$f[lT] = \operatorname{Im} g[lT] \Big|_{\alpha=0}.$$

Поэтому (см. (6.26))

$$F^*(z, \varepsilon) = \operatorname{Im} G^*(z, \varepsilon) \Big|_{\alpha=0} = \frac{z^2 \sin \varepsilon \beta T + \sin(1 - \varepsilon)\beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}.$$

7) Функция  $f[lT] = \cos \beta lT$  связана с функцией  $g[lT] = e^{-(\alpha-j\beta)lT}$  соотношением

$$f[lT] = \operatorname{Re} g[lT] \Big|_{\alpha=0}.$$

Поэтому

$$F^*(z, \varepsilon) = \operatorname{Re} G^*(z, \varepsilon) \Big|_{\alpha=0} = \frac{z^2 \cos \varepsilon \beta T - \cos (1 - \varepsilon) \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}.$$

8) Функция  $f[lT] = e^{-\alpha lT} \sin \beta lT$  связана с функцией  $g[lT] = e^{-(\alpha-j\beta)lT}$  соотношением

$$f[lT] = \operatorname{Im} g[lT].$$

Поэтому (см. (6.26))

$$F^*(z, \varepsilon) = \operatorname{Im} G^*(z, \varepsilon) = \frac{ze^{-\varepsilon \alpha T} (z \sin \varepsilon \beta T + e^{-\alpha T} \sin (1 - \varepsilon) \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}.$$

9) Функция  $f[lT] = e^{-\alpha lT} \cos \beta lT$  связана с функцией  $g[lT] = e^{-(\alpha-j\beta)lT}$  соотношением

$$f[lT] = \operatorname{Re} g[lT].$$

Поэтому

$$F^*(z, \varepsilon) = \operatorname{Im} G^*(z, \varepsilon) = \frac{ze^{-\varepsilon \alpha T} (z \cos \varepsilon \beta T - e^{-\alpha T} \cos (1 - \varepsilon) \beta T)}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}.$$

## 6.4. Уравнения и передаточные функции дискретных систем

Если дискретная система задается разностным уравнением, то ее передаточные функции определяются аналогично передаточным функциям непрерывных систем. Отличие состоит только в том, что в случае дискретных систем вместо оператора дифференцирования  $p$  используется оператор смещения  $E$ , а вместо преобразования Лапласа —  $z$ -преобразование.

Пусть дискретная система управления описывается разностным уравнением

$$\begin{aligned} a_0 y[(l+n)T] + a_1 y[(l+n-1)T] + \dots + a_n y[lT] = \\ = b_0 u[(l+m)T] + b_1 u[(l+m-1)T] + \dots + b_m u[lT], \end{aligned} \quad (6.27)$$

где  $y[lT]$  — выходная переменная,  $u[lT]$  — входная переменная,  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) — константы. В операторной форме это уравнение принимает вид

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n) y[lT] = (b_0 E^m + b_1 E^{m-1} + \dots + b_m) u[lT].$$

Разностный оператор при выходной переменной

$$Q^*(E) = a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n$$

называется *собственным (разностным) оператором*, а разностный оператор при входной переменной

$$P^*(E) = b_0 E^m + b_1 E^{m-1} + \dots + b_m$$

— *(разностным) оператором воздействия*.

Отношение оператора воздействия к собственному оператору называется *передаточной функцией в операторной форме*.

В соответствии с этим определением передаточная функция (в операторной форме) системы управления (6.27) равна

$$W^*(E) = \frac{P^*(E)}{Q^*(E)} = \frac{b_0 E^m + b_1 E^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (6.28)$$

Имеющее наименьший порядок отношение  $z$ -изображений (при нулевых начальных условиях) выходной и входной переменных называется *передаточной функцией в  $z$ -изображениях*.

Для вычисления передаточной функции в  $z$ -изображениях системы управления (6.27) применим к обеим частям этого уравнения  $z$ -преобразование. Используя свойство линейности  $z$ -преобразования, можем записать

$$\begin{aligned} a_0 Z\{y[(l+n)T]\} + a_1 Z\{y[(l+n-1)T]\} + \dots + a_n Z\{y[lT]\} = \\ = b_0 Z\{u[(l+m)T]\} + b_1 Z\{u[(l+m-1)T]\} + \dots + b_m Z\{u[lT]\}. \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой опережения при нулевых начальных условиях ( $y[0] = y[T] = \dots = y[(n-1)T] = 0$ ,  $u[0] = u[T] = \dots = u[(m-1)T] = 0$ ) имеем

$$Z\{y[(l+i)]\} = z^i Y^*(z), \quad Z\{u[(l+i)]\} = z^i U^*(z).$$

Поэтому

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) Y^*(z) = (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m) U^*(z).$$

Отсюда для передаточной функции в  $z$ -изображениях  $W^*(z)$  получаем

$$W^*(z) = \frac{Y^*(z)}{U^*(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (6.29)$$

Сравнивая передаточные функции в операторной форме (6.28) и в  $z$ -изображениях, нетрудно заметить, что

$$W^*(z) = W^*(E) \Big|_{E=z}.$$

Передаточная функция  $W^*(z)$  является функцией комплексной переменной  $z$ , и по определению она не содержит одинаковых нулей и полюсов. Поэтому если передаточная функция в операторной форме  $W^*(E)$  имеет одинаковые нули и полюсы, обратное равенство

$$W^*(E) = W^*(z) \Big|_{z=E}$$

не имеет места.

Передаточная функция  $W^*(E)$  является оператором и уравнение

$$y[lT] = W^*(E)u[lT],$$

где  $W^*(E)$  определяется соотношением (6.28), представляет собой операторную (символическую) форму записи уравнения (6.27). В правой части нельзя переставлять местами оператор и входную переменную.

Итак, если дискретная система управления задана разностным уравнением, то процесс вычисления передаточных функций ничем не отличается от процесса вычисления передаточных функций непрерывных систем. Однако, как правило, приходится вычислять передаточные функции, когда известны характеристики дискретных элементов и передаточная функция непрерывной части. И в этом случае возникают особенности, которые делают вычисление передаточных функций дискретных систем более сложным.

## 6.5. Вычисление передаточных функций АИМ-системы

Импульсные системы управления, кроме импульсных систем с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ-системы), являются нелинейными. Однако цифровые системы управления и системы управления с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ-системы) при определенных условиях могут рассматриваться как АИМ-системы. Поэтому начнем рассмотрение с АИМ-систем.

Заметим, что здесь речь идет только об импульсных системах управления с импульсной модуляцией 1-го рода.

**6.5.1. Эквивалентная схема АИМ-системы.** АИМ-система включает АИМ-элемент и непрерывную часть (рис. 6.4). Для получение

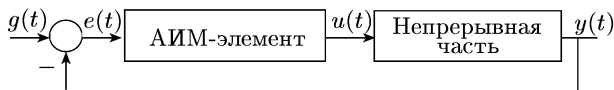


Рис. 6.4. Блок-схема АИМ-системы управления

математического описания АИМ-системы управления АИМ-элемент представим в виде эквивалентной схемы, состоящей из простейшего импульсного звена 1 и формирующего звена 2 (рис. 6.5, б).

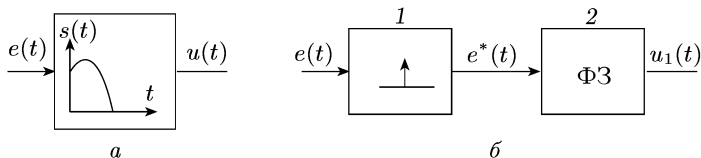


Рис. 6.5. АИМ-элемент (а) и его эквивалентная схема (б)

Простейшее импульсное звено (звено 1 на рис. 6.5, б) представляет собой звено, которое преобразует входную функцию  $e(t)$  в обоб-

щенную решетчатую функцию

$$e^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e(t)\delta(t - iT), \quad (6.30)$$

где  $T$  — период выходного сигнала АИМ-элемента. В действительности элемента, преобразующего входной сигнал в последовательность модулированных  $\delta$ -функций, естественно, не существует. Поэтому представление АИМ-элемента в виде указанной эквивалентной схемы следует рассматривать как математический прием.

Формирующее звено (ФЗ) формирует из обобщенной решетчатой функции  $e^*(t)$  сигнал, тождественно равный выходному сигналу АИМ-элемента (условие эквивалентности).

Найдем весовую и передаточную функции формирующего звена. Если  $w_{\Phi}(t)$  — весовая функция формирующего звена, то на ее выходе

$$u_1(t) = \int_0^{\infty} w_{\Phi}(t - \tau) e^*(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} w_{\Phi}(t - \tau) \sum_{i=0}^{\infty} e(\tau) \delta(\tau - iT) d\tau.$$

Поменяв порядки интегрирования и суммирования и произведя интегрирование, получим

$$u_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e[iT] w_{\Phi}(t - iT). \quad (6.31)$$

Теперь найдем описание сигнала на выходе АИМ-элемента. Пусть немодулированный импульс описывается функцией  $s(t)$  (см. рис. 6.5, а). При амплитудно-импульсной модуляции амплитуда импульса умножается на значение входного сигнала в моменты съема сигнала  $t = iT$ . Поэтому на выходе АИМ-элемента имеем

$$u(t) = \sum_{i=0}^l e[iT] s(t - iT),$$

где  $l$  — целая часть дроби  $t/T$ . Но так как  $s(t - iT) = 0$  при  $t < iT$ , последнее равенство можно записать в виде

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e[iT] s(t - iT).$$

В силу условия эквивалентности  $u_1(t) \equiv u(t)$ . Это тождество возможно только тогда (при произвольном  $e[iT]$ ), когда  $w_{\Phi}(t) = s(t)$ .

Таким образом, *весовая функция формирующего звена равна функции, которая описывает немодулированный импульс, вырабатываемый импульсным элементом.*

Так как передаточная функция равна изображению Лапласа от весовой функции, то передаточная функция формирующего звена имеет вид

$$W_{\Phi}(s) = L\{w_{\Phi}(t)\} = L\{s(t)\}.$$

В качестве примера найдем передаточную функцию формирующего звена эквивалентной схемы АИМ-элемента, вырабатывающего прямоугольные импульсы.



В общем случае, когда длительность импульса  $\tau_{\text{и}} = \gamma T$ , весовая функция (см. рис. 6.1, а) имеет вид

$$w_{\Phi} = s(t) = \begin{cases} A_{\text{и}} & \text{при } t \in [0, \gamma T], \\ 0 & \text{при } t \notin [0, \gamma T], \end{cases}$$

а передаточная функция

$$W_{\Phi}(s) = \int_0^{\infty} w_{\Phi}(t) e^{-st} dt = \int_0^{\gamma T} A_{\text{и}} e^{-st} dt = \frac{A_{\text{и}}(1 - e^{-\gamma Ts})}{s}. \quad (6.32)$$

В частном случае, когда  $A_{\text{и}} = 1$  и  $\gamma = 1$ , формула (6.32) принимает вид

$$W_{\Phi}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (6.33)$$

Заменяв в блок-схеме АИМ-системы управления импульсный элемент эквивалентной схемой, получим эквивалентную (расчетную)

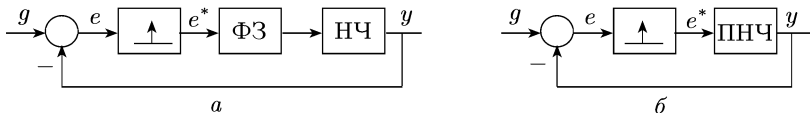


Рис. 6.6. Эквивалентные схемы АИМ-системы

схему АИМ-системы (рис. 6.6, а). Формирующее звено объединяют с непрерывной частью в одно звено, которое называют *приведенной непрерывной частью* (ПНЧ) (рис. 6.6, б).

**6.5.2. Дискретная модель АИМ-системы.** Обозначив весовую функцию ПНЧ через  $w_{\text{п}}(t)$ , имеем (см. рис. 6.6, б)

$$y(t) = \int_0^{\infty} w_{\text{п}}(t - \tau) e^*(\tau) d\tau.$$

Подставив сюда выражение для  $e^*(t)$  из (6.30), после интегрирования получим

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{\text{п}}(t - iT) e[iT]. \quad (6.34)$$

Из этого уравнения следует, что выходная переменная  $y(t)$  зависит от  $e[iT]$ , т. е. от значений  $e(t)$  в дискретные моменты времени  $t = iT$ . Для  $e[iT]$  имеем

$$e[iT] = g[iT] - y[iT]. \quad (6.35)$$

В любой момент времени АИМ-система описывается уравнениями (6.34) и (6.35). В уравнение (6.34) входят непрерывные функции (функции с непрерывными аргументами)  $y(t)$  и  $w(t)$ , а также дискретная функция  $e[iT]$ . В уравнение (6.35) входят только дискретные функции. Таким образом, АИМ-система представляет собой *непрерывно-дискретную систему*. И то, что она описывается уравнениями, в

которые входят дискретные и непрерывные функции, доставляет неудобство. От этого неудобства можно избавиться, если ограничиться исследованием АИМ-системы только в дискретные моменты времени  $t = lT$ .

Действительно, подставив в (6.34)  $t = lT$ , получим

$$y[lT] = \sum_{i=0}^{\infty} w_{\pi}[(l-i)T]e[iT],$$

или, учитывая, что  $w_{\pi}[(l-i)T] = 0$  при  $l-i < 0$ ,

$$y[lT] = \sum_{i=0}^l w_{\pi}[(l-i)T]e[iT]. \quad (6.36)$$

Уравнения (6.35) и (6.36) описывают процессы в АИМ-системе в дискретные моменты времени и представляют ее *дискретную модель*. Как увидим дальше, по дискретной модели при необходимости можно определить значения выходной переменной  $y(t)$  не только в моменты времени  $t = lT$ , но и в произвольные моменты  $t = (l + \varepsilon)T$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ ).

Произведя  $z$ -преобразование, из уравнений (6.35) и (6.36) получим

$$E^*(z) = G^*(z) - Y^*(z), \quad (6.37a)$$

$$Y^*(z) = W_{\pi}^*(z)E^*(z), \quad (6.37b)$$

где

$$W_{\pi}^*(z) = Z\{w_{\pi}[lT]\}. \quad (6.38)$$

Уравнение (6.37b) получено с использованием теоремы о свертке (см. выражение (6.23)).

Из уравнения (6.37b) имеем  $W_{\pi}^*(z) = \frac{Y^*(z)}{E^*(z)}$ , т.е.  $W_{\pi}^*(z)$  есть передаточная функция (в  $z$ -изображениях) прямой цепи с входом  $e[lT]$  и выходом  $y[lT]$ .

На основании уравнений (6.37a), (6.37b) можно построить структурную схему дискретной модели АИМ-системы (рис. 6.7). Переда-

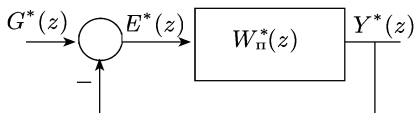


Рис. 6.7. Дискретная модель АИМ-системы

точная функция замкнутой дискретной системы по этой структурной схеме определяется так же, как и в случае непрерывных систем. Так, например, передаточная функция относительно входа  $G^*(z)$  и выхода  $Y^*(z)$  имеет вид

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_{\pi}^*(z)}{1 + W_{\pi}^*(z)},$$

а относительно входа  $G^*(z)$  и выхода  $E^*(z)$

$$W_{eg}^*(z) = \frac{1}{1 + W_{\Pi}^*(z)}.$$

Основная особенность расчета АИМ-системы состоит в вычислении передаточной функции  $W_{\Pi}^*(z)$  по известной передаточной функции ПНЧ  $W_{\Pi}(s)$ , равной произведению передаточных функций формирующего звена и непрерывной части.

Согласно формуле (6.38)  $W_{\Pi}^*(z)$  есть  $z$ -изображение весовой функции ПНЧ  $w_{\Pi}[lT]$ . Весовую функцию  $w_{\Pi}[lT]$  можно получить путем дискретизации по времени непрерывной весовой функции  $w_{\Pi}(t)$ , которая получается из передаточной функции  $W_{\Pi}(s)$ .

Зная связь между изображением Лапласа непрерывной функции и  $z$ -изображением соответствующей решетчатой функции (см. табл. 6.1), можно непосредственно по  $W_{\Pi}(s)$  определить  $W_{\Pi}^*(z)$ .

Введем в рассмотрение оператор  $Z_T$ , который каждой функции  $X(s) = L\{x(t)\}$  ставит в соответствие функцию  $X^*(z) = Z\{x[lT]\}$ :

$$X^*(z) = Z_T\{X(s)\}.$$

Оператор  $Z_T$  соответствует трем последовательным операциям: обратному преобразованию Лапласа, квантованию по времени и  $z$ -преобразованию. Так как все три указанные операции являются линейными, то оператор  $Z_T$  является линейным. Используя этот оператор, передаточную функцию  $W_{\Pi}^*(z)$  можно определить следующим образом:

$$W_{\Pi}^*(z) = Z_T\{W_{\Pi}(s)\}. \quad (6.39)$$

Далее также будем использовать оператор  $Z_T^{\varepsilon}$ , который функции  $X(s) = L\{x(t)\}$  ставит в соответствие модифицированное  $z$ -изображение  $X^*(z, \varepsilon) = Z\{x[(l + \varepsilon)T]\}$ :

$$X^*(z, \varepsilon) = Z_T^{\varepsilon}\{X(s)\}. \quad (6.40)$$

### 6.5.3. Вычисление $Z_T$ -изображения и $Z_T^{\varepsilon}$ -изображения.

Для получения дискретной модели (см. рис. 6.7) по эквивалентной схеме АИМ-системы (см. рис. 6.6, б) необходимо определить дискретную передаточную функцию  $W_{\Pi}^*(z)$ , для чего в соответствии с формулой (6.39) нужно произвести  $Z_T$ -преобразование передаточной ПНЧ.

По аналогии с  $z$ -преобразованием в  $Z_T$ -преобразовании

$$X^*(z) = Z_T\{X(s)\}$$

и в  $Z_T^{\varepsilon}$ -преобразовании

$$X^*(z, \varepsilon) = Z_T^{\varepsilon}\{X(s)\}$$

$X(s)$  будем называть *оригиналом*,  $X^*(z)$  —  $Z_T$ -*изображением* и  $X^*(z, \varepsilon)$ -*изображением* или модифицированным  $Z_T$ -*изображением*.

$Z_T$ -изображение и  $Z_T^{\varepsilon}$ -изображение от основных функций можно найти соответственно в табл. 6.1 и табл. 6.2.

**Вычисление  $Z_T$ -изображения и  $Z_T^\varepsilon$ -изображения от дробно-рациональной функции.** Пусть оригинал имеет вид

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

где  $B(s)$  и  $A(s)$  — полиномы от  $s$  степени  $m$  и  $n$  соответственно, причем  $m < n$ . Если все полюсы  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) данной функции (т.е. корни уравнения  $A(s) = 0$ ) различны, то

$$X^*(z) = Z_T \left\{ \frac{B(s)}{A(s)} \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{A'(s_i)} \frac{z}{z - e^{s_i T}}, \quad (6.41)$$

$$X^*(z, \varepsilon) = Z_T^\varepsilon \left\{ \frac{B(s)}{A(s)} \right\} = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{A'(s_i)} e^{\varepsilon s_i T} \frac{z}{z - e^{s_i T}}, \quad (6.42)$$

где  $A'(s_i) = \left. \frac{dA(s)}{ds} \right|_{s=s_i}$ .

Формула (6.41) получается из (6.42) как частный случай при  $\varepsilon = 0$ . А формула (6.42) получается следующим образом.

По формуле разложения имеем

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{A'(s_i)} \frac{1}{s - s_i}.$$

Учитывая свойство линейности оператора  $Z_T^\varepsilon$ , имеем

$$Z_T^\varepsilon \{X(s)\} = \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{A'(s_i)} Z_T^\varepsilon \left\{ \frac{1}{s - s_i} \right\}.$$

По табл. 6.2 (строка 4) находим

$$Z_T^\varepsilon \left\{ \frac{1}{s - s_i} \right\} = e^{\varepsilon s_i T} \frac{z}{z - e^{s_i T}}.$$

Подставив это выражение в предыдущее соотношение, получим (6.42).

**Пример 6.4.** Передаточная функция ПНЧ имеет вид  $W_\Pi(s) = \frac{k}{s(s + \alpha)}$ . Требуется найти дискретную передаточную функцию  $W_\Pi^*(z)$ .

**Решение.** Полюсами данной передаточной функции (т.е. корнями уравнения  $A(s) = s(s + \alpha) = 0$ ) являются  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -\alpha$ . Производная  $A'(s) = 2s + \alpha$ . Поэтому по формуле (6.41) имеем

$$W_\Pi^* = \frac{k}{\alpha} \frac{z}{z - 1} - \frac{k}{\alpha} \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} = \frac{kz(1 - e^{-\alpha T})}{\alpha(z - 1)(z - e^{-\alpha T})}.$$

Если  $X(s) = B(s)/A(s)$  содержит кратные полюсы, то изображения  $X^*(z)$  и  $X^*(z, \varepsilon)$  можно получить, разложив  $X(s)$  на элементарные дроби. В простых случаях можно введением малых параметров видоизменить функцию  $X(s)$  так, чтобы она не содержала кратных

поллюсов, и воспользоваться формулами (6.41) и (6.42), а затем произвести предельный переход, устремив малые параметры к нулю.

**Пример 6.5.** Передаточная функция ПНЧ имеет вид  $W_{\Pi}(s) = k/s^2$ . Требуется определить дискретную передаточную функцию  $W_{\Pi}^*(z)$ .

**Решение.** Данная передаточная функция ПНЧ имеет двукратный полюс  $s_{1,2} = 0$ . Введя малый параметр  $\beta$ , преобразуем ее к виду

$$W_{\Pi}(s, \beta) = \frac{k}{s(s + \beta)}.$$

Преобразованная передаточная функция имеет простые полюсы  $s_1 = 0$  и  $s_2 = -\beta$ . Производная  $A'(s) = 2s + \beta$ . По формуле (6.41) получаем

$$W_{\Pi}^*(z, \beta) = \frac{kz(1 - e^{-\beta T})}{\beta(z - 1)(z - e^{-\beta T})}.$$

Используя разложение  $e^{-\beta T} = 1 - \beta T + o(\beta)$ , где  $o(\beta)$  — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем  $\beta$  (т. е.  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{o(\beta)}{\beta} = 0$ ), получаем

$$W_{\Pi}^*(z, \beta) = \frac{kz(\beta T + o(\beta))}{\beta(z - 1)(z - 1 + \beta T - o(\beta))}.$$

Отсюда, устремив  $\beta$  к нулю, находим

$$W_{\Pi}^*(z) = \lim_{\beta \rightarrow 0} W_{\Pi}^*(z, \beta) = \frac{kzT}{(z - 1)^2}.$$

Если среди простых полюсов функции  $X(s)$  имеются комплексные корни, то может оказаться нецелесообразным использование формул (6.41) и (6.42). Это связано с необходимостью преобразования полученного результата для исключения мнимого числа.

Во всех случаях, когда использование формул (6.41) и (6.42) невозможно или нецелесообразно, можно определить  $X^*(z)$  и  $X^*(z, \varepsilon)$ , разложив  $X(s)$  на элементарные дроби.

**Пример 6.6.** Определить  $Z_T$ -изображение и  $Z_T^\varepsilon$ -изображение функции  $X(s) = \frac{10}{s^2(s^2 + s + 1)}$ .

**Решение.** Функция имеет один кратный (кратности 2) полюс  $s_{1,2} = 0$  и два комплексных полюса. Найдем  $X^*(z)$  и  $X^*(z, \varepsilon)$ , разложив  $X(s)$  на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{10}{s^2(s^2 + s + 1)} &= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs + D}{s^2 + s + 1} = \\ &= \frac{(B + C)s^3 + (A + B + D)s^2 + (A + B)s + A}{s^2(s^2 + s + 1)}. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа, а затем решив полученную систему уравнений, найдем  $A = 10$ ,  $B = -10$ ,

$C = 10, D = 0$ . Следовательно,

$$\frac{10}{s^2(s^2 + s + 1)} = 10 \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + s + 1} \right).$$

Преобразуем правую часть к табличному виду:

$$\frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставив это выражение в предыдущее равенство, произведем  $Z_T^\varepsilon$ -преобразование:

$$\begin{aligned} Z_T^\varepsilon \left\{ \frac{10}{s^2(s^2 + s + 1)} \right\} &= 10 \left( Z_T^\varepsilon \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} - Z_T^\varepsilon \left\{ \frac{1}{s} \right\} \right) + \\ &+ 10 \left( Z_T^\varepsilon \left\{ \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right\} - \frac{\alpha}{\beta} Z_T^\varepsilon \left\{ \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right\} \right). \end{aligned}$$

После подстановки соответствующих изображений из табл. 6.2 и преобразований, получим

$$\begin{aligned} X^*(z, \varepsilon) &= \frac{10Tz \left[ (z - 1) \left( \varepsilon - \frac{1}{T} \right) + 1 \right]}{(z - 1)^2} + \\ &+ \frac{10ze^{-\varepsilon\alpha T} [z \cos \varepsilon\beta T - e^{-\alpha T} \cos (1 - \varepsilon)\beta T]}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}} - \\ &- \frac{10ze^{-\varepsilon\alpha T} \frac{\alpha}{\beta} [z \sin \varepsilon\beta T - e^{-\alpha T} \sin (1 - \varepsilon)\beta T]}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}. \end{aligned}$$

Положив  $\varepsilon = 0$ , находим

$$X^*(z, \varepsilon) = \frac{10Tz \left[ 1 - \frac{1}{T} (z - 1) \right]}{(z - 1)^2} + \frac{10z [z - e^{-\alpha T} \cos \beta T + \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha T} \sin \beta T]}{z^2 - 2ze^{-\alpha T} \cos \beta T + e^{-2\alpha T}}.$$

**Вычисление  $Z_T$ -изображения и  $Z_T^\varepsilon$ -изображения от оригинала, включающего множитель  $e^{-\tau s}$ .** Пусть оригинал имеет вид

$$Y(s) = e^{-\tau s} X(s),$$

где  $X(s)$  — дробно-рациональная функция:  $X(s) = B(s)/A(s)$ . В этом случае для  $Y^*(z)$  имеем:

а) при  $(k - 1)T < \tau \leq kT$

$$Y^*(z) = Z_T \{ e^{-\tau s} X(s) \} = z^{-k} Z_T^\varepsilon \{ X(s) \} = z^{-k} X^*(z, \varepsilon), \quad (6.43)$$

где  $\varepsilon = k - \tau/T$ ;

б) при  $\tau = kT$

$$Y(z) = Z_T \{ e^{-kT} X(s) \} = z^{-k} Z_T \{ X(s) \} = z^{-k} X^*(z). \quad (6.44)$$

Формула (6.43) получается следующим образом. По определению оператора  $Z_T$  его применение соответствует последовательному выполнению трех следующих операций: обратное преобразование Лапласа, квантование по времени с периодом  $T$  и  $z$ -преобразование.

