Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

А.В. Ершов

ЛЕКЦИИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Долгопрудный
2020

Оглавление

Введение

Предмет линейной алгебры играет исключительно важную роль в университетском математическом образовании. Ее связи с другими разделами математики глубоки и многообразны, и вряд ли могут быть сколько-нибудь полно описаны в рамках введения. Также она имеет широчайшие применения в других науках, в особенности в физике. Например, не будет сильным преувеличением сказать, что квантовая механика — это линейная алгебра, которой придали физическую интерпретацию.

Данный текст основан на курсе линейной алгебры, который автор на протяжении ряда лет читает в МФТИ. При его написании автор стремился дать более подробное изложение лекционного материала, подходящее и для самостоятельного изучения, поэтому довольно большой объем получившегося текста не должен смущать читателя. В текст включено большое количество примеров, которые иллюстрируют теорию. Некоторые примеры даны в виде задач, частично решенных прямо в тексте. Некоторые из таких задач достаточно сложны, и читатель может их пропустить.

Можно сказать, что в течение данного курса мы движемся от алгебры к геометрии. Например, сначала мы без достаточной мотивации вводим матрицы и операции с ними (например, умножение), а уже потом получаем их важнейшую геометрическую интерпретацию как координатной записи линейных отображений, а их умножения — как композиции таких отображений. Другой аналогичный пример дает операция транспонирования матриц, которая затем получает интерпретацию как переход к сопряженному отображению. Переход от матриц к линейным отображениям — движение в сторону большей абстракции, в мир более чистых идей. Парадоксально, но на абстрактном уровне теория идейно упрощается (например, многие теоремы о системах линейных уравнений проще понимать и доказывать на языке линейных отображений).

Вообще, полезно сразу понять место базисов в линейной алгебре. Математиками была постепенно осознана польза от инвариантных (не использующих базисов и координат) определений математических понятий. Мы тоже по возможности даем инвариантные определения и формулировки (и, где это возможно, доказательства). С другой стороны, использование базисов неизбежно, если нам нужно решить конкретную, “числовую”, задачу.

Там, где это естественно, мы не избегаем использования таких общематических понятий как отношение эквивалентности, группа, инвариант и т.д., что, по нашему мнению, должно способствовать росту математической культуры читателя.

Большое влияние на автора и в плане отбора материала, и в плане его изложения оказал учебник [6]. Также целый ряд ценных идей автор позаимствовал из учебников [3], [8], [9], [10].

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность Андрею Алексеевичу Хомутову, приславшему список опечаток.

Советы студентам

Некоторая часть представленного в данном тексте материала выходит за рамки программы экзамена по Линейной алгебре на первом курсе МФТИ. К необязательному материалу целиком относится содержание раздела “Жорданова нормальная форма”, а также параграфов “Алгоритм Грама-Шмидта и метод Якоби”, “Кососимметрические билинейные функции”, “QR-разложение”. Студент, который хочет в первую очередь подготовиться к сдаче экзамена, может ограничиться изучением только вопросов, входящих в обязательную программу, текст задуман таким образом, что это не должно привести к нарушению логической связности (за исключением решений отдельных задач, которые можно пропустить).

Отметим, что в данный текст вошли в основном теоретические задачи, поэтому их решение не отменяет необходимости решить достаточное количество стандартных, вычислительных задач, например, из задачника [4]. В качестве решебника по таким задачам автор рекомендует [7]. Тем, кто хочет дополнительно потренироваться в решении теоретических задач, можно рекомендовать [2].

Требования к подготовке читателя

Предполагается, что читатель данного текста освоил курс аналитической геометрии. В частности, он знаком с понятием свободного вектора, элементами векторной алгебры в пространствах размерности 2 и 3, определителями и матрицами малых порядков.

О замеченных опечатках и замечаниях по тексту просьба сообщать на e-mail `ershov.andrei@gmail.com`

1 Некоторые сведения из алгебры

Данная глава носит вспомогательный характер: в ней для удобства читателя приведены определения некоторых понятий, которые используются в дальнейшем. Лучше начинать чтение со следующей главы, обращаясь к данной по мере необходимости.

1.1 Некоторые теоретико-множественные определения

Если X и Y — два множества, то для произвольных $x \in X$ и $y \in Y$ через (x, y) обозначим соответствующую упорядоченную пару. Две упорядоченные пары (x, y) и (x', y') равны тогда и только тогда, когда $x = x'$ и $y = y'$.

Определение 1.1. *Декартовым произведением* $X \times Y$ множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар

$$\{(x, y) \mid x \in X, \, y \in Y\}.$$

В частности, определен *декартов квадрат* $X \times X$ множества X. Например, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — множество упорядоченных пар действительных чисел. Любой выбор декартовой системы координат в плоскости определяет биекцию между множеством точек плоскости и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Аналогично для пространства и множества $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (декартово произведение множества $\mathbb{R}$ на себя n раз) часто обозначается $\mathbb{R}^n$, его элементами являются строки (или столбцы) длины (высоты) n из действительных чисел.

1.2 Отношения эквивалентности

Определение 1.2. (*Бинарным*) *отношением* на множестве X называется произвольное подмножество $R \subset X \times X$.

Пример 1.3. *Диагональ* $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ задает *отношение равенства* на X.

Для произвольного отношения $R \subset X \times X$ определим *транспонированное отошение* $R^T \subset X \times X$ как

$$R^T = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\},$$

то есть пара $(y, x) \in X \times X$ принадлежит R^T тогда и только тогда, когда пара $(x, y) \in X \times X$ принадлежит R. Очевидно, что $(R^T)^T = R$.

Например, если X — множество людей, определим отношение R "быть родителем" на X как $R = \{(x, y) \mid y \text{ — родитель } x\}$. Тогда транспонированное отношение R^T есть отношение "быть ребенком".

Для произвольных отношений $R_1, R_2 \subset X \times X$ на множестве X определим их *композицию* $R_2 \circ R_1$ как отношение

$$\{(x, z) \in X \times X \mid \text{существует } \; y \in X, \; \text{ для которого}$$

$$(x, y) \in R_1, \; (y, z) \in R_2\} \subset X \times X.$$

Например, композиция отношения “быть родителем” и отношения “быть братом” на множестве людей X есть отношение “быть дядей”, а композиция отношения “быть родителем” с собой — отношение “быть бабушкой или дедушкой”.

Нетрудно проверить, что $\Delta_X \circ R = R = R \circ \Delta_X$ для любого отношения $R \subset X \times X$, а также что композиция отношений ассоциативна, то есть для произвольных

$$R_1 \subset X \times X, \quad R_2 \subset X \times X, \quad R_3 \subset X \times X$$

отношения $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ и $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ на множестве X равны. Также верно равенство $(R_2 \circ R_1)^T = R_1^T \circ R_2^T$.

Изучение какой-либо части окружающего мира обычно начинается с нахождения естественной классификации ее объектов. Классификация элементов некоторого множества X — разбиение этого множества на классы. Например, в курсе аналитической геометрии мы познакомились с двумя классификациями плоских кривых второго порядка — аффинной и метрической (с точностью до движений плоскости). Любое такое разбиение происходит из (и, в свою очередь, определяет) некоторого отношения эквивалентности на X.

Определение 1.4. Отношение R на X называется *отношением эквивалентности* на множестве X, если оно обладает свойствами:

1) *рефлексивности*: $(x, x) \in R$ для любого $x \in X$ (эквивалентно, $\Delta_X \subset R$);

2) *симметричности*: $(x, y) \in R \;\Rightarrow\; (y, x) \in R$ (эквивалентно, $R = R^T$);

3) *транзитивности*: $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (эквивалентно, $R \circ R \subset R$, где $\circ$, как выше, обозначает композицию отношений).

Например, на множестве людей X отношение

$$R_1 = \{(x, y) \mid y \text{ знает } x\}$$

не является отношением эквивалентности (например, отсутствует симметричность), отношение

$$R_2 = \{(x, y) \mid y \text{ знако́м с } x\}$$

также не является отношением эквивалентности (оно симметрично, но не транзитивно), а отношения “быть родственником”[1] или “жить в одном доме” — отношения эквивалентности.

Пусть R — отношение эквивалентности на множестве X. В этом случае вместо $(x, y) \in R$ пишут $x \sim_R y$ или просто $x \sim y$, если ясно, какое отношение эквивалентности имеется в виду.

Пусть X — множество, на котором задано отношение эквивалентности $\sim$. *Классом эквивалентности* элемента $x \in X$ назовем подмножество $[x] \subset X$, состоящее из всех элементов, эквивалентных x, то есть $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$. Произвольный элемент $y \in [x]$ называется *представителем* класса эквивалентности $[x]$.

Например, для отношения эквивалентности “жить в одном доме” классы эквивалентности — жители одного дома. Произвольный житель дома является представителем такого класса.

[1] хотя, возможно, транзитивность этого отношения не очевидна.

Предложение 1.5. $[x] = [x'] \;\Leftrightarrow\; x \sim x'$.

Доказательство. Пусть $[x] = [x']$. Так как $x \sim x$, то $x \in [x] = [x']$, а значит, $x \sim x'$.

Наоборот, предположим, что $x \sim x'$. Пусть $y \in [x] \;\Rightarrow\; y \sim x \;\Rightarrow\; y \sim x' \;\Rightarrow y \in [x']$. Таким образом, $[x] \subset [x']$. Тогда в силу симметричности отношения эквивалентности $[x] = [x']$. ∎

Определение 1.6. *Разбиением* множества X называется представление его в виде объединения непересекающихся[2] непустых подмножеств, то есть в виде $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, $\varnothing \neq X_\alpha \subset X$, причем $X_\alpha \bigcap X_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$.

Предложение 1.7. *Классы эквивалентности отношения эквивалентности $\sim$ на X образуют разбиение множества X.*

Доказательство. Так как $x \in [x]$, то каждый элемент множества X принадлежит некоторому классу эквивалентности. Покажем, что если классы $[x]$, $[x']$ имеют непустое пересечение, то они совпадают. Пусть $y \in [x] \cap [x']$. Тогда $y \sim x \;\Rightarrow\; x \sim y$, а также $y \sim x' \;\Rightarrow\; x \sim x' \;\Rightarrow\; [x] = [x']$ по Предложению 1.5. ∎

Заметим, что верно и обратное: по любому разбиению $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ множества X определяется единственное отношение эквивалентности на X, для которого X_α, $\alpha \in A$, являются классами эквивалентности. То есть *существует естественное взаимно однозначное соответствие между отношениями эквивалентности на множестве X и разбиениями X.*

Теперь заметим, что классы эквивалентности отношения эквивалентности $\sim$ на X сами можно рассматривать как элементы некоторого множества, которое называется *фактормножеством множества X по отношению эквивалентности* $\sim$. Фактормножество множества X по отношению эквивалентности $\sim$ обозначается $X/\sim$.

Рассмотрим примеры. Фактормножество множества людей по отношению эквивалентности “жить в одном доме” — множество домов (мы считаем, что каждый человек живет в доме, причем единственном).

Пример 1.8. Пусть Π — евклидова (точечная) плоскость, $O \in \Pi$ — ее фиксированная точка. Рассмотрим на множестве Π следующее отношение эквивалентности: $P \sim Q \;\Leftrightarrow\; |OP| = |OQ|$. Классы этой эквивалентности образуют семейство концентрических окружностей плоскости Π с центром в точке O (включая окружность нулевого радиуса); сопоставляя такой окружности ее радиус мы получаем биекцию между фактормножеством и множеством неотрицательных действительных чисел $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Пример 1.9. (Свободные векторы на плоскости.) *Направленным отрезком AB* на плоскости называется упорядоченная пара точек $(A,\, B)$ на плоскости. Два направленных отрезка AB и $A'B'$ называются *эквивалентными*, если середины AB' и $A'B$ совпадают. Читателю предлагается убедиться, что это — действительно отношение эквивалентости и что его классы эквивалентности — в точности свободные векторы на плоскости.

[2]То есть имеющих пустое пересечение.

Пример 1.10. (Рациональные числа.) Рассмотрим множество упорядоченных пар целых чисел $(m,\, n)$, $\ m,\, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0$. Определим на данном множестве отношение

$$(m,\, n) \sim (m',\, n') \ \Leftrightarrow\ mn' = m'n. \tag{1}$$

Рефлексивность и симметричность такого отношения очевидны. Проверим транзитивность. Пусть $(m',\, n') \sim (m'',\, n'')$, то есть $m'n'' = m''n'$. Умножая обе части равенства в (1) на n'', а обе части предыдущего равенства — на n, получаем $mn'n'' = m'nn''$; $m'n''n = m''n'n$, откуда, сокращая на n' (и используя $n' \neq 0$), получаем $mn'' = m''n$. Класс эквивалентности этого отношения называется *рациональным числом.* Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

1.3 Абелевы (коммутативные) группы

Исторически понятие числа расширялось, начиная с натуральных чисел, затем положительных рациональных, целых, рациональных, действительных и комплексных. Математически имеем включения числовых множеств:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

(мы используем стандартные обозначения натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел). Причем все расширения, кроме $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, можно описать чисто алгебраически из потребности расширить класс разрешимых алгебраических уравнений. Множества рациональных, действительных и комплексных чисел объединяет то, что с алгебраической точки зрения они являются *полями*[3].

Ниже мы объясним, что такое поле. Для этого нам придется начать с более элементарного понятия *группы.*

Говоря кратко, группа — это множество, на котором задана *бинарная операция*, обладающая некоторыми свойствами.

Определение 1.11. Говорят, что на множестве X задана *бинарная операция* $*$, если любой *упорядоченной паре* $(x_1,\, x_2)$ элементов из X поставлен в соответствие некоторый элемент $x_1 * x_2 \in X$.

Другими словами, бинарная операция $*$ на X — то же, что отображение (= функция)

$$X \times X \to X, \ \ X \times X \ni (x_1,\ x_2) \mapsto x_1 * x_2 \in X.$$

Примерами бинарных операций являются операции сложения и умножения на указанных числовых множествах или, например, векторное произведение векторов трехмерного ориентированного евклидова пространства. Вычитание тоже определяет бинарную операцию на всех указанных числовых множествах кроме $\mathbb{N}$ (почему?). С делением сложнее: во-первых, нельзя делить на нуль, во-вторых, даже если выбросить нуль из $\mathbb{Z}$, результат деления может оказаться нецелым числом. В то же время если $\mathbb{K}$ — любое из приведенных выше числовых полей ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то

[3]термин *поле* в математике многозначен, например существуют векторные поля. В данном тексте мы будем использовать поле только для обозначения указанного алгебраической понятия.

на множестве $\mathbb{K}^* := \mathbb{K}\backslash\{0\}$ его ненулевых элементов деление является бинарной операцией. Скалярное и смешанное произведения не являются бинарными операциями на множестве векторов евклидова пространства (почему?).

Рассмотрим множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с операцией сложения. Какими абстрактными свойствами обладает эта операция? Во-первых, она *ассоциативна*: для любых целых чисел k, l, m имеет место тождество $(k+l)+m = k+(l+m)$. Во-вторых, существует *нейтральный элемент* 0, обладающий свойством $k+0 = k = 0+k$ для любого целого числа k. В третьих, для любого целого числа k существует *противоположное* число $(-k)$, такое что $k + (-k) = 0 = (-k) + k$. Наконец, в четвертых, она *коммутативна*: для любых целых чисел k, l верно тождество $k + l = l + k$.

Рассмотрим также множество ненулевых рациональных чисел $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ с операцией умножения. Какими абстрактными свойствами обладает эта операция? Во-первых, она *ассоциативна*: для любых ненулевых рациональных чисел $(pq)r = p(qr)$. Во-вторых, для нее существует *нейтральный элемент* 1, обладающий свойством $p1 = p = 1p$ для любого $p \in \mathbb{Q}^*$. В третьих, для любого $p \in \mathbb{Q}^*$ существует *обратное* число p^{-1}, такое что $pp^{-1} = 1 = p^{-1}p$. Наконец, операция умножения *коммутативна*: $pq = qp$ для любых p, $q \in \mathbb{Q}^*$.

Если в двух приведенных примерах абстрагироваться от того, что множества целых и ненулевых рациональных чисел различны, операции сложения и умножения тоже различны, а сосредоточиться только на указанных абстрактных свойствах (ассоциативности, существование нейтрального и противоположного = обратного элементов, коммутативности) операций на указанных множествах, то очевидно, что этими свойствами обладает и операция сложения целых чисел, и операция умножения ненулевых рациональных чисел.

В то же время операция вычитания на множестве $\mathbb{Z}$ (или операция деления на множестве $\mathbb{Q}^*$) указанными свойствами не обладает, например, читатель легко убедится, что она неассоциативна.

Следующее Определение выделяет общие свойства целых чисел с операцией сложения и ненулевых рациональных чисел с операцией умножения. В нем в качестве обозначения операции мы выбрали $+$, что привычно во многих примерах, но не принципиально.

Определение 1.12. Пара $(A, +)$, состоящая из множества A и заданной на нем бинарной операции

$$A \times A \xrightarrow{+} A, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

(называемой "сложением") называется *коммутативной*, или *абелевой группой*, если выполнены следующие условия ("аксиомы абелевой группы"):

1) сложение *коммутативно*, то есть $a + b = b + a$ для любых a, $b \in A$;

2) сложение *ассоциативно*, то есть $\forall\, a,\, b,\, c \in A \quad (a + b) + c = a + (b + c)$;

3) в A существует *нуль* (называемый также *нейтральным элементом*), обозначаемый 0 и характеризующийся свойством $a + 0 = a \;\forall\, a \in A$;

4) для каждого $a \in A$ существует *противоположный элемент*, обозначаемый $(-a)$ и характеризующийся свойством $a + (-a) = 0$.

Таким образом, $(\mathbb{Z}, +)$ и $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ являются абелевыми группами.

В качестве следствий из аксиом абелевой группы отметим единственность нуля и обратного элемента, а также однозначную разрешимость в $(A, +)$ уравнения вида $x + a = b$, где $a, b \in A$. Ясно, что решение этого уравнения есть элемент $b + (-a) \in A$, он называется *разностью* элементов b и a и обозначается $b - a$. Кроме того, из ассоциативности сложения следует, что сумма произвольного конечного числа (а не только трех) элементов абелевой группы не зависит от расстановки скобок.

Задача 1.13. *Какие из следующих множеств с операциями являются абелевыми группами, а какие — нет и почему?* $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \div)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Задача 1.14. *Постройте биекцию* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ *между множеством всех действительных* $\mathbb{R}$ *и положительных действительных* $\mathbb{R}_{>0}$ *чисел, удовлетворяющую условию* $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ *для произвольных* $a, b \in \mathbb{R}$.

Замечание 1.15. Заметим, что обратная биекция f^{-1} к биекции из предыдущей задачи обладает аналогичным свойством $f^{-1}(r \cdot s) = f^{-1}(r) + f^{-1}(s)$. Это говорит о том, что группы $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ "устроены одинаково" как множества с бинарной операцией. В самом деле, одну с другой можно отождествить с помощью биекции, сохраняющей операцию. Такие группы называются *изоморфными.*

Вообще, в каждой математической теории есть свое понятие изоморфизма. Например, в теории множеств два множества называются изоморфными (равномощными), если между ними можно построить биекцию. При этом равномощные множества не обязательно являются равными (состоят из одних и тех же элементов).

Так как группа является не просто множеством, а множеством с бинарной операцией, то понятие изоморфизма групп более тонкое, чем изоморфизма множеств. В качестве упражнения предлагаем читателю доказать, что существуют две неизоморфные группы из четырех элементов.

Далее в этом курсе мы также столкнемся с понятием изоморфизма, специфичным для линейной алгебры — изоморфизмом линейных (а также евклидовых) пространств.

Отношение "быть изоморфными" — отношение эквивалентности на множестве[4] математических объектов данного типа, задающее их наиболее естественную классификацию.

Ниже вместо $(A, +)$ мы часто будем писать A, явно указывая только множество элементов группы, если из контекста ясно, какая операция подразумевается.

Определение 1.16. Пусть $B \subset A$ — подмножество множества элементов абелевой группы $(A, +)$, причем

1) B содержит ноль, то есть $0 \in B$;

2) B замкнуто относительно операции $+$, то есть $b_1, b_2 \in B \;\Rightarrow\; b_1 + b_2 \in B$;

3) B замкнуто относительно операции взятия противоположного элемента, то есть $\forall\, b \in B \Rightarrow (-b) \in B$.

[4]строго говоря, это не множество (например, понятие "множество всех множеств" противоречиво), но мы здесь не вдаемся в логические детали.

Тогда пара $(B, +)$[5] называется *подгруппой* группы $(A, +)$.

Заметим, что вместо условия 1) в предыдущем определении можно было бы потребовать непустоту множества B. Очевидно, что подгруппа абелевой группы сама является абелевой группой (относительно той же операции).

Рассмотрим примеры абелевых групп и их подгрупп.

Самая "маленькая" (по включению) подгруппа группы $(A, +)$ — подгруппа, состоящая только из нуля, самая "большая" — совпадает со всей группой. Также имеем вложения подгрупп $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{Q}, +) \subset (\mathbb{R}, +) \subset (\mathbb{C}, +)$ и $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \subset (\mathbb{R}^*, \cdot) \subset (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Еще пример: $(\{\pm 1\}, \cdot)$ является подгруппой в $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, состоящей из двух элементов. Или подгруппу в $(\mathbb{Z}, +)$ образуют все целые числа, кратные фиксированному натуральному n.

Задача 1.17. *Докажите, что единичная окружность*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

в комплексной плоскости является подгруппой группы $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Задача 1.18. *Опишите все подгруппы группы* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$*, состоящие из конечного числа элементов.*

1.4 Поля

Теперь мы готовы дать определение поля.

Определение 1.19. *Полем* называется тройка $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ состоящая из множества $\mathbb{K}$ и заданных на нем двух бинарных операций, обозначаемых $+$ и $\cdot$ (и называемых соответственно "сложением" и "умножением"), обладающая следующими свойствами:

i) $(\mathbb{K}, +)$ — абелева группа;

ii) $(\mathbb{K}^*, \cdot)$[6] — абелева группа;

iii) операции сложения и умножения связаны законом дистрибутивности:

$$\forall\, a,\, b,\, c \in \mathbb{K} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

(тогда в силу коммутативности умножения и $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$).

Например, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ являются полями, а $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — нет (почему?). Множество с двумя бинарными операциями $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ принадлежит к классу алгебраических объектов, называемых *ассоциативными кольцами с единицей*. Они получаются ослаблением аксиомы ii) в предшествующем Определении: от бинарной операции $\cdot$ требуется только ассоциативность и наличие нейтрального элемента (называемого единицей). Другим примером ассоциативного кольца с единицей, с которым мы далее познакомимся, будет кольцо матриц фиксированного порядка n над полем $\mathbb{K}$.

---

[5] чтобы не усложнять обозначения, операция $+$ на A и ее ограничение на подмножество $B \subset A$ обозначаются одним и тем же символом.

[6] Напомним, что $\mathbb{K}^*$ обозначает $\mathbb{K} \backslash 0$, где 0 — нейтральный элемент для $(\mathbb{K}, +)$.

В дальнейшем для упрощения обозначений вместо $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ мы будем писать $\mathbb{K}$, считая операции сложения и умножения известными. Кроме того, мы как правило будем опускать точку при записи умножения.

Задача 1.20. *Докажите, что в любом поле* $\mathbb{K}$ *выполнены соотношения*

$$0 \cdot a = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{K},$$

где 0 *— нейтральный элемент по сложению, а также*

$$(-1)a = -a \ \ \forall\, a \in \mathbb{K}.$$

Есть числовые поля помимо перечисленных выше (например, поле чисел вида $a + b\sqrt{2}$, a, $b \in \mathbb{Q}$), есть также нечисловые поля. Часто наши конструкции работают над произвольным полем. Если читателю психологически трудно представлять себе произвольное поле $\mathbb{K}$, то не будет ничего страшного, если он каждый раз будет иметь в виду конкретный пример поля, скажем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Есть поля с довольно экзотическими свойствами, например в некоторых выполняется тождество $1 + 1 = 0$. Примером такого поля является поле из двух элементов (это наименьшее возможное поле: из данного выше определения следует, что в любом поле $0 \neq 1$). Читателю в качестве упражнения предлагается его построить. Поля со свойством $1+1 = 0$ называются *полями характеристики* 2.

Очевидным образом определяется понятие подполя. Например, $\mathbb{Q}$ является подполем в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а $\mathbb{R}$ — в $\mathbb{C}$.

1.5 Некоммутативные группы

Помимо коммутативных групп в дальнейшем нам встретятся и некоммутативные группы, дадим поэтому общее определение группы.

Определение 1.21. *Группой* называется пара $(G, \cdot)$, состоящая из множества G и заданной на нем бинарной операции $\cdot$, обладающая следующими свойствами:

(i) операция $\cdot$ ассоциативна: для любых g_1, g_2, g_3 из G имеет место тождество $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$;

(ii) существует элемент $e \in G$, такой что $g \cdot e = g = e \cdot g$ для любого $g \in G$; такой элемент называется *нейтральным*;

(iii) для любого $g \in G$ существует *обратный* элемент, то есть такой $h \in G$, что $g \cdot h = e = h \cdot g$. Обратный для g обычно[7] обозначается g^{-1}.

Заметим, что если вдобавок к перечисленным условиям выполнено также условие коммутативности:

(iv) для любых g_1, $g_2 \in G$ имеет место равенство $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$,

[7] при условии, если операция обозначается как умножение, что имеет место в нашем случае; если операцию записывать как сложение, то обратный к g естественно обозначить $(-g)$.

то мы снова возвращаемся к определению коммутативной группы (с тем единственным отличием от Определения 1.12, что для обозначения операции на этот раз вместо $+$ использован знак $\cdot$).

Задача 1.22. *Докажите, что*

1) *нейтральный элемент в группе* $(G, \cdot)$ *единственен, то есть если* $e' \in G$ *— еще один элемент такой, что* $g \cdot e' = g = e' \cdot g \ \ \forall g \in G$, *то* $e = e'$;

2) *для каждого* $g \in G$ *обратный элемент* g^{-1} *единственен;*

3) $\forall g, h \in G$ *уравнения* $x \cdot g = h, \ \ g \cdot y = h$ *имеют единственные решения (именно,* $x = h \cdot g^{-1}$ *и* $y = g^{-1} \cdot h$ *соответственно).*

Кроме того, из ассоциативности операции в группе следует, что произведение произвольного конечного числа элементов группы не зависит от расстановки скобок. Читатель может попытаться доказать это, используя индукцию по числу элементов в произведении.

Определение 1.23. Непустое подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы $(G, \cdot)$, если $\forall (h_1, h_2) \in H \times H \ \Rightarrow \ h_1 \cdot h_2 \in H; \ \ \forall h \in H \ \Rightarrow \ h^{-1} \in H.$

Заметим, что тогда пара $(H, \cdot)$[8] сама является группой.

Ниже мы будем для группы $(G, \cdot)$ использовать упрощенное обозначение G если ясно, какая операция подразумевается.

Группы часто возникают как группы обратимых преобразований какого-либо множества, сохраняющих некоторую структуру на нем. Читатель, вероятно, знает группу аффинных преобразований плоскости, которая дает пример некоммутативной группы. Она содержит группу движений плоскости в качестве подгруппы (это такие преобразования плоскости, которые сохраняют расстояния между точками). Еще пример некоммутативной группы дает группа поворотов трехмерного пространства относительно фиксированной точки.

В дальнейшем в курсе мы определим важные примеры некоммутативных групп — группу $\mathrm{GL}(V)$ невырожденных линейных преобразований n-мерного векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ (относительно операции композиции), а также группу $\mathrm{O}(V)$ ортогональных преобразований n-мерного евклидова пространства V. Выбор базиса в V определяет изоморфизм группы $\mathrm{GL}(V)$ с группой $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (относительно операции умножения) невырожденных матриц порядка n над полем $\mathbb{K}$, (соответственно в случае евклидова пространства изоморфизм группы $\mathrm{O}(V)$ с группой $\mathrm{O}(n)$ ортогональных матриц порядка n).

Приведем еще пример конечной (как множества) некоммутативной группы.

Пример 1.24. Пусть $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ — множество из n первых натуральных чисел. Рассмотрим множество

$$S_n := \{\varphi \colon [n] \to [n] \mid \varphi \ \text{ биективно}\}$$

[8]чтобы не усложнять обозначения, операцию $\cdot$ на G и ее ограничение на подмножество $H \subset G$ мы обозначаем одним и тем же символом.

всех биекций конечного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя (читатель, наверное, знает[9], что их $n!$ штук). На S_n определена операция композиции $\circ$, которая ассоциативна, и так как композиция биекций биекция, обратное отображение к биекции биекция, тождественное отображение — биекция, то $(S_n, \circ)$ — группа. Легко проверить, что она некоммутативна при $n > 2$.

1.6 Векторные пространства

В следующем определении нам понадобится понятие *внешней* бинарной операции, а именно произвольного отображения

$$\varphi \colon K \times L \to L,$$

где $K \neq L$.

Определение 1.25. *Векторным* (или *линейным*) *пространством* над полем $\mathbb{R}$ называется тройка $(V, +, \cdot)$, состоящая из множества V, на котором заданы две бинарные операции:

внутренняя, называемая *сложением*: $\quad V \times V \xrightarrow{+} V, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$, и

внешняя, называемая *умножением* на числа ("скаляры") $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad \mathbb{R} \times V \xrightarrow{\cdot} V, \quad (\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$,

удовлетворяющие следующим условиям ("аксиомам векторного пространства"):

1) $(V, +)$ — абелева группа (называемая *аддитивной группой векторного пространства* V);

2) умножение на скаляры обладает свойствами: a) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ $(1 \in \mathbb{R})$ $\forall \mathbf{v} \in V$, b) $(\lambda \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in V$;

3) сложение и умножение связаны законами дистрибутивности: a) $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in V$, b) $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Элементы произвольного векторного пространства называются *векторами*. Заметим, что в определении векторного пространства вместо поля $\mathbb{R}$ можно взять произвольное поле $\mathbb{K}$, получив определение векторного пространства над полем $\mathbb{K}$. Общий случай мы пока рассматривать не будем и под векторным пространством будем подразумевать векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ называются *вещественными*, а над полем $\mathbb{C}$ — *комплексными*.

В дальнейшем мы будем опускать обозначение $\cdot$ умножения числа на вектор, записывая $\lambda \cdot \mathbf{v}$ просто как $\lambda \mathbf{v}$. Кроме того, вместо тройки $(V, +, \cdot)$ мы будем писать просто V, подразумевая, что операции в векторном пространстве ясны из контекста.

Укажем некоторые следствия аксиом векторного пространства, не являющиеся следствиями аксиом абелевой группы. Читателю предлагается доказать их в качестве задачи.

Задача 1.26. *Докажите, что в произвольном векторном пространстве* $(V, +, \cdot)$ *имеют место тождества:*

[9] А если нет, то легко докажет.

1) $\lambda\,\mathbf{0}=\mathbf{0}\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$;

2) $\lambda\,(-\mathbf{v})=-\lambda\,\mathbf{v}\quad\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\ \mathbf{v}\in V$;

3) $0\mathbf{v}=\mathbf{0}\quad\forall\,\mathbf{v}\in V$;

4) $(-1)\mathbf{v}=-\mathbf{v}\quad\forall\,\mathbf{v}\in V$.

Рассмотрим примеры векторных пространств.

Пример 1.27. Множество $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ матриц данного размера $m\times n$ с операциями сложения и умножения на числа (в частности, множество столбцов высоты n, часто вместо $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ обозначаемое $\mathbb{R}^n$) является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Пример 1.28. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно рассматривать как двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1,\ i\}$. Действительно, относительно сложения комплексные числа образуют абелеву группу; кроме того, операция умножения на действительные числа обладает требуемыми свойствами п.2) Определения 1.25 и, наконец, выполнены законы дистрибутивности из п.3) Определения 1.25. Кроме того, всякое комплексное число $z\in\mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $\lambda\cdot 1+\mu\cdot i$, где $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$, следовательно, $\{1,\ i\}$ — базис в векторном пространстве $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$. Это дает возможность изображать комплексные числа векторами на плоскости. Про связь геометрии евклидовой плоскости с комплексными числами можно почитать, например, в [1].

Пример 1.29. Из курса аналитической геометрии нам хорошо знакомы “геометрические” примеры вещественных векторных пространств — пространства свободных векторов на плоскости и в пространстве относительно обычных операций сложения векторов и умножения их на числа (определение свободного вектора и линейных операций над свободными векторами см. например в [5]).

Определение 1.30. Пусть $U\subset V$ — подмножество множества векторов векторного пространства $(V,\ +,\ \cdot)$ такое, что

1) $(U,\ +)$ — подгруппа аддитивной группы $(V,\ +)$;

2) $\mathbf{u}\in U\quad\Rightarrow\quad\lambda\,\mathbf{u}\in U\ \ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}$.

Тогда $(U,\ +,\ \cdot)$ называется векторным (= линейным) *подпространством* пространства $(V,\ +,\ \cdot)$.

Заметим, что подпространство само является векторным пространством относительно операций, ограниченных с объемлющего пространства.

Приведем некоторые примеры векторных подпространств.

Самое “маленькое” подпространство в $(V,\ +,\ \cdot)$ состоит только из нулевого вектора, самое “большое” — совпадает со всем пространством $(V,\ +,\ \cdot)$.

Если зафиксировать какую-нибудь прямую на плоскости или в трехмерном пространстве, то множество всех свободных векторов, параллельных ей, образуют подпространство в пространстве свободных векторов соответственно на плоскости или в пространстве. То же для фиксированной плоскости в пространстве. Подпространство образует также подмножество всех симметричных (или кососимметричных) матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является подпространством пространства $\mathbb{C}$ из Примера 1.28.

Важным результатом о системах линейных уравнений является то, что множество всех решений *однородной* системы является линейным пространством (подпространством в пространстве столбцов высоты, равной числу неизвестных). Более того, любое подпространство в $\mathbb{R}^n$ можно задать как пространство решений некоторой системы линейных однородных уравнений от n неизвестных.

1.7 Базисы

Пусть V — векторное пространство.

Определение 1.31. *Системой* n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) векторов пространства V называется произвольное отображение $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to V$.

Заметим, что при $n = 0$ получаем *пустую систему*, состоящую из пустого множества векторов.

Систему n векторов мы будем записывать в виде $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, где $f(k) = \mathbf{v}_k, \quad k = 1, \ldots, n$. Заметим, что система векторов отличается от подмножества двумя свойствами: во-первых, векторы системы имеют естественный порядок (занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$), и, во-вторых, в систему элемент может входить более одного раза (то есть возможны повторения).

Линейной комбинацией системы векторов $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ пространства V называется выражение вида

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n.$$

После проведения всех вычислений (умножений на скаляры и сложений) такое выражение будет некоторым конкретным вектором $\mathbf{v} \in V$. В этом случае говорят, что вектор $\mathbf{v}$ *представляется в виде линейной комбинации* системы $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ или *раскладывается* по данной системе. По определению, линейная комбинация пустой системы векторов равна нулю.

Система $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ называется *линейно независимой*, если нулевой вектор по ней раскладывается единственным образом — с нулевыми коэффициентами, то есть если из $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. В противном случае система линейно зависима.

То есть система $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *линейно зависима*, если найдется набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ элементов из $\mathbb{R}$, среди которых не все нулевые, такой, что $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

Из курса аналитической геометрии читателю должны быть известны характеризации линейно зависимых и независимых систем в пространствах размерности 1, 2 и 3 (вроде "три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны").

Определение 1.32. *Базисом* в векторном пространстве V называется такая система векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ пространства V, что произвольный вектор $\mathbf{v} \in V$ однозначно представляется в виде их линейной комбинации

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + v_n \mathbf{e}_n. \tag{2}$$

Однозначность разложения (2) (при условии существования) равносильна линейной независимости системы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, в то время как существование разложения произвольного вектора связано с максимальностью такой системы среди всех линейно независимых систем.

Не во всяком векторном пространстве есть базис в смысле данного выше определения. Ниже мы докажем теорему о том, что если в пространстве существует базис из n векторов, то любой другой базис этого пространства содержит то же количество n векторов. Число элементов произвольного базиса в V называется *размерностью* пространства V и обозначается $\dim V$.

В данном курсе мы в основном будем заниматься пространствами, в которых есть базис в указанном смысле; такие пространства называются *конечномерными.* В пространстве, состоящем только из нулевого вектора, базисом по определению является пустая система (и, таким образом, его размерность равна нулю).

1.8 Кольца и алгебры

Определение 1.33. *Кольцом* называется множество R, на котором заданы две бинарные операции $+$ и $\cdot$, называемые соответственно *сложением* и *умножением*, причем

1) $(R, +)$ является абелевой группой;

2) сложение и умножение связаны законом дистрибутивности:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca \;\; \forall a,\, b,\, c \in R.$$

Следующие условия являются дополнительными и в произвольном кольце могут не выполняться:

- ассоциативность (мультипликативная) $(ab)c = a(bc)$;
- наличие мультипликативной единицы $\mathtt{1}$, то есть такого элемента, что $a\mathtt{1} = \mathtt{1}a = a$;
- коммутативность $ab = ba$.

Эти условия выделяют специальные классы колец: ассоциативные кольца, кольца с единицей и коммутативные кольца соответственно.

В частности, поле — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, в котором не менее двух элементов, и все ненулевые элементы обратимы. Целые числа дают пример ассоциативного коммутативного кольца с единицей, не являющегося полем. Еще одним примером такого кольца является кольцо многочленов над полем $\mathbb{K}$, обозначаемое $\mathbb{K}[x]$.

Определение 1.34. *Алгеброй над полем* $\mathbb{K}$ называется множество A, снабженное тремя операциями (двумя внутренними и одной внешней):

$$A \times A \to A, \quad (a_1,\, a_2) \mapsto a_1 + a_2, \quad A \times A \to A, \quad (a_1,\, a_2) \mapsto a_1 a_2,$$

$$\mathbb{K} \times A \to A, \quad (\lambda,\, a) \mapsto \lambda a,$$

называемыми соответственно сложением, умножением и умножением на скаляры (=элементы поля $\mathbb{K}$), обладающими следующими свойствами:

- относительно операций сложения и умножения A является кольцом;
- относительно сложения и умножения на скаляры A является векторным пространством;
- $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ a,\ b \in A.$

Алгебра называется ассоциативной (коммутативной, с единицей), если соответствующее кольцо ассоциативно (коммутативно, с единицей).

Основным для нас примером ассоциативной алгебры над полем $\mathbb{K}$ будет алгебра линейных операторов на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$, обозначаемая $\mathcal{L}(V)$. В ней операции сложения, умножения и умножения на скаляры задаются соответственно сложением линейных операторов, их композицией и умножением операторов на скаляры. Выбор базиса в V определяет некоторый изоморфизм $\mathcal{L}(V)$ с алгеброй матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, где $n = \dim V$ (изоморфизм — биекция, сохраняющая все операции). Алгебра $\mathcal{L}(V)$ обладает единицей (тождественным оператором) и некоммутативна при $n > 1$.

Пример коммутативной ассоциативной алгебры с единицей над полем $\mathbb{K}$ дает алгебра многочленов $\mathbb{K}[x]$. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является алгеброй над полем $\mathbb{R}$. Более того, если $\mathbb{F}$ — подполе поля $\mathbb{K}$, то $\mathbb{K}$ является $\mathbb{F}$-алгеброй. В частности, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ являются алгебрами над полем $\mathbb{Q}$. Интересным примером алгебры над полем $\mathbb{R}$ является алгебра кватернионов $\mathbb{H}$[10], которая является ассоциативной некоммутативной алгеброй с единицей, в которой всякий ненулевой элемент обратим. Таким образом, $\mathbb{H}$ является некоммутативным аналогом поля; такие алгебраические структуры называются *телами.* Можно распространить понятие векторного пространства на случай, когда вместо основного поля рассматривается тело, только в случае тел нужно различать понятия левого и правого векторного пространства.

Примером неассоциативной алгебры является 3-мерное евклидово ориентированное пространство с векторным произведением в качестве умножения. Это пример алгебры из важнейшего класса неассоциативных алгебр — алгебр Ли.

2 Алгебра матриц

2.1 Определение и виды матриц

Определение 2.1. *Матрицей* размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{K}$ называется прямоугольная таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

с $a_{ij} \in \mathbb{K},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$, в которой m строк и n столбцов.

Читатель заметил, что в нашей записи элемент a_{ij} матрицы стоит на пересечении i-й стоки и j-го столбца. То есть первый индекс обозначает номер строки, второй — столбца. Матрицы мы

[10]Подробнее о кватернионах написано в книгах [1], [6], [2].

будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$. Краткая запись матрицы (3)

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m,\\ 1\le j\le n}}$$

или просто $A = (a_{ij})$, если размеры уже указаны.

Если число столбцов $n = 1$, то матрица называется *столбцом*, если число строк $m = 1$, то матрица называется *строкой*. Если число строк равно числу столбцов, то есть $m = n$, то матрица называется *квадратной*. Квадратную матрицу размера $n \times n$ также называют матрицей *порядка* n. *Главная диагональ* матрицы A порядка n образована элементами a_{ii}, $1 \le i \le n$. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю: $a_{ij} = 0$ при $i \ne j$. Другими словами, все ее ненулевые элементы (если они есть) стоят на главной диагонали. Матрица порядка n называется *единичной*, если она диагональна и на главной диагонали стоят единицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица порядка n обозначается E_n или просто E.

Пусть $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (соответственно $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$) обозначает множество всех $m \times n$-матриц (соответственно матриц порядка n) над полем $\mathbb{K}$. Заметим, что две матрицы A и B над одним и тем же полем *равны*, если они имеют одинаковые размеры и соответствующие элементы матриц равны, $a_{ij} = b_{ij}$.

2.2 Операции с матрицами

Для любых двух матриц A, $B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ одинакового размера определена их *сумма* $A + B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, которая является матрицей того же размера. Матрицы складываются покомпонентно: если $C := A + B,\ C = (c_{ij})$, то

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Из определения суммы матриц и свойств операции сложения элементов поля сразу следуют свойства операции сложения матриц:

1) $\forall A,\, B,\, C \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})\quad (A + B) + C = A + (B + C)$ (*ассоциативность* сложения матриц);

2) $\exists O \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (а именно, *нулевая* матрица, состоящая из одних нулей) такая, что $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})\quad A + O = A = O + A$ (существование *нейтрального*, в данном случае нулевого, элемента);

3) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})\ \exists(-A) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (*противоположная* к A матрица, у которой на (i, j)-м месте стоит $-a_{ij}$) такая, что $A+(-A) = O = (-A)+A$ (существование *обратного*, в данном случае противоположного элемента);

4) $\forall A,\, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})\quad A + B = B + A$ (*коммутативность* сложения матриц).

Выполнение условий 1)—3) означает, что множество $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ с операцией сложения является *группой*, а дополнительное условие 4) означает, что эта группа *коммутативна*, или *абелева.*

Кроме того, для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ и элемента поля (= скаляра) $\lambda \in \mathbb{K}$ определена матрица $A' := \lambda A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ с элементами $a'_{ij} = \lambda a_{ij},\ \ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$ (то есть λA получается из A умножением всех ее элементов на λ).

Из определения легко выводятся свойства операции умножения матриц на скаляры:

5) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall\,\lambda,\,\mu \in \mathbb{K}\quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;

6) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})\quad 1A = A$ (здесь 1 обозначает единицу поля $\mathbb{K}$).

Кроме того, непосредственно проверяется, что операции сложения матриц и умножения матриц на скаляры связаны *законами дистрибутивности:*

7) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall\,\lambda,\,\mu \in \mathbb{K}\quad (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;

8) $\forall A,\,B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

Выполнение свойств 1)—8) означает, что имеет место следующая Теорема.

Теорема 2.2. *Для любой пары натуральных чисел m, n множество $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ матриц размера $m\times n$ с операциями сложения и умножения на скаляры является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$.*

Определим mn матриц

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,$$

в которых единственный ненулевой элемент — единица, строящая на пересечении i-й строки и j-го столбца. Эти матрицы называются *матричными единицами* (не путать с единичной матрицей). Они образуют базис в пространстве $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Действительно, произвольная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ единственным образом раскладывается по нему следующим образом:

$$A = \sum_{1\le i\le m,\,1\le j\le n} a_{ij}E_{ij},$$

то есть координатами являются ее матричные элементы.

Перейдем теперь к наиболее интересной и наименее тривиальной операции над матрицами — их произведению. Конечно, можно было бы определить произведение двух матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров $m \times n$ как такую матрицу $C = (c_{ij})$, что $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, но это “произведение”[11] не представляет для нас интереса, хотя и обладает рядом “хороших” свойств. “Настоящее” произведение матриц определяется иначе.

[11]оно называется *произведением Адамара.*

Произведение AB матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $k \times p$ существует тогда и только тогда, когда $n = k$, то есть когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй (значит, произведение BA существует тогда и только тогда, когда $p = m$), и в последнем случае имеет размер $m \times p$ (соотв. $k \times n$). Все это будет следовать из определения произведения матриц, которое мы сейчас дадим.

Итак, пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Тогда у матрицы $C = AB = (c_{ij})$ элемент c_{ij} вычисляется по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq p,$$

то есть является суммой произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B (кратко это правило может быть сформулировано так: матрицы перемножаются по правилу “строка на столбец”). Чтобы такое произведение было определено, нужно, чтобы длина строк матрицы A была равна высоте столбцов матрицы B. Кроме того, индекс i пробегает номера строк матрицы A, а j — номера столбцов матрицы B, отсюда получаем, что произведение AB является матрицей размера $m \times p$, как и утверждалось.

Разберем несколько частных случаев. Например, определено произведение строки длины n на столбец высоты n, которое является матрицей размера 1×1[12]. В обратном порядке их произведение также определено и является уже матрицей размера $n \times n$.

Задача 2.3. *Покажите, что умножение произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ на матричную единицу E_{ij} порядка m слева дает матрицу $E_{ij}A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, у которой в i-й строке стоит j-я строка матрицы A, а в остальных местах нули. Аналогично, умножение матрицы A на матричную единицу E_{ij} порядка n справа дает матрицу, у которой в j-м столбце стоит i-й столбец матрицы A, а в остальных местах — нули.*

Задача 2.4. *Любую ли матрицу размера $m \times n$ можно представить в виде произведения столбца высоты m на строку длины n при $m,\ n > 1$?*

Также определено произведение $A\mathbf{b}$ матрицы A размера $m \times n$ на столбец $\mathbf{b}$ высоты n, которое является столбцом высоты m. Посчитаем это произведение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} b_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} b_n. \tag{4}$$

[12]Заметим, что считать матрицу порядка 1 “просто числом” неправильно: число (скаляр) можно умножать на любую матрицу, в то время как матрицу порядка 1 можно умножать слева только на строку, а справа — только на столбец.

Таким образом, столбец $A\mathbf{b}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами из столбца $\mathbf{b}$.

Пусть $\mathbf{b}_i,\ i = 1, \dots, p$ — столбцы матрицы B, то есть $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p)$. Тогда из определения умножения матриц следует, что $AB = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_p)$, то есть i-й столбец матрицы AB есть произведение A на $\mathbf{b}_i$. Таким образом, нами доказано следующее Предложение.

Предложение 2.5. *i-й столбец матрицы AB ($i = 1, \dots, p$) является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами из i-го столбца матрицы B. Аналогично, i-я строка матрицы AB является линейной комбинацией строк матрицы B с коэффициентами из i-й строки матрицы A.*

Следующее Предложение проверяется прямым вычислением (в дальнейшем, при изучении связи матриц с линейными отображениями, мы получим более концептуальное доказательство этих результатов).

Предложение 2.6. *Умножение матриц ассоциативно всякий раз когда оно определено. То есть если одно из произведений $(AB)C$ или $A(BC)$ существует, то существует и другое, и они равны: $(AB)C = A(BC)$ (в частности, это всегда верно для квадратных матриц одного порядка). Кроме того, если $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, то $E_m A = A = AE_n$, где E_m и E_n — единичные матрицы порядков m и n соответственно.*

Кроме того, сложение и умножение матриц связаны законами дистрибутивности:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

и для любого $\lambda \in \mathbb{K}$ выполнены равенства $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ (всюду размеры матриц предполагаются согласованными, чтобы операции имели смысл).

Задача 2.7. *Покажите, что при умножении произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ на матрицу $P_{ij}(\lambda) := E + \lambda E_{ij}$ (см. (7)) порядка m слева дает матрицу $P_{ij}(\lambda)A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, которая получается из A прибавлением к i-й строке ее j-й строки, умноженной на λ. Аналогично, умножение матрицы A на на матрицу $P_{ij}(\lambda) := E + \lambda E_{ij}$ порядка n справа дает матрицу, которая получается из A прибавлением к j-му столбцу ее i-го столбца. (Указание: использовать задачу 2.3).*

Перечисленные до сих пор свойства умножения в случае квадратных матриц фиксированного порядка (ассоциативность, существование нейтрального элемента, дистрибутивность относительно сложения) аналогичны свойствам умножения чисел. Однако есть и принципиальные отличия. Во-первых, умножение (даже квадратных) матриц, вообще говоря, некоммутативно. Читатель легко убедится в этом, перемножив, например, матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Две матрицы A, B называются *перестановочными*, если $AB = BA$ (в частности, они обязательно квадратные одного порядка). Матрицы вида λE (где E, как обычно, обозначает единичную матрицу) называются *скалярными*.

Задача 2.8. *Докажите, что матрица перестановочна со всеми матрицами данного порядка тогда и только тогда, когда она скалярна.*

Во-вторых, пример с матрицами (5) показывает, что произведение ненулевых матриц может равняться нулевой матрице. Есть даже ненулевые матрицы, некоторая степень которых равна нулевой матрице (например, квадрат второй из матриц (5)). С этим связано третье отличие: не всякая ненулевая матрица имеет обратную.

Определение 2.9. Матрица B называется *обратной* для матрицы A, если

$$AB = E = BA.$$

Матрица, для которой существует обратная, называется *обратимой*. Обратная матрица обычно обозначается A^{-1}.

Замечание 2.10. Легко видеть, что предыдущее определение имеет смысл только для квадратных матриц. Мотивировка его следующая: число b называется обратным для числа a, если $ab = 1$; аналогом числа 1 (нейтрального элемента по умножению) в случае квадратных матриц является единичная матрица; из-за некоммутативности умножения матриц помимо равенства $AB = E$ требуется также выполнение равенства $BA = E$.

Задача 2.11. *Докажите, что если обратная матрица для данной матрицы существует, то она единственна.*

Задача 2.12. *Пусть для матрицы* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ *существует такая ненулевая матрица* $C \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{K})$*, что* $AC = O$*. Тогда для* A *не может существовать обратной.*

Из-за некоммутативности умножения матриц матричные уравнения $AX = B$ и $YA = B$, даже если матрица A обратима, имеют, вообще говоря, разные решения $X = A^{-1}B \neq BA^{-1} = Y$. То есть для матриц есть левое и правое деления.

Не следует думать, что перечисленные "отрицательные" свойства являются "недостатками" операций с матрицами. Например, матрицы используются в математическом аппарате квантовой механики и некоммутативность их умножения связана с соотношением неопределенностей Гейзенберга.

Есть еще одна важная операция с матрицами — транспонирование. Пусть A — матрица размера $m \times n$. Тогда ее транспонированная матрица A^T имеет размер $n \times m$ и характеризуется тем, что ее i-й столбец равен i-й строке матрицы A при $i = 1, \ldots, m$. Если $A^T = (a^T_{ij})$, то $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Предложение 2.13. *Операция транспонирования матриц* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}),\ \ A \mapsto A^T$ *обладает следующими свойствами:*

1) $\forall A,\, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})\ (A+B)^T = A^T + B^T$*;*

2) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda A)^T = \lambda A^T$

3) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})\ (A^T)^T = A$ *(в частности, любая матрица является транспонированной к некоторой, а именно к* A^T*);*

4) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \ B \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})\ (AB)^T = B^T A^T$;

5) При условии что $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *обратима,* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Доказательство. Проверка первых трех свойств тривиальна. Докажем последние два.

4) Обозначим $C := AB$. Имеем

$$c^T_{ki} = c_{ik} = \sum_j a_{ij}b_{jk} = \sum_j b_{jk}a_{ij} = \sum_j b^T_{kj}a^T_{ji},$$

откуда и следует требуемое $C^T = B^T A^T$.

5) Проверим, что обратной к $(A^{-1})^T$ является A^T. В самом деле,

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E, \quad (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E.$$

Тогда в силу единственности обратной матрицы $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. ∎

Матрица A называется *симметричной* (соответственно *кососимметричной*), если $A^T = A$ (соответственно $A^T = -A$). Легко видеть, что матрица A симметрична (соответственно кососимметрична) тогда и только тогда, когда все ее матричные элементы удовлетворяют тождеству $a_{ij} = a_{ji}$ (соответственно тождеству $a_{ij} = -a_{ji}$). То есть в симметричной матрице (которая обязательно является квадратной) на симметричных относительно главной диагонали местах стоят равные элементы, а у кососимметричной такие элементы отличаются знаком (в частности, на главной диагонали кососимметричной матрицы сторят нули).

Множество всех симметричных (соответственно кососимметричных) матриц порядка n обозначим $\mathrm{Mat}^+_n(\mathbb{R})$ (соответственно $\mathrm{Mat}^-_n(\mathbb{R})$).

Задача 2.14. *Используя свойства 1) и 2) из предыдущего Предложения докажите, что множества* $\mathrm{Mat}^+_n(\mathbb{R})$ *и* $\mathrm{Mat}^-_n(\mathbb{R})$ *являются линейными подпространствами в* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. *Каковы их размерности?*

Следующая задача показывает, что можно построить такую биекцию между комплексными числами и некоторым двумерным пространством вещественных матриц порядка 2, что сложение и умножение комплексных чисел перейдут соответственно в сложение и умножение матриц.

В самом деле, рассмотрим подпространство матриц

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,\, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Из представления $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aE + bJ$, где $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ легко видеть, что A — двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{E,\, J\}$. Также легко проверить, что $J^2 = -E$ (матричный аналог соотношения $i^2 = -1$).

Оказывается, A — не просто подпространство в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, а кольцо, и даже поле, изоморфное полю $\mathbb{C}$ (относительно обычных операций сложения и умножения матриц).

Задача 2.15. *Докажите, что отображение*

$$\varphi\colon \mathbb{C} \to A, \quad \varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

определяет изоморфизм поля $\mathbb{C}$ с полем матриц указанного вида. Более подробно, проверьте, что φ биективно и сохраняет операции, то есть $\varphi((a+bi)+(c+di)) = \varphi(a+bi)+\varphi(c+di)$ и $\varphi((a+bi)(c+di)) = \varphi(a+bi)\varphi(c+di)$.

Также докажите, что ограничение φ на $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ определяет изоморфизм группы из Задачи 1.17 с группой матриц поворотов (с операцией умножения). Как это связано с формулой Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$?

В частности, из предыдущей задачи следует, что все ненулевые матрицы вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ обратимы. Читателю предлагается получить явное выражение для обратной матрицы.

2.3 Элементарные преобразования

В этом разделе мы введем и начнем изучать элементарные преобразования строк и столбцов матриц, которые будут играть важную роль в дальнейшем.

Пусть A — произвольная матрица размера $m \times n$. Определим элементарные преобразования ее строк.

Определение 2.16. *Элементарным преобразованием типа I* строк матрицы A называется прибавление к некоторой ее строке (скажем, с номером i, $1 \le i \le m$) некоторой другой ее стороки (скажем, с номером j, $1 \le j \le m$, $j \ne i$), умноженной на некоторое число λ (при этом остальные строки кроме i-й не меняются).

Элементарным преобразованием типа II строк матрицы A называется перестановка местами двух ее строк (скажем i-й и j-й, $1 \le i \ne j \le m$).

Элементарным преобразованием типа III строк матрицы A называется умножение некоторой ее строки (скажем, с номером i, $1 \le i \le m$) на *ненулевое* число c.

Аналогично определяются три типа элементарных преобразований столбцов.

Заметим, что элементарные преобразования обратимы, то есть для каждого элементарного преобразования строк матриц с m строками существует (причем единственное) элементарное преобразование строк такое, что их композиция (последовательное выполнение) есть *тождественное преобразование* на множестве матриц с m строками (которое само является элементарным преобразованием типа I (при $\lambda = 0$) или типа II (при $c = 1$)). Например, для введенного в предыдущем Определении элементарного преобразования типа I обратным будет прибавление к i-й строке j-й, умноженной на $-\lambda$; элементарное преобразование типа II обратно самому себе; обратное к элементарному преобразованию типа III есть умножение i-й строки на c^{-1} (которое существует, поскольку $c \ne 0$).

Элементарные преобразования строк можно выполнять последовательно, получая из исходной матрицы A новые матрицы. Назовем две матрицы A и A' размера $m \times n$ *строчно эквивалентными*, если существует конечная последовательность элементарных преобразований строк, переводящая первую матрицу во вторую. Читателю предлагается провести несложную проверку того, что это — действительно отношение эквивалентности на $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Оно встретится нам в теории систем линейных уравнений.

Естественно спросить, как можно описать множество классов строчной эквивалентности матриц данного размера? Какие свойства матриц сохраняются при элементарных преобразованиях? Каков критерий того, что две матрицы данного размера строчно эквивалентны? В общем случае ответы на эти вопросы выходят за рамки нашего курса, но вскоре мы, например, сможем многое сказать о классе эквивалентности единичной матрицы.

Определение 2.17. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее строки линейно независимы. В противном случае матрица называется *вырожденной*.

Например, легко проверить, что единичная матрица невырождена, а нулевая квадратная матрица или матрица порядка $n \geq 2$ с одинаковыми строками — вырождены.

Еще пример: матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ вырождена, поскольку между ее строками $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ есть линейная зависимость $\mathbf{a_1} - \mathbf{2a_2} + \mathbf{a_3} = \mathbf{0}$.

Задача 2.18. *Докажите, что квадратная матрица A вырождена тогда и только тогда, когда существует такая строка $c \neq 0$, что $cA = 0$ (справа — нулевая строка).*

Предложение 2.19. *Если две матрицы строчно эквивалентны, то либо обе они вырождены, либо обе невырождены.*

Доказательство. Достаточно проверить, что элементарные преобразования всех трех типов невырожденную матрицу переводят в невырожденную. Для преобразований типов II и III это очевидно, для преобразований типа I проверяется непосредственно. ■

Вскоре мы докажем, что все невырожденные матрицы данного порядка образуют один класс строчной эквивалентности.

Определение 2.20. *Ведущим элементом* некоторой ненулевой строки матрицы A называется первый слева среди ее ненулевых элементов. То есть a_{ij} — ведущий элемент i-й строки матрицы A, если $a_{i1} = a_{i2} = \ldots = a_{ij-1} = 0$, но $a_{ij} \neq 0$.

Определение 2.21. Говорят, что матрица A размера $m \times n$ является *ступенчатой* (или что она "имеет *ступенчатый вид*"), если в каждой следующей ее строке сверху вниз как минимум на один нуль слева больше, чем в предыдущей. Иначе говоря, если a_{1j_1}, a_{2j_2}, $\ldots$, a_{rj_r} $(r \leq m)$ — последовательность из ведущих элементов ее ненулевых строк, то последовательность j_1, j_2, $\ldots$, j_r номеров их столбцов строго возрастает.

Ступенчатая квадратная матрица называется *строго верхнетреугольной*, если на главной диагонали стоят ненулевые элементы. Другими словами, если $m = n$ и a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{mm} — ее ведущие элементы.

Нетрудно видеть, что (квадратная) ступенчатая матрица невырождена тогда и только тогда, когда она строго верхнетреугольная.

Предложение 2.22. *Любой класс строчной эквивалентности матриц содержит ступенчатую матрицу.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что для любой матрицы A существует последовательность элементарных преобразований ее строк, приводящая ее к ступенчатому виду. Мы предъявим алгоритм построения такой последовательности.

Если матрица A нулевая, то она уже имеет ступенчатый вид. Пусть это не так, и пусть j_1 — номер ее первого слева ненулевого столбца. Если $a_{1j_1} \neq 0$, то, вычитая из строк, начиная со второй, нужную кратность первой строки, мы обнуляем все элементы j_1-го столбца, кроме первого. Если $a_{1j_1} = 0$, но $a_{ij_1} \neq 0$ (ненулевой элемент в j_1-м столбце существует по условию), мы меняем местами 1-ю и i-ю строки и приходим к описанной ситуации. Тем самым мы получаем матрицу, у которой ненулевые элементы второй и последующих строк стоят в столбцах с номерами, бóльшими j_1.

Далее мы применяем описанную процедуру к подматрице, образованной строками, начиная со второй, и т.д. В итоге получаем ступенчатую матрицу. ■

В частности, любая невырожденная матрица строчно эквивалентна строго верхнетреугольной.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду, описанный в предыдущем Предложении, называется *методом Гаусса.*

Чтобы описать дальнейшую процедуру "упрощения" матрицы, введем еще одно понятие.

Определение 2.23. *Главным столбцом* ступенчатой матрицы A называется любой столбец, в котором стоит ведущий элемент некоторой строки A.

Определение 2.24. Ступенчатая матрица называется *упрощенной*, если после отбрасывания ее нулевых строк (которые, если они есть, стоят на последних местах) главные столбцы составляют единичную подматрицу некоторого порядка $r \leq m$.

Предложение 2.25. *Любая матрица строчно эквивалентна упрощенной.*

Доказательство. К полученной на предыдущем шаге ступенчатой матрице применим процедуру, называемую *обратным ходом* метода Гаусса. Пусть $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ — номера всех ее главных столбцов (тогда строки с номерами, бóльшими r, равны нулю). Тогда $a_{rj_r} \neq 0$, и вычитая нужную кратность r-й строки из предыдущих, можно обнулить все элементы j_r-го столбца кроме a_{rj_r}. Это не испортит ступенчатого вида матрицы, поскольку $a_{ij_r} = 0$ при $i < r$. Далее повторяем указанную процедуру с главным столбцом с номером j_{r-1} и т.д. В конце концов мы получим матрицу, у которой (после отбрасывания нулевых строк) главные столбцы образуют диагональную подматрицу с ненулевыми элементами на главной диагонали. Деление строк на эти элементы (т. е. применение элементарных преобразований типа III) завершает доказательство. ■

Замечание 2.26. Можно доказать, что каждый класс строчной эквивалентности матриц содержит единственную упрощенную матрицу.

Пример 2.27. Приведем, например, к упрощенному виду матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(первая стрелка отвечает композиции двух элементарных преобразований типа I: вычитанию из второй строки первой, умноженной на 4 и вычитанию из третьей строки первой, умноженной на 7; вторая стрелка отвечает умножению второй строки на $-1/3$, третьей на $-1/6$ и последующему вычитанию из третьей строки второй; третья стрелка — вычитанию из первой строки второй, умноженной на 2).

Пример 2.28. Рассмотрим еще один пример приведения матрицы к упрощенному виду. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

приведем ее сначала к ступенчатому виду по нашему алгоритму. Для этого из 2-й, 3-й и 4-й строк вычитаем 1-ю строку, умноженную на 1, 2 и 2 соответственно. В результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее, прибавляя к 3-й и 4-й строкам 2-ю строку, умноженную на 3 и 4 соответственно, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, переставляя 3-ю и 4-ю строки, получаем ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем ее теперь к упрощенному виду, используя обратный ход метода Гаусса. Отбросив нулевую строку и вычтя из 2-й строки 3-ю, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычтя из 1-й строки удвоенную 2-ю и умножив 3-ю строку на -1, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У нее главные столбцы имеют номера 1, 2 и 4.

Выше уже было замечено, что ступенчатая матрица невырождена тогда и только тогда, когда она является строго верхнетреугольной. У строго верхнетреугольной матрицы все столбцы являются главными. Поэтому применение к ней обратного хода метода Гаусса дает единичную матрицу. Тогда с учетом предыдущего Предложения получаем половину следующего важного утверждения.

Предложение 2.29. *Матрица невырождена $\Leftrightarrow$ она строчно эквивалентна единичной.*

Доказательство. Как уже говорилось, импликация “$\Rightarrow$” следует из Предложения 2.25.

Обратная импликация вытекает из того, что единичная матрица, очевидно, невырождена. ∎

2.4 Системы линейных уравнений I

В данном параграфе мы начнем знакомство с системами линейных уравнений; более серьезная их теория будет изложена в следующих параграфах.

Линейным уравнением от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ — заданные элементы поля $\mathbb{K}$. Линейное уравнение называется *однородным*, если $b = 0$.

Системой m линейных уравнений от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ (коротко СЛУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{6}$$

Система линейных уравнений (6) называется *однородной* (коротко СЛОУ), если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Решением СЛУ (6) называется любой упорядоченный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, такой что при подстановке α_i вместо x_i, $i = 1, \ldots, n$ каждое уравнение системы превращается в верное равенство.

Решить систему — значит найти множество всех ее решений. Это — некоторое подмножество $\mathbb{K}^n$.

Системы делятся на *совместные* (множества решений которых непусты) и *несовместные*. Однородная система всегда совместна, поскольку всегда имеет *тривиальное решение* $(0, 0, \ldots, 0)$.

Две СЛУ называются *эквивалентными*, если их множества решений совпадают, то есть каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот.

Матрицей коэффициентов системы (6) называется матрица

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а расширенной матрицей системы (6) — матрица

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Столбец $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_m)^T$ называется *столбцом правых частей* системы (6). С использованием матричного умножения систему (6) можно записать в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)^T$ — столбец неизвестных (ср. (4)).

Заметим, что и наоборот, по расширенной матрице однозначно восстанавливается СЛУ.

Элементарные преобразования строк расширенной матрицы отвечают соответствующим преобразованиям СЛУ: прибавлению к некоторому уравнению системы некоторого другого ее уравнения, умноженного на число, перестановке двух уравнений местами или умножению некоторого уравнения системы (его правой и левой частей) на ненулевое число.

Предложение 2.30. *Элементарные преобразования строк расширенной матрицы не меняют класса эквивалентности СЛУ.*

Доказательство. Ясно, что каждое решение исходной системы будет решением и системы, полученной после элементарного преобразования. Так как элементарные преобразования обратимы, то верно и обратное. ∎

Замечание 2.31. Внимательный читатель мог заметить, что на множестве систем из m уравнений от n неизвестных фактически определены два отношения эквивалентности: во-первых, системы эквивалентны, если имеют одинаковые множества решений, и во-вторых, системы эквивалентны, если могут быть получены одна из другой последовательностью элементарных преобразований. Можно показать, что на множестве *совместных* систем эти два отношения эквивалентности совпадают, то есть для двух совместных систем с одним и тем же множеством решений существует последовательность элементарных преобразований, преобразующая первую систему во вторую.

Теперь заметим, что произвольное решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ системы (6) — то же самое, что представление столбца правых частей $\mathbf{b}$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. В частности, решение однородной системы с матрицей коэффициентов A — то же, что некоторая конкретная линейная зависимость между столбцами матрицы A. Поэтому предыдущее Предложение может быть переформулировано в виде такого важного Следствия.

Следствие 2.32. *Строчно эквивалентные матрицы имеют одинаковые линейные зависимости между столбцами.*

Доказательство. Интерпретируем нашу матрицу A как матрицу коэффициентов СЛОУ. Линейная зависимость $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ между столбцами A — то же, что решение этой СЛОУ. При элементарном преобразовании СЛОУ перейдет в систему с тем же множеством решений, то есть данное решение $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ будет также решением преобразованной СЛОУ и определит линейную зависимость между столбцами преобразованной матрицы, которая является ее матрицей коэффициентов. То, что при этом не возникает новых линейных зависимостей, следует из обратимости элементарных преобразований. ∎

Например, столбцы исходной и полученной упрощенной матриц из примера 2.27 связаны линейной зависимостью $\mathbf{a_1} - \mathbf{2a_2} + \mathbf{a_3} = \mathbf{0}$.

Следствие 2.33. *Квадратная матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее столбцы линейно независимы.*

Доказательство. $\Rightarrow$: невырожденная матрица эквивалентна единичной, а у последней столбцы, очевидно, линейно независимы.

$\Leftarrow$: пусть столбцы A л.н.з., то есть строки A^T л.н.з., это означает, что A^T невырождена; по уже доказанному тогда столбцы A^T л.н.з., то есть строки A л.н.з., то есть A невырождена. ∎

Следствие 2.34. *Матрица A невырождена $\Leftrightarrow$ A^T невырождена.*

2.5 Элементарные матрицы

Элементарные преобразования строк из Определения 2.16 естественно рассматривать одновременно для всех матриц с m строками (и произвольным конечным числом столбцов). Размер таких матриц мы будем обозначать $m \times *$.

Следующее Предложение показывает, что действие элементарного преобразования строк сводится к умножению слева на некоторую квадратную матрицу.

Предложение 2.35. *Для произвольного элементарного преобразования ς матриц с m строками существует единственная $m \times m$-матрица S такая, что $\varsigma(A) = SA \; \forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times *}(\mathbb{K})$ (в частности, S не зависит от A, а зависит только от ς).*

Доказательство. Докажем вначале единственность. Так как в качестве A можно взять произвольную матрицу с m строками, то возьмем в качестве A единичную матрицу E порядка m. Тогда $\varsigma(E) = SE = S$. То есть условию доказываемого Предложения может удовлетворять только матрица, полученная применением данного элементарного преобразования ς к строкам единичной матрицы E. Для элементарных преобразований из Определения 2.16 это дает матрицы

$$P_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & 1 & \ldots & \lambda & \ldots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = E + \lambda E_{ij}, \qquad Q_{ij} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{7}$$

и

$$R_i(c) = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \dots & c & \dots \\ & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(у первых двух матриц выделены i-я и j-я строки, у третьей — i-я строка; при этом подразумевается, что на главной диагонали, если не указано противное, стоят единицы).

Теперь напрямую проверяется, что они удовлетворяют условию Предложения. При этом для матриц первого типа это уже было проверено в Задаче 2.7. ■

Матрицы, отвечающие элементарным преобразованиям, также называются *элементарными*. Поскольку они получаются из единичной матрицы применением элементарного преобразования строк, они невырождены.

Читателю предлагается показать, что элементарные преобразования столбцов аналогично связаны с умножением на элементарные матрицы справа.

Следующее Предложение практически очевидно.

Предложение 2.36. *Композиции элементарных преобразований ς_1, ς_2 отвечает произведение элементарных матриц S_1, S_2, то есть $\varsigma_2(\varsigma_1(A)) = S_2(S_1A) = (S_2S_1)A \ \ \forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times *}(\mathbb{K})$.*

Следствие 2.37. *Матрицы $P_{ij}(-\lambda)$, Q_{ij}, $R_i(c^{-1})$ обратны соответственно к матрицам $P_{ij}(\lambda)$, Q_{ij} и $R_i(c)$. В частности, матрица, обратная элементарной, сама элементарна.*

Доказательство. Заметим, что указанные пары матриц отвечают взаимно обратным элементарным преобразованиям. То есть таким ς_1, ς_2, что $\varsigma_2(\varsigma_1(A)) = A,\ \varsigma_1(\varsigma_2(A)) = A \ \ \forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times *}(\mathbb{K})$. В частности, $\varsigma_2(\varsigma_1(E)) = S_2S_1 = E,\ \ \varsigma_1(\varsigma_2(E)) = S_1S_2 = E$. ■

Произведение элементарных матриц, вообще говоря, не является элементарной матрицей.

Следствие 2.38. *Матрица невырождена $\Leftrightarrow$ она является произведением элементарных.*

Доказательство. Если матрица A невырождена, то она строчно эквивалентна единичной матрице. Другими словами, существует конечная последовательность элементарных преобразований строк, преобразующая единичную матрицу в A. То есть существует конечная последовательность элементарных матриц $S_1, \dots, S_p$ такая, что $A = S_p \dots S_1 E = S_p \dots S_1$.

Обратно, произведение элементарных матриц получается из единичной матрицы композицией элементарных преобразований строк и поэтому строчно эквивалентно единичной матрице, которая невырождена. ■

Конечно, представление невырожденной матрицы в виде произведения элементарных неоднозначно.

Задача 2.39. *Разложите матрицу* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *в произведение элементарных.*

Ответ: например,

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Следующее Предложение непостредственно вытекает из предыдущего Следствия.

Предложение 2.40. *Произведение невырожденных матриц невырождено.*

2.6 Связь невырожденности с обратимостью

Теорема 2.41. *Матрица обратима $\Leftrightarrow$ она невырождена.*

Доказательство. Если матрица A невырождена, то существует последовательность элементарных преобразований строк $\tau_1, \ldots, \tau_p$, преобразующая ее в единичную матрицу. Пусть $T_1, \ldots, T_p$ — соответствующая последовательность элементарных матриц. Тогда $E = T_p \ldots T_1 A$. Положим $B := T_p \ldots T_1$. Тогда $E = BA$. Матрица B, будучи произведением элементарных матриц, невырождена, поэтому к ней применимы те же соображения, то есть существует матрица C, являющаяся произведением некоторых элементарных матриц, такая, что $E = CB$. Имеем $A = (CB)A = C(BA) = C$, то есть B является обратной для A.

Обратно, пусть квадратная матрица A вырождена. Тогда ее столбцы линейно зависимы, то есть существует ненулевой столбец $\mathbf{c}$ такой, что $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Предположим, что обратная матрица A^{-1} существует, тогда, умножая обе части последнего равенства на нее, получаем $\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ — противоречие. ■

Замечание 2.42. Удобный критерий обратимости (=невырожденности) матрицы мы получим ниже в терминах определителя.

Задача 2.43. *Пусть A и B — две матрицы порядка m такие, что $AB = E$. Докажите, что тогда и $BA = E$ (то есть обе матрицы A и B обратимы и $B = A^{-1}$ (а значит и $A = B^{-1}$)).*

Решение. Если A — вырождена, то существует ненулевая строка $\mathbf{c}$ такая, что $\mathbf{c}A = \mathbf{0}$. Следовательно, $\mathbf{0} = (\mathbf{c}A)B = \mathbf{c}(AB) = \mathbf{c}E = \mathbf{c}$ — противоречие, значит, A невырождена. Тогда существует последовательность элементарных матриц $S_1, \ldots, S_k$ такая, что $S_k \ldots S_1 A = E$. Пусть $C := S_k \ldots S_1$, тогда $CA = E$. Откуда $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C$, поэтому в самом деле $BA = E$. ■

Замечание 2.44. На множестве $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ рассмотрим следующее отношение эквивалентности: $B \sim C \;\Leftrightarrow\; \exists$ невырожденная $m \times m$-матрица A такая, что $C = AB$. Легко видеть, что это отношение эквивалентности совпадает с отношением строчной эквивалентности на $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Отношение, связанное с умножением на невырожденные матрицы справа, совпадает с отношением столбцовой эквивалентности, которое определяется с помощью элементарных преобразований столбцов.

Пусть матрица A невырождена и $\tau_1, \ldots, \tau_p$ — последовательность элементарных преобразований строк, преобразующая ее в единичную матрицу; пусть $T_1, \ldots, T_p$ — соответствующий набор элементарных матриц. Тогда $E = T_p \dots T_1 A$ и $T_p \dots T_1 = A^{-1}$. Отсюда $T_p \dots T_1(A \mid E) = (E \mid A^{-1})$. То есть если к строкам матрицы $(A \mid E)$ применить последовательность элементарных преобразований, преобразующую A в единичную матрицу, то справа будет стоять обратная к A матрица (поскольку применение той же последовательности элементарных преобразований к строкам единичной матрицы E дает матрицу, обратную к A). Это дает удобный на практике способ нахождения обратной матрицы.

Теорема 2.45. *Невырожденные матрицы данного порядка m образуют группу по умножению.*

Доказательство. Действительно, умножение — бинарная ассоциативная операция на множестве $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$, причем произведение невырожденных матриц невырождено, единичная матрица невырождена и для любой невырожденной матрицы существует обратная, которая тоже невырождена. ■

Эта группа обозначается $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ и называется *полной линейной группой* порядка m. При $m = 1$ она совпадает с *мультипликативной группой* поля $\mathbb{K}$ (то есть с группой его ненулевых элементов относительно операции умножения); при $m \geq 2$ она некоммутативна.

2.7 Системы линейных уравнений II

Теперь мы собираемся применить результаты раздела 2.3 к теории систем линейных уравнений. Мы получим условия, при которых система несовместна, совместна и имеет единственное решение, и имеет более одного решения.

Определение 2.46. Совместная система уравнений называется *определенной* (соотв. *неопределенной*), если она имеет единственное решение (соотв. более одного решения).

Определение 2.47. Система линейных уравнений называется *ступенчатой*, если ее расширенная матрица $\tilde{A}$ ступенчатая. Система линейных уравнений называется *треугольной* (соотв. *строго треугольной*), если ее матрица коэффициентов является треугольной (соотв. строго треугольной).

Заметим, что у треугольной системы число уравнений равно числу неизвестных.

Так как элементарные преобразования системы заменяют ее на эквивалентную, из Предложения 2.22 следует, что достаточно исследовать (и научиться решать) ступенчатые системы.

Итак, рассмотрим произвольную ступенчатую СЛУ; пусть A (соотв. $\tilde{A}$) — ее матрица коэффициентов (соотв. расширенная матрица). Через r (соотв. $\tilde{r}$) обозначим число ненулевых строк матрицы A (соотв. $\tilde{A}$).

Ясно, что возможно два случая: (I) $\tilde{r} = r$ или (II) $\tilde{r} = r + 1$.

В случае (II) система содержит уравнение вида $0x_1 + \ldots + 0x_n = b,\ b \neq 0$ и поэтому является несовместной.

Рассмотрим теперь случай (I). Из того, что матрица A по предположению является ступенчатой следует, что число ее ступенек r не превосходит числа ее столбцов n, то есть числа неизвестных $x_1, \dots, x_n$ системы. Выделим в качестве подслучая (I) случай (Ia), когда $\tilde{r} = r = n$, то есть система является строго треугольной. Легко понять, что в этом случае система имеет единственное решение. Действительно, из последнего уравнения находим единственное x_n, тогда из предпоследнего — единственное x_{n-1} и т.д.

Осталось рассмотреть случай (Ib), когда $\tilde{r} = r < n$. При анализе этого случая нам пригодится дополнительная терминология.

Определение 2.48. Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n$, отвечающие главным столбцам матрицы A, называются главными, а остальные — свободными.

Другими словами, главные неизвестные — в точности те, которые отвечают ведущим элементам какой-либо строки. Их в точности r штук (соответственно свободных $n - r$).

Перенося все члены со свободными неизвестными в правую часть, мы получаем строго треугольную систему относительно главных неизвестных. Если мы присвоим всем свободным неизвестным какие-то значения, то значения главных неизвестных определяются из этой системы однозначно. Так как свободные неизвестные могут пробегать произвольные наборы из $\mathbb{K}^{n-r}$, то в случае бесконечного поля $\mathbb{K}$ система при $n > r$ имеет бесконечно много решений.

Еще очевидней становится анализ случая (I), если воспользоваться Предложением 2.25 о том, что любая матрица строчно эквивалентна упрощенной. Тогда, предполагая что матрица коэффициентов системы упрощенная и перенося все члены со свободными неизвестными в правую часть, мы получаем систему, разрешенную относительно главных неизвестных (это рассуждение включает в себя также случай (Ia), когда все переменные являются главными а свободные неизвестные отсутствуют). Например, если номера главных неизвестных образуют последовательность $1, 2, \ldots, r$ (общий случай сводится к этому перенумерацией неизвестных), то система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \ldots + c_{1n-r}x_n & = & d_1 \\ x_2 & + & c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \ldots + c_{2n-r}x_n & = & d_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x_r & + & c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \ldots + c_{rn-r}x_n & = & d_r. \end{cases} \tag{8}$$

Результат проведенного исследования сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.49. *СЛУ несовместна тогда и только тогда, когда для любой ступенчатой матрицы, полученной из ее расширенной матрицы с помощью элементарных преобразований строк, $\tilde{r} > r$. СЛУ определенна тогда и только тогда, когда $\tilde{r} = r = n$, где n — число неизвестных. СЛУ неопределенна тогда и только тогда, когда $\tilde{r} = r < n$.*

Напомним, что СЛОУ всегда совместна.

Следствие 2.50. *Всякая однородная система, у которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет нетривиальное (то есть ненулевое) решение.*

Доказательство. Рассмотрим однородную систему из m уравнений от n неизвестных. Приведем ее к ступенчатому виду. Число r ненулевых строк полученной ступенчатой системы не превосходит m, причем $m < n$ по условию. То есть $r < n$, что и влечет, в силу предыдущего обсуждения, неопределенность системы. ∎

Предыдущее Следствие можно переформулировать так: любая система из n столбцов высоты m линейно зависима при $n > m$. Мы этим воспользуемся ниже (см. Предложение 4.4).

Заодно мы получили следующий простой и общий алгоритм решения СЛУ. Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду. Если при этом получим $\tilde{r} > r$, то делаем вывод, что система несовместна. Если же $\tilde{r} = r$, то с помощью обратного хода метода Гаусса приводим ее ступенчатую расширенную матрицу к упрощенному виду и выписываем общее решение в виде выражения главных неизвестных через свободные.

В качестве примера решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

над полем $\mathbb{R}$. Выписываем расширенную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и приводим ее к ступенчатому виду по нашему алгоритму. Для этого из 2-й, 3-й и 4-й строк вычитаем 1-ю строку, умноженную на 1, 2 и 2 соответственно. В результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далее, прибавляя к 3-й и 4-й строкам 2-ю строку, умноженную на 3 и 4 соответственно, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Наконец, переставляя 3-ю и 4-ю строки, получаем ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нее $\tilde{r} = r = 3 < n = 4$, то есть система неопределенна. Главные переменные x_1, x_2 и x_4, а x_3 — свободная переменная. Приведем теперь матрицу к упрощенному виду, используя обратный ход метода Гаусса. Отбросив нулевую строку и вычтя из 2-й строки 3-ю, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычтя из 1-й строки удвоенную 2-ю и умножив 3-ю строку на -1, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

имеющую упрощенный вид (главные столбцы составляют единичную матрицу). Таким образом, исходная система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 8 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ x_4 = -5. \end{cases}$$

Перенося члены со свободной неизвестной x_3 в правую часть, получаем общее решение

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 8 \\ x_2 = -x_3 - 3 \\ x_4 = -5. \end{cases}$$

Чтобы подчеркнуть, что свободная переменная x_3 играет роль параметра, ее можно обозначить через t и переписать полученное решение в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+8 \\ -t-3 \\ t \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Это — параметрическое уравнение прямой в четырехмерном пространстве $\mathbb{K}^4$ с направляющим вектором $(1,-1,1,0)^T$ и проходящей через точку $(8,-3,0,-5)$.

Заметим, что на некоторые естественные вопросы о системах уравнений (и о матрицах) мы пока не дали ответы. Например, зависит ли количество свободных неизвестных СЛУ от выбора последовательности элементарных преобразований, с помощью которых мы приводили матрицу системы к ступенчатому виду? Этот вопрос, очевидно, эквивалентен вопросу о том, могут ли две ступенчатые матрицы с разным числом r ненулевых строк принадлежать одному классу строчной эквивалентности матриц? На эти вопросы мы ответим немного позже, после изучения понятий размерности векторного пространства и ранга матрицы.

3 Определители

Данная глава организована следующим образом. В первом параграфе мы приходим к понятию определителя, опираясь на понятия ориентированных площади и объема из курса аналитической геометрии. Он написан чтобы облегчить читателю переход на более абстрактный язык, который используется во втором параграфе. В частности, Теоремы 3.2, 3.4 и 3.9 являются специальными случаями Теоремы 3.21, что по замыслу автора должно помочь глубже понять этот важный результат.

3.1 n-мерный ориентированный объем

Все пространства в данном параграфе рассматриваются над полем $\mathbb{R}$.

Читатель, вероятно, в курсе аналитической геометрии встречался с понятиями ориентированной длины на ориентированной прямой, ориентированной площади на ориентированной плоскости и ориентированного объема в ориентированном трехмерном пространстве. У этих понятий есть естественное обобщение на случай n-мерного ориентированного пространства, называемое *n-мерным ориентированным объемом.* В этом параграфе мы опишем, как можно к нему прийти, но вначале напомним определения ориентированных площадей и объемов. Данный параграф также можно рассматривать как неформальное "геометрическое" введение в теорию определителей.

Напомним, что в вещественном векторном пространстве базисы делятся на два класса: между базисами из одного класса матрицы перехода имеют положительный определитель, а между базисами из разных классов — отрицательный определитель. Ориентированной плоскостью (пространством) называется плоскость (пространство), в котором выбран один из двух классов базисов, базисы из него называются "положительными". В качестве положительных базисов обычно выбираются правые базисы (определяемые в курсе аналитической геометрии), что мы также сделаем.

Определение 3.1. *Ориентированной площадью* на ориентированной плоскости V называется функция $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1) функция f линейна по каждому из своих двух аргументов (то есть *билинейна*);

2) функция f меняет знак при перестановке аргументов (то есть *кососимметрична*);

3) если $\{e_1, e_2\}$ — правый ортонормированный базис, то $f(e_1, e_2) = 1$.

Значение $f(u, v)$ на упорядоченной паре $\{u, v\}$ векторов плоскости V — ориентированная площадь параллелограмма, построенного на данной паре векторов (иногда называемая *псевдоскалярным произведением* векторов u и v). Заметим, что из кососимметричности f сразу следует, что $f(u, u) = 0$ для произвольного $u \in V$. Более общо, из билинейности и кососимметричности f следует, что $f(u, v) = 0$, если u и v коллинеарны (нетрудно проверить, что верно и обратное).

Теорема 3.2. *Существует единственная функция f, удовлетворяющая Определению 3.1.*

Доказательство. Если функция f обладает свойствами 1), 2) из предыдущего определения и $\{e_1, e_2\}$ — некоторый базис на плоскости V, то для произвольной пары векторов $u, v \in V$ имеем

$$f(u, v) = f(u_1e_1 + u_2e_2, v_1e_1 + v_2e_2) = u_1v_2f(e_1, e_2) + u_2v_1f(e_2, e_1) = (u_1v_2 - u_2v_1)f(e_1, e_2). \quad (9)$$

Таким образом, f однозначно в данном базисе определяется одним числом $f(e_1, e_2)$.

Обратно, легко проверить, что функция f, заданная формулой (9), полилинейна и кососимметрична. В самом деле (обозначая для простоты $c := f(e_1, e_2)$), линейность, например, по первому аргументу u следует из следующей выкладки: если $u = u' + u''$, то

$$f(u,v) = (u_1v_2 - u_2v_1)c = ((u_1' + u_1'')v_2 - (u_2' + u_2'')v_1)c =$$

$$= (u_1'v_2 - u_2'v_1)c + (u_1''v_2 - u_2''v_1)c = f(u',v) + f(u'',v),$$

и аналогично для умножения на скаляр. (Фактически, все следует из того, что в каждое слагаемое выражения $(u_1v_2 - u_2v_1)$ координаты u входят в первой степени). Кососимметричность также очевидна: если поменять местами u и v, то выражение $(u_1v_2 - u_2v_1)c$ изменит знак. ■

Коэффициент $u_1v_2 - u_2v_1$ перед $f(e_1, e_2)$ в формуле (9) называется *определителем матрицы* $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$. Свойства 1) и 2) предыдущего определения означают, что он линеен и кососимметричен по строкам. Кроме того, на единичной матрице порядка 2 он принимает значение 1 и свойство 3) означает, что ориентированная площадь параллелограмма, построенного на паре векторов u, v равна определителю матрицы, составленной из координатных строк этих векторов в правом ортонормированном базисе.

Определение 3.3. *Ориентированным объемом* в ориентированном трехмерном пространстве V называется функция $f\colon V \times V \times V \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1) функция f линейна по каждому из своих трех аргументов (то есть *трилинейна*);
2) функция f меняет знак при перестановке любых двух аргументов (то есть *кососимметрична*);
3) если $\{e_1, e_2, e_3\}$ — правый ортонормированный базис, то $f(e_1, e_2, e_3) = 1$.

Значение $f(u, v, w)$ на упорядоченной тройке $\{u, v, w\}$ векторов пространства V — ориентированный объем параллелепипеда, построенного на данной тройке векторов (то есть *смешанное произведение* (u, v, w) векторов u, v, w). Заметим, что из полилинейности и кососимметричности f сразу следует, что $f(u, v, w) = 0$, если векторы u, v и w компланарны (верно и обратное).

Теорема 3.4. *Существует единственная функция f, удовлетворяющая Определению 3.3.*

Доказательство. Если функция f линейна по каждому аргументу и $\{e_1, e_2, e_3\}$ — некоторый базис в пространстве V, то для произвольной тройки векторов $\{u, v, w\}$ из V имеем

$$f(u,v,w) = f(u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3, v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3, w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3) =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} u_iv_jw_kf(e_i, e_j, e_k)$$

(правая часть содержит $3^3 = 27$ слагаемых). Если f к тому же кососимметрична, то $f(e_i, e_j, e_k) = 0$ всякий раз, когда среди индексов i, j, k есть совпадающие. Если же индексы i, j, k образуют перестановку чисел $1, 2, 3$, то

$$f(e_i, e_j, e_k) = \pm f(e_1, e_2, e_3),$$

причем знак “$+$” нужно взять в том случае, когда (i,j,k) получается из $(1,2,3)$ четным числом транспозиций (перестановок двух каких-то аргументов), а “$-$” — если нечетным. Соответствующий множитель ± 1 называется *знаком* перестановки (i,j,k) и обозначается $\mathrm{sgn}(i,j,k)$. Читателю предлагается выписать 6 перестановок (i,j,k) и указать их знаки (должно получиться по 3 положительных и отрицательных перестановки).

Таким образом,

$$f(u,v,w) = \sum u_i v_j w_k \,\mathrm{sgn}(i,j,k)\, f(e_1,e_2,e_3), \tag{10}$$

причем суммирование справа происходит по перестановкам множества $1,2,3$ (то есть правая часть содержит 6 слагаемых). Окончательная формула выглядит так (читателю предлагается в этом убедиться):

$$f(u,v,w) = (u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 - u_3v_2w_1) f(e_1,e_2,e_3). \tag{11}$$

В частности, f однозначно в данном базисе определяется одним числом $f(e_1,e_2,e_3)$.

Обратно, легко проверить, что функция f, заданная формулой (10), полилинейна и кососимметрична. В самом деле, линейность следует из того, что в каждое слагаемое в правой части координаты каждого из векторов u, v и w входят в первой степени. Точнее, выражение

$$u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1),$$

являющееся коэффициентом перед $f(e_1,e_2,e_3)$ в (10), линейно по строке (u_1,u_2,u_3), то же верно для двух других строк.

Проверим кососимметричность. Переставим, например, векторы u и v в выражении $f(u,v,w)$ (чтобы упростить формулы, мы полагаем в (10) $c := f(e_1,e_2,e_3)$):

$$f(v,u,w) = \sum \mathrm{sgn}(i,j,k)\, v_i u_j w_k c =$$

$$= \sum \mathrm{sgn}(i,j,k)\, u_j v_i w_k c = -\sum \mathrm{sgn}(j,i,k)\, u_j v_i w_k c = -f(u,v,w),$$

поскольку, очевидно, $\mathrm{sgn}(i,j,k) = -\mathrm{sgn}(j,i,k)$. ■

Коэффициент

$$u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 - u_3v_2w_1$$

перед $f(e_1,e_2,e_3)$ в формуле (11) называется *определителем матрицы* $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$. Свойства 1) и 2) Определения 3.3 означают, что он линеен и кососимметричен по строкам, а свойство 3) означает, что ориентированный объем параллелепипеда, построенного на упорядоченной тройке векторов u, v, w равен определителю матрицы, составленной из координатных строк этих векторов в правом ортонормированном базисе.[13]

Рассмотренные случаи $n = 2$ и $n = 3$ подсказывают, как n-мерный ориентированный объем определяется для произвольного конечного n. Во-первых, в вещественном n-мерном пространстве

[13]Конечно, этот результат известен читателю из курса аналитической геометрии.

нужно задать ориентацию — то есть выбрать один из двух классов базисов, объявив базисы из него “положительными”. Мы будем пользоваться существованием двух классов базисов без доказательства.[14]

Определение 3.5. *Ориентированным объемом* в ориентированном n-мерном пространстве V называется функция $f\colon V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$ (слева произведение n экземпляров пространства V), обладающая следующими свойствами:

1) функция f линейна по каждому из своих n аргументов (то есть *полилинейна*);

2) функция f меняет знак при перестановке любых двух аргументов (то есть *кососимметрична*);

3) если $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — правый ортонормированный базис, то $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$.

(В предыдущем определении мы предполагаем, что ортонормированные базисы в n-мерном пространстве существуют. Это действительно так и будет доказано в этом курсе).

Значение $f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ на упорядоченном наборе (системе) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ векторов пространства V — ориентированный n-мерный объем параллелепипеда, построенного на данном наборе векторов. Заметим, что из полилинейности и кососимметричности f сразу следует, что $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$ если система $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима (верно и обратное).

Для того, чтобы получить формулу для n-мерного ориентированного объема, нам понадобятся понятие и свойства перестановок.

Определение 3.6. *Перестановкой* из n элементов называется последовательность $(k_1, \ldots, k_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, расположенных в некотором фиксированном порядке.

Так как k_1 может принимать n различных значений, k_2 при фиксированном k_1 — $(n-1)$ значение, k_3 при фиксированных k_1 и k_2 — $(n-2)$ значений и т.д., то всего имеется

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

перестановок из n элементов. Перестановка $(1, 2, \ldots, n)$ называется *тривиальной.*

Множество всех $n!$ перестановок из n элементов обозначается S_n. (В действительности, это множество очевидным образом отождествляется с множеством всех биекций множества $1, 2, \ldots, n$ на себя; при этом, в частности, тождественная биекция соответствует тривиальной перестановке. Последнее множество, очевидно, является группой относительно операции композиции. Мы не будем останавливаться на этом более подробно).

Перемена местами двух (не обязательно соседних) элементов в перестановке называется *транспозицией* этих элементов.

Определение 3.7. Знак перестановки — это такая функция

$$\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\},$$

[14] Заметим, что и в общем n-мерном случае матрицы перехода между базисами из одного класса имеют положительный, а между разными классами — отрицательный определитель.

что $\operatorname{sgn}(1, 2, \ldots, n) = 1$ и которая меняет знак при любой транспозиции (то есть если перестановки $(k_1, \ldots, k_n)$ и $(j_1, \ldots, j_n)$ отличаются друг от друга одной транспозицией (не обязательно соседних элементов), то $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = -\operatorname{sgn}(j_1, \ldots, j_n)$).

Задача 3.8. *Покажите, что если $f\colon V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ — кососимметрическая функция, то*

$$f(v_{k_1}, \ldots, v_{k_n}) = \operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) f(v_1, \ldots, v_n).$$

Теорема 3.9. *Для любого n функция $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ существует и единственна.*

Доказательство. То, что существует не более одной такой функции, следует из того, что любую перестановку из n элементов можно получить из тривиальной $(1, 2, \ldots, n)$ последовательностью транспозиций.

Однако при таком подходе *существование* функции sgn не очевидно: одну и ту же перестановку можно получить из тривиальной разными последовательностями транспозиций; идея в том, что *чётность* числа транспозиций не зависит от выбора такой последовательности. На время отложим доказательство существования sgn и введем понятие *инверсии*.

Определение 3.10. Говорят, что пара чисел в перестановке $(k_1, \ldots, k_n)$ образуют *инверсию*, если большее из них стоит левее меньшего.

Например, тривиальная перестановка содержит 0 инверсий, а в перестановке $(n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1)$ любая пара чисел образует инверсию, то есть число инверсий в ней равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{2}$ (числу 2-элементных подмножеств в множестве из n элементов).

Предложение 3.11. *При любой транспозиции четность числа инверсий в перестановке $(k_1, \ldots, k_n)$ меняется.*

Доказательство. При транспозиции соседних элементов меняется взаимное расположение только этих элементов, так что число инверсий меняется (увеличивается или уменьшается) на 1, следовательно, четность числа инверсий меняется. При транспозиции двух элементов i и j, разделенных s промежуточными элементами, можно сначала переставить i со всеми промежуточными элементами и с j, сделав $s+1$ соседних транспозиций, а затем j со всеми промежуточными элементами, произведя еще s соседних транспозиций. В итоге мы проделаем нечетное число $2s+1$ соседних транспозиций, каждая из которых меняет четность числа инверсий в перестановке. ∎

Вернемся теперь к существованию sgn. Пусть $i(\sigma)$ обозначает число инверсий в перестановке $\sigma := (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Покажем, что функция

$$s(\sigma) := (-1)^{i(\sigma)} \ \ \forall \sigma \in S_n$$

обладает всеми свойствами sgn из предыдущего определения.

Действительно, если $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$, то $i(\sigma) = 0$ и $s(\sigma) = (-1)^{i(\sigma)} = 1$. С другой стороны, из Предложения 3.11 следует, что при любой транспозиции элементов σ четность $i(\sigma)$ меняется, и значит $s(\sigma) = (-1)^{i(\sigma)}$ меняет знак. ∎

Замечание 3.12. Другое доказательство существования функции sgn можно получить, предъявив произвольную ненулевую кососимметрическую функцию от n аргументов, например $\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n}(x_i - x_j)$ (определитель Вандермонда). Тогда $\Delta_n(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}) = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\, \Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (ср. Задачу 3.8).

Определение 3.13. Перестановки $\sigma \in S_n$ такие, что $\operatorname{sgn} \sigma = 1$, называются *четными*, а остальные — *нечетными* (для них $\operatorname{sgn} \sigma = -1$).

Таким образом, перестановка является четной, если число инверсий в ней четно и нечетной в противном случае. Например,

$$\operatorname{sgn}(n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \tag{12}$$

таким образом, данная перестановка четная при $n \equiv 0,\ 1 (\operatorname{mod} 4)$ и нечетная при $n \equiv 2,\ 3 (\operatorname{mod} 4)$.

Следствие 3.14. *При $n > 1$ количество четных перестановок из n элементов равно количеству нечетных.*

Доказательство. Выпишем в первый столбец все четные, а во второй — все нечетные перестановки из n элементов. Тогда, согласно Предложению 3.11, при транспозиции первого и второго элемента первый столбец биективно отображается на второй, и наоборот. ■

Задача 3.15. *Докажите, что четность числа транспозиций, в виде произведения (композиции) которых можно представить данную перестановку, зависит только от самой перестановки.*

Теорема 3.16. *Существует единственная функция f, удовлетворяющая Определению 3.5 ориентированного n-мерного объема.*

Набросок доказательства. Если функция f линейна по каждому из своих n аргументов и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — некоторый базис в пространстве V, то для произвольной системы из n векторов $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ в V имеем[15]

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} v_{1i_1} v_{2i_2} \ldots v_{ni_n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$

(сумма справа содержит n^n слагаемых). Если f к тому же кососимметрична, то $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ всякий раз, когда среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ есть совпадающие. Если же индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ образуют перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$, то

$$f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n)\, f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

(см. Задачу 3.8).

Таким образом,

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n} v_{1i_1} v_{2i_2} \ldots v_{ni_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n)\, f(e_1, e_2, \ldots, e_n) \tag{13}$$

[15] Ниже мы обозначаем набор координат вектора $v_k \in V$ в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ через $(v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{kn})$, то есть первый индекс — номер вектора, второй — номер координаты.

(правая часть содержит $n!$ слагаемых).

В частности, полилинейная кососимметричная f однозначно в данном базисе определяется одним числом $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

С другой стороны, функция f, заданная формулой (13), полилинейна и кососимметрична. В самом деле, полилинейность следует из того, что каждое слагаемое в правой части (13) содержит ровно по одной координате каждого вектора $v_k, \ \ 1 \le k \le n$ (в первой степени).

Проверим кососимметричность правой части (13) по векторам $v_1, \dots, v_n$. Переставим, например, местами v_1 и v_2 (чтобы упростить вид формул, мы полагаем $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$):

$$f(v_2, v_1, \dots, v_n) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n)\, v_{2i_1} v_{1i_2} \dots v_{ni_n} =$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n)\, v_{1i_2} v_{2i_1} \dots v_{ni_n} =$$

$$= - \sum_{(i_2, i_1, \dots, i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_2, i_1, \dots, i_n)\, v_{1i_2} v_{2i_1} \dots v_{ni_n} = -f(v_1, v_2, \dots, v_n),$$

поскольку при любой транспозиции знак перестановки меняется. ■

Коэффициент

$$\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n)\, v_{1i_1} v_{2i_2} \dots v_{ni_n}$$

перед $f(e_1, e_2, \dots, e_n)$ в формуле (13) называется *определителем матрицы*

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойства 1) и 2) предыдущего определения означают, что он линеен и кососимметричен по строкам. Матрица, составленная из координатных строк базисных векторов, является единичной, откуда видно, что свойство 3) означает, что на единичной матрице порядка n определитель принимает значение 1.

3.2 Основные теоремы об определителях

В предыдущем параграфе мы показали, что если зафиксировать правый ортонормированный базис в пространстве (на плоскости), то ориентированный объем параллелепипеда (ориентированная площадь параллелограмма), построенного на упорядоченной тройке (упорядоченной паре) векторов равна определителю матрицы, составленной из координатных строк этих векторов, записанных в данном порядке.

Поэтому свойства определителей (по крайней мере порядков 2 и 3) вполне аналогичны свойствам ориентированных площадей или объемов. А именно, смешанное произведение линейно по каждому аргументу, меняет знак при перестановке любых двух аргументов и смешанное произведение базисных векторов правого ортонормированного базиса равно 1. Это дает соответственно свойства линейности определителя матрицы по строкам, кососимметричности определителя по строкам (при перестановке любых двух строк определитель меняет знак) и условие нормировки: определитель единичной матрицы равен единице. Те же свойства определитель имеет и по столбцам.

С точки зрения алгебры значение определителей, в частности, в том, что они дают удобный критерий невырожденности матрицы, с помощью них можно получить явные формулы для обратной матрицы и т.д.

Хотя понятие определителя n-го порядка можно определить над любым полем, мы в этом параграфе будем считать, что $\mathbb{K}$ — произвольное поле, содержащее поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (в частности, подходят $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 3.17. Функция $f\colon V \to \mathbb{K}$ называется *линейной*, если

$$\forall\, u,\, v \in V \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$$

и

$$\forall\, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

Если f линейна, то для любой конечной линейной комбинации $\sum_i \lambda_i v_i$ векторов пространства V имеем

$$f(\sum_i \lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i f(v_i).$$

Пусть теперь $f\colon V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ (m сомножителей слева) — $\mathbb{K}$-значная функция от m аргументов (упорядоченных наборов из m векторов пространства V).

Определение 3.18. Функция $f\colon V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ называется *полилинейной* (точнее, *m-линейной*), если она линейна по каждому из m аргументов при фиксированных остальных.

Например, линейность по первому аргументу означает, что

$$f(v_1' + v_1'', v_2, \ldots, v_m) = f(v_1', v_2, \ldots, v_m) + f(v_1'', v_2, \ldots, v_m) \ \ \forall\, v_1', v_1'', v_2, \ldots, v_m \in V$$

и

$$f(\lambda v_1, v_2, \ldots, v_m) = \lambda f(v_1, v_2, \ldots, v_m) \ \ \forall v_1, v_2, \ldots, v_m \in V \ \text{ и } \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Определение 3.19. Полилинейная функция называется *кососимметрической*, если при перестановке любых двух аргументов ее значение меняет знак.

Из определения легко следует, что если f кососимметрическая и в наборе $(v_1, \ldots, v_m)$ для некоторой пары $i \neq j$ $v_i = v_j$, то $f(v_1, \ldots, v_m) = 0$.

Вернемся к полилинейным функциям. В качестве векторного пространства V возьмем пространство $\mathbb{K}^n$ строк длины n с элементами из $\mathbb{K}$. Заметим, что множество матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ можно отождествить с множеством $V \times \ldots \times V$ наборов из n строк длины n (при этом отождествлении матрице сопоставляется набор ее строк).

Определение 3.20. *Определителем порядка n* называется полилинейная кососимметричная функция $f\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ строк матриц, принимающая на единичной матрице $E \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ значение 1.

Определитель матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ обозначается $\det(A)$ или просто $|A|$.

Следующая теорема играет ключевую роль в нашем подходе к теории определителей.

Теорема 3.21. *Определитель n-го порядка существует и единственен. Более того, для любой полилинейной кососимметричной функции строк матриц $f\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ верно равенство $f(A) = \det(A)f(E)$.*

Последнее равенство означает, что любая полилинейная кососимметричная функция строк матриц порядка n пропорциональна определителю с коэффициентом, равным ее значению на единичной матрице.

Читателю рекомендуется связать приведенное ниже доказательство с доказательствами Теорем 3.2, 3.4 и 3.9 (поскольку первые две из них — частные случаи, а третья — по-существу, эквивалентна доказываемой теореме).

Доказательство. Докажем сначала единственность определителя. Итак, пусть f — полилинейная кососимметричная функция строк матриц порядка n. Для матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ пусть $a_1, \dots, a_n$ обозначают ее строки. То есть $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, n$. Введем *единичные строки* $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 стоит на i-м месте) длины n, $i = 1, \dots, n$. Они образуют базис в пространстве строк длины n. В частности, i-я строка матрицы A по ним раскладывается (единственным образом) как

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k.$$

В силу полилинейности f имеем

$$f(A) = f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} f(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n})$$

(справа стоит сумма n^n слагаемых, так как k_j независимо пробегают натуральные числа от 1 до n). В частности, полилинейная функция однозначно задается своими значениями на наборах векторов из некоторого базиса.

Теперь воспользуемся кососимметричностью f. Очевидно, что

$$f(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}) = 0 \quad \text{если } k_i = k_j \text{ для некоторой пары } i \neq j,$$

иначе

$$f(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}) = \mathrm{sgn}(k_1, \dots, k_n) f(e_1, \dots, e_n).$$

Для доказательства последнего равенства во-первых заметим, что при любой транспозиции левая и правая части меняют знак; во-вторых, любая перестановка приводится к тривиальной с помощью последовательности транспозиций, и в-третьих, оно верно для тривиальной перестановки.

В итоге, для произвольной полилинейной кососимметрической функции строк матрицы мы получаем формулу

$$f(A) = f(a_1, \dots, a_n) =$$

$$= \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in S_n} \operatorname{sgn}(k_1,k_2,\dots,k_n)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n} f(e_1,e_2,\dots,e_n)$$

(в правой части последней формулы $n!$ слагаемых). Поскольку $f(E) = f(e_1,\dots,e_n)$, определитель матрицы A, если он существует, через ее матричные элементы выражается следующим образом:

$$\det(A) = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in S_n} \operatorname{sgn}(k_1,k_2,\dots,k_n)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n} \tag{14}$$

(ср. (13)).

Таким образом, нам осталось доказать, что формула (14) определяет полилинейную кососимметричную функцию (поскольку любая функция, пропорциональная полилинейной кососимметрической, также является таковой).

Для этого посмотрим внимательно на правую часть (14). Она содержит $n!$ слагаемых, каждое из которых является произведением, в которое входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы A (последнее потому что $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ — перестановка чисел $1,2,\dots n$). Таким образом, если мы выбираем i-ю строку, то (14) можно записать в виде

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j,$$

где u_j (позднее мы отождествим их с алгебраическими дополнениями, ср. Теорему 3.36) не зависят от элементов i-й строки матрицы A. Например, для $i=1$ имеем:

$$\det(A) = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in S_n} \operatorname{sgn}(k_1,k_2,\dots,k_n)\, a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n} =$$

$$= a_{11}\sum_{(1,k_2,\dots,k_n)\in S_n} \operatorname{sgn}(1,k_2,\dots,k_n)a_{2k_2}\dots a_{nk_n} + a_{12}\sum_{(2,k_2,\dots,k_n)\in S_n} \operatorname{sgn}(2,k_2,\dots,k_n)a_{2k_2}\dots a_{nk_n} + \dots$$

$$+a_{1n}\sum_{(n,k_2,\dots,k_n)\in S_n} \operatorname{sgn}(n,k_2,\dots,k_n)a_{2k_2}\dots a_{nk_n}$$

(каждая из n сумм в правой части содержит $(n-1)!$ слагаемых, то есть всего слагаемых $n!$).

Осталось доказать, что функция, определяемая формулой (14) — кососимметричная функция строк матрицы A. Посмотрим что с ней происходит при перестановке i-й и j-й строк матрицы. Разобьем множество всех перестановок на пары, получаемые друг из друга транспозицией k_i и k_j. Согласно Предложению 3.11, произведения $a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}$, соответствующие перестановкам из одной такой пары, входят в выражение (14) с противоположными знаками. При перестановке i-й и j-й строк они поменяются ролями и, следовательно, все выражение умножается на -1.

Более подробно, пусть A' — матрица, полученная в результате перестановки указанных строк, а a'_{rs} — ее элементы. Для определенности предположим, что $i<j$. В разложение определителя матрицы A' произведение $a'_{1k_1}\dots a'_{ik_i}\dots a'_{jk_j}\dots a'_{nk_n}$ входит со знаком $\operatorname{sgn}(k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n)$. Но $a'_{1k_1}\dots a'_{ik_i}\dots a'_{jk_j}\dots a'_{nk_n} = a_{1k_1}\dots a_{jk_i}\dots a_{ik_j}\dots a_{nk_n}$, и если последнее произведение переписать в порядке возрастания номеров строк исходной матрицы A, то оно равно $a_{1k_1}\dots a_{ik_j}\dots a_{jk_i}\dots a_{nk_n}$ и входит в разложение определителя матрицы A со знаком $\operatorname{sgn}(k_1\dots k_j\dots k_i\dots k_n)$, который по Предложению 3.11 противоположен знаку $\operatorname{sgn}(k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n)$. ■

В доказательстве Теоремы нами получена важная формула (14), называемая *формулой полного разложения* определителя n-го порядка.

Задача 3.22. *Убедитесь, что при $n = 2, 3$ формула (14) дает известные выражения для определителей второго и третьего порядков.*

Задача 3.23. *1) Имеются ли в формуле полного разложения определителя матрицы $A = (a_{ij})$ пятого порядка слагаемые $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$, $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$? 2) С какими знаками входят в формулу полного разложения определителя матрицы пятого порядка слагаемые $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}$, $a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$?*

Пример 3.24. Из (12) легко получить, что

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Задача 3.25. *Докажите, что для любой квадратной вещественной матрицы A верно равенство $\det(E + hA) = 1 + h \operatorname{tr} A + O(h^2)$ при $h \to 0$. Какой геометрический смысл (с точки зрения ориентированных объемов) имеет эта формула?*

Предложение 3.26. *При элементарных преобразованиях строк, введенных в Определении 2.16, определитель меняется следующим образом. При элементарных преобразованиях типа I от не меняется, при преобразованиях типа II — умножается на -1, при преобразованиях типа III — умножается на c.*

Доказательство. В случае элементарного преобразования типа I i-я строка преобразованной матрицы A' равна $a_i + \lambda a_j$ (при этом остальные строки такие же как у исходной матрицы A). Используя линейность определителя по i-й строке, получаем, что $\det A'$ равен сумме $\det A$ и λ, умноженной на определитель матрицы, у которой две одинаковые строки (а именно i-я и j-я, равные a_j). В силу кососимметричности определителя по строкам последний определитель равен нулю.

Поведение определителя при элементарных преобразованиях типа II и III следует непосредственно из его кососимметричности и линейности по строкам. ∎

Предложение 3.27. *Для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ и элементарной матрицы S имеем*

$$\det(SA) = \det(S)\det(A).$$

В частности, определитель невырожденной матрицы равен произведению определителей элементарных матриц, в произведение которых она раскладывается.

Доказательство. Напомним, что если элементарная матрица S отвечает элементарному преобразованию строк ς, то $\forall A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ имеем $\varsigma A = SA$. Отсюда $\det(\varsigma A) = \det(SA)$. В частности, полагая $A = E$, из Предложения 3.26 получаем, что $\det S$ равно 1, -1 и c, если ς — элементарное преобразование типа I, II и III соответственно. Осталось еще раз применить Предложение 3.26. ∎

Предложение 3.26 дает эффективный метод вычисления определителей. А именно, мы знаем, что любую квадратную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к верхней треугольной матрице, причем при каждом элементарном преобразовании Предложение 3.26 позволяет контролировать изменение определителя. То есть достаточно научиться считать определители верхних треугольных матриц.

Предложение 3.28. *Определитель верхней треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.*

Доказательство. Согласно формуле (14) каждое слагаемое в разложении определителя является произведением, в которое входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. В первом столбце единственный элемент, который может быть ненулевым у верхней треугольной матрицы это a_{11}, если мы его выбираем, то из второго столбца мы можем взять элемент не из первой строки, единственный такой элемент, который может быть отличен от нуля это a_{22} и т.д. ∎

Задача 3.29. *Вычислите определитель из Примера 3.24 с помощью перестановок строк.*

Следующая теорема дает обещанный ранее критерий невырожденности матрицы.

Теорема 3.30. *Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$.

Доказательство. Если для какой-то матрицы определитель отличен от нуля (равен нулю), то поскольку максимум что с ним может произойти при элементарных преобразованиях строк — умножение на ненулевое число, он также отличен от нуля (соотв. равен нулю) на всем классе строчно эквивалентных ей матриц.

Из предыдущего мы знаем, что матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее класс строчной эквивалентности содержит строгую верхнетреугольную матрицу (т.е. такую верхнетреугольную матрицу, у которой на главной диагонали стоят ненулевые элементы), определитель которой согласно предыдущему Предложению отличен от нуля.

Если же исходная матрица вырождена, то она строчно эквивалентна такой верхнетреугольной матрице, у которой на главной диагонали обязательно есть нули, и значит ее определитель опять же в силу предыдущего Предложения равен нулю. ∎

Следующая наша цель — доказательство того, что свойства определителя (полилинейность, кососимметричность) относительно столбцов такие же как относительно строк.

Мы знаем, что в выражение (14) входят все произведения матричных элементов по одному из каждой строки и из каждого столбца. Как определить знак, с которым произведение $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$ входит в (14), не упорядочивая его по возрастанию номеров строк?

Лемма 3.31. Пусть $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ — две произвольные перестановки. Тогда произведение $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$ входит в выражение (14) со знаком, равным произведению их знаков $\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n)\operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Доказательство. Для того, чтобы выяснить, с каким знаком входит в (14) рассматриваемое произведение, нужно расположить его сомножители в порядке возрастания номеров строк. Этого можно добиться, последовательно меняя местами два сомножителя. При каждой такой перемене в перестановках, образуемых номерами строк и столбцов, происходят транспозиции, так что произведение их знаков не меняется. Таким образом, если полученное в результате произведение будет иметь вид $a_{1k_1}a_{2k_2}\dots a_{nk_n}$, то

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n),$$

а это и означает, что рассматриваемое произведение входит в (14) с указанным знаком. ∎

Теорема 3.32. $\det A^T = \det A$.

Доказательство. Определитель матрицы A^T, как и определитель матрицы A, есть алгебраическая сумма всевозможных произведений n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. Единственное, за чем надо проследить — это то, что одинаковые произведения входят в $\det A$ и $\det A^T$ с одинаковыми знаками.

В силу предыдущей Леммы для перестановок $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ произведение $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$ входит в разложение определителя матрицы A со знаком $\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Если мы упорядочим сомножители этого произведения по номерам столбцов, то получим $a_{l_11}a_{l_22}\dots a_{l_nn}$ для некоторой перестановки $(l_1, l_2, \dots, l_n)$, причем $\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) = \operatorname{sgn}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ (опять же в силу предыдущей Леммы). То есть $a_{l_11}a_{l_22}\dots a_{l_nn} = a^T_{1l_1}a^T_{2l_2}\dots a^T_{nl_n}$ входит с тем же знаком $\operatorname{sgn}(l_1, l_2, \dots, l_n)$ в разложение определителя $\det A^T$ что и в разложение определителя $\det A$. ∎

Заметим, что из доказанной Теоремы снова легко вывести Следствие 2.34.

Следствие 3.33. *Определитель есть полилинейная кососимметрическая функция столбцов матрицы. Любая такая функция пропорциональна определителю с коэффициентом, равным ее значению на единичной матрице.*

Теорема 3.34. (об определителе матрицы с углом нулей). *Пусть матрица A имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B и C — квадратные матрицы порядков k и $n-k$ соответственно. Тогда $\det A = \det B \cdot \det C$.

Доказательство. Для фиксированных матриц $C \in \mathrm{Mat}_{n-k}(\mathbb{K})$ и $D \in \mathrm{Mat}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$ определим функцию $f_{D,C} \colon \mathrm{Mat}_k(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ формулой

$$f_{D,C}(B) = \det \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \forall\, B \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{K}).$$

Функция $f_{D,C}$ является полилинейной и кососимметричной функцией столбцов матрицы B, поэтому $f_{D,C}(B) = \det(B) f_{D,C}(E)$. Аналогично, для фиксированной матрицы $D \in \mathrm{Mat}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$ определим функцию $g_D \colon \mathrm{Mat}_{n-k}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ формулой

$$g_D(C) = \det \begin{pmatrix} E & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \forall\, C \in \mathrm{Mat}_{n-k}(\mathbb{K}).$$

Функция g_D является полилинейной и кососимметричной функцией строк матрицы C, поэтому $g_D(C) = \det(C) g_D(E)$. Собирая все вместе, с учетом того, что $f_{D,C}(E) = g_D(C)$ и $g_D(E) = 1$, получаем требуемое. ■

Пусть A — произвольная (не обязательно квадратная) матрица. Всякая матрица, составленная из элементов матрицы A, находящихся на пересечении каких-то выбранных строк и каких-то выбранных столбцов, называется *подматрицей* матрицы A. Подчеркнем, что выбираемые строки и столбцы не обязаны идти подряд.

Определитель квадратной подматрицы порядка k называется *минором* порядка k матрицы A. Иногда, допуская вольность речи, саму квадратную подматрицу также называют минором. В частности, если A — квадратная матрица порядка n, то минор порядка $n-1$, получаемый вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, называется *дополнительным минором* элемента a_{ij} и обозначается через M_{ij}. Число

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$$

называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}. Смысл алгебраического дополнения ясен из следующей леммы.

Лемма 3.35.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij}.$$

(В левой части стоит определитель матрицы, полученной из матрицы $A = (a_{ij})$ заменой нулями всех элементов i-й строки, кроме a_{ij}.)

Доказательство. Поменяем местами i-ю строку со всеми предыдущими строками и j-й столбец со всеми предыдущими столбцами. При этом мы будем $i-1$ раз менять местами строки и $j-1$ раз столбцы, так что определитель умножится на $(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$. В результате получится определитель вида

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где в правом нижнем углу стоит дополнительный минор элемента a_{ij}. По теореме об определителе матрицы с углом нулей этот определитель равен $a_{ij} M_{ij}$. С учетом предыдущего знака отсюда и получается доказываемое равенство. ■

Теорема 3.36. *Для любой квадратной матрицы A*

$$\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij} = \sum_i a_{ij} A_{ij}.$$

Первая из этих формул называется *формулой разложения определителя по i-й стоке*, вторая — *формулой разложения определителя по j-му столбцу.*

Доказательство. Представим i-ю строку $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ матрицы A в виде суммы строк

$$(a_{i1}, 0, 0, \ldots, 0, 0) + (0, a_{i2}, 0, \ldots, 0, 0) + \ldots + (0, 0, 0, \ldots, 0, a_{in})$$

и воспользуемся линейностью определителя по строкам и предыдущей Леммой. Аналогично для столбца. ■

Теорема 3.37. *Для любых квадратных матриц A и B одного порядка* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Доказательство. При фиксированной матрице $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ определим функцию

$$f_B \colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad f_B(A) = \det(AB).$$

Мы утверждаем, что она полилинейна и кососимметрична как функция строк матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Для этого заметим, что строки $c_1, \ldots, c_n$ матрицы $C := AB$ получаются из строк $a_1, \ldots, a_n$ матрицы A умножением на B:

$$c_i = a_i B \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть например $a_1 = a_1' + a_1''$, где a_1', a_1'' — какие-то строки; тогда, рассматривая матрицу A как совокупность ее строк, имеем

$$\det(AB) = f_B(A) = f_B(a_1' + a_1'', a_2, \ldots, a_n) = \det((a_1' + a_1'')B, a_2B, \ldots, a_nB) =$$

$$= \det(a_1'B + a_1''B, a_2B, \ldots, a_nB) = \det(a_1'B, a_2B, \ldots, a_nB) + \det(a_1''B, a_2B, \ldots, a_nB) =$$

$$= f_B(a_1', a_2, \ldots, a_n) + f_B(a_1'', a_2, \ldots, a_n).$$

Остальные свойства проверяются аналогично. Тогда $f_B(A) = \det A \cdot f_B(E)$, что равносильно требуемому. ■.

Дадим также другое доказательство предыдущей Теоремы, использующее свойства элементарных матриц. Во-первых, предположим что матрица A вырождена. Последнее равносильно существованию ненулевой строки c такой, что $cA = 0$. Тогда и $0 = (cA)B = c(AB)$, значит, произведение AB тоже вырождено. Так как определитель вырожденной матрицы равен нулю, то Теорема в этом случае верна.

Пусть теперь A невырождена. Тогда она представляется в виде произведения элементарных матриц. Теперь требуемое легко вывести из Предложения 3.27.

Задача 3.38. *Докажите, что следующие условия равносильны:*

1) $\det A = 1$;

2) *матрицу A можно привести к единичной матрице используя только преобразования типа I;*

3) *матрица A является произведением элементарных матриц типа I.*

3.3 Некоторые приложения определителей

Рассмотрим квадратную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases} \tag{15}$$

Обозначим через A ее матрицу коэффициентов и через A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицу, полученную из A заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов.

Теорема 3.39. *Если* $\det A \neq 0$, *то система (15) имеет единственное решение* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, *которое может быть найдено по формулам*

$$\alpha_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Эти формулы называются *формулами Крамера.*

Доказательство. Будем производить элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы (15) с целью привести ее матрицу коэффициентов к единичной матрице (это возможно, поскольку по условию A невырождена). При этом система будет заменяться эквивалентной. Кроме того, правая часть (16) также не меняется при элементарных преобразованиях (при элементарных преобразованиях типа I числитель и знаменатель не меняются, при преобразованиях типа II числитель и знаменатель меняют знак, при преобразованиях типа III умножаются на одно и то же ненулевое число).

Таким образом, формулы Крамера достаточно проверить для системы с единичной матрицей коэффициентов, то есть вида

$$\begin{cases} x_1 & & & = & b_1 \\ & x_2 & & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Она, очевидно, имеет единственное решение $\alpha_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. С другой стороны,

$$\det A = \det E = 1, \qquad \det A_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_n & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = b_i,$$

так что формулы Крамера в этом случае действительно верны. ■

Применим теперь формулы Крамера для явного нахождения обратной матрицы.

Теорема 3.40. *Пусть* $A = (a_{ij})$ *— невырожденная матрица. Тогда*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(напомним, что A_{ij} обозначает алгебраическое дополнение элемента a_{ij}).

Доказательство. Матрица A^{-1} является решением матричного уравнения $AX = E$. Это уравнение распадается на n уравнений относительно столбцов X_1, X_2, $\ldots$, X_n матрицы X:

$$AX_j = E_j, \tag{17}$$

где E_j — j-й столбец матрицы E.

В координатной записи уравнение (17) представляет собой систему n линейных уравнений относительно элементов $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}$ столбца X_j. Матрицей коэффициентов этой системы служит матрица A, а столбцом свободных членов — столбец E_j. По формулам Крамера i-я компонента решения равна

$$x_{ij} = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & 0 & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{j1} & \ldots & 1 & \ldots & a_{jn} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

(в определителе 1 стоит в i-м столбце), что и требовалось доказать ■.

4 Начала линейной алгебры

4.1 Базисы и размерность конечномерных линейных пространств

Лемма 4.1. Система векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейного пространства V линейно зависима тогда и только тогда, когда (хотя бы) один из ее векторов представляется в виде линейной комбинации остальных.

Доказательство. Пусть система линейно зависима и $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ — равная нулю ее нетривиальная линейная комбинация. Пусть $\lambda_k \neq 0$, тогда

$$v_k = -\lambda_k^{-1}(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1}v_{k-1} + \lambda_{k+1}v_{k+1} + \ldots + \lambda_m v_m).$$

Обратно, если $v_k = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1}v_{k-1} + \lambda_{k+1}v_{k+1} + \ldots + \lambda_m v_m$, то собирая все в одной части, получаем равную нулю нетривиальную линейную комбинацию векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$. ■

Заметим, что в предыдущей лемме не утверждается, что из линейной зависимости системы следует, что *любой* ее вектор представляется как линейная комбинация остальных (читателю предлагается привести контрпример).

Лемма 4.2. Пусть система векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейного пространства V линейно независима. Тогда для $u \in V$ существует представление $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ тогда и только тогда, когда система $\{v_1, \ldots, v_m, u\}$ линейно зависима.

Доказательство. Доказательство в одну сторону следует из предыдущей леммы.

Обратно, предположим что $\{v_1, \ldots, v_m, u\}$ линейно зависима и $\lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \mu u = 0$ — нетривиальная линейная зависимость. Тогда $\mu \neq 0$, иначе мы получили бы нетривиальную линейную зависимость между векторами системы $\{v_1, \ldots, v_m\}$, что противоречит условию. Таким образом, $u = -\mu^{-1}(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m)$. ■

Лемма 4.3. Пусть $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$; тогда такое разложение единственно тогда и только тогда, когда система $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейно независима.

Доказательство. Если система $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейно зависима и $0 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i$ — нетривиальное разложение по ней нулевого вектора, то прибавляя его к данному разложению вектора u, получаем новое разложение вектора u.