Выполним сначала обратное преобразование Лапласа. Тогда по теореме запаздывания (свойство преобразования Лапласа) получим

$$L^{-1}\{e^{-\tau s}X(s)\} = x(t - \tau).$$

Далее, выполним квантование по времени с периодом  $T$ , т. е. сделаем подстановку  $t = lT$ . Полученную таким образом функцию  $x[lT - \tau]$  представим в виде

$$x[lT - \tau] = x[lT - kT + kT - \tau] = x[(l - k + \varepsilon)T], \quad \varepsilon = k - \frac{\tau}{T}.$$

И, наконец, произведем  $z$ -преобразование. При этом по теореме запаздывания (свойство  $z$ -преобразования) получим

$$Z\{x[(l - k + \varepsilon)T]\} = z^{-k}X^*(z, \varepsilon).$$

Это и есть  $Z_T$ -изображение функции  $Y(s)$ , что доказывает формулу (6.43).

Формула (6.44) получается как частный случай из (6.43) при  $\varepsilon = 0$ .

**Пример 6.7.** АИМ-элемент вырабатывает прямоугольные импульсы длительности  $\tau_n = 0,1$  с периодом  $T = 0,2$  и амплитудой (высотой)  $A_n = 1$ . Передаточная функция непрерывной части  $W_n(s) = \frac{10}{s+1}$ .

Требуется определить дискретную передаточную функцию  $W_n^*(z)$ .

**Решение.** Найдем сначала передаточную функцию приведенной непрерывной части. Так как передаточная функция формирующего звена

$$W_\Phi(s) = \frac{1 - e^{-\tau_n s}}{s} = \frac{1 - e^{-0,1 s}}{s},$$

передаточная функция ПНЧ имеет вид

$$W_n(s) = W_\Phi(s)W_n(s) = \frac{10(1 - e^{-0,1 s})}{s(s+1)},$$

или

$$W_n(s) = (1 - e^{-0,1 s})W_0(s),$$

где  $W_0(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{10}{s(s+1)}$ .

Дискретная передаточная функция

$$W_n^*(z) = Z_T\{W_n(s)\} = Z_T\{W_0(s)\} - Z_T\{e^{-0,1 s}W_0(s)\}.$$

В данном случае  $\tau = 0,1$  ( $0 < \tau < T$ ),  $k = 1$  и  $\varepsilon = 1 - \frac{\tau}{T} = 1 - \frac{0,1}{0,2} = 0,5$ . Поэтому (см. (6.43))

$$W_n^*(z) = W_0^*(z) - z^{-1}W_0^*(z, \varepsilon).$$

Полюсами  $W_0(s)$  являются  $s_1 = 0$  и  $s_2 = -1$ , производная  $A'(s) = 2s + 1$ . В соответствии с (6.41) и (6.42)

$$W_0^*(z) = Z_T\{W_0(s)\} = \frac{10z}{z-1} - \frac{10z}{z-e^{-0,2}},$$

$$W_0^*(z, \varepsilon) = Z_T^\varepsilon\{W_0(s)\} = \frac{10z}{z-1} - e^{-0,1} \frac{10z}{z-e^{-0,2}}.$$

Следовательно,

$$W_{\text{п}}^*(z) = \frac{10z}{z-1} - \frac{10z}{z-e^{-0,2}} - \frac{10}{z-1} + e^{-0,1} \frac{10}{z-e^{-0,2}} = \frac{10(e^{-0,1} - e^{-0,2})}{z-e^{-0,2}}.$$

## 6.6. Цифровые системы управления

В связи с бурным развитием микроэлектроники и микропроцессоров цифровые вычислительные устройства находят все большее применение при разработке управляющих устройств. Поэтому в настоящее время цифровые системы управления широко распространены. Если цифровое устройство оперирует с числовым представлением со значительным количеством разрядов, то квантованием по уровню можно пренебречь. И системы управления с такими цифровыми устройствами можно рассматривать как АИМ-системы.

Цифровая система управления (ЦСУ) включает объект управления (ОУ), чувствительные элементы (ЧЭ), аналого-цифровой преоб-

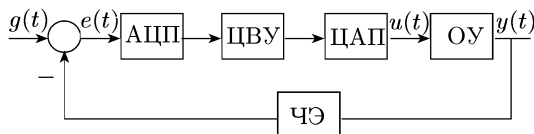


Рис. 6.8. Функциональная схема ЦСУ

разователь (АЦП), цифровое вычислительное устройство (ЦВУ) и цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП) (рис. 6.8).

АЦП преобразует аналоговый сигнал в цифровой, а ЦАП — цифровой сигнал в аналоговый. ЦВУ выполняет все необходимые вычисления в соответствии с заданным алгоритмом управления.

Если пренебречь квантованием по уровню, цифровую систему управления можно представить в виде блок-схемы (рис. 6.9), состоящей

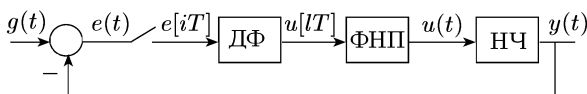


Рис. 6.9. Блок-схема ЦСУ

из прерывателя, дискретного фильтра (ДФ), фиксатора нулевого порядка (ФНП) и непрерывной части (НЧ).



Прерыватель является моделью АЦП и преобразует непрерывный сигнал  $e(t)$  в дискретный сигнал  $e[lT]$ . В дальнейшем прерыватель в явном виде на схеме не будем указывать, принимая, что он входит в состав ДФ.

Дискретный фильтр представляет собой модель ЦВУ и характеризуется дискретной передаточной функцией — передаточной функцией регулятора.

В качестве ЦАП чаще всего используется фиксатор нулевого порядка — элемент, который запоминает входной дискретный сигнал на один период — до прихода следующего дискретного сигнала. Таким образом, он преобразует входной сигнал, представляющий решетчатую функцию, в ступенчатый сигнал.

Фиксатор нулевого порядка можно рассматривать как АИМ-элемент, вырабатывающий прямоугольные импульсы длительности  $T$  (относительная длительность  $\gamma = 1$ ) и с амплитудой  $A_n = 1$ .

Представив ФНП в виде эквивалентной схемы, состоящей из простейшего импульсного элемента и формирующего звена, получим эквивалентную схему цифровой системы управления (рис. 6.10). На

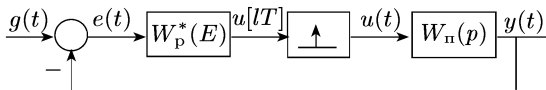


Рис. 6.10. Эквивалентная структурная схема ЦСУ

этой схеме  $W_p^*(E)$  — передаточная функция (в операторной форме) дискретного фильтра (регулятора),  $W_n(p)$  — передаточная функция ПНЧ. Передаточная функция (в изображениях Лапласа) формирующего звена (см. (6.33)) имеет вид

$$W_\Phi(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}.$$

Поэтому передаточная функция (в изображениях Лапласа) ПНЧ есть

$$W_n(s) = W_\Phi(s)W_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}W_h(s).$$

Дискретная передаточная функция ПНЧ имеет вид

$$W_n^*(z) = Z_T\{W_n(s)\} = Z_T\left\{\frac{W_h(s)}{s}\right\} - Z_T\left\{e^{-Ts}\frac{W_h(s)}{s}\right\},$$

или, учитывая формулу (6.44),

$$W_n^*(z) = (1 - z^{-1})Z_T\left\{\frac{W_h(s)}{s}\right\} = \frac{z - 1}{z}Z_T\left\{\frac{W_h(s)}{s}\right\}. \quad (6.45)$$

Используя эту передаточную функцию, можно построить структурную схему дискретной модели цифровой системы управления (рис. 6.11).

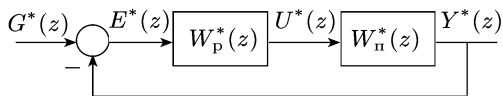


Рис. 6.11. Дискретная модель ЦСУ

По этой структурной схеме передаточные функции замкнутой системы определяются по известным из теории непрерывных систем правилам. Передаточные функции относительно входа  $G^*(z)$  и выходов  $Y^*(z)$  и  $E^*(z)$  равны

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_p^*(z)W_n^*(z)}{1 + W_p^*(z)W_n^*(z)}, \quad W_{eg}^*(z) = \frac{1}{1 + W_p^*(z)W_n^*(z)}.$$

Пример 6.8. Дана цифровая система управления, у которой передаточная функция непрерывной части  $W_n(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$  и цифровое вычислительное устройство реализует алгоритм управления, определяемый разностным уравнением

$$u[(l+1)T] - u[lT] = 2e[(l+1)T] - e[lT].$$

Требуется определить передаточную функцию данной системы относительно входа  $g(t)$  и выхода  $y(t)$  (см. рис. 6.10).

Решение. Запишем уравнение регулятора в операторной форме.

$$(E - 1)u[lT] = (2E - 1)e[lT].$$

Отсюда передаточная функция регулятора в операторной форме имеет вид

$$W_p^*(E) = \frac{2E - 1}{E - 1}$$

и, в  $z$ -изображениях,

$$W_p^*(z) = W_p^*(E)|_{E=z} = \frac{2z - 1}{z - 1}.$$

Передаточная функция приведенной непрерывной части есть

$$W_n(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s^2 + 3s + 2)}.$$

Дискретная передаточная функция ПНЧ —

$$W_n^*(z) = Z_T\{W_n(s)\} = \frac{z-1}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)}\right\}.$$

Корнями полинома  $A(s) = s(s^2 + 3s + 2)$  являются  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -1$ ,  $s_3 = -2$ , и  $A'(s) = 3s^2 + 6s + 2$ . По формуле (6.41)

$$\begin{aligned} Z_T\left\{\frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)}\right\} &= \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-e^{-2T}} = \\ &= \frac{z(z+e^{-T})(e^{-T}-1)^2}{2(z-1)(z-e^{-T})(z-e^{-2T})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$W_{\Pi}^*(z) = \frac{(z + e^{-T})(e^{-T} - 1)^2}{2(z - e^{-T})(z - e^{-2T})}.$$

Искомая передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} W_{yg}^*(z) &= \frac{W_p^*(z)W_{\Pi}^*(z)}{1 + W_p^*(z)W_{\Pi}^*(z)} = \\ &= \frac{(2z - 1)(z + e^{-T})(e^{-T} - 1)^2}{2(z - 1)(z - e^{-T})(z - e^{-2T}) + (2z - 1)(z + e^{-T})(e^{-T} - 1)^2}. \end{aligned}$$

## 6.7. ШИМ-системы управления

Блок-схема ШИМ-системы управления включает ШИМ-элемент и непрерывную часть (НЧ) (рис. 6.12).

Пусть ШИМ-элемент вырабатывает прямоугольные импульсы с амплитудой  $A_{\Pi}$  и периодом  $T$ . На выходе ШИМ-элемента ширина мо-

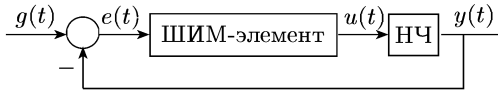


Рис. 6.12. Блок-схема ШИМ-системы

дулированного импульса пропорциональна модулю  $|e[iT]|$ , а ее знак совпадает со знаком входного сигнала в момент съема (рис. 6.13).

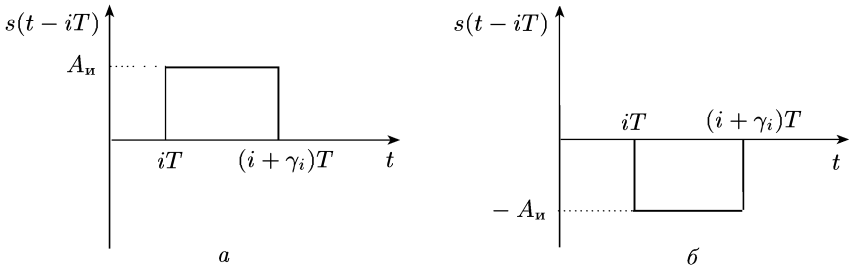


Рис. 6.13. Импульсы на выходе ШИМ-элемента:  $e[iT] > 0$  (а);  $e[iT] < 0$  (б)

Модулированный импульс на выходе ШИМ-элемента можно представить как разность двух ступенчатых функций (рис. 6.14):

$$s(t - iT) = A_{\Pi} \operatorname{sign} e[iT][1(t - iT) - 1(t - (i + \gamma_i)T)], \quad (6.46)$$

где

$$\gamma_i = \chi |e[iT]|. \quad (6.47)$$

Здесь  $\chi$  является константой, удовлетворяющей неравенству

$$0 < \chi < \frac{1}{e_m}, \quad e_m = \sup_t e(t),$$

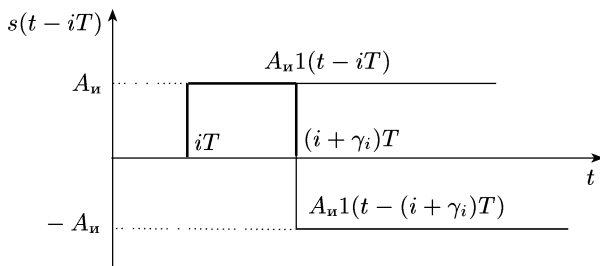


Рис. 6.14. К описанию импульса на выходе ШИМ-элемента

и называется *коэффициентом модуляции*. Приведенное выше условие необходимо, чтобы модулированные импульсы не перекрывались.

Выходной сигнал ШИМ-элемента при  $t \geq 0$  описывается суммой

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} s(t - iT).$$

Найдем реакцию непрерывной части на воздействие  $i$ -го импульса.

Пусть  $h_n(t)$  обозначает переходную функцию непрерывной части. При входной переменной  $u(t) = 1(t - iT)$  ее выходная переменная  $y(t) = h_n(t - iT)$ , а при входной переменной  $u(t) = 1[t - (i + \gamma_i)T]$  выходная переменная  $y(t) = h_n[t - (i + \gamma_i)T]$  (рис. 6.15). В силу прин-

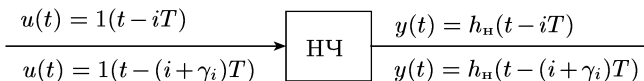


Рис. 6.15. К описанию реакции на ступенчатые воздействия

ципа суперпозиции, если на входе непрерывной части действует импульс  $u(t) = s(t - iT)$  (см. (6.46)), то на ее выходе

$$y(t) = A_n \operatorname{sign} e[iT][h_n(t - iT) - h_n(t - (i + \gamma_i)T)];$$

если на входе непрерывной части действует сигнал  $u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} s(t - iT)$ , то на ее выходе

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_n \operatorname{sign} e[iT][h_n(t - iT) - h_n(t - (i + \gamma_i)T)]. \quad (6.48)$$

Итак, мы получили описание разомкнутой ШИМ-системы. Оно зависит от нелинейных функций  $\operatorname{sign} e[iT]$  и  $|e[iT]|$ .

**Линеаризация.** Если выполняется условие

$$\gamma_i T \ll 1 \quad \text{или} \quad T \ll 1 \quad (\gamma_i \leq 1),$$

то можно произвести линеаризацию и избавиться от указанных нелинейностей.

Разложим функцию  $h_n[t - (i + \gamma_i)T]$  в ряд Тейлора в точке  $t - iT$  и отбросим члены, содержащие квадрат и более высокие степени  $\gamma_i T$ :

$$h_n[t - (i + \gamma_i)T] = h_n(t - iT) - \dot{h}_n(t - iT)\gamma_i T.$$

Учитывая, что производная от переходной функции равна весовой функции ( $\dot{h}_n(t - iT) = w_n(t - iT)$ ), можем записать

$$h_n[t - (i + \gamma_i)T] = h_n(t - iT) - w_n(t - iT)\gamma_i T.$$

Подставив это выражение в (6.48), получим

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_n \operatorname{sign} e[iT] w_n(t - iT) \gamma_i T.$$

И так как (см. (6.47))  $\gamma_i = \chi|e[iT]|$  и  $|e[iT]| \operatorname{sign} e[iT] = e[iT]$ , то

$$y(t) = \chi A_n T \sum_{i=0}^{\infty} w_n(t - iT) e[iT].$$

Если ограничиться рассмотрением процессов в дискретные моменты времени, положив  $t = lT$ , то получим

$$y[lT] = \chi A_n T \sum_{i=0}^{\infty} w_n[(l - i)T] e[iT].$$

Отсюда, учитывая, что весовая функция при отрицательных аргументах равна нулю, находим

$$y[lT] = \chi A_n T \sum_{i=0}^l w_n[(l - i)T] e[iT].$$

Произведем  $z$ -преобразование. По теореме о свертке получим

$$Y^*(z) = \chi A_n T W_n^*(z) E^*(z),$$

где

$$W_n^*(z) = Z\{w_n[lT]\} = Z_T\{W_n(s)\}.$$

В соответствии с определением дискретная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W^*(z) = W_n^*(z) = \frac{Y^*(z)}{E^*(z)} = \chi A_n T W_n^*(z). \quad (6.49)$$

В случае ШИМ-системы приведенную непрерывную часть можно определить как звено с передаточной функцией

$$W_n(s) = \chi A_n T W_n(s).$$

Тогда, очевидно, как и в случае АИМ-системы,

$$W^*(z) = W_n^*(z) = Z_T\{W_n(s)\}.$$

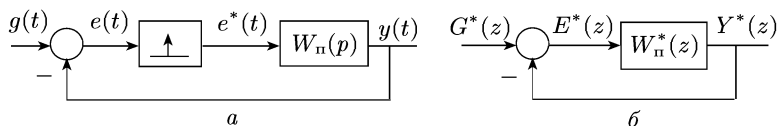


Рис. 6.16. Модели ШИМ-системы: *а* — дискретно-непрерывная модель; *б* — дискретная модель

По полученным передаточным функциям можно построить структурные схемы дискретно-непрерывной и дискретной моделей ШИМ-системы (рис. 6.16).

**Пример 6.9.** Дана ШИМ-система управления. Амплитуда  $A_{\text{и}} = 1$ , коэффициент модуляции  $\chi = 0,05$ , период следования импульсов  $T = 0,1$  и передаточная функция непрерывной части  $W_{\text{н}}(s) = \frac{200}{s(s+1)}$ .

Требуется определить передаточную функцию замкнутой системы относительно входа  $g(t)$  и выхода  $y(t)$ .

**Решение.** По формуле (6.41) находим

$$W_{\text{н}}^*(z) = Z_T\{W_{\text{н}}(s)\} = Z_T\left\{\frac{200}{s(s+1)}\right\} = \frac{200z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}.$$

После подстановки этого выражения и численных значений в формулу (6.49) получим

$$W_{\text{н}}^*(z) = \frac{z(1-e^{-0,1})}{(z-1)(z-e^{-0,1})} \cong \frac{0,1z}{(z-1)(z-0,9)}.$$

Искомая передаточная функция имеет вид

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_{\text{н}}^*(z)}{1 + W_{\text{н}}^*(z)} = \frac{0,1z}{z^2 - 1,8z + 0,9}.$$

## 6.8. Вычисление передаточных функций дискретных систем в общем случае

Выше мы рассмотрели вычисление передаточных функций дискретных систем, когда их эквивалентная схема за простейшим импульсным звеном содержит одно непрерывное звено — приведенную

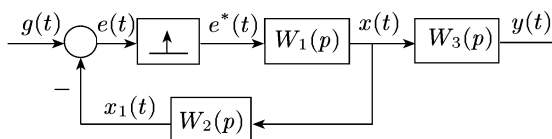


Рис. 6.17. Обобщенная эквивалентная схема дискретной системы

непрерывную часть. Однако может потребоваться вычисление передаточных функций, эквивалентная схема которых имеет более общий вид (рис. 6.17).

Найдем сначала передаточные функции  $W_{xg}^*(z)$  и  $W_{eg}^*(z)$ . Используя полученную выше зависимость между входом простейшего импульсного звена и выходом следующего за ним непрерывного звена (ПНЧ) в дискретные моменты времени, можем записать

$$X^*(z) = Z_T\{W_1(s)\}E^*(z),$$

$$X_1^*(z) = Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}E^*(z),$$

$$E^*(z) = G^*(z) - X_1^*(z).$$

Исключим из этой системы  $X_1^*(z)$ :

$$X^*(z) = Z_T\{W_1(s)\}E^*(z),$$

$$E^*(z) = G^*(z) - Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}E^*(z).$$

Из второго уравнения, а также исключив из двух уравнений  $E^*(z)$ , получим соответственно

$$W_{eg}^*(z) = \frac{E^*(z)}{G^*(z)} = \frac{1}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}, \quad (6.50)$$

$$W_{xg}^*(z) = \frac{X^*(z)}{G^*(z)} = \frac{Z_T\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}. \quad (6.51)$$

Теперь найдем передаточную функцию относительно выхода  $Y^*(z)$ . Для этого заменим в полученной выше системе из двух уравнений первое уравнение уравнением для  $Y^*(z)$ :

$$Y^*(z) = Z_T\{W_1(s)W_3(s)\}E^*(z),$$

$$E^*(z) = G^*(z) - Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}E^*(z).$$

Исключив из этой системы уравнений  $E^*(z)$ , получим

$$W_{yg}^*(z) = \frac{Y^*(z)}{G^*(z)} = \frac{Z_T\{W_1(s)W_3(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}. \quad (6.52)$$

Из полученных формул (6.50)–(6.52) вытекает следующее правило: *передаточная функция относительно входа  $g(t)$  и какого-либо выхода равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс (а при положительной обратной связи — минус) передаточная функция разомкнутой системы.*

Это правило совпадает с правилом вычисления передаточных функций одноконтурной непрерывной системы. Только следует иметь в виду, что при вычислении передаточной функции прямой цепи и передаточной функции разомкнутой системы непрерывные звенья, расположенные за простейшим импульсным звеном, нужно рассматривать как одно объединенное звено. Нельзя находить  $Z_T$ -преобразования от передаточных функций отдельных звеньев, а затем полученные результаты перемножать.

**Вычисление передаточной функций системы, содержащий дискретно-непрерывный фильтр.** Звено, которое описывается уравнением

$$a_0x(t) + a_1x(t-T) + \dots + a_nx(t-nT) = b_0u(t) + b_1u(t-T) + \dots + b_mu(t-mT),$$

называют *дискретно-непрерывным фильтром*.

Переходя к изображениям Лапласа, для дискретно-непрерывного фильтра, получим передаточную функцию

$$W_{\text{дн}}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1e^{-Ts} + \dots + b_me^{-mTs}}{a_0 + a_1e^{-Ts} + \dots + a_ne^{-nTs}}. \quad (6.53)$$

Пусть дискретно-непрерывный фильтр (ДНФ) включен за дискретным (импульсным или цифровым) элементом. В этом случае по

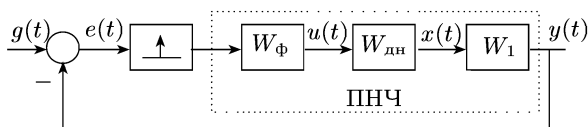


Рис. 6.18. Эквивалентная схема дискретной системы с ДНФ

эквивалентной схеме (рис. 6.18) для дискретной передаточной функции разомкнутой системы имеем

$$W_{\text{п}}^*(z) = Z_T\{W_{\text{п}}(s)\} = Z_T\{W_{\text{ф}}(s)W_{\text{дн}}(s)W_1(s)\}.$$

Здесь  $W_{\text{дн}}(s)$  является дробно-рациональной функцией от  $e^{-Ts}$  (см. выражение (6.53)). И, как покажем ниже, в этом случае

$$W_{\text{п}}^*(z) = Z_T\{W_{\text{п}}(s)\} = W_{\text{дн}}^*(z)Z_T\{W_{\text{ф}}(s)W_1(s)\}, \quad (6.54)$$

где

$$W_{\text{дн}}^*(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_mz^{-m}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}}.$$

Дискретная передаточная функция  $W_{\text{дн}}^*(z)$  получается из передаточной функции  $W_{\text{дн}}(s)$  при подстановке  $e^{Ts} = z$ :

$$W_{\text{дн}}^*(z) = W_{\text{дн}}(s)|_{e^{Ts}=z}.$$

Для вывода формулы (6.54) соотношение для передаточной функции ПНЧ, которое имеет вид

$$W_{\text{п}}(s) = W_{\text{ф}}(s)W_{\text{дн}}(s)W_1(s),$$

подставив сюда выражение для  $W_{\text{дн}}(s)$  из (6.53), представим в виде

$$\sum_{i=0}^n a_i e^{-iT_s} W_{\text{п}}(s) = \sum_{i=0}^m b_i e^{-iT_s} W_{\text{ф}}(s) W_1(s).$$



Произведем в обеих частях  $Z_T$ -преобразование. Используя свойство линейности  $Z_T$ -преобразования и формулу (см. (6.44))

$$Z_T\{e^{-iT_s}X(s)\} = z^{-i}Z_T\{X(s)\},$$

находим

$$\sum_{i=0}^n a_i z^{-i} Z_T\{W_n(s)\} = \sum_{i=0}^m b_i z^{-i} Z_T\{W_\Phi(s)W_1(s)\}.$$

Отсюда, разделив обе части на сумму  $\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}$ , получим (6.54).