Обратно, если существует два разных разложения вектора u по системе $\{v_1, \ldots, v_m\}$, то, вычитая одно из другого, получаем нетривиальное разложение нулевого вектора по указанной системе, то есть нетривиальную линейную зависимость. ■

Предложение 4.4. (Основная лемма о линейной зависимости). *Если векторы $u_1, \ldots, u_n$ линейного пространства V линейно выражаются через векторы $v_1, \ldots, v_m$ того же пространства, причем $n > m$, то (какова бы ни была система $\{v_1, \ldots, v_m\}$) система векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ линейно зависима.*

Доказательство. По условию имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \ldots + a_{m1} v_m, \\ u_2 &= a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \ldots + a_{m2} v_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \ldots + a_{mn} v_m. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в условие линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0, \tag{18}$$

получим

$$\begin{gathered} \lambda_1(a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \ldots + a_{m1} v_m) + \lambda_2(a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \ldots + a_{m2} v_m) + \ldots \\ + \lambda_n(a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \ldots + a_{mn} v_m) = 0, \end{gathered}$$

то есть

$$\begin{gathered} (a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n) v_1 + (a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n) v_2 + \ldots \\ + (a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n) v_m = 0. \end{gathered}$$

Данное соотношение удовлетворяется при любом решении $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n &= 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n &= 0. \end{cases}$$

Согласно Следствию 2.50, последняя система имеет нетривиальное решение, которое дает нетривиальную линейную зависимость (18). ■

Замечание 4.5. Вместо ссылки на Следствие 2.50 в конце предыдущего доказательства можно было бы заметить, что утверждение о том, что однородная система, число неизвестных у которой больше числа уравнений, имеет нетривиальное решение, легко следует из результатов раздела 2.3. Действительно, любой столбец упрощенной матрицы является линейной комбинацией ее главных столбцов, но в упрощенном виде матрицы A размера $m \times n$, где $m < n$, есть неглавные столбцы, поэтому между столбцами такой матрицы A есть нетривиальная линейная зависимость.

Пусть V — векторное пространство, а $S \subset V$ — его произвольное подмножество (не обязательно конечное).

Определение 4.6. *Линейной оболочкой* подмножества $S \subset V$ называется множество всех векторов из V, представимых в виде (конечных!) линейных комбинаций элементов из S. Линейная оболочка обозначается $\langle S \rangle$.

Таким образом, $\langle S \rangle$ состоит из всех векторов из V, представимых в виде $\sum_s \lambda_s s,\ s \in S$, $\lambda_s \in \mathbb{K}$, где $\lambda_s \neq 0$ только для конечного числа $s \in S$. По определению линейная комбинация пустого множества векторов равна нулевому вектору.

Легко видеть, что для произвольного подмножества $S \subset V$ его линейная оболочка не просто подмножество в V, а линейное подпространство. Действительно, во-первых, это множество непусто (например, $\langle \varnothing \rangle = 0$ и, поскольку любое множество S содержит пустое подмножество, любая линейная оболочка содержит нулевой вектор). Во-вторых, сумма двух конечных линейных комбинаций векторов из S снова является конечной линейной комбинацией векторов из S; то же для умножения на скаляр.

Если S состоит из векторов некоторого базиса пространства V, то $\langle S \rangle = V$, но также и $\langle V \rangle = V$.

Задача 4.7. *Покажите, что $\langle S \rangle$ — наименьшее по включению линейное подпространство в V, содержащее S (то есть любое подпространство $U \subset V$, содержащее S, содержит также и $\langle S \rangle$).*

Говорят, что пространство V *порождается* своим подмножеством $S \subset V$, если $V = \langle S \rangle$.

Определение 4.8. Пространство V называется *конечномерным*, если оно порождается некоторым своим конечным подмножеством.

В дальнейшем мы сосредоточимся почти исключительно на изучении конечномерных векторных пространств.

Заметим, что определение базиса можно переформулировать следующим образом: базис в V — линейно независимая система, порождающая V. Напомним, что, в частности, базис нулевого векторного пространства — пустое множество векторов (которое по определению линейно независимо).

Теорема 4.9. *Из всякого конечного порождающего множества S пространства V можно выбрать базис пространства V.*

Доказательство. Если S линейно независимо, то S (после произвольного упорядочивания) — базис в V. Если S линейно зависимо, то по Лемме 4.1 в S найдется вектор, линейно выражающийся через остальные. Выкидывая его из S получим порождающее множество из меньшего числа элементов. Так как число элементов в произвольном конечном множестве неотрицательно, этот процесс должен оборваться. ■

Следствие 4.10. *Всякое конечномерное векторное пространство обладает базисом.*

Заметим, что если в векторном пространстве V есть базис из n элементов, то любые $m > n$ векторов из V линейно зависимы по Предложению 4.4.

Теорема 4.11. *Все базисы конечномерного линейного пространства V содержат одно и то же число векторов.*

Доказательство. Предложение 4.4. ■

Таким образом, нами доказана корректность следующего определения.

Определение 4.12. *Размерностью* конечномерного векторного пространства V называется число элементов его произвольного базиса.

Размерность конечномерного векторного пространства — натуральное число (включая 0). Размерность пространства V обозначается $\dim V$.

Пример 4.13. Размерность пространства $\mathbb{K}^n$ столбцов высоты n (или строк длины n) равна n. Стандартный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ образуют в нем столбцы $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)$ (единица на i-м месте), $i = 1, \dots, n$.

Задача 4.14. *Докажите, что любая линейно независимая система из n векторов $\{v_1, \dots, v_n\}$ в n-мерном пространстве V является базисом в V.*

Решение. Предположим, что какой-то вектор $v \in V$ не раскладывается по системе $\{v_1, \dots, v_n\}$, тогда система $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ линейно независима, что противоречит Предложению 4.4. ■

Задача 4.15. *Докажите, что любая система из n векторов $\{v_1, \dots, v_n\}$ в n-мерном пространстве V, по которой раскладывается любой вектор $v \in V$, является базисом в V.*

Решение. Предположим, что система $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно зависима, тогда один из ее векторов является линейной комбинацией остальных, и значит его можно выбросить из системы, сохранив условие разложимости по ней любого вектора. Если полученная система снова линейно зависима, выбрасываем из нее следующий лишний вектор и т.д. В конце концов приходим к линейно независимой системе, порождающей V, которая таким образом является базисом, но содержащей менее n векторов. Получили противоречие с Предложением 4.4. ■

Пусть $S \subset V$ — произвольное (конечное или бесконечное) подмножество в V, $\dim V = n < \infty$. Тогда любое линейно независимое подмножество T в S можно дополнить до максимального линейно независимого подмножества в S. Действительно, если T не максимально среди линейно независимых подмножеств в S, к нему можно добавить новый элемент из S с сохранением условия линейной независимости, причем этот процесс оборвется на конечном шаге, поскольку любые $m > n$ векторов в V линейно зависимы (по Предложению 4.4). Применяя приведенное рассуждение к $\varnothing \subset S$ получаем, что в любом подмножестве $S \subset V$ содержится максимальное линейно независимое подмножество.

Предложение 4.16. *Любое максимальное линейно независимое подмножество* $\{e_1, \ldots, e_k\}$ *в* S *является базисом в линейной оболочке* $\langle S \rangle$.

Доказательство. Так как по условию $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — линейно независимая система векторов из $\langle S \rangle$, достаточно показать, что она порождает указанную линейную оболочку. По определению линейной оболочки, любой вектор из $\langle S \rangle$ является линейной комбинацией векторов из S, поэтому достаточно проверить, что любой вектор из S является линейной комбинацией векторов из $\{e_1, \ldots, e_k\}$, а это следует (с учетом максимальности) из Леммы 4.2. ∎

В частности, все максимальные линейно независимые подмножества в S состоят из одинакового количества элементов.

Теорема 4.17. *Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства* V *можно дополнить до базиса в* V.

Доказательство. Возьмем $S = V$ и, применив к нему рассуждение перед Предложением 4.16, дополним указанную систему до максимальной линейно независимой системы. Согласно Предложению 4.16, она будет базисом в $\langle V \rangle = V$. ∎

Теорема 4.18. (Свойство монотонности размерности). *Если* U *— линейное подпространство в* V*, то* $\dim U \leq \dim V$*, причем если* $\dim U = \dim V$*, то* $U = V$.

Доказательство. Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — максимальное линейно независимое подмножество в U. По Предложению 4.16 это — базис в U. Данная система линейно независима и как система векторов из V, поэтому по Теореме 4.17 $\dim V \geq k = \dim U$.

Если при этом $U \neq V$, то существует $v \in V$, который не раскладывается по линейно независимой системе $\{e_1, \ldots, e_k\}$, а значит по Лемме 4.2 система векторов $\{e_1, \ldots, e_k, v\}$ пространства V линейно независима, откуда с учетом Теоремы 4.17 получаем, что $\dim V > k = \dim U$. ∎

4.2 Ранг матрицы

Определение 4.19. *Рангом* системы векторов $\{a_1, \ldots, a_k\}$ векторного пространства V называется размерность ее линейно оболочки $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. *Рангом матрицы* называется ранг системы ее строк (рассматриваемых как векторы пространства строк соответствующей длины). Ранг матрицы A обозначается $\operatorname{rk} A$.

Поясним вторую часть предыдущего определения. Пусть A — матрица размера $m \times n$. Тогда ее строки являются векторами арифметического линейного пространства $\mathbb{K}^n$ и порождают в нем подпространство некоторой размерности $r \leq \min\{m, n\}$. Это число и называется рангом матрицы A.

Заметим, что согласно Предложению 4.16 любая максимальная линейно независимая система строк матрицы A является базисом в линейной оболочке ее строк, поэтому называется также *базисной системой строк.* В частности, любая строка матрицы A является линейной комбинацией строк базисной системы и все такие системы состоят из одинакового числа строк. Кроме того, из

Теоремы 4.17 следует, что любую линейно независимую систему строк матрицы можно дополнить до базисной системы строк.

Из определения размерности следует, что ранг матрицы равен мощности ее базисной системы строк.

Задача 4.20. *Докажите, что произвольную матрицу ранга* 1 *можно представить в виде произведения столбца на строку.*

Задача 4.21. *Докажите, что произвольную матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга* 1*, но нельзя в виде суммы меньшего их числа.*

Задача 4.22. *Что может произойти с рангом матрицы при добавлении к ней дополнительной строки? Описать все возможные варианты и при каких условиях они имеют место.*

Две системы $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, \ldots, b_m\}$ векторов одного векторного пространства V назовем *эквивалентными*, если каждый вектор второй системы b_j линейно выражается через векторы первой системы a_i, и наоборот. Очевидно, что

$$\{a_1, \ldots, a_n\} \sim \{b_1, \ldots, b_m\} \quad \Leftrightarrow \quad \langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle.$$

Отсюда, в частности, следует, что *ранги эквивалентных систем равны.*

При элементарном преобразовании (любого из трех типов) строк матрицы система ее строк заменяется на эквивалентную. Поэтому ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее строк. (Другими словами, ранг — функция, постоянная на классах строчно эквивалентных матриц). С другой стороны, любую матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду. Поэтому для вычисления рангов матриц достаточно научиться считать ранги ступенчатых матриц.

Предложение 4.23. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.*

Доказательство. Для нулевой матрицы утверждение очевидно. Покажем, что ненулевые строки ненулевой ступенчатой матрицы линейно независимы. Пусть некоторая их линейная комбинация равна нулю (=нулевой строке). Рассматривая ведущий элемент $a_{1j_1} \neq 0$ первой строки получаем, что первая ненулевая строка входит в линейную комбинацию с нулевым коэффициентом (иначе в линейной комбинации элемент на j_1-м месте был бы отличен от нуля). Рассуждая дальше по индукции, получаем требуемое. Утверждение Предложения теперь следует из того, что добавление нулевых векторов к системе не меняет ее ранга. ■

В частности, число ненулевых строк одинаково для всех ступенчатых матриц, которые можно получить из данной матрицы с помощью элементарных преобразований строк.

Помимо приведенного выше определения ранга матрицы как размерности линейной оболочки ее строк, можно определить *столбцовый ранг* матрицы как размерность линейной оболочки ее столбцов. Аналогично определяется понятие *базисной системы столбцов.*

Предложение 4.24. *Столбцовый ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее строк. Более того, при элементарных преобразованиях строк базисная система столбцов переходит в базисную систему столбцов (с теми же номерами).*

Доказательство. Очевидно, что первое утверждение из формулировки следует из второго, которое мы и докажем. Пусть A' — матрица, полученная из A элементарными преобразованиями строк. Согласно Следствию 2.32, элементарные преобразования строк матрицы не изменяют линейные зависимости между ее столбцами. Значит, столбцы с номерами $j_1, \dots, j_r$ образуют максимальную линейно независимую систему столбцов матрицы A тогда и только тогда, когда то же верно для матрицы A'.

Более подробно, пусть столбцы с номерами $j_1, \dots, j_r$ образуют максимальную линейно независимую систему столбцов матрицы A. Если бы столбцы с номерами $j_1, \dots, j_r$ матрицы A' оказались линейно зависимы, то, так как (в силу обратимости элементарных преобразований) матрица A получается из A' элементарными преобразованиями строк, столбцы матрицы A с теми же номерами оказались бы связаны той же нетривиальной линейной зависимостью, а это не так по условию. Если бы система столбцов матрицы A' с номерами $j_1, \dots, j_r$ оказалась бы немаксимальной среди линейно независимых систем, то при добавлении некоторого столбца (скажем, с номером j_{r+1}) матрицы A', не входящего в указанную систему, мы снова получили бы линейно независимую систему. С другой стороны, по условию система столбцов матрицы A с номерами $j_1, \dots, j_r, j_{r+1}$ линейно зависима, и нетривиальная линейная зависимость между ними должна перейти в аналогичную нетривиальную линейную зависимость между соответствующими столбцами матрицы A' — противоречие с немаксимальностью системы столбцов матрицы A' с номерами $j_1, \dots, j_r$. ∎

Теорема 4.25. *Строчный и столбцовый ранги матрицы равны.*

Доказательство. Временно обозначим $\widetilde{\mathrm{rk}}\, A$ столбцовый ранг матрицы A. Итак, пусть A — произвольная матрица. Пусть $r = \mathrm{rk}\, A$. Приведем ее к упрощенному виду с помощью элементарных преобразований строк. При этом строчный и столбцовый ранги не меняются. У полученной матрицы r ненулевых строк и r главных столбцов. Поскольку главные столбцы являются столбцами единичной матрицы порядка r с (возможно) дописанными внизу нулями, они линейно независимы. Отсюда следует, что для произвольной матрицы столбцовый ранг не меньше чем строчный, то есть $\widetilde{\mathrm{rk}}\, A \geq \mathrm{rk}\, A$. Другими словами, при транспонировании матрицы ранг не уменьшается. Если он увеличился, то транспонируя матрицу еще раз, получаем противоречие. ∎

Таким образом, для любой матрицы A верно равенство $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, A^T$.

Из доказательства предыдущей Теоремы следует, что главные столбцы ступенчатой матрицы образуют максимальную линейно независимую систему ее столбцов. Этот факт вместе со Следствием 2.32 служит обоснованием следующего алгоритма нахождения базисной системы столбцов произвольной матрицы A. А именно, приведем матрицу A к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, пусть главные столбцы полученной ступенчатой матрицы имеют номера $j_1, \dots, j_r$, тогда столбцы матрицы A с теми же номерами образуют максимальную линейно независимую систему ее столбцов.

Теорема 4.26. *Ранг произведения матриц (когда оно определено) не превосходит ранга каждого из сомножителей.*

Доказательство. Пусть $C := AB$. Согласно Предложению 2.5 i-й столбец матрицы C является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами из i-го столбца матрицы B, поэтому линейная оболочка столбцов матрицы C содержится в линейной оболочке столбцов матрицы A, а значит $\operatorname{rk} C \leq \operatorname{rk} A$. Далее, то же Предложение показывает, что линейная оболочка строк матрицы C содержится в линейной оболочке строк матрицы B, откуда $\operatorname{rk} C \leq \operatorname{rk} B$. ∎

Задача 4.27. *Докажите, что произвольную матрицу C размера $m \times n$ и ранга r можно представить в виде произведения AB, где A — матрица размера $m \times r$, а B — размера $r \times n$. Существует ли аналогичное представление в виде произведения матриц размеров $m \times s$ и $s \times n$, где $s < r$?*

Решение. Составим матрицу A из (некоторой системы) базисных столбцов матрицы C. Напомним, что i-й столбец матрицы AB есть линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами из i-го столбца матрицы B. Таким образом, i-й столбец B нужно составить из коэффициентов разложения i-го столбца C по выбранной системе базисных столбцов.

Другой способ: существуют последовательности элементарных преобразований строк и столбцов, приводящие матрицу C к блочному виду $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_r — единичная матрица порядка r. То есть существуют невырожденные матрицы S, T порядков m и n такие, что $C = S \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T$. С другой стороны, $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}$, откуда все следует.

Ответ на вопрос отрицательный, так как существование такого представления противоречило бы Теореме 4.26. ∎

Задача 4.28. *Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Тогда для любой матрицы B, для которой существует произведение AB, верно равенство $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} B$. Аналогично для невырожденной матрицы B.*

Решение. Так как матрица A невырождена, то она строчно эквивалентна единичной E. То есть существует конечный набор элементарных матриц $S_1, \ldots, S_p$ такой, что $S_p \ldots S_1 A = E$ (тогда, как мы знаем, $S_p \ldots S_1 = A^{-1}$). Равенство $S_p \ldots S_1 AB = B$ показывает, что та же последовательность элементарных преобразований строк, которая матрицу A приводит к единичной E, приводит матрицу AB к B. При элементарных преобразованиях строк ранг матрицы не меняется, поэтому $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} B$. ∎

Задача 4.29. *Пусть A — матрица с линейно независимыми столбцами. Тогда для любой матрицы B, для которой существует произведение AB, верно равенство $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} B$. Аналогично для матрицы B с линейно независимыми строками.*

Решение. 1-й способ является обобщением решения предыдущей задачи. Пусть матрица A имеет размер $m \times n$, из условия следует, что $m \geq n$. Если $m = n$ то матрица A невырождена и мы возвращаемся к условию предыдущей задачи. Если $m > n$, то матрица A элементарными преобразованиями строк приводится к виду $A' := \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица порядка n, а 0 —

нулевая матрица размера $(m-n) \times n$. Поэтому $\mathrm{rk}\,(AB) = \mathrm{rk}\,(A'B)$. С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix},$$

а ранг последней матрицы, очевидно, равен $\mathrm{rk}\,B$.

2-й способ. Пусть $C := AB$. Используя идею из доказательства Теоремы 4.26 мы видим, что столбцы матрицы B — координатные столбцы столбцов матрицы C в базисе (соответствующей линейной оболочки), образованном столбцами матрицы A. Теперь требуемое следует из того, что ранг произвольной системы векторов равен рангу системы из их координатных столбцов в произвольном базисе. ■

Теорема 4.30. *Ранг суммы матриц не превосходит суммы их рангов.*

Доказательство. Приведем два доказательства. Первое следует из цепочки более-менее очевидных (не)равенств:

$$\mathrm{rk}\,(A+B) \le \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A+B \\ B \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \le \mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B$$

(читателю предлагается детально обдумать каждый шаг). Второе — геометрическое — доказательство изложим более подробно. Пусть $\{u_1, \dots, u_m\}$ и $\{v_1, \dots, v_m\}$ — две системы векторов некоторого линейного пространства (в нашем случае в качестве указанных векторов выступают строки матриц A и B). Имеет место включение линейных оболочек

$$\langle u_1 + v_1, \dots, u_m + v_m \rangle \subseteq \langle u_1, \dots, u_m,\, v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Действительно, любая линейная комбинация векторов из левой части является линейной комбинацией векторов из правой части. По Теореме 4.18 $\dim\langle u_1 + v_1, \dots, u_m + v_m \rangle \le \dim\langle u_1, \dots, u_m,\, v_1, \dots, v_m \rangle$. Кроме того, верно неравенство

$$\dim\langle u_1, \dots, u_m,\, v_1, \dots, v_m \rangle \le \dim\langle u_1, \dots, u_m \rangle + \dim\langle v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Действительно, объединение максимальных линейно независимых подмножеств (то есть базисов) линейных оболочек $\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ и $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ порождает линейную оболочку $\langle u_1, \dots, u_m,\, v_1, \dots, v_m \rangle$. По Теореме 4.9 это множество содержит некоторый базис последней линейной оболочки, откуда следует требуемое. ■

Легко привести пример, когда в предыдущей теореме имеет место равенство.

Очевидно, что матрица A порядка n невырождена $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rk}\,A = n$.

Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Это означает, что ее столбцы образуют базис в пространстве $\mathbb{K}^n$ столбцов высоты n. Значит, для любого столбца $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^n$ существует единственный столбец $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ такой, что $A\mathbf{b} = \mathbf{c}$ (ср. Предложение 2.5). То есть квадратная СЛУ $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ с невырожденной матрицей A разрешима для любого столбца $\mathbf{c}$ и для любого $\mathbf{c}$ имеет единственное решение (нам это уже известно, см. Теорему 3.39). Беря в качестве $\mathbf{c}$ столбцы единичной матрицы $e_1, \dots, e_n$ получим систему столбцов $\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_n$ такую, что $A(\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n) = E$, то есть $AB = E$, $B := (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n)$. Из Теоремы 4.26 следует, что матрица B также невырождена.

Применяя к ней аналогичные соображения, найдем для нее матрицу C такую, что $BC = E$. Теперь имеем $A = A(BC) = (AB)C = C$, то есть B является обратной для A. Таким образом, мы еще раз доказали, что невырожденная матрица имеет обратную. Необходимость следует из Теоремы 3.39, поскольку единичная матрица, очевидно, невырождена.

Заметим, что нами фактически доказано следующее утверждение: для квадратной матрицы A любая матрица B, удовлетворяющая одному из уравнений $AB = E$ или $BA = E$, является обратной (то есть автоматически удовлетворяет и второму из уравнений).

Таким образом, для матриц порядка n условия $\operatorname{rk} A = n$, $\det A \neq 0$ и существования обратной равносильны, поскольку все они эквивалентны невырожденности. Какая связь между понятиями ранга и определителя в общем случае?

Напомним, что минором матрицы называется определитель ее квадратной подматрицы, а его порядком — порядок соответствующей подматрицы.

Теорема 4.31. ("о ранге матрицы"). *Ранг матрицы равен наибольшему порядку ее миноров, отличных от нуля.*

Доказательство. Пусть A — матрица размера $m \times n$ и ранга r, $r \leq \min\{m, n\}$. Покажем, что для любого $s > r$, $s \leq \min\{m, n\}$ все миноры порядка s матрицы A равны нулю. Действительно, любые s строк матрицы A линейно зависимы, тем более линейно зависимы их пересечения с произвольными s столбцами. Следовательно, любая подматрица порядка s матрицы A вырождена, значит, ее определитель равен нулю.

С другой стороны, в матрице A ранга r найдется ненулевой минор порядка r. Действительно, поскольку $\operatorname{rk} A = r$, в матрице A есть система из r линейно независимых строк. Последние образуют подматрицу ранга r, и значит среди ее столбцов тоже найдется r линейно независимых. Квадратная подматрица в A порядка r, образованная выбранными строками и столбцами матрицы A, невырождена, и значит ее определитель — соответствующий минор матрицы A — отличен от нуля. ∎

Пусть A — матрица ранга r. Любая ее невырожденная подматрица порядка r называется *базисной подматрицей* матрицы A, а определитель базисной подматрицы — *базисным минором* матрицы A. Согласно доказанной Теореме, r — максимальный порядок невырожденных подматриц (ненулевых миноров) матрицы A. Название "базисный" оправдывает следующее утверждение.

Следствие 4.32. ("о базисном миноре"). *Строки матрицы A, в которых содержится ее произвольная базисная подматрица, образуют базисную систему строк матрицы A. То же верно и для столбцов.*

Доказательство. Так как базисная подматрица невырождена, ее строки линейно независимы. Тем более независимы строки матрицы A, которые их содержат. Таким образом, данные стороки образуют систему из r (где $r = \operatorname{rk} A$) линейно независимых строк матрицы A. Теперь требуемое утверждение следует из того, что любые r линейно независимых векторов в r-мерном пространстве образуют базис (см. Задачу 4.14). ∎

Следующая задача усиливает предыдущую Теорему.

Задача 4.33. *Если в матрице* A *есть ненулевой минор порядка* r, *а все миноры порядка* $r+1$, *получаемые приписыванием к нему одной строки и одного столбца (так называемые окаймляющие миноры), равны нулю, то* $\operatorname{rk} A = r$.

Решение. Пусть $\operatorname{rk} A \geq r+1$. Мы знаем, что всякую линейно независимую систему строк матрицы A можно дополнить до максимальной линейно независимой системы, которая является базисом в линейной оболочке строк матрицы A. Используя это, дополним систему r линейно независимых строк матрицы A, на пересечении которых стоит ненулевой минор порядка r, до линейно независимой системы из $r+1$ строки. Последние образуют подматрицу в A ранга $r+1$ и ее столбцы, отвечающие ненулевому минору порядка r, линейно независимы. Снова используя сформулированный результат (для столбцов), получим, что набор из данных r линейно независимых столбцов можно продолжить до аналогичного набора из $r+1$ столбца. Подводя итог, мы видим, что если $\operatorname{rk} A \geq r+1$, то для данного ненулевого минора порядка r найдется ненулевой окаймляющий минор порядка $r+1$. ■

Задача 4.34. *В матрице* A *ранга* r *любой минор порядка* r, *образуемый пересечением* r *линейно независимых строк с* r *линейно независимыми столбцами, отличен от нуля.*

Решение. r линейно независимых строк в матрице A ранга r являются базисными, то есть каждая из остальных строк — их линейная комбинация. Вычитая из небазисных строк линейные комбинации базисных, которые им равны, получаем матрицу A', в которой все базисные строки остались без изменения, а небазисные заменились нулевыми. Поскольку при этом используются только элементарные преобразования строк (типа I), то $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$. Кроме того, линейные зависимости между столбцами при этом также не изменились, и значит r столбцов матрицы A' с теми же номерами, что r линейно независимых столбцов из формулировки Теоремы, останутся линейно независимыми. По теореме о ранге матрицы в подматрице, образованной этими r линейно независимыми столбцами, должен быть ненулевой минор порядка r, которым может быть только минор, образованный пересечением данной системы столбцов с исходной системой из r линейно независимых строк, который совпадает с соответствующим минором матрицы A. ■

Заметим, что в предыдущей задаче условие равенства числа строк и столбцов рангу существенно. Например, в единичной матрице порядка 2 на пересечении 1-й строки и 2-го столбца стоит нулевая подматрица.

4.3 Системы линейных уравнений III

С использованием понятия ранга матрицы мы можем дать общепринятые формулировки результатов о системах линейных уравнений, доказанных в разделе 2.7. Кроме того, мы ответим на вопросы, сформулированные в конце указанного раздела.

Теорема 4.35. (Теорема Кро́некера-Капелли). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы коэффициентов.*

Доказательство. Действительно, в обозначениях раздела 2.7 это условие $\tilde{r} = r$. ■

Заметим, что доказанная теорема очевидна и без приведения к ступенчатому виду. Действительно, условие, что ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов в точности означает, что столбец правых частей принадлежит линейной оболочке столбцов матрицы коэффициентов, то есть является линейной комбинацией указанных столбцов, а как мы знаем, коэффициенты такой линейной комбинации образуют решение.

Теорема 4.36. *Совместная система линейных уравнений является определенной тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов равен числу неизвестных.*

Доказательство. Действительно, в обозначениях раздела 2.7 это условие $r = n$ (в предположении $\tilde{r} = r$). ■

Опять же, доказанная теорема очевидна без приведения к ступенчатому виду. Действительно, ранг матрицы коэффициентов системы равен числу неизвестных в точности тогда, когда столбцы матрицы коэффициентов линейно независимы, далее можно воспользоваться Леммой 4.3.

Следующая простая и фундаментальная теорема показывает, какие подмножества в пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$ могут быть множествами решений СЛУ и, в частности, СЛОУ, и играет исключительно важную роль в теории систем линейных уравнений (причем не только алгебраических, но и дифференциальных). Читателю предлагается продумать ее геометрический смысл, используя результаты аналитической геометрии.

Теорема 4.37. *1) Множество решений СЛОУ $Ax = 0$ от n неизвестных является линейным подпространством в пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$.*

2) Зафиксируем некоторое решение x_0 совместной СЛУ $Ax = b$. Тогда всякое ее решение представляется в виде $x_0 + y$, где y — некоторое решение $Ax = 0$. И обратно, любая такая сумма — решение $Ax = b$.

Утверждение второй части теоремы кратко формулируют так: *"общее решение совместной неоднородной системы является суммой ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы"*.

Доказательство. 1) Нулевой столбец (нулевой вектор в $\mathbb{K}^n$) является решением СЛОУ. Далее непосредственно проверяется, что для двух решений СЛОУ их сумма также будет ее решением, а также что вместе с каждым решением его произведение на скаляр тоже будет решением. Ясно, что все эти утверждения достаточно проверить для одного однородного уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$.

2) Пусть x_1 — еще одно решение неоднородной системы. Тогда легко проверяется, что $x_1 - x_0$ — решение однородной системы. Действительно, $A(x_1 - x_0) = Ax_1 - Ax_0 = b - b = 0$. Обозначая его y, получаем $x_1 = x_0 + y$. Наоборот, $A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$, то есть всякая такая сумма является решением неоднородной системы. ■

Раз пространство $U = U_A$ решений СЛОУ $Ax = 0$ от n неизвестных является линейным подпространством в $\mathbb{K}^n$, то $0 \leq \dim U \leq n$. Легко привести примеры систем для каждого возможного значения размерности. От каких характеристик СЛОУ (ее матрицы коэффициентов) зависит размерность пространства решений? Интуиция подсказывает, что каждое независимое уравнение системы уменьшает размерность пространства решений на единицу. То есть пространство решений пустой системы от n неизвестных есть все $\mathbb{K}^n$, системы, состоящей из одного ненулевого уравнения является $n-1$-мерным подпространством в $\mathbb{K}^n$, из двух независимых уравнений — $n-2$-мерным подпространством и т.д. Очевидно, что формализацией понятия "система из независимых уравнений" является условие, что строки матрицы коэффициентов системы линейно независимы, то есть ранг указанной матрицы равен числу ее строк (=числу уравнений системы).

Теорема 4.38. *Размерность пространства решений СЛОУ $Ax=0$ от n неизвестных равна $n-\operatorname{rk} A$.*

Доказательство. Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу A к упрощенному виду, если в нем есть нулевые строки, отбросим их, и обозначим полученую матрицу A'. При этом класс эквивалентности системы не изменился (то есть системы $A'x=0$ и $Ax=0$ задают одно и то же подпространство в $\mathbb{K}^n$). Главные столбцы матрицы A', которые являются столбцами коэффициентов перед главными неизвестными, образуют единичную матрицу. Например, если главные неизвестные идут подряд (это наиболее частый случай; общий случай сводится к этому переименованием переменных), то $A'=(E_r\,C)$, где $C=(c_{ij})$ — некоторая матрица размера $n\times(n-r)$. Перенося слагаемые со свободными неизвестными в правую часть, мы получаем выражение главных неизвестных через свободные

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -c_{11}x_{r+1}-c_{12}x_{r+2}-\ldots-c_{1n-r}x_n \\ x_2 & = & -c_{21}x_{r+1}-c_{22}x_{r+2}-\ldots-c_{2n-r}x_n \\ \multicolumn{3}{l}{\dotfill} \\ x_r & = & -c_{r1}x_{r+1}-c_{r2}x_{r+2}-\ldots-c_{rn-r}x_n. \end{array}\right. \tag{19}$$

Последовательно присваивая одной из свободных неизвестных $x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n$ значение 1, а остальным — 0, получаем следующий набор решений

$$\begin{gathered} u_1 := (-c_{11},-c_{21},\ldots,-c_{r1},1,0,\ldots,0)^T, \\ u_2 := (-c_{12},-c_{22},\ldots,-c_{r2},0,1,\ldots,0)^T, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-r} := (-c_{1\,n-r},-c_{2\,n-r},\ldots,-c_{r\,n-r},0,0,\ldots,1)^T. \end{gathered}$$

Полезно заметить, что указанные столбцы являются столбцами матрицы $\begin{pmatrix} -C \\ E_{n-r}\end{pmatrix}$, где E_{n-r} — единичная матрица порядка $n-r$.

Покажем, что полученные решения образую базис в пространстве решений, отсюда и будет следовать теорема. Действительно, выписанные столбцы линейно независимы, так как составленная из них матрица имеет единичную подматрицу порядка $n-r$ и, значит, ее ранг не меньше $n-r$. С другой стороны, каждое решение системы $A'x=0$ однозначно определяется (по формулам (19)) значениями свободных неизвестных, а для любых $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-r}\in\mathbb{K}$ линейная комбинация $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\ldots+\lambda_{n-r}u_{n-r}$ является решением системы $A'x=0$, для которого свободные неизвестные равны $x_{r+1}=\lambda_1$, $x_{r+2}=\lambda_2,\ldots,x_n=\lambda_{n-r}$ (то есть произвольному набору), таким образом, любое решение указанной системы является линейной комбинацией $u_1,u_2,\ldots,u_{n-r}$. ■

Задача 4.39. *Допустим, что добавление к некоторой СЛОУ еще одного уравнения (от того же множества неизвестных) не меняет множества решений. Доказать, что добавленное уравнение является линейной комбинацией уравнений исходной системы.*

Решение. Раз множество решений СЛОУ не меняется, то не изменяются линейные зависимости между столбцами, то есть сохраняется столбцовый ранг матрицы коэффициентов, а значит и ее строчный ранг. Другой способ: пространство решений не меняется, следовательно, не меняется его размерность, а значит не меняется ранг матрицы коэффициентов. ∎

Задача 4.40. *Доказать, что две СЛОУ от одинакового числа неизвестных эквивалентны тогда и только тогда, когда уравнения каждой из них являются линейными комбинациями уравнений другой системы.*

Решение. В силу предыдущей задачи добавление любого из уравнений второй системы к первой системе не меняет ранга ее матрицы коэффициентов. ∎

Заметим, что выбор базиса в пространстве решений не единственен (за исключением тривиальных случаев), но так как число базисных векторов пространства не зависит от выбора базиса, количество базисных решений для данной системы ни от каких выборов не зависит (а зависит, как показывает предыдущая теорема только от числа неизвестных и ранга матрицы коэффициентов).

Базис в пространстве решений СЛОУ называется *фундаментальной системой решений* (кратко ФСР), а матрица, полученная выписыванием фундаментальных решений в столбцы — *фундаментальной матрицей системы.*

Из предыдущего обсуждения следует, что число столбцов (а значит размер) фундаментальных матриц для данной СЛОУ один и тот же. Сформулируем и докажем критерий того, что данная матрица является фундаментальной матрицей данной СЛОУ.

Пусть A — матрица с n столбцами и ранга r.

Предложение 4.41. *Матрица* Φ *размера* $n \times (n-r)$ *является фундаментальной матрицей СЛОУ* $Ax = 0$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1) $A\Phi = 0$*;*

2) $\operatorname{rk}\Phi = n - r$.

Например, матрица $\Phi := \begin{pmatrix} -C \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$ — фундаментальная матрица для системы однородных уравнений с упрощенной матрицей $A := (E_r\, C)$ (у которой главные неизвестные идут подряд). В том, что $A\Phi = 0$ (нулевой матрице) проще всего убедиться, записав $\begin{pmatrix} -C \\ E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$ и воспользовавшись дистрибутивностью умножения матриц относительно сложения.

Доказательство. Если Φ — фундаментальная матрица системы $Ax = 0$, то ее столбцы являются решениями указанной системы, откуда следует соотношение $A\Phi = 0$. Кроме того, столбцы фундаментальной матрицы образуют базис в пространстве решений, откуда следует, что они линейно независимы и их $n - r$ штук (см. Теорему 4.38), то есть $\operatorname{rk}\Phi = n - r$.

Обратно, если Φ — матрица размера $n \times (n-r)$ такая, что $A\Phi = 0$, то ее столбцы являются решениями системы $Ax = 0$, а если при этом ее ранг равен числу ее столбцов $n - r$, то они линейно независимы и, значит, образуют базис в пространстве решений системы $Ax = 0$, поскольку, согласно Теореме 4.38, размерность указанного пространства равна $n - r$. ∎

Задача 4.42. *Найдите ФСР однородной системы с матрицей коэффициентов* $(C\,E_r)$.

Задача 4.43. *Пусть* A *— матрица ранга* r*, состоящая из* n *столбцов. Известно, что для матрицы* B *определено произведение* $AB = 0$*. Оцените сверху* $\operatorname{rk} B$.

Решение. Столбцы матрицы B являются решениями СЛОУ $Ax = 0$, поэтому среди них не более $n - r$ линейно независимых. Если B — ФСР указанной системы, то $AB = 0$ $\operatorname{rk} B = n - r$, то есть оценка является точной. ■

Задача 4.44. *Зная фундаментальную матрицу* Φ *СЛОУ* $Ax = 0$*, найти общий вид произвольной фундаментальной матрицы той же системы уравнений.*

Теорема 4.45. *Пусть* Φ *— фундаментальная матрица СЛОУ* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$*. Тогда система* $\Phi^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *задает линейную оболочку строк матрицы* A.

Доказательство. Пусть A' — подматрица A, состоящая из какой-либо системы базисных строк A. Используя Предложение 4.41 покажем, что A'^T является фундаментальной матрицей СЛОУ $\Phi^T y = 0$, откуда, очевидно, и будет следовать доказываемая теорема.

Из $A\Phi = 0$, очевидно, следует $A'\Phi = 0$. Транспонируя последнее равенство, получаем $\Phi^T A'^T = 0$, то есть столбцы матрицы A'^T (или, что то же самое, строки A') являются решениями СЛОУ $\Phi^T y = 0$. С другой стороны, если у матрицы A n столбцов и ранг r, то матрица Φ^T имеет n столбцов и ранг $n-r$, а матрица A'^T имеет размер $n \times r$ и ранг $r(= n-(n-r))$ и по Предложению 4.41 является фундаментальной матрицей системы $\Phi^T y = 0$. ■

Задача 4.46. *Используя предыдущую Теорему, придумайте алгоритм, как по подпространству пространства* $\mathbb{K}^n$*, заданному как линейная оболочка некоторой конечной системы векторов, построить СЛОУ, для которой данное подпространство является пространством решений. (Отсюда легко следует, что любое подпространство в* $\mathbb{K}^n$ *является пространством решений некоторой СЛОУ).*

Наряду с теоремой Кронекера-Капелли есть еще удобный критерий разрешимости системы линейных уравнений, причем легко обобщающийся на бесконечномерный случай — теорема Фредгольма.

Для СЛУ $Ax = b$ СЛОУ $A^T y = 0$ называется *сопряженной однородной системой.* Заметим, что последняя может быть переписана в виде $y^T A = 0$.

Теорема 4.47. (Теорема Фредгольма). *Система* $Ax = b$ *разрешима тогда и только тогда, когда для любого решения* y_0 *сопряженной однородной системы* $A^T y = 0$ *выполнено равенство* $y_0^T b = 0$.

Заметим, что условие $y_0^T b = 0$ можно интерпретировать как условие ортогональности (относительно "стандартного" скалярного произведения столбцов, а именно такого, для которого столбцы e_i образуют ортонормированный базис) столбца b произвольному столбцу, являющемуся решением сопряженной однородной системы.

Доказательство. Пусть система $Ax = b$ разрешима и x_0 — ее решение. Тогда для произвольного решения y_0 сопряженной однородной системы

$$y_0^T A x_0 = (y_0^T A) x_0 = 0 x_0 = 0,$$

с другой стороны,

$$y_0^T A x_0 = y_0^T (A x_0) = y_0^T b,$$

откуда $y_0^T b = 0$.

Предположим теперь, что система $Ax = b$ несовместна. Это равносильно тому, что в упрощенном виде ее расширенной матрицы $(A \mid b)$ есть строка $(0 \dots 01)$ (последняя ненулевая строка сверху). Так как упрощенный вид получается из исходной матрицы элементарными преобразованиями строк, строка $(0 \dots 01)$ является линейной комбинацией строк матрицы $(A \mid b)$. То есть существует такой столбец y_0, что $y_0^T (A \mid b) = (0 \dots 01)$. Последнее равенство равносильно системе $y_0^T A = 0, \quad y_0^T b = 1$. То есть предположив несовместность системы $Ax = b$, мы нашли такое решение y_0 сопряженной однородной системы, что $y_0^T b \neq 0$. ■

Задача 4.48. *Системы вида $Ax = b$ над полем $\mathbb{R}$ совместны для любого столбца правых частей b тогда и только тогда, когда строки матрицы A линейно независимы. Докажите это, используя a) теорему Кронекера-Капелли, b) теорему Фредгольма.*

4.4 Координаты вектора в базисе

Пусть в n-мерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ зафиксирован базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда любой вектор $v \in V$ единственным образом по нему раскладывается:

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n. \tag{20}$$

Согласно Лемме 4.3 из линейной независимости базисных векторов следует, что набор скаляров $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ определен однозначно, и v_i называется *i-й координатой вектора v в базисе* $\{e_1, \dots, e_n\}$. Согласно стандартному соглашению, набор $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ записывается в виде столбца и называется столбцом координат вектора v в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$. Равенство (20) часто записывают в "матричной форме"

$$v = (e_1, e_2, \dots, e_n)(v_1, v_2, \dots, v_n)^T \tag{21}$$

(произведение строки из базисных векторов на столбец координат).

Предложение 4.49. *Сопоставление каждому вектору n-мерного линейного пространства V его координатного столбца в фиксированном базисе $e := \{e_1, \dots, e_n\}$ задает биекцию*

$$\varphi_e \colon V \to \mathbb{K}^n, \quad \varphi_e(v) = (v_1, \dots, v_n)^T$$

пространства V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$ высоты n. Кроме того, данная биекция сохраняет операции: $\varphi_e(u + v) = \varphi_e(u) + \varphi_e(v)$ (координатный столбец суммы векторов равен сумме координатных столбцов слагаемых) и $\varphi_e(\lambda v) = \lambda \varphi_e(v)$ (координатный столбец произведения вектора на скаляр равен произведению координатного столбца вектора на тот же скаляр).

Доказательство. Как уже отмечалось, тот факт, что φ_e корректно определено, следует из существования и единственности разложения вектора по базису. Если двум векторам отвечает один и тот же столбец, то они совпадают, поскольку имеют одинаковые разложения по выбранному базису. Значит, φ_e инъективно. Произвольный столбец $(v_1, \ldots, v_n)^T$ является координатным столбцом вектора $v = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$, который существует в силу аксиом векторного пространства.

Вторая часть предложения следует из свойств операций над векторами, вытекающих из аксиом линейного пространства: если $u = \sum u_i e_i, \quad v = \sum v_i e_i$, то $u + v = \sum (u_i + v_i) e_i, \quad \lambda v = \sum (\lambda v_i) e_i$. ■

Следствие 4.50. *При любом выборе базиса в пространстве V линейные зависимости между векторами V — то же, что линейные зависимости между их координатными столбцами.*

Доказательство. Заметим, что при биекции φ_e нулевой вектор пространства V соответствует нулевому столбцу в $\mathbb{K}^n$. Пусть $\sum_i \lambda_i v_i = 0$ — линейная зависимость. Тогда

$$(0, \ldots, 0)^T = \varphi_e(0) = \varphi_e\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i \lambda_i \varphi_e(v_i).$$

Обратно, если $\sum_i \lambda_i \varphi_e(v_i) = (0, \ldots 0)^T$ — линейная зависимость между столбцами, то

$$(0, \ldots 0)^T = \sum_i \lambda_i \varphi_e(v_i) = \varphi_e\left(\sum_i \lambda_i v_i\right),$$

а значит в силу замечания выше $\sum_i \lambda_i v_i = 0$. ■

В частности, ранг системы векторов равен рангу их координатных столбцов в произвольном базисе, координатные столбцы максимальной линейно независимой подсистемы системы векторов образуют максимальную линейно независимую подсистему их системы столбцов и т.д.

Зафиксировав базис и заменяя векторы их координатными столбцами мы сводим геометрию линейного пространства к алгебре столбцов, что полезно для конкретных вычислений. Может показаться, что про геометрию после этого можно забыть, но это далеко не так. Как правило, смысл теорем и их доказательства намного прозрачнее, если их излагать на геометрическом языке.

Заметим, что построенная выше биекция зависит от базиса — каждому базису e в V отвечает своя биекция $\varphi_e \colon V \to \mathbb{K}^n$. (Вообще, до тех пор, пока мы не зафиксировали какой-то базис, все базисы в пространстве V равноправны). Пространство $\mathbb{K}^n$ с этой точки зрения не просто n-мерное пространство над полем $\mathbb{K}$, а n-мерное пространство с выбранным “стандартным” базисом из столбцов $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots 0)^T$ (1 на i-м месте), в который переходит при биекции выбранный базис в V.

Вообще говоря, в линейном пространстве много базисов, все что мы пока знаем — что они содержат одинаковое число векторов. Сейчас мы построим биекцию между множеством базисов в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{K}$ и множеством невырожденных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{K}$.

Пусть в n-мерном пространстве V выбран базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и система векторов $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$.

Запишем разложения векторов системы по базису:

$$
\begin{aligned}
e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\
e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n
\end{aligned}
$$

и составим матрицу $C = (c_{ij})$. Подчеркнем, что матрица C получается выписыванием координат векторов системы относительно базиса в *столбцы*. Приведенное определение равносильно тому, что C удовлетворяет равенству

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)C \tag{22}$$

(единственность матрицы C, удовлетворяющей приведенному равенству, следует из линейной независимости системы $\{e_1, \ldots, e_n\}$).

Предложение 4.51. *Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V. Система векторов $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, задаваемая (22), линейно независима (является базисом в V) тогда и только тогда, когда матрица C невырождена.*

Доказательство. Если матрица C вырождена, то существует такой столбец $x_0 \neq 0$ высоты n, что $Cx_0 = 0$. Тогда, умножая обе части (22) справа на x_0, получаем нетривиальную линейную зависимость между векторами $e'_1, \ldots, e'_n$.

Наоборот, если система $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ линейно зависима, то существует ненулевой столбец x_0 высоты n такой, что $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)x_0 = 0$. Тогда из (22) и линейной независимости системы $\{e_1, \ldots, e_n\}$ получаем, что $Cx_0 = 0$, то есть столбцы матрицы C линейно зависимы, а значит эта матрица вырождена. ∎

Определение 4.52. *Матрицей перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$* называется матрица C, определенная равенством (22).

Зафиксируем некоторый базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V. Из предыдущего Предложения следует, что сопоставляя базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ матрицу перехода к нему от фиксированного базиса мы получаем биекцию между множеством базисов в n-мерном пространстве V и множеством невырожденных матриц порядка n над данным полем (над которым определено векторное пространство V). В частности, самому фиксированному базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$ при этом соответствует единичная матрица E (в частности, определенная биекция зависит от того, какой базис зафиксирован).

Задача 4.53. *Если C — матрица перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, то матрицей перехода "в обратном направлении" — от $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ к $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — будет C^{-1}.*

Задача 4.54. *Если C — матрица перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, а D — матрица перехода от $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ к базису $\{e''_1, \ldots, e''_n\}$, то CD — матрица перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к $\{e''_1, \ldots, e''_n\}$.*

Координаты ненулевого вектора $v \in V$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V зависят от базиса. Например, любой такой вектор можно включить в базис в качестве первого вектора (см. Теорему 4.17), и тогда его координаты в таком базисе будут составлять столбец $(1, 0, \ldots, 0)^T$.

Решим следующую задачу: пусть вектор v имеет координатный столбец $(v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и пусть задан новый базис $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, связанный с первым матрицей перехода C. Какие координаты вектор v будет иметь в новом базисе?

Используя запись (21) и равенство (22), имеем

$$v = (e_1, \ldots, e_n)(v_1, \ldots, v_n)^T = (e'_1, \ldots, e'_n)(v'_1, \ldots, v'_n)^T = ((e_1, \ldots, e_n)C)(v'_1, \ldots, v'_n)^T.$$

Сравнивая второе выражение с последним и используя ассоциативность умножения матриц и единственность разложения вектора по базису, получаем

$$(v_1, \ldots, v_n)^T = C(v'_1, \ldots, v'_n)^T \qquad \text{или} \qquad (v'_1, \ldots, v'_n)^T = C^{-1}(v_1, \ldots, v_n)^T. \tag{23}$$

Обратим внимание читателя на особенность полученной формулы: чтобы получить столбец координат вектора в новом базисе, нужно умножить столбец его координат в старом базисе на матрицу, *обратную* к матрице перехода от старого базиса к новому. Заметим, что оба равенства в (23) эквивалентны в силу Задачи 4.53.

5 Линейные пространства и отображения

5.1 Подпространства и прямые суммы

Пусть $U \subset V$ — подпространство линейного пространства V.

Определение 5.1. Базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V называется *согласованным* с подпространством U, если $U = \langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_k} \rangle$ (то есть U является линейной оболочкой некоторого подмножества векторов данного базиса).

Например, базис $\{e_1, e_2\}$ в двумерном пространстве V согласован с нулевым подпространством, одномерными подпространствами $\langle e_1 \rangle$, $\langle e_2 \rangle$ и самим пространством V, а, например, с одномерным подпространством $\langle e_1 + e_2 \rangle$ не согласован.

Очевидно, что для всякого подпространства $U \subset V$ существует согласованный с ним базис в V. Действительно, выберем произвольный базис в U и продолжим его до базиса в V.

Пусть теперь в V выбраны два подпространства $U \subset V$, $W \subset V$. Существует ли базис в V, согласованный одновременно с подпространствами U и W? Чтобы изучить этот вопрос, введем две важные операции над подпространствами фиксированного пространства (пока для случая двух подпространств).

Для двух подпространств U, $W \subset V$ определим подмножество

$$U + W := \{u + w \mid u \in U,\, w \in W\} \subset V$$

(векторы из разных подпространств одного и того же пространства V можно складывать как элементы из V). Мгновенно проверяется, что $U + W$ — не просто подмножество в V, а *подпространство* в V.

Определение 5.2. *Суммой* подпространств U, $W \subset V$ называется подпространство $U+W$ в V.

Заметим, что объединение двух подпространств U, $W \subset V$ как правило *не является* подпространством в V (только подмножеством).

Задача 5.3. *Докажите, что теоретико-множественное объединение $U \cup W$ двух подпространств U, $W \subset V$ является подпространством в V тогда и только тогда, когда одно из них содержится в другом: $U \subset W$ или $W \subset U$.*

Решение. Пусть $U \cup W$ подпространство, но U не содержится в W; выберем $u \in U$, $u \notin W$. Тогда $\forall w \in W$ $u+w \in U$ (иначе $u+w=w' \in W$ и значит $u = w' - w \in W$ в противоречии с выбором u). Откуда $W \subset U$. Если же одно из подпространств содержится в другом, то их объединение совпадает с этим подпространством. ■

Задача 5.4. *Докажите, что сумма $U+W$ является наименьшим из подпространств в V, содержащим и U и W. Эквивалентно, $U+W$ есть линейная оболочка объединения этих подпространств, то есть $U+W = \langle U \cup W \rangle$.*

В отличии от объединения, пересечение любого (конечного или бесконечного) семейства подпространств данного пространства всегда является подпространством (докажите!).

Определение 5.5. *Пересечением* подпространств U, $W \in V$ называется подпространство, множество элементов которого является их обычным теоретико-множественным пересечением $U \cap W$ как подмножеств в V.

Задача 5.6. *Докажите, что*

$$\max(\dim U, \dim V) \leq \dim(U+V) \leq \dim U + \dim V.$$

Вскоре мы серьезно улучшим результат предыдущей задачи.

Теорема 5.7. *Для любой пары подпространств U, $W \in V$ существует базис в V, согласованный с U и W.*

Доказательство. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_p\}$ в $U \cap W$. Это — линейно независимая система векторов и в U и в W. Пусть $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_k\}$ и $\{e_1, \ldots, e_p, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l-p}\}$ — ее дополнения до базисов в U и W соответственно (наши обозначения предполагают, что $\dim(U \cap W) = p$, $\dim U = k$, $\dim W = l$).

Мы утверждаем, что система векторов

$$\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l-p}\} \tag{24}$$

линейно независима (и значит является базисом в $U+W$, поскольку она, очевидно, порождает $U+W$). Действительно, пусть

$$\sum_{i=1}^{k+l-p} \lambda_i e_i = 0$$

— линейная зависимость. Тогда

$$x := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = -\sum_{i=k+1}^{k+l-p} \lambda_i e_i \in U \cap W. \qquad (25)$$

Поэтому $\exists \mu_i,\ i = 1, \dots, p$ такие, что $x = \sum_{i=1}^{p} \mu_i e_i$. Из линейной независимости системы $\{e_1, \dots, e_p, e_{k+1}, \dots, e_{k+l-p}\}$ (как базиса в W) следует, что правая часть в (25) равна нулю, а значит $x = 0$, откуда все λ_i равны нулю. Таким образом, система (24) линейно независима, как и утверждалось. Теперь осталось дополнить ее до базиса в V, при этом, очевидно, получится требуемый базис, согласованный с подпространствами U и W. ■

В качестве иллюстрации к доказанной теореме читателю предлагается представить два двумерных подпространства U и W в трехмерном пространстве, пересекающихся по одномерному $U \cap W$. Тогда $\{e_1\}$ — базис в $U \cap W$, $\{e_1, e_2\}$ — в U, $\{e_1, e_3\}$ — в W, а $\{e_1, e_2, e_3\}$ — в $U + W$.

Следствие 5.8. $\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$.

Задача 5.9. *Дайте простое доказательство Теоремы 4.30 с использованием понятия суммы подпространств.*

Определение 5.10. Сумма $U + W$ подпространств U, $W \subset V$ называется *прямой* (обозначение $U \oplus W$), если для любого вектора $v \in U + W$ его представление $v = u + w$ в виде суммы $u \in U$ и $w \in W$ единственно. Другими словами, если $u + w = u' + w'$, то $u = u'$, $w = w'$.

Предложение 5.11. *Сумма двух подпространств $U + W$ прямая тогда и только тогда, когда $U \cap W = 0$.*

Доказательство. Если $0 \neq z \in U \cap W$, то $0 = 0 + 0 = z + (-z)$ — два разных представления нулевого вектора в виде суммы вектора из U и из W, значит сумма $U + W$ не прямая. Обратно, из $u + w = u' + w'$ следует $U \ni u - u' = w' - w \in W$, откуда $u - u' \in U \cap W$ и значит если $u \neq u'$ (и тогда $w \neq w'$), то $U \cap W \neq 0$. ■

Рассмотрим подробнее случай, когда все пространство V представляется в виде прямой суммы своих подпространств U и W. Из предыдущего следует, что $V = U \oplus W \ \Leftrightarrow\ V = U + W$ и $U \cap W = 0$.

Предложение 5.12. $V = U \oplus W \ \Leftrightarrow\ U \cap W = 0$ *и* $\dim V = \dim U + \dim W$.

Доказательство. Если $V = U \oplus W$, то как показано выше, $U \cap W = 0$. Кроме того, $\dim V = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Обратно, $\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W) = \dim U + \dim W = \dim V$, а так как $U + W \subset V$, то $U + W = V$ (см. Теорему 4.18) и сумма прямая так как $U \cap W = 0$. ■

Определение 5.13. Если $V = U \oplus W$, то для любого $v \in V$ существуют единственные векторы $u \in U$, $w \in W$ такие, что $v = u + w$. В этой ситуации u называется *проекцией вектора v на подпространство U паралелльно подпространству W* (обозначение $\mathrm{Pr}_U^{\|W} v$), а w — *проекцией вектора v на подпространство W параллельно подпространству U* (обозначение $\mathrm{Pr}_W^{\|U} v$).

Определение 5.14. Пусть $U \subset V$ — некоторое подпространство. Подпространство $W \subset V$ называется *прямым дополнением* к U в V, если $V = U \oplus W$.

Задача 5.15. *Для любого подпространства в конечномерном линейном пространстве V существует прямое дополнение. (Указание: воспользуйтесь Теоремой 4.17).*

Прямое дополнение, за исключением тривиальных случаев ($U = 0$ или $U = V$) не единственно. Например, в двумерном пространстве над $\mathbb{R}$ прямым дополнением к одномерному подпространству является любое из континуального множества не совпадающих с ним одномерных подпространств.

Сложные обозначения для проекций в Определении 5.13 связаны с тем, что проекция вектора на подпространство зависит не только от этого подпространства, но и от выбранного прямого дополнения к нему. Пусть, например, $V = U \oplus W$ — представление двумерного пространства в виде прямой суммы одномерных подпространств. Тогда если $0 \neq v \in U$, то $\mathrm{Pr}_W^{\|U} v = 0$, однако заменяя U другим прямым дополнением U' к W, получим $\mathrm{Pr}_W^{\|U'} v \neq 0$, поскольку теперь $v \notin U'$ (читателю рекомендуется убедиться в этом на картинке).

Задача 5.16. *Докажите, что $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, где*

$$U = \langle (1, 1, \dots, 1)^T \rangle, \ \ W = \{(w_1, \dots, w_n)^T \mid \sum_i w_i = 0\}.$$

Найдите проекции векторов стандартного базиса.

Решение. 1-й способ. Докажем, что любой столбец $(v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}$ можно представить, причем единственным образом, в виде суммы столбцов $\lambda(1, \dots, 1)^T \in U$ и $(w_1, \dots, w_n)^T \in W$. Если $(v_1, \dots, v_n)^T = \lambda(1, \dots, 1)^T + (w_1, \dots, w_n)^T$, то приравнивая суммы координат слева и справа, получаем $\sum_i v_i = n\lambda$, откуда λ однозначно определяется: $\lambda = \frac{1}{n}\sum_i v_i$. Теперь вычитая из столбца $(v_1, \dots, v_n)^T$ столбец $\lambda(1, \dots, 1)^T$, получаем столбец $(w_1, \dots, w_n)$ такой, что $\sum_i w_i = 0$. Таким образом, $\mathbb{R}^n = U \oplus W$.

2-й способ. Легко видеть, что $U \cap W = 0$, а также что $\dim U = 1$ и $\dim W = n - 1$ (W — пространство решений СЛОУ от n неизвестных с матрицей коэффициентов $(1 \dots 1)$ ранга 1). Теперь работает Предложение 5.12.

Проекции читателю предлагается найти самостоятельно. ∎

Пример 5.17. Докажем, что (бесконечномерное!) пространство $F(\mathbb{R})$ вещественнозначных функций на действительной прямой является прямой суммой подпространства $F(\mathbb{R})^+$ четных функций и подпространства $F(\mathbb{R})^-$ нечетных функций. Для этого докажем, что любая функция $f \in F(\mathbb{R})$ единственным образом представляется в виде суммы четной и нечетной функции. Действительно, легко проверить, что $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ — такое представление. Если $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ — произвольное такое представление, то $f(-x) = f^+(x) - f^-(x)$, откуда $f^+(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f^-(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Например, для функции $\exp(x)$ данное представление имеет вид $\exp(x) = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$.

Заметим, что в этом примере соображения, связанные с размерностью пространств не работают — все пространства бесконечномерные!

Задача 5.18. *Докажите, что пространство $M_n(\mathbb{R})$ матриц порядка n является прямой суммой подпространств симметрических $M_n(\mathbb{R})^+$ и кососимметрических $M_n(\mathbb{R})^-$ матриц. Найдите проекции матричных единиц E_{ij} на $M_n(\mathbb{R})^+$ параллельно $M_n(\mathbb{R})^-$ и на $M_n(\mathbb{R})^-$ параллельно*

$M_n(\mathbb{R})^+$. *(Указание: попробуйте найти формулы для проекций по аналогии с предыдущим примером).*

Задача 5.19. *Докажите, что пространство $T_n(\mathbb{R})$ верхнетреугольных матриц порядка n является еще одним (помимо симметрических матриц) прямым дополнением к подпространству кососимметрических матриц $M_n(\mathbb{R})^-$ в $M_n(\mathbb{R})$ и найдите соответствующие проекции матричных единиц E_{ij}.*

Перейдем теперь к определению и изучению сумм и прямых сумм произвольного конечного числа подпространств данного пространства.

Определение 5.20. Подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейного пространства V называются *линейно независимыми*, если из $u_1 + \ldots + u_k = 0$ $(u_i \in U_i,\ i = 1, \ldots, k)$ следует $u_i = 0\ \forall i,\ 1 \le i \le k$.

Определение 5.21. Суммой $U_1 + \ldots + U_k$ подпространств $U_i \subset V$ называется подпространство в V, состоящее из всех сумм вида $u_1 + \ldots + u_k \in V$ $(u_i \in U_i)$. Это — наименьшее линейное подпространство в V, содержащее все $U_i,\ i = 1, \ldots, k$.

Заметим, что подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда для любого вектора $v \in U_1 + \ldots + U_k$ его представление вида $v = u_1 + \ldots + u_k$ $(u_i \in U_i)$ единственно (ср. Определение 5.10).

Определение 5.22. Сумма линейно независимой системы подпространств $U_1, \ldots, U_k$ линейного пространства V называется *прямой суммой* и обозначается $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

Предложение 5.23. *Следующие свойства системы подпространств $U_1, \ldots, U_k \subset V$ равносильны:*

1) подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы;

2) объединение базисов подпространств $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимо;

3) $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2): Пусть $\{e_{i1}, \ldots, e_{in_i}\}$ — базис в $U_i,\ i = 1, \ldots, k$. Пусть

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} e_{ij} = 0$$

— нетривиальная линейная зависимость. Обозначим $u_i := \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} e_{ij} \in U_i$. Тогда $\sum_i u_i = 0$, но не все u_i равны нулю. Поэтому подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно зависимы.

2) $\Rightarrow$ 1): Если подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно зависимы, то существует система векторов $u_1, \ldots, u_k$ $(u_i \in U_i)$, среди которых не все равны нулю, такая, что $\sum_i u_i = 0$. Раскладывая эти векторы по базисам в U_i, получаем нетривиальную линейную зависимость между объединением базисов подпространств $U_1, \ldots, U_k$.

2) $\Rightarrow$ 3): Если объединение базисов подпространств $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимо, то оно является базисом в их сумме $U_1 + \ldots + U_k$, поскольку оно порождает ее.

3) $\Rightarrow$ 2): Предположим, что объединение базисов подпространств $U_1, \ldots, U_k$ линейно зависимо. Поскольку оно порождает сумму $U_1 + \ldots + U_k$, оно содержит некоторый ее базис, а значит ее размерность меньше чем сумма размерностей подпространств U_i. ■

Определение 5.24. Линейное пространство V раскладывается в прямую сумму своих подпространств $U_1, \ldots, U_k$, $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, если выполнены следующие два условия:

1) $V = U_1 + \ldots + U_k$;

2) подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы.

Заметим, что предыдущее Предложение позволяет заменить условие 2) из Определения, например, условием $\dim V = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

Заметим, что для трех и большего числа подпространств аналог Теоремы 5.7 неверен. Например, выбирая базисы в трех попарно различных одномерных подпространствах в двумерном пространстве мы получаем линейно зависимую систему.