Итак, мы установили следующее свойство  $Z_T$ -преобразования: *если оригинал в  $Z_T$ -преобразовании содержит множитель, представляющий дробно-рациональную функцию от  $e^{-Ts}$ , то этот множитель можно вынести за знак оператора  $Z_T$ , произведя подстановку  $e^{Ts} = z$ .*

Если ДНФ включен перед дискретным элементом, то, учитывая, что на работу последнего влияют значения его входной переменной только в дискретные моменты, в уравнении для ДНФ можно положить  $t = lT$ . Тогда получим дискретный фильтр, передаточная функция  $W_{\text{дф}}^*(z)$  которого совпадает с полученной выше дискретной передаточной функцией дискретно-непрерывного фильтра  $W_{\text{дн}}^*(z)$ . Из

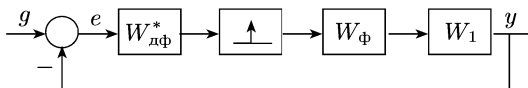


Рис. 6.19. Эквивалентная схема дискретной системы с ДНФ перед дискретным элементом

эквивалентной схемы (рис. 6.19) следует, что дискретная передаточная функция разомкнутой системы получается такой же, как и в предыдущем случае (см. (6.54)).

Таким образом, получаем, что при преобразовании структурных схем дискретный элемент и дискретно-непрерывный фильтр можно переставлять друг с другом.

Теперь рассмотрим более общую схему с дискретным фильтром (рис. 6.20). Установленное выше правило вычисления дискретной

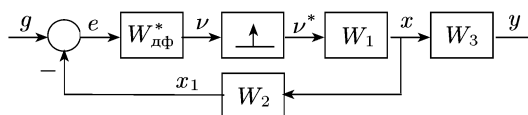


Рис. 6.20. Обобщенная эквивалентная схема дискретной системы с дискретным фильтром

передаточной функции замкнутой системы остается в силе и в данном случае.

При вычислении передаточной функции разомкнутой системы простейший импульсный элемент с последующими непрерывными звеньями можно заменить дискретным элементом и представить ее дискретную модель в виде последовательного соединения двух дискретных звеньев. Аналогично можно поступить при вычислении передаточной функции прямой цепи. Поэтому передаточные функции прямой цепи и разомкнутой системы равны произведению передаточных функций указанных двух дискретных звеньев. Таким образом, имеем

$$W_{xg}^*(z) = \frac{W_{\text{дф}}^*(z) Z_T \{W_1(s)\}}{1 + W_{\text{дф}}^*(z) Z_T \{W_1(s)W_2(s)\}}, \quad (6.55a)$$

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_{\text{дф}}^*(z) Z_T \{W_1(s)W_3(s)\}}{1 + W_{\text{дф}}^*(z) Z_T \{W_1(s)W_2(s)\}}, \quad (6.55б)$$

$$W_{eg}^*(z) = \frac{1}{1 + W_{\text{дф}}^*(z) Z_T \{W_1(s)W_2(s)\}}. \quad (6.55в)$$

Пример 6.9. Пусть в дискретной системе, представленной на рис. 6.20,  $W_{\text{дф}}^*(z) = 2$ ,  $W_1(s) = \frac{20(1 - e^{-Ts})}{s(s+1)}$ ,  $W_2(s) = \frac{0,5}{0,2s+1}$ ,  $W_3(s) = e^{-0,05s}$  и период следования импульсов  $T = 0,1$ .

Требуется определить передаточные функции  $W_{xg}^*(z)$  и  $W_{yg}^*(z)$ .

Решение. Найдем необходимые для определения требуемых передаточных функций  $Z_T$ -изображения. Учитывая, что полином  $1 - e^{-Ts}$  как частный случай дробно-рациональной функции от  $e^{-Ts}$  можно вынести за знак оператора  $Z_T$ , сделав подстановку  $e^{Ts} = z$ , получим

$$Z_T \{W_1(s)\} = \frac{20(z-1)}{z} Z_T \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} \cong \frac{2}{z-0,9},$$

$$\begin{aligned} Z_T \{W_1(s)W_2(s)\} &= \frac{10(z-1)}{z} Z_T \left\{ \frac{1}{s(s+1)(0,2s+1)} \right\} \cong \\ &\cong \frac{10z^2 - 15,7z + 9,2}{(z-0,9)(z-0,6)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_T \{W_1(s)W_3(s)\} &= \frac{20(z-1)}{z} Z_T \left\{ \frac{e^{-0,05}}{s(s+1)} \right\} = \\ &= \frac{20(z-1)}{z} z^{-1} Z_T^{0,5} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} \cong \frac{z+1}{z(z-0,9)}. \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения и выражение для  $W_{\text{дф}}^*$  в (6.55a) и (6.55б), получим

$$W_{xg}^*(z) = \frac{4(z-0,6)}{21z^2 - 32,9z + 18,9},$$

$$W_{yg}^*(z) = \frac{2(z-1)(z-0,6)}{z(21z^2 - 32,9z + 18,9)}.$$

## 6.9. Преобразование структурных схем дискретных систем

При преобразовании структурных схем дискретных систем нельзя переносить через дискретный элемент сумматор или непрерывный элемент (кроме пропорционального звена). Как было показано выше, дискретно-непрерывный фильтр и дискретное звено можно переставлять местами. Непрерывную часть, естественно, можно преобразовывать по известным правилам преобразования структурных схем непрерывных систем.

Для схем, состоящих только из дискретных звеньев, справедливы все правила преобразования структурных схем непрерывных систем. Рассмотрим систему управления с несколькими дискретными элементами с одинаковым периодом, эквивалентная схема которой представ-

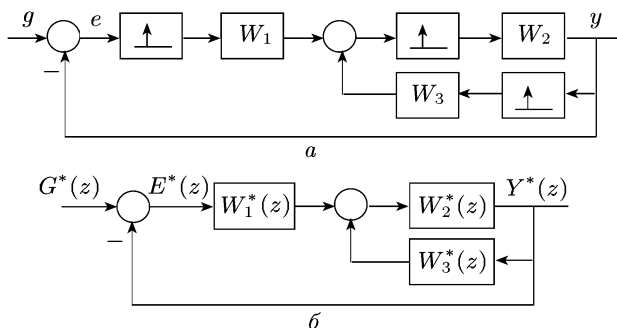


Рис. 6.21. Дискретная модель системы с несколькими дискретными элементами: *а* — исходная эквивалентная схема; *б* — структурная схема дискретной модели

лена на рис. 6.21, *а*. Очевидно, она может быть преобразована и представлена в виде структурной схемы с одними дискретными звеньями с передаточными функциями (рис. 6.21, *б*)

$$W_i^*(z) = Z_T\{W_i(s)\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Когда перед дискретным элементом включен непрерывный элемент или к системе, кроме задающего воздействия, приложено возмущение и нужно исследовать ее качество, при преобразовании структурной схемы возникают проблемы, связанные с необходимостью переноса сумматора.

В первом случае (рис. 6.22, *а*) при преобразовании сумматор переносится через точку съема сигнала, и в преобразованной схеме (рис. 6.22, *б*) эта точка отсутствует. Поэтому при определении ошибки следует исходить из следующих соотношений.

Ошибка в моменты съема сигнала равна  $e[lT] = y[lT] - g[lT]$ , или, в  $z$ -изображениях,

$$E^*(z) = G^*(z) - Y^*(z),$$

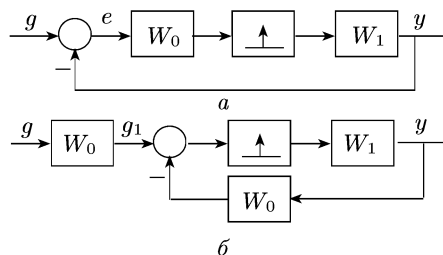


Рис. 6.22. Преобразование структурной схемы с непрерывным звеном перед дискретным элементом: *а* — исходная схема; *б* — преобразованная схема

где  $Y^*(z) = \frac{Z_T\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_0(s)\}} G_1^*(z)$ ,  $G_1^*(z) = Z_T\{W_0(s)G(s)\}$ .

Во втором случае (рис. 6.23, *а*) для определения реакции на выходе и ошибки системы от возмущения перенесем сумматор, к ко-

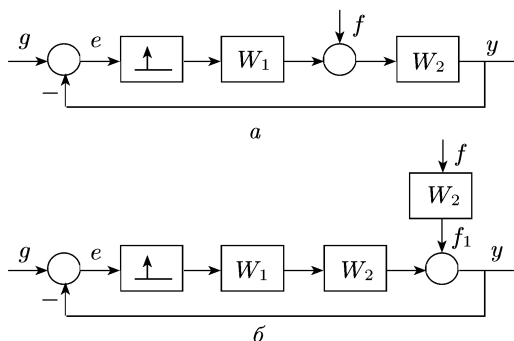


Рис. 6.23. Преобразование с переносом возмущения: *а* — исходная схема; *б* — преобразованная схема

торому приложено возмущение, через звено с передаточной функцией  $W_2$  (рис. 6.23, *б*).

Реакция системы на возмущающее воздействие определяется из следующих соотношений:

$$Y_f^*(z) = \frac{1}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}} F_1^*(z), \quad F_1^*(z) = Z_T\{W_2(s)F(s)\}.$$

Ошибки от задающего воздействия и возмущения равны соответственно

$$E_g^*(z) = W_{eg}^*(z)G^*(z) = \frac{G^*(z)}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}}, \quad E_f^*(z) = -Y_f^*(z).$$

И наконец, рассмотрим преобразование структурной схемы системы управления, в которой дискретный элемент охвачен обратной связью с непрерывным звеном (рис. 6.24, *а*). Заменяем дискретный

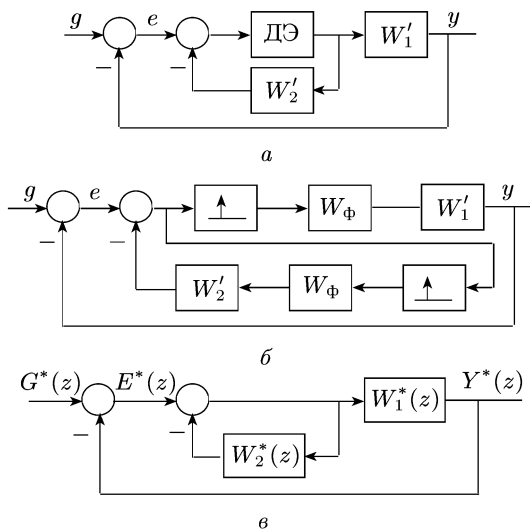


Рис. 6.24. Преобразование дискретного элемента, охваченного обратной связью: *а* — исходная схема; *б* — преобразованная эквивалентная схема; *в* — дискретная модель

элемент эквивалентной схемой и перенесем узел (рис. 6.24, *б*). Из последней схемы получаем дискретную модель системы управления (рис. 6.24, *в*). В этой модели

$$W_1^*(z) = Z_T\{W_\Phi(s)W'_1(s)\}, \quad W_2^*(z) = Z_T\{W_\Phi(s)W'_2(s)\}.$$

## 6.10. Дискретное преобразование Лапласа и частотные характеристики

Дискретным преобразованием Лапласа называют соотношение

$$\tilde{F}(s) = D\{f[lT]\} = \sum_{l=0}^{\infty} f[lT]e^{-slT},$$

ставящее решетчатой функции  $f[lT]$  в соответствие функцию  $\tilde{F}(s)$  комплексного переменного  $s$ . Функцию  $f[lT]$  называют *оригиналом*, а  $\tilde{F}(s)$  — *изображением* или *D-изображением*. Дискретное преобразование получается из  $z$ -преобразования при подстановке в него  $z = e^{sT}$ :

$$\tilde{F}(s) = Z\{f[lT]\}|_{z=e^{-sT}} = F^*(e^{sT}).$$

Обратное дискретное преобразование Лапласа имеет вид

$$f[lT] = \frac{T}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\pi/T}^{\sigma_0 + j\pi/T} \tilde{F}(s) e^{slT} ds. \quad (6.56)$$

Передаточную функцию в дискретных преобразованиях Лапласа или в  $D$ -изображениях  $\widetilde{W}(s)$  можно определить как дискретное преобразование Лапласа от весовой функции  $w[lT]$ :

$$\widetilde{W}(s) = D\{w[lT]\} = \sum_{l=0}^{\infty} w[lT]e^{-slT}.$$

Она связана с передаточной функцией в  $z$ -изображениях соотношением

$$\widetilde{W}(s) = W^*(z)|_{z=e^{sT}}.$$

*Частотной передаточной функцией* (дискретной) называется функция, которая получается при подстановке в передаточную функцию в  $D$ -изображениях  $s = j\omega$ :

$$\widetilde{W}(j\omega) = \widetilde{W}(s)|_{s=j\omega} = W^*(e^{j\omega T}).$$

На основе этой функции точно так же, как и в случае непрерывных систем, определяются амплитудно-фазовые, амплитудные, фазовые и другие частотные функции и их характеристики.

Так как  $e^{j(\omega+2\pi/T)T} = e^{j\omega T}$ , то частотная передаточная функция  $\widetilde{W}(j\omega) = W^*(e^{j\omega T})$  является периодической функцией с периодом  $\omega_n = \frac{2\pi}{T}$ . Поэтому при построении частотных характеристик дискретных систем ограничиваются частотами из интервала  $\left[-\frac{\omega_n}{2}, \frac{\omega_n}{2}\right]$  или  $\left[0, \frac{\omega_n}{2}\right]$ .

Дискретные частотные функции имеют такой же физический смысл, что и непрерывные: если на вход дискретной системы подается гармонический сигнал  $g = \sin \omega t$ , то на ее выходе в установившемся режиме в дискретные моменты времени  $t = lT$  будем иметь  $y[lT] = A \sin [\omega lT + \varphi]$ . Амплитуда и фаза этого процесса соответственно равны модулю и аргументу частотной передаточной функции.

### 6.11. Связь между дискретным и непрерывным преобразованиями Лапласа и непрерывная модель дискретной системы

Между дискретным и непрерывным преобразованиями Лапласа существует связь, которая позволяет выразить частотную передаточную функцию разомкнутой дискретной системы через частотную передаточную функцию приведенной непрерывной части. Пользуясь соотношением, связывающим две указанные функции, можно получить непрерывную модель дискретной системы.

**6.11.1. Связь между дискретным и непрерывным преобразованиями Лапласа.** Пусть функция  $f(t)$  непрерывна на интервале  $[0, \infty)$  и  $f(0) = 0$ . Тогда  $D$ -изображение  $\tilde{F}(s) = D\{f[lT]\}$  решетчатой функции  $f[lT]$ , соответствующей непрерывной функции  $f(t)$ , связано с изображением Лапласа  $F(s) = L\{f(t)\}$  функции  $f(t)$  соотношением

$$\tilde{F}(s) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right). \quad (6.57)$$

Для получения этой формулы в обратном преобразовании Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

интервал интегрирования разобьем на подынтервалы  $\left[\sigma_0 + j(2m - 1)\frac{\pi}{T}, \sigma_0 + j(2m + 1)\frac{\pi}{T}\right]$  и представим интеграл справа в виде суммы:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_0 + j(2m-1)\pi/T}^{\sigma_0 + j(2m+1)\pi/T} F(s) e^{st} ds.$$

Произведем замену переменных  $s = s' + jm \frac{2\pi}{T}$  и положим  $t = lT$ . Тогда

$$f[lT] = \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_0 - j\pi/T}^{\sigma_0 + j\pi/T} F\left(s' + jm \frac{2\pi}{T}\right) e^{(s' + jm 2\pi/T)lT} ds'.$$

Отсюда, заменив переменную интегрирования  $s'$  на  $s$  и учитывая, что  $e^{jml2\pi} = 0$ , находим

$$f[lT] = \frac{1}{2\pi j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\sigma_0 - j\pi/T}^{\sigma_0 + j\pi/T} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right) e^{slT} ds.$$

Поменяв порядок суммирования и интегрирования, последнее равенство можно представить в виде

$$f[lT] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\pi/T}^{\sigma_0 + j\pi/T} \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(s + jm \frac{2\pi}{T}\right) e^{slT} ds.$$

Приравняв правую часть последнего равенства и правую часть (6.56), получим (6.57).

**6.11.2. Непрерывная модель дискретной системы.** Пусть дискретная система состоит из дискретного элемента (ДЭ) и непрерывной части (НЧ) (рис. 6.25, а). Дискретный элемент вырабатывает

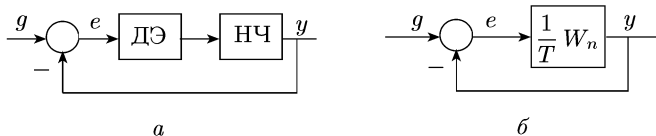


Рис. 6.25. Дискретная система (а) и ее непрерывная модель (б)

прямоугольные импульсы с периодом  $T$ , относительной длительностью  $\gamma$  и амплитудой  $A_n = 1$ . Тогда передаточная функция приведенной непрерывной части имеет вид

$$W_n(s) = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s} W_n(s),$$

где  $W_n(s)$  — передаточная функция непрерывной части.

Учитывая, что  $W_n(s)$  есть изображение Лапласа весовой функции ПНЧ  $w_n(t)$ , а передаточная функция в  $D$ -изображениях разомкнутой дискретной системы —  $D$ -изображение  $w_n[lT]$ , согласно формуле (6.57) имеем

$$\widetilde{W}_n(s) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_n\left(s + jl \frac{2\pi}{T}\right).$$

Положив  $\omega_n = \frac{2\pi}{T}$ , для частотной передаточной функции разомкнутой дискретной системы получаем

$$\widetilde{W}_n(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_n[j(\omega + l\omega_n)]. \quad (6.58)$$

Как отмечалось выше, частотная передаточная функция  $\widetilde{W}_n(j\omega)$  является периодической функцией с периодом  $\omega_n$ , и при построении частотных характеристик достаточно ограничиться интервалом  $\left[-\frac{\omega_n}{2}, \frac{\omega_n}{2}\right]$ . И если выполняется условие

$$|\widetilde{W}_n(j\omega)| \ll 1 \quad \text{при} \quad \omega_n > \frac{\omega_n}{2}, \quad (6.59)$$

то в формуле (6.58) справа можно ограничиться одним слагаемым, соответствующим  $l = 0$ . Остальные члены при указанном условии не будут оказывать существенного влияния на частотную характеристику. Поэтому при условии (6.59) можем принять

$$\widetilde{W}_n(j\omega) = \frac{1}{T} W_n(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\gamma T}}{Tj\omega} W_n(j\omega),$$

и исходную дискретную систему можно представить непрерывной моделью (рис. 6.25, б). При малых  $\gamma\omega T$

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-j\omega\gamma T}}{Tj\omega} &= \frac{2}{\omega T} e^{-j\omega\gamma T/2} \frac{e^{j\omega\gamma T/2} - e^{-j\omega\gamma T/2}}{2j} = \\ &= \gamma e^{-j\omega\gamma T/2} \frac{\sin(\omega\gamma T/2)}{\omega\gamma T/2} \cong \gamma e^{-j\omega\gamma T/2}, \end{aligned}$$



и передаточная функция разомкнутой системы непрерывной модели имеет вид

$$W(s) = \gamma e^{-sT/2} W_n(s),$$

или, когда относительная длительность  $\gamma = 1$ ,

$$W(s) = e^{-sT/2} W_n(s). \quad (6.60)$$

Таким образом, дискретизация по времени соответствует введению чистого запаздывания на полпериода. При малых  $T$  наличие дискретного элемента не учитывают и принимают

$$W(s) = W_n(s). \quad (6.61)$$

Однако следует иметь в виду, что непрерывная модель, основанная на последнем соотношении, может приводить к неправильным выводам.

Например, когда непрерывная часть представляет собой апериодическое или колебательное звено, замкнутая система получается устойчивой при любом передаточном коэффициенте, если исходить из соотношения (6.61). Однако в действительности из-за того, что дискретный элемент вносит запаздывание, существует максимальное значение передаточного коэффициента, выше которого замкнутая система будет неустойчивой.

## Задачи

**1.** Определить  $Z_T$ -преобразование и  $Z_T^\varepsilon$ -преобразование от следующих функций при периоде  $T = 0,1$ :

а)  $X(s) = \frac{10(s+0,5)}{s(s+1)(s+3)}$ ; б)  $X(s) = \frac{5(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$ ;

в)  $X(s) = \frac{5}{s^2(s+1)}$ ; г)  $X(s) = \frac{5(0,2s+1)}{s(s+1)^2}$ ;

д)  $X(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2+s+1)}$ ; е)  $X(s) = \frac{2(0,5s+1)}{(s+1)^2(s^2+s+1)}$ .

**2.** Определить  $Z_T$ -преобразования от следующих функций при периоде  $T = 0,1$ :

а)  $X(s) = \frac{10(s+0,5)e^{-0,2s}}{s(s+1)(s+3)}$ ; б)  $X(s) = \frac{10(s+0,5)e^{-0,15s}}{s(s+1)(s+3)}$ ;

в)  $X(s) = \frac{5e^{-0,05s}}{s^2(s+1)}$ ; г)  $X(s) = \frac{5(s+4)e^{-0,25s}}{(s+2)(s+3)(s+1)}$ ;

д)  $X(s) = \frac{5e^{-0,15s}}{s^2(s+1)}$ ; е)  $X(s) = \frac{2e^{-0,25s}}{(s+1)(s^2+s+1)}$ .

**3.** Дана АИМ-система (см. рис. 6.4). АИМ-элемент вырабатывает прямоугольные импульсы длительности  $\tau_n = 0,05$  с амплитудой  $A_n = 1$  и периодом  $T = 0,1$ .

Определить передаточные функции  $W_{yg}^*(z)$  и  $W_{eg}^*(z)$  при следующих передаточных функциях непрерывной части:

$$\text{а) } W_{\text{н}}(s) = \frac{10(s+0,5)}{(s+1)(s+2)}; \quad \text{б) } W_{\text{н}}(s) = \frac{5(s+4)}{s(s+1)(s+3)};$$

$$\text{в) } W_{\text{н}}(s) = \frac{5(0,2s+1)}{s(s+1)^2}; \quad \text{г) } W_{\text{н}}(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2+s+1)};$$

$$\text{д) } W_{\text{н}}(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s^2+s+1)}; \quad \text{е) } W_{\text{н}}(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s^2+s+1)}.$$

4. Дана цифровая система управления (см. рис. 6.8). Цифровое вычислительное устройство реализует алгоритм управления

$$u[lT] - u[(l-1)T] = 2,5e[lT] - 2e[(l-1)T];$$

цифро-аналоговый преобразователь — фиксатор нулевого порядка; период  $T = 0,1$ .

Определить передаточные функции  $W_{yg}^*(z)$  и  $W_{eg}^*(z)$  при следующих передаточных функциях непрерывной части:

$$\text{а) } W_{\text{н}}(s) = \frac{1}{s+1}; \quad \text{б) } W_{\text{н}}(s) = \frac{1}{s(s+1)};$$

$$\text{в) } W_{\text{н}}(s) = \frac{1}{s}; \quad \text{г) } W_{\text{н}}(s) = \frac{2}{(s+1)(s^2+s+1)};$$

$$\text{д) } W_{\text{н}}(s) = \frac{2(s+1)}{s(s^2+s+1)}; \quad \text{е) } W_{\text{н}}(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}.$$

5. Дана ШИМ-система (см. рис. 6.12). ШИМ-элемент вырабатывает прямоугольные импульсы с амплитудой  $A_{\text{н}} = 1$  и периодом  $T = 0,1$ . Коэффициент модуляции  $\chi = 0,01$ .

Определить передаточные функции  $W_{yg}^*(z)$  и  $W_{eg}^*(z)$  при следующих передаточных функциях непрерывной части:

$$\text{а) } W_{\text{н}}(s) = \frac{s+0,5}{(s+1)(s+2)}; \quad \text{б) } W_{\text{н}}(s) = \frac{2(s+1)e^{-0,05s}}{(s+2)(s+3)};$$

$$\text{в) } W_{\text{н}}(s) = \frac{5(s+2)}{(s+1)s}; \quad \text{г) } W_{\text{н}}(s) = \frac{5e^{-0,15s}}{s(s+1)};$$

$$\text{д) } W_{\text{н}}(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}; \quad \text{е) } W_{\text{н}}(s) = \frac{(s+1)e^{-0,15s}}{s(s^2+s+1)}.$$

6. Дана обобщенная схема дискретной системы (см. рис. 6.17). Период следования импульсов  $T = 0,1$ .