Задача 5.25. *Пусть U, V, W — подпространства конечномерного линейного пространства.*

a) Верна ли формула

$$\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U \cap V) -$$

$$-\dim(V \cap W) - \dim(W \cap U) + \dim(U \cap V \cap W)\,?$$

b) Следует ли из условий $U \cap V = V \cap W = W \cap U = 0$ что сумма $U + V + W$ прямая? Если нет, то как нужно изменить приведенные условия, чтобы это было верно?

Если $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, то для любого $v \in V$ существует и единствен такой набор векторов $u_1, \ldots, u_k$ ($u_i \in U_i$), что $v = u_1 + \ldots + u_k$. Следующий пример показывает, что проекции u_i зависят не только от U_i, но и от остальных слагаемых прямого разложения[16].

Пример 5.26. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис векторного пространства V. Тогда

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle.$$

Проекция вектора $v \in V$ на $\langle e_i \rangle$ равна $v_i e_i$, где v_i — i-я координата вектора v в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

5.2 Линейные отображения и преобразования

В современной математике (особенно в алгебре) математические объекты какого-то типа рассматриваются вместе с отображениями определенного типа. Если объекты представляют собой множества с некоторой операцией (или набором операций), то естественное требование на такие отображения — согласованность с этой операцией (операциями). Так в алгебре возникают гомоморфизмы групп (колец и т.п.), а в случае линейных пространств — линейные отображения.

Определение 5.27. Отображение $\varphi\colon V \to U$ между линейными пространствами (над фиксированным полем $\mathbb{K}$) называется *линейным*, если

1) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ для любых v_1, $v_2 \in V$ (“аддитивность”);

2) $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ для любых $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ (“однородность”).

[16] точнее, u_i зависит не от остальных слагаемых по отдельности, а от их прямой суммы $\oplus_{j \neq i} U_j$.

В качестве следствия получаем, что линейное отображение φ переводит конечную линейную комбинацию $\sum \lambda_i v_i$ векторов $v_i \in V$ в линейную комбинацию $\sum \lambda_i \varphi(v_i)$ векторов $\varphi(v_i) \in U$ с теми же коэффициентами.

Задача 5.28. *Для линейного* $\varphi\colon V \to U$ *докажите, что* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(-v) = -\varphi(v)$, $\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2)$.

Важнейшим частным случаем линейного отображения является линейное преобразование.

Определение 5.29. *Линейным преобразованием* линейного пространства V или, что то же, *линейным оператором* на V, называется линейное отображение V в себя.

Приведем некоторые примеры линейных отображений и преобразований. Читателю предлагается проверить их линейность там, где это не сделано.

Пример 5.30. *Нулевое отображение* $\varphi\colon V \to U$, $\varphi(v) = 0\,\forall\, v \in V$.

Пример 5.31. *Нулевое преобразование* $\varphi\colon V \to V$, $\varphi(v) = 0\,\forall\, v \in V$.

Пример 5.32. *Тождественное преобразование* $\varphi\colon V \to V$, $\varphi(v) = v\,\forall\, v \in V$. Тождественное преобразование пространства V обозначается id_V.

Пример 5.33. Зафиксируем некоторый скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$. Определим линейное преобразование (“гомотетию”) $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V\colon V \to V$, $\varphi(v) = \lambda v\,\forall\, v \in V$. При $\lambda = 0$ получаем нулевое преобразование, при $\lambda = 1$ — тождественное.

Пример 5.34. Пусть $V = U \oplus W$. Определим линейное отображение $\varphi = \mathrm{Pr}_U^{\|W} : V \to U$ — *проектор на* U *параллельно* W следующим образом. По определению прямой суммы для любого $v \in V$ однозначно определены $u \in U$ и $w \in W$ такие, что $v = u + w$. Тогда $\varphi(v) := u \in U$. Проверим, что так определенное отображение φ линейно. Пусть $v_i = u_i + w_i$, $i = 1, 2$. Тогда $v_1 + v_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$, откуда $\varphi(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$. Аналогично, если $v = u + w$, то $\lambda v = \lambda u + \lambda w$, и тогда $\varphi(\lambda v) = \lambda u = \lambda\varphi(v)$.

Пример 5.35. Пусть снова $V = U \oplus W$. Определим линейное преобразование $\varphi = \mathrm{Pr}_U^{\|W} : V \to V$, которое как и отображение из предыдущего примера называется *проектором на* U *параллельно* W следующим образом. Для любого $v \in V$ однозначно определены $u \in U$ и $w \in W$ такие, что $v = u + w$. Тогда $\varphi(v) := u$, но в данном случае u рассматривается как элемент самого пространства V (так как $U \subset V$), поэтому φ на этот раз действует из V в V и является линейным преобразованием.

Пример 5.36. Обозначим через $\mathbb{R}[x]_n$ линейное пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n. Пусть $k \geq 0$ — некоторое натуральное число. Обозначим $V := \mathbb{R}[x]_n$, $U := \mathbb{R}[x]_{n-k}$. Определим отображение $\varphi\colon V \to U$, $\varphi(p) = p^{(k)}\ \forall\, p \in V$ (k-кратное дифференцирование). Читателю предлагается проверить его линейность.

Пример 5.37. Любой многочлен степени не выше $n - k$ (при $k \geq 0$) можно рассматривать и как многочлен не степени не выше n, поэтому k-кратное дифференцирование определяет линейное преобразование $\mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$.

Пример 5.38. Поворот евклидовой плоскости на данный угол вокруг фиксированной точки определяет линейное преобразование свободных векторов плоскости. Чтобы убедиться в его линейности, читателю предлагается нарисовать соответствующую картинку.

Пример 5.39. Пусть V — n-мерное линейное пространство. Тогда выбор базиса в V определяет линейное отображение $V \to \mathbb{K}^n$ (при этом вектору сопоставляется его координатный столбец в выбранном базисе), см. раздел 4.4.

С каждым линейным отображением $\varphi\colon V \to U$ связаны два важных линейных подпространства — его ядро и образ (первое является подпространством в V, второе — в U).

Рассмотрим множество K векторов из V, которые φ отображает в 0. K не пусто: действительно, ему принадлежит нулевой вектор. Кроме того, из $v_1, v_2 \in K$ следует $v_1 + v_2 \in K$ ($\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0$), а из $v \in K$ следует $\lambda v \in K$. Таким образом, K является линейным подпространством в V.

Определение 5.40. *Ядром* линейного отображения $\varphi\colon V \to U$ называется линейное подпространство в V, состоящее из векторов, которые φ отображает в нулевой вектор. Ядро линейного отображения φ обозначается $\operatorname{Ker}\varphi$.

Таким образом,
$$\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subset V.$$

Рассмотрим теперь множество I векторов из U, которые являются образами векторов пространства V относительно линейного отображения φ (то есть такие $u \in U$, для которых существует (хотя бы один) $v \in V$ такой, что $\varphi(v) = u$). Читателю предлагается проверить, что I — не просто подмножество, а подпространство в U.

Определение 5.41. *Образом* линейного отображения $\varphi\colon V \to U$ называется линейное подпространство в U, состоящее из векторов, которые является образами векторов пространства V относительно φ. Образ линейного отображения φ обозначается $\operatorname{Im}\varphi$.

Таким образом,
$$\operatorname{Im}\varphi = \{u \in U \mid \exists v \in V\ :\ \varphi(v) = u\} \subset U.$$

Заметим, что если $\varphi\colon V \to V$ — линейное преобразование, то $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ являются подпространствами одного пространства V.

Приведем некоторые примеры (читателю рекомендуется найти ядра и образы для остальных приведенных выше примеров линейных отображений самостоятельно).

Пример 5.42. Ядро преобразования из Примера 5.35 совпадает с подпространством $W \subset V$, а образ — с $U \subset V$.

Пример 5.43. Ядро преобразования из Примера 5.37 совпадает с подпространством $\mathbb{R}[x]_{k-1} \subset \mathbb{R}[x]_n$, а образ — с подпространством $\mathbb{R}[x]_{n-k} \subset \mathbb{R}[x]_n$. Полезно заметить, что ядро и образ линейного преобразования могут иметь нетривиальное (то есть ненулевое) пересечение!

Пример 5.44. Ядро преобразования из Примера 5.39 нулевое (в этом случае говорят "тривиальное"), а образ совпадает со всем пространством $\mathbb{K}^n$.

Следующее предложение показывает, что для инъективности линейного отображения достаточно, чтобы прообраз нулевого вектора (то есть ядро) состоял бы только из нуля.

Предложение 5.45. (Критерий инъективности и сюръективности). *Линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ инъективно (соответственно сюръективно) тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ *(соответственно* $\operatorname{Im}\varphi = U$*).*

Доказательство. Докажем ту часть, которая касается ядра (часть про образ непосредственно следует из определений). Если $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$, то существует $0 \neq v \in \operatorname{Ker}\varphi$, значит $\varphi(v) = \varphi(0) = 0$ и поэтому φ не инъективно.

Наоборот (это самое интересное), пусть φ не инъективно. Тогда существуют v_1, $v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$ такие, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0$, а значит $0 \neq v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$, поэтому $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$. ∎

То есть для инъективности линейного отображения достаточно, чтобы прообраз нулевого вектора был одноэлементным (состоящим из нулевого вектора), тогда автоматически прообразы всех элементов из образа будут одноэлементными (ср. Задачу 5.48 ниже).

Следствие 5.46. *Линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ биективно тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ *и* $\operatorname{Im}\varphi = U$*.*

Биективные линейные отображения образуют важный класс линейных отображений и называются изоморфизмами. Мы вернемся к ним немного позже.

Задача 5.47. *Пусть $\varphi\colon V \to U$ — биективное линейное отображение. Тогда для него существует теоретико-множественное обратное отображение φ^{-1}. Докажите, что φ^{-1} линейно.*

Пусть $\varphi\colon V \to U$ — произвольное линейное отображение. Определим *полный прообраз* вектора $u \in U$ как множество

$$\varphi^{-1}(u) := \{v \in V \mid \varphi(v) = u\} \subset V$$

(заметим, что обозначение $\varphi^{-1}(u)$ не предполагает что φ обратимо, то есть биективно). Нетрудно проверить, что $\varphi^{-1}(u)$ является линейным подпространством в V тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Посмотрим, как устроены полные прообразы векторов из U. Очевидно, что $\varphi^{-1}(u) \neq \varnothing \Leftrightarrow u \in \operatorname{Im}\varphi$.

Задача 5.48. *Предположим, что $u \in \operatorname{Im}\varphi$ и $v \in V$ такой, что $\varphi(v) = u$. Тогда*

$$\varphi^{-1}(u) = v + \operatorname{Ker}\varphi := \{v + v' \mid v' \in \operatorname{Ker}\varphi\}.$$

Решение. Пусть $v' \in \varphi^{-1}(u)$, тогда $v' - v \in \operatorname{Ker}\varphi$, и поэтому $v' \in v + \operatorname{Ker}\varphi$. Обратно, пусть $v' \in v + \operatorname{Ker}\varphi$, то есть $v' = v + w$, $w \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $\varphi(v') = \varphi(v) = u$, поэтому $\varphi(v') \in \varphi^{-1}(u)$. ∎

Решив предыдущую задачу читатель, наверное, почувствовал аналогию между структурой множества $\varphi^{-1}(u)$ и общего решения совместной СЛУ. Такая аналогия действительно есть, мы объясним ее после того, как определим понятие матрицы линейного отображения. Мы увидим, что (при данных φ и u) $\varphi(v) = u$ — “бескоординатная” запись СЛУ с соответствующей СЛОУ $\varphi(v) = 0$.

В заключении данного раздела докажем важную теорему.

Теорема 5.49. *Пусть* $\varphi\colon V \to U$ *— линейное отображение, причем* V *конечномерно. Тогда* $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V$.

Доказательство. Пусть для определенности $\dim V = n$. Тогда $\operatorname{Ker} \varphi$ — подпространство в V размерности $k \le n$. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — такой базис в V, что последние k его векторов $e_{n-k+1}, \ldots, e_n$ образуют базис в $\operatorname{Ker} \varphi$ (такой базис можно получить, выбирая базис в ядре и дополняя его до базиса во всем V).

Мы утверждаем, что система векторов $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_{n-k})\}$ линейно независима и значит составляет базис в $\operatorname{Im} \varphi$ (поскольку из Предложения 5.55 следует, что они порождают $\operatorname{Im} \varphi$). Действительно, пусть $\lambda_1 \varphi(e_1) + \ldots + \lambda_{n-k} \varphi(e_{n-k}) = 0$ — произвольная линейная зависимость. Тогда $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-k} e_{n-k} \in \operatorname{Ker} \varphi$. Из линейной независимости $\{e_1, \ldots, e_n\}$ теперь легко следует, что эта линейная зависимость тривиальна. ■

Замечание 5.50. Может показаться, что если $\varphi\colon V \to V$ — линейное преобразование, то предыдущую Теорему можно усилить так: $V = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi$. В общем случае **это неверно**: контрпример см. в Примере 5.43.

Следствие 5.51. *Для конечномерных пространств* V *и* U *одинаковой размерности выполнение любого из условий 1)* $\operatorname{Ker} \varphi = 0$, *2)* $\operatorname{Im} \varphi = U$ *достаточно для того, чтобы линейное отображение* $\varphi\colon V \to U$ *было биекцией.*

5.3 Задание линейных отображений на базисах. Изоморфизмы

Докажем Лемму, которая показывает, что линейные отображения удобно задавать на базисе.

Лемма 5.52. Если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V, то для любого векторного пространства U над тем же полем и любой системы векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ в U существует и единственно такое линейное отображение $\varphi\colon V \to U$, что $\varphi(e_i) = u_i, \ \ i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Так как $\{e_1, \ldots, e_n\}$ является базисом в V, то произвольный вектор из V однозначно раскладывается по нему: $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Если линейное отображение $\varphi\colon V \to U$, удовлетворяющее условию леммы, существует, то $\varphi(v) = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$. Таким образом, существует не более одного такого отображения. Теоретико-множественно φ указанной формулой корректно определено. Осталось доказать его линейность. Проверим аддитивность. Пусть $w = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n \in V$. Тогда имеем

$$\varphi(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) e_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) e_n = \varphi(v) + \varphi(w).$$

Аналогично проверяется однородность. ■

Из доказанной Леммы можно сделать вывод, что для определения линейного отображения $\varphi\colon V \to U$ достаточно задать его значения на произвольном базисе V, причем с базиса линейное отображение по линейности продолжается на все пространство V однозначно.

Следующие Предложения отвечают на вопрос, когда заданное на базисе линейное отображение является инъективным или сюръективным.

Предложение 5.53. *Пусть V — линейное пространство, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V. Пусть U — еще одно пространство над тем же полем, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ — система векторов в U. Тогда линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ такое, что $\varphi(e_i) = u_i, \quad i = 1, \ldots, n$ является инъективным тогда и только тогда, когда система $\{u_1, \ldots, u_n\}$ линейно независима.*

Доказательство. 1) Предположим, что система $\{u_1, \ldots, u_n\}$ линейно зависима и $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ — нетривиальная линейная зависимость. Тогда ядро φ содержит ненулевой вектор $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, следовательно, φ не инъективно.

Обратно, пусть φ не инъективно; тогда найдется $v \in V, \quad v \neq 0$ такой, что $\varphi(v) = 0$. Пусть $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ — его разложение по выбранному базису в V. Тогда $0 = \varphi(v) = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$ — нетривиальная линейная зависимость между векторами системы $\{u_1, \ldots, u_n\}$. ■

Задача 5.54. *Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Докажите, что система векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ является базисом в V тогда и только тогда, когда для любого векторного пространства U над тем же полем и любой системы векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ в U существует и единственно такое линейное отображение $\varphi\colon V \to U$, что $\varphi(e_i) = u_i, \quad i = 1, \ldots, n$.*

Предложение 5.55. *Пусть $\varphi\colon V \to U$ и $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V. Тогда $\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$.*

Доказательство. $u \in \operatorname{Im}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \exists v \in V$ такой, что $\varphi(v) = u \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ такой, что $u = \sum_i \lambda_i \varphi(e_i) \quad \Leftrightarrow \quad u \in \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$. ■

Следствие 5.56. *Линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ биективно тогда и только тогда, когда для некоторого (а значит и для любого) базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V система $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$ является базисом в U.*

Рассмотрим более подробно биективные линейные отображения.

Пусть U и V — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

Определение 5.57. Линейное отображение $\varphi\colon U \to V$ называется *изоморфизмом*, если оно биективно.

Из Следствия 5.51 вытекает, что для конечномерных пространств V и U одинаковой размерности выполнение любого из условий 1) $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, 2) $\operatorname{Im}\varphi = U$ достаточно для того, чтобы линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ было изоморфизмом.

Определение 5.58. Мы скажем, что пространство U *изоморфно* V, если существует изоморфизм $\varphi\colon U \to V$.

Линейные пространства, между которыми существует (хотя бы один) изоморфизм, называются *изоморфными.*

Заметим, что линейные пространства могут быть равномощными как множества, но не изоморфными (примеры таких пространств мы скоро получим). Это связано с тем, что между линейными пространствами линейных биекций меньше чем просто биекций.

Предложение 5.59. *Отношение изоморфности на множестве всех линейных пространств над данным полем — отношение эквивалентности.*

Доказательство. Действительно, оно рефлексивно, так как тождественное отображение — изоморфизм.

Далее, оно симметрично. Это следует из того, что обратное отображение к изоморфизму — изоморфизм. Покажем это. Пусть $\varphi\colon U \to V$ — изоморфизм и $\varphi^{-1}\colon V \to U$ — обратное отображение для φ. Оно существует в силу биективности φ и определяется так: $\varphi^{-1}(v) = u$, если $v = \varphi(u)$. Докажем, что $\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in V$. Пусть $v_i = \varphi(u_i),\ i = 1, 2$. Тогда в силу линейности φ имеем $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = v_1 + v_2$, откуда по определению обратного $\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)$. Аналогично доказывается равенство $\varphi^{-1}(\lambda v) = \lambda\varphi^{-1}(v)$.

Наконец, оно транзитивно. Это следует из того, что композиция изоморфизмов — изоморфизм. Покажем это. Пусть $\varphi\colon U \to V,\ \ \psi\colon V \to W$ — отображения, тогда определена их композиция $\psi \circ \varphi\colon U \to W,\ \ (\psi \circ \varphi)(u) = \psi(\varphi(u))\ \ \forall\, u \in U$. Если φ и ψ линейны, то их композиция $\psi \circ \varphi$ тоже линейна. Действительно,

$$(\psi\circ\varphi)(u_1+u_2) = \psi(\varphi(u_1+u_2)) = \psi(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)) = \psi(\varphi(u_1))+\psi(\varphi(u_2)) = (\psi\circ\varphi)(u_1)+(\psi\circ\varphi)(u_2).$$

Аналогично проверяется равенство $(\psi \circ \varphi)(\lambda u) = \lambda(\psi \circ \varphi)(u)$. Поскольку композиция биекций является биекцией, отсюда следует, что композиция изоморфизмов — изоморфизм. ■

Тот факт, что два пространства U и V изоморфны, обозначают $U \cong V$.

Таким образом, возникает задача классифицировать линейные пространства над данным полем с точностью до изоморфизма (описать классы указанной эквивалентности). Следующая теорема решает ее для конечномерных пространств — единственным инвариантом изоморфизма линейного пространства является его размерность.

Теорема 5.60. *Два конечномерных пространства U, V над полем $\mathbb{K}$ изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Из Следствия 5.56 вытекает, что если между U и V есть изоморфизм, то $\dim V = \dim U$.

Наоборот, предположим что $\dim V = \dim U$ и $\{e_1, \ldots, e_n\},\ \{f_1, \ldots, f_n\}$ — базисы в пространствах V и U соответственно. Определим линейное отображение $\varphi\colon U \to V$, задав его значения на базисных векторах $\varphi(e_i) = f_i,\ i = 1, \ldots, n$, как в Лемме 5.52. Снова применяя Следствие 5.56 получаем, что такое φ биективно, то есть изоморфизм. ■

Заметим, что Предложение 4.49 означает, что выбор базиса в n-мерном пространстве V определяет его изоморфизм с $\mathbb{K}^n$. Таким образом, в каждом классе изоморфизма конечномерных векторных пространств есть конкретный представитель — пространство $\mathbb{K}^n$.

Как уже отмечалось выше, существуют векторные пространства, которые равномощны, но не изоморфны. Читатель, возможно, знает, что каждое множество вида $\mathbb{R}^n,\ n > 0$, имеет мощность континуума, но как следует из доказанной теоремы, при разных n они не изоморфны — любая биекция между ними не является линейной.

5.4 Матрица линейного отображения

Пусть $\varphi\colon V \to U$ — линейное отображение между конечномерными линейными пространствами, $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{f_1, \ldots, f_m\}$ — базисы в V и U соответственно.

Определение 5.61. Матрица A размера $m \times n$ называется *матрицей линейного отображения* φ относительно выбранных базисов, если

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, f_2, \ldots, f_m)A.$$

То есть рецепт получения матрицы A такой: действуем отображением на векторы выбранного в V базиса и получившиеся векторы из U раскладываем по выбранному базису в U, результат записываем в столбцы A (i-й столбец матрицы A — координатный столбец вектора $\varphi(e_i)$ в базисе $\{f_1, \ldots, f_m\}$).

Пусть $\mathcal{L}(V, U)$ обозначает множество всех линейных отображений $V \to U$. Заметим, что матрица A однозначно определена отображением φ и выбранными базисами. Тем самым сопоставление линейному отображению его матрицы в выбранной паре базисов задает некоторое отображение $\mu\colon \mathcal{L}(V, U) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Предложение 5.62. *Отображение μ является биекцией (зависящей от выбранных базисов в V и U).*

Доказательство. Действительно, если два линейных отображения имеют одинаковые матрицы в данной паре базисов, то их значения на базисных векторах равны, а по Лемме 5.52 эти значения линейное отображение однозначно определяют.

С другой стороны, так как согласно все той же Лемме набор значений линейного отображения на базисных векторах может быть произвольным, то любая матрица размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{K}$ является матрицей некоторого линейного отображения в выбранной паре базисов. ∎

Далее мы покажем, что построенная биекция согласована с операциями (сложения, умножения на скаляры и композиции). Ситуация является аналогичной биекции между множеством векторов n-мерного линейного пространства V над полем $\mathbb{K}$ и множеством столбцов $\mathbb{K}^n$, зависящей от базиса и задаваемой сопоставлением вектору его координатного столбца.

Частным случаем линейного отображения является линейное преобразование — это линейное отображение из пространства в себя. Так как при определении матрицы линейного отображения мы в каждом пространстве выбираем по одному базису, то матрица линейного преобразования определяется с помощью выбора одного базиса в V. Так как этот частный случай особенно важен, то приведем специализацию предыдущего определения на случай линейных преобразований.

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейное преобразование конечномерного линейного пространства V, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — выбранный базис в V.

Определение 5.63. Матрица A порядка n называется *матрицей линейного преобразования* φ в выбранном базисе, если

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)A.$$

То, что в определении матрицы линейного преобразования участвует только один базис отражает большую “жесткость” линейных преобразований по сравнению с отображениями и приводит к более богатой и тонкой теории для одного линейного преобразования, как мы убедимся в дальнейшем.

Задача 5.64. *Напишите матрицы следующих линейных преобразований:*

1) *тождественного преобразования n-мерного пространства V в произвольном базисе в V;*

2) *проектора на подпространство U параллельно подпространству W, заданного разложением $V = U \oplus W$ пространства V в прямую сумму ненулевых подпространств, в базисе V, полученном объединением базисов U и W;*

3) *оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ на пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ в базисе $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$;*

4) *оператора из предыдущего пункта в базисе $\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\}$;*

5) *оператора дифференцирования на линейной оболочке $\langle \sin x, \cos x \rangle$ в базисе $\{\sin x, \cos x\}$;*

6) *оператора поворота на угол α против часовой стрелки в правом ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$ на евклидовой плоскости.*

Лемма 5.52 говорит о том, что зная матрицу A линейного отображения φ и относительно каких базисов она записана, можно восстановить само отображение φ.

Предложение 5.65. *Если $\xi := (v_1, \dots, v_n)^T$ — координатный столбец вектора $v \in V$ в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$, то $A\xi$ — координатный столбец вектора $\varphi(v) \in U$ в базисе $\{f_1, \dots, f_m\}$.*

Доказательство. Воспользуемся матричной записью $v = (e_1, \dots, e_n)(v_1, \dots, v_n)^T$ разложения вектора по базису. Из линейности φ следует

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))(v_1, \dots, v_n)^T = (f_1, \dots, f_m)A(v_1, \dots, v_n)^T = (f_1, \dots, f_m)(u_1, \dots, u_m)^T,$$

где $\eta := (u_1, \dots, u_m)^T$ — координатный столбец вектора $\varphi(v)$ в базисе $\{f_1, \dots, f_m\}$. Из линейной независимости последнего следует $\eta = A(v_1, \dots, v_n)^T$. ∎

Предыдущее Предложение показывает, зачем нужны матрицы линейных отображений: действие линейного отображения в базисах сводится просто к умножению координатных столбцов векторов на его матрицу. Полученный результат можно наглядно изобразить в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi_e"'] & U \arrow[d, "\varphi_f"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{K}^m, \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки обозначают определяемые выбранными базисами линейные биекции, сопоставляющие вектору его координатный столбец (см. Предложение 4.49). Доказанное Предложение равносильно тому, что два пути по стрелкам из V в $\mathbb{K}^m$ совпадают.

Матрица линейного отображения зависит от выбора базисов. Выведем формулу, выражающую матрицу отображения в новых базисах через матрицу того же отображения в старых базисах и матрицы перехода от старых базисов к новым.

Итак, пусть $\varphi\colon V \to U$ — линейное отображение, A — его матрица относительно старых базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в V и U соответственно, C — матрица перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к новому базису в V $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, а D — матрица перехода от $\{f_1, \ldots, f_m\}$ к новому базису $\{f'_1, \ldots, f'_m\}$ в U. Из линейности φ непосредственно следует, что

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C \quad \text{влечет} \quad (\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))C.$$

Поэтому имеем

$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))C = (f_1, \ldots, f_m)AC = (f'_1, \ldots, f'_m)D^{-1}AC,$$

откуда

$$A' = D^{-1}AC \tag{26}$$

— матрица φ относительно новых базисов. В частности, для линейного преобразования получаем формулу

$$A' = C^{-1}AC. \tag{27}$$

Задача 5.66. *Матрицы каких линейных отображений не зависят от выбора базисов? Матрицы каких линейных преобразований не зависят от выбора базиса?*

Мы видим, что за исключением очень специальных случаев, матрицы линейных преобразований и отображений зависят от базисов. Какие свойства матриц одного и того же отображения (преобразования) от базиса не зависят? Нет ли критерия того, что две данные матрицы одинакового размера являются матрицами одного и того же отображения (преобразования) относительно разных базисов?

Вообще, формализовать эту задачу для отображений можно так. Назовем две прямоугольные матрицы одинакового размера эквивалентными, если они являются матрицами одного того же линейного преобразования в разных базисах. Равносильно, две матрицы A и A' назовем эквивалентными, если существуют две невырожденные матрицы C, D подходящих порядков такие, что $A' = D^{-1}AC$ (читателю предлагается проверить, что это — действительно отношение эквивалентности). Теперь задача свелась к описанию классов введенной эквивалентности.

Аналогично, для преобразований назовем две матрицы одинаковых порядков A и A' эквивалентными, если найдется такая невырожденная матрица C, что $A' = C^{-1}AC$ (это условие равносильно тому, что две данные матрицы A и A' являются матрицами одного и того же линейного преобразования в разных базисах).

Второе отношение эквивалентности (для преобразований) намного более "жесткое" в том смысле, что классов эквивалентности больше (для полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ за исключением случая преобразований нульмерного пространства их будет континуум) и их описание — намного более сложная задача, которую мы в этом курсе решим лишь частично. Пока же мы займемся изучением первого из определенных отношений эквивалентности (для отображений).

Во-первых, докажем следующее Предложение.

Предложение 5.67. *Если A — матрица линейного отображения $\varphi\colon V \to U$ (относительно произвольной пары базисов), то* $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Доказательство. Согласно Предложению 5.55, для любого базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$. По определению матрицы отображения A, ее столбцы — координатные столбцы образов базисных векторов $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ (относительно выбранного базиса в U). Из этих двух фактов следует, что при отождествлении U с координатным пространством $\mathbb{K}^m$ (задаваемым выбранным базисом в U) подпространство $\operatorname{Im} \varphi \subset U$ отождествляется с линейной оболочкой столбцов матрицы A в $\mathbb{K}^m$, размерность которой равна рангу матрицы A. ∎

Приведем модификацию предыдущего доказательства. Координатные столбцы векторов из $\operatorname{Im} \varphi$ — в точности те столбцы b, для которых система $Ax = b$ разрешима, то есть выбор базиса в U отождествляет $\operatorname{Im} \varphi$ с линейной оболочкой столбцов матрицы A, размерность которой, как мы знаем, равна $\operatorname{rk} A$.

Замечание 5.68. Заметим, кстати, что так как при элементарных преобразованиях столбцов матрицы A их линейная оболочка не меняется, то из формулы (26) следует, что она не зависит от базиса в V, как и должно быть, поскольку $\operatorname{Im} \varphi$ — подпространство в U, зависящее только от φ. Та же формула показывает, что линейная оболочка столбцов зависит от базиса в U, поскольку его выбор задает отождествление U с $\mathbb{K}^m$.

Следствие 5.69. *Ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов, в которых она записана.*

Доказательство. Действительно, ранг равен размерности образа линейного отображения, а она ни от каких базисов не зависит. ∎

Замечание 5.70. Другое доказательство предыдущего Следствия можно получить, используя Задачу 4.28.

Таким образом, если две матрицы данного размера являются матрицами одного и того же линейного отображения, то их ранги равны[17]. Оказывается, верно и обратное, то есть ранг является единственным инвариантом для матриц линейных отображений. Это вытекает из следующего Предложения.

Предложение 5.71. *Если для линейного отображения $\varphi\colon V \to U$ $r := \dim \operatorname{Im} \varphi$, то существует пара базисов, относительно которых матрица φ имеет блочно-диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. 1-й способ. Построим базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V такой, что его последние $n - r$ векторов образуют базис в $\operatorname{Ker} \varphi \subset V$. Аналогичный базис (при $r = n - k$) уже строился в доказательстве Теоремы 5.49, где было доказано, что система векторов $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)\}$ из U линейно независима. Положим $f_1 := \varphi(e_1), \ldots, f_r := \varphi(e_r)$ и продолжим данную систему до базиса

[17]Это позволяет определить понятие ранга линейного отображения как ранга любой его матрицы. В силу доказанного выше это — просто другое название для размерности его образа.

$\{f_1, \dots, f_m\}$ в U. Теперь легко проверяется, что в паре базисов $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V и $\{f_1, \dots, f_m\}$ в U матрица линейного отображения φ имеет требуемый вид.

2-й способ. Напомним, что любая невырожденная матрица является произведением элементарных, и обратно, произведение конечного числа элементарных матриц невырождено. Формула $A' = D^{-1}AC$ показывает, что замена базиса в V отвечает композиции элементарных преобразований столбцов матрицы A, в то время как замена базиса в U отвечает композиции элементарных преобразований строк матрицы A. С помощью элементарных преобразований строк и столбцов любую прямоугольную матрицу ранга r можно привести к виду из условия Предложения. ∎

Таким образом, для матриц размера $m \times n$ получается $\min(m, n) + 1$ классов указанной эквивалентности, что отвечает возможным значениям ранга таких матриц.

Задача 5.72. *Докажите, что*

1) ранг матрицы сюръективного линейного отображения равен числу ее строк;

2) ранг матрицы инъективного линейного отображения равен числу ее столбцов.

Решение. Пусть A — матрица $\varphi\colon V \to U$, $\dim V = n$, $\dim U = m$. Тогда размер A равен $m \times n$. Сюръективность φ равносильна тому, что $\operatorname{Im}\varphi = U$, откуда $\dim \operatorname{Im}\varphi = m$, а по Предложению 5.67 $\dim \operatorname{Im} = \operatorname{rk} A$, откуда следует пункт 1).

Инъективность φ равносильна тому, что $\ker\varphi = 0$, что в свою очередь равносильно тому, что СЛОУ $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение, что равносильно тому, что столбцы матрицы A линейно независимы, то есть $\operatorname{rk} A$ равен их числу, то есть n. ∎

В оставшейся части этого параграфа применим полученные результаты о линейных отображениях к системам линейных уравнений.

Пусть $\varphi\colon V \to U$ — линейное отображение. Выбирая базисы $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V и $\{f_1, \dots, f_m\}$ в U мы отождествляем V и U с пространствами столбцов $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^m$ соответственно, при этом применение линейного отображения φ к вектору $v \in V$ сводится к умножению координатного столбца ξ этого вектора (в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$) на матрицу A отображения φ относительно указанных базисов (см. Предложение 5.65). Теперь легко видеть, что ядро отображения φ — то есть подпространство векторов $v \in V$ таких, что $\varphi(v) = 0$ — то же, что подпространство столбцов $x \in \mathbb{K}^n$ таких, что $Ax = 0$, то есть пространство решений СЛОУ с матрицей коэффициентов A. В то же время образ φ — подпространство таких столбцов $b \in \mathbb{K}^m$, для которых система $Ax = b$ разрешима. Кроме того, любая СЛОУ получается из некоторого линейного отображения переходом к координатам.

Заметим, что Теорема 5.49 теперь дает еще одно, независимое доказательство Теоремы 4.38 о размерности пространства решений СЛОУ. Действительно, число неизвестных $n = \dim V$, $r = \operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$, а размерность пространства решений $\dim \operatorname{Ker}\varphi$ по Теореме 5.49 равна $n - r$.

Также легко видеть, что пункт 2) Теоремы 4.37 следует из Задачи 5.48 (в то время как пункт 1) следует из того, что ядро линейного отображения — подпространство).

Задача 5.73. *Докажите, используя линейные отображения и их матрицы, следующее утверждение. Для данной матрицы A системы линейных уравнений $Ax = b$ совместны при любом столбце b тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен числу ее строк.*

Решение. Любая матрица A размера $m\times n$ является матрицей некоторого линейного отображения $\varphi\colon V\to U$, где $\dim V=n$, $\dim U=m$, относительно выбранных базисов. Напомним, что $\operatorname{rk} A=\dim\operatorname{Im}\varphi$. Условие совместности систем $Ax=b$ при любом столбце b равносильно сюръективности φ, что, в свою очередь, равносильно $\operatorname{Im}\varphi=U$, то есть $\operatorname{rk}\varphi=\dim U=m$. ■

5.5 Операции с линейными отображениями

Как мы увидим, на линейных отображениях определены по-существу те же самые операции и с аналогичными свойствами, что и с матрицами, но так как операции на отображениях более фундаментальны, мы их определим независимо.

Пусть $\varphi,\psi\colon V\to U$ — пара линейных отображений между одними и теми же пространствами. Тогда можно определить их сумму как такое отображение $\varphi+\psi\colon V\to U$, что $(\varphi+\psi)(v)=\varphi(v)+\psi(v)\ \forall\, v\in V$. Читателю предлагается провести несложную проверку линейности $\varphi+\psi$, а также следующего утверждения: если A и B — матрицы φ и ψ соответственно относительно базисов $\{e_1,\dots,e_n\}$ в V и $\{f_1,\dots,f_m\}$ в U, то матрица $\varphi+\psi$ относительно той же пары базисов равна $A+B$.

Кроме того, линейные отображения можно умножать на скаляры: $(\lambda\varphi)(v)=\lambda\varphi(v)\ \forall\, v\in V$, эта операция отвечает умножению матрицы на тот же скаляр.

Далее непосредственно проверяется, что множество $\mathcal{L}(V,U)$ (см. абзац перед Предложением 5.62) всех линейных отображений $\varphi\colon V\to U$ относительно определенных операций сложения и умножения на скаляры является векторным пространством. Более того, установленная в Предложении 5.62 биекция $\mu\colon\mathcal{L}(V,U)\to\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ является линейным отображением, то есть изоморфизмом линейных пространств.

Пусть у нас есть два линейных отображения $\varphi\colon V\to U$ и $\psi\colon U\to W$. Тогда определена их композиция $\psi\circ\varphi\colon V\to W$, которая (как было проверено в доказательстве Предложения 5.59) также является линейным отображением. Пусть $\{e_1,\dots,e_n\}$, $\{f_1,\dots,f_m\}$, $\{g_1,\dots,g_k\}$ — выбранные базисы соответственно в пространствах V, U и W, а A и B — матрицы φ и ψ в них. Найдем матрицу D композиции $\psi\circ\varphi$ относительно пары базисов $\{e_1,\dots,e_n\}$ и $\{g_1,\dots,g_k\}$.

Имеем
$$(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))=(f_1,\dots,f_m)A,$$
то есть $\varphi(e_k)=a_{1k}f_1+\ldots+a_{mk}f_m$ при $1\le k\le n$. Из линейности ψ следует, что $\psi(\varphi(e_k))=a_{1k}\psi(f_1)+\ldots+a_{mk}\psi(f_m)$ при $1\le k\le n$, то есть
$$(\psi(\varphi(e_1)),\dots,\psi(\varphi(e_n)))=(\psi(f_1),\dots,\psi(f_m))A,$$
откуда, используя равенство
$$(\psi(f_1),\dots,\psi(f_m))=(g_1,\dots,g_k)B,$$
получаем
$$(\psi(\varphi(e_1)),\dots,\psi(\varphi(e_n)))=(g_1,\dots,g_k)BA,$$
значит $D=BA$.

Полученная формула служит основной мотивацией определения произведения матриц, данного в начале этого курса.

Заметим, что эта формула верна и для матрицы композиции линейных *преобразований* пространства V (в этом случае все матрицы записываются в фиксированном базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V).

Задача 5.74. *Из того, что композиция поворотов евклидовой плоскости на углы α и β есть поворот на угол $\alpha+\beta$, получите "формулы сложения" для тригонометрических функций. (Указание: перемножьте матрицы поворотов на указанные углы, записанные в ортонормированном базисе).*

Задача 5.75. *Пусть $V = U \oplus W$ и $\varphi\colon V \to V$ — проектор на подпространство U параллельно его прямому дополнению W. Докажите, что такой проектор удовлетворяет тождеству $\varphi^2 = \varphi$*[18]*. Тогда его матрица A в произвольном базисе удовлетворяет равенству $A^2 = A$.*

Роль единичных матриц играют тождественные операторы: для любого $\varphi\colon V \to U$ выполнены соотношения $\mathrm{id}_U \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathrm{id}_V$.

Рассмотрим теперь аналог для линейных отображений операции взятия обратной матрицы.

Пусть линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ биективно, то есть изоморфизм. Тогда его матрица A (относительно произвольной пары базисов) невырождена. Действительно, так как тогда $\dim V = \dim U$, то A квадратная и, например, из инъективности φ следует, что столбцы A линейно независимы (см. Задачу 5.72). Легко также непосредственно доказать, что A обратима.

Задача 5.76. *Пусть A — матрица изоморфизма $\varphi\colon V \to U$ относительно базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в U. Тогда матрицей обратного отображения $\varphi^{-1}\colon U \to V$ (которое, как мы знаем из доказательства Предложения 5.59, тоже линейно) относительно базисов $\{f_1, \ldots, f_n\}$ и $\{e_1, \ldots, e_n\}$ будет A^{-1}.*

Решение. Пусть B — матрица φ^{-1} относительно базисов $\{f_1, \ldots, f_n\}$ и $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда из тождеств
$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_V, \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_U$$
получаем $BA = E$, $AB = E$, а это и значит что $B = A^{-1}$. $\blacksquare$

Установленная связь умножения матриц с композицией линейных отображений позволяет дать концептуальное доказательство ассоциативности умножения матриц. А именно, если $\chi\colon W \to Z$ — еще одно линейное отображение с матрицей C относительно пары базисов $\{g_1, \ldots, g_k\}$ в W и $\{h_1, \ldots, h_l\}$ в Z соответственно, то матрицей композиции $(\chi \circ \psi) \circ \varphi$ относительно базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{h_1, \ldots, h_l\}$ будет $(CB)A$, а композиции $\chi \circ (\psi \circ \varphi)$ — $C(BA)$. Но мы знаем, что композиция отображений ассоциативна, поэтому $(\chi \circ \psi) \circ \varphi = \chi \circ (\psi \circ \varphi)$, откуда, используя биекцию между отображениями и матрицами, получаем $(CB)A = C(BA)$.

Композиция линейных отображений связана с линейными операциями тождествами
$$\chi \circ (\varphi + \psi) = \chi \circ \varphi + \chi \circ \psi, \quad (\chi + \psi) \circ \varphi = \chi \circ \varphi + \psi \circ \varphi,$$

[18]Верно и обратное: любой оператор, удовлетворяющий указанному тождеству, является проектором на $U := \mathrm{Im}\,\varphi$ параллельно $W := \ker \varphi$, в частности, последние два пространства образуют прямую сумму.

$$(\lambda\psi)\circ\varphi = \psi\circ(\lambda\varphi) = \lambda(\psi\circ\varphi) \quad \forall\lambda\in\mathbb{K}.$$

Читатель легко убедится в их справедливости. Они отвечают аналогичным операциям над матрицами.

Заметим, что на пространстве $\mathcal{L}(V,V) =: \mathcal{L}(V)$ операция композиции линейных преобразований определяет умножение, в этом случае *алгебра*[19] $\mathcal{L}(V)$ изоморфна *алгебре* матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ порядка n.

Обратимые линейные операторы на V образуют группу относительно операции композиции. Она обозначается $\mathrm{GL}(V)$. Выбор базиса в V определяет ее изоморфизм с группой невырожденных матриц $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ порядка $n = \dim V$ относительно умножения.

Задача 5.77. *Пусть* $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ *— композиция линейных отображений. Оцените сверху* $\dim(\mathrm{Im}(\psi\varphi))$ *через* $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$ *и* $\dim(\mathrm{Im}\,\psi)$. *Выведите из полученного результата теорему о ранге произведения матриц.*

Решение. С одной стороны, $\mathrm{Im}(\psi\varphi) \subset \mathrm{Im}\,\psi$, поэтому $\dim\mathrm{Im}(\psi\varphi) \le \dim\mathrm{Im}\,\psi$. С другой стороны,

$$\mathrm{Im}(\psi\varphi) = \{w\in W \mid \exists u\in U\colon w = \psi(\varphi(u))\} = \{w\in W \mid \exists v\in \mathrm{Im}\,\varphi\colon w=\psi(v)\} = \mathrm{Im}(\psi|_{\mathrm{Im}\,\varphi}),$$

поэтому $\dim\mathrm{Im}(\psi\varphi) \le \dim\mathrm{Im}\,\varphi$. Из этого очевидно, что ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей. ∎

Задача 5.78. *Пусть* $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ *— композиция линейных отображений, причем* $\dim V = n$, $\dim(\mathrm{Im}\,\psi) = r$. *Известно, что* $\psi\varphi = 0$. *Оцените сверху* $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$. *Как это связано с Задачей 4.43?*

Решение. Заметим, что $\psi\varphi = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq \ker\psi$. Кроме того, $\dim\ker\psi = n - r$. Из этого следует, что $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) \le n - r$. ∎

Следующая задача обобщает предыдущую.

Задача 5.79. *Пусть* $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ *— композиция линейных отображений, причем* $\dim V = n$, $\dim(\mathrm{Im}\,\psi) = r$, $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = k$. *Докажите, что* $\dim(\mathrm{Im}(\psi\varphi)) \ge k + r - n$.

5.6 Линейные функции и сопряженное пространство

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 5.80. *Линейной функцией* на V называется такая функция $f\colon V\to\mathbb{K}$, что

1) $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)\ \forall v_1,\, v_2\in V$;

2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)\ \forall v\in V,\ \lambda\in\mathbb{K}$.

[19]Алгеброй в математике называется векторное пространство, элементы которого также можно перемножать; определение см. в разделе 1.8; интересующийся читатель может обратиться к книге [6] за подробностями.

Из определения следует, что для любой конечной линейной комбинации $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ векторов из V $f(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(v_i)$.

Легко видеть, что линейная функция — то же самое, что линейное отображение из V в одномерное линейное пространство $\mathbb{K}$ столбцов высоты 1 над полем $\mathbb{K}$. В частности для линейной функции определено понятие ядра, причем если $\dim V = n$ и $f\colon V \to \mathbb{K},\ f \neq 0$, то $\dim \ker f = n-1$.

В $\mathbb{K}$ есть фиксированный базис $\{\mathbf{1}\}$ (здесь $1 \in \mathbb{K}$ рассматривается как вектор, точнее, столбец высоты 1). Тогда любой элемент из *пространства* $\mathbb{K}$ однозначно запишется в виде $\lambda\mathbf{1}$, где λ принадлежит *полю* $\mathbb{K}$.

Приведем несколько примеров линейных функций. Проверка линейности в каждом случае тривиальна (читателю все же рекомендуется ее проделать).

Пример 5.81. Пусть V — евклидова плоскость или пространство, фиксируем $a \in V$ и определим $f = f_a\colon V \to \mathbb{R}$ формулой $\forall v \in V\ f(v) = (a, v)$ (где скобки обозначают скалярное произведение). Тогда f — линейная функция на V. (Полезно заметить, что любая линейная функция на V имеет такой вид для некоторого $a \in V$).

Пример 5.82. Пусть $V = C[a, b]$ — бесконечномерное пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Определим отображение $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ формулой $\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx\ \forall f \in V$. Тогда φ — линейная функция.

Пример 5.83. Пусть $V = \mathbb{K}^n,\ a := (a_1, \ldots, a_n)$ — заданная строка эдементов из $\mathbb{K}$. Тогда $f = f_a\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ f(v) = av\ \forall v \in V$ (произведение строки на столбец) задает линейную функцию. Мы вскоре увидим, что так выглядит любая линейная функция на пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$.

Пример 5.84. Пусть $V = \mathbb{K}[x]_n$ — пространство многочленов степени не выше n, $x_0 \in \mathbb{K}$ — фиксированный элемемент. Тогда $f = f_{x_0}\colon V \to \mathbb{K},\ f(p) = p(x_0)\ \forall p \in \mathbb{K}[x]_n$ (вычисление значения многочлена p в фиксированной точке x_0) определяет линейную функцию на V.

Пример 5.85. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_n$, зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Тогда $f\colon V \to \mathbb{R},\ f(p) := p^{(k)}(0)$ (вычисление k-й производной многочлена в нуле) — линейная функция.

Пример 5.86. Пусть $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, определим функцию $\mathrm{tr}\,(A) = \sum_i a_{ii}$ (сумма диагональных элементов матрицы A. Тогда $\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ — линейная функция, называемая *следом.*

Задача 5.87. *Пусть линейная функция f на пространстве $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ удовлетворяет условию $f(AB) = f(BA)\ \forall A,\ B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Докажите, что тогда $f = \alpha\,\mathrm{tr}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{K}$.*

Пусть пространство V конечномерно и $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — некоторый базис в V. Линейная функция f однозначно задается своими значениями на базисных векторах: если $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, то

$$f(v) = v_1 f(e_1) + \ldots + v_n f(e_n),$$

причем эти значения могут быть произвольными элементами поля $\mathbb{K}$. Матрица f как линейного отображения $V \to \mathbb{K}$ имеет размер $1 \times n$, то есть является строкой. Более точно, матрица f относительно базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и $\{\mathbf{1}\}$ в $\mathbb{K}$ есть строка $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, которая называется *координатной строкой линейной функции* в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Более подробно,

$$(\mathbf{f}(e_1), \ldots, \mathbf{f}(e_n)) = \mathbf{1}(f(e_1), \ldots, f(e_n)),$$

где слева стоит строка элементов *пространства* $\mathbb{K}$, мы их выделили жирным шрифтом, чтобы отличить от строки чисел справа. При замене базиса в V координатная строка A преобразуется по формуле $A' = AC$ (см. (26)).

Задача 5.88. *Докажите, что система линейных функций* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *на* n*-мерном пространстве* V *линейно зависима тогда и только тогда, когда найдется такой вектор* $0 \neq v \in V$*, что* $f_1(v) = \ldots = f_n(v) = 0$.

Решение. Если линейные функции $\{f_1, \ldots, f_n\}$ линейно зависимы, то их координатные строки тоже зависимы, то есть линейно зависимы строки матрицы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = f_i(e_j)$. Тогда линейно зависимы и ее координатные столбцы, то есть

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} f_1(e_1) \\ \vdots \\ f_n(e_1) \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} f_1(e_n) \\ \vdots \\ f_n(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где не все λ_i равны нулю. Отсюда получаем, что $f_i(v) = 0,\ i = 1, \ldots, n$, где $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \neq 0$. Легко видеть, что приведенное рассуждение обратимо. ■

Мы знаем, что множество всех линейных отображений $\varphi\colon V \to U$ является линейным пространством $\mathcal{L}(V; U)$, размерность которого (в случае конечномерных пространств V и U) равна $\dim V \dim U$ (поскольку оно изоморфно пространству матриц соответствующего размера). То же верно в частном случае линейных функций: множество всех линейных функций $f\colon V \to \mathbb{K}$ образует линейное пространство той же размерности, что и V (в случае конечномерного V).

Определение 5.89. Линейное пространство всех линейных функций на V называется *сопряженным пространством* к V и обозначается V^*.

Таким образом,

$$V^* = \{f\colon V \to \mathbb{K} \mid f \text{ линейна}\}.$$

Заметим, что операцию перехода с сопряженному пространству можно итерировать: возникает второе сопряженное $V^{**} := (V^*)^*$ и т.д.

Несмотря на то, что ряд результатов для сопряженного пространства следует из общей теории линейных отображений, оно обладает рядом специальных свойств, связанных с "двойственностью" между векторами и линейными функциями[20], поэтому мы остановимся подробнее на его свойствах (и частично передокажем уже известные результаты).

Пусть V — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — некоторый базис в V. Тогда мы имеем набор из n линейных функций $\varepsilon_i\colon V \to \mathbb{K}$, $\varepsilon_i(v) = v_i$ (i-я координата вектора v в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$), $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, координатные функции однозначно (как линейные

[20] Причина указанной двойственности связана с существованием канонического (не зависящего ни от каких выборов) отображения

$$V^* \times V \to \mathbb{K}, \quad (f, v) \mapsto f(v),$$

линейного по каждому из аргументов.

функции) задаются равенствами

$$\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

(δ_{ij} называется *δ-символом Кронекера*).

Предложение 5.90. *Система координатных функций $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ является базисом в V^*.*

Доказательство. Пусть $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i = 0$ как линейная функция, это значит, ее значение на любом векторе из V равно нулю. Последовательно подставляя элементы базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ в качестве ее аргументов, получаем $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Пусть теперь $f \in V^*$ — произвольная линейная функция, покажем, что она является линейной комбинацией $\varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n$. Для этого заметим, что линейная функция

$$g := f - \sum_{i=1}^n f(e_i)\varepsilon_i$$

тождественно равна нулю, так как принимает нулевые значения на всех базисных векторах. ■

Определение 5.91. Базис в V^*, состоящий из координатных функций $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, называется *сопряженным* (или *биортогональным*) к базису $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V.

Заметим, что из определения биортогонального базиса следует, что для любого вектора $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(v) e_i. \tag{28}$$

Задача 5.92. *Пусть C — матрица перехода между базисами $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ в V. Найдите матрицу перехода между соответствующими биортогональными базисами $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ и $\{\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n\}$ в V^*.*

Решение. Ясно, что элементы биортогонального базиса должны преобразовываться так же как координаты, то есть $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T = C(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)^T$ (см. формулу (23)). Поэтому $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)C^{-T}$. ■

Замечание 5.93. Заметим, что сопоставление $C \mapsto (C^T)^{-1}$ определяет изоморфизм группы невырожденных матриц порядка n на себя. Отсюда легко вывести, что каждый базис в V^* биортогонален единственному базису в V.

Задача 5.94. *Покажите, что любая ненулевая линейная функция $f\colon V \to \mathbb{K}$ является первой координатной функцией ε_1 относительно некоторого базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V.*

Решение. Пусть $U := \ker f \subset V$, тогда $\dim U = n - 1$. Выберем базис $\{e_2, \dots, e_n\}$ в U и дополним его до базиса в V вектором e_1 таким, что $f(e_1) = 1$ (так как $f \neq 0$, то такой вектор $e_1 \in V$ существует). Тогда для любого вектора $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in V$ имеем

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i f(e_i) = v_1. \quad ■$$

На самом деле предыдущий результат можно усилить: любой базис в V^* является биортогональным к некоторому (единственному) базису в V. Одно из доказательств можно получить из Задачи 5.92 (см. комментарий после нее). Мы, однако, получим этот результат в качестве следствия из некоторой теории.

Из предыдущего следует, что если пространство V конечномерно, то оно изоморфно своему двойственному V^*. Например, можно выбрать базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и биортогональный к нему $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ в V^* и определить изоморфизм $\varphi\colon V \to V^*$ условием $\varphi(e_i) = \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n$. Можно показать, что выбирая разные базисы в V мы будем получать разные изоморфизмы, и нет никакого способа выбрать среди них изоморфизм "каноническим", ни от каких произвольных выборов не зависящим образом.

Замечание 5.95. Поясним сказанное выше. Определенный выше изоморфизм $\varphi\colon V \to V^*$ в паре базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ в V^* имеет единичную матрицу. Тогда, используя результат Задачи 5.92, можно показать, что φ в другой паре сопряженных базисов $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ и $\{\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n\}$ будет иметь матрицу $C^T C$, где C — матрица перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, в то время как изоморфизм φ', определенный штрихованной парой сопряженных базисов, будет иметь относительно нее единичную матрицу, то есть φ и φ', вообще говоря, разные изоморфизмы (если $C^T C \neq E$).

Однако существует канонический изоморфизм между пространством V и его дважды двойственным V^{**} (в случае, когда V конечномерно). Это имеет ряд важных следствий, в частности, для тензорной алгебры, поэтому мы обсудим эту тему более подробно.

Хотя на первый взгляд представить ненулевую линейную функцию на V^* непросто, все такие линейные функции (в случае конечномерных пространств) имеют простое описание. А именно, для произвольного $v \in V$ определим $\vartheta_v\colon V^* \to \mathbb{K}$ равенством $\vartheta_v(f) = f(v)\ \forall f \in V^*$.

Во-первых проверим, что ϑ_v линейна, то есть $\vartheta_v \in V^{**}$. В самом деле,

$$\vartheta_v(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) = \vartheta_v(f_1) + \vartheta_v(f_2)\ \ \forall f_1, f_2 \in V^*.$$

Кроме того,

$$\vartheta_v(\lambda f) = (\lambda f)(v) = \lambda f(v) = \lambda \vartheta_v(f)\ \ \forall f \in V^*.$$

Теперь покажем, что (в случае конечномерного V) никаких линейных функций на V^* кроме тех, которые имеют вид ϑ_v для некоторого $v \in V$, не существует. Для этого определим линейное отображение $\vartheta\colon V \to V^{**}$, полагая $\vartheta(v) = \vartheta_v$.

Во-первых, покажем, что ϑ действительно линейно. Нам нужно проверить, что $\vartheta_{v_1+v_2} = \vartheta_{v_1} + \vartheta_{v_2}\ \forall v_1,\ v_2 \in V$ и что $\vartheta_{\lambda v} = \lambda \vartheta_v\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ и $v \in V$. Действительно,

$$\vartheta_{v_1+v_2}(f) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \vartheta_{v_1}(f) + \vartheta_{v_2}(f) = (\vartheta_{v_1} + \vartheta_{v_2})(f)\ \ \forall f \in V^*$$

и

$$\vartheta_{\lambda v}(f) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \vartheta_v(f)$$

(мы использовали линейность f).

Докажем теперь, что ϑ инъективно. Действительно, если $\vartheta_v = 0$, то для любого $f \in V^*$ $\vartheta_v(f) = f(v) = 0$, но если $v \neq 0$ то найдется такая $f \in V^*$ что $f(v) \neq 0$ (например, в произвольном базисе какая-то из координат вектора v отлична от нуля). Значит, $\ker\vartheta = 0$. Используя теперь Следствие 5.51 получаем, что ϑ — изоморфизм между V и V^{**}. Заметим, что в определении ϑ не было никакого произвола, поэтому этот изоморфизм называется *каноническим*.

Подведем итог.

Теорема 5.96. *Если пространство V конечномерно, то оно канонически изоморфно своему дважды сопряженному пространству V^{**}.*

В предыдущих рассуждениях мы использовали существование канонического билинейного отображения $V^* \times V \to \mathbb{K}$, $(f, v) \mapsto f(v)$. Если в записи (f, v) зафиксировать $f \in V^*$ и заставить v пробегать пространство V, мы получим линейную функцию на V, а если зафиксировать $v \in V$ и заставить f пробегать все пространство V^*, получим линейную функцию на V^*. Именно этот факт мы и использовали выше в записи $(f, v) = \vartheta_v(f)$ для фиксированного $v \in V$.

Преимущества канонических изоморфизмов перед "случайными" состоит в том, что отождествление пространств с помощью них обычно безобидно. То есть пространства V и V^{**} можно считать, по-существу, одним и тем же пространством, при этом вектор $v \in V$ отождествляется с $\vartheta_v \in V^{**}$, а значит базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V — с базисом $\{\vartheta_{e_1}, \dots, \vartheta_{e_n}\}$ в V^{**}.

Замечание 5.97. (ср. Замечание 5.95). Определим изоморфизм $\theta\colon V \to V^{**}$ условием, что он переводит базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в базис $\{\vartheta_{e_1}, \dots, \vartheta_{e_n}\}$. В этой паре базисов θ по определению имеет единичную матрицу. Покажем, что θ будет иметь единичную матрицу в любой другой аналогичной паре базисов. Действительно, пусть $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ — другой базис в V такой, что матрица перехода от $\{e_1, \dots, e_n\}$ к нему есть C. Тогда согласно Задаче 5.92 матрица перехода от $\{\vartheta_{e_1}, \dots, \vartheta_{e_n}\}$ к $\{\vartheta_{e'_1}, \dots, \vartheta_{e'_n}\}$ есть $(C^{-T})^{-T} = C$. Поэтому матрица линейного отображения θ относительно новой пары базисов будет $C^{-1}EC = E$. На самом деле θ совпадает с определенным выше изоморфизмом ϑ. Это еще раз показывает смысл "каноничности" изоморфизма ϑ — его определение не зависит от выбора базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V, а определяется само́й линейной структурой пространства V.

Задача 5.98. *Покажите, что любой базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в V^* является биортогональным некоторому (единственному) базису $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V.*

Решение. Пусть $\{g_1, \dots, g_n\}$ — базис в V^{**}, биортогональный к $\{f_1, \dots, f_n\}$, то есть $g_i(f_j) = \delta_{ij}$. Мы знаем, что каждый g_i имеет вид ϑ_{e_i} для некоторого $e_i \in V$, причем

$$g_i(f_j) = \vartheta_{e_i}(f_j) = f_j(e_i) = \delta_{ij}.$$

Поэтому базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ биортогонален базису $\{e_1, \dots, e_n\}$. ■

Задача 5.99. *Пусть V — пространство многочленов $\mathbb{K}[x]_n$ степени $\leq n$. Покажите, что линейные функции $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, определяемые равенствами*

$$\varepsilon_i(p) = p(x_i),$$

где $x_0, x_1, \dots, x_n$ — попарно различные элементы поля $\mathbb{K}$, составляют базис пространства V^*, и найдите базис в пространстве V, которому он биортогонален. Покажите, что формула (28) в этом случае превращается в интерполяционную формулу Лагранжа.

Задача 5.100. *Пусть V такое же как в предыдущей задаче, причем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Покажите, что линейные функции $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, определяемые равенствами*

$$\varepsilon_i(p) = p^{(i)}(x_0),$$

где $x_0 \in \mathbb{K}$, составляют базис пространства V^*, и найдите базис пространства V, которому он биортогонален. Выясните смысл формулы (28) в этом случае.

Решение. Если $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ — искомый базис в V, то он состоит из многочленов, удовлетворяющих условиям $p_i^{(j)}(x_0) = \delta_{ij}$. Такие многочлены легко найти: $p_i(x) = \frac{(x-x_0)^i}{i!}$, $i = 0, \ldots, n$. Пусть

$$\lambda_0\varepsilon_0 + \lambda_1\varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n = 0$$

— некоторая линейная зависимость, применяя ее последовательно к системе $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, находим, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Формула (28) в этом случае превращается в формулу Тейлора:

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!} + p''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + p^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}. \quad \blacksquare$$

В заключении этого параграфа сделаем три замечания для заинтересованного читателя.

Замечание 5.101. Пусть $\varphi \colon V \to U$ — линейное отображение. Тогда оно индуцирует линейное отображение сопряженных пространств, направленное в обратную сторону:

$$\varphi^* \colon U^* \to V^*, \;\; \varphi^*(f) = f \circ \varphi,$$

то есть для $f \in U^*$ линейная функция $\varphi^*(f) \in V^*$ принимает значение $f(\varphi(v))$ на произвольном векторе $v \in V$. Если $\psi \colon U \to W$ — еще одно линейное отображение, то $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$, кроме того, $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$.

При этом канонические изоморфизмы $\vartheta^V \colon V \to V^{**}$ для разных пространств V согласованы (“естественны”) в следующем смысле: для всех линейных отображений $\varphi \colon V \to U$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\vartheta^U"] & U^{**} \\ V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\vartheta^V"] & V^{**} \arrow[u, "\varphi^{**}"'] \end{tikzcd}$$

коммутативны. Сформулированные утверждения мы оставляем в качестве упражнения.

Замечание 5.102. В случае бесконечномерного пространства V сопряженное пространство V^* всегда имеет бóльшую размерность (в смысле мощности базиса). Например, если V — пространство финитных последовательностей, которое счетномерно, то V^* состоит из всех последовательностей, и является несчетномерным.

Замечание 5.103. Каждому k-мерному подпространству $U \subset V$ можно сопоставить $n-k$-мерное подпространство $U^0 \subset V^*$ следующим образом:

$$U^0 := \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \;\; \forall u \in U\}.$$

Можно показать, что $(U^0)^0 = U$ и сопоставление подпространству его аннулятора определяет обращающую включение[21] биекцию между множествами подпространств в V и в V^*.

Понятие аннулятора позволяет дать бескоординатное описание связи между подпространствами в $\mathbb{K}^n$ и системами линейных уравнений, которые их определяют (выбор базиса в V отождествляет аннулятор U^0 с пространством всех линейных уравнений, которым удовлетворяют все векторы из U). Мы, однако, не будем останавливаться на этой теме, отсылая заинтересованного читателя к более подробным курсам, например [6].

6 Линейные операторы

6.1 Определение и простейшие свойства

Для удобства напомним определение линейного оператора (=линейного преобразования) и его матрицы, а также перечислим доказанные ранее их свойства.

Определение 6.1. *Линейным оператором* на линейном пространстве V называется линейное отображение $\varphi\colon V \to V$.

Аналогично общему случаю линейных отображений, определяются ядро $\ker\varphi$ и образ $\operatorname{Im}\varphi$ линейного оператора $\varphi\colon V \to V$. Они являются подпространствами V, причем если V конечномерно, то

$$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V. \tag{29}$$

Оператор $\varphi\colon V \to V$ биективен (то есть изоморфизм) тогда и только тогда, когда $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{Im}\varphi = V$, причем если V конечномерно, то два последних условия эквивалентны (ввиду формулы (29)).