Определить передаточные функции  $W_{xg}^*(z)$ ,  $W_{yg}^*(z)$  и  $W_{eg}^*(z)$  при следующих передаточных функциях непрерывных звеньев:

$$\text{а) } W_1(s) = \frac{1 - e^{-0,1s}}{(s+1)s}, \quad W_2(s) = 0,2s+1, \quad W_3(s) = e^{-0,05s};$$

$$\text{б) } W_1(s) = \frac{1 - e^{-0,1s}}{(s+1)s}, \quad W_2(s) = 0,2s + 1, \quad W_3(s) = e^{-0,05s};$$

$$\text{в) } W_1(s) = \frac{1 - e^{-0,05s}}{(s^2 + s + 1)s^2}, \quad W_2(s) = 0,1s + 1, \quad W_3(s) = e^{-0,05s};$$

$$\text{г) } W_1(s) = \frac{1 - e^{-0,1s}}{(s^2 + s + 1)(s+1)s}, \quad W_2(s) = 0,1s + 1, \quad W_3(s) = e^{-0,04s};$$

$$\text{д) } W_1(s) = \frac{1 - e^{-0,05s}}{(s+1)^2s}, \quad W_2(s) = 0,1s + 1, \quad W_3(s) = e^{-0,02s}.$$

7. Дана дискретная система управления (см. рис. 6.23, а). Период следования импульсов  $T = 0,05$ . Определить изображения ошибки  $E^*(z)$  и выходной переменной  $Y^*(z)$  при  $g = 1(t)$  и следующих передаточных функциях непрерывных звеньев:

$$\text{а) } W_1(s) = 0,2s + 1, \quad W_2(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(0,1s + 1)};$$

$$\text{б) } W_1(s) = 0,2s + 1, \quad W_2(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(0,1s + 1)(s + 1)};$$

$$\text{в) } W_1(s) = 0,2s + 1, \quad W_2(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2(s + 1)}.$$

8. Дана дискретная система управления (см. рис. 6.22, а). Период следования импульсов  $T = 0,05$ . Определить изображения ошибки  $E^*(z)$  и выходной переменной  $Y^*(z)$  при  $g = 0$ ,  $f = 1(t)$  и следующих передаточных функциях непрерывных звеньев:

$$\text{а) } W_1(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}, \quad W_2(s) = \frac{5}{s + 1};$$

$$\text{б) } W_1(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(0,1s + 1)}, \quad W_2(s) = 10;$$

$$\text{в) } W_1(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s + 1)}, \quad W_2(s) = \frac{10}{s}.$$

## Глава 7

### УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

#### 7.1. Характеристическое уравнение и основное условие устойчивости

Если внешние воздействия заданы, то уравнения дискретной системы управления можно записать в виде

$$a_0 y(t + nT) + a_1 y(t + (n - 1)T) + \dots + a_n y(t) = \varphi(t), \quad (7.1)$$

или, в операторной форме,

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = \varphi(t).$$

Характеристическое уравнение имеет вид (см. (6.7))

$$Q^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (7.2)$$

Характеристический полином (левая часть характеристического уравнения) получается при подстановке в собственный оператор

$$Q^*(E) = a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n$$

вместо оператора смещения  $E$  переменной  $z$ .

Если задана передаточная функция системы управления, то при определении характеристического полинома нужно исходить из следующих положений: по определению передаточной функции в операторной форме ее знаменатель есть собственный оператор, а знаменатель передаточной функции в  $z$ -изображениях совпадает с характеристическим полиномом (при условии, что передаточная функция в операторной форме не содержит одинаковых нулей и полюсов).

Как отмечалось в гл. 6, общее решение неоднородного разностного уравнения (7.1) имеет вид

$$y(t) = y_{\text{в}}(t) + y_{\text{с}}(t),$$

где  $y_{\text{в}}(t)$  — частное решение этого уравнения и  $y_{\text{с}}(t)$  — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Линейная дискретная система управления называется *устойчивой*, если общее решение однородного разностного уравнения при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{с}}[lT] = 0. \quad (7.3)$$

Если все корни  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) характеристического уравнения простые (т.е. различные), то общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$y_c(t) = \sum_{i=1}^n C_i z_i^{t/T}, \quad (7.4)$$

где  $C_i$  — произвольные постоянные. Если среди корней характеристического уравнения имеется кратный корень  $z_j$  кратности  $k_j$ , то ему в (7.4) соответствует слагаемое

$$\left( C_1^j + C_2^j \frac{t}{T} + \dots + C_{k_j}^j \left( \frac{t}{T} \right)^{k_j-1} \right) z_j^{t/T}.$$

Из (7.4) и последнего выражения следует, что условие (7.3) будет выполнено в том и только том случае, когда  $|z_i| < 1$  при всех  $1, 2, \dots, n$ .

**Основное условие устойчивости.** *Для того чтобы линейная дискретная система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были по модулю меньше единицы, или, что то же, находились внутри единичного круга на  $z$ -плоскости корней.*

**Пример 7.1.** Передаточная функция системы  $W^*(z) = \frac{5(z+1)}{z^2 - z + 0,5}$ .

Требуется исследовать ее устойчивость.

**Решение.** Характеристическое уравнение имеет вид

$$z^2 - z + 0,5 = 0.$$

Его корнями являются  $z_{1,2} = 0,5 \pm j0,5$ . Их модули  $|z_1| = |z_2| = \sqrt{0,5} < 1$ . Система устойчива.

## 7.2. Алгебраические критерии устойчивости

Здесь мы рассмотрим необходимое условие устойчивости, определение устойчивости, основанное на преобразовании внутренности единичного круга в левую полуплоскость, и критерии устойчивости Джюри.

**7.2.1. Необходимое условие устойчивости.** *Для того чтобы все нули (корни) характеристического полинома*

$$A^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

*были по модулю меньше единицы ( $|z_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ), необходимо, чтобы при  $a_0 > 0$  выполнялись неравенства*

$$Q^*(1) > 0, \quad (-1)^n Q^*(-1) > 0. \quad (7.5)$$

Чтобы доказать это утверждение, разложим полином  $Q^*(z)$  на элементарные множители:

$$Q^*(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n). \quad (7.6)$$

Если корень  $z_i$  является вещественным и по модулю меньше единицы, то множитель  $(z - z_i)$  при  $z = 1$  и множитель  $(-1)(z - z_i)$  при  $z = -1$  будут положительными. Если корень  $z_i$  является комплексным, т. е.  $z_i = \alpha_i + j\beta_i$  ( $\alpha_i, \beta_i$  — вещественные числа), то существует комплексно-сопряженный корень  $z_{i+1} = \alpha_i - j\beta_i$ . Произведение

$$(z - z_i)(z - z_{i+1}) = (z - \alpha_i)^2 + \beta_i^2$$

при  $z = 1$  и произведение

$$(-1)(z - z_i)(-1)(z - z_{i+1}) = (z - \alpha_i)^2 + \beta_i^2$$

при  $z = -1$  будут положительными. Следовательно, из (7.6) следует, что если все корни характеристического полинома по модулю меньше единицы, то будут выполняться неравенства (7.5).

**Пример 7.2.** Характеристический полином дискретной системы имеет вид

$$Q^*(z) = z^3 + 2,3z^2 + 0,5z - 0,2.$$

Требуется определить устойчивость системы.

**Решение.** Проверим необходимое условие устойчивости. В данном случае  $a_0 = 1 > 0$  и

$$Q^*(1) = 1 + 2,3 + 0,5 - 0,2 = 3,6 > 0,$$

$$(-1)^3 Q^*(-1) = -(-1 + 2,3 - 0,5 - 0,2) = -0,6 < 0.$$

Необходимое условие устойчивости не выполняется. Следовательно, система неустойчива.

**7.2.2. Исследование устойчивости, основанное на преобразовании единичного круга в левую полуплоскость.** Критерии Гурвица, Ляенара–Шипара и другие критерии устойчивости непрерывных систем позволяют судить, находятся все корни характеристического уравнения в левой полуплоскости или нет. Поэтому их нельзя непосредственно использовать для исследования устойчивости дискретных систем. Однако, очевидно, ими можно воспользоваться, если произвести преобразование переменной характеристического уравнения, при котором единичный круг преобразуется в левую полуплоскость.

**Утверждение 7.1.** При преобразовании

$$v = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (7.7)$$

внутренность единичного круга на  $z$ -плоскости преобразуется в левую полуплоскость, его внешность — в правую полуплоскость и окружность (единичного радиуса) — в мнимую ось на  $v$ -плоскости.

**Доказательство.** Представим комплексную переменную  $z$  в тригонометрической форме и подставим в (7.7):

$$v = \frac{|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) - 1}{|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) + 1} \quad (\varphi = \arg z).$$

Преобразовав и разделив выражение справа на вещественную и мнимую части, получим

$$v = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 2|z| \cos \varphi + 1} + j \frac{2|z| \sin \varphi}{|z|^2 + 2|z| \cos \varphi + 1}.$$

Так как  $|z|^2 + 2|z| \cos \varphi + 1 \geq |z|^2 - 2|z| + 1 = (|z| - 1)^2 > 0$  при  $|z| \neq 1$ , то вещественная часть

$$\operatorname{Re} v = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 2|z| \cos \varphi + 1}$$

отрицательна при  $|z| < 1$ , положительна при  $|z| > 1$  и равна нулю при  $|z| = 1$ . Следовательно, при преобразовании (7.7) внутренность единичного круга  $z$ -плоскости переходит в левую полуплоскость, а его внешняя часть — в правую полуплоскость  $v$ -плоскости. Окружность единичного радиуса  $|z| = 1$  переходит в мнимую ось. Действительно, при  $|z| = 1$

$$v = j \frac{2 \sin \varphi}{2(\cos \varphi + 1)} = j \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

и при изменении  $\varphi$  от  $-\pi$  до  $\pi$  переменная  $v$  пробегает значения от  $-j\infty$  до  $j\infty$ . Утверждение доказано.

Разрешим равенство (7.7) относительно  $z$  и подставим полученное выражение в характеристическое уравнение (7.2):

$$\begin{aligned} G^*(v) &= (1-v)^n Q^*\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = \\ &= a_0(1+v)^n + a_1(1+v)^{n-1}(1-v) + \dots + a_n(1-v)^n = 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Представим это преобразованное характеристическое уравнение в стандартной форме:

$$G^*(z) = c_0 v^n + c_1 v^{n-1} + \dots + c_n = 0. \quad (7.9)$$

Выражения для коэффициентов этого уравнения через коэффициенты исходного характеристического уравнения получим, если в (7.8) раскроем скобки и произведем приведение подобных членов, а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в (7.8) и (7.9).

Для  $n = 1, 2, 3$  имеем:

$$n = 1: c_0 = a_0 - a_1, \quad c_1 = a_0 + a_1; \quad (7.10a)$$

$$n = 2: c_0 = a_0 - a_1 + a_2, \quad c_1 = 2(a_0 - a_2), \quad c_2 = a_0 + a_1 + a_2; \quad (7.10б)$$

$$\begin{aligned} n = 3: c_0 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3, \quad c_1 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2, \\ c_2 &= 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2, \quad c_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3. \end{aligned} \quad (7.10в)$$

В силу утверждения 7.1, если корни исходного характеристического уравнения располагаются внутри единичного круга, то корни преобразованного характеристического уравнения (7.9) располагаются в левой полуплоскости.

Таким образом, для того чтобы дискретная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни преобразованно-

го характеристического уравнения (7.9) располагались в левой полуплоскости (имели отрицательную вещественную часть).

**Пример 7.3.** Характеристический полином дискретной системы управления имеет вид

$$Q^*(z) = z^3 - 0,1z^2 - 0,46z - 0,08.$$

Определить ее устойчивость.

**Решение.** В данном случае

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -0,1, \quad a_2 = -0,46, \quad a_3 = -0,08$$

и в соответствии с (7.10в) коэффициенты преобразованного уравнения равны

$$c_0 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1 + 0,1 - 0,46 + 0,08 = 0,72,$$

$$c_1 = 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 = 3(1 - 0,08) + 0,1 + 0,46 = 3,32,$$

$$c_2 = 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 = 3(1 + 0,08) - 0,1 + 0,46 = 3,6,$$

$$c_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 0,1 - 0,46 - 0,08 = 0,36.$$

Необходимое условие устойчивости выполняется: все коэффициенты преобразованного характеристического уравнения больше нуля. Определитель Гурвица 2-го порядка есть

$$\Delta_2 = c_1 c_2 - c_0 c_3 = 3,32 \cdot 3,6 - 0,72 \cdot 0,36 \cong 11,69 > 0.$$

Следовательно, система устойчива.

**7.2.3. Критерий устойчивости Джюри.** Составим таблицу Джюри, которая содержит  $n + 1$  строк и столько же столбцов. При этом заполненные клетки имеют треугольную форму: нулевая строка содержит  $n + 1$  заполненных клеток, а все последующие строки имеют на единицу меньше заполненных клеток, чем предыдущая строка (табл. 7.1).

Таблица 7.1. Таблица Джюри

$d_{00} = a_0$	$d_{01} = a_1$	...	$d_{0,n-1} = a_{n-1}$	$d_{0n} = a_n$
$d_{10}$	$d_{11}$	...	$d_{1,n-1}$	
.....				
$d_{n-1,0}$	$d_{n-1,1}$			
$d_{n0}$				

Клетки нулевой строки заполняются коэффициентами характеристического уравнения в порядке возрастания нижних индексов:  $d_{0k} = a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Элементы первой строки  $d_{1k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ) вычисляются следующим образом.

Выписываются элементы нулевой строки и под ними те же элементы в обратном порядке. Из элементов верхней строки вычитаются со-



ответствующие элементы нижней строки, умноженные на отношение последних элементов двух выписанных строк  $\alpha_1 = d_{0n}/d_{00} = a_n/a_0$ :

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ - & & & & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \end{array} \quad \alpha_1 = \frac{a_n}{a_0}$$


---


$$d_{10} = a_0 - \alpha_1 a_n, \quad d_{11} = a_1 - \alpha_1 a_{n-1}, \quad \dots, \quad d_{1,n-1} = a_{n-1} - \alpha_1 a_1.$$

Последняя разность обращается в нуль, и она отбрасывается. Поэтому первая строка содержит  $n$  элементов: на один элемент меньше, чем нулевая строка.

Элементы всех последующих строк определяются аналогично элементам первой строки. Так, например, для вычисления  $k$ -й строки выписываются элементы  $(k-1)$ -й строки и под ними те же элементы в обратном порядке. Из элементов верхней строки вычитаются соответствующие элементы нижней строки, умноженные на отношение последних элементов выписанных двух строк  $\alpha_k = c_{k-1,n-k+1}/c_{k-10}$ . Последняя разность, обращающаяся в нуль, отбрасывается. Формула для вычисления  $i$ -го элемента  $k$ -й строки ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) имеет вид  $c_{ki} = c_{k-1,i} - \alpha_k c_{k-1,n-k-i+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-k$ . (7.11)

**Критерий Джюри** (Е.И. Jury [19]). *Для того чтобы все нули (корни) характеристического полинома*

$$Q^*(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

*находились внутри единичного круга, необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  все элементы нулевого столбца таблицы Джюри были положительны:  $d_{0i} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

Если все элементы нулевого столбца, кроме последнего, положительны:  $d_{0i} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , то положительность последнего элемента, т.е. условие  $d_{0n} > 0$ , эквивалентно необходимому условию устойчивости (7.5). Поэтому если необходимое условие выполняется, то последний элемент  $d_{0n}$  можно не вычислять.

**Пример 7.4.** Характеристический полином дискретной системы управления имеет вид

$$Q^*(z) = z^4 - 0,7z^3 - 0,4z^2 + 0,05z + 0,1.$$

Исследовать устойчивость данной системы.

**Решение.** Сначала проверим необходимое условие устойчивости:

$$Q^*(1) = 1 - 0,7 - 0,4 + 0,05 + 0,1 = 0,05 > 0,$$

$$(-1)^4 Q^*(-1) = 1 + 0,7 - 0,4 - 0,05 + 0,1 = 1,35 > 0.$$

Необходимое условие устойчивости выполняется. Вычислим элементы таблицы Джюри.

Для нулевой строки имеем

$$c_{00} = 1, \quad c_{01} = -0,7, \quad c_{02} = -0,4, \quad c_{03} = 0,05, \quad c_{04} = 0,1.$$

Ниже приводится вычисление элементов таблицы Джюри для остальных строк, кроме последней:

1	-0,7	-0,4	0,05	0,1	· $\alpha_1 = 0,1$
0,1	0,05	-0,4	-0,7	1	
0,99	-0,705	-0,36	0,12	· $\alpha_2 \cong 0,121$	
0,12	-0,36	-0,705	0,99		
0,975	-0,69	-0,275	· $\alpha_3 \cong -0,282$		
-0,275	-0,69	0,975			
0,897	-0,883				

Элементы нулевого столбца (кроме последнего) равны соответственно

$$c_{00} = a_0 = 1, \quad c_{10} = 0,99, \quad c_{20} = 0,975, \quad c_{30} = 0,897,$$

и они положительны. Так как выполняется необходимое условие устойчивости, последний элемент нулевого столбца также будет положительным. Следовательно, система устойчива.

### 7.3. Частотный критерий устойчивости

Рассмотрим полином, который получается из характеристического полинома  $Q^*(z)$  при подстановке в него  $z = e^{sT}$ :

$$\tilde{Q}(s) = Q^*(z)|_{z=e^{sT}} = a_0 e^{nTs} + a_1 e^{(n-1)Ts} + \dots + a_n. \quad (7.12)$$

Этот полином является характеристическим полиномом в  $D$ -изображениях. Установим, какими должны быть нули  $\tilde{Q}(s)$  (т. е. корни характеристического уравнения  $\tilde{Q}(s) = 0$  в  $D$ -изображениях), чтобы система была устойчива.

Представим переменную  $z$  в виде  $z = |z|e^{j \arg z}$ . Подставив это выражение в  $z = e^{sT}$  и прологарифмировав, получим

$$s = \frac{1}{T} (\ln |z| + j \arg z). \quad (7.13)$$

Так как  $\ln |z| < 0$  при  $|z| < 1$ , то условие устойчивости дискретных систем  $|z_i| < 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) принимает вид

$$\operatorname{Re} s_i = \frac{1}{T} \ln |z_i| < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.14)$$

Таким образом, для того чтобы дискретная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения в  $D$ -изображениях расположились в левой  $s$ -полуплоскости.

В силу равенства  $z = |z|e^{j \arg z} = |z|e^{j(\arg z + k 2\pi)}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), если  $z_i$  является корнем характеристического уравнения  $Q^*(z) = 0$ ,

то число

$$s_i = \frac{1}{T} [(\ln |z_i| + j(\arg z_i + k 2\pi))]$$

будет корнем характеристического уравнения в  $D$ -изображениях при любых  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Иначе говоря, характеристическое уравнение в  $D$ -изображениях имеет бесконечное множество решений.

Корни  $s_i$ , у которых мнимая часть  $\operatorname{Im} s_i \in [-\pi/T, \pi/T]$ , будем называть *основными корнями* характеристического уравнения в  $D$ -изображениях. Число основных корней равно степени характеристического уравнения. Так как неосновные корни отличаются от соответствующих основных только мнимой частью, для исследования устойчивости достаточно рассмотреть только основные корни.

### 7.3.1. Принцип аргумента.

*Если  $k$  основных нулей характеристического полинома*

$$\tilde{Q}(s) = a_0 e^{nTs} + a_1 e^{(n-1)Ts} + \dots + a_n$$

*расположены в левой полуплоскости, а остальные  $n - k$  основных нулей — в правой полуплоскости, то приращение  $\arg \tilde{Q}(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от  $-\omega_n/2$  до  $\omega_n/2$  ( $\omega_n = 2\pi/T$ ) равно  $2k\pi$ :*

$$-\omega_n/2 \leq \omega \leq \omega_n/2 \quad \arg \tilde{Q}(j\omega) = 2k\pi, \quad (7.15)$$

*а при изменении  $\omega$  от 0 до  $\omega_n/2$  равно  $k\pi$ :*

$$0 \leq \omega \leq \omega_n/2 \quad \arg \tilde{Q}(j\omega) = k\pi. \quad (7.16)$$

**Доказательство.** Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — нули характеристического полинома  $Q^*(z)$ , а  $s_1, s_2, \dots, s_n$  — нули характеристического полинома  $\tilde{Q}(s)$ . Тогда эти полиномы можно представить в виде произведения

$$Q^*(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), \quad (7.17)$$

$$\tilde{Q}(j\omega) = a_0(e^{j\omega T} - e^{s_1 T})(e^{j\omega T} - e^{s_2 T}) \dots (e^{j\omega T} - e^{s_n T}). \quad (7.18)$$

При  $|z| = 1$ , положив в (7.13)  $s = j\omega$ , получим  $\arg z = \omega T$ , и соответственно  $z$  можем представить в виде

$$z = |z|e^{j\arg z} = e^{j\omega T}.$$

Этот вектор при изменении  $\omega$  от  $-\omega_n/2$  до  $\omega_n/2$  делает на  $z$ -плоскости полный оборот в положительном направлении (против движения часовой стрелки), и его конец описывает окружность единичного радиуса. При этом вектор  $z - z_i$  ( $z = e^{j\omega T}$ ) делает полный оборот относительно конца вектора  $z_i$  в положительном направлении, и изменение его аргумента равно  $2\pi$  (рис. 7.1, а), если  $|z_i| < 1$ , и изменение

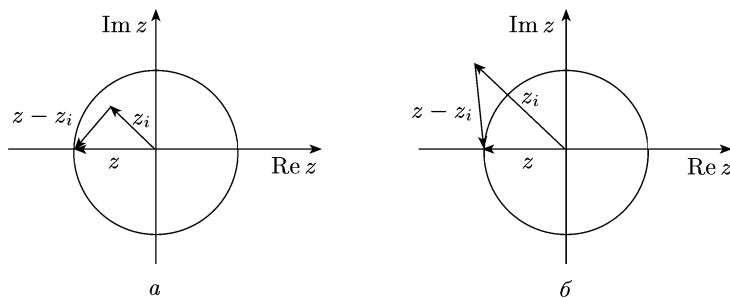


Рис. 7.1. К доказательству принципа аргумента:  $|z_i| < 1$  (а) и  $|z_i| > 0$  (б)

аргумента этого вектора равно нулю, если  $|z_i| > 1$  (рис. 7.1, б). Поэтому (см. (7.17))

$$\Delta_{-\omega_n/2 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg Q^*(e^{j\omega T}) = \sum_{i=1}^n \Delta_{-\omega_n/2 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg (e^{j\omega T} - z_i) = 2k\pi,$$

если  $k$  нулей полинома  $Q^*(z)$  находятся внутри единичного круга, а остальные  $n - k$  — вне единичного круга.

И так как  $\operatorname{Re} s_i < 0$  при  $|z_i| < 1$  и  $\operatorname{Re} s_i > 0$  при  $|z_i| > 1$ , изменение аргумента  $\tilde{Q}(j\omega)$  (см. (7.18)) определяется следующим образом:

$$\Delta_{-\omega_n/2 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg \tilde{Q}(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta_{-\omega_n/2 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg (e^{j\omega T} - e^{s_i T}) = 2k\pi,$$

если  $k$  основных нулей характеристического полинома  $\tilde{Q}(s) = Q^*(e^{sT})$  расположены в левой, а остальные  $n - k$  основных нулей — в правой  $s$ -полуплоскости.

Теперь покажем справедливость формулы (7.16). Так как  $e^{j(-x)} = \cos x - j \sin x$ , функция  $\tilde{Q}(-j\omega) = Q^*(e^{-j\omega T})$  является комплексно-сопряженной функции  $\tilde{Q}(j\omega) = Q^*(e^{j\omega T})$ . Аргументы комплексно-сопряженных функций отличаются только знаком:

$$\arg \tilde{Q}(j\omega) = -\arg \tilde{Q}(-j\omega).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_{-\omega_n/2 \leq \omega \leq 0} \arg \tilde{Q}(j\omega) = \Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg \tilde{Q}(j\omega),$$

и из (7.15) получаем (7.16).

**7.3.2. Критерий Найквиста.** Для исследования устойчивости дискретных систем можно использовать также критерий Найквиста (точнее, его аналог). Как и в случае непрерывных систем, он используется для определения устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике ее разомкнутой системы.

Пусть передаточная функция дискретной системы управления в разомкнутом состоянии имеет вид

$$\widetilde{W}(s) = W^*(e^{sT}) = \frac{\widetilde{P}(s)}{\widetilde{R}(s)},$$

где  $\widetilde{P}(s)$ ,  $\widetilde{R}(s)$  — полиномы от  $e^{sT}$ .

**Критерий Найквиста.** Если разомкнутая система неустойчива и ее характеристическое уравнение  $\widetilde{R}(s) = 0$  имеет  $k$  основных корней в правой полуплоскости и не содержит корней на мнимой оси, то для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы (годограф частотной передаточной функции  $\widetilde{W}(j\omega)$ ) при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\omega_n/2$  охватывала точку  $(-1, j0)$   $k/2$  раз.

Если разомкнутая система устойчива, то для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы не охватывала точку  $(-1, j0)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$\widetilde{M}(s) = 1 + \widetilde{W}(s) = \frac{\widetilde{Q}(s)}{\widetilde{R}(s)}, \quad \widetilde{Q}(s) = \widetilde{R}(s) + \widetilde{P}(s).$$

В числителе имеем характеристический полином замкнутой системы, а в знаменателе — характеристический полином разомкнутой системы. Для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все нули характеристического полинома замкнутой системы  $\widetilde{Q}(s) = \widetilde{R}(s) + \widetilde{P}(s)$  располагались в левой полуплоскости или в соответствии с принципом аргумента (см. (7.16)) выполнялось равенство

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg \widetilde{Q}(j\omega) = n\pi.$$

По условию характеристическое уравнение  $\widetilde{R}(s) = 0$  имеет  $k$  основных корней в правой и остальные  $n - k$  основных корней в левой полуплоскости. Поэтому в соответствии с принципом аргумента

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg \widetilde{R}(j\omega) = (n - k)\pi.$$

И так как  $\arg \widetilde{M}(j\omega) = \arg \widetilde{Q}(j\omega) - \arg \widetilde{R}(j\omega)$ , то

$$\Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg \widetilde{M}(j\omega) = \Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg \widetilde{Q}(j\omega) - \Delta_{0 \leq \omega \leq \omega_n/2} \arg \widetilde{R}(j\omega) = k\pi.$$

Отсюда следует: для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора  $\widetilde{M}(j\omega)$  охватывал начало координат  $k/2$  раз.

В силу равенства  $\widetilde{W}(j\omega) = \widetilde{M}(j\omega) - 1$  годограф  $\widetilde{W}(j\omega)$  получается из годографа  $\widetilde{M}(j\omega)$  путем сдвига последнего влево на единицу

(рис. 7.2). Поэтому для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора  $\widetilde{W}(j\omega)$

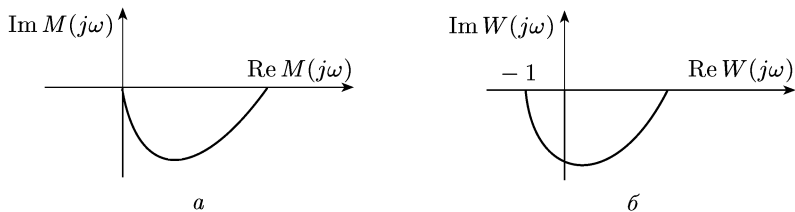


Рис. 7.2. К доказательству критерия Найквиста: *a* — годограф  $M(j\omega)$ ; *б* — годограф  $W(j\omega)$

при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\omega_n/2$  охватывал точку  $(-1, j0)$   $k/2$  раз.

Если разомкнутая система устойчива, то  $k=0$ , и для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф  $\widetilde{W}(j\omega)$  не охватывал точку  $(-1, j0)$ .

Пример 7.5. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W^*(z) = \frac{0,5(z + 0,7)}{z^2 - 1,2z + 0,35},$$

период следования импульсов  $T = 0,1$ . Исследовать устойчивость замкнутой системы.

Решение. Определим устойчивость по критерию Найквиста.

Частотная передаточная функция разомкнутой системы определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(j\omega) &= W^*(z)|_{z=e^{j0,1\omega}} = \frac{0,5(e^{j0,1\omega} + 0,7)}{e^{j0,2\omega} - 1,2e^{j0,1\omega} + 0,35} = \\ &= \frac{0,5(\cos 0,1\omega + 0,7 + j \sin 0,1\omega)}{\cos 0,2\omega - 1,2 \cos 0,1\omega + 0,35 + j(\sin 0,2\omega - 1,2 \sin 0,1\omega)}. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$u_1 = \cos 0,1\omega + 0,7, \quad v_1 = \sin 0,1\omega,$$

$$u_2 = \cos 0,2\omega - 1,2 \cos 0,1\omega + 0,35,$$

$$v_2 = (\sin 0,2\omega - 1,2 \sin 0,1\omega),$$

выпишем отдельно вещественную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} \widetilde{W}(j\omega) = \frac{0,5(u_1 u_2 + v_1 v_2)}{u_2^2 + v_2^2},$$

$$\operatorname{Im} \widetilde{W}(j\omega) = \frac{0,5(v_1 u_2 + u_1 v_2)}{u_2^2 + v_2^2}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (рис. 7.3) не охватывает точку  $(-1, j0)$ . Разомкнутая система устойчива, так как

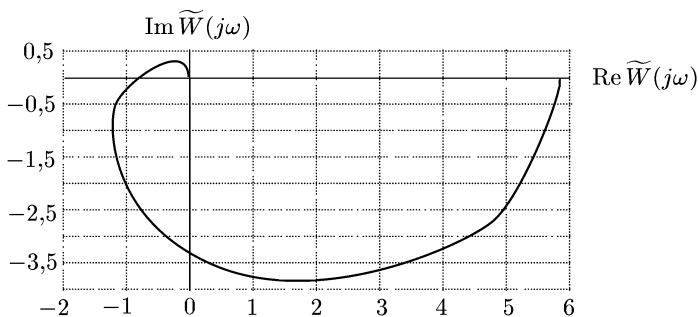


Рис. 7.3. АФЧХ

нули  $z_1 = 0,7$  и  $z_2 = 0,5$  характеристического полинома разомкнутой системы  $Q^*(z) = z^2 - 1,2z + 0,35$  по модулю меньше единицы. Следовательно, замкнутая система устойчива.

**7.3.3. Псевдочастотный критерий.** Как было показано, применив преобразование  $z = \frac{1+v}{1-v}$ , при определении устойчивости дискретных систем можно воспользоваться всеми методами исследования устойчивости непрерывных систем. Подставим это выражение в передаточную функцию разомкнутой дискретной системы  $W^*(z)$ :

$$\widetilde{W}^*(v) = W^*\left(\frac{1+v}{1-v}\right).$$

Положив  $v = j\omega^*$  (иногда делают подстановку  $v = jT\omega^*/2$ ), получим функцию

$$\widetilde{W}^*(j\omega^*) = W^*\left(\frac{1+j\omega^*}{1-j\omega^*}\right).$$

Переменная  $\omega^*$  не имеет физического смысла частоты, функция  $\widetilde{W}^*(j\omega^*)$  — физического смысла частотных передаточных функций непрерывных и дискретных систем. Переменную  $\omega^*$  называют *псевдочастотой*, функцию  $\widetilde{W}^*(j\omega^*)$  — *псевдочастотной передаточной функцией*, а характеристики (амплитудно-фазовые, логарифмические и другие), которые строятся на основе  $\widetilde{W}^*(j\omega^*)$ , называют *псевдочастотными характеристиками*.

С использованием псевдочастотной характеристики (т. е. годографа  $\widetilde{W}^*(j\omega^*)$  при изменении  $\omega^*$  от 0 до  $\infty$ ) критерий устойчивости Найквиста формулируется так же, как и в случае непрерывных систем. Точно так же совпадают формулировки логарифмического псевдочастотного критерия устойчивости дискретных систем и логарифмического частотного критерия устойчивости непрерывных систем.

## 7.4. Влияние квантования по времени на устойчивость

Рассмотрим влияние дискретизации по времени на устойчивость на примере АИМ-системы, состоящей из фиксатора нулевого порядка и непрерывной части сначала с передаточной функцией  $W_n(s) = \frac{k}{T_0 s + 1}$ , а затем с  $W_n(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ . Система без дискретного элемента, т. е. непрерывная система, устойчива при любом положительном  $k$  в обоих случаях.

В первом случае передаточная функция приведенной непрерывной части есть

$$W_n(s) = \frac{k(1 - e^{-Ts})}{s(T_0 s + 1)},$$

и дискретная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} W^*(z) = W_n^*(z) = Z_T\{W_n(s)\} &= \frac{k(z-1)}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s(T_0 s + 1)}\right\} = \\ &= \frac{k(z-1)}{z} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{T/T_0}}\right) = \frac{k(1 - e^{T/T_0})}{z - e^{T/T_0}}. \end{aligned}$$

Отсюда для характеристического уравнения замкнутой системы имеем

$$z - e^{-T/T_0} + k(1 - e^{-T/T_0}) = 0.$$

Коэффициенты преобразованного характеристического уравнения (см. (7.10а)) равны

$$c_0 = a_0 - a_1 = 1 + e^{-T/T_0} - k(1 - e^{-T/T_0}),$$

$$c_1 = a_0 + a_1 = 1 - e^{-T/T_0} + k(1 - e^{-T/T_0}),$$

и условие устойчивости принимает вид

$$c_0 = 1 + e^{-T/T_0} - k(1 - e^{-T/T_0}) > 0,$$

$$c_1 = 1 - e^{-T/T_0} + k(1 - e^{-T/T_0}) > 0.$$

Второе неравенство выполняется при любом положительном  $k$ , а первое — только при  $k < k_r$ , где  $k_r$  — граничный передаточный коэффициент системы, определяемый из условия  $c_0 = 0$ :

$$k_r = \frac{1 + e^{-T/T_0}}{1 - e^{-T/T_0}}.$$

При малом периоде ( $T/T_0 \ll 1$ ), положив  $e^{-T/T_0} \cong 1 - T/T_0$ , получим

$$k_r = \frac{2T_0}{T} - 1. \quad (7.19)$$

Из этого равенства следует:  $k_r \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow 0$ . Однако при конечном периоде, как бы он ни был мал, дискретная система устойчива не при любом передаточном коэффициенте системы.



Теперь рассмотрим случай, когда передаточная функция непрерывной части имеет вид  $W_{\text{н}}(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$ .

Передаточная функция приведенной непрерывной части есть

$$W_{\text{п}}(s) = \frac{k(1 - e^{-Ts})}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

и дискретная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W^*(z) = Z_T\{W_{\text{п}}(s)\} = \frac{k(z-1)}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}\right\} = \\ = k \frac{b_1 z + b_2}{d_0 z^2 + d_1 z + d_0},$$

где

$$b_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-T/T_2} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-T/T_1} + 1, \\ b_2 = e^{-(T/T_1 + T/T_2)} + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-T/T_2} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-T/T_1}, \\ d_0 = 1, \quad d_1 = -(e^{-T/T_2} + e^{-T/T_1}), \quad d_2 = e^{-(T/T_1 + T/T_2)}.$$

При малом периоде ( $T/T_k \ll 1$ ,  $k = 1, 2$ ), воспользовавшись представлением  $e^{-x} \cong 1 - x + x^2/2$ , получим

$$b_1 = \frac{T^2}{2T_1 T_2}, \quad b_2 = \frac{T^2}{2T_1 T_2}, \\ d_1 = -2 + \frac{T(T_1 + T_2)}{T_1 T_2} - \frac{T^2(T_1^2 + T_2^2)}{2T_1^2 T_2^2}, \\ d_2 = 1 - \frac{T(T_1 + T_2)}{T_1 T_2} + \frac{T^2(T_1 + T_2)^2}{2T_1^2 T_2^2}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0.$$

Здесь

$$a_0 = kb_0 + d_0 = 1, \\ a_1 = kb_1 + d_1 = k \frac{T^2}{2T_1 T_2} - 2 + \frac{T(T_1 + T_2)}{T_1 T_2} - \frac{T^2(T_1^2 + T_2^2)}{2T_1^2 T_2^2}, \\ a_2 = kb_2 + d_2 = k \frac{T^2}{2T_1 T_2} + 1 - \frac{T(T_1 + T_2)}{T_1 T_2} + \frac{T^2(T_1 + T_2)^2}{2T_1^2 T_2^2}.$$

Коэффициенты преобразованного характеристического уравнения (см. (7.106)) и условие устойчивости имеют вид

$$c_0 = a_0 - a_1 + a_2 = 4 - 2 \frac{T(T_1 + T_2)}{T_1 T_2} + \frac{T^2(T_1^2 + T_1 T_2 + T_2^2)}{T_1^2 T_2^2} > 0, \\ c_1 = 2(a_0 - a_2) = 2 \left( -\frac{kT^2}{2T_1 T_2} + \frac{T(T_1 + T_2)}{T_1 T_2} - \frac{T^2(T_1^2 + T_2^2)}{2T_1^2 T_2^2} \right) > 0, \\ c_2 = a_0 + a_1 + a_2 = (k + 1) \frac{T^2}{T_1 T_2} > 0.$$

Первое и третье неравенства выполняются при любом положительном передаточном коэффициенте  $k$ , второе — только при  $k < k_{\Gamma}$ , где граничный передаточный коэффициент

$$k_{\Gamma} = \frac{2(T_1 + T_2)}{T} - \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_1 T_2}. \quad (7.20)$$

Из формулы (7.20) следует:  $k_{\Gamma} \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow 0$ .

Итак, дискретизация по времени может привести к неустойчивости даже системы 1-го и 2-го порядка. При этом, как и следовало ожидать, граничный передаточный коэффициент с уменьшением периода квантования увеличивается и стремится к бесконечности с приближением периода к нулю.

## Задачи

**1.** Исследовать устойчивость системы, у которой характеристическое уравнение имеет следующий вид:

а)  $z^3 + 0,6z^2 + 0,11z + 0,006 = 0$ ; б)  $z^3 - 0,6z^2 + 0,11z - 0,006 = 0$ ;

в)  $z^3 - 0,9z^2 + 0,26z - 0,024 = 0$ ; г)  $z^3 - 3z^2 + 2,81z - 0,84 = 0$ ;

д)  $z^3 - 2,3z^2 + 0,62z + 0,04 = 0$ ; е)  $z^3 - 1,2z^2 + 0,47z + 0,06 = 0$ ;

ж)  $z^4 + z^3 + 0,35z^2 + 0,05z + 0,0024 = 0$ ;

з)  $z^4 + 1,4z^3 + 0,71z^2 + 0,154z + 0,012 = 0$ ;

и)  $z^4 + 2,4z^3 + 1,61z^2 + 0,414z + 0,036 = 0$ ;

к)  $z^4 + 1,8z^3 + 1,19z^2 + 0,342z + 0,036 = 0$ .

**2.** Исследовать устойчивость разомкнутой и замкнутой систем при условии, что передаточная функция разомкнутой системы имеет следующий вид:

а)  $W^*(z) = \frac{0,01z + 0,003}{z^3 + 0,6z^2 + 0,1z + 0,003}$ ;

б)  $W^*(z) = \frac{0,13z - 0,012}{z^3 - 0,9z^2 + 0,13z - 0,012}$ ;

в)  $W^*(z) = \frac{0,14z - 0,1}{z^3 - 1,5z^2 + 0,6z - 0,02}$ ;

г)  $W^*(z) = \frac{0,31z - 0,02}{z^3 - 2,3z^2 + 0,31z - 0,02}$ ;

д)  $W^*(z) = \frac{0,22z - 0,3}{z^3 - 3,7z^2 + 2z - 0,06}$ ;

е)  $W^*(z) = \frac{0,07z - 0,01}{z^3 - 1,8z^2 + z - 0,2}$ .

**3.** Исследовать устойчивость цифровой системы управления, у которой период следования  $T = 0,05$  и передаточные функции регулятора (дискретного фильтра) и непрерывной части имеют следующий вид:

$$\text{а) } W_p^*(z) = \frac{2z-1}{z-1}, \quad W_n(s) = \frac{10}{0,1s+1};$$

$$\text{б) } W_p^*(z) = \frac{2z-1}{z-1}, \quad W_n(s) = \frac{2}{s^2+3s+2};$$

$$\text{в) } W_p^*(z) = 2 + \frac{0,1(z-1)}{z}, \quad W_n(s) = \frac{10}{0,1s+1};$$

$$\text{г) } W_p^*(z) = 2 + \frac{0,1(z-1)}{z} + \frac{5z}{z-1}, \quad W_n(s) = \frac{10}{0,1s+1}.$$

**4.** Исследовать устойчивость ШИМ-системы управления, у которой период следования импульсов  $T = 0,05$ , амплитуда  $A_{\text{и}} = 1$ , коэффициент модуляции  $\chi = 0,05$  и передаточная функция непрерывной части имеет следующий вид:

$$\text{а) } W_n(s) = \frac{10}{s+1}; \quad \text{б) } W_n(s) = \frac{10}{s(s+1)}; \quad \text{в) } W_n(s) = \frac{10}{s^2+s+1}.$$

**5.** Дискретный элемент АИМ-системы вырабатывает прямоугольные импульсы с периодом  $T = 0,1$ , амплитудой  $A_{\text{и}} = 1$  и относительной длительностью  $\gamma$ . Передаточная функция непрерывной части

$$W_n(s) = \frac{k}{T_0s+1}.$$

Определить граничное значение передаточного коэффициента  $k$  при следующих значениях параметров  $T_0$  и  $\gamma$ :

$$\text{а) } T_0 = 0,5; \quad \gamma = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1;$$

$$\text{б) } \gamma = 0,5; \quad T_0 = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1.$$

**6.** Определить граничное значение передаточного коэффициента цифровой системы, у которой период квантования  $T = 0,05$  и передаточные функции регулятора (дискретного фильтра) и непрерывной части имеют следующий вид:

$$\text{а) } W_p^*(z) = \frac{2z-1}{z-1}, \quad W_n(s) = \frac{k}{0,1s+1};$$

$$\text{б) } W_p^*(z) = \frac{2z-1}{z-1}, \quad W_n(s) = \frac{k}{s^2+2s+1};$$

$$\text{в) } W_p^*(z) = 2 + \frac{0,1(z-1)}{z}, \quad W_n(s) = \frac{k}{s+1}.$$

**7.** Определить граничное значение передаточного коэффициента ШИМ-системы, у которой период квантования  $T = 0,05$ , амплитуда  $A_{\text{и}} = 1$ , коэффициент модуляции  $\chi = 0,05$  и передаточная функция непрерывной части имеет следующий вид:

$$\text{а) } W_n(s) = \frac{k}{s+1}; \quad \text{б) } W_n(s) = \frac{k}{s(s+1)}; \quad \text{в) } W_n(s) = \frac{k}{s^2+s+1}.$$

## Глава 8

### ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Качество дискретных систем управления определяется так же, как и качество непрерывных систем, и для его оценки можно использовать все ранее введенные показатели качества в переходном и установившемся режимах или их аналоги.

#### 8.1. Показатели качества в переходном режиме

Показатели качества в переходном режиме делятся на прямые и косвенные. *Прямыми показателями качества* называются числовые показатели, которые определяются по переходной характеристике. Показатели качества, определяемые не по переходной характеристике, называются *косвенными*.

**8.1.1. Прямые показатели качества.** Среди прямых показателей наиболее часто используются время регулирования и перерегулирование. Напомним: *временем регулирования*  $t_p$  называется минимальное время, по истечении которого отклонение переходной

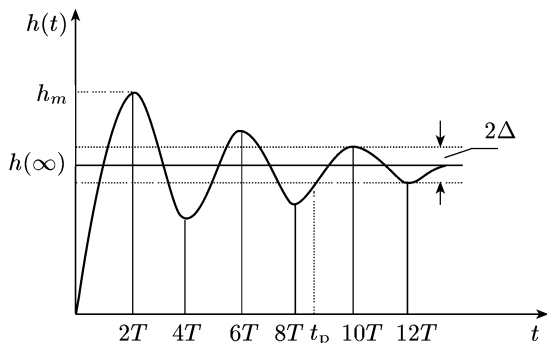


Рис. 8.1. Переходная характеристика

характеристики от установившегося значения  $h(\infty)$  не превышает заданной величины  $\Delta$  (рис. 8.1). Обычно принимают  $\Delta = (0,02 - 0,1)h(\infty)$ .

*Перерегулированием*  $\sigma$  называют максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения, выраженное в процентах к установившемуся значению:

$$\sigma = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100 \, \%.$$

Для графического определения прямых показателей качества необходимо иметь переходную характеристику. Ее можно построить по дискретной переходной функции  $h[lT]$ , соединяя дискретные точки плавной кривой.

Рассмотрим вычисление переходной функции. По определению переходная функция  $h[lT]$  есть функция, которая описывает реакцию системы на единичное воздействие  $g[lT] = 1[lT]$  при нулевых начальных условиях. И так как  $z$ -изображение от единичной решетчатой функции имеет вид  $G^*(z) = Z\{1[lT]\} = z/(z-1)$ ,  $z$ -изображение переходной функции равно

$$H^*(z) = W_{yg}^*(z)G^*(z) = W_{yg}^*(z) \frac{z}{z-1},$$

где  $W_{yg}^*(z)$  — передаточная функция относительно входа  $g[lT]$  и выхода  $y[lT]$ .

Изображение переходной функции есть отношение полиномов:

$$H^*(z) = \frac{B^*(z)}{A^*(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (m \leq n).$$

С другой стороны, по определению  $z$ -преобразования

$$H^*(z) = \sum_{l=0}^{\infty} h[lT] z^{-l}.$$

Поэтому значения переходной функции  $h[lT]$  можно найти, разложив  $H^*(z)$  в ряд Лорана путем деления числителя  $B^*(z)$  на знаменатель  $A^*(z)$  по правилу деления многочленов. При этом в многочленах  $B^*(z)$  и  $A^*(z)$  слагаемые должны располагаться в порядке убывания степени  $z$ .

**Пример 8.1.** Определить значения переходной функции  $h[lT]$  ( $l = 0, 1, \dots, 5$ ) дискретной системы с передаточной функцией

$$W_{yg}^*(z) = \frac{0,1(z-1)}{z^2 - z + 0,3}.$$

**Решение.**  $z$ -изображение переходной функции имеет вид

$$H^*(z) = W_{yg}^*(z) \frac{z}{z-1} = \frac{0,1 z}{z^2 - z + 0,3}.$$

Произведя деление числителя на знаменатель по правилу деления многочленов, для первых пяти слагаемых получим

$$H^*(z) = 0,1 z^{-1} + 0,1 z^{-2} + 0,07 z^{-3} + 0,04 z^{-4} + 0,061 z^{-5} + \dots$$

Отсюда имеем  $h(0) = 0$ ,  $h(T) = 0,1$ ,  $h(2T) = 0,1$ ,  $h(3T) = 0,07$ ,  $h(4T) = 0,04$ ,  $h(5T) = 0,061$ .

Если разность между степенями знаменателя и числителя равна  $r$ , то первый член разложения  $H^*(z)$  в ряд Лорана будет иметь степень  $z^{-r}$ . Поэтому первые  $r$  значений  $h[lT]$  будут равны нулю:  $h[0] = h[T] = \dots = h[(r-1)T] = 0$ .

Другой способ вычисления переходной функции основан на формуле разложения, которая определяется следующим образом: если все полюсы  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) функции  $H^*(z)$  (т. е. корни уравнения  $A^*(z) = 0$ ) простые и не равны нулю, то [6]

$$h[lT] = \sum_{i=1}^n \frac{B^*(z_i)}{A^{*'}(z_i)} z_i^{l-1}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (8.1)$$

где  $A^{*'}(z_i) = \left. \frac{dA^*(z)}{dz} \right|_{z=z_i}$ .

Начальные значения:  $h[0] = 0$  при  $m < n$  и  $h[0] = \frac{b_0}{a_0}$  при  $m = n$ .

**Пример 8.2.** Определить переходную функцию  $h[lT]$ , если  $z$ -изображение имеет вид

$$H^*(z) = \frac{3z + 1}{z^2 + 5z + 6}.$$

**Решение.** В данном случае  $B^*(z) = 3z + 1$  и  $A^*(z) = z^2 + 5z + 6$ . Производная есть  $A^{*'}(z) = 2z + 5$ , полюсами являются  $z_1 = -2$  и  $z_2 = -3$ . И в соответствии с формулой (8.1)

$$h[lT] = -5(-2)^{l-1} + 8(-3)^{l-1}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Начальное значение  $h[0] = 0$ , так как степень числителя меньше степени знаменателя.

Если  $H^*(z)$  имеет кратные полюсы, то полюсу  $z_j$  кратности  $k_j$  в формуле разложения соответствует слагаемое, определяемое предельным соотношением [6]

$$\frac{1}{(k_j - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_j} \frac{d^{k_j-1}}{dz^{k_j-1}} \left[ (z - z_j)^{k_j} \frac{B^*(z)}{A^*(z)} z^{l-1} \right]. \quad (8.2)$$

Если среди полюсов  $H^*(z)$  имеется нулевой полюс ( $z_j = 0$ ), то при вычислении соответствующего этому полюсу слагаемого следует пользоваться формулой (8.2) и в том случае, когда этот полюс является простым.

**Пример 8.3.** Определить переходную функцию  $h[lT]$ , если ее  $z$ -изображение имеет вид

$$H^*(z) = \frac{z^2 + 2,5z + 1}{z(z-1)^2(z+1)}.$$

**Решение.** В данном случае  $B^*(z) = z^2 + 2,5z + 1$  и  $A^*(z) = z(z-1)^2(z+1)$ . Производная есть  $A^{*'}(z) = 4z^3 - 3z^2 - 2z + 1$ , полюсами являются  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$  и  $z_3 = -1$ . Слагаемое, соответствующее нулевому полюсу ( $z_1 = 0$ ), в соответствии с формулой (8.2)

определяется следующим образом:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[ z \frac{z^2 + 2,5z + 1}{z(z-1)^2(z+1)} z^{l-1} \right] = \begin{cases} 1 & \text{при } l = 1, \\ 0 & \text{при } l > 1. \end{cases}$$

Полус  $z_2 = 1$  имеет кратность 2, и ему соответствует слагаемое

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ (z-1)^2 \frac{z^2 + 2,5z + 1}{z(z-1)^2(z+1)} z^{l-1} \right] = \\ = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^l + 2,5z^{l-1} + z^{l-2}}{z+1} \right] = 2,25l - 3,375. \end{aligned}$$

Полус  $z_3 = -1$  является простым, и ему соответствует слагаемое (см. (8.1))

$$\frac{B^*(-1)}{A^*(-1)} (-1)^{l-1} = 0,125 (-1)^{l-1}.$$

Таким образом, имеем

$$h[T] = 1 + 2,25 - 3,375 + 0,125 = 0,$$

$$h[lT] = 2,25l - 3,375 + 0,125(-1)^{l-1}, \quad l = 2, 3, \dots$$

Начальное значение:  $h[0] = 0$ .

*Вычисление переходной функции между точками съема сигналов.* Функция  $h[lT]$  определяет значения переходной функции в моменты съема сигнала  $t = lT$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). При необходимости можно получить функцию  $h_\tau[lT]$ , которая определяет значения переходной функции в промежуточные моменты времени  $t = (l - \tau/T)$  ( $0 < \tau < T$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ).