Если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V, то матрицей φ в нем называется такая единственная матрица A порядка n, что

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n)A.$$

Если $\overrightarrow{v}$ — координатный столбец вектора $v \in V$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$, а A — матрица оператора φ в том же базисе, то координатный столбец вектора $\varphi(v)$ в том же базисе равен $A\overrightarrow{v}$.

Если $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — новый базис в V, причем C — матрица перехода к нему от старого базиса, то $A' = C^{-1}AC$, где A' — матрица φ в новом базисе.

Замечание 6.2. Сразу отметим важную особенность матрицы линейного оператора: ее определитель зависит только от самого оператора, но не от базиса, в котором она написана. Действительно,

$$\det A' = \det(C^{-1}AC) = (\det C)^{-1}(\det A)(\det C) = \det A.$$

Это говорит о том, что у линейных операторов больше инвариантов, чем у общих линейных отображений, что приводит к их более сложной теории.

[21] Действительно, чем меньше подпространство, тем больше линейных функций, которые на нем обращаются в нуль.

Выбор базиса задает изоморфизм алгебр $\mathcal{L}(V) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. В частности, матрица (в данном базисе) композиции операторов равна произведению их матриц, матрица тождественного оператора является единичной матрицей (в любом базисе). Оператор φ — изоморфизм тогда и только тогда, когда его матрица A (в произвольном базисе) невырождена, при этом матрицей φ^{-1} в том же базисе является A^{-1}.

Из доказанного ранее также следует, что если A — матрица φ, то $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$ (и, таким образом, $\operatorname{rk} A$ не зависит от базиса, в котором написана A).

Рассмотрим несколько примеров линейных операторов.

Пример 6.3. Нулевой оператор, тождественный оператор.

Пример 6.4. Пусть $V = U \oplus W$ и $\varphi\colon V \to V$ — проектор на U параллельно W. Ранее мы проверили его линейность. Легко проверяется, что он удовлетворяет тождеству $\varphi^2 = \varphi$.

Докажем обратное, что любой линейный оператор $\varphi\colon V \to V$, удовлетворяющий тождеству $\varphi^2 = \varphi$, является проектором на $U := \operatorname{Im} \varphi \subset V$ параллельно $W := \ker \varphi \subset V$. Действительно, любой вектор $v \in V$ представляется в виде $v = \varphi(v) + (v - \varphi(v))$, где первое слагаемое лежит в U, второе — в W, откуда $V = U + W$. Дальше можно либо сослаться на формулу (29), либо доказать что $U \cap W = 0$ следующим образом. Пусть напротив, $0 \neq z \in U \cap W$, тогда $z = \varphi(v)$ для некоторого $v \in V$ и $\varphi(z) = 0$, откуда $\varphi^2(v) = \varphi(v) = z = 0$ — противоречие с $z \neq 0$.

Пример 6.5. Рассмотрим оператор $\varphi\colon V \to V$, удовлетворяющий тождеству $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$. Положим

$$U := \{v \in V \mid \varphi(v) = v\}, \quad W := \{v \in V \mid \varphi(v) = -v\}$$

(заметим, что $U = \ker(\varphi - \mathrm{id}_V)$, $W = \ker(\varphi + \mathrm{id}_V)$). Покажем что тогда $V = U \oplus W$. В самом деле, для всякого $v \in V$ имеем

$$v = \frac{v + \varphi(v)}{2} + \frac{v - \varphi(v)}{2},$$

где первое слагаемое лежит в U, а второе — в W, откуда $V = U + W$. Пересечение U и W состоит из векторов, удовлетворяющих равенству $v = -v$, откуда $U \cap W = 0$.

Легко видеть, что если $v = u + w$ — разложение произвольного вектора $v \in V$ в соответствии с прямой суммой $V = U \oplus W$, то действие φ на v задается формулой $\varphi(v) = u - w$. Такой оператор φ естественно назвать “отражением относительно U параллельно W” (читателю предлагается нарисовать картинку). Легко видеть, что наоборот, любое такое отражение (связанное с разложением V в прямую сумму $U \oplus W$ подпространств) удовлетворяет тождеству $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$. Примером такого линейного оператора является оператор транспонирования на пространстве квадратных матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ (какие в этом случае подпространства U и W?). Кстати, заодно мы дали описание множества решений матричного уравнения $X^2 = E$ (в квадратных матрицах данного порядка n).

Пример 6.6. Оператор поворота на плоскости (в трехмерном пространстве) на данный угол (вокруг данной оси на данный угол).

Пример 6.7. Оператор дифференцирования $\varphi = \frac{d}{dx}$ на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_n$ многочленов степени не выше n. У этого оператора одномерное ядро (состоящее из констант) и $n-1$-мерный образ $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}[x]_{n-1} \subset \mathbb{R}[x]_n$. Заметим, что в этом случае $\ker \varphi$ содержится в $\operatorname{Im} \varphi$.

Пример 6.8. Свойства оператора дифференцирования сильно зависят от того, на каком пространстве функций мы его рассматриваем. Рассмотрим, например, оператор $\varphi = \frac{d}{dx}$ на линейной оболочке функций

$$V := \langle \sin x,\, \cos x\rangle = \{\alpha \sin x + \beta \cos x \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

над $\mathbb{R}$ (указанную линейную оболочку мы рассматриваем как подпространство пространства дифференцируемых функций на действительной прямой). Легко видеть, что функции $\sin x$, $\cos x$ линейно независимы, поэтому $\dim V = 2$. Тогда φ является изоморфизмом пространства V на себя. Любопытно отметить, что матрица φ в базисе $\{\sin x,\, \cos x\}$ совпадает с матрицей поворота плоскости на угол $\pi/2$ в ортонормированнном базисе.

6.2 Инвариантные подпространства

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на V.

Определение 6.9. Подпространство $U \subset V$ называется *φ-инвариантным*, если $\forall u \in U\ \varphi(u) \in U$ (коротко: $\varphi(U) \subset U$).

Ясно, что нулевое подпространство и все V φ-инвариантны (для любого оператора φ). Также легко показать, что *любое подпространство, содержащееся в* $\ker \varphi$, а также *любое подпространство, содержащее* $\operatorname{Im} \varphi$, *$\varphi$-инвариантны.*

Задача 6.10. *Постарайтесь найти все инвариантные подпространства операторов из предыдущего параграфа.*

Говорят, что два оператора φ и ψ на V *коммутируют*, если $\psi\varphi = \varphi\psi$. Очевидно, это равносильно тому, что их матрицы (в произвольном базисе) коммутируют: $AB = BA$.

Предложение 6.11. *Если операторы φ и ψ коммутируют, то $\ker \varphi$ инвариантно относительно ψ, и наоборот. То же верно и для образов.*

Доказательство. Докажем Предложение для ядер. Пусть $U := \ker \varphi$. Тогда для любого $u \in U$ имеем

$$\varphi(\psi(u)) = \psi(\varphi(u)) = \psi(0) = 0,$$

откуда $\psi(u) \in U$. ■

Вот пример такой пары операторов: φ и $\psi = \varphi - \lambda \mathrm{id}_V$.

Если $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство, то определен линейный оператор

$$\varphi|_U \colon U \to U, \quad \varphi|_U(u) = \varphi(u) \in U$$

на U, называемый *ограничением* оператора φ на (инвариантное) подпространство U.

Наличие инвариантного подпространства позволяет предъявить базис, в котором матрица φ имеет специальный вид.

А именно, выберем базис $\{e_1, \dots, e_k\}$ в подпространстве U и продолжим его до базиса $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ во всем пространстве V. Тогда матрица A оператора φ в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \tag{30}$$

с квадратными матрицами B и D порядков k и $n-k$. Легко видеть, что матрица B является матрицей ограничения $\varphi|_U$ в базисе $\{e_1,\dots,e_k\}$.

Обратно, если матрица имеет указанный выше вид, то линейная оболочка первых k базисных векторов является φ-инвариантным подпространством.

Замечание 6.12. Матрица D тоже является матрицей некоторого оператора, который строится по φ и инвариантному подпространству U, а именно *фактороператора*, но его определение выходит за рамки нашего курса.

Еще лучше сложится ситуация, если удастся найти такой базис в V, в котором A будет иметь *блочно-диагональный вид*

$$A=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}. \tag{31}$$

А именно, рассмотрим оператор $\varphi\colon V\to V$, для которого V является прямой суммой φ-инвариантных подпространств U и W, $V=U\oplus W$. Тогда матрица φ в базисе в V, полученном объединением базисов в U и W, будет иметь требуемый вид, причем B и D будут матрицами $\varphi|_U$ и $\varphi|_W$ в соответствующих базисах подпространств.

Обратно, если матрица A оператора φ в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$ в V имеет блочно-диагональный вид (31) с блоками порядков k и $n-k$ соответственно, то линейные оболочки $U:=\langle e_1,\dots,e_k\rangle$ и $W:=\langle e_{k+1},\dots,e_n\}$ будут инвариантными подпространствами V такими, что $V=U\oplus W$.

Пример 6.13. Пусть $\{e_1,e_2,e_3\}$ — ортонормированный базис в трехмерном евклидовом пространстве. В нем матрица оператора поворота φ на угол α вокруг оси e_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & 0\\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

поэтому линейные оболочки $\langle e_1,e_2\rangle$ и $\langle e_3\rangle$ φ-инвариантны.

Пример 6.14. Матрица A проектора на U параллельно W в объединении базисов U и W имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

где $k=\dim U$.

Пример 6.15. Матрица A отражения вдоль W относительно U в в объединении базисов U и W имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_k & 0\\ 0 & -E_{n-k}\end{pmatrix},$$

где $k=\dim U,\ n-k=\dim W$.

Более общо, если $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_k$ — разложение в прямую сумму φ-инвариантных подпространств, то матрица φ в объединении базисов подпространств V_i будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}$$

где блоки A_i — матрицы ограничений $\varphi|_{V_i}$ в соответствующих базисах.

Задача 6.16. *Покажите, что для оператора $\varphi\colon V \to V$, $\dim V = n$ существует базис, в котором его матрица диагональная тогда и только тогда, когда V является прямой суммой $\oplus_{i=1}^n V_i$ одномерных φ-инвариантных подпространств $V_i \subset V$.*

Определение 6.17. Оператор, для которого существует базис, в котором он имеет диагональную матрицу, называется *диагонализируемым.*

Вскоре мы увидим, что не все операторы диагонализируемы (при $\dim V > 1$), и опишем препятствия к диагонализируемости.

Задача 6.18. *Покажите, что для оператора $\varphi\colon V \to V$, $\dim V = n$ существует базис, в котором его матрица верхняя треугольная тогда и только тогда, когда в V существует цепочка вложенных φ-инвариантных подпространств $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$, таких, что $\dim V_k = k,\ 0 \le k \le n$.*

Далее мы докажем, что при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ для любого оператора существует базис, в котором его матрица верхняя треугольная.

При каком условии имея вид (30) для данного инвариантного $U \subset V$ можно получить вид (31), меняя последние $n-k$ базисных векторов? Очевидно, тогда и только тогда, когда их можно выбрать лежащими в таком прямом дополнении к U, которое является φ-инвариантным. Конечно, у любого подпространства есть прямое дополнение, но в общем случае неверно, что существует φ-инвариантное прямое дополнение. Приведем соответствующий пример.

Пример 6.19. Рассмотрим оператор $\varphi := \frac{d}{dx}$ на пространстве $V := \mathbb{R}[x]_n$. Покажите, что все его инвариантные подпространства суть подпространства $\mathbb{R}[x]_k \subset V,\ 0 \le k \le n$ (указание: рассмотрите произвольное инвариантное подпространство $U \subset V$, пусть $p \in U$ — многочлен максимальной степени, тогда покажите, что $U = \mathbb{R}[x]_k$, где $k = \deg p$). Таким образом, все инвариантные подпространства вложены в друг друга наподобие матрешки, поэтому ни у какого из них (за исключением нулевого и всего пространства) нет инвариантного прямого дополнения, а значит ни в каком базисе матрица φ не является блочно-диагональной. Тот факт, что матрица φ в базисе $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ является верхней треугольной, связан с тем, что данный базис согласован со "структурой матрешки" в том смысле, что линейная оболочка $\{e_1, \ldots, e_k\}$ для любого $0 \le k \le n$ совпадает с $\mathbb{R}[x]_k$ и, таким образом, φ-инвариантна.

6.3 Собственные векторы и подпространства

Пусть вектор $v \in V$ порождает одномерное φ-инвариантное подпространство $\langle v \rangle \subset V$. Тогда $v \neq 0$ и $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого скаляра $\lambda \in \mathbb{K}$. Такие векторы играют очень важную роль в изучении операторов и имеют специальное название.

Определение 6.20. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* оператора $\varphi\colon V \to V$, отвечающим *собственному значению* $\lambda \in \mathbb{K}$, если $\varphi(v) = \lambda v$.

Легко видеть, что оператор $\varphi\colon V \to V$ диагонализируем тогда и только тогда, когда существует базис в V, состоящий из его собственных векторов.

Например, любой ненулевой вектор из ядра (если такой есть) — собственный вектор с собственным значением 0. Для $\varphi = \mathrm{id}_V$ любой ненулевой вектор $v \in V$ является собственным с собственным значением 1.

Вот менее тривиальные примеры.

Пример 6.21. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — проектор. Какие у него могут быть собственные значения? Если $v \in V$ — собственный вектор φ, отвечающий собственному значению λ, то

$$\lambda v = \varphi(v) = \varphi^2(v) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda^2 v,$$

откуда $\lambda(\lambda - 1)v = 0$, но так как $v \neq 0$, то либо $\lambda = 0$ либо $\lambda = 1$. Соответствующие собственные векторы легко предъявить. Напомним, что всякий проектор φ есть оператор проектирования на U параллельно W для некоторого представления $V = U \oplus W$ в виде прямой суммы подпространств. Тогда любой ненулевой вектор из U — собственный вектор φ с собственным значением 1, а любой ненулевой вектор из W — собственный вектор с собственным значением 0.

Пример 6.22. Аналогично предыдущему примеру можно показать (сделайте это!), что для оператора отражения $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$ собственными значениями могут быть только $\lambda = \pm 1$. Если использовать обозначения Примера 6.5, то любой ненулевой вектор из U — собственный вектор с собственным значением 1, а любой ненулевой вектор из W — собственный вектор с собственным значением -1. В частности, у оператора транспонирования на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ имеются два собственных подпространства: подпространство симметрических матриц (собственное подпространство, отвчающее собственному значению 1), и подпространство кососимметрических матриц (отвечающих собственному значению -1).

Пример 6.23. Оператор поворота на евклидовой плоскости на угол $\alpha \neq \pi k$ не имеет собственных векторов.

Пример 6.24. Единственным собственным значением оператора поворота трехмерного евклидова пространства V на угол $\alpha \neq \pi k$ вокруг оси $\langle a \rangle$ $(0 \neq a \in V)$ является 1, а соответствующими собственными векторами является ненулевые векторы из $\langle a \rangle \subset V$.

Пример 6.25. Рассмотрим линейную оболочку $V := \langle e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x} \rangle$ функций над $\mathbb{R}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — попарно различные вещественные числа. Легко показать, что указанные функции линейно независимы (над $\mathbb{R}$), то есть $\dim V = n$. Проще всего это сделать, записав линейную зависимость между ними, продифференцировать ее $n-1$ раз, а затем воспользоваться невырожденностью определителя Вандермонда. Рассмотрим $\varphi := \frac{d}{dx}$ на V. Легко видеть, что функции $e^{\lambda_k x}$

— собственные векторы оператора φ с собственными значениями λ_k и в базисе $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ пространства V оператор φ имеет диагональную матрицу $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

Пример 6.26. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_n$, $\varphi = \frac{d}{dx}$. В данном случае собственные векторы с собственным значением λ — такие многочлены $p \neq 0$, что $p' = \lambda p$. Так как производная любого ненулевого многочлена имеет строго меньшую степень, чем сам многочлен, то единственное возможное собственное значение — $\lambda = 0$. Действительно, существуют собственные векторы с собственным значением 0: это ненулевые константы. Заметим, что при $n > 0$ в V не существует базиса из собственных векторов оператора φ, то есть он не диагонализируем.

Во всех рассмотренных примерах операторы имели конечное число собственных значений. Это верно для любого оператора в конечномерном пространстве (мы вскоре это докажем). Как искать собственные значения данного оператора φ?

Во-первых, заметим, что *скаляр* $\lambda \in \mathbb{K}$ *является собственным значением оператора* $\varphi\colon V \to V$ *тогда и только тогда, когда подпространство*

$$V_\lambda := \ker(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V) \subset V \tag{32}$$

ненулевое, $V_\lambda \neq 0$. Действительно, любой собственный вектор оператора φ с собственным значением λ лежит в V_λ, и наоборот, любой ненулевой вектор из V_λ является собственным с собственным значением λ.

Определение 6.27. Ненулевое подпространство V_λ, определенное равенством (32), называется *собственным подпространством* оператора φ, отвечающим собственному значению λ.

Таким образом, собственное подпространство V_λ состоит из всех собственных векторов оператора φ с собственным значением λ, и нулевого вектора.

Читателю предлагается описать собственные подпространства для рассмотренных выше примеров линейных операторов.

Задача 6.28. *Докажите, что любое собственное подпространство V_λ оператора φ φ-инариантно. (Указание: воспользуйтесь Предложением 6.11).*

Равенство (32) подсказывает метод нахождения собственных подпространств. А именно, пусть в V выбран базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ и A — матрица оператора φ в этом базисе. Тогда оператор $\varphi - \lambda \operatorname{id}_V$ в этом базисе имеет матрицу $A - \lambda E$. Его вырожденность (то есть условие $V_\lambda \neq 0$) равносильно вырожденности матрицы $A - \lambda E$, что, как мы знаем из теории определителей, равносильно равенству $\det(A - \lambda E) = 0$.

Таким образом, λ — *собственное значение* φ *тогда и только тогда, когда* $\det(A - \lambda E) = 0$, где A — матрица φ (в произвольном базисе).

Для произвольной матрицы $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$ порядка n рассмотрим выражение $\chi_A(t) := \det(A - tE)$ от переменной t. То есть $\chi_A(t)$ — определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - t & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - t & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}.$$

Так как определитель матрицы равен сумме со знаками произведений, в которые входит по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца (см. формулу полного разложения определителя (14)), то $\chi_A(t)$ является многочленом от t степени n с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, то есть $\chi_A(t) \in \mathbb{K}[t]$. Более точно,

$$\chi_A(t) = (-1)^n(t^n - (\operatorname{tr} A)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A). \tag{33}$$

Задача 6.29. *Убедитесь, что выписанные коэффициенты многочлена именно такие как в приведенной формуле. (Указание: для нахождения свободного члена положите $t = 0$ в $\chi_A(t)$).*

Из доказанного выше следует, что $\lambda \in \mathbb{K}$ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда λ — корень многочлена $\chi_A(t)$ (для матрицы A оператора φ в произвольном базисе).

Выше мы уже видели, что некоторые характеристики матриц линейных операторов не зависят от выбора базиса, в котором записывается матрица, и, таким образом, являются инвариантами самого́ оператора. Таковы например $\operatorname{rk} A$ (являющийся инвариантом даже для линейных отображений) и $\det A$. Поэтому можно говорить про ранг линейного отображения $\operatorname{rk} \varphi$ (в частности, линейного оператора) и определитель линейного оператора, $\det \varphi$.

Оказывается, для всех матриц A одного оператора φ многочлены $\chi_A(t)$ совпадают. Действительно, A' — матрица того же оператора в новом базисе, связанном с исходным матрицей перехода C, то $A' = C^{-1}AC$ и мы имеем

$$\chi_{A'}(t) = \det(A' - tE) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}(tE)C) = \det(C^{-1}(A - tE)C) =$$

$$= (\det C)^{-1}(\det(A - tE))\det C = \det(A - tE) = \chi_A(t).$$

Поэтому многочлен $\chi_A(t)$ (и все его коэффициенты, в частности, след $\operatorname{tr} A$) являются инвариантами линейного оператора. Многочлен $\chi_A(t)$ называется *характеристическим многочленом* оператора φ и обозначается $\chi_\varphi(t)$. То, что этот многочлен является инвариантом оператора φ (то есть не зависит от базиса, в котором рассматривается его матрица), называется *инвариантностью характеристического многочлена.*

Задача 6.30. *Найдите характеристические многочлены для рассмотренных выше примеров линейных операторов.*

Задача 6.31. *Верно ли, что если характеристические многочлены матриц A и B совпадают, то указанные матрицы являются матрицами одного оператора в разных базисах?*

Задача 6.32. *Пусть φ — оператор поворота в трехмерном евклидовом пространстве на угол α. Пусть A — матрица этого оператора в некотором (не обязательно ортонормированном) базисе. Выразите угол поворота α через элементы матрицы A. (Указание: воспользуйтесь инвариантностью следа).*

Задача 6.33. *Пусть φ — проектор, то есть $\varphi^2 = \varphi$. Докажите, что $\operatorname{rk} \varphi = \operatorname{tr} \varphi$.*

Выше мы фактически доказали следующую Теорему.

Теорема 6.34. *Элемент $\lambda \in \mathbb{K}$ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда он является корнем его характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$, лежащем в поле $\mathbb{K}$.*

Напомним, что у многочлена $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени n не более n корней в $\mathbb{K}$ с учетом кратности (в частности, не более n различных корней), причем если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто[22], то их в точности n с учетом кратности. Таким образом, у оператора в n-мерном пространстве не более n различных собственных значений, но может быть и меньше: корни характеристического многочлена могут быть кратными, а могут не принадлежать полю $\mathbb{K}$, если последнее не алгебраически замкнуто. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то собственных значений в точности n с учетом кратности.

Причину последней оговорки (про поле) в формулировке предыдущей Теоремы проясняет следующий пример.

Пример 6.35. Пусть φ — оператор поворота на угол $\pi/2$ на евклидовой плоскости (это векторное пространство над полем $\mathbb{R}$). Мы знаем, что у него нет собственных векторов, а значит нет и собственных значений. В то же время в ортонормированном базисе он имеем матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и его характеристической многочлен равен $\chi_\varphi(t) = t^2+1$. Этот многочлен не имеет вещественных корней, в то же время имеет два комплексных корня $\pm i$.

Чтобы отличить собственные значения оператора от общих корней его характеристического многочлена (которые не обязаны лежать в поле $\mathbb{K}$), последние мы будем называть *характеристическими числами* оператора. Таким образом, собственные значения — в точности характеристические числа, которые лежат в поле $\mathbb{K}$ (над которым опеределено наше векторное пространство).

Следствие 6.36. *Всякий оператор в пространстве положительной размерности над полем $\mathbb{C}$ имеет собственный вектор.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — такой оператор и $\chi_\varphi(t) \in \mathbb{C}[t]$ — его характеристический многочлен. Из алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}$[23] следует, что $\chi_\varphi(t)$ имеет комплексный корень $\lambda \in \mathbb{C}$. Согласно предыдущей Теореме, он будет собственным значением оператора φ. ∎

Задача 6.37. *Пусть V — нечетномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, тогда любой линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ имеет собственный вектор.*

Замечание 6.38. Мы знаем, что в четномерном вещественном векторном пространстве не любой оператор имеет одномерное инвариантное подпространство (которое обязательно порождается собственным вектором). Однако любой линейный оператор на конечномерном вещественном пространстве положительной размерности имеет одно- или двумерное инвариантное подпространство. Мы этот факт здесь не доказываем, читатель может попробовать доказать его самостоятельно. Отметим лишь, что этот результат связан с тем, что любой неприводимый многочлен над $\mathbb{R}$ имеет степень 1 или 2.

[22] Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{K}$ означает, что любой многочлен $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ положительной степени имеет корень в $\mathbb{K}$, отсюда по теореме Безу следует формулируемый далее результат.

[23] В этом курсе мы этот факт принимаем без доказательства.

Теперь мы знаем как искать собственные значения оператора φ, осталось выяснить как искать соответствующие собственные подпространства V_λ. Так как $V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)$, то в базисе, в котором φ имеет матрицу A нахождение $V_\lambda \subset V$ сводится к решению СЛОУ с матрицей коэффициентов $A - \lambda E$. То есть ФСР указанной системы даст базис в V_λ. Заметим, что так как λ — корень характеристического многочлена, то $\det(A - \lambda E) = 0$, поэтому указанная система имеет нетривиальное решение, причем $\dim V_\lambda = \dim V - \operatorname{rk}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)$ (см. формулу (29)).

Таким образом, алгоритм решения задачи на нахождение собственных векторов оператора φ в конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ следующий. Выбираем в V какой-то базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, находим матрицу A оператора φ в этом базисе. Находим его характеристический многочлен $\chi_\varphi(t) = \det(A - tE)$. Находим корни $\chi_\varphi(t)$, лежащие в поле $\mathbb{K}$, они — в точности все собственные значения φ. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ — все собственные значения φ. Для каждого λ_i решаем СЛОУ с матрицей $A - \lambda_i E$, тем самым находим собственное подпространство V_{λ_i}. (Точнее, выбрав базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, мы отождествили V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$, при этом изоморфизме V_{λ_i} отождествляется с пространством решений указанной системы).

6.4 Диагонализируемость

Из Задачи 6.16 (или непосредственно из определения диагонализируемости и собственного вектора) легко следует, что оператор $\varphi\colon V \to V$ диагонализируем тогда и только тогда, когда в V существует базис, состоящий из его собственных векторов. В таком базисе (если он существует) матрица φ будет диагональной с собственными значениями на главной диагонали. Главная цель данного параграфа — получить удобный критерий существования для оператора φ базиса из собственных векторов.

Вот первый важный результат в этом направлении.

Теорема 6.39. *Собственные подпространства оператора φ, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все различные собственные значения оператора φ (мы знаем, что $k \le \dim V$, причем неравенство может быть строгим, так как корни характеристического многочлена могут быть кратными, а также могут не лежать в поле $\mathbb{K}$, если последнее не алгебраически замкнуто), а $V_1, \ldots, V_k \subset V$ — соответствующие им собственные подпространства. Теорему будем доказывать индукцией по числу k. При $k = 1$ результат очевиден. Пусть $k > 1$. Пусть

$$v_1 + \ldots + v_{k-1} + v_k = 0, \tag{34}$$

где $v_i \in V_i$. Применяя к обеим частям данного равенства оператор φ, получаем

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_k v_k = 0. \tag{35}$$

Вычитая теперь из (35) умноженное на λ_k (34), получаем

$$(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0,$$

откуда с учетом индуктивного предположения имеем $(\lambda_i - \lambda_k)v_i = 0$ при $i = 1, \ldots, k-1$, но так как $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, то $v_1 = \ldots = v_{k-1} = 0$, откуда с учетом (34) также и $v_k = 0$, что и требовалось доказать. ■

Таким образом, $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \subset V$, и в V существует базис, состоящий из собственных векторов оператора φ тогда и только тогда, когда $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k = V$. Мы знаем, что последнее равносильно тому, что $\sum_{i=1}^k \dim V_i = \dim V$ (см. Предложение 5.23).

Из предыдущей Теоремы следует следующее *достаточное условие диагонализируемости.*

Следствие 6.40. *Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ имеет $n = \dim V$ различных корней, принадлежащих полю $\mathbb{K}$, то оператор φ диагонализируем.*

Доказательство. Каждый корень $\chi_\varphi(t)$, принадлежащий полю $\mathbb{K}$, является собственным значением φ, то есть φ имеет $n = \dim V$ различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и каждому из них отвечает собственное подпространство $V_i \neq 0$, причем собственные подпространства образуют прямую сумму. Значит, $\dim (V_1 \oplus \ldots \oplus V_n) = \sum_{i=1}^n \dim V_i \geq n$ и $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$. ■

Пример тождественного оператора (или проектора) показывает, что предыдущее достаточное условие диагнализируемости не является необходимым.

Пусть $\varphi\colon V \to V$ —линейный оператор, $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство, $\varphi|_U\colon U \to U$ — ограничение φ на U.

Предложение 6.41. *Характеристический многочлен ограничения оператора на подпространство делит характеристический многочлен самоѓо оператора, $\chi_{\varphi|_U}(t) \mid \chi_\varphi(t)$.*

Доказательство. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$ в U и продолжим его до базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V, тогда матрица A оператора φ в нем будет иметь блочнотреугольный вид

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где B — матрица $\varphi|_U$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_k\}$ (см. (30)). Имеем

$$\chi_\varphi(t) = \det (A - tE) = \det \begin{pmatrix} B - tE & C \\ 0 & D - tE \end{pmatrix} =$$

$$= \det (B - tE) \det (D - tE) = \chi_{\varphi|U}(t) \det (D - tE),$$

где мы воспользовались Теоремой 3.34. ■

Напомним, что c называется *корнем кратности m* многочлена $p(t)$, если $p(t) = (t-c)^m q(t)$, где $q(c) \neq 0$.

Назовем *алгебраической кратностью* собственного значения λ оператора φ кратность λ как корня характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$. Обозначим ее $m(\lambda)$.

Назовем *геометрической кратностью* собственного значения λ оператора φ размерность соответствующего ему собственного подпространства $V_\lambda \subset V$. Обозначим ее $g(\lambda)$.

Следствие 6.42. *Для любого собственного значения λ оператора φ его геометрическая кратность не превосходит алгебраическую, $g(\lambda) \leq m(\lambda)$.*

Доказательство. Напомним (см. Задачу 6.28), что для любого собственного значения λ оператора φ соответствующее собственное подпространство V_λ φ-инвариантно. Заметим, что ограничение $\varphi|_{V_\lambda}$ оператора φ на собственное подпространство V_λ является оператором умножения на λ, то есть $\varphi|_{V_\lambda} = \lambda\, \mathrm{id}_{V_\lambda}$. Поэтому $\chi_{\varphi|_{V_\lambda}}(t) = (\lambda - t)^{g(\lambda)}$. Согласно предыдущему Предложению $(\lambda - t)^{g(\lambda)} \mid \chi_\varphi(t)$. ∎

Легко привести примеры операторов, у которых геометрические кратности собственных значений равны алгебраическим (тождественный, проекторы). Следующий пример показывает, что неравенство в предыдущем Следствии может быть строгим.

Пример 6.43. Рассмотрим оператор $\varphi := \frac{d}{dx}$ на пространстве $V := \mathbb{R}[x]_n$. Легко посчитать, что $\chi_\varphi(t) = t^{n+1}$. В то же время единственному собственному значению $\lambda = 0$ отвечает одномерное собственное подпространство (состоящее из констант). Значит, $1 = g(\lambda) < m(\lambda) = n + 1$ при $n > 0$. ∎

Напомним, что для многочлена $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени n число его корней в поле $\mathbb{K}$ с учетом кратности не превосходит n, причем в точности равно n тогда и только тогда, когда все корни $p(t)$ принадлежат $\mathbb{K}$ (равносильно, когда $p(t)$ раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$).

Теперь мы в состоянии доказать обещанный ранее критерий диагонализируемости.

Теорема 6.44. *Для существования в V базиса из собственных векторов оператора $\varphi\colon V \to V$ необходимо и достаточно одновременного выполнения следующих двух условий:*

1) *все корни характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$ лежат в поле $\mathbb{K}$ (и, значит, являются собственными значениями φ);*

2) *для каждого собственного значения λ оператора φ его геометрическая кратность равна алгебраической, $g(\lambda) = m(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все различные собственные значения оператора φ, $g_1, \ldots, g_k$ — их геометрические, а $m_1, \ldots, m_k$ — алгебраические кратности. Базис из собственных векторов φ существует тогда и только тогда, когда $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, что равносильно

$$n := \dim V = \sum_{i=1}^{k} g_i \tag{36}$$

(ср. текст после Теоремы 6.39).

С другой стороны,

$$n = \deg \chi_\varphi(t) \geq \sum_{i=1}^{k} m_i, \tag{37}$$

причем в силу замечания перед этой Теоремой, равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие 1).

Если не выполнено условие 1), то $n > \sum_{i=1}^{k} m_i$, а так как $g_i \leq m_i$ при $i = 1, \ldots, k$, то тем более $n > \sum_{i=1}^{k} g_i$ и значит φ не диагонализируем.

Если не выполнено условие 2), то для какого-то i $g_i < m_i$, откуда $\sum_{i=1}^{k} g_i < \sum_{i=1}^{k} m_i \leq n$, и значит φ опять не диагонализируем.

Таким образом, если φ диагонализируем, то выполнены оба условия 1) и 2)[24].

С другой стороны, если выполнены и 1) и 2), то $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$ и $g_i = m_i$ при $i = 1, \ldots, k$, а значит выполнено (36), что, как мы видели, равносильно диагонализируемости. ∎

Мы видим, что препятствия к диагонализируемости бывают двух типов. Первый тип связан с тем, что поле $\mathbb{K}$ не замкнуто алгебраически и поэтому не все корни характеристического многочлена в нем лежат. Этот случай "лечится" расширением поля (например, поля $\mathbb{R}$ до поля $\mathbb{C}$). Рассмотрим пример такого рода.

Пример 6.45. Рассмотрим оператор $\varphi := \frac{d}{dx}$ на линейной оболочке

$$V := \langle \sin x, \cos x \rangle_{\mathbb{R}} = \{\alpha \sin x + \beta \cos x \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

над полем $\mathbb{R}$. Он имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\sin x,\, \cos x\}$ и его характеристический многочлен $\chi_\varphi(t) = t^2+1$ не имеет вещественных корней (соответственно у φ нет собственных векторов).

Рассмотрим теперь

$$V^{\mathbb{C}} := \langle \sin x, \cos x \rangle_{\mathbb{C}} = \{\alpha \sin x + \beta \cos x \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

— линейную оболочку тех же функций над полем $\mathbb{C}$ с базисом $\{\sin x,\, \cos x\}$. Таким образом, она является двумерным векторным пространством над полем $\mathbb{C}$, и на ней также действует ($\mathbb{C}$-линейный) оператор $\varphi^{\mathbb{C}} = \frac{d}{dx}$, имеющий ту же матрицу в базисе $\{\sin x,\, \cos x\}$. Однако у $\varphi^{\mathbb{C}}$ уже есть собственные значения i и $-i$, являющиеся комплексными корнями многочлена $t^2 + 1$. Это приводит к тому, что у $\varphi^{\mathbb{C}}$ есть собственные векторы e^{ix} (с собственным значением i) и e^{-ix} (с собственным значением $-i$), поскольку $\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ для $\alpha \in \mathbb{C}$. Указанные экспоненты действительно лежат в $V^{\mathbb{C}}$, так как $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ по формуле Эйлера. В базисе $\{e^{ix},\, e^{-ix}\}$ в $V^{\mathbb{C}}$ оператор $\varphi^{\mathbb{C}}$ имеет диагональную матрицу $\operatorname{diag}(i, -i)$. Другими словами, существует матрица $C \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ (а именно, матрица перехода от базиса $\{\cos x, \sin x\}$ к базису $\{e^{ix},\, e^{-ix}\}$ в $V^{\mathbb{C}}$) такая, что матрица

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C$$

диагональна, но не существует такой вещественной матрицы $C \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Другой, более "злостный" тип препятствий к диагонализируемости связан с тем, что геометрическая кратность какого-то собственного значения меньше алгебраической, в этом случае расширение поля не поможет. Пример такой ситуации дает оператор дифференцирования на пространстве многочленов. Конечно, указанные типы препятствий могут встречаться вместе.

Пусть оператор $\varphi\colon V \to V$ имеет матрицу A в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V. Из предыдущего вытекает следующий алгоритм исследования φ на диагонализируемость. Находим характеристический многочлен $\chi_\varphi(t) = \det(A - tE)$ и выясняем, все ли его корни принадлежат полю $\mathbb{K}$. Если ответ "нет", то оператор не диагонализируем, если "да", то для каждого корня λ_i (являющегося собственным значением φ) проверяем, верно ли равенство $g(\lambda_i) = m(\lambda_i)$. Так как

$$g(\lambda_i) := \dim V_{\lambda_i} = n - \operatorname{rk}(A - \lambda_i E),$$

[24] Здесь логически мы пользуемся одним из законов Де Моргана $\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$.

то равенство $g(\lambda_i) = m(\lambda_i)$ равносильно $m(\lambda_i) = n - \mathrm{rk}\,(A - \lambda_i E)$. Если для каждого корня λ_i данное равенство справедливо, то φ диагонализируем, в противном случае — нет.

Пусть $\{v_1^i, \ldots, v_{g(i)}^i\}$ — базисы во всех собственных подпространствах $V_i := V_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, k$ оператора φ. Если φ диагонализируем, то $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, и объединение указанных базисов есть базис в V, состоящий из собственных векторов оператора φ. В нем матрица оператора φ диагональна, точнее $A' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, где кратность вхождения λ_i равна $g(i)$. Причем $A' = C^{-1}AC$, где C — матрица перехода от исходного базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к полученному базису из собственных векторов.

Задача 6.46. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Докажите, что если $\ker\varphi \subsetneq \ker(\varphi^2)$, то φ не диагонализируем.*

Решение. Пусть $u \in \ker\varphi^2 \backslash \ker\varphi$. Очевидно, что подпространство $U := \langle \ker\varphi, u\rangle \subset V$ является φ-инвариантным. Легко проверить, что $\chi_{\varphi|_U}(t) = t^{k+1}$, где $k = \dim(\ker\varphi)$, причем, согласно Предложению 6.41, $\chi_{\varphi|_U}(t) \mid \chi_\varphi(t)$. Таким образом, в этом случае алгебраическая кратность собственного значения 0 оператора φ строго больше геометрической (равной k).

Приведем также другое доказательство. Если оператор диагонализируем, то в некотором базисе его матрица диагональна. Легко видеть, что при возведении диагональной матрицы в квадрат ее диагональные элементы возводятся в квадрат, поэтому ее ранг не меняется, следовательно $\dim\mathrm{im}\,\varphi = \dim\mathrm{im}\,(\varphi^2)$, а значит и $\dim\ker\varphi = \dim\ker(\varphi^2)$. ■

Задача 6.47. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Докажите, что $V = \ker\varphi \oplus \mathrm{im}\,\varphi$ тогда и только тогда, когда $\ker\varphi = \ker(\varphi^2)$.*

Задача 6.48. *Напишите матрицу какого-нибудь линейного оператора φ на трехмерном пространстве в данном базисе, если известно, что вектор с координатами $(1, 2, 3)^T$ лежит и в ядре и в образе φ. Будет ли такой оператор диагонализируемым?*

Задача 6.49. *1) Найдите собственные значения и собственные векторы оператора φ, заданного в некотором базисе матрицей*

$$A = (a_1, \ldots, a_n)^T (b_1, \ldots, b_n) \neq O.$$

2) Найдите критерий диагонализируемости преобразования φ.

Решение. Интерес представляет случай, когда $n > 1$. Заметим, что матрица A имеет указанный вид тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\,A = 1$. Тогда $\dim\ker\varphi = n - 1 > 0$ и $V_0 := \ker\varphi$ — собственное подпространство, отвечающее собственному значению 0.

С другой стороны, $\dim\mathrm{Im}\,\varphi = 1$ и в координатах $\mathrm{Im}\,\varphi = \langle (a_1, \ldots, a_n)^T \rangle$. Если у φ есть собственное значение $\lambda \neq 0$, то соответствующий собственный вектор должен быть пропорционален $(a_1, \ldots, a_n)^T$, значит данный столбец тоже является координатным столбцом собственного вектора, то есть $A(a_1, \ldots, a_n)^T = \lambda(a_1, \ldots, a_n)^T$. С другой стороны, из вида матрицы A получаем

$$A(a_1, \ldots, a_n)^T = ((a_1, \ldots, a_n)^T (b_1, \ldots, b_n))(a_1, \ldots, a_n)^T =$$

$$= (a_1, \dots, a_n)^T((b_1, \dots, b_n)(a_1, \dots, a_n)^T) = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)(a_1, \dots, a_n)^T, \tag{38}$$

откуда $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Таким образом, если $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$, то у φ имеется только одно собственное значение 0, и φ не диагонализируем (поскольку пространство, на котором он действует, в этом случае не есть сумма собственных). Кстати, в этом случае $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker\varphi$.

Если же $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i b_i \neq 0$, то у φ помимо собственного значения 0 есть еще одно собственное значение λ и пространство, на котором действует φ, представляется в виде суммы собственных подпространств V_0 и V_λ, и значит оператор φ диагонализируем.

Можно было бы рассуждать немного по-другому. Если оператор φ ранга 1 диагонализируем, то его единственное ненулевое собственное значение должно равняться $\operatorname{tr}\varphi$ и, значит, в силу инвариантности следа, также и $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, поэтому в этом случае $\sum_{i=1}^n a_i b_i \neq 0$. Вообще для оператора ранга 1 характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ согласно доказательству Следствия 6.42 делится на t^{n-1} и, значит, имеет вид $(-1)^n t^{n-1}(t - \lambda)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда если φ не диагонализируем, то по Теореме 6.44 $\lambda = 0$, а по формуле (33) λ и есть $\operatorname{tr}\varphi$. ∎

Задача 6.50. *Пусть характеристические многочлены матриц A и B равны. Следует ли из этого, что эти матрицы являются матрицами одного и того же оператора в разных базисах (то есть что $B = C^{-1}AC$ для некоторой невырожденной матрицы C)? Тот же вопрос при дополнительном предположении что A и B диагонализируемы.*

6.5 Теорема Гамильтона-Кэли

В предыдущем параграфе мы видели, что не любой оператор диагонализируем даже в случае алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$ (такого как поле комплексных чисел $\mathbb{C}$). Однако в последнем случае всегда можно найти базис, в котором матрица оператора имеет так называемую жорданову нормальную форму. Мы докажем ослабленную версию теоремы о жордановой нормальной форме, а именно существование у оператора матрицы треугольного вида.

Предложение 6.51. *Для оператора φ в конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ существует такой базис в V, в котором матрица φ является верхнетреугольной.*

Доказательство. Докажем Предложение индукцией по $n := \dim V$. Если $n = 1$, то Предложение очевидно. Пусть $n > 1$. Так как поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, у φ существует собственное значение $\lambda \in \mathbb{K}$, то есть $V_\lambda := \ker(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V) \neq 0$. Тогда $\operatorname{Im}(\varphi - \lambda\mathrm{id}_V) \neq V$ и, значит, $\dim(\operatorname{Im}(\varphi - \lambda\mathrm{id}_V)) \leq n - 1$. Пусть $U \subset V$ — какое-либо $n-1$-мерное подпространство в V, содержащее $\operatorname{Im}(\varphi - \lambda\mathrm{id}_V)$. Покажем, что оно φ-инвариантно. Действительно, $\forall\, u \in U$

$$\varphi(u) = \varphi(u) - \lambda u + \lambda u = (\varphi - \lambda\mathrm{id}_V)(u) + \lambda u \in U,$$

поскольку $(\varphi - \lambda\mathrm{id}_V)(u) \in U$ и $\lambda u \in U$.

Так как $\dim U = n - 1 < n$, то по предположению индукции существует базис $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ в U, в котором матрица B оператора $\varphi|_U$ верхнетреугольная. Дополним его произвольным образом до базиса $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$ в V. В нем матрица A оператора φ будет иметь вид $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где C — столбец высоты $n-1$, а d — матрица порядка 1, и A, очевидно, является верхнетреугольной. ∎

Замечание 6.52. Заметим, что геометрический смысл доказанного Предложения состоит в существовании у оператора φ цепочки вложенных φ-инвариантных подпространств[25]

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

таких, что $\dim V_k = k,\ 0 \le k \le n$ (см. Задачу 6.18). С этой точки зрения шаг индукции состоит в доказательстве того, что у оператора φ на n-мерном пространстве V существует $n-1$-мерное инвариантное подпространство V_{n-1}, после этого индуктивное предположение можно применить к оператору $\varphi|_{V_{n-1}}$ на V_{n-1}.

Как обстоят дела с существованием треугольной матрицы у преобразования вещественного векторного пространства? Нетрудно заметить, что необходимым условием является вещественность всех характеристических чисел (корней характеристического многочлена) такого преобразования. Действительно, у треугольной матрицы на главной диагонали стоят характеристические числа. Оказывается, это условие является и достаточным.

Задача 6.53. *Докажите, что если у преобразования φ вещественного пространства V все характеристические числа вещественны, то в V существует базис, в котором φ имеет верхнетреугольную матрицу. (Указание: для доказательства шага индукции воспользуйтесь Предложением 6.41).*

В доказательстве следующей Теоремы нам пригодится следующая Задача.

Пусть φ — оператор на V, $U \subset V$ — его инвариантное подпространство, а $p(t)$ — некоторый многочлен. Тогда можно вычислить многочлен $p(\varphi)$ от оператора φ, это снова будет оператор на V, причем легко убедиться, что U будет его инвариантным подпространством. Затем можно оператор $p(\varphi)$ ограничить на U и получить оператор $p(\varphi)|_U \colon U \to U$. А можно выбрать другой порядок действий: сначала ограничить φ на U, а потом вычислить многочлен $p(\varphi|_U)$, снова получив некоторый оператор на U. Утверждение заключается в том, что $p(\varphi)|_U = p(\varphi|_U)$. Доказательство следует непосредственно из определений.

Задача 6.54. *Пусть $\varphi \colon V \to V$ — линейный оператор, $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Пусть $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ — многочлен. Тогда $p(\varphi)|_U = p(\varphi|_U)$ как линейные операторы на U.*

Если подставить матрицу оператора в его характеристический многочлен, получится нулевая матрица. Говорят, что многочлен $p(t)$ *аннулирует* (квадратную!) матрицу A, если $p(A) = 0$ (справа стоит нулевая матрица того же порядка, что и A). Заметим, что если $p(t)$ аннулирует матрицу A оператора φ в каком-то базисе, то он аннулирует его матрицу и в любом другом базисе, так как $p(C^{-1}AC) = C^{-1}p(A)C$ для любой невырожденной матрицы C. Поэтому корректно говорить об аннулирующем многочлене самого́ оператора.

Теорема 6.55. *Характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ аннулирует оператор φ.*

[25] Такая цепочка называется *флагом*.

Доказательство. Теорему докажем сначала для алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$.

Снова будем пользоваться индукцией по $n := \dim V$. При $n = 1$ Теорема очевидна: $t - \lambda$ аннулирует $\varphi = \lambda \mathrm{id}_V$. Пусть $n > 1$. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V, в котором φ имеет верхнетреугольную матрицу $\begin{pmatrix} \mu_1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & \mu_2 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \mu_3 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix}$. Заметим, что $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — все собственные значения φ, только не обязательно попарно различные. Характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ равен $(t - \mu_1) \ldots (t - \mu_n)$.

Пусть $U := \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \subset V$. Из вида матрицы (конкретно из того, что в последней строчке все элементы кроме μ_n равны нулю) следует, что подпространство $U \subset V$ φ-инвариантно. Легко также видеть, что $\mathrm{Im}\,(\varphi - \mu_n \mathrm{id}_V) \subset U$. Так как оператору $\varphi|_U$ отвечает левый верхний блок порядка $n - 1$ приведенной выше треугольной матрицы, то $\chi_\varphi(t) = \chi_{\varphi|_U}(t)(t - \mu_n)$, и $\chi_\varphi(\varphi)$ является композицией двух операторов, $\varphi - \mu_n \mathrm{id}_V$ и $\chi_{\varphi|_U}(\varphi)$, причем образ первого содержится в U, а ограничение второго на U есть $\chi_{\varphi|_U}(\varphi)|_U = \chi_{\varphi|_U}(\varphi|_U)$ (см. Задачу 6.54), а последний оператор $\chi_{\varphi|_U}(\varphi|_U)$ равен нулю по предположению индукции. Значит $\mathrm{Im}\,(\varphi - \mu_n \mathrm{id}_V) \subset \ker(\chi_{\varphi|_U}(\varphi))$, поэтому $\chi_\varphi(\varphi) = \chi_{\varphi|_U}(\varphi) \circ (\varphi - \mu_n \mathrm{id}_V) = 0$, и шаг индукции тем самым доказан.

Если поле $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым (например $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), то воспользуемся тем, что его всегда можно вложить в алгебраически замкнутое поле $\mathbb{L}$. Например, вещественную матрицу A можно рассматривать также как комплексную, и для нее Теорема верна (то есть $\chi_A(A) = 0$). Но характеристический многочлен $\chi_A(t)$ не зависит от того, рассматриваем мы A как вещественную или комплексную матрицу, а значит Теорема верна и для исходного поля $\mathbb{K}$. ■

Задача 6.56. *Докажите, что если оператор φ невырожден, то его обратный φ^{-1} является многочленом от φ.*

Многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, аннулирующий данный оператор φ, называется *минимальным многочленом* оператора φ и обозначается $\mu_\varphi(t)$.

Используя алгоритм Евклида (деления с остатком) легко показать, что $\mu_\varphi(t) \mid \chi_\varphi(t)$ (более точно, минимальный многочлен делит любой аннулирующий).

Заметим, что минимальный многочлен может как совпадать (с точностью до множителя ± 1) с характеристическим, так и отличаться от него. Например, для тождественного оператора id_V на n-мерном пространстве V характеристический многочлен равен $\pm(t-1)^n$, в то время как минимальный равен $t - 1$. Еще пример: характеристические многочлены нулевого оператора и оператора дифференцирования на пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ равны $\pm t^{n+1}$, в то время как минимальный в первом случае t, а во втором — совпадает с характеристическим.

Последний пример подсказывает, что наличие кратных корней у минимального многочлена — препятствие к диагонализируемости. Это действительно так.

Предложение 6.57. *Оператор φ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ диагонализируем тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен $\mu_\varphi(t)$ не имеет кратных корней.*

Доказательство. Пусть $\mu_\varphi(t) = (t - \lambda)^m g(t)$, где $m > 1$. Тогда существует $v \in V$ такой, что

$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)^2(v) = 0$, но $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) \neq 0$. Согласно Задаче 6.46 оператор $\varphi - \lambda\mathrm{id}_V$ тогда не диагонализируем, а значит и φ не диагонализируем.

Обратно, пусть $\mu_\varphi(t) = (t - \lambda_1)\dots(t - \lambda_k)$, где λ_i попарно различны. Имеем

$$V = \ker\left((\varphi - \lambda_1\mathrm{id}_V)\dots(\varphi - \lambda_k\mathrm{id}_V)\right).$$

Пусть

$$g_i := \dim\ker\left(\varphi - \lambda_i\mathrm{id}_V\right) = \dim V_i$$

— размерности собственных подпространств. Согласно Задаче 5.79,

$$\mathrm{rk}\left((\varphi - \lambda_1\mathrm{id}_V)(\varphi - \lambda_2\mathrm{id}_V)\right) \geq n - g_1 + n - g_2 - n = n - g_1 - g_2,$$

$$\mathrm{rk}\left((\varphi - \lambda_1\mathrm{id}_V)(\varphi - \lambda_2\mathrm{id}_V)(\varphi - \lambda_3\mathrm{id}_V)\right) \geq n - g_1 - g_2 - g_3,$$

наконец,

$$\mathrm{rk}\left((\varphi - \lambda_1\mathrm{id}_V)\dots(\varphi - \lambda_k\mathrm{id}_V)\right) \geq n - g_1 - \dots - g_k,$$

откуда $n = g_1 + \dots + g_k$ и значит $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$. ■

Заметим, что если потребовать, чтобы корни $\mu_\varphi(t)$ лежали в $\mathbb{K}$, то результат предыдущей Задачи верен без предположения об алгебраической замкнутости $\mathbb{K}$.

Задача 6.58. *Пусть B, D — квадратные матрицы, причем матрица $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ (для некоторой матрицы C) диагонализируема. Докажите, что тогда матрицы B, D диагонализируемы. Приведите пример, когда обратное неверно.*

Решение. Легко видеть, что $\mu_A(t)$ — аннулирующий многочлен для B и D, откуда $\mu_B, \mu_D \mid \mu_A$. Так как A диагонализируема, то по Предложению 6.57 многочлен $\mu_A(t)$ не имеет кратных корней, а значит то же верно и для μ_B, μ_D, следовательно все по тому же Предложению B и D диагонализируемы.

Обратное, конечно, неверно: матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ дает контрпример. ■

Задача 6.59. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ такой, что $\varphi^k = \mathrm{id}_V$ для некоторого натурального k. Докажите, что φ диагонализируем.*

7 Жорданова нормальная форма

Ни один курс линейной алгебры не может считаться сколько-нибудь полным без классификации всех линейных операторов на конечномерных пространствах хотя бы в простейшем случае алгебраически замкнутого поля.

Мы видели, что препятствия к диагонализируемости операторов над полем $\mathbb{K}$ бывают двух видов: во-первых, корни характеристического многочлена могут не принадлежать полю $\mathbb{K}$, во-вторых, даже если корень лежит в $\mathbb{K}$, его геометрическая кратность может оказаться строго меньше алгебраической. В первом случае проблема решается переходом к расширению поля $\mathbb{K}$, содержащему все корни характеристического многочлена, в случае же препятствий второго типа оператор останется недиагонализируемым даже после расширения поля.

Так как не все линейные операторы диагонализируемы, нужно определить более общий чем диагональный "простейший вид" матриц линейных операторов. Диагональный вид возникает тогда, когда все пространство представляется в виде прямой суммы инвариантных одномерных (порожденных собственными векторами) подпространств. В общем случае одномерные инвариантные подпространства нужно заменить более общими, отвечающим так называемым жордановым цепочкам, причем жорданова цепочка длины 1 состоит из одного собственного вектора.

Более подробно, рассмотрим оператор $\varphi\colon V \to V$ на конечномерном пространстве V, и пусть λ — его собственное значение. Рассмотрим оператор $\psi := \varphi - \lambda \mathrm{id}_V$ и пусть $0 \neq e \in V$ — такой вектор, что для некоторого $m \geq 1$ $\psi^m(e) = 0$, но $\psi^{m-1}(e) \neq 0$ (например, собственный вектор с собственным значением λ удовлетворяет этому условию при $m = 1$). Тогда легко проверяется, что векторы $\{\psi^{m-1}(e), \dots, \psi(e), e\}$ линейно независимы и их линейная оболочка $\langle \psi^{m-1}(e), \dots, \psi(e), e\rangle$ φ-инвариантна. Система векторов $\{\psi^{m-1}(e), \dots, \psi(e), e\}$ и называется *жордановой цепочкой* для оператора φ, отвечающей собственному значению λ, так как применение оператора $\psi = \varphi - \lambda \mathrm{id}_V$ сдвигает векторы цепочки влево, переводя $\psi^{m-1}(e)$ в 0[26]. Матрица ограничения φ на $\langle \psi^{m-1}(e), \dots, \psi(e), e\rangle$ в базисе $\{\psi^{m-1}(e), \dots, \psi(e), e\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

и называется *жордановой клеткой* порядка m с собственным значением λ.

Далее мы докажем, что если характеристический многочлен оператора φ раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$, то в V существует базис, состоящий из жордановых цепочек оператора φ (отвечающих разным его собственным значениям). Такой базис называется жордановым базисом для оператора φ. В этом базисе матрица φ имеет блочно-диагональный вид, с жордановыми клетками в качестве блоков. Такая матрица и называется *жордановой нормальной формой* (кратко ЖНФ) оператора φ. Заметим, что диагональный вид является частным случаем ЖНФ, а именно когда все жордановы клетки имеют порядок 1 (соответственно все жордановы цепочки длины 1 и, значит, состоят из собственных векторов). Более того, ЖНФ данного оператора определена однозначно с точностью до перестановки клеток в блочно-диагональном виде. То есть число клеток данного порядка с собственным значением λ в ЖНФ φ не зависит от выбора жорданова базиса.

Подобно тому, как собственные векторы, отвечающие одному собственному значению λ, объединяются в собственное подпространство, жордановы цепочки, отвечающие конкретному собственному значению λ, объединяются в так называемое корневое подпространство. Причем все

[26] таким образом, система $\{\psi^{m-1}(e), \dots, \psi(e), e\}$ также будет жордановой цепочкой для оператора ψ, отвечающей собственному значению 0.

пространство, на котором действует оператор, при условии, что его характеристический многочлен раскладывается над полем $\mathbb{K}$ на линейные множители, не всегда является суммой собственных подпространств, но всегда суммой корневых.

Заметим, что в данном тексте мы не планируем излагать алгоритм практического нахождения жорданова базиса, отсылая читателя к решебнику [7].

7.1 Корневые подпространства

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение 7.1. Вектор e называется *корневым вектором* оператора φ, отвечающим скаляру $\lambda \in \mathbb{K}$, если существует такое натуральное N, что $(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^N e = 0$. Наименьшее из таких N называется *высотой* корневого вектора e и обозначается $\operatorname{ht} e$.

Очевидно, что корневые векторы высоты 1 — в точности собственные векторы. Удобно считать нулевой вектор корневым вектором высоты 0 (отвечающим любому $\lambda \in \mathbb{K}$).

Пример 7.2. Для оператора дифференцирования на пространстве $V = C^\infty(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций собственные векторы с собственным значением λ — это ненулевые функции, пропорциональные $e^{\lambda x}$, а корневые векторы — это функции вида $p(x)e^{\lambda x}$, где $p(x)$ — многочлен. При этом высота такого корневого вектора равна $\deg p + 1$. В частности, корневые векторы, отвечающие $\lambda = 0$ — суть в точности многочлены.

Легко проверить, что множество всех корневых векторов, отвечающих данному λ, образуют подпространство $V^\lambda \subset V$, называемое *корневым подпространством* оператора φ, отвечающим λ. Если e — корневой вектор высоты $m > 0$, отвечающий λ, то $(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)e$ — корневой вектор высоты $m - 1$, отвечающий тому же λ. Отсюда следует, что корневое подпространство V^λ инвариантно относительно $(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$, а значит, и относительно φ.

Заметим, что если e — корневой вектор оператора φ высоты $\operatorname{ht} e = m > 0$, отвечающий λ, то $(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m-1} e$ — собственный вектор φ с собственным значением λ. Таким образом, ненулевые корневые подпространства отвечают тем скалярам, которые являются собственными значениями, и в этом случае $V_\lambda \subseteq V^\lambda$.

Напомним, что оператор $\varphi\colon V \to V$ называется *нильпотентным*, если существует натуральное N такое, что $\varphi^N = 0$. Наименьшее среди таких N называется *высотой* оператора φ и обозначается $\operatorname{ht} \varphi$. Например, для оператора $\varphi = \frac{d}{dx}\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ его высота $\operatorname{ht}\left(\frac{d}{dx}\right) = \dim \mathbb{R}[x]_n = n+1$. Ясно, что в общем случае $\operatorname{ht} \varphi \leq \dim V$.

Лемма 7.3. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — нильпотентный оператор, $\dim V = n$. Тогда $\chi_\varphi(t) = t^n$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{ht} \varphi = m$. Тогда имеем цепочку вложенных подпространств

$$0 \subsetneq \ker \varphi \subsetneq \ker \varphi^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \ker \varphi^{m-1} \subsetneq \ker \varphi^m = V.$$

(В самом деле, если для некоторого $0 \leq k \leq m-1$ имеет место равенство $\ker \varphi^k = \ker \varphi^{k+1}$, то $\ker \varphi^{k+1} = \ker \varphi^{k+2} = \ldots$, что при $\ker \varphi^k \neq 0$ противоречит нильпотентности φ, а при $\ker \varphi^k = 0$ — определению высоты нильпотентного оператора). Выберем согласованный с этой цепочкой базис в V. Другими словами, выберем базис в $\ker\varphi$, затем дополним его до базиса в $\ker\varphi^2$ и т.д. В таком базисе матрица φ будет верхнетреугольной с нулями на главной диагонали. Отсюда следует требуемое. ■

Пусть $V^\lambda \neq 0$ — корневое подпространство оператора φ, отвечающее его собственному значению λ. По определению корневого подпространства оператор $(\varphi-\lambda\mathrm{id}_V)|_{V^\lambda}$ нильпотентен, поэтому в некотором базисе V^λ он имеет верхнюю треугольную матрицу с нулями на главной диагонали, а значит $\varphi|_{V^\lambda}$ в том же базисе имеет верхнюю треугольную матрицу с λ на главной диагонали. Поэтому если $d := \dim V^\lambda$, то $\chi_{\varphi|_{V^\lambda}}(t) = (t-\lambda)^d$; в частности, $d \leq m$, где m — кратность корня λ характеристического многочлена φ (далее мы покажем, что на самом деле $d = m$). Если $\mu \neq \lambda$, то оператор $(\varphi - \mu\mathrm{id}_V)|_{V^\lambda}$ невырожден, так как в некотором базисе он имеет верхнюю треугольную матрицу с $\lambda - \mu \neq 0$ на главной диагонали.

Лемма 7.4. Пусть m — кратность корня λ многочлена $\chi_\varphi(t)$. Тогда $V^\lambda = \ker\left((\varphi - \lambda\mathrm{id}_V)^m\right)$.

Доказательство. Очевидно, что $\ker\left((\varphi-\lambda\mathrm{id}_V)^m\right) \subset V^\lambda$. Обратное включение эквивалентно тому, что высота любого вектора $e \in V^\lambda$ не превосходит m. Приведем два доказательства этого факта. Во-первых, выше мы видели, что $d = \dim V^\lambda \leq m$ и $\chi_{\varphi|_{V^\lambda}}(t) = (t-\lambda)^d$, поэтому по теореме Гамильтона-Кэли $(\varphi|_{V^\lambda} - \lambda\mathrm{id}_{V^\lambda})^d = (\varphi - \lambda\mathrm{id}_V)^d|_{V^\lambda} = 0$, откуда $V^\lambda \subset \ker\left(\varphi - \lambda\mathrm{id}_V\right)$.

Второе доказательство. Предположим противное: пусть $\mathrm{ht}\, e = N > m$. Пусть для краткости ψ обозначает оператор $(\varphi - \lambda\mathrm{id}_V)$. Тогда векторы $\{e, \psi(e), \ldots, \psi^{N-1}(e)\}$ линейно независимы. Действительно, если

$$\lambda_0 e + \lambda_1\psi(e) + \ldots + \lambda_{N-1}\psi^{N-1}(e) = 0$$

— произвольная линейная зависимость, то, применяя к ней ψ^{N-1} и используя $\psi^N(e) = 0$, получим $\lambda_0 = 0$; с учетом этого, применяя к исходной зависимости ψ^{N-2}, получим $\lambda_1 = 0$ и т.д.

Очевидно, что $\langle e, \psi(e), \ldots, \psi^{N-1}(e)\rangle \subset V^\lambda$, откуда $\dim V^\lambda \geq N > m$, что противоречит тому, что m — максимальная степень множителя $(t-\lambda)$, на которую делится $\chi_\varphi(t)$. ■

Пусть $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}\ldots(t-\lambda_s)^{m_s}$, причем все $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Обозначим для краткости $\psi_i := (\varphi - \lambda_i\mathrm{id}_V)^{m_i}$. Операторы ψ_i, $i = 1, \ldots, s$ попарно коммутируют, и по Теореме Гамильтона-Кэли $V = \ker(\psi_1\ldots\psi_s)$. Кроме того, по предыдущей Лемме $V^{\lambda_i} = \ker\psi_i$. Отсюда, в частности, следует, что подпространство $V^{\lambda_i} \subset V$ инвариантно для всех ψ_j (см. Предложение 6.11). Мы также знаем (см. предшествующий Лемме абзац), что $\psi_j|_{V^{\lambda_i}}$ — изоморфизм при $j \neq i$.