Для этого рассмотрим структурную схему (рис. 8.2, б), которая

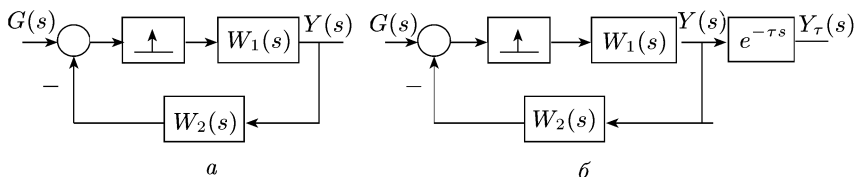


Рис. 8.2. Структурные схемы (к определению переходной функции  $h_\tau[lT]$ ):  
а — исходная схема; б — преобразованная схема

получается из исходной (рис. 8.2, а) подключением на выходе звена чистого запаздывания. Из этих схем имеем

$$W_{yg}^*(z) = \frac{Z_T \{W_1(s)\}}{1 + Z_T \{W_1(s)W_2(s)\}},$$

$$W_{y_\tau g}^*(z) = \frac{Z_T \{W_1(s)e^{-\tau s}\}}{1 + Z_T \{W_1(s)W_2(s)\}}.$$

Так как  $y_\tau(t) = y(t - \tau)$  и при единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях  $y(t) = h(t)$  и  $y_\tau(t) = h_\tau(t)$ , то  $h_\tau(t) = h(t - \tau)$ . Соответственно для  $z$ -изображений переходных функ-

ций  $h[lT]$  и  $h_\tau[lT]$  имеем

$$H^*(z) = Z\{h[lT]\} = \frac{Z_T\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}} \frac{z}{z-1},$$

$$H_\tau^*(z) = Z\{h_\tau[lT]\} = \frac{Z_T\{W_1(s)e^{-\tau s}\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}} \frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{z^{-1}Z_T^\varepsilon\{W_1(s)\}}{1 + Z_T\{W_1(s)W_2(s)\}} \frac{z}{z-1}, \quad (8.3)$$

где  $\varepsilon = 1 - \tau/T$ .

**Пример 8.4.** Пусть в дискретной системе (см. рис. 8.2, а)  $W_1(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)}$ ,  $W_2(s) = 1$  и период следования импульсов  $T = 0,2$ . Требуется определить решетчатую функцию, которая принимает значения переходной функции  $h(t)$  в моменты  $t = (l - \delta)T$ , где  $\delta = 0,25$ ,  $l = 1, 2, \dots$

**Решение.** Искомой функцией будет  $h_\tau[lT]$ , где  $\tau = \delta T = 0,05$ . В данном случае  $\varepsilon = 1 - \delta = 0,75$  и

$$Z_T^\varepsilon\{W_1(s)\} = Z_T^\varepsilon\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)}\right\} = \frac{z}{z-1} Z_T^\varepsilon\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{0,15z + 0,03}{z - 0,82},$$

$$Z_T\{W_1(s)W_2(s)\} = Z_T\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)}\right\} = \frac{z}{z-1} Z_T\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{0,02}{z - 0,82}.$$

Подставив эти выражения в (8.3), получим

$$H_\tau^*(z) = Z\{h_\tau[lT]\} = \frac{0,15z + 0,03}{(z - 0,8)(z - 1)}.$$

Отсюда в соответствии с формулой (8.1)

$$h_\tau[lT] = 0,9 - 0,75(0,8)^{l-1}, \quad l = 1, 2, \dots$$

**8.1.2. Косвенные показатели качества.** Как и в случае непрерывных систем, для оценки качества дискретных систем используются следующие косвенные показатели качества: корневые, частотные и суммарные (аналог интегральных).

*Корневым показателем качества* является степень устойчивости  $\eta^*$ , которая определяется следующим образом:

$$\eta^* = \min_{\nu} \{-\ln |z_\nu|\},$$

где  $z_\nu$  — корни характеристического уравнения. Степень устойчивости является косвенной мерой быстродействия системы.

*Суммарной квадратической ошибкой* называется ряд

$$J_{20}^* = \sum_{l=0}^{\infty} e_{\pi}^2[lT], \quad e_{\pi}[lT] = e[lT] - e_{\infty}[lT].$$

Здесь  $e_{\pi}[lT]$  — переходная составляющая ошибки,  $e[lT]$  — ошибка и  $e_{\infty}[lT]$  — установившаяся ошибка (вынужденная составляющая ошибки).



Частотные показатели — запас устойчивости по амплитуде и запас устойчивости по фазе — определяются точно так же, как и в случае непрерывных систем. Но в случае дискретных систем указанные показатели можно определить как по частотным, так и по псевдочастотным характеристикам. Однако псевдочастотные характеристики не находят широкого применения.

**8.1.3. Особенности переходного процесса дискретных систем.** В непрерывных линейных системах переходная функция всегда принимает установившееся значение при  $t = \infty$ . Однако возможны линейные дискретные системы, в которых переходный процесс заканчивается за конечное число шагов, т. е. существует такое положительное число  $l_0$ , что

$$h[lT] = h[l_0T] = h[\infty] \quad \forall l \geq l_0. \quad (8.4)$$

Если выполняется условие (8.4), то переходный процесс называется *оптимальным*, а система, в которой происходит такой процесс, называется *оптимальной (по переходному процессу) системой*.

Условие оптимальности системы (по переходному процессу). Переходя к оригиналам, из равенства

$$Y^*(z) = W_{yg}^*(z)G^*(z)$$

по теореме о свертке получим

$$y[lT] = \sum_{k=0}^l w_{yg}[kT]g[(l-k)T]. \quad (8.5)$$

По определению переходной функции при  $g[lT] = 1[lT]$  из (8.5) имеем

$$h[lT] = \sum_{k=0}^l w_{yg}[kT]. \quad (8.6)$$

Отсюда следует, что система будет оптимальной по переходному процессу, т. е. будет выполнено условие (8.4), если

$$w_{yg}[lT] = 0 \quad \text{при} \quad k > l_0. \quad (8.7)$$

При выполнении этого условия передаточная функция, связанная с весовой функцией  $z$ -преобразованием, принимает вид

$$W_{yg}^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{yg}[kT]z^{-k} = \sum_{k=0}^{l_0} w_{yg}[kT]z^{-k}. \quad (8.8)$$

В общем случае передаточная функция  $W_{yg}^*(z)$  представляет собой отношение полиномов:

$$W_{yg}^*(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (m \leq n), \quad (8.9)$$

и она при разложении в ряд Лорана примет вид (8.8), если

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0. \quad (8.10)$$

Действительно, в этом случае имеем

$$W_{yg}^*(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{m-n} + \frac{b_1}{a_0} z^{m-n-1} + \dots + \frac{b_m}{a_0} z^{-n}.$$

Таким образом, система (8.9) является оптимальной (переходный процесс в ней заканчивается за конечное число шагов), если выполняется условие (8.10).

**Пример 8.5.** Замкнутая дискретная система состоит из фиксатора нулевого порядка и непрерывной части с передаточной функцией  $W_n(s) = \frac{k}{2s+1}$ , период  $T = 0,1$ . Определить параметр  $k$ , при котором переходный процесс будет оптимальным.

**Решение.** При фиксаторе нулевого порядка передаточная функция формирующего звена имеет вид  $W_\Phi(s) = \frac{1 - e^{Ts}}{s}$ . Поэтому передаточная функция приведенной непрерывной части имеет вид

$$W_\Pi(s) = W_\Phi(s)W_n(s) = \frac{k(1 - e^{Ts})}{s(2s+1)},$$

и передаточная функция разомкнутой дискретной модели равна

$$W_\Pi^*(z) = Z_T\{W_\Pi(s)\} = \frac{k(z-1)}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s(2s+1)}\right\} = \frac{0,05 k}{z - 0,95}.$$

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_\Pi^*(z)}{1 + W_\Pi^*(z)} = \frac{0,05 k}{z - 0,95 + 0,05 k}.$$

Отсюда в соответствии с формулой (8.10) для оптимального  $k$  получаем  $k = \frac{0,95}{0,05} = 19$ .

## 8.2. Показатели качества в установившемся режиме

Наиболее полной характеристикой качества в установившемся режиме является установившаяся ошибка  $e_\infty[lT]$ . Ее можно найти по  $z$ -изображению  $E^*(z)$  на основе теоремы о граничных значениях:

$$e_\infty[lT] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E^*(z).$$

Другим показателем качества в установившемся режиме являются коэффициенты ошибки, которые определяются ниже.

**8.2.1. Коэффициенты ошибки.** Переходя к оригиналам, из равенства

$$E^*(z) = W_{eg}^*(z)G^*(z)$$

по теореме о свертке получим

$$e[lT] = \sum_{k=0}^l w_{eg}[(l-k)T] g[kT].$$

Процесс считается установившимся в текущий момент времени, если входное воздействие начало действовать при  $t_0 = -\infty$ . Поэтому, положив в предыдущей формуле начальное  $k = -\infty$ , получим

$$e_{\infty}[lT] = \sum_{k=-\infty}^l w_{eg}[(l-k)T] g[kT],$$

или, положив  $l - k = i$ , получим

$$e_{\infty}[lT] = \sum_{i=0}^{\infty} w_{eg}[iT] g[(l-i)T]. \quad (8.11)$$

Разложим функцию  $g(t - \tau)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t$ :

$$g(t - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{g^{(k)}(t)}{k!} \tau^k, \quad g^{(k)}(t) = \frac{d^k g(t)}{dt^k}.$$

Произведем дискретизацию по времени, для чего в полученном разложении положим  $t = lT$  и  $\tau = iT$ :

$$g[(l-i)T] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{g^{(k)}[lT]}{k!} (iT)^k.$$

Подставим это выражение в (8.11) и поменяем порядок суммирования. Тогда получим

$$e_{\infty}[lT] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} w_{eg}[iT] (iT)^k \frac{g^{(k)}[lT]}{k!},$$

или

$$e_{\infty}[lT] = \sum_{k=0}^{\infty} C_k g^{(k)}[lT], \quad (8.12)$$

где

$$C_k = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_{eg}[iT] (iT)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.13)$$

Коэффициенты  $C_k$  характеризуют качество системы в установившемся режиме и называются *коэффициентами ошибки*. При этом  $C_0$  называют *коэффициентом позиционной ошибки*,  $C_1$  — *коэффициентом скоростной ошибки* и  $C_2$  — *коэффициентом ошибки по ускорению*.

**8.2.2. Вычисление коэффициентов ошибок.** Вычислять коэффициенты ошибки по формуле (8.13) неудобно. Поэтому обычно используют формулы, связывающие коэффициенты ошибки с пере-

даточнои функцией ошибки  $W_{eg}^*(z)$  и имеющие следующий вид:

$$C_k = \frac{1}{k!} W_{0k}^*(z) \Big|_{z=1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.14)$$

Здесь  $W_{0k}^*(z)$  определяется по рекуррентной формуле

$$W_{00}^*(z) = W_{eg}^*(z), \quad W_{0k}^*(z) = Tz \frac{dW_{0,k-1}^*(z)}{dz}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.15)$$

Из приведенных формул следует, что коэффициент позиционной ошибки  $C_0 = W_{eg}^*(1)$ , и для нахождения остальных коэффициентов необходимо вычислять производные от передаточной функции  $W_{eg}^*(z)$ . Однако, как увидим в следующем параграфе, если коэффициенты ошибки  $C_0 = C_1 = \dots = C_{r-1} = 0$  и  $C_r \neq 0$ , то все эти коэффициенты, включая первый отличный от нуля коэффициент, можно вычислить, не находя производные.

Докажем справедливость приведенных формул.

Формула (8.14) будет справедлива, т.е. будет иметь вид (8.13), если

$$W_{0k}^*(z) = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} w_{eg}[iT] (iT)^k z^{-i}. \quad (8.16)$$

Справедливость этой формулы покажем методом математической индукции.

Учитывая, что передаточная функция  $W_{eg}^*(z)$  и весовая функция  $w_{eg}[iT]$  ошибки связаны соотношением

$$W_{eg}^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{eg}[iT] z^{-i},$$

в соответствии с (8.15) при  $k = 0$  имеем

$$W_{00}^*(z) = W_{eg}^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} w_{eg}[iT] z^{-i}.$$

Отсюда следует, что формула (8.16) при  $k = 0$  справедлива. Допустим, что она справедлива при  $k = m - 1$ :

$$W_{0,m-1}^*(z) = (-1)^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} w_{eg}[iT] (iT)^{m-1} z^{-i},$$

или

$$W_{0,m-1}^*(z) = Z \{ (-1)^{m-1} w_{eg}[iT] (iT)^{m-1} \}.$$

Покажем, что она справедлива и при  $k = m$ .

В соответствии с формулой (8.15)

$$W_{0m}^*(z) = Tz \frac{dW_{0,m-1}^*(z)}{dz}.$$

Отсюда, учитывая принятую выше формулу для  $W_{0,m-1}^*(z)$  и свойство  $z$ -преобразования об умножении оригинала на  $iT$  (см. (6.15)), получаем

$$\begin{aligned}
 W_{0m}^*(z) &= -Z\{[(-1)^{m-1}w_{eg}[iT](iT)^{m-1}]iT\} = \\
 &= (-1)^m Z\{w_{eg}[iT](iT)^m\} = (-1)^m \sum_{i=0}^{\infty} w_{eg}[iT](iT)^m z^{-i},
 \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость формулы (8.16) при  $k = m$ .

Пример 8.6. Передаточная функция ошибки  $W_{eg}^*(z) = \frac{1}{z - 0,5}$ , период  $T = 0,1$ . Определить коэффициенты ошибки  $C_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$ .

Решение. Согласно формулам (8.14) и (8.15) имеем

$$\begin{aligned}
 C_0 &= W_{eg}^*(z)|_{z=1} = \frac{1}{z - 0,5}|_{z=1} = 2, \\
 W_{01}^*(z) &= Tz \frac{dW_{eg}^*(z)}{dz} = 0,1z \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z - 0,5} \right) = -\frac{0,1z}{(z - 0,5)^2}, \\
 C_1 &= W_{01}^*(z)|_{z=1} = -\frac{0,1z}{(z - 0,5)^2}|_{z=1} = -0,4, \\
 W_{02}^*(z) &= Tz \frac{dW_{01}^*(z)}{dz} = 0,1z \frac{d}{dz} \left( \frac{0,1z}{(z - 0,5)^2} \right) = -\frac{0,01z(z + 0,5)}{(z - 0,5)^3}, \\
 C_2 &= W_{02}^*(z)|_{z=1} = -\frac{0,01z(z + 0,5)}{(z - 0,5)^3}|_{z=1} = 0,12.
 \end{aligned}$$

### 8.3. Статические и астатические системы

Система называется *статической*, если статическая ошибка отлична от нуля, и *астатической*, если статическая ошибка равна нулю. *Статическая ошибка* — это установившаяся ошибка при постоянных внешних воздействиях.

Система является астатической и обладает *астатизмом  $r$ -го порядка*, если первые  $r$  коэффициентов равны нулю, а  $(r + 1)$ -й коэффициент ошибки отличен от нуля:

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{r-1} = 0, \quad C_r \neq 0.$$

**8.3.1. Вычисление коэффициентов ошибки астатических систем.** Для астатической системы с астатизмом  $r$ -го порядка первые  $r + 1$  коэффициентов можно определить по формуле

$$C_k = \frac{T^k W_{eg}^*(z)}{(z - 1)^k} \Big|_{z=1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r. \quad (8.17)$$

Иначе говоря, этой формулой можно пользоваться при вычислении до первого отличного от нуля коэффициента ошибки.

Докажем формулу (8.17).

В соответствии с соотношением (8.15)

$$W_{01}^*(z) = Tz \frac{dW_{eg}^*(z)}{dz}, \quad (8.18a)$$

$$W_{02}^*(z) = Tz \frac{dW_{01}^*(z)}{dz} = Tz \left( T \frac{dW_{eg}^*(z)}{dz} + Tz \frac{d^2 W_{eg}^*(z)}{dz^2} \right) = \\ = T^2 \left( z \frac{dW_{eg}^*(z)}{dz} + z^2 \frac{d^2 W_{eg}^*(z)}{dz^2} \right), \quad (8.18б)$$

$$W_{03}^*(z) = Tz \frac{dW_{02}^*(z)}{dz} = T^3 \left( z \frac{dW_{eg}^*(z)}{dz} + \right. \\ \left. + 3z^2 \frac{d^2 W_{eg}^*(z)}{dz^2} + z^3 \frac{d^3 W_{eg}^*(z)}{dz^3} \right), \quad (8.18в)$$

$$\dots\dots\dots W_{0r}^*(z) = T^r \left( z \frac{dW_{eg}^*(z)}{dz} + \dots + z^r \frac{d^r W_{eg}^*(z)}{dz^r} \right). \quad (8.18г)$$

Из этих формул следует, что первые  $r$  коэффициентов будут равны нулю  $\left( C_k = \frac{1}{k!} W_{0k}^*(z) \Big|_{z=1} = 0, \quad r = 0, 1, \dots, r-1 \right)$ , а  $r$ -й коэффициент ошибки не равен нулю ( $C_r \neq 0$ ) при условии

$$W_{00}^*(1) = W_{eg}^*(1) = 0, \quad \frac{dW_{eg}^*(1)}{dz} = 0, \quad \dots \\ \dots, \quad \frac{d^{r-1} W_{eg}^*(1)}{dz^{r-1}} = 0, \quad \frac{d^r W_{eg}^*(1)}{dz^r} \neq 0. \quad (8.19)$$

Последнее возможно, если  $z = 1$  является нулем кратности  $r$  передаточной функции  $W_{eg}^*(z)$ , т.е. возможно представление

$$W_{eg}^*(z) = (z-1)^r W_{eg}^{*0}(z), \quad W_{eg}^{*0}(1) \neq 0. \quad (8.20)$$

Подставим это выражение в (8.17):

$$C_k = \frac{T^k W_{eg}^*(z)}{(z-1)^k} \Big|_{z=1} = \frac{T^k (z-1)^r W_{eg}^{*0}(z)}{(z-1)^k} \Big|_{z=1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

При  $k < r$  выражение справа обращается в нуль. Следовательно, эта формула при  $k = 0, 1, \dots, r-1$  справедлива. Покажем, что она справедлива и при  $k = r$ .

Из (8.18г) и (8.19) получаем

$$W_{0r}^*(z) \Big|_{z=1} = T^r z^r \frac{d^r W_{eg}^*(z)}{dz^r} \Big|_{z=1} = T^r \frac{d^r W_{eg}^*(z)}{dz^r} \Big|_{z=1}. \quad (8.21)$$

Продифференцируем (8.20)  $r$  раз:

$$\frac{dW_{eg}^*(z)}{dz} = r(z-1)^{r-1} W_{eg}^{*0}(z) + (z-1)^r \frac{dW_{eg}^{*0}(z)}{dz}, \\ \frac{d^2 W_{eg}^*(z)}{dz^2} = r(r-1)(z-1)^{r-2} W_{eg}^{*0}(z) + \\ + 2r(z-1)^{r-1} \frac{dW_{eg}^{*0}(z)}{dz} + (z-1)^r \frac{d^2 W_{eg}^{*0}(z)}{dz^2}, \\ \dots\dots\dots \frac{d^r W_{eg}^*(z)}{dz^r} = r! W_{eg}^{*0}(z) + R^*(z), \quad (8.22)$$

где  $R^*(z)|_{z=1} = 0$ . Используя (8.21) и (8.22), из (8.14) имеем

$$C_r = \frac{1}{r!} W_{0r}^*(z)|_{z=1} = T^r W_{eg}^{*0}(z)|_{z=1} = T^r \frac{W_{eg}^*(z)}{(z-1)^r} \Big|_{z=1}.$$

Справедливость формулы (8.17) полностью доказана.

**Пример 8.7.** Задающее воздействие  $g = 0,5t$ , передаточная функция ошибки относительно задающего воздействия имеет вид

$$W_{eg}^*(z) = \frac{(z-1)(z-0,9)}{(z-1)(z-0,9) + 0,1z - 0,95},$$

период  $T = 0,05$ . Определить установившуюся ошибку.

**Решение.** Так как

$$\dot{g}(t) = 0,5, \quad \ddot{g}(t) = \ddot{\ddot{g}}(t) = \dots = 0,$$

то

$$g[lT] = 0,5lT, \quad \dot{g}[lT] = 0,5, \quad \ddot{g}[lT] = \ddot{\ddot{g}}[lT] = \dots = 0,$$

и установившаяся ошибка

$$e_\infty[lT] = C_0 g[lT] + C_1 \dot{g}[lT] = C_0 0,5lT + C_1 0,5.$$

Найдем коэффициенты ошибки  $C_0$  и  $C_1$ . В соответствии с формулами (8.14) и (8.15)

$$C_0 = W_{eg}^*(z)|_{z=1} = \frac{(z-1)(z-0,9)}{(z-1)(z-0,9) + 0,1z - 0,95} \Big|_{z=1} = 0.$$

Так как  $C_0 = 0$ , то  $C_1$  можно определить по формуле (8.17):

$$C_1 = \frac{TW_{eg}^*(z)}{z-1} \Big|_{z=1} = \frac{T(z-0,9)}{(z-1)(z-0,9) + 0,1z - 0,95} \Big|_{z=1} \cong -0,118.$$

Установившаяся ошибка есть  $e_\infty[lT] = -0,118 \cdot 0,5 = -0,059$ .

**8.3.2. Структура астатических систем.** Как было показано выше, система обладает астатизмом  $r$ -го порядка, если передаточная функция ошибки  $W_{eg}^*(z)$  может быть представлена в виде

$$W_{eg}^*(z) = (z-1)^r W_{eg}^{*0}(z), \quad W_{eg}^{*0}(1) \neq 0.$$

Так как передаточная функция ошибки имеет вид

$$W_{eg}^*(z) = \frac{1}{1 + W^*(z)},$$

где  $W^*(z)$  — передаточная функция разомкнутой системы, то она может быть представлена в указанном выше виде, если передаточная функция  $W^*(z)$  имеет вид

$$W^*(z) = \frac{W^{*0}(z)}{(z-1)^r}, \quad W^{*0}(1) \neq 0, \quad W^{*0}(1) < \infty. \quad (8.23)$$

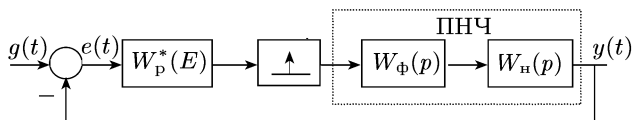


Рис. 8.3. Структурная схема дискретной системы

Пусть дискретная система состоит из дискретного фильтра (регулятора) и приведенной непрерывной части (рис. 8.3) Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W^*(z) = W_p^*(z)W_n^*(z),$$

где

$$W_n^*(z) = Z_T\{W_\phi(s)W_n(s)\}.$$

Система будет астатической, если  $W_p^*(z)$  или  $W_n^*(z)$  включает множитель  $\frac{1}{z-1}$ . Так как  $Z_T\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{z}{z-1}$ , передаточная функция  $W_n^*(z)$  будет содержать указанный множитель, если непрерывная часть (т.е.  $W_n(s)$ ) включает интегрирующее звено. Здесь важно, чтобы непрерывная часть, а не приведенная непрерывная часть, включала интегрирующее звено. Это связано с тем, что множитель  $z-1$  в знаменателе  $W_n^*(z)$ , который появляется из-за интегрирующего звена в формирователе, сокращается с аналогичным множителем, появляющимся в числителе.

Например, при фиксаторе нулевого порядка передаточная функция формирователя имеет вид  $W_\phi(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$ , и

$$W^*(z) = Z_T\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} W_n(s)\right\} = \frac{z-1}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s} W_n(s)\right\}.$$

Как видим, в этом случае появляется множитель  $z-1$  в числителе, который сокращается с таким же множителем в знаменателе, появляющимся из-за множителя  $1/s$  в передаточной функции приведенной непрерывной части.

Как увидим дальше на примере, то же самое происходит, когда передаточная функция формирующего звена имеет вид  $W_\phi(s) = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s}$ .

Итак, дискретная система (см. рис. 8.3) будет астатической, если передаточная функция дискретного фильтра (регулятора) включает множитель  $1/(z-1)$  или непрерывная часть содержит интегрирующее звено. Порядок астатизма системы равен сумме числа интегрирующих звеньев в непрерывной части и показателю степени  $z-1$  в знаменателе дискретного фильтра.

**Пример 8.8.** Пусть (см. рис. 8.3)

$$W_p^*(z) = k, \quad W_\phi(s) = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s}, \quad W_n(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Показать, что данная система является статической.



Решение. Найдем передаточную функцию разомкнутой дискретной системы. Положим  $W_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ . Передаточная функция разомкнутой дискретной системы

$$W^*(z) = W_p^*(z) \cdot Z_T \left\{ \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s(s+1)} \right\} = k \left( Z_T \{W_0(s)\} - z^{-1} Z_T^\varepsilon \{W_0(s)\} \right),$$

где  $\varepsilon = 1 - \gamma$  и

$$Z_T \{W_0(s)\} = \frac{z(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})},$$

$$Z_T^\varepsilon \{W_0(s)\} = \frac{z[z - e^{-T} - e^{-\varepsilon T}(z-1)]}{(z-1)(z - e^{-T})}.$$

Подставив эти выражения, для передаточной функции разомкнутой системы получим

$$W^*(z) = \frac{k(e^{-\varepsilon T} - e^{-T})}{z - e^{-T}}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы не содержит в знаменателе множитель  $z - 1$ . Следовательно, данная система является статической.

Пример 8.9. Пусть в дискретной системе (см. рис. 8.3)

$$W_p^*(z) = k_p \left( 1 + \frac{z+1}{z-1} \right), \quad W_\Phi(s) = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s}, \quad W_n(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}.$$

Задающее воздействие  $g(t) = at + b$ . Определить установившуюся ошибку.

Решение. В данном случае установившаяся ошибка определяется по формуле

$$e_\infty[lT] = C_0 g[lT] + C_1 \dot{g}[lT].$$

Передаточная функция регулятора содержит в знаменателе множитель  $z - 1$  в первой степени, и непрерывная часть содержит одно интегрирующее звено. Поэтому система обладает астатизмом второго порядка и  $C_0 = C_1 = 0$ . Следовательно,  $e_\infty[lT] = 0$ .

## Задачи

1. Определить переходную функцию  $h[lT]$  по ее  $z$ -изображению:

а)  $H^*(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z-0,5)}$ ; б)  $H^*(z) = \frac{z(z+0,5)}{(z-1)(z-0,1)}$ ;

в)  $H^*(z) = \frac{z^2 + 2z + 0,5}{(z-1)(z+0,5)(z-0,2)}$ ; г)  $H^*(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z(z-0,5)(z+0,1)}$ ;

д)  $H^*(z) = \frac{z(z+0,5)}{(z-1)^2(z-0,1)}$ ; е)  $H^*(z) = \frac{z(z^2 + z + 1)}{(z-0,5)^2(z-0,5)^2}$ .

2. Определить переходную функцию  $h[lT]$  дискретной системы, у которой передаточная функция имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{а) } W_{yg}^*(z) &= \frac{z-1}{z(z-0,5)}; & \text{б) } W_{yg}^*(z) &= \frac{z+1}{z(z-0,1)}; \\ \text{в) } W_{yg}^*(z) &= \frac{z+0,5}{z^2-z+0,25}; & \text{г) } W_{yg}^*(z) &= \frac{z+1}{z^2-z+0,75}; \\ \text{д) } W_{yg}^*(z) &= \frac{z-0,5}{(z-0,2)(z-0,1)}; & \text{е) } W_{yg}^*(z) &= \frac{z+2}{z(z-0,8)(z-0,9)}. \end{aligned}$$

3. Задана дискретная система (см. рис. 8.3), у которой период квантования  $T = 0,2$ , а формирующее звено — фиксатор нулевого порядка. Определить функцию  $h_\tau[lT]$ , принимающую значения переходной функции  $h(t)$  в моменты  $t = (l-0,7)T$  при следующих передаточных функциях  $W_p(E)$  и  $W_n(p)$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } W_p^*(E) &= 2, & W_n(p) &= \frac{0,5}{p+1}; \\ \text{б) } W_p^*(E) &= 2, & W_n(p) &= \frac{0,5}{p(p+1)}; \\ \text{в) } W_p^*(E) &= 2, & W_n(p) &= \frac{0,5}{(p+2)(p+1)}; \\ \text{г) } W_p^*(E) &= 2 + \frac{E-1}{E}, & W_n(p) &= \frac{0,5}{p(p+1)}; \\ \text{д) } W_p^*(E) &= 2 + \frac{E-1}{E}, & W_n(p) &= \frac{0,5}{(p+2)(p+1)}; \\ \text{е) } W_p^*(E) &= 2 + \frac{E}{E-1}, & W_n(p) &= \frac{0,5}{p+1}. \end{aligned}$$

4. Определить параметры регулятора дискретной системы (см. рис. 8.3), при которых переходный процесс заканчивается за конечное число шагов. Передаточные функции  $W_p^*(z)$  и  $W_n^*(z) = Z_T \{W_\Phi W_n\}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{а) } W_p^*(z) &= k_\Pi, & W_n^*(z) &= \frac{0,1}{z-0,9}; \\ \text{б) } W_p^*(z) &= k_\Pi + \frac{k_\Delta(z-1)}{z}, & W_n^*(z) &= \frac{z}{z^2-z+0,5}; \\ \text{в) } W_p^*(z) &= k_\Pi + \frac{k_\Delta z}{z-1}, & W_n^*(z) &= \frac{0,1(z-1)}{z^2-z+0,5}; \\ \text{г) } W_p^*(z) &= k_\Pi + \frac{k_\Delta(z-1)}{z} + \frac{k_\Delta z}{z-1}, & W_n^*(z) &= \frac{0,1(z-1)}{(z-0,9)(z-0,8)}; \\ \text{д) } W_p^*(z) &= k_\Pi + \frac{k_\Delta(z-1)}{z} + \frac{k_\Delta z}{z-1}, & W_n^*(z) &= \frac{0,1z}{(z-0,7)(z-0,8)}; \\ \text{е) } W_p^*(z) &= k_\Pi + \frac{k_\Delta(z-1)}{z} + \frac{k_\Delta z}{z-1}, & W_n^*(z) &= \frac{0,1z(z-1)}{(z-0,9)(z-0,8)(z-0,7)}. \end{aligned}$$

**5.** Определить установившуюся ошибку дискретной системы (см. рис. 8.3) при следующих задающем воздействии  $g(t)$  и передаточных функциях  $W_p^*(z)$  и  $W_n^*(z) = Z_T\{W_\Phi(s)W_H(s)\}$ :

$$\text{а) } W_p^*(z) = 5, \quad W_n^*(z) = \frac{0,1}{z - 0,9}, \quad g(t) = 0,5;$$

$$\text{б) } W_p^*(z) = 5 + \frac{2(z-1)}{z}, \quad W_n^*(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0,5}, \quad g(t) = 0,5;$$

$$\text{в) } W_p^*(z) = 5 + \frac{0,1z}{z-1}, \quad W_n^*(z) = \frac{0,1z}{z^2 - z + 0,5}, \quad g(t) = 0,5t;$$

$$\text{г) } W_p^*(z) = 5 + \frac{2(z-1)}{z} + \frac{0,1z}{z-1}, \quad W_n^*(z) = \frac{0,1z}{z^2 - 1,7z + 0,72}, \\ g(t) = 0,5t.$$

**6.** Определить, при каких из приведенных ниже передаточных функциях регулятора  $W_p^*(E)$  и приведенной непрерывной части  $W_n(s)$  дискретная система (см. рис. 8.3) является астатической:

$$\text{а) } W_p^*(E) = 5 + \frac{2(E-1)}{E}, \quad W_n(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)};$$

$$\text{б) } W_p^*(E) = 5 + \frac{0,1E}{E-1}, \quad W_n(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)};$$

$$\text{в) } W_p^*(E) = 5 + \frac{2(E-1)}{E}, \quad W_n(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2(s+1)}.$$

## Глава 9

### СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

#### 9.1. Постановка задачи. Типовые законы управления

Как и в непрерывном случае, возможны две различные постановки задачи синтеза дискретных систем управления:

- 1) синтез параметров при фиксированной структуре;
- 2) синтез управляющего устройства при произвольной структуре.

В данной главе предполагается, что регулятор реализуется с помощью цифровых устройств и эквивалентная структурная схема

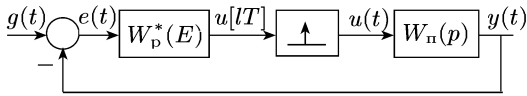


Рис. 9.1. Эквивалентная схема системы управления с дискретным регулятором

включает дискретный фильтр (регулятор), реализующий требуемый закон управления (рис. 9.1).

Типовые законы управления в дискретном случае определяются следующим образом.

*Пропорциональный закон*, или *П-закон* (П-регулятор):

$$u[lT] = k_n e[lT], \quad W_p^*(z) = k_n.$$

*Пропорционально-суммарный закон* (аналог ПИ-закона), или *ПС-закон* (ПС-регулятор):

$$u[lT] = \left( k_n + k_c \frac{1}{1 - E^{-1}} \right) e[lT], \quad W_p^*(z) = k_n + k_c \frac{z}{z - 1},$$

где  $E^{-1}$  — обратный оператор сдвига:  $E^{-1}e[lT] = e[(l - 1)T]$ .

*Пропорционально-разностный закон* (аналог ПД-закона), или *ПР-закон* (ПР-регулятор):

$$u[lT] = (k_n + k_p(1 - E^{-1}))e[lT], \quad W_p^*(z) = k_n + k_p \frac{z - 1}{z}.$$

*Пропорционально-суммарно-разностный закон* (аналог ПИД-закона), или *ПСР-закон* (ПСР-регулятор):

$$u[lT] = \left( k_{\text{п}} + k_{\text{с}} \frac{1}{1 - E^{-1}} + k(1 - E^{-1}) \right) e[lT],$$

$$W_{\text{р}}^*(z) = k_{\text{п}} + k_{\text{с}} \frac{z}{z - 1} + k_{\text{р}} \frac{z - 1}{z}.$$

Здесь слагаемое  $S = k_{\text{с}} \frac{1}{1 - E^{-1}} e[lT]$  может быть представлено в виде суммы

$$S = k_{\text{с}} (e[lT] + e[(l - 1)T] + \dots = k_{\text{с}} \sum_{i=0}^{\infty} e[(l - i)T]. \quad (9.1)$$

Действительно, перейдя к  $z$ -изображениям, имеем

$$S^* = k_{\text{с}} \frac{1}{1 - z^{-1}} E^*(z) = k_{\text{с}} \frac{z}{z - 1} E^*(z),$$

и, разложив  $\frac{z}{z - 1}$  в ряд Лорана

$$\frac{z}{z - 1} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots,$$

находим

$$\begin{aligned} S^* &= k_{\text{с}} (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) E^*(z) = \\ &= k_{\text{с}} (E^*(z) + z^{-1} E^*(z) + z^{-2} E^*(z) + \dots). \end{aligned}$$

Отсюда, произведя обратное  $z$ -преобразование, получим (9.1).

Суммарный член в дискретном законе управления соответствует интегральному члену в непрерывном случае и аналогично последнему его введение делает систему астатической или повышает порядок ее астатизма. Разностный член  $k_{\text{р}}(1 - E^{-1})e[lT]$  соответствует дифференциальному члену.

Раньше при рассмотрении разностных уравнений первая разность от дискретной функции  $x(t)$  была определена следующим образом:

$$\Delta x(t) = x(t + T) - x(t) = (E - 1)x(t).$$

Однако существует и другое определение разности:

$$\nabla x(t) = x(t) - x(t - T) = (1 - E^{-1})x(t).$$

Разность  $\Delta x(t)$  называют *нисходящей* или *прямой разностью*, а  $\nabla x(t)$  — *восходящей* или *обратной разностью*.

Приведенные выше дискретные типовые законы управления получаются из непрерывных типовых законов управления при замене оператора дифференцирования  $p$  обратным разностным оператором  $(1 - E^{-1})$ . Другие разновидности типовых законов могут быть получены при замене оператора дифференцирования  $p$  прямым разностным оператором  $(E - 1)$ , а в ПИД-законе тем и другим: в дифференциальном члене прямым, а в интегральном члене обратным разностным оператором, или наоборот.

## 9.2. Синтез систем с фиксированной структурой

Задача синтеза систем с фиксированной структурой ставится следующим образом: задан объект и выбрана структура регулятора; требуется определить параметры регулятора, обеспечивающие заданные требования к качеству синтезируемой системы.

Структура регулятора (системы) определяется в основном из требований к структурной устойчивости и качеству синтезируемой системы в установившемся режиме. Параметры регулятора определяются исходя из требований к качеству системы в переходном режиме. На параметры могут быть наложены ограничения, вытекающие из требований допустимой ошибки в установившемся режиме или каких-либо других требований.

Рассмотрим постановку и решение задачи синтеза параметров на конкретных примерах.

**Пример 9.1.** Дискретный элемент есть фиксатор нулевого порядка, период квантования  $T = 0,1$  и передаточная функция непрерывной части имеет вид  $W_n(s) = 1/s$ .

Определить тип и параметры регулятора исходя из следующих требований к системе:

$$C_0 = 0, \quad |C_1| \leq 1, \quad J_{20}^* \rightarrow \min.$$

**Решение.** Так как коэффициент позиционной ошибки равен нулю, а коэффициент скоростной ошибки не равен нулю, система должна быть астатической и обладать астатизмом первого порядка. Но в связи с тем, что непрерывная часть включает интегратор, можно выбрать П-регулятор ( $W_p^*(z) = k_n$ ).

При фиксаторе нулевого порядка передаточная функция формирующего звена имеет вид  $W_\Phi(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$ . Поэтому передаточная функция приведенной непрерывной части (ПНЧ) имеет вид

$$W_n(s) = W_\Phi(s)W_n(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2}.$$

Передаточная функция разомкнутой дискретной модели равна

$$W^*(z) = W_p^*(z)Z_T\{W_n(s)\} = k_n \frac{z-1}{z} Z_T\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{k_n T}{z-1},$$

и передаточная функция ошибки (замкнутой системы) —

$$W_{eg}^*(z) = \frac{1}{1 + W^*(z)} = \frac{z-1}{z-1 + 0,1 k_n}.$$

Так как  $C_0 = 0$ , коэффициент скоростной ошибки можно определить по формуле (см. (8.17))

$$C_1 = \left. \frac{TW_{eg}^*(z)}{z-1} \right|_{z=1} = \left. \frac{0,1}{z-1 + 0,1 k_n} \right|_{z=1} = \frac{1}{k_n}.$$

Условие  $|C_1| \leq 1$  будет выполнено, если  $|k_{\pi}| \geq 1$ . Характеристическое уравнение имеет вид

$$z - 1 + 0,1 k_{\pi} = 0.$$

Его корень  $z_1 = 1 - 0,1 k_{\pi}$  по модулю будет меньше единицы, если  $0 < k_{\pi} < 20$ .

Таким образом, система будет устойчива и будут выполнены требования к качеству в установившемся режиме, если

$$1 < k_{\pi} < 20.$$

Найдем выражение для ошибки при  $g[lT] = 1[lT]$ :

$$E^*(z) = W_{eg}^*(z)G^*(z) = \frac{z-1}{z-1+0,1 k_{\pi}} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1+0,1 k_{\pi}}.$$

Так как система астатическая, установившаяся ошибка есть  $e_{\infty}[lT] = 0$  и переходная составляющая ошибки  $e_{\pi}[lT] = e[lT]$ . Поэтому

$$E_{\pi}^*(z) = E^*(z) = \frac{z}{z-1+0,1 k_{\pi}}.$$

По формуле разложения (8.1) имеем

$$e_{\pi}[lT] = \frac{1-0,1 k_{\pi}}{1} (1-0,1 k_{\pi})^{l-1} = (1-0,1 k_{\pi})^l, \quad l = 1, 2, \dots$$

Как легко проверить, эта формула справедлива и при  $l = 0$ .

Суммарная квадратичная ошибка имеет вид

$$J_{20}^* = \sum_{l=0}^{\infty} e_{\pi}^2[lT] = \sum_{l=0}^{\infty} (1-0,1 k_{\pi})^{2l}.$$

По формуле суммы бесконечно убывающей прогрессии имеем

$$J_{20}^* = \frac{1}{1 - (1-0,1 k_{\pi})^2}.$$

Отсюда следует, что  $J_{20}^*$  достигает минимума при полученных выше ограничениях на  $k_{\pi}$ , когда  $1 - 0,1 k_{\pi} = 0$  или  $k_{\pi} = 10$ . Таким образом, решением данной задачи является  $k_{\pi} = 10$ .

**Пример 9.2.** Дискретный элемент представляет фиксатор нулевого порядка, период квантования равен  $T = 0,1$  и передаточная функция непрерывной части есть  $W_{\pi}(s) = \frac{1}{s+1}$ .

Определить тип и параметры регулятора, при котором статическая ошибка равна нулю и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов.

**Решение.** Чтобы статическая ошибка была равна нулю, выберем пропорционально-суммарный закон управления:

$$W_p^*(z) = k_{\pi} + k_c \frac{z}{z-1}.$$

Передаточная функция формирующего звена имеет вид

$$W_{\Phi}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s},$$

передаточная функция приведенной непрерывной части —

$$W_{\Pi}(s) = W_{\Phi}(s) \cdot W_{\Pi}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)}$$

и передаточная функция разомкнутой дискретной модели —

$$W^*(z) = W_p^*(z) Z_T \{W_{\Pi}(s)\} = \frac{[k_{\Pi}(z-1) + k_c z](1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})}.$$

Приняв  $e^{-T} = e^{-0,1} \cong 0,9$ , получим

$$W^*(z) = \frac{0,1 [k_{\Pi}(z-1) + k_c z]}{z^2 - 1,9z + 0,9}.$$

Передаточная функция замкнутой системы (см. рис. 9.1) имеет вид

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W^*(z)}{1 + W^*(z)} = \frac{b_0 z + b_1}{a_1 z^2 + a_1 z + a_2},$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,1 (k_{\Pi} + k_c), & b_1 &= -0,1 k_{\Pi}, & a_0 &= 1, \\ a_1 &= 0,1 (k_{\Pi} + k_c) - 1,9, & a_2 &= 0,9 - 0,1 k_{\Pi}. \end{aligned}$$

Условие окончания переходного процесса за конечное число шагов (8.10) принимает вид

$$a_1 = 0,1 (k_{\Pi} + k_c) - 1,9 = 0, \quad a_2 = 0,9 - 0,1 k_{\Pi} = 0.$$

Отсюда  $k_{\Pi} = 9$  и  $k_c = 10$ .

### 9.3. Метод полиномиальных уравнений

Рассматривается задача синтеза при произвольной (нефиксированной) структуре в следующей постановке. Задана передаточная функция приведенной непрерывной части  $W_{\Pi}(s)$  и известна дискретная передаточная функция неизменяемой части

$$W_{\Pi}^*(z) = Z_T \{W_{\Pi}(s)\}.$$

Известна также желаемая передаточная функция  $W_{\text{ж}}^*(z)$ . Требуется синтезировать регулятор, при котором передаточная функция  $W_{yg}^*(z)$  синтезированной системы (см. рис. 9.1) была бы равна желаемой:

$$W_{yg}^*(z) = \frac{W_p^*(z) W_{\Pi}^*(z)}{1 + W_p^*(z) W_{\Pi}^*(z)} = W_{\text{ж}}^*(z). \quad (9.2)$$

Разрешив это тождество относительно передаточной функции регулятора, получим

$$W_p^*(z) = \frac{1}{W_{\Pi}^*(z)} \cdot \frac{W_{\text{ж}}^*(z)}{1 - W_{\text{ж}}^*(z)}. \quad (9.3)$$



При синтезе регулятора нужно позаботиться о том, чтобы он был физически осуществим и синтезированная система была грубой.

*Условие физической осуществимости* регулятора, состоящее в том, что следствие не может предшествовать причине, может быть сформулировано следующим образом: весовая функция регулятора равна нулю при отрицательных аргументах или степень числителя его передаточной функции не превышает степень ее знаменателя.

При определении передаточной функции регулятора по формуле (9.3) синтезированная система будет негрубой, если передаточная функция неизменяемой части содержит нули или полюсы вне единичного круга, и они входят в передаточную функцию регулятора. В этом случае при вычислении передаточной функции разомкнутой системы указанные нули и полюсы сокращаются, если регулятор реализуется точно в соответствии с (9.3). Однако при малом изменении параметров регулятора указанные нули и полюсы могут не сократиться. Тогда разомкнутая система становится неустойчивой, что может привести к неустойчивости и замкнутой системы.

Разложим числитель и знаменатель передаточной функции неизменяемой части на два множителя, один из которых содержит нули внутри единичной окружности, другой — на и вне единичной окружности:

$$W_{\Pi}^*(z) = \frac{P^*(z)}{Q^*(z)} = \frac{P_{\text{в}}^*(z)P_{\text{н}}^*(z)}{Q_{\text{в}}^*(z)Q_{\text{н}}^*(z)}.$$

Здесь  $P_{\text{в}}^*(z)$ ,  $Q_{\text{в}}^*(z)$  — полиномы, нули которых расположены внутри единичной окружности;  $P_{\text{н}}^*(z)$ ,  $Q_{\text{н}}^*(z)$  — полиномы, нули которых расположены на и вне единичной окружности.

Подставим полученное выражение для  $W_{\Pi}^*(z)$  в (9.3):

$$W_{\text{р}}^*(z) = \frac{Q_{\text{в}}^*(z)Q_{\text{н}}^*(z)}{P_{\text{в}}^*(z)P_{\text{н}}^*(z)} \cdot \frac{W_{\text{ж}}^*(z)}{1 - W_{\text{ж}}^*(z)}. \quad (9.4)$$

Как отмечалось, для того чтобы синтезированная система была грубой, передаточная функция регулятора (9.4) не должна содержать полиномы  $P_{\text{н}}^*(z)$  и  $Q_{\text{н}}^*(z)$ , содержащие нули вне единичной окружности. Но, как это следует из (9.4), для этого нужно, чтобы  $W_{\text{ж}}^*(z)$  включало полином  $P_{\text{н}}^*(z)$ , а  $1 - W_{\text{ж}}^*(z)$  — полином  $Q_{\text{н}}^*(z)$ , т.е. желаемая передаточная функция должна удовлетворять соотношениям

$$W_{\text{ж}}^*(z) = \frac{P_{\text{н}}^*(z)M^*(z)}{G^*(z)}, \quad (9.5a)$$

$$1 - W_{\text{ж}}^*(z) = \frac{Q_{\text{н}}^*(z)N^*(z)(z-1)^r}{G^*(z)}, \quad (9.5b)$$

где  $M^*(z)$  и  $N^*(z)$  — неопределенные полиномы;  $G^*(z)$  — знаменатель желаемой передаточной функции, т.е. характеристический полином синтезируемой системы; множитель  $(z-1)^r$  вводится для обеспечения требуемого порядка астатизма.

Исключив  $W_{\text{ж}}^*(z)$  из (9.5), получим *полиномиальное уравнение*

$$P_{\text{н}}^*(z)M^*(z) + Q_{\text{н}}^*(z)N^*(z)(z-1)^r = G^*(z), \quad (9.6)$$

откуда определяются полиномы  $M^*(z)$  и  $N^*(z)$ .

Подставив (9.5а), (9.5б) в (9.4), находим

$$W_{\text{р}}^*(z) = \frac{Q_{\text{в}}^*(z)M^*(z)}{P_{\text{в}}^*(z)N^*(z)(z-1)^r}. \quad (9.7)$$

Обозначим степень произвольного полинома  $R_i^*(z)$  через  $n_{R_i}$ . Тогда *условие физической осуществимости* регулятора из (9.7) можно записать в виде

$$n_{Q_{\text{в}}} + n_M \leq n_{P_{\text{в}}} + n_N + r. \quad (9.8)$$

Полиномиальное уравнение (9.6) разрешимо, если число неизвестных (коэффициентов полиномов  $M^*(z)$  и  $N^*(z)$ ) не меньше числа уравнений, получаемых приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях в уравнении (9.6). И так как число неизвестных равно  $(n_M + 1) + (n_N + 1)$ , а число уравнений  $n_G + 1$ , *условие разрешимости* полиномиального уравнения принимает вид

$$n_M + n_N + 1 \geq n_G. \quad (9.9)$$

В (9.5б) степени полиномов числителя и знаменателя равны. Поэтому из его правой части имеем

$$n_G = n_{Q_{\text{н}}} + n_N + r,$$

откуда

$$n_N = n_G - n_{Q_{\text{н}}} - r. \quad (9.10)$$

Объединяя условие физической осуществимости (9.8) и условие разрешимости (9.9), с учетом (9.10) получим

$$n_{Q_{\text{н}}} + r - 1 \leq n_M \leq n_{P_{\text{в}}} + n_G - n_Q, \quad (9.11)$$

где  $n_Q = n_{Q_{\text{в}}} + n_{Q_{\text{н}}}$  — степень знаменателя передаточной функции неизменяемой части.

Таким образом, условия физической осуществимости регулятора и разрешимости полиномиального уравнения будут выполнены, если степени полиномов  $M^*(z)$  и  $N^*(z)$  удовлетворяют соотношениям (9.10) и (9.11).

Из условия (9.11) получаем, что степень характеристического полинома синтезируемой системы должна удовлетворять неравенству

$$n_G \geq n_{Q_{\text{н}}} + r + n_Q - 1 - n_{P_{\text{в}}}. \quad (9.12)$$

Хотя вначале мы предполагали, что желаемая передаточная функция известна, в действительности она не может быть выбрана заранее (см. (9.5а)).

Порядок синтеза системы управления методом полиномиальных уравнений можно сформулировать следующим образом.

1. Разложить полиномы числителя и знаменателя передаточной функции неизменяемой части на два множителя, один из которых име-

ет нули внутри единичной окружности, другой — на и вне единичной окружности. Если указанные полиномы не имеют нулей на и вне единичной окружности, то положить  $P_n^*(z) = 1$  и  $Q_n^*(z) = 1$ ; если они не имеют нулей внутри единичной окружности, то приравнять  $P_v^*(z)$  и  $Q_v^*(z)$  постоянному множителю этих полиномов.

2. Исходя из требований к качеству синтезируемой системы в переходном режиме и порядку астатизма выбрать характеристический полином синтезируемой системы  $G^*(z)$  и число  $r$ . Степень полинома  $G^*(z)$  должна удовлетворять условию (9.12).

3. Из соотношений (9.10) и (9.11) определить степени неопределенных полиномов  $M^*(z)$  и  $N^*(z)$  и записать их с неопределенными коэффициентами.

4. Подставить полученные неопределенные полиномы в полиномиальное уравнение и определить их коэффициенты.

5. Подставить найденные полиномы  $M^*(z)$  и  $N^*(z)$  в формулу для передаточной функции регулятора (9.7).