Предложение 7.5. *Корневые подпространства, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $V^{\lambda_1}, \ldots, V^{\lambda_s}$ — набор корневых подпространств оператора φ. Воспользуемся индукцией по s. При $s = 1$ требуемое утверждение очевидно; предположим что $s > 1$. Пусть $v_1 + \ldots + v_{s-1} + v_s = 0$, где $v_i \in V^{\lambda_i}$. Применяя к линейной зависимости ψ_s, получим $\psi_s(v_1) + \ldots + \psi_s(v_{s-1}) = 0$. По предположению индукции $\psi_s(v_i) = 0,\ i = 1, \ldots, s-1$. Но так как $\psi_s|_{V^{\lambda_i}}$ — изоморфизм при $i \neq s$, то и сами $v_i = 0$ при $i = 1, \ldots, s-1$, а значит и $v_s = 0$. ■

Предложение 7.6. *Предположим, что характеристический многочлен оператора φ раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$. Тогда V является прямой суммой корневых подпространств.*

Доказательство. Будем использовать введенные выше обозначения. Пусть $v \in V = \ker(\psi_s \dots \psi_1)$ — произвольный вектор. Тогда $(\psi_{s-1} \dots \psi_1)(v) \in \ker \psi_s = V^{\lambda_s}$, причем $(\psi_{s-1} \dots \psi_1)|_{V^{\lambda_s}}$ — изоморфизм. Поэтому существует $v_s \in V^{\lambda_s}$ такой, что $(\psi_{s-1} \dots \psi_1)(v) = (\psi_{s-1} \dots \psi_1)(v_s)$. Тогда $(\psi_{s-1} \dots \psi_1)(v - v_s) = 0$, откуда $(\psi_{s-2} \dots \psi_1)(v - v_s) \in \ker \psi_{s-1}$. Так как $(\psi_{s-2} \dots \psi_1)|_{V^{\lambda_{s-1}}}$ — изоморфизм, то найдется $v_{s-1} \in V^{\lambda_{s-1}}$ такой, что $(\psi_{s-2} \dots \psi_1)(v - v_s) = (\psi_{s-2} \dots \psi_1)(v_{s-1})$. Тогда $(\psi_{s-3} \dots \psi_1)(v - v_s - v_{s-1}) \in V^{\lambda_{s-2}}$. Продолжая так действовать, в конце концов мы придем к $\psi_1(v - v_s - \ldots - v_3 - v_2) = 0$, где $v_i \in V^{\lambda_i}$, откуда $v = v_1 + \ldots + v_s$. Значит, $V = V^{\lambda_1} + \ldots + V^{\lambda_s}$, а из предыдущего Предложения мы знаем, что сумма справа — прямая. ∎

Следствие 7.7. *$\dim V^{\lambda_i} = m_i$, где m_i — кратность корня λ_i многочлена $\chi_\varphi(t)$.*

Доказательство. Для $i = 1, \dots, s$ имеем $\dim V^{\lambda_i} \leq m_i$, но $\sum_{i=1}^s \dim V^{\lambda_i} = n = \sum_{i=1}^s m_i$. ∎

Таким образом, в случае, когда характеристический многочлен оператора φ раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$ (что, в частности, всегда верно для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), то все пространство представляется в виде прямой суммы корневых подпространств, $V = V^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_s}$, которые φ-инвариантны. Заметим, что корневое подпространство V^λ совпадает с собственным V_λ тогда и только тогда, когда геометрическая кратность собственного значения λ равна его алгебраической кратности, в случае же строгого неравенства имеет место строгое включение $V_\lambda \subsetneq V^\lambda$. Заметим еще, что в последнем случае ограничение φ на V^λ не диагонализируемо.

Из инвариантности корневых подпространств следует, что в базисе пространства V, полученном объединением базисов во всех корневых подпространствах, матрица оператора φ будет иметь блочно-диагональный вид, блоки которого являются матрицами ограничения φ на корневые подпространства V^{λ_i}. Поэтому для исследования оператора достаточно изучить его ограничение на одно корневое подпространство.

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор, для которого $V = V^\lambda$ — корневое (под)пространство, отвечающее некоторому скаляру $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда $\psi := \varphi - \lambda \mathrm{id}_V \colon V \to V$ — нильпотентный оператор. Если A — матрица ψ в некотором базисе пространства V, то матрицей φ в том же базисе будет $A + \lambda E$. Поэтому задача свелась к изучению нильпотентного оператора.

7.2 Случай нильпотентного оператора

Пусть V — n-мерное векторное пространство. Примером нильпотентного оператора φ на V является оператор, который в некотором базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ действует, сдвигая его векторы влево и переводя e_1 в 0, то есть $\varphi(e_i) = e_{i-1}$ при $i \geq 2$ и $\varphi(e_1) = 0$. Например, так задается действие оператора $\frac{d}{dx}$ на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{n-1}$ в базисе $\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}$. Напомним, что такая система векторов называется жордановой цепочкой. Читателю предлагается написать соответствующую матрицу; она называется *нильпотентной жордановой клеткой* (или жордановой клеткой с собственным значением 0) *порядка n*.

Задача 7.8. *Найдите минимальный и характеристический многочлены нильпотентной жордановой клетки порядка n.*

Заметим, что не для любого нильпотентного оператора существует базис, состоящий из одной жордановой цепочки: сразу видно необходимое (как следует из дальнейшего, также являющееся достаточным) условие для этого: $\operatorname{rk} \varphi = \dim V - 1$.

Однако для любого нильпотентного оператора φ верен следующий результат: пространство V является прямой суммой φ-инвариантных подпространств, в каждом из которых базис — жорданова цепочка. Рассмотрим пример.

Пример 7.9. Пусть $\varphi := \frac{d^3}{dx^3}\colon \mathbb{R}[x]_{12} \to \mathbb{R}[x]_{12}$. Обозначим $e_k := \frac{x^k}{k!},\ k = 0, \dots, 12$. Тогда действие φ на базисных векторах записывается в виде жордановых цепочек

$$\begin{array}{ccccccccccc} e_{12} & \mapsto & e_9 & \mapsto & e_6 & \mapsto & e_3 & \mapsto & e_0 & \mapsto & 0 \\ & & e_{10} & \mapsto & e_7 & \mapsto & e_4 & \mapsto & e_1 & \mapsto & 0 \\ & & e_{11} & \mapsto & e_8 & \mapsto & e_5 & \mapsto & e_2 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Заметим, что k-й столбец этой таблицы, если считать справа, состоит из корневых векторов высоты $k-1$. Ясно, что линейная оболочка векторов из каждой жордановой цепочки φ-инвариантна, и φ в базисе $\{e_0, e_3, e_6, e_9, e_{12}, e_2, e_5, e_8, e_{11}, e_1, e_4, e_7, e_{10}\}$ имеет блочно-диагональную матрицу, блоки которой являются нильпотентными жордановыми клетками порядков $5, 4, 4$.

Напомним, что базис, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональный вид с жордановыми клетками в качестве блоков, называется *жордановым базисом.*

Предложение 7.10. *У нильпотентного оператора φ на конечномерном пространстве V существует жорданов базис.*

Доказательство. Нам нужно доказать следующее. Если $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V такой, что $\varphi^m = 0$ для некоторого $m \geq 1$, то в V существует такой набор векторов $v_1, \dots, v_r$ и отвечающий им набор натуральных чисел $k_1, \dots, k_r$, что система векторов

$$\varphi^{k_1-1}(v_1),\ \varphi^{k_1-2}(v_1),\ \dots, \varphi(v_1),\ v_1,\ \dots, \varphi^{k_r-1}(v_r),\ \varphi^{k_r-2}(v_r),\ \dots,\ \varphi(v_r),\ v_r$$

где $\varphi^{k_i}(v_i) = 0$ для всех $1 \leq i \leq r$, является базисом в V[27]. Легко видеть, что это — жорданов базис для φ, и обратно, любой жорданов базис имеет такой вид.

Для доказательства Предложения воспользуемся индукцией по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то $\varphi = 0$ и требуемый результат, очевидно, верен. Для доказательства шага индукции предположим, что $\dim V \geq 2$. Ясно, что $\varphi(V) := \operatorname{im} \varphi \subset V$, но при этом $\varphi(V) \neq V$, ибо тогда $\varphi^m(V) = \varphi^{m-1}(V) = \dots = \varphi(V) = V$, что противоречит равенству $\varphi^m = 0$. Кроме того, в случае $\varphi = 0$ требуемый результат тривиален. Таким образом, мы можем предположить, что

$$0 \subsetneq \varphi(V) \subsetneq V.$$

По предположению индукции (примененному к пространству $U := \varphi(V)$ и ограничению на него оператора φ) в U существует набор векторов $u_1, \dots, u_s$ такой, что

$$u_1, \varphi(u_1), \dots, \varphi^{l_1-1}(u_1),\ \dots, u_s, \varphi(u_s), \dots, \varphi^{l_s-1}(u_s) \tag{39}$$

— базис в U и $\varphi^{l_i}(u_i) = 0$ для $1 \leq i \leq s$.

[27]Заметим, что высота φ тогда равна $\max_{1\leq i\leq r}(k_i)$.

Для $1 \leq i \leq s$ выберем такие векторы $v_i \in V$, что $\varphi(v_i) = u_i$ (такие v_i существуют, поскольку $u_i \in \varphi(V)$). Подпространство $\ker\varphi \subset V$ содержит линейно независимые векторы $\varphi^{l_1-1}(u_1), \ldots, \varphi^{l_s-1}(u_s)$. Дополним эти векторы до базиса в $\ker\varphi$ векторами $w_1, \ldots, w_p$. Мы докажем, что

$$v_1, \varphi(v_1), \ldots, \varphi^{l_1}(v_1), \ \ldots\ , v_s, \varphi(v_s), \ldots, \varphi^{l_s}(v_s), w_1, \ldots, w_p \tag{40}$$

— требуемый (с точностью до перестановки векторов) базис в V.

Для доказательства линейной независимости системы (40) применим φ к произвольной линейной комбинации указанных векторов, равной нулю. Тогда в силу линейной независимости системы (39) получим, что коэффициенты перед векторами

$$v_1, \ldots, \varphi^{l_1-1}(v_1), \ \ldots\ , v_s, \ldots, \varphi^{l_s-1}(v_s)$$

равны нулю. Теперь линейная независимость (40) следует из того, что

$$\varphi^{l_1}(v_1), \ldots, \varphi^{l_s}(v_s), w_1, \ldots, w_p$$

— базис в $\ker\varphi$.

Проверим теперь, что число векторов в (40) равно $\dim V$. Действительно, из (39) $\dim\operatorname{im}\varphi = l_1 + \ldots + l_s$; кроме того, $\dim\ker\varphi = = s + p$. Тогда

$$\dim V = \dim\operatorname{im}\varphi + \dim\ker\varphi = (l_1 + 1) \ldots + (l_s + 1) + p,$$

а это — в точности число элементов в системе (40). ■

Как найти ЖНФ нильпотентного оператора φ? Легко видеть, что число жордановых клеток (включая клетки порядка 1) равно размерности ядра φ (то есть собственного подпространства, отвечающего собственному значению 0). Максимальный размер жордановой клетки равен высоте оператора. Далее полезны следующие соображения. Рассмотрим нильпотентную клетку J_k порядка k. Ранги $J_k^0 = E,\ J_k,\ J_k^2,\ \ldots\ , J_k^{k-1},\ J_k^k = 0$ образуют строго убывающую последовательность $k,\ k-1,\ k-2,\ \ldots\ , 1,\ 0$. Так как ранг матрицы оператора не зависит от базиса, то для нахождения ЖНФ достаточно знать ранги степеней матрицы A, где A — матрица φ в произвольном базисе.

Поясним сказанное на примере оператора из Примера 7.9. Размерность его ядра равна 3 (оно равно $\mathbb{R}[x]_2 \subset \mathbb{R}[x]_{12}$), значит в ЖНФ имеются 3 жордановы клетки. Размерность ядра $\varphi^2 = \frac{d^6}{dx^6}$ равна 6, значит все жордановы клетки имеют порядок больше 1 (если бы были клетки порядка 1, то так как они уже нулевые, то при возведении в квадрат их ранг не меняется, и в этом случае падение ранга всего оператора было бы меньше чем на 3). Размерность ядра $\varphi^3 = \frac{d^9}{dx^9}$ равна 9, значит все жордановы клетки имеют порядок больше 2. Размерность ядра $\varphi^4 = \frac{d^{12}}{dx^{12}}$ равна 12, значит все жордановы клетки имеют порядок больше 3. Размерность ядра $\varphi^5 = 0$ равна 13, значит только одна жорданова клетка имеет порядок больше 4, равный 5. Значит, размеры клеток в ЖНФ $5, 4, 4$ и $5 + 4 + 4 = 13 = \dim V$.

Задача 7.11. *Характеристический и минимальный многочлены оператора φ равны соответственно t^5 и t^2. Опишите возможные ЖНФ оператора φ.*

7.3 Основная теорема

Теорема 7.12. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. Предположим, что его характеристический многочлен раскладывается на линейные множители над $\mathbb{K}$. Тогда в V существует базис, состоящий из жордановых цепочек оператора φ, отвечающих его собственным значениям (то есть жорданов базис для φ). Для каждого собственного значения λ набор длин соответствующих ему жордановых цепочек не зависит от выбора жорданова базиса.*

Приведем эквивалентную переформулировку Теоремы в терминах матриц.

Теорема 7.13. *В условиях предыдущей Теоремы для оператора существует базис, в котором он имеет жорданову матрицу (то есть блочно-диагональную матрицу, блоками которой являются жордановы клетки). Набор порядков жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ, не зависит от выбора такого базиса.*

Доказательство. Доказательство существования жорданова базиса следует из предыдущего. Напомним его основные моменты. В условии Теоремы все пространство V представляется в виде прямой суммы корневых подпространств оператора φ, которые к тому же φ-инвариантны. Значит, достаточно доказать существование базиса из жордановых цепочек для отдельного корневого подпространства V^{λ}, поскольку тогда базис в V можно получить как объединение базисов в корневых подпространствах. Оператор $\psi = (\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$ на V^{λ} нильпотентен, и для него существование базиса из жордановых цепочек доказано в Предложении 7.10. При этом жордановы цепочки ψ, отвечающие его собственному значению 0 — в точности жордановы цепочки оператора φ, отвечающие собственному значению λ.

Доказательство единственности проведем для матричной формулировки. Заметим, что число и порядок жордановых клеток с собственным значением λ однозначно определяются набором рангов степеней оператора $\varphi - \lambda \mathrm{id}_V$. А именно, число таких клеток равно $\dim V - \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$. Число клеток порядка больше 1 равно $\mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V) - \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^2$, число клеток порядка больше 2 равно $\mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^2 - \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^3$ и т.д. Если $\mathrm{ht}\,((\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)|_{V^{\lambda}}) = m$, то число клеток максимального порядка m равно $\mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m-1} - \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m}$, далее $\mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m} = \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)^{m+1} = \ldots = \dim V - \dim V^{\lambda}$. ■

В частности, для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ условие о разложимости на линейные множители выполнено для любого многочлена, значит любой оператор в комплексном линейном пространстве в некотором базисе задается жордановой матрицей.

Заметим, что размерность собственного подпространства оператора φ, отвечающего собственному значению λ, равна числу жордановых цепочек с данным собственным значением в жордановом базисе (числу жордановых клеток с собственным значением λ в ЖНФ), а размерность соответствующего корневого подпространства равна сумме длин жордановых цепочек с собственным значением λ в жордановом базисе (сумме порядков жордановых клеток с собственным значением λ в ЖНФ).

На множестве всех матриц из $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ рассмотрим следующее отношение эквивалентности. Две матрицы A, $A' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ назовем эквивалентными, если существует такая невырожденная матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, что $A' = C^{-1}AC$. То есть две матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же оператора в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{C}$ в разных базисах. Из доказанной Теоремы следует, что в каждом классе эквивалентности есть жорданова матрица, причем две жордановы матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда одна из другой получается перестановкой жордановых клеток.

Следующая задача обобщает Предложение 6.57.

Задача 7.14. *Пусть $\mu_\varphi(t)$ — минимальный многочлен оператора φ. Докажите, что кратность его корня λ равна максимальному порядку жордановой клетки с собственным значением λ.*

Задача 7.15. *Пусть для оператора φ известны его характеристический $\chi_\varphi(t) = t^4(t-1)^3$ и минимальный $\mu_\varphi(t) = t^2(t-1)^2$ многочлены. Что по этой информации можно сказать про ЖНФ оператора φ, а также про размерности его собственных и корневых подпространств?*

Задача 7.16. *Оператор φ удовлетворяет тождеству $\varphi^5 = \varphi^3$. Что можно сказать про его ЖНФ?*

Задача 7.17. *Найдите жорданову форму оператора $D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ на пространстве $\mathbb{R}[x, y]_4$ многочленов степени не выше 4 от переменных x, y.*

Замечание 7.18. В заключении данного раздела упомянем об одном недостатке жордановой нормальной формы. Допустим, у нас есть семейство комплексных матриц данного порядка, непрерывно зависящее от каких-то параметров. Каждую индивидуальную матрицу семейства можно привести к жордановой форме некоторой заменой базиса, но, вообще говоря, для матриц всего семейства нельзя добиться того, чтобы жорданова форма и приводящая к ней замена базиса непрерывно зависели от параметров.

Вот простейший пример описанной ситуации. Рассмотрим семейство матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, непрерывно зависящих от параметра ε. При $\varepsilon = 0$ ЖНФ матрицы семейства есть $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, в то время как при $\varepsilon \neq 0$ — $\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}$.

7.4 Применение ЖНФ к линейным дифференциальным уравнениям

Предложение 7.19. *Пусть L — конечномерное пространство комплекснозначных дифференцируемых функций вещественной переменной x, обладающее тем свойством, что если $f \in L$, то $\frac{df}{dx} \in L$. Тогда существуют такие комплексные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ и целые числа $r_1, \ldots, r_s \geq 1$, что $L = \oplus L_i$, где L_i — пространство функций вида $e^{\lambda_i x}P(x)$, где $P(x)$ — произвольный многочлен степени $\leq r_i - 1$.*

Доказательство. Так как пространство L инвариантно относительно $\frac{d}{dx}$, то этот оператор можно ограничить на L (причем поскольку $\frac{d}{dx}$ к функциям из L можно применять неограниченное число раз, все функции из L бесконечно дифференцируемы). Идея заключается в том, чтобы рассмотреть жорданов базис для оператора $\frac{d}{dx}$ на L и последовательно вычислить вид входящих в него функций, начиная с собственных векторов, затем корневых векторов высоты 2 и т.д.

А именно, предположим что линейный оператор $\frac{d}{dx}$ на комплексном пространстве L имеет жорданову форму с клетками, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ размеров $r_1, \ldots,$ r_s и рассмотрим соответствующие жордановы цепочки

$$\begin{array}{ccccccccc}
v^1_{r_1} & \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_1 \mathrm{id}} & v^1_{r_1-1} & \to & \ldots & \to & v^1_1 & \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_1 \mathrm{id}} & 0 \\
v^2_{r_2} & \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_2 \mathrm{id}} & v^2_{r_2-1} & \to & \ldots & \to & v^2_1 & \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_2 \mathrm{id}} & 0 \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
v^s_{r_s} & \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_s \mathrm{id}} & v^s_{r_s-1} & \to & \ldots & \to & v^s_1 & \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_s \mathrm{id}} & 0
\end{array}$$

Тогда можно положить $v^i_1 = e^{\lambda_i x}$. Действительно, это — ненулевое (поскольку собственный вектор) решение дифференциального уравнения $\frac{df}{dx} = \lambda_i f$, которое определено однозначно с точностью до умножения на ненулевое число. (В самом деле, если f — решение указанного уравнения, то дифференцирование выражения $fe^{-\lambda_i x}$ дает 0, то есть это — некоторая константа). В частности, мы видим, что $\lambda_i,\ 1 \le i \le s$, попарно различны, то есть каждому собственному значению отвечает ровно одна жорданова клетка. В следующей строчке стоят решения уравнений $\frac{df}{dx} - \lambda_i f = e^{\lambda_i x}$ (для тех i, для которых $r_i > 1$). Произвольное решение линейного неоднородного уравнения является суммой его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Легко видеть, что в качестве частного решения подходит $\frac{x}{1!}e^{\lambda_i x}$. Поэтому положим $v^i_2 = \frac{x}{1!}e^{\lambda_i x}$ для i таких, что $r_i > 1$.

Далее положим по индукции $v^i_k = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_i x}$ при $1 \le k < r_i$. Тогда $\frac{x^k}{k!}e^{\lambda_i x}$ является решением уравнения $\frac{df}{dx} - \lambda_i f = v^i_k$, что доказывает индуктивное предположение. Очевидно, что линейная оболочка векторов $v^i_1, \ldots, v^i_{r_i}$ совпадает с пространством, состоящим из всех функций $P(x)e^{\lambda_i x}$, где $\deg P(x) \le r_i - 1$. ■

Доказанное Предложение объясняет роль квазимногочленов (то есть функций вида $P(x)e^{\lambda x}$, где $P(x)$ — многочлен) в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, если $y(x)$ — функция вещественной переменной x, являющаяся решением однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \tag{41}$$

то $y(x)$ как минимум n раз дифференцируема и индукция, использующая выражение (41) n-й производной через производные меньшего порядка показывает, что на самом деле она бесконечно дифференцируема, а также что линейная оболочка функций $\frac{d^i y}{dx^i}$, $i \ge 0$, конечномерна и оператор $\frac{d}{dx}$ переводит ее в себя. Из этого вытекает, что $y(x)$ представляется в виде $\sum P_i(x)e^{\lambda_i x}$, где $P_i(x)$ — многочлены.

По уравнению (41) определим многочлен $f(t) := t^n + \sum a_i t^i$. Очевидно, что $f(t)$ — аннулирующий многочлен оператора $\frac{d}{dx}$ на линейном пространстве L всех решений уравнения (41).

Предложение 7.20. *Многочлен $f(t)$ является характеристическим и минимальным многочленом оператора $\frac{d}{dx}$ на пространстве L всех решений уравнения (41). В частности,* $\dim L = n$ *и λ_i — его корни кратностей r_i, $\sum_i r_i = n$.*

Доказательство. Если L бесконечномерно, то тем не менее произвольный его элемент (в силу соотношения (41) принадлежит конечномерному $\frac{d}{dx}$-инвариантному подпространству. Любое такое подпространство представляется в виде прямой суммы корневых подпространств оператора $\frac{d}{dx}$, в которых (как мы видели в предыдущем Предложении) квазиодночлены $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, \frac{x^k}{k!}e^{\lambda x}\}$ (для некоторого k) образуют базис. Подставляя $e^{\lambda x}$ в (41) получаем, что λ — корень $f(t)$.

Пусть $f(t) = \prod_{i=1}^{s}(t-\lambda_i)^{r_i}$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Поскольку оператор $\frac{d}{dx} - \lambda_i \mathrm{id}_L$ понижает степень $\frac{x^k}{k!}e^{\lambda_i x}$, $k \geq 1$ на 1 и определяет изоморфизм при ограничении на пространство квазимногочленов с $\lambda \neq \lambda_i$ мы видим, что для каждого корня λ_i многочлена $f(t)$ в L имеется r_i-мерное корневое подпространство оператора $\frac{d}{dx}$ и все L является их прямой суммой. В частности, многочлен $f(t)$ является минимальным многочленом оператора $\frac{d}{dx}$, а поскольку для каждого собственного значения λ_i имеется единственная жорданова клетка, то и характеристическим. ∎

Таким образом, в обозначениях из предыдущего доказательства пространство решений уравнения (41) является линейной оболочкой квазимногочленов

$$P_i(x)e^{\lambda_i x}, \ \deg P_i(x) \leq r_i - 1, \ 1 \leq i \leq s.$$

Задача 7.21. *Найти все решения дифференциального уравнения*

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$t^3 + 2t^2 - 4t - 8 = (t+2)(t^2-4) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2$ кратности 1 и $\lambda_2 = -2$ кратности 2. Таким образом, функции e^{2x}, e^{-2x}, xe^{-2x} образуют базис в пространстве решений (называемый также фундаментальной ситемой решений) рассматриваемого уравнения. ∎

8 Билинейные и квадратичные функции

8.1 Основные определения

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$[28].

Определение 8.1. *Билинейной функцией* (или *билинейной формой*) на векторном пространстве V называется отображение $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{K}$, линейное по каждому из двух своих аргументов.

Пример 8.2. Скалярное произведение геометрических векторов на евклидовой плоскости или в евклидовом трехмерном пространстве.

Пример 8.3. Из свойств интеграла Римана, доказываемых в курсе анализа, следует, что функция $\alpha(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ является билинейной функцией на (бесконечномерном!) пространстве $C[a,b]$.

Пример 8.4. Функция $\alpha(A,\, B) = \mathrm{tr}\,(AB)$ является билинейной функцией на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

[28]в какой-то момент нам потребуется условие, что в поле $2 \neq 0$, такие поля имеют характеристику $\neq 2$.

Пример 8.5. Как следует из свойств умножения матриц, для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ функция $\alpha(x, y) = x^T Ay$ является билинейной на пространстве $\mathbb{K}^n$ столбцов высоты n.

Пример 8.6. Ориентированная площадь параллелограмма, построенного на упорядоченной паре векторов $\{u, v\}$ (псевдоскалярное произведение) на ориентированной евклидовой плоскости является билинейной функцией от u и v.

Пример 8.7. Пусть $C^1[a, b]$ — бесконечномерное линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$, а $C^1_0[a, b] \subset C^1[a, b]$ — линейное подпространство в нем, состоящее из функций, принимающих нулевые значения в концах отрезка. Для f, $g \in C^1_0[a, b]$ выражение $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ задает билинейную функцию на $C^1_0[a, b]$.

Легко проверяется, что сумма билинейных функций на V снова является билинейной функцией на V, произведение билинейной функции на скаляр снова билинейная функция. Более того, легко проверяется, что билинейные функции на V образуют линейное пространство, которое мы обозначим $\mathcal{B}(V)$.

Сейчас мы покажем, что при отождествлении n-мерного пространства V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$ с помощью выбора базиса билинейная функция на V отождествляется с билинейной функцией из Примера 8.5 (для своей матрицы A). Более точно, каждый выбор базиса в V определяет некоторый линейный изоморфизм $\mathcal{B}(V) \cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

Итак, пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V. Тогда из билинейности α имеем

$$\alpha(u, v) = \sum_{i,j} a_{ij} u_i v_j, \quad \text{где } a_{ij} = \alpha(e_i, e_j). \tag{42}$$

Обратно, если $\alpha(u, v) = \sum_{i,j} b_{ij} u_i v_j$ для любых u, $v \in V$, то $\alpha(e_i, e_j) = b_{ij}$, поскольку у вектора e_i отлична от нуля только i-я координата, равная 1, и аналогично для e_j. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ называется *матрицей билинейной функции* α *в базисе* $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Легко видеть, что билинейная функция однозначно определяется набором $\{\alpha(e_i, e_j) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ своих значений на парах базисных векторов. Кроме того, любая система из n^2 скаляров является набором значений на парах базисных векторов некоторой билинейной функции. Отсюда следует, что сопоставление билинейной функции ее матрицы в данном базисе определяет биекцию между множеством билинейных функций и множеством матриц порядка n. Более того, эта биекция сохраняет линейные операции (сумме билинейных функций отвечает сумма их матриц и т. п.). Таким образом, мы действительно построили некоторый линейный изоморфизм $\mathcal{B}(V) \cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ (зависящий от базиса).

Выясним теперь, как матрица билинейной функции зависит от базиса. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ — два базиса в V и C — матрица перехода от первого базиса ко второму. Тогда координатные столбцы x, x' вектора $u \in V$ в этих базисах связаны соотношением $x = Cx'$. Имеем

$$\alpha(u, v) = x^T Ay = (Cx')^T A(Cy') = x'^T(C^T AC)y' = x'^T A'y'.$$

Поскольку билинейная функция имеет единственную матрицу в фиксированном базисе, то матрица α во втором базисе есть

$$A' = C^T AC. \tag{43}$$

Полезно сопоставить формулу (43) с аналогичной формулой (27) для матрицы линейного оператора. Мы видим, что хотя и линейный оператор и билинейная функция в базисе задаются матрицей, эти матрицы по-разному преобразуются при замене базиса (одинаково только когда матрица перехода ортогональна). Это имеет важные следствия. Например, мы видели, что определитель и след матрицы линейного оператора не зависят от базиса; для матриц билинейных функций это уже не так (читателю предлагается в этом убедиться).

В частности, если оператор в каком-либо базисе имеет единичную матрицу, то он тождественный и в любом другом базисе он также имеет единичную матрицу. А если билинейная функция имеет в некотором базисе единичную матрицу, то в базисе, полученном из исходного с помощью матрицы перехода C она будет иметь матрицу $C^T C$, которая является единичной тогда и только тогда, когда C ортогональна.

Еще одной особенностью закона преобразования матриц билинейных функций является то, что сохраняется условие симметричности (кососимметричности) матрицы. То есть если в некотором базисе матрица билинейной функции симметрична (кососимметрична), то это верно и для любого другого базиса (убедитесь в этом).

Определение 8.8. *Ядром* билинейной функции $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{K}$ называется подпространство

$$\operatorname{Ker}\alpha := \{v \in V \mid \alpha(u, v) = 0 \; \forall\, u \in V\} \subset V.$$

Функция α называется *невырожденной*, если $\operatorname{Ker}\alpha = 0$.

Например, скалярное произведение из Примера 8.2 является невырожденной билинейной функцией, поскольку для любого ненулевого вектора его скалярный квадрат положителен. По этой же причине невырождена билинейная функция из Примера 8.3. Невырожденность билинейной функции из Примера 8.5 равносильна невырожденности матрицы A.

Задача 8.9. *Докажите невырожденность функций из Примеров 8.4 и 8.6.*

Предложение 8.10. *Пусть A — матрица α в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V. Тогда*

$$\dim \operatorname{Ker}\alpha = n - \operatorname{rk} A.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\operatorname{Ker}\alpha = \{v \in V \mid \alpha(e_i, v) = 0,\; i = 1, \ldots, n\},$$

то есть при отождествлении V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$ при помощи выбранного базиса подпространство $\operatorname{Ker}\alpha$ отождествляется с пространством решений СЛОУ с матрицей коэффициентов A. ∎

В частности, $\operatorname{Ker}\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk}\alpha = n$, то есть когда матрица A невырождена.

Следствие 8.11. *Ранг матрицы билинейной функции не зависит от базиса.*

Доказательство. Действительно, подпространство $\operatorname{Ker}\alpha$ ни от каких базисов не зависит (а зависит только от самой α). ■

Заметим, что предыдущее следствие можно вывести и непосредственно из формулы (43), поскольку последняя показывает, что матрица A' получается из A некоторой конечной последовательностью элементарных преобразований строк и столбцов.

Доказанное следствие влечет корректность следующего определения.

Определение 8.12. *Рангом* билинейной функции α назыается ранг ее матрицы в произвольном базисе. Он обозначается $\operatorname{rk}\alpha$.

Пример 8.13. Пусть $f_1,\, f_2\colon V \to \mathbb{K}$ — ненулевые линейные функции на пространстве V. Тогда билинейная функция $\alpha(u,v) := f_1(u)f_2(v)$ имеет ранг 1.

Задача 8.14. *Докажите что наоборот, любая билинейная функция ранга* 1 *является произведением ненулевых линейных функций.*

Решение. Ядро, которое определено в Определении 8.8, естественно назвать правым ядром. Аналогично можно определить левое ядро

$$\operatorname{Ker}'\alpha := \{u \in V \mid \alpha(u,\, v) = 0\; \forall\, v \in V\} \subset V.$$

Обозначим $U := \operatorname{Ker}\alpha,\ W := \operatorname{Ker}'\alpha$. Ясно, что $\dim U = \dim W$, причем если $\operatorname{rk}\alpha = 1$, то размерности обоих ядер равны $n-1$. Могут представиться две ситуации: 1) $U = W$ или 2) $U \neq W$, в этом случае $U + W = V$.

В случае 1) выберем вектор $v \notin U (= W)$ и линейную функцию $f\colon V \to \mathbb{K}$, такую что $\ker f = U,\ f(v) = 1$. Тогда, используя представление любого вектора из V в виде $\lambda v + z$, где $z \in U = W$, легко проверить, что $\alpha = \alpha(v,v)f^2$ (в частности, $\alpha(v,v) \neq 0$).

В случае 2) выберем векторы $u \in U \setminus W$ и $w \in W \setminus U$ (они вместе с $U \cap W$ порождают V), а также линейные функции $f_1,\, f_2,\colon V \to \mathbb{K}$, такие что $\ker f_1 = W,\ f_1(u) = 1,\ \ker f_2 = U,\ f_2(w) = 1$. Теперь с использованием того, что любой вектор из V представляется в виде $\beta u + \gamma w + z$, где $z \in U \cap W$, легко проверяется, что $\alpha = \alpha(u,w)f_1f_2$. ■

Из предыдущей Задачи следует, что любая билинейная функция ранга r является суммой r попарных произведений некоторых линейных функций.

В дальнейшем мы будем интересоваться не всеми билинейными функциями, а только теми, которые удовлетворяют условию симметричности.

Определение 8.15. Билинейная функция $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{K}$ называется *симметричной* (соответственно *кососимметричной*), если $\alpha(u,\, v) = \alpha(v,\, u)$ (соответственно $\alpha(u,\, v) = -\alpha(v,\, u)$) для любых $u,\, v \in V$.

Очевидно, билинейная функция симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, когда ее матрица в некотором (а значит в любом) базисе симметрична (кососимметрична).

Например, билинейные функции из Примеров 8.2, 8.3, 8.4 симметричны, из Примеров 8.6 и 8.7 кососимметричны (для доказательства кососимметричности последней нужно воспользоваться формулой интегрирования по частям), а из Примера 8.5 симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, когда матрица A симметрична (кососимметрична).

Равенство
$$\alpha(u,\, v) = \frac{1}{2}\left(\alpha(u,\, v) + \alpha(v,\, u)\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha(u,\, v) - \alpha(v,\, u)\right) \tag{44}$$
показывает, что любая билинейная функция единственным образом представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной (это также следует из существования разложения пространства матриц порядка n в прямую сумму подпространств симметричных и кососимметричных).

Пример 8.16. Если $\alpha(u,v) = f_1(u)f_2(v)$ — билинейная функция ранга 1 (см. Пример 8.13), то
$$\alpha^+(u,v) := \frac{1}{2}(f_1(u)f_2(v) + f_2(u)f_1(v)) \tag{45}$$
будет симметричной, а
$$\alpha^-(u,v) := \frac{1}{2}(f_1(u)f_2(v) - f_2(u)f_1(v)) \tag{46}$$
— кососимметричной билинейными функциями. Из того, что любая билинейная функция является суммой функций ранга 1 следует, что любая симметричная (соответственно кососимметричная) билинейная функция является суммой форм вида (45) (соответственно вида (46)).

Чтобы мотивировать следующее определение, обратимся к конкретному примеру билинейной функции — скалярному произведению в евклидовом пространстве. Вместо того, чтобы рассматривать скалярное произведение как функцию двух аргументов, можно рассмотреть функцию “скалярный квадрат вектора” $v \mapsto (v,v) = |v|^2$ от одного аргумента. Заметим, что если нам известны скалярные квадраты всех векторов, мы можем восстановить и их скалярные произведения, используя теорему косинусов. Как мы вскоре увидим, это — общее свойство симметричных билинейных функций и отвечающих им “скалярных квадратов”. По-научному, скалярные квадраты называются квадратичными функциями.

Определение 8.17. *Квадратичной функцией* на векторном пространстве V называется функция $q\colon V \to \mathbb{K}$, для которой существует билинейная функция $\alpha\colon V\times V \to \mathbb{K}$ такая, что $q(v) = \alpha(v,\, v)\;\forall\, v \in V$.

То есть любая билинейная функция α задает квадратичную функцию q_α, которая получается из α ограничением области определения с $V\times V$ на диагональ $\Delta_V := \{(v,\, v) \mid v \in V\} \subset V\times V$. Из определения непосредственно следует, что для любой квадратичной функции q на пространстве V и любого скаляра $\lambda \in \mathbb{K}$ верно равенство $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)\; \forall v \in V$. В базисе квадратичная функция является выражением вида $q(v) = \sum_{i,j} a_{ij}v_iv_j$, то есть однородным многочленом степени 2 от координат вектора.

Заметим, что если α кососимметрична, то ей отвечает нулевая квадратичная функция. Более общо, если две билинейные функции отличаются на кососимметричную функцию, то они определяют одну и ту же квадратичную функцию. Сейчас мы докажем, что по квадратичной функции q_α однозначно восстанавливается симметричная компонента билинейной функции α (см. формулу (44)).

Действительно, если α — билинейная функция, то для соответствующей квадратичной функции q_α и для любой пары векторов $u,\, v \in V$ имеем
$$q_\alpha(u+v) = \alpha(u+v, u+v) = \alpha(u,u) + \alpha(u,v) + \alpha(v,u) + \alpha(v,v) =$$

$$= q_\alpha(u) + \alpha(u,v) + \alpha(v,u) + q_\alpha(v),$$

откуда

$$\alpha(u,v) + \alpha(v,u) = q_\alpha(u+v) - q_\alpha(u) - q_\alpha(v).$$

В частности, если α симметрична, то

$$\alpha(u,v) = \frac{1}{2}(q_\alpha(u+v) - q_\alpha(u) - q_\alpha(v)). \tag{47}$$

Положим по определению $\alpha_q(u,\, v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$. Очевидно, что так определенная билинейная функция α_q симметрична.

Предложение 8.18. *Сопоставления*

$$\alpha \mapsto q_\alpha, \quad q \mapsto \alpha_q$$

определяют взаимно обратные биекции между множествами симметричных билинейных $\mathcal{B}^+(V)$ и квадратичных функций $Q(V)$.

Доказательство. Во-первых, проверим, что композиция

$$\mathcal{B}^+(V) \to Q(V) \to \mathcal{B}^+(V), \quad \alpha \mapsto q_\alpha \mapsto \alpha_{q_\alpha}$$

тождественна. Действительно, $q_\alpha(v) = \alpha(v,v)$ и

$$\alpha_{q_\alpha}(u,v) = \frac{1}{2}(q_\alpha(u+v) - q(u) - q(v)) = \frac{1}{2}(\alpha(u+v,u+v) - \alpha(u,u) - \alpha(v,v)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha(u,u) + \alpha(u,v) + \alpha(v,u) + \alpha(v,v) - \alpha(u,u) - \alpha(v,v)) = \alpha(u,v) \;\; \forall u,\, v \in V.$$

Во-вторых, проверим, что композиция

$$Q(V) \to \mathcal{B}^+(V) \to Q(V), \quad q \mapsto \alpha_q \mapsto q_{\alpha_q}$$

тождественна. Действительно,

$$q_{\alpha_q}(v) = \alpha_q(v,v) = \frac{1}{2}(q(2v) - 2q(v)) = \frac{1}{2}(4q(v) - 2q(v)) = q(v), \;\; \forall v \in V.$$

Заметим теперь, что для произвольных множеств X, Y отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ такие, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ являются взаимно-обратными биекциями, то есть f и g биективны и $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$. ■

Из доказанного Предложения следует, что все понятия, относящиеся к симметричным билинейным функциям (матрица, ранг, невырожденность и т.д.) переносятся на квадратичные функции. В дальнейшем изложении из соображений удобства мы будем иногда говорить о симметричных билинейных, иногда — о квадратичных функциях.

Заметим, что так как матрицей квадратичной функции по определению является матрица соответствующей ей *симметричной* билинейной функции, то

$$q(v) = \sum_{i,j} a_{ij} v_i v_j = \sum_i a_{ii} v_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} v_i v_j.$$

8.2 Приведение билинейных симметричных (квадратичных) функций к диагональному виду

Начиная с этого момента все рассматриваемые билинейные функции, если не оговорено противное, предполагаются симметричными.

Для изучения билинейных функций полезно привлечь геометрические ассоциации, связанные с конкретным примером билинейной функции — скалярным произведением в евклидовом пространстве. Например, условие ортогональности двух векторов в евклидовом пространстве равносильно тому, что их скалярное произведение равно нулю. Это мотивирует следующее определение.

Определение 8.19. Векторы $u, v \in V$ называются *ортогональными относительно* α, если $\alpha(u, v) = 0$. Условие ортогональности векторов записывается $u \perp v$.

Заметим, что так как α по предположению симметрична, то отношение ортогональности симметрично (то есть $u \perp v \;\Leftrightarrow\; v \perp u$).

Определение 8.20. *Ортогональным дополнением к подпространству $U \subset V$ относительно α* называется подпространство

$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \alpha(u,v) = 0 \,\forall\, u \in U\} \subset V.$$

Очевидно, что

$$V^{\perp} = \operatorname{Ker} \alpha.$$

Предложение 8.21. *Если функция α невырождена, то*

$$\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U \quad \text{и} \;\; (U^{\perp})^{\perp} = U.$$

Доказательство. Если $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — базис в U, то

$$U^{\perp} = \{v \in V \mid \alpha(e_i, v) = 0,\; i = 1, \ldots, k\}. \tag{48}$$

Продолжим $\{e_1, \ldots, e_k\}$ до базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ во всем пространстве V, пусть A — матрица α в этом базисе. Равенство (48) теперь означает, что в выбранном базисе в V условие $v \in U^{\perp}$ равносильно тому, что координаты v удовлетворяют СЛОУ, матрица которой образована первыми k строками матрицы A. Так как α невырождена, то и матрица A невырождена, в частности, ее строки линейно независимы. Отсюда $\dim U^{\perp} = n - k$, где $n = \dim V,\; k = \dim U$, тем самым доказано первое из соотношений.

Дважды применяя доказанное соотношение, имеем

$$\dim (U^{\perp})^{\perp} = n - \dim U^{\perp} = n - (n-k) = k = \dim U.$$

С другой стороны, очевидно, что $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$ (действительно, любой вектор из U ортогонален любому вектору из ортогонального дополнения к U), поэтому $U = (U^{\perp})^{\perp}$ (ср. Теорему 4.18). ∎

Задача 8.22. *Докажите, что если функция α невырождена, то для подпространств U, W в V*

$$U \subset W \;\Leftrightarrow\; U^{\perp} \supset W^{\perp}.$$

Если α — билинейная функция на V и $U \subset V$ — произвольное подпространство, то очевидным образом определяется ограничение $\alpha|_U$, являющееся билинейной функцией на U.

Определение 8.23. Подпространство $U \subset V$ называется *невырожденным относительно* α, если ограничение $\alpha|_U$ невырождено.

Очевидно, что $\operatorname{Ker} \alpha|_U = U \cap U^\perp$, поэтому подпространство U невырождено тогда и только тогда, когда $U \cap U^\perp = 0$.

Очень важно понимать, что *из невырожденности α на всем пространстве не следует невырожденность ее ограничения на любое подпространство.* Причина в том, что для ограничения $\alpha|_U$ мы рассматриваем "скалярные произведения" векторов $u \in U$ только на векторы из U, но может так оказаться, что несмотря на то, что $\alpha|_U(u, u') = \alpha(u, u') = 0 \; \forall u' \in U$, во всем пространстве V найдется такой вектор $v \in V$, что $\alpha(u, v) \neq 0$. Вот конкретный пример.

Пример 8.24. Рассмотрим билинейную симметричную функцию α на двумерном пространстве V с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{e_1, e_2\}$. В координатах она записывается как $\alpha(u, v) = u_1 v_1 - u_2 v_2$. Очевидно, что α невырождена, но тем не менее скалярный квадрат $\alpha(e_1 + e_2, e_1 + e_2)$ вектора $e_1 + e_2$ равен нулю. Поэтому ограничение $\alpha|_{\langle e_1 + e_2 \rangle}$ на одномерное подпространство $\langle e_1 + e_2 \rangle \subset V$ нулевое. На самом деле $\langle e_1 + e_2 \rangle^\perp = \langle e_1 + e_2 \rangle$. То же верно и для вектора $e_1 - e_2$.

Выбирая новый базис $\{e'_1, e'_2\}$ в V, $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$, получаем для α матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, из которой видно, что ограничения α на одномерные подпространства $\langle e'_1 \rangle$ и $\langle e'_2 \rangle$ нулевые (причем $V = \langle e'_1 \rangle \oplus \langle e'_2 \rangle$!), в то же время сама α невырождена.

Как показывает следующее Предложение, если бы ограничение невырожденной α на любое подпространство было бы невырожденным, это сильно облегчило бы жизнь. Очевидно, что это, например, верно в случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $\alpha(v, v) > 0 \; \forall v \in V, \; v \neq 0$ (такие α называются *положительно определенными*).

Предложение 8.25. *Подпространство $U \subset V$ невырождено относительно α тогда и только тогда, когда $V = U \oplus U^\perp$.*

Доказательство. Как следует из доказательства Предложения 8.21, в любом случае $\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$.

Если подпространство U невырождено, то $U \cap U^\perp = \operatorname{Ker} \alpha|_U = 0$, значит сумма $U + U^\perp$ прямая и, согласно предыдущему абзацу, $\dim (U \oplus U^\perp) \geq \dim V$, поэтому $V = U \oplus U^\perp$.

Обратно, если $V = U \oplus U^\perp$, то, в частности, $U \cap U^\perp = 0$, а так как $U \cap U^\perp = \operatorname{Ker} \alpha|_U$, то ограничение $\alpha|_U$ невырождено. ∎

Например, как мы видели в Примере 8.24 для $U = \langle e_1 + e_2 \rangle$ имеет место соотношение $U^\perp = U$ и, значит, сумма U и $U^\perp$ не может быть прямой.

Определение 8.26. Базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V называется *ортогональным относительно* α, если его векторы попарно ортогональны, то есть $\alpha(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Очевидно, что базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ортогонален тогда и только тогда, когда матрица α в нем диагональна, то есть $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. При этом билинейная и квадратичная функции имеют вид

$$\alpha(u, v) = a_1 u_1 v_1 + \ldots + a_n u_n v_n, \quad q(v) = a_1 v_1^2 + \ldots + a_n v_n^2$$

соответственно.

Теорема 8.27. *Для всякой симметричной билинейной функции существует ортогональный базис.*

Доказательство. Доказывать теорему будем индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ теорема очевидна. Пусть $n > 1$, тогда если $\alpha \equiv 0$, то теорема очевидна. Пусть $\alpha \not\equiv 0$, тогда (в силу формулы (47)) $q_\alpha \not\equiv 0$ и значит существует вектор $e_1 \in V$ такой, что $\alpha(e_1, e_1) = q_\alpha(e_1) \neq 0$. Значит, одномерное подпространство $U := \langle e_1 \rangle$ невырождено относительно α и, согласно Предложению 8.25, $V = U \oplus U^\perp$. Поскольку $\dim U^\perp = n - 1$, к этому подпространству применимо предположение индукции: в нем существует базис $\{e_2, \ldots, e_n\}$, ортогональный относительно $\alpha|_{U^\perp}$. Поскольку вектор e_1 ортогонален подпространству $U^\perp$, а значит каждому из векторов $e_2, \ldots, e_n$, то $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортогональный базис в V относительно α, и шаг индукции доказан. ∎

Задача 8.28. *Докажите, что если билинейная функция α не симметрична, то ни в каком базисе к диагональному виду она не приводится.*

8.3 Билинейные симметричные (квадратичные) функции над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$

Заметим, что до сих пор никаких условий (кроме $2 \neq 0$) мы на поле $\mathbb{K}$ не накладывали, то есть предыдущие результаты верны для любого поля характеристики, не равной 2. Дальнейшее более тонкое исследование проведем для случаев $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Общий случай сложен: для поля $\mathbb{Q}$, например, классификация квадратичных функций связана с тонкими вопросами теории чисел.

Итак, к настоящему моменту мы нашли базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V, в котором квадратичная функция имеет вид

$$q(v) = a_1 v_1^2 + \ldots + a_n v_n^2,$$

где $a_i = q(e_i)$. Путем перестановки базисных векторов можно добиться того, чтобы нулевые коэффициенты a_i (если они есть) стояли бы в конце.

Если $a_i \neq 0$, то замена $e_i \mapsto e'_i = \lambda e_i$, $\lambda \neq 0$ приводит к замене $a'_i = \lambda^2 a_i$, то есть a_i и a'_i отличаются умножением на квадрат ненулевого числа. Для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ все ненулевые числа являются такими квадратами, поэтому, умножая базисные векторы на подходящие ненулевые скаляры, можно добиться, чтобы в новом базисе

$$q(v) = v_1'^2 + \ldots + v_r'^2, \tag{49}$$

где $r = \mathrm{rk}\,\alpha$ (количество ненулевых a_i).

Для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ квадраты ненулевых чисел — в точности положительные числа, поэтому умножением базисного вектора на подходящее ненулевое число мы можем модуль $|a_i|$, $a_i \neq 0$ сделать равным 1, но при этом знак a_i изменить не можем. Поэтому для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ мы можем добиться, чтобы

$$q(v) = \sum_{i=1}^{k} v_i'^2 - \sum_{j=k+1}^{k+l} v_j'^2 \tag{50}$$

где $k + l = r = \operatorname{rk} \alpha$.

Определение 8.29. *Нормальным видом* квадратичной функции над полем $\mathbb{C}$ (соответственно над $\mathbb{R}$) называется вид (49) (соответственно (50)).

Предложение 8.30. *Для произвольной квадратичной функции q на векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ (соответственно $\mathbb{R}$) существует базис в V, в котором она записывается в нормальном виде (49) (соответственно (50)).*

Переформулируем полученный результат в терминах матриц.

Следствие 8.31. *Для произвольной симметричной матрицы A с элементами из поля $\mathbb{C}$ (соответственно $\mathbb{R}$) существует невырожденная матрица C с элементами из соответствующего поля такая, что $C^T AC = A' = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$, где $a_i = 1$ или 0 в случае поля $\mathbb{C}$ и ± 1 или 0 в случае поля $\mathbb{R}$.*

Доказательство следует непосредственно из предыдущего Предложения и формулы (43). ■

За исключением тривиальных случаев, имеется много базисов, в котором данная квадратичная функция имеет нормальный вид. Возникает вопрос: однозначно ли он определен для данной квадратичной функции? Ясно, что путем перестановки базисных векторов можно менять порядок расположения диагональных элементов в матрице квадратичной функции, поэтому инвариантный смысл может иметь только общее количество тех или иных элементов в диагональном виде (единиц и нулей для $\mathbb{C}$, единиц, минус единиц и нулей для $\mathbb{R}$).

Ясно, что количество единиц в нормальном виде квадратичной функции над $\mathbb{C}$ равно ее рангу и поэтому не зависит от выбора базиса (см. Следствие 8.11). То же относится к сумме $k + l$ количества плюс и минус единиц (см. (50)) для нормального вида квадратичной функции над $\mathbb{R}$. Мы собираемся доказать более тонкий результат: числа k и l в нормальном виде (50) и по отдельности не зависят от базиса.

Итак, пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Определение 8.32. Вещественная квадратичная функция $q\colon V \to \mathbb{R}$ называется *положительно определенной*, если $q(v) > 0$ для любого $v \in V,\ v \neq 0$. Вещественная билинейная симметричная функция α называется *положительно определенной*, если соответствующая ей квадратичная функция q_α положительно определена. Аналогично определяются отрицательно определенные вещественные квадратичные и симметричные билинейные функции.

Вещественная квадратичная функция $q\colon V \to \mathbb{R}$ (и соответствующая ей билинейная симметричная функция) называется *положительно полуопределенной*, если $q(v) \geq 0$ для любого $v \in V$. Аналогично определяются отрицательно полуопределенные функции.

Помимо положительно и отрицательно (полу)определенных квадратичных функций, есть *неопределенные* функции, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Такая функция используется, например, в математической модели специальной теории относительности (метрика Лоренца).

Заметим, что если $\dim V = n$, то положительно определенная квадратичная функция на V имеет нормальный вид $q(v) = \sum_{i=1}^n v_i^2$ и ее матрица в соответствующем (ортонормированном) базисе есть $A = E$. Тогда в любом другом базисе $A' = C^TAC = C^TC$, в частности, $\det A' = (\det C)^2 > 0$. Отсюда следует важный вывод: *определитель матрицы положительно определенной функции в произвольном базисе положителен.* Более общо, *знак определителя невырожденной вещественной квадратичной функции не зависит от базиса.*

Теорема 8.33. *Число k в нормальном виде (50) произвольной вещественной квадратичной функции q есть максимальная размерность подпространства, на котором q положительно определена.*

Доказательство. Ясно, что q положительно определена на линейной оболочке $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ первых k векторов того базиса, в котором она имеет вид (50). Пусть U — произвольное подпространство в V на котором q положительно определена и $W := \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$. Так как $q(w) \le 0$ для произвольного $w \in W$, а $q(u) > 0$ для $u \in U$, $u \neq 0$, то $U \cap W = 0$, откуда $\dim U \le k$ (в самом деле, поскольку сумма $U+W$ — подпространство в V, то $\dim(U+W) = \dim U + n - k \le \dim V = n$). ∎

Аналогично доказывается, что число l в нормальном виде (50) равно максимальной размерности подпространства, на котором q отрицательно определена. (Для доказательства последнего факта можно воспользоваться также следующим очевидным соображением: q положительно определена тогда и только тогда, когда $-q$ отрицательно определена).

Следствие 8.34. *("Закон инерции"). Числа k и l в нормальном виде (50) вещественной квадратичной функции q не зависят от выбора базиса, в котором функция q имеет нормальный вид.*

Числа $r_+ := k$ и $r_- := l$ называются соответственно *положительным* и *отрицательным* индексами инерции вещественной квадратичной функции q. Они связаны соотношением $r_+ + r_- = r = \operatorname{rk} q$. Набор (r_+, r_-) называют еще *сигнатурой* вещественной квадратичной функции q (или соответствующей билинейной симметричной функции α_q).

Ранг в случае комплексной, а также положительный и отрицательный индексы инерции в случае вещественной квадратичной функции на n-мерном пространстве V являются полными наборами инвариантов в следующем смысле: если даны две такие функции с одинаковыми наборами инвариантов, то существует замена базиса, переводящая первую функцию во вторую.

Пример 8.35. Найдем положительный и отрицательный индексы инерции для вещественной квадратичной функции $q(v) = v_1v_2$ на двумерном пространстве. Производя замену базиса $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_1 - e_2$ (или соответствующую ей замену координат $v_1 = v_1' + v_2'$, $v_2 = v_1' - v_2'$) приводим ее к нормальному виду $q(v) = v_1'^2 - v_2'^2$. Таким образом, $r_+ = 1 = r_-$.

Задача 8.36. *Пусть $A(t)$ — семейство вещественных симметричных матриц, непрерывно зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$. Известно, что при $t > t_0$ матрицы положительно определены. Докажите, что матрица $A(t_0)$ положительно полуопределена.*

Решение. Из условия следует, что при $t > t_0$ $x^T A(t)x > 0$ для любого $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. В силу того, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функция

$$f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_x(t) := x^T A(t)x$$

непрерывна, получаем, что $\lim_{t \to t_0+} f_x(t) = f_x(t_0) \geq 0$. ■

Задача 8.37. *Найдите положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной функции $q(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ на n-мерном пространстве.*

Решение. Заметим, что

$$2q(x) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2.$$

Легко видеть, что ограничение q на одномерное подпространство, заданное системой $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, положительно определено, поэтому положительный индекс инерции не меньше 1, а ограничение q на $n-1$-мерное подпространство, заданное уравнением $x_1 + \ldots + x_n = 0$, отрицательно определено. Значит, положительный индекс инерции равен 1, а отрицательный — $n - 1$. ■

Не следует думать, что если вещественная квадратичная функция положительно определена на двух подпространствах, то она обязательно положительно определена и на их сумме. В частности, Теорема 8.33 не утверждает, что среди всех подпространств, на которых квадратичная функция положительно определена, существует максимальное в том смысле, что оно содержит все такие подпространства.

Задача 8.38. *Предположим, что вещественное векторное пространство V, на котором задана квадратичная форма $q \colon V \to \mathbb{R}$, разложено в прямую сумму $V = U \oplus W$ своих подпространств, причем ограничения $q|_U$ и $q|_W$ положительно определены. Следует ли отсюда, что сама q положительно определена?*

Решение. Ответ отрицательный, причем для построения контрпримера достаточно рассмотреть случай, когда двумерное пространство V разложено в прямую сумму одномерных подпространств. Рассуждать при построении контрпримера можно следующим образом. Выберем базис $\{e_1, e_2\}$ в V такой, что $U = \langle e_1 \rangle$, $W = \langle e_2 \rangle$. То, что ограничения q на указанные подпространства положительно определены означает, что на главной диагонали в матрице q в базисе $\{e_1, e_2\}$ стоят положительные числа, скажем, равные 1. Требуется выбрать элементы вне главной диагонали так, чтобы полученная симметричная матрица не была положительно определенной, чего, конечно, легко добиться, положив эти элементы равными произвольному числу больше либо равному 1.

Другой вариант рассуждения использует аргумент "по непрерывности". А именно, пусть ограничение q на $\langle e_1 \rangle$ положительно определено. Рассмотрим вектор $e_2' := e_1 + \varepsilon e_2$, где положительное число ε достаточно мало. Ясно, что линейная оболочка $\langle e_1, e_2' \rangle$ совпадает с $V = \langle e_1, e_2 \rangle$, в то же время из непрерывности q и $q(e_1) > 0$ следует, что и $q(e_2') > 0$ при достаточно малых ε. ■

Задача 8.39. *Известно, что квадратичная функция q на n-мерном вещественном пространстве на всех базисных векторах некоторого базиса принимает положительные значения. Что можно сказать про ее положительный индекс инерции?*

Решение. Очевидно, что положительный индекс инерции не меньше 1, оказывается, он может быть в точности равен 1. Приведем соответствующий пример. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортогональный базис для q такой, что $q(e_1) = 1$, $q(e_i) = -1$ при $i = 2, \ldots, n$. Перейдем к новому базису $\{e_1, \varepsilon e_2 + e_1, \ldots, \varepsilon e_n + e_1\}$. При этом $q(\varepsilon e_i + e_1) = 1 - \varepsilon^2 > 0$, если модуль ε достаточно мал. Отсюда легко получить, что r_+ может принимать значения от 1 до n. ■

Задача 8.40. *Известно, что квадратичная функция q на n-мерном вещественном пространстве V имеет матрицу, все диагональные элементы которой равны нулю. Определите наибольшую возможную размерность подпространства $U \subset V$ такого, что на нем данная квадратичная функция положительно определена.*

Решение. Размерность U — положительный индекс инерции q. Ясно, что $\dim U \leq n-1$. Покажем, что существует q с положительным индексом инерции, равным $n-1$, и при этом имеющая в некотором базисе матрицу с нулевыми элементами на главной диагонали. Пусть $q(v) := -v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$ в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Для доказательства достаточно заметить, что "изотропный конус"

$$\{v \in V \mid q(v) = 0\} \subset V$$

содержит некоторый базис пространства V, поскольку в таком базисе матрица q имеет требуемый вид. Действительно, векторы $e_1 + e_2$ и $e_1 - e_2$ принадлежат изотропному конусу и через них выражается e_1. Далее, поскольку векторы $e_1 + e_k,\ 2 \leq k \leq n$ принадлежат изотропному конусу, то через них и через e_1 выражаются оставшиеся векторы $e_k,\ 2 \leq k \leq n$. ■

Задача 8.41. *Пусть α — невырожденная симметричная билинейная функция на пространстве V, имеющая отрицательный индекс инерции, равный 1, и $\alpha(v, v) < 0$ для некоторого $v \in V$. Докажите, что ограничение α на любое подпространство, содержащее v, невырождено.*

Решение. Так как подпространство $\langle v \rangle \subset V$ невырождено относительно α, то $V = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$. Из условия следует, что ограничение α на $\langle v \rangle^\perp \subset V$ положительно определено.

Пусть $v \in U \subset V$ — подпространство. Тогда ортогональное дополнение к $\langle v \rangle \subset U$ есть $\langle v \rangle_U^\perp = \langle v \rangle^\perp \cap U$ и $U = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle_U^\perp$. Из этого легко следует, что сумма положительного и отрицательного индексов инерции ограничения α на U равно $\dim U$, то есть подпространство U невырождено. ■

8.4 Алгоритмы приведения к нормальному виду

Приведем классические алгоритмы отыскания ортогональных базисов.

Во-первых, опишем **метод Лагранжа** — приведение квадратичной функции к сумме квадратов. Пусть

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

— квадратичная функция над полем $\mathbb{K}$ характеристики $\neq 2$. Следующая процедура дает удобный практический способ отыскания линейной невырожденной замены переменных x_i (а значит и замены базиса), приводящей q к сумме квадратов (с коэффициентами).

Случай 1. *Существует ненулевой диагональный коэффициент.* Перенумеровав переменные, мы можем считать, что $a_{11} \neq 0$. Тогда

$$q(x_1, \dots x_n) = a_{11}x_1^2 + x_1(2a_{12}x_2 + \dots + 2a_{1n}x_n) + q'(x_2, \dots, x_n),$$

где q' — квадратичная функция от $\leq n-1$ переменных. Выделяя полный квадрат, находим

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + q''(x_2, \dots, x_n),$$

где q'' — новая квадратичная функция от $\leq n-1$ переменных. Полагая

$$y_1 = x_1 + a_{11}^{-1}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n), \quad y_2 = x_2, \ \dots, \ y_n = x_n,$$

мы получаем в новых переменных функцию

$$a_{11}y_1^2 + q''(y_2, \dots, y_n),$$

и следующий шаг алгоритма состоит в применении его к q''.

Случай 2. *Все диагональные коэффициенты равны нулю.* Если вообще $q = 0$, то делать ничего не нужно: $q = \sum_{i=1}^n 0 \cdot x_i^2$. Иначе, перенумеровав переменные, можно считать, что $a_{12} \neq 0$. Тогда

$$q(x_1, \dots, x_n) = 2a_{12}x_1x_2 + x_1l_1(x_3, \dots, x_n) + x_2l_2(x_3, \dots, x_n) + q'(x_3, \dots, x_n),$$

где l_1, l_2 — линейные функции, а q' — квадратичная. Положим

$$x_1 = y_1 + y_2, \ \ x_2 = y_1 - y_2, \ \ x_i = y_i, \ \ i \geq 3.$$

В новых переменных функция q приобретает вид

$$2a_{12}(y_1^2 - y_2^2) + q''(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

где q'' не содержит членов с y_1^2, y_2^2. Поэтому к ней можно применить способ выделения полного квадрата и снова свести задачу к меньшему числу переменных. Последовательное применение этих шагов приведет функцию к виду $\sum_{i=1}^n a_iz_i^2$. Окончательная линейная замена переменных будет невырожденной, так как таковы все промежуточные замены.

Последняя замена переменных $u_i = \sqrt{|a_i|}z_i$ при $a_i \neq 0$ в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $u_i = \sqrt{a_i}z_i$ при $a_i \neq 0$ в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ приведет функцию к сумме квадратов с коэффициентами 0, ± 1 или 0, 1.

Во-вторых, опишем **метод элементарных преобразований**. Пусть нам дана симметричная матрица A; нужно найти такую невырожденную матрицу C, что матрица $A' = C^TAC$ (см. формулу (43)) диагональна.

Как мы знаем, любую невырожденную матрицу можно представить в виде произведения элементарных. Посмотрим, что из себя представляет преобразование $A \mapsto S^TAS$, где S — элементарная матрица. Например, рассмотрим случай элементарных матриц $P_{ij}(\lambda) = E + \lambda E_{ij}$ (см. (7)), отвечающих преобразованиям типа I — прибавлению к i-й строке j-й строки, умноженной на λ. Легко видеть, что матрица $P_{ij}(\lambda)$ получается из единичной также прибавлением к j-му столбцу i-го столбца, умноженного на λ, поэтому умножение матрицы A на $P_{ij}(\lambda)$ справа отвечает соответствующему преобразованию столбцов матрицы A.

Заметим, что $P_{ij}(\lambda)^T = P_{ji}(\lambda)$. Таким образом, для $S = P_{ij}(\lambda)$ преобразование $A \mapsto S^TAS$ отвечает прибавлению к j-й строке i-й строки, умноженной на λ с последующим прибавлением к j-му столбцу i-го, умноженного на λ.

Аналогичное утверждение верно и для произвольной элементарной матрицы S: $A \mapsto S^TAS$ отвечает некоторому элементарному преобразованию строк матрицы A с последующим аналогичным преобразованием столбцов полученной матрицы. Заметим, что при таких "сдвоенных" элементарных преобразованиях сохраняется симметричность матрицы A.

Опишем теперь шаг алгоритма. Пусть дана симметричная матрица A порядка n.

1. Основной случай. *Если* $a_{11} \neq 0$, то вычитая из строк, начиная со второй, нужную кратность первой строки и проделывая аналогичные преобразования со столбцами, получаем блочно-диагональную матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, где A' — симметричная матрица порядка $n-1$.

2. Особый случай. *Если* $a_{11} = 0$, *но* $a_{1k} \neq 0$ *для некоторого* $2 \leq k \leq n$, то при условии $a_{kk} \neq 0$ поменяем местами 1-ю и k-ю строки и 1-й и k-й столбцы (это соответствует перестановке 1-го и k-го базисных векторов), тогда придем к ситуации основного случая. Если же $a_{kk} = 0$, то к 1-й строке прибавим k-ю и к 1-му столбцу прибавим k-й, тогда получим $a'_{11} = 2a_{1k} \neq 0$ и снова окажемся в ситуации основного случая.

В результате мы получим диагональную матрицу $A' = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$. Далее при $b_i \neq 0$ нужно i-е строку и столбец поделить на $\sqrt{|b_i|}$ в вещественном или на $\sqrt{b_i}$ в комплексном случае.

Пример 8.42. Найти нормальный вид билинейной функции с матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Решим задачу с помощью метода элементарных преобразований. Имеет место особый случай, поэтому прибавим к первой строке вторую строку и к первому столбцу второй столбец, получим матрицу
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
далее вычитая из второй строки и второго столбца половину первой строки и первого столбца соответственно, получим матрицу
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
далее деля первую строку и столбец на $\sqrt{2}$, а вторую строку и столбец — умножая на $\sqrt{2}$, получим
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
что дает нормальный вид для поля $\mathbb{R}$. В случае поля $\mathbb{C}$ нужно вторую строку и столбец умножить на i, при этом получится единичная матрица.

Чтобы получить матрицу перехода, нужно все преобразования столбцов применить к единичной матрице.

Третий алгоритм нахождения ортогональных базисов — **алгоритм Грама-Шмидта** — мы опишем в одном из следующих параграфов.

8.5 Критерий Сильвестра

Цель этого параграфа — доказательства критерия положительной определенности вещественной квадратичной (симметричной билинейной) функции.

Пусть V — n-мерное вещественное векторное пространство, α — билинейная симметричная функция, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в V и A — матрица α в этом базисе. Очевидно, что если α положительно определена, то ее ограничение $\alpha|_U$ на любое подпространство $U \subset V$ также положительно определено. Значит, для любого набора $i_1, \ldots, i_k$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ определитель подматрицы матрицы A, стоящей на пересечении строк и столбцов с этими номерами положителен, поскольку сама подматрица является матрицей ограничения $\alpha|_{\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_k} \rangle}$ в базисе $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$.

Таким образом, все миноры описанного выше вида матрицы положительно определенной квадратичной функции положительны. Будет ли это условие достаточным для того, чтобы квадратичная функция с матрицей A была бы положительно определена? Оказывается, для положительной определенности A уже достаточно положительности ее так называемых *угловых миноров* — определителей подматриц порядков от 1 до n, стоящих в левом верхнем углу матрицы A (отвечающих ограничениям α на линейные оболочки $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, $1 \le k \le n$).

Теорема 8.43. *(Критерий Сильвестра). Вещественная симметричная билинейная функция $\alpha \colon V \times V \to \mathbb{R}$, имеющая матрицу A в некотором базисе положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы A положительны.*

Доказательство. Необходимость условия положительности главных миноров уже доказана выше.

Достаточность этого условия докажем индукцией по $n = \dim V$. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть результат верен для билинейных функций на пространствах размерности, не превосходящей $n-1$, докажем что он верен и для пространств размерности n. Пусть A — вещественная симметричная матрица порядка n, у которой все n штук угловых миноров положительны. Покажем, что соответствующая билинейная функция α положительно определена.

Применяя предположение индукции получаем, что ограничение $\alpha|_{\langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle}$ положительно определено. Значит, по Теореме 8.33 положительный индекс инерции $r_+ = r_+(\alpha)$ не меньше $n-1$. Так как из условия следует, что α невырождена, то $r_+ + r_- = \operatorname{rk} \alpha = n$, и для отрицательного индекса инерции возможны варианты $r_- = 0$ (в этом случае α положительно определена) или $r_- = 1$. В последнем случае нормальный вид α есть $\sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n$, и определитель матрицы A отрицателен (поскольку знак определителя матрицы билинейной функции не зависит от базиса), что противоречит условию. Значит, единственная возможность $r_+ = n$, $r_- = 0$, то есть α положительно определена и шаг индукции доказан. ■

Задача 8.44. *Докажите, что вещественная симметричная матрица A отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки ее угловых миноров $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ чередуются, начиная со знака "$-$". (Указание: воспользуйтесь тем, что q отрицательно определена $\Leftrightarrow$ $-q$ положительно определена).*

Задача 8.45. *Верно ли, что у матрицы положительно полуопределенной квадратичной функции все угловые миноры неотрицательны? А в обратную сторону?*

Решение. Приведем решение части задачи. Рассмотрим пример квадратичной функции с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix},$$

$a < 1$. У нее следующий набор угловых миноров $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$. Соответствующая ей квадратичная функция имеет вид

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (a-1)x_3^2.$$

Легко видеть, что она не является знакоопределенной (например, она отрицательно полуопределена на подпространстве $U := \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. ■

Задача 8.46. *Предположим, что для матрицы A вещественной квадратичной функции q на трехмерном пространстве угловые миноры δ_1, δ_2, δ_3 имеют следующий набор знаков:* $+, 0, -$ *соответственно. Чему равны положительный r_+ и отрицательный r_- индексы инерции q?*

Решение. Заметим, что так как $\delta_3 \neq 0$, то $r := \operatorname{rk} q = 3$. Мы также знаем, что $r_+ + r_- = r$. Кроме того, знак определителя матрицы квадратичной функции не меняется при замене базиса, поэтому из $\delta_3 < 0$ следует, что отрицательный индекс инерции нечетен (количество минус единиц в нормальном виде нечетно). Если $r_- = 3$, то функция была бы отрицательно определенной, что противоречит критерию Сильвестра (Задаче 8.44). Значит, единственная возможность $r_- = 1$, $r_+ = 2$. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, что данный набор значений главных миноров действительно реализуется. ■

Задача 8.47. *Предположим, что для матрицы A вещественной квадратичной функции q на трехмерном пространстве угловые миноры δ_1, δ_2, δ_3 имеют следующий набор знаков:* $0, -, 0$ *соответственно. Чему равны положительный r_+ и отрицательный r_- индексы инерции q?*

Решение. Ясно, что $\operatorname{rk} A = 2$, поэтому $r_+ + r_- = 2$. Этому равенству удовлетворяют наборы $(r_+, r_-) = (2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$. Покажем, что на самом деле реализуется только $(1,1)$. Действительно, если $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис пространства, в котором написана матрица A, то набор главных миноров $\delta_1 = 0$, $\delta_2 < 0$ отвечает ограничению q на линейную оболочку $\langle e_1, e_2 \rangle$. Легко видеть, что у этого ограничения положительный и отрицательный индексы равны 1, значит у самой q каждый из индексов не меньше 1, а так как их сумма равна 2 , то единственная возможность $(r_+, r_-) = (1,1)$.

Примером матрицы A, удовлетворяющей условию задачи, является $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ■

Замечание 8.48. Пусть A — матрица квадратичной формы q в некотором базисе n-мерного вещественного пространства V. Мы знаем, что при произвольной замене базиса в V ранг A, а также знак $\delta_n = \det A$ (при условии, что он не равен нулю), не меняются. В то же время, если q не является положительно или отрицательно определенной, то знаки угловых миноров $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ (и условие их равенства или неравенства нулю) могут измениться. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрицы одной и той же квадратичной функции в разных базисах. Мы можем гарантировать сохранение знаков всех δ_i только при треугольных заменах координат (как в алгоритме Грама-Шмидта из следующего параграфа).

8.6 Алгоритм Грама-Шмидта и метод Якоби

В данном параграфе мы изложим очень полезный алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта и применим его для доказательства теоремы Якоби, обобщающей критерий Сильвестра и Задачу 8.44.

Для изложения алгоритма нам потребуются понятия ортогональной проекции и ортогональной составляющей. Определим что это такое.

Напомним (см. Предложение 8.25), что если подпространство $U \subset V$ невырождено относительно α, то $V = U \oplus U^{\perp}$. Значит, любой вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде суммы $u + w$, где $u \in U, \quad w \in U^{\perp}$. Вектор u называется *ортогональной проекцией* v на U и обозначается $pr_U(v)$, а вектор w — *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства U и обозначается $ort_U(v)$.

То есть, в нашей прежней терминологии, $pr_U(v)$ — проекция v на подпространство U параллельно его ортогональному дополнению $U^{\perp}$, а $ort_U(v)$ — проекция v на $U^{\perp}$ параллельно U.

Пусть в конечномерном пространстве V фиксирован базис $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда мы имеем цепочку вложенных подпространств

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V,$$

где $V_k := \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

Теорема 8.49. *Пусть на V задана билинейная симметричная функция α, причем каждое из подпространств V_k предполагается невырожденным относительно α. Тогда в V существует единственный базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ такой, что*

1) *$\{f_1, \dots, f_n\}$ ортогонален относительно α и*

2) *матрица перехода C от $\{e_1, \dots, e_n\}$ к $\{f_1, \dots, f_n\}$ верхняя треугольная с единицами на главной диагонали (в частности, $\langle f_1, \dots, f_k \rangle = V_k, \quad 1 \le k \le n$).*

Такой базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ называется *ортогонализацией* базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Доказательство. Ортогонализацию $\{f_1, \dots, f_n\}$ будем строить пошагово — сначала построим ортогонализацию $\{f_1\}$ базиса $\{e_1\}$ в V_1, затем дополним ее вектором f_2 до ортогонализации

$\{f_1, f_2\}$ базиса $\{e_1,\, e_2\}$ в V_2 и т.д. При этом для каждого $k,\ 1 \le k \le n$ матрица перехода C_k от базиса $\{e_1, \dots, e_k\}$ к базису $\{f_1, \dots, f_k\}$ в V_k будет верхняя треугольная с единицами на главной диагонали. Очевидно, что каждая из матриц C_k тогда будет левым верхним углом в C_{k+1} (и в $C = C_n$). Читателю рекомендуется разобраться в геометрическом смысле проводимых построений (при необходимости рисовать картинки).

Пусть $k = 1$. Так как матрица перехода $C_1 = (1)$, то $f_1 = e_1$.

Пусть $k = 2$. Подпространство $V_1 \subset V_2$ по условию невырождено, поэтому $V_2 = V_1 \oplus V_1^{\perp}$ (здесь ортогональное дополнение к V_1 берется в V_2). Пусть $e_2 = v_1 + f_2$ — соответствующее представление вектора e_2, где $v_1 = pr_{V_1} e_2 \in V_1,\ \ f_2 = ort_{V_1} e_2$.

Мы утверждаем, что вектор f_2 — искомый. Действительно, поскольку $f_2 \in V_1^{\perp}$, то $f_2 \perp f_1$, кроме того, поскольку $f_2 - e_2$ лежит в $V_1 = \langle e_1 \rangle$, то матрица перехода C_2 от $\{e_1, e_2\}$ к $\{f_1, f_2\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть является верхней треугольной с единицами на главной диагонали.

Легко видеть, что вектор f_2 с указанными свойствами единственный. В самом деле, пусть f_2' — еще один вектор с требуемыми свойствами. Тогда $f_2' = e_2 - v_1'$, где $v_1' \in V_1$. Имеем $f_2 - f_2' = v_1' - v_1 \in V_1 \cap V_1^{\perp}$, что равно нулю, поскольку подпространство V_1 по условию невырождено.

Заметим, что $\langle f_1, f_2 \rangle = V_2$.

Предположим, что уже построены векторы $f_1, \dots, f_k$, составляющие ортогональный базис в V_k, причем матрица перехода C_k от $\{e_1 \dots, e_k\}$ к $\{f_1, \dots, f_k\}$ верхняя треугольная с единицами на главной диагонали. Подпространство V_k невырождено, поэтому $V_{k+1} = V_k \oplus V_k^{\perp}$ (ортогональное дополнение к V_k здесь берется в V_{k+1}). Пусть $e_{k+1} = v_k + f_{k+1}$ — соответствующее представление вектора e_{k+1}, где $v_k = pr_{V_k} e_{k+1} \in V_k,\ \ f_{k+1} = ort_{V_k} e_{k+1}$.

Мы утверждаем, что вектор f_{k+1} — искомый. Действительно, так как $f_{k+1} \in V_k^{\perp}$, то f_{k+1} ортогонален векторам $f_1, \dots, f_k$ и, кроме того, разность $f_{k+1} - e_{k+1} = -v_k$ лежит в $V_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, поэтому в $k+1$-м столбце матрицы C_{k+1} внизу стоит 1, то есть матрица перехода C_{k+1} от базиса $\{e_1 \dots, e_{k+1}\}$ к $\{f_1, \dots, f_{k+1}\}$ снова верхняя треугольная с единицами на главной диагонали.

Легко видеть, что вектор f_{k+1} с требуемыми свойствами единственный. Действительно, пусть f_{k+1}' — еще один вектор с нужными свойствами. Тогда $f_{k+1} = e_{k+1} - v_k'$, где $v_k' \in V_k$, откуда $f_{k+1} - f_{k+1}' = v_k - v_k' \in V_k \cap V_k^{\perp}$, что равно нулю в силу невырожденности подпространства V_k.

Заметим, что $\langle f_1, \dots, f_{k+1} \rangle = V_{k+1}$.

Продолжая указанный алгоритм, получаем ортогональный базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ в пространстве V с нужными свойствами. ■

Из доказанной Теоремы мы сейчас выведем важное следствие. Пусть при тех же условиях, что и в Теореме, A — матрица α в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$. Пусть $A_k,\ 1 \le k \le n$ — подматрица матрицы A порядка k, стоящая в левом верхнем углу. Очевидно, что A_k — матрица ограничения $\alpha|_{V_k}$ в базисе $\{e_1, \dots, e_k\}$ пространства V_k. Пусть $\delta_k := \det A_k$ — угловые миноры матрицы A. По условию все они отличны от нуля. Введем еще $\delta_0 := 1$.

Следствие 8.50. *В введенных выше обозначениях*

$$q_\alpha(f_k) = \alpha(f_k, f_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}},\ 1 \le k \le n.$$

Доказательство. Для $1 \le k \le n$ имеем

$$\operatorname{diag}(q_\alpha(f_1), \dots, q_\alpha(f_k)) = C_k^T A_k C_k,$$

откуда, переходя к определителям и используя то, что матрицы C_k верхние треугольные с единицами на главной диагонали, получаем требуемое. ■

Пусть теперь A — матрица вещественной симметричной функции α в некотором базисе.

Следствие 8.51. *(Метод Якоби). При условии, что все главные миноры $\delta_1, \dots, \delta_n$ матрицы A отличны от нуля, отрицательный индекс инерции α равен числу перемен знака в последовательности $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$.*

Доказательство. Из предыдущего Следствия вытекает, что указанное число равно числу отрицательных коэффициентов в диагональном виде α. ■

Из доказанного Следствия легко также следует критерий Сильвестра а также его обобщение на случай отрицательно определенных функций (см. Задачу 8.44).

А что будет, если в последовательности главных миноров есть нули? Оказывается, результат теоремы Якоби сохраняется, если нули изолированные (то есть нет двух идущих подряд нулей). Например, рассмотрим ситуацию $\delta_k > 0$, $\delta_{k+1} = 0$, $\delta_{k+2} < 0$. Пусть (r_+^k, r_-^k) — сигнатура для ограничения на k-мерное координатное подпространство, причем так как $\delta_k \ne 0$, то $r_+^k + r_-^k = k$. При переходе к $k+1$-мерному координатному пространству индексы инерции уменьшиться не могут, в то же время $r_+^{k+1} + r_-^{k+1} < k+1$, так как $\delta_{k+1} = 0$, поэтому $r_+^{k+1} = r_+^k$, $r_-^{k+1} = r_-^k$. При переходе к $k+2$-мерному пространству и положительный, и отрицательный индексы инерции могут увеличиться максимум на 1, с другой стороны, так как $\delta_{k+2} \ne 0$, то $r_+^{k+2} + r_+^{k+2} = k+2$, поэтому $r_+^{k+2} = r_+^{k+1} + 1$, $r_-^{k+2} = r_-^{k+1} + 1$, то есть отрицательный индекс инерции увеличился на 1. (Возможна ли ситуация $\delta_k > 0$, $\delta_{k+1} = 0$, $\delta_{k+2} > 0$?)

8.7 Кососимметрические билинейные функции

Пусть $f_1, f_2 \colon V \to \mathbb{K}$ — линейные функции, $f_i \in V^*$. Легко проверить, что функция

$$\alpha := f_1 f_2, \ \ \alpha(u,v) = f_1(u) f_2(v) \ \forall\, u, v \in V$$

билинейна и имеет ранг 1, и любая билинейная функция ранга 1 имеет такой вид (см. Пример 8.13 и Задачу 8.14). Пусть β — проекция α на подпространство кососимметрических функций (см. формулу (44)), тогда

$$\beta(u,v) = \frac{1}{2}(\alpha(u,v) - \alpha(v,u) = \frac{1}{2}(f_1(u)f_2(v) - f_1(v)f_2(u)) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} f_1(u) & f_1(v) \\ f_2(u) & f_2(v) \end{vmatrix}.$$

Для произвольной пары линейных функций $f_1, f_2 \in V^*$ определим билинейную кососимметрическую функцию $f_1 \wedge f_2$ формулой $(f_1 \wedge f_2)(u,v) := \begin{vmatrix} f_1(u) & f_1(v) \\ f_2(u) & f_2(v) \end{vmatrix} \ \ \forall\, u, v \in V$.

Напомним, что пространство всех билинейных функций на линейном пространстве V мы обозначили $\mathcal{B}(V)$. Если $\dim V = n$, то $\dim \mathcal{B}(V) = n^2$. Подпространство в $\mathcal{B}(V)$, состоящее из кососимметрических билинейных функций, обозначим $\mathcal{B}^-(V)$. Если $\dim V = n$, то $\dim \mathcal{B}^-(V) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Предложение 8.52. *Если* $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ *образуют базис в* V^**, то* $\{\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$ *— базис в* $\mathcal{B}^-(V)$.

Доказательство. Мы знаем (см. Задачу 5.98), что произвольный базис в V^* биортогонален некоторому базису в V. Пусть $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ биортогонален базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V. Тогда для $1 \le i < j \le n$ имеем

$$(\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j)(e_k, e_l) = \begin{vmatrix} \varepsilon_i(e_k) & \varepsilon_i(e_l) \\ \varepsilon_j(e_k) & \varepsilon_j(e_l) \end{vmatrix} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = i,\ l = j; \\ -1, & \text{если } k = j,\ l = i. \end{cases}$$

Пусть теперь

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_{ij} \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j = 0$$

— произвольная линейная зависимость. Вычисляя значение стоящей слева билинейной функции на всевозможных парах (e_k, e_l), $1 \le k < l \le n$, получаем, что $\lambda_{ij} = 0$ для всех i, j. Поэтому указанные в условии билинейные кососимметрические функции действительно линейно независимы. Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что $\dim \mathcal{B}^-(V) = \frac{n(n-1)}{2}$, хотя можно и явно записать разложение

$$\beta = \sum_{1 \le i < j \le n} \beta(e_i, e_j) \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j$$

произвольной билинейной кососимметрической функции β по указанной в условии системе (ср. равенство (42)). ■

К какому каноническому виду можно привести кососимметрическую функцию? Оказывается, ответ для кососимметрических функций не зависит от поля $\mathbb{K}$.

Пусть $\beta \colon V \times V \to \mathbb{K}$ — билинейная кососимметрическая функция на n-мерном пространстве V. Базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V называется *симплектическим* (относительно β), если

$$\beta(e_{2k-1}, e_{2k}) = -\beta(e_{2k}, e_{2k-1}) = 1 \quad \text{при } \ k = 1, \ldots, m$$

$$\beta(e_i, e_j) = 0 \quad \text{во всех остальных случаях.}$$

Иначе говоря, матрица функции β имеет в этом базисе блочно-диагональный вид с m ненулевыми блоками вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что при этом $\operatorname{rk} \beta = 2m$. Эквивалентно,

$$\beta = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 + \ldots + \varepsilon_{2m-1} \wedge \varepsilon_{2m},$$

где $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ — биортогональный базис к $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Теорема 8.53. *Для любой кососимметричной билинейной функции существует симплектический базис.*

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по n. При $n = 1$ доказываеть нечего (любая кососимметрическая функция на одномерном пространстве нулевая). Пусть $n > 1$. Если $\beta = 0$, то доказывать опять-таки нечего. Если $\beta \ne 0$, то существуют такие векторы e_1 и e_2, что $\beta(e_1, e_2) \neq 0$. Умножив один из этих векторов на подходящий скаляр, можно добиться того, чтобы

$$\beta(e_1, e_2) = -\beta(e_2, e_1) = 1.$$

Матрица ограничения функции β на $\langle e_1, e_2 \rangle$ в базисе $\{e_1, e_2\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и, в частности, невырождена. Согласно Предложению 8.25,

$$V = \langle e_1, e_2, \rangle \oplus \langle e_1, e_2, \rangle^{\perp}.$$

По предположению индукции в пространстве $\langle e_1, e_2, \rangle^{\perp}$ для $\beta|_{\langle e_1, e_2, \rangle^{\perp}}$ существует симплектический базис $\{e_3, \ldots, e_n\}$. Добавляя к нему векторы e_1 и e_2, получаем симплектический базис $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ всего пространства V. ∎

Следствие 8.54. *Ранг кососимметрической билинейной функции всегда является четным числом.*

Задача 8.55. *Докажите, что определитель целочисленной кососимметричной матрицы A является квадратом целого числа.*

Решение. Пусть кососимметрическая матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{Z})$ невырождена. Тогда ее можно рассматривать как матрицу с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$. В силу предыдущей теоремы существует невырожденная матрица $C \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{Q})$ такая, что $A = C^T I C$, где I — блочно-диагональная матрица из блоков вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\det A = (\det C)^2$, и целое число $\det A$ является квадратом рационального числа. Тогда $\det A$ является квадратом целого числа. ∎

9 Евклидовы пространства

Евклидовы пространства размерности 1, 2 и 3 — это те векторные[29] пространства, с которыми мы имели дело в курсе аналитической геометрии. В таких пространствах имеют смысл понятия длины вектора, угла между векторами, расстояния между подмножествами, объема параллелепипеда, построенного на системе векторов и т.д. Для определения этих понятий на вещественном векторном пространстве необходимо скалярное произведение — фиксированная билинейная симметричная положительно определенная функция.

9.1 Определение и примеры

Определение 9.1. *Евклидовым пространством* называется пара (V, α), состоящая из вещественного векторного пространства V и билинейной симметричной положительно определенной функции α на нем. Такая функция называется *скалярным произведением.*

[29] В курсе аналитической геометрии также рассматривались пространства, состоящие из точек, а не векторов (первые, в отличие от вторых, нельзя складывать), такие пространства называются *аффинными* пространствами и изучаются в более полных курсах линейной алгебры.

Если не оговорено противное, все рассматриваемые евклидовы пространства предполагаются конечномерными.

В дальнейшем скалярное произведение $\alpha(u,\, v)$ для простоты мы будем обозначать просто скобками (u, v). При этом соответствующая квадратичная функция принимает неотрицательные значения, и мы определим $|v| := \sqrt{(v, v)}$ *модуль* вектора v. Заметим, что для любого $v \neq 0$ его модуль $|v| > 0$.

За исключением нульмерного случая, скалярных произведений (то есть билинейных симметричных положительно определенных функциий) на V бесконечно много, в определении евклидова пространства предполагается, что фиксировано одно из них. Часто евклидовым пространством мы будем называть само пространство V, предполагая фиксированным некоторое скалярное произведение на нем.

Из положительной определенности скалярного произведения следует, что оно — невырожденная билинейная функция. Кроме того, его ограничение на любое подпространство также положительно определено, и значит также невырождено.

Из общих результатов о квадратичных функциях мы можем вывести ряд следствий для евклидовых пространств.

Предложение 9.2. *В любом (конечномерном) евклидовом пространстве есть ортонормированный базис.*

Доказательство. Это следует либо непосредственно из Предложения 8.30, либо может быть выведено из Теоремы 8.49: для этого нужно взять произвольный базис в V, ортогонализировать его по Граму-Шмидту и затем нормировать. ∎

Приведем примеры евклидовых пространств.

Пример 9.3. Пусть $V = \mathbb{R}^n$, и для произвольных столбцов $x, y \in V$ зададим их скалярное произведение как $(x, y) = x^T y$. (Читателю предлагается убедиться в выполнениии условий из определения евклидова пространства самостоятельно). Поскольку в любом конечномерном евклидовом пространстве $(V,\, \alpha)$ есть ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то, отождествляя V с пространством $\mathbb{R}^n$ координатных столбцов в этом базисе мы одновременно отождествим скалярное произведение $\alpha(u, v)$ произвольных векторов $u,\, v \in V$ с произведением $\overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v}$ их координатных столбцов. То есть любое евклидово n-мерное пространство изоморфно данному (причем изоморфизм линейных пространств сохраняет также скалярные произведения). В обозначениях Предложения 4.49 полученный результат можно переписать так: выбор ортонормированного базиса e в V задает такой линейный изоморфизм $\varphi_e \colon V \to \mathbb{R}^n$ (заметим, что $\varphi_e(v)$ — то же что и $\overrightarrow{v}$ выше), что $\alpha(u, v) = \varphi_e(u)^T \varphi_e(v)$.

Еще раз отметим, что, выбирая ортонормированный базис в n-мерном евклидовом пространстве $(V,\, \alpha)$, мы отождествляем его с евклидовым пространством из Примера 9.3.

Пример 9.4. Пусть $V = \mathbb{R}^n$, и для произвольных столбцов $x, y \in V$ зададим их скалярное произведение как $(x, y) = x^T G y$, где G — произвольная симметричная положительно определенная матрица[30] порядка n. Тогда данная пара является евклидовым пространством.

[30]то есть матрица положительно определенной билинейной симметричной функции. Как мы помним, условие положительной определенности в силу критерия Сильвестра равносильно положительности всех угловых миноров.

На первый взгляд, это — более общий пример n-мерного евклидова, чем предыдущий. Однако это не так. А именно, в $\mathbb{R}^n$ можно найти такой базис (то есть такой набор базисных столбцов), что относительно него заданное выше скалярное произведение будет задаваться формулой из Примера 9.3. Это просто следствие того факта, что в любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. В нашем случае это означает, что можно найти такой набор столбцов $\{c_1, \ldots, c_n\}$, что $c_i^T G c_j = \delta_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n$.

Пусть C — матрица, составленная из этих столбцов, то есть матрица перехода от стандартного базиса к базису $\{c_1, \ldots, c_n\}$. Тогда $C^T GC = E$, откуда $G = (C^{-1})^T EC^{-1}$. Мы видим, что матрица G является матрицей скалярного произведения в базисе, который получается из ортонормированного с помощью матрицы перехода C^{-1}. Поскольку любая невырожденная матрица порядка n является матрицей перехода от данного базиса в n-мерном пространстве, мы видим, что *любая положительно определенная матрица порядка n является матрицей скалярного произведения евклидова n-мерного пространства в некотором базисе.*

Пример 9.5. Пусть $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, для матриц $X, Y \in V$ определим их скалярное произведение (X, Y) как $\mathrm{tr}\,(X^T Y)$. Читателю предлагается проверить, что это — действительно скалярное произведение. Заметим, что $\mathrm{tr}\,(X^T Y) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} y_{ij}$, это показывает, что базис в V, состоящий из матричных единиц (произвольным образом упорядоченных), является ортонормированным.

Наконец, приведем пример бесконечномерного евклидова пространства.

Пример 9.6. Пусть $V = C[0,1]$ — пространство непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0, 1]$. Определим скалярное произведение функций формулой $(f, g) = \int_0^1 f(x)(g(x)\,dx$. Читатель легко убедится, что так определенная функция $V \times V \to \mathbb{R}$ является билинейной, симметричной и положительно определенной. Таким образом, данная пара — евклидово пространство. Легко видеть, что ограничение положительно определенной билинейной симметричной функции на любое подпространство также обладает данными свойствами, поэтому, скажем, подпространство многочленов $\mathbb{R}[x]_n \subset V$ с указанным скалярным произведением также является (на это раз конечномерным) евклидовым пространством.

9.2 Ортогональное дополнение к подпространству

Продолжим выводить следствия из общих результатов о билинейных функциях.

Пусть $U \subset V$ — произвольное подпространство евклидова пространства V. Так как ввиду положительной определенности скалярное произведение невырождено, из Предложения 8.21 получаем, что $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ и $(U^\perp)^\perp = U$, а так как ограничение скалярного произведения на подпространство $U \subset V$ невырождено, из Предложения 8.25 — что $V = U \oplus U^\perp$. Значит, любой вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде суммы $u + w$, где $u \in U, \quad w \in U^\perp$. Вектор u называется *ортогональной проекцией* v на U и обозначается $pr_U(v)$, а вектор w — *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства U и обозначается $ort_U(v)$. То есть, в нашей прежней терминологии, $pr_U(v)$ — проекция v на подпространство U параллельно его ортогональному дополнению $U^\perp$, а $ort_U(v)$ — проекция v на $U^\perp$ параллельно U.

В частности, линейный оператор $pr_U \colon V \to V$, сопоставляющий произвольному вектору $v \in V$ его ортогональную проекцию $pr_U(v)$ на подпространство $U \subset V$, называется *ортогональным про-*

ектором на U. Это — частный случай проектора, когда проектирование происходит параллельно ортогональному дополнению.

Задача 9.7. *Пусть V — евклидово пространство из Примера 9.5. Докажите, что ортогональное дополнение к подпространству $\mathrm{Mat}_n^+(\mathbb{R}) \subset V$ симметрических матриц совпадает с подпространством $\mathrm{Mat}_n^-(\mathbb{R}) \subset V$ кососимметрических матриц, и наоборот, ортогональное дополнение к подпространству $\mathrm{Mat}_n^-(\mathbb{R}) \subset V$ кососимметрических матриц совпадает с подпространством $\mathrm{Mat}_n^+(\mathbb{R}) \subset V$ симметрических матриц.*

Решение. Покажем, что кососимметрическая матрица Y ортогональна любой симметрической матрице X. В самом деле,

$$(X, Y) = \mathrm{tr}\,(X^T Y) = \mathrm{tr}\,(XY) = \mathrm{tr}\,(YX) = -\mathrm{tr}(Y^T X) = -(Y, X),$$

откуда $(X, Y) = 0$. Значит, $\mathrm{Mat}_n^-(\mathbb{R}) \subset (\mathrm{Mat}_n^+(\mathbb{R}))^\perp$. С другой стороны, эти два подпространства имеют одинаковые размерности. Поэтому они совпадают. Второе утверждение проще всего вывести из доказанного с использованием $(U^\perp)^\perp = U$. ∎

Пусть V — евклидово n-мерное пространство, $U \subset V$ — его подпространство, которое является линейной оболочкой $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ некоторой системы векторов $u_i,\ i = 1, \ldots, k$ из V. Тогда ортогональное дополнение $U^\perp$ задается системой уравнений

$$U^\perp = \{w \in V \mid (u_i, w) = 0,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Если $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ — координатные столбцы векторов $u_1, \ldots, u_k$ относительно некоторого ортонормированного базиса пространства V, то $U^\perp$ в этом базисе задается СЛОУ $A^T x = 0$. Если Φ — фундаментальная матрица этой СЛОУ, то ее столбцы образуют некоторый базис в $U^\perp$. Поэтому СЛОУ $\Phi^T y = 0$ задает подпространство $(U^\perp)^\perp = U$, то есть линейную оболочку столбцов матрицы A. Таким образом, мы получаем новое доказательство (и интерпретацию) Теоремы 4.45 (в случае поля $\mathbb{R}$). Отметим, что при этом связь между $\mathrm{rk}\,A$ и размерностью пространства решений системы $Ax = 0$ превращается в результат о связи размерностей U и $U^\perp$.

Пусть в подпространстве $U \subset V$ евклидова пространства V задан ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Тогда для любого $v \in V$ его ортогональная проекция $pr_U(v)$ задается формулой

$$pr_U(v) = \sum_{i=1}^{k} (v, e_i) e_i.$$

Действительно, $\sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$ — такой вектор из U, что $v - \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i \in U^\perp$ (а значит эта разность есть $ort_U(v)$). В самом деле,

$$\left(v - \sum_{i=1}^{k} (v, e_i) e_i, e_j \right) = (v, e_j) - (v, e_j) = 0 \ \text{ при } j = 1, \ldots, k.$$

В случае, когда дан только ортогональный базис $\{f_1, \ldots, f_k\}$ в U, ортогональная проекция $pr_U(v)$ находится по формуле

$$pr_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v, f_i)}{|f_i|^2} f_i, \tag{51}$$

в чем читатель легко убедится самостоятельно.

9.3 Описание линейных функций на евклидовом пространстве

Скалярное произведение является билинейной функцией, поэтому если зафиксировать один из его аргументов, получится линейная функция. Оказывается, так можно получить любую линейную функцию на конечномерном евклидовом пространстве.

Предложение 9.8. *Для любой линейной функции f на евклидовом пространстве V существует такой единственный вектор $w \in V$, что $f(v) = (v, w) \quad \forall\, v \in V$.*

Доказательство. Скалярное произведение (v, w) как функция от вектора $v \in V$ при фиксированном $w \in V$ является линейной функцией на V. Рассмотрим отображение

$$g\colon V \to V^*, \quad g(w) = (\cdot, w).$$

Его линейность следует из линейности скалярного произведения по второму аргументу. Таким образом, g — линейное отображение между пространствами одинаковой размерности. Чтобы доказать, что g — изоморфизм, достаточно убедиться в его инъективности. Если $g(w) = 0$ как линейная функция, то $\forall\, v \in V\ (v, w) = 0$, тогда, полагая $v = w$, получаем $|w| = 0$, то есть $w = 0$. В частности, g биективно, что равносильно утверждению доказываемого Предложения. ■

Таким образом, в отличие от общих линейных пространств, для (конечномерного) евклидова пространства V существует канонический (не зависящий от базиса, а только от скалярного произведения) изоморфизм $g\colon V \to V^*$.

Задача 9.9. *Докажите, что построенный изоморфизм $g\colon V \to V^*$ имеет единичную матрицу в паре базисов, состоящей из ортонормированного базиса в V и биортогонального к нему базиса в V^*.*

Заметим, что для евклидовых пространств есть также канонический изоморфизм между пространствами линейных операторов и билинейных функций, который мы опишем в разделе 10.4.

9.4 Матрица Грама и неравенство Коши-Буняковского

Определение 9.10. *Матрицей Грама* $G(v_1, \ldots, v_k)$ системы векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$ евклидова пространства V называется матрица $G = (g_{ij}),\ g_{ij} = (v_i, v_j)$, составленная из их попарных скалярных произведений.

В частности, матрица скалярного произведения (как билинейной функции) в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ называется матрицей Грама этого базиса.

Предложение 9.11. *Для любой системы векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$ евклидова пространства V выполнено неравенство $\det G(v_1, \ldots, v_k) \geq 0$, причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно зависима.*

Доказательство. Если система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно независима, то она является базисом в своей линейной оболочке $U := \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Ограничение скалярного произведения на любое подпространство $U \subset V$ положительно определено, откуда (например, по критерию Сильвестра) $\det G(v_1, \ldots, v_k) > 0$.

Если система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно зависима, то пусть $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$ — нетривиальная линейная зависимость. Скалярно умножая левую и правую части этого равенства на векторы v_j, $1 \le j \le k$, получаем $\sum_{i=1}^k \lambda_i (v_i, v_j) = 0$, $1 \le j \le k$, что дает линейную зависимость между строками матрицы $G(v_1, \ldots, v_k)$ с теми же коэффициентами. ■

Ключом к геометрии евклидова пространства является неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 9.12. *Для любых двух векторов u, v евклидова пространства V имеет место неравенство $|(u, v)| \le |u||v|$, причем оно превращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы u и v линейно зависимы.*

Доказательство. 1-й способ. Согласно предыдущему Предложению,

$$\det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,v) \\ (v,u) & (v,v) \end{pmatrix} = |u|^2|v|^2 - (u,v)^2 \ge 0,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда u и v линейно зависимы.

2-й способ. Если $u = 0$, то, с одной стороны, для любого v векторы u и v линейно зависимы, с другой стороны, неравенство Коши-Буняковского, очевидно, превращается в равенство. Если $u \ne 0$, рассмотрим квадратный трехчлен

$$(tu + v, tu + v) = |u|^2 t^2 + 2(u, v)t + |v|^2,$$

который принимает неотрицательные значения для любого $t \in \mathbb{R}$. Значит, его дискриминант неположителен, то есть $(u, v)^2 - |u|^2|v|^2 \le 0$, причем u и v линейно зависимы тогда и только тогда, когда трехчлен имеет вещественный корень, что эквивалентно тому, что дискриминант равен нулю. ■

Задача 9.13. *Докажите, что для любых непропорфиональных функций f, $g \in C[0, 1]$ верно неравенство*

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 < \int_0^1 f^2(x)\,dx \int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

В частности, для непрерывной функции $f \ne const$

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 < \int_0^1 f(x)^2\,dx.$$

Следствие 9.14. *(Неравенство треугольника). Для любых двух векторов u и v евклидова пространства*

$$|u + v| \le |u| + |v|.$$

Доказательство.

$$(u + v, u + v) = |u|^2 + 2(u, v) + |v|^2 \le |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 = (|u| + |v|)^2. \quad ■$$

Из неравенства треугольника следует, что для любых трех векторов u, v, w евклидова пространства V имеет место неравенство

$$|u - w| \le |u - v| + |v - w|. \tag{52}$$

Наличие скалярного произведения позволяет измерять углы и расстояния в евклидовом пространстве.

Пусть $u, v \neq 0$ — векторы евклидова пространства V. Тогда из неравенства Коши-Буняковского

$$-1 \leq \frac{(u,v)}{|u||v|} \leq 1,$$

поэтому существует единственный угол α, $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ такой, что $\cos\alpha = \frac{(u,v)}{|u||v|}$. По определению, он называется углом между ненулевыми векторами u и v. То есть мы возвращаемся к известной из аналитической геометрии формуле $(u,v) = |u||v|\cos\alpha$ (только теперь это не определение скалярного произведения, а следствие из определения угла).

9.5 Расстояния в евклидовом пространстве

Определим функцию $\rho\colon V \times V \to \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве V равенством $\rho(u,v) := |u - v|$. Тогда она обладает следующими свойствами:

(i) $\rho(u,v) = \rho(v,u)$;

(ii) $\rho(u,u) = 0$; $\rho(u,v) > 0$ при $u \neq v$;

(iii) $\rho(u,w) \leq \rho(u,v) + \rho(v,w)$.

Заметим, что (iii) — просто неравенство треугольника (52) в других обозначениях. Таким образом, ρ является метрикой на V. Значит, в евклидовом пространстве определены все понятия, которые могут быть заданы с помощью метрики (расстояние между подмножествами, понятия открытого шара и открытого множества и т.п.).

Например, если A и B — произвольные подмножества в V, то определим расстояние между ними как

$$\rho(A,B) := \inf\{\rho(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Получим формулу для расстояния от вектора $v \in V$ до подпространства $U \subset V$. Напомним, что $V = U \oplus U^{\perp}$ и $v = pr_U(v) + ort_U(v)$.

Предложение 9.15. $\rho(v,U) = |ort_U(v)|$.

Доказательство. $\forall\, u \in U$ имеем

$$|v - u|^2 = |pr_U(v) - u + ort_U(v)|^2 = |u - pr_U(v)|^2 + |ort_U(v)|^2,$$

откуда $|v - u|^2 \geq |ort_U(v)|^2$, причем $u = pr_U(v)$ — единственный вектор из U, для которого равенство достигается, то есть $pr_U(v)$ — единственный ближайший к v вектор из U. ■

9.6 Замечание о метрических пространствах

Далее нам потребуются некоторые простейшие факты о топологии метрических пространств, поэтому дадим здесь соответствующие общие определения.

Пусть (X,ρ_X) — метрическое пространство. *Открытым шаром* с центром в точке $x \in X$ радиуса $\varepsilon > 0$ называется его подмножество $B_\varepsilon(x) := \{x' \in X \mid \rho(x,x') < \varepsilon\}$. Подмножество $U \subset X$ метрического пространства (X,ρ_X) называется *открытым*, если $\forall x \in U$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$. Множество всех открытых подмножеств в X (включающее также пустое множество $\varnothing$) называется *топологией метрического пространства* (X,ρ_X) (оно в самом деле удовлетворяет аксиомам топологии и превращает множество X в топологическое пространство). Например, стандартная топология на $\mathbb{R}^n$, рассматриваемая в анализе — это топология метрического пространства $(\mathbb{R}^n,\rho)$, где

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

— евклидова метрика.

Чтобы определить понятие непрерывного отображения между метрическими пространствами, достаточно рассматривать только открытые шары. Отображение $\varphi\colon (X,\rho_X) \to (Y,\rho_Y)$ между метрическими пространствами называется *непрерывным*, в точке $x \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\varphi(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(\varphi(x))$. Отображение φ непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$. Читатель легко убедится, что это определение в случае метрических пространств $(\mathbb{R}^n,\rho)$ (где ρ — евклидова метрика) и $(\mathbb{R},\rho)$, где $\rho(a,b) = |a-b|$ (на самом деле это частный случай метрического пространства $(\mathbb{R}^n,\rho)$ при $n = 1$) приводит к обычному понятию непрерывной функции n переменных, используемому в анализе.

Отображение $\varphi\colon (X,\rho_X) \to (Y,\rho_Y)$ между метрическими пространствами называется *изометрией*, если оно биективно и $\forall x,x' \in X$ $\rho_Y(\varphi(x),\varphi(x')) = \rho_X(x,x')$. Легко видеть, что обратное к изометрии отображение также является изометрией, и что для любого $\varepsilon > 0$ изометрия определяет биекцию между множествами открытых шаров радиуса ε в метрических пространствах (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y). Из этого очевидно, что изометрия является непрерывным отображением (и даже гомеоморфизмом). Если V — n-мерное евклидово пространство с определенной выше метрикой $\rho_V(u,v) = |u-v|$, то выбор ортонормированного базиса e в V определяет линейный изоморфизм $\varphi_e\colon V \to \mathbb{R}^n$, который является изометрией $(V,\rho_V) \to (\mathbb{R}^n,\rho)$. Заметим, что если в V выбран произвольный базис, то мы также получим изометрию с метрическим пространством $(\mathbb{R}^n,\rho')$, где

$$\rho' = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)}$$

— метрика, задаваемая с помощью матрицы Грама G выбранного базиса.

Любое подмножество $Z \subset X$ метрического пространства (X,ρ_X) само является метрическим пространством относительно метрики $\rho_Z = \rho_X|_{Z\times Z}$, являющейся ограничением метрики ρ_X на Z. Легко проверяется, что ограничение $f|_Z$ любой непрерывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ на Z будет непрерывно как отображение $(Z,\rho_Z) \to \mathbb{R}$.

Далее в курсе нам потребуется следующее утверждение: произвольная квадратичная функция $q\colon V \to \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве V является непрерывной. Для доказательства этого факта можно рассуждать следующим образом. Выберем произвольный ортонормированный базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$ в V, в соответствующих координатах квадратичная функция запишется как однородный многочлен 2-й степени $p_q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$. Из курса анализа мы знаем, что он — непрерывная функция на $(\mathbb{R}^n, \rho)$, где ρ — евклидова метрика. А так как выбор базиса задает непрерывное отображение $\varphi_e \colon V \to \mathbb{R}^n$, то $q = p_q \circ \varphi_e$ непрерывна на V (поскольку является композицией непрерывных отображений).

9.7 Алгоритм Грама-Шмидта

Теорема 9.16. *Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — произвольный базис в евклидовом пространстве V. Тогда существует единственный ортогональный базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в V, матрица перехода к которому от исходного базиса верхняя треугольная с единицами на главной диагонали.*

Базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ называется *ортогонализацией* базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Заметим, что из условия следует, что линейные оболочки $\langle e_1, \ldots, e_k\rangle$ и $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle$ совпадают при $k = 1, \ldots, n$.

Заметим еще, что вместо базиса в V можно ортогонализовать произвольную линейно независимую систему векторов в V (тогда она будет базисом в своей линейной оболочке, и рассуждение можно применить к последней).

Доказательство. Из вида матрицы перехода следует, что для f_1 единственная возможность — положить $f_1 = e_1$. Пусть система с требуемыми свойствами $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ уже построена. Из вида матрицы перехода следует, что мы должны искать f_k в виде $f_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i e_i$, но так как $V_{k-1} := \langle e_1, \ldots, e_{k-1}\rangle = \langle f_1, \ldots, f_{k-1}\rangle$ (это снова следует из вида матрицы перехода и предположения индукции), то, эквивалентно, f_k можно также искать в виде $f_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i$. Условия $f_k \perp f_j, \ldots, f_{k-1}$ (что равносильно $f_k \in V_{k-1}^{\perp}$) записываются в виде системы $(f_k, f_j) = 0,\ j = 1, \ldots, k-1$, более подробно

$$\left(e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i,\ f_j\right) = (e_k, f_j) + \lambda_j |f_j|^2 = 0,$$

откуда $\lambda_j = -\frac{(e_k, f_j)}{|f_j|^2},\ j = 1, \ldots, k-1$. Теперь формула (51) показывает, что $f_k = ort_{V_{k-1}} e_k$. Так как $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис, то $e_k \notin V_{k-1}$ и поэтому $f_k \neq 0$. Тем самым шаг построения ортогонального базиса завершен. ∎

Пример 9.17. Рассмотрим подпространство $\mathbb{R}[x]_2$ в бесконечномерном евклидовом пространстве $C[0,1]$ из Примера 9.6. Найдем ортогонализацию $\{f_1, f_2, f_3\}$ "стандартного" базиса $\{1, x, x^2\}$ в нем. Имеем

$$f_1 = 1,\ \ f_2 = x - \frac{(x,1)}{|1|^2} 1 = x - \frac{1}{2},\ \ f_3 = x^2 - \frac{(x^2,1)}{|1|^2} 1 - \frac{(x^2, x - \frac{1}{2})}{|x - \frac{1}{2}|^2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Геометрический смысл описанного в Теореме алгоритма можно представить следующим образом. Натянем на исходный неортогональный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ n-мерный параллелепипед $\Pi[e_1, \ldots, e_n]$. Тогда изложенный выше алгоритм сводится к следующему: вектор $f_1 = e_1$ мы оставляем тем же, а вектор e_2 заменяем на высоту f_2 параллелепипеда $\Pi[e_1, e_2]$ относительно основания $\Pi[e_1]$, далее вектор e_3 — на высоту f_3 параллелепипеда $\Pi[e_1, e_2, e_3]$ относительно основания $\Pi[e_1, e_2]$ и т.д. Ясно, что при этом получается прямоугольный параллелепипед $\Pi[f_1, \ldots, f_n]$

того же n-мерного объема (если правильно определить это понятие).[31]. Кроме того, каждый из k-мерных параллелепипедов $\Pi[e_1, \ldots, e_k]$ при этом заменяется прямоугольным k-мерным параллелепипедом $\Pi[f_1, \ldots f_k]$ того же k-мерного объема.

Используя приведенные соображения, можно обосновать, что квадрат n-мерного объема $\mathrm{Vol}(e_1, \ldots, e_n)$ параллелепипеда $\Pi[e_1, \ldots, e_n]$, построенного на базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$, равен $\det G$, где G — матрица Грама скалярного произведения в этом базисе. Действительно, по предшествующей Теореме у базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ есть ортогонализация $\{f_1, \ldots, f_n\}$, то есть существует верхняя треугольная матрица C с единицами на главной диагонали такая, что $\mathrm{diag}\,(|f_1|^2, \ldots, |f_n|^2) = C^T GC$. В частности, $\det G = |f_1|^2 \ldots |f_n|^2$, причем правая часть совпадает с квадратом $\mathrm{Vol}\,(f_1, \ldots, f_n)^2$ объема прямоугольного параллелепипеда, построенного на ортогональном базисе $\{f_1, \ldots, f_n\}$ (поскольку есть произведение квадратов длин его сторон), а выше мы "обосновали", что объем параллелепипеда, построенного на базисе, не меняется при ортогонализации этого базиса.

Из доказанной Теоремы мы сейчас выведем важное следствие. Пусть G — матрица Грама базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Пусть $G_k,\ 1 \le k \le n$ — подматрица матрицы G порядка k, стоящая в левом верхнем углу. Очевидно, что G_k — матрица ограничения $(\cdot, \cdot)|_{V_k}$ скалярного произведения на подпространство V_k в базисе $\{e_1, \ldots, e_k\}$ этого пространства. Пусть $\delta_k := \det G_k$ — угловые миноры матрицы G. Из положительной определенности скалярного произведения следует, что все они больше нуля. Введем еще $\delta_0 := 1$.

Следствие 9.18. *В введенных выше обозначениях*

$$|f_k|^2 = (f_k, f_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}},\ 1 \le k \le n.$$

Доказательство. Для $1 \le k \le n$ имеем

$$\mathrm{diag}\,(|f_1|^2, \ldots, |f_k|^2) = C_k^T G_k C_k,$$

откуда, переходя к определителям и используя то, что матрицы C_k верхние треугольные с единицами на главной диагонали, получаем требуемое. ∎

Доказанное в Следствии тождество имеет следующий геометрический смысл: *квадрат длины высоты k-мерного параллелепипеда равен отношению квадрата его k-мерного объема к квадрату $k-1$-мерного объема соответствующего основания.* Действительно, выше мы "обосновали", что $\det G$ равен квадрату n-мерного объема параллелепипеда, построенного на базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. По тем же причинам δ_k есть квадрат k-мерного объема $\mathrm{Vol}\,(e_1, \ldots, e_k)$. Тогда равенство $|f_k|^2 = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$ означает в точности то, что написано выше.

Полученный результат позволяет получить явную формулу для расстояния от вектора до подпространства. Пусть $U \subset V$ — подпространство евклидова пространства V и $v \in V$ — произвольный вектор. Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — произвольный базис в U. Тогда

$$\rho(v, U)^2 = \frac{\det G(e_1, \ldots, e_k, v)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}.$$

[31] Строго определять что это такое в данном курсе мы не будем. Для n-мерного параллелепипеда при $n = 1, 2, 3$ n-мерный объем — это соответственно длина, (неориентированная) площадь и "обычный" (неориентированный) трехмерный объем.

9.8 Описание ортонормированных базисов

Пусть V — евклидово n-мерное пространство, $e := \{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый ортонормированный базис в нем (мы знаем, что он существует), $e' := \{e'_1, \dots, e'_n\}$ — еще какой-то базис в V и C — матрица перехода от e к e'. Тогда матрица Грама базиса e' равна $G_{e'} = C^T C$. Таким образом, базис e' тоже ортонормированный тогда и только тогда, когда $C^T C = E$, или, что равносильно, $C^T = C^{-1}$.

Определение 9.19. Квадратная вещественная матрица C называется *ортогональной*, если $C^T C = E$.

Если рассмотреть матрицу C как совокупность столбцов $(c_1, \dots, c_n)$, то условие ортогональности равносильно тому, что эти столбцы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ относительно стандартного скалярного произведения: $c_i^T c_j = \delta_{ij}$. Очевидно, что условие ортогональности матрицы C можно также переписать в виде $CC^T = E$, что дает аналогичное условие для строк.

Заметим, что определитель любой ортогональной матрицы равен ± 1. Конечно, это условие не является достаточным условием ортогональности матрицы.

Задача 9.20. *Покажите, что ортогональные матрицы порядка 2 распадаются на два непересекающихся класса:* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$*. Матрицы первого типа являются матрицами перехода между одинаково ориентированными, а второго — противоположно ориентированными ортонормированными базисами.*

Предложение 9.21. *Зафиксируем ортонормированный базис $e := \{e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве V. Тогда сопоставление $e' \mapsto C_{e'}$ базису e' матрицы перехода $C_{e'}$ к нему от фиксированного базиса e определяет биекцию между ортонормированными базисами в V и ортогональными матрицами порядка n.*

Доказательство. Так как матрица перехода однозначно задается указанием упорядоченной пары базисов, описанное в условии Предложения отображение корректно определено. Оно инъективно, так как базис e' однозначно определяется указанием базиса e и матрицы перехода $C_{e'}$. Оно сюръективно, так как произвольная ортогональная матрица является матрицей перехода от фиксированного ортонормированного базиса e к некоторому ортонормированному. ■

Задача 9.22. *Покажите, что ортогональные матрицы данного порядка n образуют группу (она стандартно обозначается $\mathrm{O}(n)$). Как этот результат связан с интерпретацией ортогональных матриц как матриц перехода между ортонормированными базисами?*

9.9 Изоморфизмы евклидовых пространств

Пусть V и U — евклидовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$ и $(\cdot,\cdot)_U$.

Определение 9.23. Линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ называется изометрией, если $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))_U = (v_1, v_2)_V \ \ \forall v_1, v_2, \in V$.

То есть изометрия сохраняет скалярные произведения, в частности, длины векторов и углы между ними. Также ясно, что она ортонормированный базис в V переводит в ортонормированную систему векторов в U. Уже отсюда понятно, что любая изометрия инъективна. Покажем это по-другому: пусть $v \in \ker \varphi$. Тогда $0 = (\varphi(v), \varphi(v))_U = (v, v)_V = |v|^2$, откуда $v = 0$.

Геометрически более-менее понятно, что преобразование, сохраняющее длины (и углы) между всеми векторами, сохраняет и линейные соотношения между ними, поскольку отображает евклидово пространство "как твердое тело" (вспомните доказательство линейности поворота плоскости). Поэтому требование линейности в определении изометрии лишнее.

Задача 9.24. *Отображение между евклидовыми пространствами $\varphi\colon V \to U$ такое, что $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))_U = (v_1, v_2)_V \ \ \forall v_1, v_2, \in V$, является линейным.*

Решение. Положим $w := v_1 + v_2$.

$$0 = |w - v_1 - v_2|^2 = |w|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2(v_1, v_2) - 2(v_1, w) - 2(v_2, w) =$$

$$|\varphi(w)|^2 + |\varphi(v_1)|^2 + |\varphi(v_2)|^2 + 2(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) - 2(\varphi(v_1), \varphi(w)) - 2(\varphi(v_2), \varphi(w)) =$$

$$= |\varphi(w) - \varphi(v_1) - \varphi(v_2)|^2,$$

откуда $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$. Аналогично проверяется, что $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$. ∎

Определение 9.25. Биективная изометрия между евклидовыми пространствами называется *изоморфизмом евклидовых пространств.*

Два евклидовых пространства называются изоморфными, если между ними есть изоморфизм. Заметим, что любой изоморфизм евклидовых пространств является линейным изоморфизмом, который вдобавок является изометрией. В частности, если два евклидовых пространства изоморфны, то у них обязательно одинаковые размерности.

Предложение 9.26. *Два евклидовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. В силу сделанного выше замечания достаточно доказать, что евклидовы пространства V и U одинаковой размерности изоморфны. Построим изометрию между ними следующим образом: выберем ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и такой же базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в U и определим линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ условием $\varphi(e_i) = f_i,\ i = 1, \ldots, n$. Это — линейный изоморфизм, который, как легко убедится читатель, используя билинейность скалярного произведения, является также изометрией. ∎

Доказанное Предложение свидетельствует о том, что геометрические свойства евклидовых пространств одинаковой размерности одни и те же, поэтому в качестве "модельного" n-мерного евклидова пространства можно взять пространство столбцов $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

Изоморфизмы евклидова пространства на себя называются ортогональными преобразованиями, их мы изучим позже.

9.10 QR-разложение

Предложение 9.27. *Для любой невырожденной вещественной матрицы A существуют единственные ортогональная матрица Q и верхняя треугольная матрица R с положительными элементами на главной диагонали такие, что $A = QR$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}^n$ — пространство столбцов со стандартным скалярным произведением. Рассмотрим A как совокупность столбцов $(a_1 \dots a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$. Пусть $E = (e_1 \dots e_n)$ — единичная матрица (ее столбцы образуют стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$). Тогда A является матрицей перехода от $\{e_1, \dots, e_n\}$ к $\{a_1, \dots, a_n\}$, то есть

$$(a_1 \dots a_n) = (e_1 \dots e_n)A.$$

Пусть $\{q_1, \dots, q_n\}$ — ортонормированный базис из столбцов, полученный из $\{a_1, \dots, a_n\}$ ортогонализацией по Граму-Шмидту с последующим нормированием. Тогда матрица перехода T от $\{a_1, \dots, a_n\}$ к $\{q_1, \dots, q_n\}$ является верхней треугольной с положительными элементами на главной диагонали. Обратная R к такой матрице тоже является верхней треугольной с положительными элементами на главной диагонали (чтобы это доказать, примените последовательность элементарных преобразований строк к $(T \mid E)$). Итак,

$$(a_1 \dots a_n) = (q_1 \dots q_n)R,$$

где R — верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали. Так как базис $\{q_1, \dots, q_n\}$ ортонормирован, то матрица Q перехода к нему от $\{e_1, \dots, e_n\}$ ортогональна (это есть матрица из столбцов $(q_1 \dots q_n)$). Таким образом, получаем

$$(a_1 \dots a_n) = (e_1 \dots e_n)QR,$$

или в матричном виде $A = QR$.

Докажем теперь единственность. Пусть $A = QR = Q'R'$, тогда $Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$. Нетрудно видеть, что справа стоит верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали, а слева — ортогональная матрица. Очевидно, что пересечение указанных множеств матриц состоит только из E. ∎

Заметим, что помимо QR-разложения для произвольной невырожденной матрицы A есть также аналогичное RQ-разложение. Чтобы это доказать, достаточно найти QR-разложение для A^{-1}.

Интересный вопрос: как описать множество всех скалярных произведений на вещественном векторном пространстве V? С одной стороны, поскольку скалярное произведение в фиксированном базисе однозначно определяется своей матрицей Грама, а такой матрицей может быть произвольная симметричная положительно определенная матрица (порядка, равного размерности V), то множество всех скалярных произведение на V биективно множеству таких матриц (причем биекция, конечно, зависит от базиса). Значит, это непустое (поскольку, например, оно содержит единичную матрицу), открытое (поскольку по критерию Сильвестра условие положительной определенности равносильно выполнению конечной системы строгих неравенств) подмножество в $\frac{n(n+1)}{2}$-мерном пространстве симметричных матриц порядка n, где $n = \dim V$.

Иначе можно рассуждать так. Задать скалярное произведение α можно, выбрав произвольный базис e в V и объявив его ортонормированным относительно α. Еще один базис e' в V задает то же самое скалярное произведение α тогда и только тогда, когда матрица перехода C от e к e' ортогональна. Действительно, это равносильно тому, что из $G_e = E$ следует $G_{e'} = C^T C = E$.

Более общо, зафиксируем некоторый базис e. Пусть C и D — матрицы перехода от e к базисам e' и e'' соответственно. При каком условии скалярные произведения, определенные базисами e' и e'' совпадают? Очевидно, тогда и только тогда, когда матрица перехода от e' к e'' ортогональна. То есть тогда и только тогда, когда $D = CQ$, где $Q \in \mathrm{O}(n)$, эквивалентно, тогда и только тогда, когда в RQ-разложениях матриц D и C верхние треугольные матрицы совпадают. Таким образом, мы получаем также конкретную биекцию между множеством скалярных произведений в вещественном векторном пространстве V размерности n и множеством верхних треугольных матриц порядка n с положительными элементами на главной диагонали.

10 Операторы и билинейные функции в евклидовых пространствах

10.1 Сопряженное отображение

Пусть U и V — евклидовы пространства со скалярными произведениями $(\,,\,)_U$ и $(\,,\,)_V$ соответственно, $\varphi\colon U \to V$ — линейное отображение.

Определение 10.1. Отображение $\varphi^*\colon V \to U$ называется *сопряженным* к φ, если

$$(\varphi(u),\, v)_V = (u,\, \varphi^*(v))_U \quad \forall\, u \in U,\, v \in V. \tag{53}$$

В частном случае $U = V$ мы приходим к понятию *сопряженного преобразования.*

Предложение 10.2. *Для любого линейного отображения $\varphi\colon U \to V$ между евклидовыми пространствами существует единственное сопряженное отображение φ^*. Кроме того, сопряженное отображение линейно.*

Доказательство. Рассмотрим выражение $f_{\varphi,\,v}(u) := (\varphi(u),\, v)_V$ как функцию от $u \in U$ при фиксированных $v \in V$ и φ. Из линейности φ и скалярного произведения по первому аргументу следует, что $f_{\varphi,\,v}$ линейна, то есть $f_{\varphi,\,v} \in U^*$.