**Пример 9.3.** Передаточная функция неизменяемой части  $W_n^*(z) = \frac{1}{z - 0,5}$ . Требуется синтезировать регулятор, при котором статическая ошибка равна нулю и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов.

**Решение.** В данном случае  $P^*(z) = 1$ ,  $Q^*(z) = z - 0,5$  и соответственно  $P_v^*(z) = P_n^*(z) = 1$ ,  $Q_v^*(z) = z - 0,5$  и  $Q_n^*(z) = 1$ . Степени полиномов  $n_{P_v} = n_{P_n} = 0$ ,  $n_Q = n_{Q_v} = 1$  и  $n_{Q_n} = 0$ .

Так как статическая ошибка должна быть равна нулю, положим  $r = 1$ . Условие (9.12) принимает вид  $n_G \geq 1$ . Положим  $n_G = 1$ . И чтобы переходный процесс закончился за конечное число шагов, полагаем характеристический полином  $G^*(z) = z$ .

Условия (9.10) и (9.11) принимают вид

$$n_N = 0, \quad 0 \leq n_M \leq 0.$$

Поэтому полагаем  $M^*(z) = b_0$  и  $N^*(z) = a_0$ . Подставив их в полиномиальное уравнение (9.6), получим

$$b_0 + a_0(z - 1) = z.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, находим

$$a_0 = 1, \quad b_0 = a_0 = 1.$$

Следовательно,  $M^*(z) = 1$  и  $N^*(z) = 1$ . Подставив эти выражения для  $M^*(z)$  и  $N^*(z)$ , а также выражения для  $P_v^*(z)$  и  $Q_v^*(z)$  в (9.7), получим искомое решение

$$W_p^*(z) = \frac{z - 0,5}{z - 1}.$$

**Пример 9.4.** Передаточная функция неизменяемой части  $W_n^*(z) = \frac{z + 2}{(z - 0,5)(z - 1,5)}$ . Требуется синтезировать регулятор, при котором

статическая ошибка равна нулю и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов.

Решение. В данном случае  $P^*(z) = z + 2$ ,  $Q^*(z) = (z - 0,5)(z - 1,5)$  и соответственно  $P_{\text{в}}^*(z) = 1$ ,  $P_{\text{н}}^*(z) = z + 2$ ,  $Q_{\text{в}}^*(z) = z - 0,5$  и  $Q_{\text{н}}^*(z) = z - 1,5$ . Степени полиномов:  $n_{P_{\text{в}}} = 0$ ,  $n_{P_{\text{н}}} = 1$ ,  $n_Q = 2$ ,  $n_{Q_{\text{в}}} = 1$  и  $n_{Q_{\text{н}}} = 1$ .

Так как статическая ошибка должна быть равна нулю, положим  $r = 1$ . Условие (9.12) принимает вид  $n_G \geq 1 + 1 + 2 - 1 = 3$ . Положим  $n_G = 3$ , и для того чтобы переходный процесс закончился за конечное число шагов, полагаем характеристический полином  $G^*(z) = z^3$ .

Условия (9.10) и (9.11) принимают вид

$$n_N = 1, \quad 1 \leq n_M \leq 1.$$

Поэтому полагаем  $M^*(z) = b_0 z + b_1$  и  $N^*(z) = a_0 z + a_1$ . Подставив их в полиномиальное уравнение (9.6), получим

$$(z + 2)(b_0 z + b_1) + (z - 1,5)(a_0 z + a_1)(z - 1) = z^3,$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных членов,

$$a_0 z^3 + (b_0 - 2,5 a_0 + a_1) z^2 + (2b_0 + b_1 - 2,5 a_1 + 1,5 a_0) z + 2b_1 + 1,5 a_1 = z^3.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, находим

$$a_0 = 1, \quad b_0 - 2,5 a_0 + a_1 = 0,$$

$$2b_0 + b_1 - 2,5 a_1 + 1,5 a_0 = 0, \quad 2b_1 + 1,5 a_1 = 0.$$

Решив эту систему, получим  $a_0 = 1$ ,  $a_1 \cong 1,24$ ,  $b_0 \cong 1,26$ ,  $b_1 \cong -0,93$ . Следовательно,  $M^*(z) = 1,26 z - 0,93$  и  $N^*(z) = z + 1,24$ . Подставив эти выражения для  $M^*(z)$  и  $N^*(z)$ , а также выражения для  $P_{\text{в}}^*(z)$  и  $Q_{\text{в}}^*(z)$  в (9.7), получим искомое решение

$$W_{\text{р}}^*(z) = \frac{(z - 0,5)(1,26 z - 0,93)}{(z + 1,24)(z - 1)}.$$

## 9.4. Синтез дискретной системы по непрерывной модели

Дискретный регулятор можно конструировать, используя методы синтеза непрерывных систем. Для этого сначала нужно с помощью указанных методов определить передаточную функцию  $W_{\text{р}}(s)$  аналогового (непрерывного) регулятора, а затем аппроксимировать  $W_{\text{р}}(s)$  дискретной передаточной функцией  $W_{\text{р}}^*(z)$ . При этом, учитывая, что дискретизация по времени с периодом  $T$  вводит запаздывание  $T/2$  (см. (6.60)), следует проводить синтез для объекта с передаточной функцией  $e^{-Ts/2} W_0(s)$ , где  $W_0(s)$  — передаточная функция исходно-

го объекта. При синтезе передаточную функцию введенного звена чистого запаздывания можно аппроксимировать одним из следующих способов (другие способы см. в параграфе 5.7):

$$e^{-Ts/2} \cong 1 - \frac{T}{2}s, \quad e^{-(T/2)s} \cong \frac{1}{1 + (T/2)s}, \quad e^{-(T/4)s} \cong \frac{1 - (T/4)s}{1 + (T/4)s}.$$

При получении дискретной передаточной функции  $W_p^*(z)$  можно воспользоваться аппроксимацией производной конечными разностями (*метод Эйлера*): прямой

$$pe(t) \cong \frac{e(t+T) - e(t)}{T} = \frac{E-1}{T} e(t)$$

или обратной

$$pe(t) \cong \frac{e(t) - e(t-T)}{T} = \frac{1-E^{-1}}{T} e(t) = \frac{E-1}{TE} e(t).$$

На основе этих равенств при методе Эйлера  $s$  заменяется на  $\frac{z-1}{T}$  или  $\frac{z-1}{Tz}$ .

Другой метод аппроксимации — *метод трапеции*, или *метод Тустена* (Tustin) — состоит в том, что  $s$  заменяется на  $\frac{2(z-1)}{T(z+1)}$ . Такая замена получается следующим образом.

Интеграл  $u(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$ , положив  $t = lT$ , можно представить в виде

$$\begin{aligned} u[lT] &= \int_0^{lT} e(\tau) d\tau = \int_0^{(l-1)T} e(\tau) d\tau + \int_{(l-1)T}^{lT} e(\tau) d\tau = \\ &= u[(l-1)T] + \int_{(l-1)T}^{lT} e(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Последний интеграл представляет площадь под кривой  $e = e(t)$  на отрезке  $[(l-1)T, lT]$  (рис. 9.2). Заменив эту площадь площадью тра-

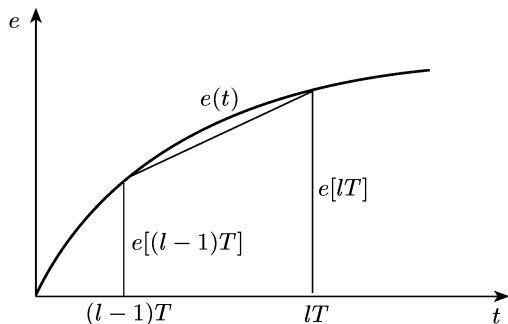


Рис. 9.2. Аппроксимация трапеций

пции, получаемой при аппроксимации кривой  $e = e(t)$  отрезком прямой на указанном отрезке, находим

$$u[lT] = u[(l-1)T] + \frac{e[(l-1)T] + e[lT]}{2} \cdot T,$$

или, в операторной форме,

$$u[lT] = \frac{T(E+1)}{2(E-1)} e[lT].$$

Это соотношение получено из равенства

$$u(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad \text{или} \quad u(t) = \frac{1}{p} e(t).$$

Сравнивая последнее равенство с предыдущим соотношением, получаем, что дифференциальному оператору  $p$  соответствует разностный оператор  $\frac{2(E-1)}{T(E+1)}$ . Поэтому при аппроксимации аналоговой передаточной функции дискретной методом трапеции  $s$  заменяется на  $\frac{2(z-1)}{T(z+1)}$ .

## Задачи

**1.** Передаточная функция приведенной непрерывной части имеет вид

$$W_{\Pi}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s(s+1)},$$

период квантования  $T = 0,1$ . Определить тип и параметры регулятора, при котором статическая ошибка равна нулю и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов.

**2.** Передаточная функция приведенной непрерывной части имеет вид

$$W_{\Pi}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s^2(s+1)},$$

период квантования  $T = 0,1$ . Определить тип и параметры регулятора, при котором статическая ошибка равна нулю и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов.

**3.** Синтезировать регулятор, при котором статическая ошибка равна нулю и переходный процесс заканчивается за конечное число шагов. Период квантования  $T = 0,1$  и передаточная функция неизменяемой части имеет следующий вид:

$$\text{а) } W_{\Pi}^*(z) = \frac{z+0,5}{z(z-0,9)}; \quad \text{б) } W_{\Pi}^*(z) = \frac{z+0,5}{z^2-1,5z+0,58};$$

$$\text{в) } W_{\Pi}^*(z) = \frac{z-0,6}{z^2-z+1}; \quad \text{г) } W_{\Pi}^*(z) = \frac{z-0,8}{z^2-z+0,5}.$$

4. Синтезировать регулятор, при котором характеристический полином синтезированной системы имеет вид  $G^*(z) = (z + 0,1)^3$ . Период квантования  $T = 0,05$  и передаточная функция неизменяемой части имеет вид:

$$\text{а) } W_{\pi}^*(z) = \frac{2(z + 0,5)}{z(z - 0,9)}; \quad \text{б) } W_{\pi}^*(z) = \frac{5(z + 0,5)}{z^2 - 1,5z + 0,5};$$

$$\text{в) } W_{\pi}^*(z) = \frac{z + 0,6}{z^2 - z + 1}; \quad \text{г) } W_{\pi}^*(z) = \frac{z - 0,8}{z^2 - z + 0,5}.$$

5. Синтезировать регулятор, при котором характеристический полином синтезированной системы имеет вид  $G^*(z) = z^3$ . Период квантования  $T = 0,05$  и передаточная функция неизменяемой части имеет вид:

$$\text{а) } W_{\pi}^*(z) = \frac{z + 0,5}{z(z - 0,95)}; \quad \text{б) } W_{\pi}^*(z) = \frac{z + 0,5}{z^2 - 2z + 1};$$

$$\text{в) } W_{\pi}^*(z) = \frac{z - 0,5}{z^2 - z + 1}; \quad \text{г) } W_{\pi}^*(z) = \frac{z - 0,5}{z - z + 1}.$$

## Список литературы

1. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования. — М.: Наука, 1966. — 452 с.
2. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975.
3. Бойчук Л. М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. — М.: Энергия, 1971.
4. Воронов А. А., Ким Д. П. и др. Теория автоматического управления. Часть 1. Теория линейных систем автоматического управления. — М.: Высшая школа, 1986. — 368 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 548 с.
6. Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. — М.: Физматлит, 1969. — 512 с.
7. Гольдфарб Л. С., Круг Г. К., Нетушил А. В. Теория автоматического управления. Часть I. — М.: Высшая школа, 1968. — 424 с.
8. Иванов В. А., Юценко А. С. Теория дискретных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1983. — 336 с.
9. Ким Д. П. Автоматическое управление. Теория линейных систем управления. — Сеул: Изд-во «Ханол», 1998. — 408 с.
10. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. — М.: Госэнергоиздат, 1962.
11. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
12. Макаров И. М., Дмитриева Н. Д., Ким Д. П. и др. Основы автоматизации управления производством. — М.: Высшая школа, 1983. — 504 с.
13. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1978.
14. Пугачев В. С., Казаков И. Е., Гладков Д. И. и др. Основы теории автоматического управления. — М.: Физматлит, 1963. — 646 с.
15. Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1985. — 536 с.
16. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977. — 560 с.



- 
17. Цыпкин Я. З., Поляк Б. Г. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Серия Техническая кибернетика. Вып. 2. — М.: ВИНТИ, 1991.
  18. Шубладзе А. М. Способы синтеза систем управления максимальной степени устойчивости // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 1. — С. 28–37.
  19. *Aström K. J., Wittenmark B.* Computer Controlled Systems. Theory and Design. — Prentice-Hall Inc., 1984. — 430 p.

## Предметный указатель

- АИМ-система управления 191
- АИМ-элемент 191
- Алгоритм управления 18
- Астатизм  $r$ -го порядка 138, 261
- Вершина 66, 67
- Воздействие возмущающее 11
  - задающее 11
  - типовое 124
  - управляющее 11
- Возмущение 11
- Время запаздывания 51
  - нарастания 126
  - регулирования 125, 252
- Выделение области устойчивости 106, 108
- Выходная величина 9, 10
  - переменная 9
- Генератор постоянного тока 79, 80
- Граф системы управления 66, 67
- Грубость 171, 172, 273
- Датчик идеальный 72
  - потенциометрический 72
  - температурный 73
  - угловой скорости 73
- Двигатель постоянного тока 78
- Движение вынужденное 89
  - свободное 89
- Декада 39
- Дельта-функция 28
- Диаграмма Найквиста 38
- Дискретная модель АИМ-системы 209
  - — цифровой системы 217
  - — ШИМ-системы 221, 222
- Дифференцирование оригинала 26
- Дуга 66
- Задатчик 17
- Заданный режим 9
- Задача анализа 146
  - синтеза 146
- Задающее устройство 17
- Закон управления 18
  - — астатический 182
  - пропорционально-дифференциальный 18
  - пропорционально-интегро-дифференциальный 19
  - пропорционально-суммарно-разностный 269
  - пропорционально-суммарный 268
  - пропорциональный 18, 268
- Запаздывание динамическое 22
  - критическое 104
  - транспортное 51
  - чистое 51
- Запас устойчивости по амплитуде 134, 135
  - — — фазе 134, 135
- Звено 22
  - аperiodическое 43, 46, 47
  - — неустойчивое 50
  - дифференцирующее 43, 46
  - интегрирующее 43, 46, 47
  - колебательное 45
  - — неустойчивое 50
  - консервативное 51
  - корректирующее 74
  - маргинальное 42
  - минимально-фазовое 42

- Звено неминимально-фазовое 42, 49  
— пропорциональное 43, 46, 47  
— простейшее импульсное 207  
— формирующее 207–209  
— форсирующее 1-го порядка 43  
— форсирующее 2-го порядка 44  
— — — неустойчивое 50  
— — неустойчивое 49  
— чистого запаздывания 51  
— элементарное 42
- Изображение** 25, 196, 229  
— Лапласа 28, 29
- Импульс** 191
- Импульсная модуляция** 191  
— 1-го рода 191  
— 2-го рода 191
- Инвариатность** 143
- Интегрирование оригинала** 27
- Качество системы управления** 123, 252
- Квантование по времени** 190  
— — уровню 190
- Контур** 67
- Контуры несоприкасающиеся** 67
- Корни основные** 243
- Корень левый** 90  
— нейтральный 90  
— правый 90
- Коэффициент граничный** 112  
— демпфирования 25  
— модуляции 220  
— ошибки по ускорению 136, 259  
— передаточный 25  
— позиционной ошибки 136, 259  
— предельный 112  
— скоростной ошибки 136, 259
- Коэффициенты ошибки** 136, 258, 259  
— — по возмущению 136  
— — задающему воздействию 136
- Кривая Михайлова** 98
- Критерии устойчивости алгебраические** 92  
— — частотные 97, 242
- Критерий Гурвица** 93  
— Джюри 240, 241
- Критерий логарифмический частотный** 102, 103  
— Лъенара–Шипара 94  
— Михайлова 98, 99  
— Найквиста 99, 102, 244, 245  
— псевдочастотный 247  
— Рауса 95, 96
- Линеаризация** 22, 220
- Линейность преобразования Лапласа** 26  
—  $z$ -преобразования 197, 199
- Метод обратной задачи динамики** 180, 181  
— полиномиальных уравнений 272
- Модуляция** 191  
— амплитудно-импульсная (АИМ) 191  
— импульсная 1-го рода 191  
— — 2-го рода 191  
— широтно-импульсная (ШИМ) 191
- Момент съема сигнала** 191
- Непрерывная модель дискретной системы** 231, 232
- Непрерывная часть** 207  
— — приведенная 209
- Нули передаточной функции** 32
- Ноль полинома особый** 155
- Область устойчивости** 105, 106, 108
- Обратная связь** 11  
— — отрицательная 57  
— — положительная 57
- Обратное преобразование Лапласа** 26  
— — дискретное 229
- Объект регулирования** 10  
— регулируемый 10  
— управления 9  
— — нейтральный 11  
— — неустойчивый 11  
— — устойчивый 11  
— управляемый 9
- Однонаправленность** 81
- Оператор** 21  
— воздействия 24, 206

- Оператор Лапласа 26  
— — обратный 26  
— системы 21  
— смещения 192  
— собственный 24, 206  
— элемента 21  
Операторная форма записи дифференциальных уравнений 24  
— — — разностных уравнений 193  
Определители Гурвица 93  
Определитель графа 70  
Оригинал 25, 196, 229  
Ориентированный маршрут 67  
Ормаршрут 67  
Относительный порядок передаточной функции 32  
— — системы 32  
Оценка интегральная квадратичная 130  
— — — обобщенная 130  
Ошибка интегральная квадратичная 130  
— от возмущения 124  
— — задающего воздействия 124  
— статическая 137, 261  
— суммарная квадратичная 256  
— установившаяся 135, 258  
Параметр варьируемый 105  
— оптимальный 154  
ПД-закон 18, 118, 150  
ПД-регулятор 18, 164  
Передаточная функция 31  
— — в изображениях Лапласа 33, 36  
— — — операторной форме 32, 206  
— — —  $z$ -изображениях 208  
— — желаемая 176  
— — контура 69  
— — маргинальная 42  
— — минимально-фазовая 42  
— — неминимально-фазовая 42  
— — нормированная 176  
— — — стандартная 177–179  
— — ошибки по задающему воздействию 123  
— — — — возмущению 124  
— — прямой цепи 61  
— — псевдочастотная 247  
Передаточная функция разомкнутой цепи 58  
— — частотная 38, 230  
Передаточный коэффициент 25  
Перекрестные связи 62  
Переменная выходная 9  
— управляемая 9  
Перерегулирование 126, 253  
П-закон 18, 147, 268  
ПИД-закон 19, 149, 150  
ПИД-регулятор 19, 168  
ПИ-закон 18, 147, 150  
ПИ-регулятор 18, 160, 166  
Подграф 69  
Показатели качества 123  
— — в переходном режиме 124, 125, 252  
— — — установившемся режиме 135, 258  
— — — интегральные 130  
— — — корневые 127, 256  
— — — косвенные 124, 252, 256  
— — — прямые 125, 252  
— — — частотные 134  
Показатель колебательности 134  
Полином Гурвица 113  
— робастно устойчивый 113  
— устойчивый 113  
Полиномы Харитонова 114  
Полоса пропускания 134  
Полос передаточной функции 32  
Порядок передаточной функции 32  
— системы 32  
Постоянная времени 25  
П-регулятор 18, 268  
Преобразование Лапласа 25  
— — дискретное 229, 231  
— Лорана 196  
Преобразователь аналого-цифровой (АЦП) 216, 217  
— цифро-аналоговый (ЦАП) 216, 217  
Принцип аргумента 97, 243  
— двухканальности 143  
— комбинированного управления 16  
— компенсации 12

- Принцип обратной связи 14, 15  
— программного управления 12  
— суперпозиции 35  
Принципы управления 12  
ПС-закон 268  
ПС-регулятор 268  
Псевдочастота 247  
ПСР-закон 269  
ПСР-регулятор 269  
Путь 67  
— прямой 67  
Равенство Парсеваля 131  
Разность конечная 192  
— восходящая (обратная) 269  
— нисходящая (прямая) 269  
Реализуемость 171  
Регулятор 10  
Режим заданный 9  
— статический 22  
Резонансный пик 134  
Робастность 172  
Свертка 27  
Символическая форма записи дифференциальных уравнений 24  
— — — разностных уравнений 193  
Синтез дискретных систем управления 268  
— систем управления 146  
— — — максимальной степени устойчивости 154  
— — — по желаемой передаточной функции 171, 174  
— — — при наличии чистого запаздывания 185  
Система автоматического регулирования 10  
— — управления 10  
— астатическая 137, 261  
— дискретная 190  
— маргинальная 42  
— многоконтурная 62  
— непрямого регулирования 14  
— непрямого управления 14  
— одноконтурная 61  
Система программного управления 19  
— прямого регулирования 14  
— следящая 19  
— стабилизации 19  
— статическая 137, 261  
— управления 10  
— — автоматизированная 10  
— — адаптивная 19  
— — астатическая 137  
— — грубая 172, 273  
— — детерминированная 20  
— — дискретная 19, 190  
— — импульсная 190  
— — инвариантная 143  
— — линейная 20  
— — нелинейная 20  
— — непрерывная 19  
— — непрерывно-дискретная 209  
— — нестационарная 19  
— — релейная 190  
— — с дискретным фильтром 225  
— — стационарная 19  
— — стохастическая 20  
— — цифровая 190, 218  
Соединение обратное 57  
— параллельное 57  
— последовательное 57  
Сопротивление операторное 74  
Способ управления по возмущению 13  
Степень колебательности 127  
— устойчивости 127, 256  
— — максимальная 158  
— — оптимальная 154  
Структура астатических систем 140–142, 263, 264  
— системы управления 17, 105  
Структурная схема 56  
Таблица Джури 240  
— Рауса 95, 96  
Тахогенератор 73  
Теорема запаздывания 27, 197, 198  
— опережения 197, 199  
— о свертке 27, 198, 200  
— разложения 27

- Теорема Харитоновна 115  
Теоремы Ляпунова 91, 92  
— о граничных значениях 198  
— — предельных значениях 27  
Терморезистор 73  
Управление 9, 11  
— автоматическое 9  
— по возмущению 13  
— — отклонению 14  
— программное 12  
— ручное 9  
Управляемая величина 9  
— переменная 9  
Управляемый объект 9  
Уравнение в операторной форме 24, 193  
— — символической форме 24, 193  
— динамики 22  
— разностное 192  
— — однородное 193  
— полиномиальное 274  
— статики 22  
— характеристическое 92, 236  
Усилитель электромашиный 74, 77  
— электронный 74  
Условие граничной устойчивости 112  
— инвариатности 143  
— оптимальности 257, 258  
— разрешимости 173, 274  
Условие устойчивости необходимое 91, 237  
— — основное 89, 90, 237  
— физической осуществимости 173, 273, 274  
Устойчивость 88, 236  
— асимптотическая 89, 91  
— граничная 112  
— маргинальная 112  
— робастная 113  
— систем с чистым запаздыванием 103  
— структурная 105  
Устройство задающее 17  
— исполнительное 17, 78  
— сравнивающее 17  
Устройство управляющее 10, 17  
— усилительно-преобразовательное 17  
Физическая осуществимость 171  
Фиксатор нулевого порядка 217  
Фильтр дискретно-непрерывный 224  
— дискретный 225  
Формула Мейсона 68, 69  
— разложения 254  
Функциональная схема 17  
Функция весовая 35, 36  
— временная 35  
— единичная 29, 30  
— импульсная переходная 35  
— переходная 35  
— решетчатая 195  
— — смещенная 195  
— частотная 37  
— — амплитудная 38  
— — — логарифмическая 39  
— — амплитудно-фазовая 38  
— — вещественная 38  
— — мнимая 38  
— — фазовая 38  
— — — логарифмическая 39  
Функция-оригинал 26, 196  
Характеристика временная 35  
— импульсная переходная 35  
— переходная 35  
— псевдочастотная 247  
— разгонная 35  
— статическая 22  
— частотная амплитудная 38  
— — — логарифмическая 39  
— — — асимптотическая 47, 53  
— — амплитудно-фазовая 38  
— — вещественная 38  
— — мнимая 38  
— — фазовая 38  
— — — логарифмическая 39, 55  
Характеристический вектор 97  
— полином 90, 236  
Частота 38  
— критическая 104

Частота сопрягающая 48

**ШИМ**-система 191

— управления 191, 219

ШИМ-элемент 191, 219

Эквивалентная схема 207

— — АИМ-системы 207

— — АИМ-элемента 207–209

— — дискретной системы с ДНФ  
224, 225

— — цифровой системы управления  
217

Элемент дискретный 190

— чувствительный 17

$D$ -изображение 229

$D$ -разбиение 105, 106

$z$ -изображение 196, 202

— модифицированное 203

$z$ -преобразование 196

— модифицированное 196

$Z_T$ -изображение 211, 212, 214

$Z_T^z$ -преобразование 211, 212, 214

Учебное издание

*Дмитрий Петрович КИМ*

## ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Том 1

### ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Редактор *Е.Ю. Ходан*

Корректор *Л. Т. Варьяш*

Компьютерная верстка и иллюстрации *Е. А. Королевой*

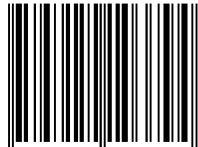
Оформление обложки *А. Ю. АLEXИНОЙ*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 22.05.03.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 19,8. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с диапозитивов  
в РГУП «Чебоксарская типография № 1».  
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0379-2



9 785922 103794