Согласно Предложению 9.8, для данных $v \in V$ и φ существует единственный $w \in U$ такой, что

$$f_{\varphi,\,v}(u) = (u,\, w)_U \quad \forall\, u \in U.$$

Этот вектор w мы обозначим $\varphi^*(v)$ (что, в частности, подчеркивает его зависимость от $v \in V$ и φ). То есть для фиксированного φ и данного $v \in V$ существует единственный $\varphi^*(v) \in U$ такой, что

$$(\varphi(u),\, v)_V = (u,\, \varphi^*(v))_U \quad \forall\, u \in U.$$

Это означает, что сопряженное к φ отображение φ^* существует и единственно.

Проверим теперь линейность сопряженного отображения. Имеем

$$(u,\, \varphi^*(v_1+v_2))_U = (\varphi(u),\, v_1+v_2)_V = (\varphi(u),\, v_1)_V + (\varphi(u),\, v_2)_V =$$

$$= (u,\, \varphi^*(v_1))_U + (u,\, \varphi^*(v_2))_U = (u,\, \varphi^*(v_1)+\varphi^*(v_2))_U \quad \forall\, u \in U,$$

откуда получаем $\varphi^*(v_1+v_2) = \varphi^*(v_1)+\varphi^*(v_2)$.

Аналогично,

$$(u,\, \varphi^*(\lambda v))_U = (\varphi(u),\, \lambda v)_V = \lambda(\varphi(u),\, v)_V =$$

$$= \lambda(u,\, \varphi^*(v))_U = (u,\, \lambda\varphi^*(v))_U,$$

откуда $\varphi^*(\lambda v) = \lambda\varphi^*(v)$. ■

Пусть $\mathcal{L}(U,\, V)$ обозначает линейное пространство всех линейных отображений $\varphi\colon U \to V$.

Предложение 10.3. *Операция*

$$*\colon \mathcal{L}(U,\, V) \to \mathcal{L}(V,\, U) \tag{54}$$

обладает следующими свойствами:

1) $(\varphi_1+\varphi_2)^* = \varphi_1^*+\varphi_2^*$, $(\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi^*$ *(то есть отображение (54) линейно);*

2) $\varphi^{**} = \varphi$ *(то есть* $*^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(U,\,V)}$*);*

3) $\mathrm{id}_U^* = \mathrm{id}_U$*, где* $\mathrm{id}_U\colon U \to U$ *— тождественное преобразование;*

4) *если* $\psi\colon V \to W$ *— еще одно линейное отображение между евклидовыми пространствами, то* $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$*;*

5) *если* φ *— изоморфизм, то* $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

Доказательство. 1)

$$(u,\, (\varphi_1+\varphi_2)^*(v))_U = ((\varphi_1+\varphi_2)(u),\, v)_V = (\varphi_1(u)+\varphi_2(u),\, v)_V =$$

$$= (\varphi_1(u),\, v)_V + (\varphi_2(u),\, v)_V = (u,\, \varphi_1^*(v))_U + (u,\, \varphi_2^*(v))_U = (u,\, (\varphi_1^*+\varphi_2^*)(v))_U,$$

$$(u,\, (\lambda\varphi)^*(v))_U = ((\lambda\varphi)(u),\, v)_V = \lambda(\varphi(u),\, v)_V = \lambda(u,\, \varphi^*(v))_U = (u,\, \lambda\varphi^*(v))_U.$$

2)

$$(\varphi(u),\, v)_V = (u,\, \varphi^*(v))_U = (\varphi^*(v),\, u)_U = (v,\, \varphi^{**}(u))_V = (\varphi^{**}(u),\, v)_V.$$

Заметим, что доказанное свойство в частности означает, что всякое отображение φ является сопряженным к некоторому (а именно к φ^*).

3)

$$(\mathrm{id}_U(u_1),\, u_2) = (u_1,\, u_2) = (u_1,\, \mathrm{id}_U^*(u_2)).$$

4) Чтобы лучше понять направления, в которых действуют отображения, полезно посмотреть на диаграммы

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi\circ\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U & V \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ & W \arrow[ul, "\varphi^*\circ\psi^*"] \arrow[u, "\psi^*"'] \end{tikzcd}.$$

$$(u,\,(\psi\circ\varphi)^*(w))_U = ((\psi\circ\varphi)(u),\,w)_W = (\varphi(u),\,\psi^*(w))_V =$$
$$= (u,\,\varphi^*(\psi^*(w)))_U = (u,\,(\varphi^*\circ\psi^*)(w))_U.$$

5)
$$\mathrm{id}_U = \mathrm{id}_U^* = (\varphi^{-1}\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ(\varphi^{-1})^*,$$
$$\mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V^* = (\varphi\circ\varphi^{-1})^* = (\varphi^{-1})^*\circ\varphi^*,$$

откуда $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$. ■

Свойства операции “звездочка”, доказанные в предыдущем Предложении, напоминают свойства операции транспонирования матриц (см. Предложение 2.13). Это неслучайно. Чтобы это увидеть, посмотрим, как связаны матрицы отображения и его сопряженного относительно выбранных базисов в U и V.

Пусть $\{e_1,\dots,e_n\}$ — некоторый базис в U, $\{f_1,\dots,f_m\}$ — базис в V, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ — координатные столбцы векторов u и v, G_U, G_V — матрицы Грама выбранных базисов в U и V, $A=A_\varphi$ — матрица линейного отображения $\varphi\colon U\to V$, а B — матрица сопряженного отображения $\varphi^*\colon V\to U$. Тогда в базисах соотношение (53) переписывается в следующем виде:

$$(A\overrightarrow{u})^T G_V\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}^T G_U B\overrightarrow{v}, \quad \text{то есть}\ \ \overrightarrow{u}^T A^T G_V\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}^T G_U B\overrightarrow{v};$$

поскольку это должно быть выполнено для любых столбцов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$, то отсюда следует, что

$$A^T G_V = G_U B. \tag{55}$$

То есть матрица B сопряженного отображения φ^* равна $G_U^{-1}A^TG_V$. В частности, если выбранные базисы являются ортонормированными (что, напомним, равносильно $G_U=E,\ G_V=E$), то $B=A^T$. Легко видеть, что выполнено и обратное: если относительно некоторых базисов евклидовых пространств U и V матрицы A и B отображений $\varphi\colon U\to V$ и $\psi\colon V\to U$ связаны соотношением (55), то эти отображения сопряжены, $\psi=\varphi^*$ (или, что равносильно, $\varphi=\psi^*$).

Задача 10.4. *Докажите, что преобразование $\varphi\colon V\to V$ и его сопряженное φ^* имеют одинаковые характеристические многочлены.*

10.2 Теорема Фредгольма

Пусть $\varphi\colon U\to V$ — линейное отображение между евклидовыми пространствами.

Предложение 10.5. $\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi^*)^\perp$ *(равенство подпространств в V).*

Доказательство. Заметим, что равенство подпространств из условия задачи равносильно равенству $(\operatorname{Im}\varphi)^\perp = \operatorname{Ker}\varphi^*$ их ортогональных дополнений в V, которое мы и будем доказывать.

Пусть $v\in\operatorname{Ker}\varphi^*$, тогда для любого $u\in U$

$$0 = (u,\,\varphi^*(v))_U = (\varphi(u),\,v)_V \ \ \Rightarrow\ \ v\in(\operatorname{Im}\varphi)^\perp,$$

то есть $\operatorname{Ker}\varphi^*\subset(\operatorname{Im}\varphi)^\perp$.

Пусть $v \in (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$, тогда для любого $u \in U$

$$0 = (\varphi(u),\, v)_V = (u,\, \varphi^*(v))_U \;\;\Rightarrow\;\; v \in \operatorname{Ker}\varphi^*,$$

то есть $(\operatorname{Im}\varphi)^\perp \subset \operatorname{Ker}\varphi^*$. ■

Рассмотрим теперь систему линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}, \tag{56}$$

где A — матрица размера $m \times n$, $\overrightarrow{x}$ — столбец высоты n, $\overrightarrow{b}$ — столбец высоты m. Для нее можно определить *сопряженную* однородную систему $A^T\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$, матрицей коэффициентов которой является A^T.

Следствие 10.6. *Система (56) при данном столбце правых частей $\overrightarrow{b}$ разрешима $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{b}$ ортогонален любому решению $\overrightarrow{y}$ сопряженной однородной системы (здесь ортогональность понимается в смысле "стандартного скалярного произведения", $\sum_{i=1}^m y_ib_i = 0$).*

Доказательство. Рассмотрим A как матрицу линейного отображения φ между евклидовыми пространствами относительно выбранных ортонормированных базисов, тогда матрицей сопряженного преобразования φ^* (относительно тех же базисов) будет A^T. В базисах $\operatorname{Im}\varphi$ описывается как подпространство таких столбцов в $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$, для которых система (56) разрешима, а $\operatorname{Ker}\varphi^*$ — как подпространство таких столбцов $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^m$, что $A^T\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$. Тогда имеем серию эквивалентностей: система (56) разрешима $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{b} \in \operatorname{Im}\varphi$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{b} \in (\operatorname{Ker}\varphi^*)^\perp$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{b}$ ортогонально любому $\overrightarrow{y}$ такому, что $A^T\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$. ■

10.3 Самосопряженные преобразования

Пусть V — евклидово пространство, а $\varphi\colon V \to V$ — его линейное преобразование.

Определение 10.7. Преобразование φ называется *самосопряженным*, если оно совпадает со своим сопряженным, $\varphi = \varphi^*$.

То есть преобразование φ самосопряжено, если для любых $u, v \in V$ имеет место тождество

$$(\varphi(u),\, v) = (u,\, \varphi(v)).$$

Из пункта 1) Предложения 10.3 легко следует, что самосопряженные преобразования образую линейное подпространство в пространстве $\mathcal{L}(V)$ всех линейных преобразований пространства V. Тождественное преобразование самосопряжено, также самосопряжены преобразования вида $\lambda\,\mathrm{id}_V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (при любом выборе скалярного произведения в V).

Самосопряженность φ равносильна тому, что в произвольном базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V с матрицей Грама G его матрица A удовлетворяет тождеству $A^TG = GA$. В частности, если базис ортонормирован, то самосопряженность преобразования φ равносильна симметричности его матрицы. Таким образом, *оператор самосопряжен тогда и только тогда, когда в некотором (а значит любом) ортонормированном базисе он имеет симметричную матрицу.*

Заметим, что если для преобразования евклидова пространства существует ортонормированный базис из собственных векторов, то это преобразование — самосопряженное. Действительно, в этом базисе матрица данного преобразования является диагональной, в частности, симметричной.

Оказывается, верно и обратное утверждение: если оператор самосопряжен, то для него существует ортонормированный базис из его собственных векторов. Доказательство этого утверждения потребует некоторой подготовки.

Предложение 10.8. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейное преобразование евклидова пространства V и $U \subset V$ — его инвариантное подпространство. Тогда подпространство $U^{\perp} \subset V$ φ^*-инвариантно.*

Доказательство.

$$\forall\, u \in U,\ v \in U^{\perp} \quad 0 = (\varphi(u),\, v) = (u,\, \varphi^*(v)) \quad \Rightarrow \quad \varphi^*(v) \in U^{\perp}. \quad \blacksquare$$

Следствие 10.9. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — самосопряженное преобразование и $U \subset V$ является φ-инвариантым. Тогда $U^{\perp} \subset V$ также φ-инвариантно.*

Другими словами, ортогональное дополнение к инвариантому подпространству самосопряженного преобразования также является инвариантным подпространством.

Напомним, что преобразование $\varphi\colon V \to V$ называется *нильпотентным*, если $\varphi^k = 0$ для некоторого натурального k.

При решении следующей задачи нам понадобится также следующий тривиальный результат: если $\varphi\colon V \to V$ — самосопряженное преобразование евклидова пространства V и $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство, то ограничение $\varphi|_U\colon U \to U$ является самосопряженным преобразованием пространства U.

Задача 10.10. *Докажите, нильпотентное самосопряженное преобразование евклидова пространства нулевое.*

Решение. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — такое преобразование. Воспользуемся индукцией по $n = \dim V$. Если $n = 1$, то $\varphi = 0$. Пусть $n > 1$, и по предположению индукции результат верен для пространств размерности меньше n. Предположим, что $\varphi \neq 0$, тогда $0 \neq \ker\varphi \subsetneq V$. Согласно предыдущему следствию, подпространство $(\ker\varphi)^{\perp} \subset V$ является φ-инвариантным. По предположению индукции ограничение φ на него нулевое. Тогда $V = \ker\varphi \oplus (\ker\varphi)^{\perp}$ — прямая сумма подпространств, ограничения на которые оператора φ равны нулю, откуда следует, что $\varphi = 0$. $\blacksquare$

10.4 Связь между линейными операторами и билинейными функциями на евклидовом пространстве

Пусть V — евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Определим по нему билинейную функцию $h = h_{\varphi}\colon V \times V \to \mathbb{R}$ по формуле

$$h(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) := (\mathbf{u},\, \varphi(\mathbf{v})) \quad \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V. \tag{57}$$

Заметим, что и множество линейных операторов $V \to V$, и множество билинейных функций $V \times V \to \mathbb{R}$ являются линейными пространствами над $\mathbb{R}$ одной и той же размерности n^2, где $n = \dim V$ (например, в базисе оператор и билинейная функция однозначно задаются своими матрицами, причем любая матрица может быть как матрицей линейного оператора, так и матрицей билинейной функции). Пространство билинейных функций на V обозначим $\mathcal{B}(V)$, пространство линейных операторов на V — $\mathcal{L}(V)$.

Предложение 10.11. *1) Сопоставление $\varphi \mapsto h_\varphi$ (см. (57)) определяет изоморфизм линейных пространств $\alpha\colon \mathcal{L}(V) \to \mathcal{B}(V)$.*

2) При изоморфизме α симметричные билинейные функции отвечают самосопряженным операторам.

Доказательство. 1) Линейность отображения α очевидна. Так как пространства операторов и билинейных функций на V, как указывалось, имеют одинаковые размерности, то для доказательства того, что α — изоморфизм линейных пространств, достаточно доказать его инъективность.

Пусть $\varphi \neq 0$, тогда существует такой вектор $\mathbf{v} \in V$, что $\varphi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. Кроме того, в силу невырожденности скалярного произведения существует вектор $\mathbf{u} \in V$ такой, что

$$(\mathbf{u},\, \varphi(\mathbf{v})) = h_\varphi(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha(\varphi) = h_\varphi \neq 0.$$

Таким образом, линейное отображение α — изоморфизм.

2) Проверим теперь второе утверждение. Действительно, для всех $\mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$

$$h(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = h(\mathbf{v},\, \mathbf{u}) \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbf{u},\, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{v},\, \varphi(\mathbf{u})) = (\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}),$$

что равносильно самосопряженности оператора φ. ∎

Пусть $\mathcal{L}^{sa}(V)$ обозначает подпространство самосопряженных операторов в $\mathcal{L}(V)$. Тогда результат предыдущего Предложения можно представить как существование коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(V) \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{B}(V) \\
\mathcal{L}^{sa}(V) \arrow[u, "\cup"] \arrow[r, "\alpha|_{\mathcal{L}^{sa}(V)}"] & \mathcal{B}^{+}(V), \arrow[u, "\cup"']
\end{tikzcd}$$

в которой горизонтальные стрелки — определенные выше изоморфизмы, а вертикальные — включения подпространств.

Отметим, что построенный изоморфизм между пространствами $\mathcal{L}(V)$ и $\mathcal{B}(V)$ является каноническим (он не зависит ни от каких базисов, а только от скалярного произведения).

Таким образом, для любой билинейной симметричной функции h на евклидовом пространстве V существует единственный самосопряженный оператор $\varphi = \varphi_h$ на V, для которого выполнено (57). Такой оператор назовем *ассоциированным* с соответствующей билинейной функцией.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый базис в V, в котором евклидово скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ имеет матрицу Грама G, билинейная форма h — матрицу H, а оператор φ_h — матрицу $A = A_\varphi$.

Кроме того, пусть $\vec{u}$, $\vec{v}$ — координатные столбцы векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Тогда (57) переписывается в виде

$$\vec{u}^T H \vec{v} = \vec{u}^T G A \vec{v} \quad \forall\, \vec{u},\, \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad H = GA \quad \Leftrightarrow \quad A = G^{-1}H. \tag{58}$$

В частности, если базис ортонормированный, то $G = E$, а значит, $A = H$.

10.5 Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора

Предложение 10.12. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — самосопряженное преобразование евклидова пространства V, $\dim V > 0$. Тогда у φ существует собственный вектор.*

В этом разделе мы приведем доказательство этого результата с использованием теоремы анализа о том, что непрерывная функция на компакте достигает нижней грани своих значений (то есть имеет минимум). Читатель, предпочитающий алгебраической доказательство (с помощью существования одномерного или двумерного инвариантных подпространств) может найти его в Добавлении в конце главы, а затем перейти к Теореме 10.14.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 10.13. Пусть $\psi\colon V \to V$ — самосопряженное преобразование такое, что $(v,\, \psi(v)) \geq 0\; \forall\, v \in V$. Тогда любой $e \in V$ такой, что $(e,\, \psi(e)) = 0$, лежит в ядре ψ.

Доказательство Леммы. Рассмотрим векторы вида $v = e + tu$, где $t \in \mathbb{R}$, а u — произвольный вектор из V. Имеем

$$(e + tu,\, \psi(e + tu)) = (e,\, \psi(e)) + t((u,\, \psi(e)) + (e,\, \psi(u))) + t^2(u,\, \psi(u)) =$$

$$= (u,\, \psi(u))t^2 + 2(u,\, \psi(e))t \geq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

(выше мы воспользовались билинейностью и симметричностью скалярного произведения, условием $(e,\, \psi(e)) = 0$ и самосопряженностью оператора ψ). То есть мы получили выражение вида

$$at^2 + bt, \quad a,\, b \in \mathbb{R},$$

которое при любом $t \in \mathbb{R}$ неотрицательно. Если при этом $b \neq 0$, то выражение $at^2 + bt = (at + b)t$ меняет знак при $t = 0$, противоречие. Следовательно, $(u,\, \psi(e)) = 0 \quad \forall\, u \in V$, откуда из невырожденности скалярного произведения $\psi(e) = 0$. ∎

Доказательство Предложения. Ассоциируем с самосопряженным оператором $\varphi\colon V \to V$ билинейную функцию $h = h_\varphi$ на V по формуле (57)

$$h(u,\, v) = (u,\, \varphi(v)) \quad \forall\, u,\, v \in V.$$

Согласно Предложению 10.11, из самосопряженности φ следует, что h симметрична. Пусть $q\colon V \to \mathbb{R}$ — соответствующая h квадратичная форма, $q(v) = h(v,\, v) = (v, \varphi(v)) \;\; \forall\, v \in V$. Легко видеть, что q — непрерывная функция на V относительно стандартной топологии на V (то есть топологии V как метрического пространства, см. раздел 9.6). Например, при выбранном базисе в V форма q — однородный многочлен второй степени от соответствующих координат.

Пусть
$$S(V) := \{v \in V \mid |v| = 1\}$$
— единичная сфера пространства V. Это — замкнутое (как множество нулей непрерывной функции $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$, где x_i, $i = 1, \ldots, n$ — координаты относительно ортонормированного базиса) и ограниченное, а значит компактное подмножество в $\mathbb{R}^n \cong V$. Согласно известной теореме из анализа, ограничение функции q на $S(V)$ достигает нижней грани своих значений. Пусть
$$\lambda_0 := \min_{v \in S(V)} q(v) \quad \text{и} \quad q(e) = \lambda_0, \ \ e \in S(V).$$
Тогда для любого $v \in S(V)$ верно неравенство $q(v) \geq \lambda_0(v, v)$, а значит последнее неравенство выполнено и для любого $v \in V$. (Действительно, для $v = 0$ оно очевидно, а для $v \neq 0 \quad \exists$ единственный $u \in S(V)$ такой, что $v = tu$, $\ t > 0$ и $q(v) = t^2 q(u)$, $\ (v, v) = t^2(u, u)$).

Имеем
$$q(v) - \lambda_0(v, v) = (v, \varphi(v)) - (v, \lambda_0 v) = (v, \varphi(v) - \lambda_0 v) =$$
$$= (v, (\varphi - \lambda_0 \mathrm{id}_V)(v)) \geq 0 \quad \forall\, v \in V.$$
Пусть $\psi := \varphi - \lambda_0 \mathrm{id}_V$, тогда последнее неравенство перепишется в виде $(v, \psi(v)) \geq 0 \ \ \forall\, v \in V$. Кроме того, легко видеть, что для $e \in S(V)$ равенство $q(e) = \lambda_0$ равносильно $(e, \psi(e)) = 0$. Применяя теперь Лемму к самосопряженному преобразованию ψ и вектору e, получаем $\psi(e) = 0$, то есть $\varphi(e) = \lambda_0 e$, значит e — собственный вектор преобразования φ с собственным значением λ_0 (он ненулевой, поскольку принадлежит единичной сфере). ∎

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему о самосопряженных преобразованиях.

Теорема 10.14. *Для любого самосопряженного преобразования $\varphi\colon V \to V$ существует ортонормированный базис в V, состоящий из его собственных векторов.*

Доказательство. Индукция по $n = \dim V$. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть $n > 1$. Согласно предыдущему предложению, у φ в V есть собственный вектор v; без ограничения общности можно считать, что $|v| = 1$. Подпространство $U := \langle v \rangle \subset V$ является φ-инвариантным, по Следствию 10.9 $n-1$-мерное подпространство $U^\perp \subset V$ также φ-инвариантно. Легко проверить, что ограничение $\varphi|_{U^\perp}$ является самосопряженным преобразованием $U^\perp$. По предположению индукции для $\varphi|_{U^\perp}$ в $U^\perp$ существует ортонормированный базис из собственных векторов; добавляя к нему вектор v, получаем ортонормированнный базис в V, состоящий из собственных векторов оператора φ. ∎

Таким образом, самосопряженные преобразования евклидова пространства суть в точности такие преобразования, которые диагонализируются в некотором ортонормированном базисе.

Доказанная теорема вместе с доказательством Предложения дают алгоритм поиска собственных векторов и собственных значений самосопряженного оператора. А именно, ассоциируем с таким оператором квадратичную форму, как было сделано в доказательстве Предложения. Тогда наименьшее собственное значение равно минимуму этой квадратичной формы на единичной сфере, и точка сферы, в которой этот минимум достигается, является соответствующим собственным вектором. Далее берем ортогональное дополнение к одномерному подпространству, порожденному данным вектором и ищем минимум квадратичной формы на нем и т.д.

Пример 10.15. Рассмотрим квадратичную форму $q(\overrightarrow{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, заданную в ортонормированном базисе двумерного евклидова пространства. Ее минимум (соотв. максимум) на единичной сфере $x_1^2 + x_2^2 = 1$ достигается в точке, в которой x_1x_2 принимает минимальное (соотв. максимальное) значение при условии $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Легко видеть, что эта точка имеет координаты $\pm(1/\sqrt{2},\, -1\sqrt{2})^T$ и минимальное значение q равно $1/2$ (соотв. $\pm(1/\sqrt{2},\, 1\sqrt{2})^T$ и максимальное значение q равно $3/2$). Тот же результат мы получим, решая задачу на собственные значения и собственные векторы для оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ (матрицы квадратичной формы и ассоциированного с ней самосопряженного оператора совпадают, поскольку базис ортонормированный).

Заметим также, что если для положительно определенной квадратичной формы q ее минимум на единичной сфере равен λ_0 и достигается на векторе $v_0 \in S(V)$, то v_0 — направляющий вектор большой полуоси эллипсоида $q(v) = 1$, которая равна $1/\sqrt{\lambda_0}$. То же для максимума и малой полуоси. Таким образом, в нашем примере большая полуось эллипса $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1$ равна $\sqrt{2}$ и направлена по вектору $(1,\, -1)^T$, а малая равна $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и ее направление задается вектором $(1,\, 1)^T$.

Ниже мы еще вернемся к применению самосопряженных операторов к теории квадратичных форм в евклидовом пространстве.

Следствие 10.16. *Для любой симметричной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ существует ортогональная матрица $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ такая, что $C^TAC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. В частности, все корни характеристического многочлена вещественной симметричной матрицы вещественны.*

Доказательство. Рассмотрим n-мерное евклидово пространство V, фиксируем в нем ортонормированный базис и определим линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$ как такое преобразование, которое имеет матрицу A в выбранном базисе. Из симметричности A следует, что φ самосопряжено. По доказанной теореме для φ существует ортонормированный базис из собственных векторов, в этом базисе матрица φ диагональна (на главной диагонали стоят его собственные значения). Если C — матрица перехода от исходного ортонормированного базиса к базису из собственных векторов, то она ортогональна и $C^{-1}AC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Для завершения доказательства осталось лишь вспомнить определение ортогональной матрицы $C^{-1} = C^T$. ∎

Предложение 10.17. *Собственные подпространства V_λ, V_μ самосопряженного преобразования $\varphi\colon V \to V$, отвечающие разным собственным значениям $\lambda \neq \mu$, ортогональны: $V_\lambda \perp V_\mu$.*

Доказательство. Пусть $u \in V_\lambda$, $v \in V_\mu$. Тогда

$$\lambda(u,\, v) = (\varphi(u),\, v) = (u,\, \varphi(v)) = \mu(u,\, v),$$

то есть $(\lambda - \mu)(u,\, v) = 0$. Поскольку $\lambda - \mu \neq 0$, то $(u,\, v) = 0$. ∎

Таким образом, для самосопряженного преобразования $\varphi\colon V \to V$ существует разложение $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$ пространства V в *ортогональную прямую сумму* собственных подпространств (единственное при условии $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s$), причем ограничение φ на V_{λ_i} действует как скалярный оператор умножения на λ_i: для $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_s$ с $v_i \in V_{\lambda_i}$

$$\varphi(v) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_s v_s.$$

Данный результат удобно записывать в виде

$$\varphi = \oplus_{i=1}^{s}\lambda_i \mathrm{id}_{V_{\lambda_i}}. \tag{59}$$

Поясним последнюю запись. Если $V = U \oplus W$ и заданы линейные операторы $\varphi\colon U \to U$ $\psi\colon W \to W$, то линейный оператор $\varphi \oplus \psi\colon V \to V$ (прямая сумма линейных операторов φ и ψ) определяется следующим образом. Если $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$, то по определению $(\varphi \oplus \psi)(v) = \varphi(u) + \psi(w)$, причем снова $\varphi(u) \in U$, $\psi(w) \in W$. Заметим, что если A — матрица оператора φ в некотором базисе e пространства U, а B — матрица ψ относительно базиса f в W, то матрицей $\varphi \oplus \psi$ относительно базиса в V, полученном объединением данных базисов U и W будет $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Напомним (см. Пример 6.4), что проекторами называются операторы φ, удовлетворяющие тождеству $\varphi^2 = \varphi$.

Задача 10.18. *Опишите проекторы на евклидовом пространстве, которые являются самосопряженными преобразованиями.*

Решение. В Примере 6.4 было показано, что всякий проектор, то есть оператор $\varphi\colon V \to V$, удовлетворяющий соотношению $\varphi^2 = \varphi$, является оператором проектирования на подпространство $U := \operatorname{im}\varphi$ параллельно подпространству $W := \ker\varphi$. Одновременно подпространства U и W (в случае, если они ненулевые) являются собственными подпространствами оператора φ с собственными значениями соответственно 1 и 0. Так как собственные подпространства самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, то необходимым условием самосопряженности проектора является ортогональность U и W, откуда (ввиду $V = U \oplus W$) $W = U^{\perp}$. В этом случае проектор есть оператор ортогонального проектирования на подпространство $U \subset V$. Это условие является также достаточным: действительно, если оператор диагонализируется в ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр, то он самосопряжен. ■

Задача 10.19. *Пусть V — евклидово пространство из Примера 9.5. Пусть $\tau\colon V \to V$, $\tau(X) = X^T$ — линейный оператор на V, сопоставляющий произвольной матрице ее транспонированную. Покажите, что τ самосопряжен. Выведите из этого результат Задачи 9.7.*

Решение. Самосопряженность τ следует из выкладки:

$$(\tau(X), Y) = \operatorname{tr}(\tau(X)^T Y) = \operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX) = \operatorname{tr}(X^T Y^T) = (X, \tau(Y)).$$

Заметим (см. Пример 6.22), что подпространства симметричных (кососимметричных) матриц — в точности собственные подпространства оператора τ, отвечающие собственному значению 1 (соответственно -1). Теперь требуемый результат вытекает из предыдущего Предложения. ■

Задача 10.20. *Докажите, что два самосопряженных преобразования $\varphi, \psi\colon V \to V$ коммутируют (то есть $\varphi\psi = \psi\varphi$) тогда и только тогда, когда в V есть ортонормированный базис, состоящий из их общих собственных векторов.*

Решение. Пусть $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$ — разложение пространства V в ортогональную прямую сумму собственных подпространств оператора φ. Из условия следует, что операторы ψ и $\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V$ коммутируют, поэтому подпространства $V_{\lambda_i} = \ker(\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V)$ являются ψ-инвариантными. Для каждого i, $i = 1, \ldots, s$ ограничение $\psi|_{V_{\lambda_i}} \colon V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ является самосопряженным оператором на V_{λ_i}, поэтому для него в V_{λ_i} существует ортонормированный базис из собственных векторов. Заметим, что эти базисные векторы также будут собственными векторами (с собственным значением λ_i) оператора φ. Поскольку подпространства V_{λ_i} при разных i попарно ортогональны, объединение таких базисов даст ортонормированный базис пространства V, состоящий из одновременных собственных векторов операторов φ и ψ.

В другую сторону утверждение очевидно, поскольку в общем базисе из собственных векторов операторы записываются диагональными матрицами, которые коммутируют. ∎

Замечание 10.21. Пусть V — евклидово пространство. Выше мы определили линейный оператор $*\colon \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V),\ \varphi \mapsto \varphi^*$ "взятия сопряженного". Из $** = \mathrm{id}_{\mathcal{L}(V)}$ следует, что его собственными значениями могут быть только ± 1. Его собственными векторами с собственным значением 1 являются ненулевые самосопряженные операторы $\varphi^* = \varphi$, а собственными векторами с собственным значением -1 — ненулевые *кососимметрические операторы* $\varphi^* = -\varphi$. Их название оправдывается тем, что это — в точности те операторы, которые имеют кососимметрические матрицы в ортонормированных базисах[32]. Примером такого оператора в ориентированном трехмерном евклидовом пространстве V является оператор взятия векторного произведения с фиксированным вектором: $\varphi_w \colon V \to V,\ \ \varphi_w(v) = [w, v]$. В самом деле, для любых $u, v \in V$ имеем $(\varphi_w(u), v) + (u, \varphi_w(v)) = 0$. Заметим, что любой оператор на евклидовом пространстве V единственным образом представляется в виде суммы самосопряженного и кососимметрического:

$$\varphi = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} + \frac{\varphi - \varphi^*}{2}$$

(это аналог представления любой квадратной матрицы в виде суммы симметричной и кососимметричной). Мы не будем углубляться в теорию кососимметрических операторов, отсылая читателей к более подробным учебникам линейной алгебры.

10.6 Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве

Выведем теперь ряд результатов о квадратичных (симметричных билинейных) функциях на евклидовом пространстве, используя их связь с самосопряженными операторами, описанную в Предложении 10.11.

Предложение 10.22. *Для любой симметричной билинейной (или квадратичной) формы на евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором ее матрица диагональна (для квадратичной формы последнее означает, что в соответствующих координатах она имеет вид $q(\overrightarrow{x}) = \sum_k \lambda_k x_k^2$).*

Доказательство. Пусть h — симметричная билинейная форма. Ассоциируем с ней самосопряженный оператор φ_h. Так как для φ_h существует ортонормированный базис из собственных векторов,

[32] Заметим, что самосопряженные операторы часто также называются симметрическими.

а в таком базисе, как мы знаем, его матрица A диагональна, то и матрица H билинейной формы h в этом базисе тоже диагональна (точнее, она равна A поскольку базис ортонормированный). ■

Полезно сопоставить доказанное Предложение с Предложением 8.30. Новое Предложение сильнее старого в том отношении, что в нем утверждается существование не произвольного, а ортонормированного базиса, в котором квадратичная функция имеет диагональный вид, в то же время слабее старого в том отношении, что ненулевые λ_i не обязательно равны ± 1. Смысл нового Предложения состоит в том, что в евклидовых пространствах существует более тонкое отношение эквивалентности на квадратичных формах, которое сохранаяет не только аффинную, но и метрическую информацию (такую как длины полуосей эллипсоида $\{v \in V \mid q(v) = 1\}$ в случае положительно определенной квадратичной функции q), которую как раз и несут числа λ_i.

Доказанный результат можно использовать для приведения уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду. А именно, пусть

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0 \tag{60}$$

— уравнение кривой второго порядка, заданное в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 на плоскости. Напомним, что первый шаг алгоритма приведения к каноническому виду заключается в нахождении новой прямоугольной системы координат $Ox_1'x_2'$, в которой коэффициент перед $x_1'x_2'$ равен 0. Для этого рассмотрим квадратичную форму q, определенную равенством

$$q(\overrightarrow{x}) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

в ортонормированном базисе евклидовой плоскости. Согласно доказанному выше, для q существует ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид $q(\overrightarrow{x}') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$. Эквивалентно, если C является матрицей перехода к такому базису, то она ортогональна и для $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ справедливо равенство $C^TAC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Матрица C определяет в плоскости замену системы координат $\overrightarrow{x} = C\overrightarrow{x}'$ такую, что в новой системе уравнение (60) принимает вид

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + 2a_1'x_1' + 2a_2'x_2' + a_0' = 0.$$

Далее, выделяя полные квадраты, находим параллельный перенос, приводящий уравнение кривой к (почти) каноническому виду. Этот же алгоритм работает и в случае уравнений поверхностей 2-го порядка.

Предложение 10.23. *Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, g, h — две билинейные симметричные формы на V, причем g положительно определена. Тогда в V существует базис, в котором матрица Грама первой формы $G = E$, а матрица H второй формы h диагональна.*

Доказательство. Так как g положительно определена, то (V, g) — евклидово пространство. В этом пространстве ассоциируем с h самосопряженный оператор φ, как показано выше (заметим, что сопоставление $h \mapsto \varphi_h$ зависит и от g). Тогда для построенного нами самосопряженного оператора φ существует ортонормированный базис из собственных векторов. В этом базисе мы имеем $G = E$, $A = H$ и A диагональна (с собственными значениями φ на главной диагонали). ■

Заметим, что случай, когда в условии предыдущего Предложения g отрицательно определена, сводится к рассмотренному заменой $g' = -g$.

Переформулируем полученный результат в матричном виде.

Следствие 10.24. *Для любых двух вещественных симметричных матриц G и H одинакового порядка n, где G положительно определена, существует невырожденная матрица C того же порядка такая, что $C^TGC = E$, $C^THC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

Изложим теперь алгоритм приведения пары форм к диагональному виду. Пусть в некотором базисе пространства V форма g имеет матрицу G, а форма h — матрицу H, тогда матрица оператора φ есть $A = A_\varphi = G^{-1}H$. Имеем

$$\det(A - \lambda E) = \det(G^{-1}H - \lambda E) = \det(G^{-1}H - \lambda G^{-1}G) =$$
$$= \det(G^{-1}(H - \lambda G)) = \det(G^{-1})\det(H - \lambda G).$$

Таким образом, собственные значения φ совпадают с корнями "обобщенного характеристического уравнения" $\det(H - \lambda G) = 0$ (так как A — матрица самосопряженного оператора, то все они вещественны). Пусть λ_k — некоторый корень. Тогда соответствующие собственные векторы находятся как (ненулевые) решения системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda_k E)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (здесь $\overrightarrow{v}$ — неизвестный столбец координат собственного вектора $\mathbf{v}$). Данная система эквивалентна системе $(H - \lambda_k G)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Заметим, что собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, автоматически будут ортогональны относительно g. В случае кратного собственного значения λ_k (например, для положительно определенной формы этот случай отвечает эллипсоиду вращения) базисные векторы из соответствующего собственного подпространства нужно ортогонализовать отдельно (например, с помощью алгоритма Грама–Шмидта) относительно матрицы Грама G. Далее полученный ортогональный базис, опять же используя матрицу G, нужно нормировать. В полученном ортонормированном относительно формы g базисе матрица Грама формы g будет единичной E, а матрица h — диагональной $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Замечание 10.25. Приведем пример пары квадратичных форм, которые не приводятся одновременно к диагональному виду. Такой пример нужно искать среди форм, ни одна из которых не является знакоопределенной.

Рассмотрим квадратичные формы в двумерном пространстве, имеющие в некотором базисе матрицы

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матрица перехода к новому базису. Тогда в нем квадратичные формы будут иметь матрицы

$$S^TKS = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S^THS = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix}.$$

Если они обе диагональны, то элементы матрицы перехода удовлетворяют системе

$$\begin{cases} ab - cd = 0 & (1) \\ ad + bc = 0. & (2) \end{cases}$$

Тогда $b(1)+d(2) = a(b^2+d^2) = 0$, а также $d(1)-b(2) = c(b^2+d^2) = 0$. В то же время из обратимости S следует, что $b^2 + d^2 \neq 0$, значит, $a = c = 0$ — противоречие.

10.7 Ортогональные преобразования

Пусть V — евклидово пространство, а $\varphi\colon V \to V$ — его линейное преобразование.

Определение 10.26. Преобразование φ называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\forall\, u,\, v \in V \quad (\varphi(u),\, \varphi(v)) = (u,\, v). \tag{61}$$

Вспоминая определение изометрии евклидовых пространств мы видим, что ортогональное преобразование — то же что изометрия евклидова пространства с самим собой.

Так как длины векторов и углы между векторами выражаются через скалярные произведения, то ортогональные преобразования их тоже сохраняют.

Замечание 10.27. Так как изометрия автоматически линейна (см. Задачу 9.24), условие линейности в определении ортогонального преобразования можно опустить.

Перепишем соотношение (61) в матричном виде. Выберем произвольный базис в V, пусть G — его матрица Грама, и пусть φ имеет в нем матрицу A. Тогда легко видеть, что (61) равносильно матричному соотношению

$$A^T G A = G.$$

В частности, если базис ортонормированный, то ортогональность преобразования равносильна соотношению $A^T A = E$, то есть ортогональности его матрицы. Таким образом, *оператор ортогональный тогда и только тогда, когда в некотором (а значит любом) ортонормированном базисе он имеет ортогональную матрицу.* В частности, любой такой оператор обратим и его определитель равен ± 1.

Из (61) легко следует, что ортогональность φ равносильна $\varphi^*\varphi = \mathrm{id}_V$, то есть $\varphi^* = \varphi^{-1}$. Это еще раз показывает, что любое ортогональное преобразование обратимо.

Предложение 10.28. *Ортогональные преобразования евклидова пространства V образуют группу относительно операции композиции.*

Эта группа обозначается $\mathrm{O}(V)$ и называется *ортогональной группой* пространства V. Она является подгруппой группы $\mathrm{GL}(V)$ всех обратимых (=невырожденных) преобразований пространства V.

Доказательство. Достаточно проверить непустоту множества ортогональных преобразований и его замкнутость относительно композиции и взятия обратного. Легко видеть, что тождественное преобразование id_V ортогонально. Если $\varphi,\, \psi \in \mathrm{O}(V)$, то

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \varphi)^{-1},$$

то есть $\psi \circ \varphi \in \mathrm{O}(V)$.

Пусть теперь $\varphi \in \mathrm{O}(V)$, проверим что и $\varphi^{-1} \in \mathrm{O}(V)$. Для этого докажем что для любого обратимого преобразования φ справедливо $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$. Действительно,

$$\mathrm{id}_V = (\mathrm{id}_V)^* = (\varphi\varphi^{-1})^* = (\varphi^{-1})^*\varphi^*,$$

откуда и следует требуемое. Тогда если φ ортогонален, то для $\psi := \varphi^{-1}$ имеем

$$\psi^* = (\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1} = \psi^{-1}. \quad \blacksquare$$

Ортогональные преобразования пространства V с определителем 1 образую подгруппу группы $\mathrm{O}(V)$, обозначаемую $\mathrm{SO}(V)$ и называемую *специальной ортогональной группой* пространства V. Она состоит из поворотов.

Выбор базиса в V определяет изоморфизм группы $\mathrm{O}(V)$ с группой $\mathrm{O}(n)$ ортогональных матриц порядка n (соответственно группы $\mathrm{SO}(V)$ с группой $\mathrm{SO}(n)$ ортогональных матриц порядка n с определителем 1).

В отличие от самосопряженных преобразований, ортогональные не обязательно диагонализируемы. Это связано с тем, что корни их характеристического многочлена не обязательно вещественны (посмотрите, например, на поворот на угол $\pi/2$ в евклидовой плоскости). Однако если они вещественны, то равны ± 1.

Предложение 10.29. *Собственные значения ортогонального преобразования равны* ± 1.

Доказательство. Пусть ортогональное преобразование φ имеет собственное значение $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ — соответствующий собственный вектор. Имеем

$$\lambda^2(v,\, v) = (\varphi(v),\, \varphi(v)) = (v,\, v).$$

Так как $(v,\, v) \neq 0$, то $\lambda^2 = 1$. $\blacksquare$

Например, направляющий вектор оси поворота φ в трехмерном пространстве — собственный вектор φ с собственным значением 1.

Можно доказать (см. Добавление ниже) что корни характеристического многочлена ортогонального преобразования лежат на единичной окружности в комплексной плоскости (причем из вещественности коэффициентов характеристического многочлена следует что вместе с каждым комплексным корнем λ комплексно сопряженное к нему число $\overline{\lambda}$ также будет корнем). Поэтому если они вещественны, то обязаны быть равными ± 1.

Предложение 10.30. *Если $U \subset V$ — инвариантное подпространство для ортогонального преобразования $\varphi\colon V \to V$, то его ортогональное дополнение $U^\perp \subset V$ также φ-инвариантно.*

Доказательство. Заметим, что из ортогональности φ следует ортогональность ограничения $\varphi|_U$, которое поэтому биективно (как преобразование U). То есть для любого $u \in U$ существует единственный $u' \in U$ такой что $\varphi(u') = u$.

Возьмем теперь произвольный $v \in U^\perp$, тогда

$$\forall\, u \in U \quad (u,\, \varphi(v)) = (\varphi(u'),\, \varphi(v)) = (u',\, v) = 0,$$

откуда $\varphi(v) \in U^{\perp}$. ∎

Например, для поворота вокруг некоторой оси в трехмерном пространстве ортогональное дополнение к этой оси инвариантно.

Теорема 10.31. *Пусть V — евклидово пространство,* $\dim V = 3$. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — ортогональное преобразование. Тогда в V найдется такой ортонормированный базис, в котором матрица φ имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \qquad (62)$$

причем элемент, стоящий в правом нижнем углу матрицы A, равен $\det\varphi$.

Доказательство. Во-первых докажем, что у φ есть собственный вектор w с собственным значением $\det\varphi$. Это равносильно тому, что $\det\varphi$ является корнем характеристического многочлена φ. Данный многочлен $\chi_\varphi(t) \in \mathbb{R}[t]$ имеет степень 3, и поэтому у него есть вещественный корень, причем равный ± 1 (поскольку это — собственное значение ортогонального оператора). Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — все (в том числе комплексные) корни многочлена $\chi_\varphi(t)$, причем $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Тогда $\det\varphi = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Возможно два варианта. 1) Не все корни $\chi_\varphi(t)$ вещественны, и тогда $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$, поэтому $\det\varphi = \lambda_1|\lambda_2|^2$, а так как $|\lambda_2|^2 > 0$, то, сравнивая модули левой и правой частей в предыдущем равенстве, получаем $|\lambda_2|^2 = 1$, и тогда $\det\varphi = \lambda_1$. 2) Все корни $\chi_\varphi(t)$ вещественны, и значит являются собственными значениями φ, которые как мы знаем равны ± 1. Из этого легко следует требуемое.

Таким образом, пусть w — нормированный собственный вектор φ с собственным значением $\det\varphi$. Тогда согласно предыдущему Предложению 2-мерное подпространство $U := \langle w\rangle^{\perp} \subset V$ является φ-инвариантным, и ограничение $\varphi|_U$ на него является ортогональным преобразованием U с определителем 1. Мы знаем, что такое преобразование является поворотом в U на некоторый угол α и в произвольном ортонормированном базисе $\{u, v\}$ в U имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(возможно, с другой расстановкой знаков у синусов). Таким образом, в ортонормированном базисе $\{u, v, w\}$ пространства V оператор φ имеет матрицу требуемого вида. ∎

Следствие 10.32. *Всякое сохраняющее ориентацию ортогональное преобразование трехмерного евклидова пространства является поворотом вокруг некоторой оси.*

Приведем алгоритм решения задачи о нахождении канонического вида (62) и базиса ортогональной матрицы A порядка 3. Читатель должен обосновать каждый его шаг с использованием изложенной теории. Мы считаем, что матрица A является матрицей ортогонального оператора φ в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства V.

Во-первых, посчитаем $\varepsilon := \det A$. Это дает нам элемент в правом нижнем углу в (62). Из инвариантности следа матрицы оператора получаем $\operatorname{tr} A = \varepsilon + 2\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - \varepsilon)$. В качестве $\sin\alpha$ можно выбрать любое значение, удовлетворяющее основному тригонометрическому тождеству $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Далее находим собственное подпространство V_ε с собственным значением ε.

Заметим, что если $\dim V_\varepsilon > 1$, то наш оператор диагонализируем в ортонормированном базисе, поэтому соответствующий оператор φ не только ортогонален, но и самосопряжен (и значит исходная матрица A не только ортогональна, но и симметрична). Это отвечает случаю, когда $\alpha = 0$ или π.

Пусть w — нормированный собственный вектор с собственным значением ε. Тогда ортогональное дополнение $\langle w\rangle^\perp$ двумерно и φ-инвариантно, причем ограничение φ на него является собственным (сохраняющим ориентацию) ортогональным оператором, значит имеет в ортонормированном базисе в $\langle w\rangle^\perp$ матрицу поворота на угол α или $-\alpha$, в зависимости от выбранного порядка базисных векторов. Пусть $\{u, v\}$ — некоторый ортонормированный базис в $\langle w\rangle^\perp$, тогда $\{u, v, w\}$ — ортонормированный базис в V, в котором φ имеет матрицу вида (62), но, возможно, с противоположными знаками у синусов (ведь когда мы выбирали одно из двух (в общем случае) значений $\sin\alpha$, отвечающих $\cos\alpha$, у нас был произвол в выборе знака), и теперь выбор знака у $\sin\alpha$ нужно согласовать с выбором ориентации базиса в плоскости $\langle w\rangle^\perp$ ($\{u, v\}$ или $\{v, u\}$). Для этого нужно проверить, будет ли Au (здесь и далее векторы u, v, w отождествляются с соответствующими столбцами) равно $\cos\alpha\, u + \sin\alpha\, v$, или же $\cos\alpha\, u - \sin\alpha\, v$, во втором случае нужно вместо $\{u, v, w\}$ взять базис $\{v, u, w\}$ (или изменить знак у синуса).

Задача 10.33. *Опишите преобразования евклидова пространства, которые являются одновременно самосопряженными и ортогональными.*

Решение. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — такое преобразование. Так как φ является самосопряженным, то V является ортогональной прямой суммой его собственных подпространств. Так как φ является ортогональным, то возможны только собственные значения ± 1. Таким образом, (за исключением тривиальных случаев $\varphi = \pm\mathrm{id}_V$) $V = V_1 \oplus V_{-1}$, причем $V_{-1} = (V_1)^\perp$. Если $v = v^+ + v^-$ — соответствующее разложение вектора $v \in V$, то $\varphi(v) = v^+ - v^-$, откуда следует, что φ является ортогональным отражением относительно подпространства V_1. ∎

Задача 10.34. *Пусть V — евклидова плоскость, и оператор $\varphi\colon V \to V$ имеющего матрицу* $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ *в некотором ортонормированном базисе V. Без вычислений укажите его диагональный вид и геометрический смысл.*

10.8 Полярное и сингулярное разложения

В данном разделе мы докажем теорему о существовании полярного разложения произвольного невырожденного линейного оператора евклидова пространства, которое можно рассматривать как далекое обобщение представления ненулевого комплексного числа z в показательной форме $re^{i\alpha}$, где r, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $r > 0$.

Связь между самосопряженными операторами и билинейными симметрическими (квадратичными) функциями, описанная в Предложении 10.11, позволяет перенести на самосопряженные операторы такие понятия, как положительная (полу)определенность и т.д.

Определение 10.35. Сапосопряженный оператор $\varphi\colon V \to V$ на евклидовом пространстве V называется *положительным* (соответственно *неотрицательным*), если соответствующая ему квадратичная функция q_φ положительно (соответственно неотрицательно) определена.

Предложение 10.36. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — произвольный (не обязательно самосопряженный) линейный оператор на евклидовом пространстве V. Тогда оператор $\varphi^*\varphi$ неотрицателен, причем он положителен тогда и только тогда, когда φ невырожден.*

Доказательство. Во-первых проверим, что $\varphi^*\varphi$ самосопряжен. Действительно, $(\varphi^*\varphi)^* = \varphi^*\varphi^{**} = \varphi^*\varphi$. Далее, для любого $v \in V$

$$q_\varphi(v) = (v, \varphi^*\varphi(v)) = (\varphi(v), \varphi(v)) = |\varphi(v)|^2 \geq 0,$$

что по определению означает, что $\varphi^*\varphi$ неотрицателен. Заметим, что невырожденность φ равносильна условию $|\varphi(v)|^2 > 0 \; \forall v \neq 0$, что в свою очередь равносильно положительности $\varphi^*\varphi$. ■

Предложение 10.37. *Самосопряженный оператор $\varphi\colon V \to V$ неотрицателен (соответственно положителен) тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны (положительны).*

Доказательство. Для самосопряженного φ существует ортонормированный базис, в котором его матрица $A_\varphi = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогда матрица H соответствующей квадратичной функции q_φ равна A_φ и сама квадратичная функция в соответствующих координатах имеет вид $q_\varphi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2$. Ясно, что она положительно (неотрицательно) определена тогда и только тогда, когда все $\lambda_i > 0$ (соответственно ≥ 0). ■

Задача 10.38. *Докажите, что оператор φ на евклидовом пространстве положителен тогда и только тогда, когда его матрица A в некотором (а значит и любом) ортонормированном базисе положительно определена.*

Задача 10.39. *Пусть среди собственных значений вещественной симметричной матрицы H порядка n k положительны, l отрицательны и $n-k-l$ равны нулю. Что тогда можно сказать про собственные значения матрицы $H' = C^T HC$, где C — произвольная невырожденная матрица?*

Положительные операторы похожи на положительные действительные числа, в частности, из любого такого оператора можно извлечь единственный арифметический (положительный) квадратный корень.

Предложение 10.40. *Для любого положительного оператора $\varphi\colon V \to V$ существует единственный положительный оператор $\psi\colon V \to V$ такой, что $\psi^2 = \varphi$.*

Доказательство. Пусть $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$ — разложение пространства V в ортогональную прямую сумму собственных подпространств самосопряженного оператора φ. Будем считать что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s$, в этом случае указанное разложение единственно. На каждом собственном подпространстве $V_{\lambda_i} \subset V$ оператор φ действует как скалярный оператор умножения на соответствующее собственное значение λ_i, то есть

$$\varphi = \oplus_{i=1}^s \lambda_i \mathrm{id}_{V_{\lambda_i}} \tag{63}$$

(см. формулу (59) и пояснения под ней). Так как все $\lambda_i > 0$, для каждого собственного значения λ_i существует единственный арифметический квадратный корень $\sqrt{\lambda_i}$ и оператор $\psi := \oplus_{i=1}^s \sqrt{\lambda_i}\mathrm{id}_{V_{\lambda_i}}$ является положительным самосопряженным, причем $\psi^2 = \varphi$.

Пусть ψ' — еще один положительный самосопряженный оператор такой, что $\psi'^2 = \varphi$, и пусть $V = V_{\mu_1} \oplus \ldots \oplus V_{\mu_r}$ — разложение в ортогональную прямую сумму собственных подпространств ψ', причем $0 < \mu_1 < \ldots < \mu_r$. То есть $\psi' = \oplus_{i=1}^r \mu_i \mathrm{id}_{V_{\mu_i}}$, тогда $\psi'^2 = \oplus_{i=1}^r \mu_i^2 \mathrm{id}_{V_{\mu_i}}$, что в силу $\psi'^2 = \varphi$ должно совпадать с (63). То есть $V_{\mu_i} = V_{\lambda_i}$, $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ и $r = s$, и значит $\psi' = \psi$. ■

Корень из самосопряженного оператора без условия положительности не единственен. Рассмотрим, например, в качестве положительного самосопряженного φ тождественный оператор на евклидовой плоскости V. Мы знаем, что помимо $\pm\mathrm{id}_V$ самосопряженными операторами ψ, удовлетворяющими условию $\psi^2 = \mathrm{id}_V$, является всевозможные ортогональные отражения относительно одномерных подпространств. То есть уравнение $X^2 = \mathrm{id}_V$ имеет континуальное множество решений в пространстве самосопряженных операторов, но только одно из них (а именно сам тождественный оператор) является положительным. То есть неединственность корня в общем случае связана с неединственностью квадратного корня из положительного действительного числа а также с тем, что собственное подпространство размерности больше 1 с положительным собственным собственным значением λ можно расщепить в ортогональную прямую сумму собственных подпространств корня с собственными значениями $\pm\sqrt{\lambda}$.

Задача 10.41. *Пусть φ и ω — самосопряженные операторы, причем φ положительный. Докажите, что оператор $\varphi\omega$ диагонализируем.*

Решение. Пусть ψ — положительный квадратный корень из φ. Очевидно, что операторы $\varphi\omega$ и $\psi^{-1}\varphi\omega\psi$ диагонализируемы или не диагонализируемы одновременно. В то же время $\psi^{-1}\varphi\omega\psi = \psi\omega\psi$, а последний оператор, очевидно, самосопряжен. ■

Предложение 10.42. *Для любого невырожденного оператора $\varphi\colon V \to V$ на евклидовом пространстве V существуют и единственны такие положительный ψ и ортогональный ϑ операторы на V, что $\varphi = \vartheta \circ \psi$.*

Доказательство. Из Предложения 10.36 мы знаем, что для невырожденного оператора φ оператор $\varphi^*\varphi$ положительный самосопряженный. Пусть ψ — положительный корень из $\varphi^*\varphi$, который согласно предыдущему Предложению существует и единственен.

Проверим, что оператор $\varphi\psi^{-1}$ ортогонален. Действительно,

$$(\varphi\psi^{-1})^*\varphi\psi^{-1} = (\psi^*)^{-1}\varphi^*\varphi\psi^{-1} = \psi^{-1}\psi^2\psi^{-1} = \mathrm{id}_V.$$

Поэтому мы полагаем $\vartheta := \varphi\psi^{-1}$ и получаем требуемое разложение $\varphi = \vartheta\psi$.

Проверим единственность. Если $\varphi = \vartheta\psi$, то $\varphi^*\varphi = \psi\vartheta^*\vartheta\psi = \psi^2$, откуда однозначно восстанавливается положительный самосопряженный ψ. А тогда ортогональный ϑ однозначно задается равенством $\varphi\psi^{-1}$. ■

Следствие 10.43. *Любую невырожденную вещественную матрицу A можно единственным образом представить в виде произведения UB, где B — положительно определенная симметричная, а U — ортогональная матрицы.*

Приведем алгоритм нахождения матриц B и U для данной невырожденной вещественной матрицы A. Будем считать, что A — матрица невырожденного оператора φ в некотором ортонормированном базисе.

Если уже получено требуемое разложение $A = UB$, то $A^T A = B^T U^T U B = B^2$. Заметим, что матрица $A^T A$ симметричная положительная (это матрица положительного самосопряженного оператора $\varphi^*\varphi$ в ортонормированном базисе), поэтому существует такая ортогональная матрица C, что $\Lambda = C^T A^T A C$ — диагональная матрица $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, причем все $\lambda_i > 0$ (как собственные значения положительного самосопряженного оператора $\varphi^*\varphi$). Поэтому $A^T A = C\Lambda C^T$ и оператор с матрицей $B = C\sqrt{\Lambda}C^T$, где $\sqrt{\Lambda} := \mathrm{diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, является положительным самосопряженным (поскольку данная матрица симметрична и все ее собственные значения положительны). Кроме того, $B^2 = A^T A$, поскольку $B^2 = C\sqrt{\Lambda}C^T C\sqrt{\Lambda}C^T = C\Lambda C^T = A^T A$. Значит, оператор с матрицей B является искомым арифметическим квадратным корнем из $A^T A$. Теперь ортогональная матрица U однозначно находится из соотношения $U = B^{-1}A$.

Посмотрим, какую геометрическую картину дает полярное разложение для невырожденного линейного оператора на евклидовом пространстве. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис из собственных векторов положительного самосопряженного оператора ψ, и μ_i — соответствующие собственные значения. Пусть $S(V) = \{v \in V \mid |v| = 1\}$ — единичная сфера пространства V. Тогда в координатах относительно базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ она задается уравнением $\sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$. Посмотрим, куда она переходит под действием ψ. Для $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in S(V)$ получаем $w := \psi(v) = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i e_i = \sum_{i=1}^n w_i e_i$, откуда $v_i = \frac{w_i}{\mu_i}$, поэтому $1 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{w_i^2}{\mu_i^2}$ — уравнение n-мерного эллипсоида с полуосями μ_i. То есть ψ единичную сферу отображает в указанный эллипсоид. Дальнейшее применение ϑ к указанному эллипсоиду как-то его поворачивает и (возможно) отражает, но не меняет его геометрию (длины полуосей).

Вернемся снова к матричной форме полярного разложения $A = UB$ как в Следствии 10.43. Через D обозначим введенную выше матрицу $\sqrt{\Lambda}$, тогда $B = CDC^T$, где C — ортогональная матрица. Подставляя это выражение в полярное разложение получим, что для невырожденной вещественной матрицы A существуют такие ортогональные матрицы U_1, U_2, что $A = U_1 D U_2$ где D — диагональная матрица, на диагонали которой стоят арифметические квадратные корни из собственных значений матрицы $A^T A$. Это так называемое *сингулярное разложение* матрицы A.

Задача 10.44. *Выясните, насколько однозначно сингулярное разложение? (Ответ: матрица D определена однозначно с точностью до перестановки диагональных элементов. При заданной матрице D матрицы U_1 и U_2 определены с точностью до преобразования $U_1 \mapsto U_1 U$, $U_2 \mapsto U^{-1} U_2$, где U — ортогональная матрица, коммутирующая с D).*

10.9 Добавление

В данном разделе мы докажем важное утверждение о том, что у любого линейного оператора на векторном пространстве конечной положительной размерности над полем $\mathbb{R}$ существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство. Затем, используя этот результат, мы дадим еще одно доказательство существования собственного вектора у самосопряженного оператора, а также доказательство существования канонического вида ортогонального оператора.

Мы знаем, что любой оператор на пространстве положительной размерности над полем $\mathbb{C}$ имеет собственный вектор. Это выводится из алгебраической замкнутости $\mathbb{C}$: любой многочлен $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ положительной степени имеет корень в $\mathbb{C}$ (а значит раскладывается на линейные множители $f(t) = a_0(t - \lambda_1)\dots(t - \lambda_n)$).

Для многочленов с вещественными коэффициентами нам известно, например, что всякий такой многочлен нечетной степени имеет вещественный корень, что приводит к существованию собственного вектора у любого оператора на вещественном пространстве нечетной размерности. Однако многочлен четной степени над $\mathbb{R}$ может не иметь вещественных корней, то есть на линейные множители над $\mathbb{R}$ он, вообще говоря, не раскладывается, но, как мы знаем, он раскладывается на линейные и квадратичные множители. Это связано с тем, что неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ — не только многочлены первой степени, но также второй степени с отрицательным дискриминантом.

Пусть $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ — многочлен второй степени с отрицательным дискриминантом, пусть его старший коэффициент равен 1. Тогда над полем $\mathbb{C}$ он раскладывается на линейные множители: $f(t) = (t - \lambda)(t - \overline{\lambda}) = t^2 - (\lambda + \overline{\lambda})t + |\lambda|^2$. Здесь мы использовали тот факт, что если многочлен $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ имеет корень $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, то также его корнем будет и $\overline{\lambda}$ (это легко выводится из свойств комплексного сопряжения).

Когда мы изучали инвариантные подпространства линейных операторов, мы доказали такой результат: характеристический многочлен ограничения оператора на инвариантное подпространство делит характеристический многочлен самого оператора. Нельзя ли это утверждение обратить? Если бы это можно было сделать, то, поскольку вещественный многочлен положительной степени, не имеющий вещественных корней, обязан делиться над $\mathbb{R}$ на многочлен второй степени, то мы бы доказали в этом случае существование двумерного инвариантного подпространства. По-существу, мы именно это сейчас и сделаем.

Итак, пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор, где V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, причем $\dim V \geq 2$. Пусть $\chi_\varphi(t) \in \mathbb{R}[t]$ — характеристический многочлен оператора φ и $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ — его невещественный корень, $\chi_\varphi(\lambda) = 0$. Тогда $f(t) = (t - \lambda)(t - \overline{\lambda}) = t^2 + pt + q$ делит $\chi_\varphi(t)$ в кольце $\mathbb{R}[t]$ (то есть $\chi_\varphi(t) = f(t)g(t)$, где $g(t) \in \mathbb{R}[t]$).

Напомним, что для любого многочлена $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ и оператора φ как выше мы имеем линейный оператор $p(\varphi)\colon V \to V$.

Докажем теперь серию небольших лемм.

Лемма 10.45. Пусть $U := \ker f(\varphi) \subset V$. Тогда U является φ-инвариантным.

Доказательство. Если два оператора $\varphi, \psi\colon V \to V$ коммутируют, то ядро одного из них инваринатно относительно другого. Легко проверяется, что для любого многочлена p операторы φ и $p(\varphi)$ коммутируют. ■

Лемма 10.46. Определенное в предыдущей лемме подпространство U ненулевое.

Доказательство. Пусть A — матрица оператора φ в некотором базисе пространства V. Тогда матрицей оператора $f(\varphi)$ в том же базисе будет $f(A)$. Заметим, что $f(A)$ является произведением двух комплексных матриц $A - \lambda E$ и $A - \overline{\lambda}E$. В самом деле,

$$(A - \lambda E)(A - \overline{\lambda}E) = A^2 - (\lambda + \overline{\lambda})A + \lambda\overline{\lambda}E = f(A).$$

Поэтому $\det f(A) = (\det(A-\lambda E))(\det(A-\overline{\lambda}E))$. Но так как λ — (комплексный) корень $\chi_\varphi(t)$, то матрица $(A-\lambda E)$ вырождена (то же, конечно, верно и для $(A-\overline{\lambda}E)$). Значит, и матрица $f(A)$ тоже вырождена, поэтому у оператора $f(\varphi)$ ядро U ненулевое. ∎

Лемма 10.47. Подпространство U не содержит собственных векторов оператора φ.

Доказательство. Пусть, напротив, $u \in U$ — собственный вектор φ. Тогда $u \neq 0$ и $\varphi(u) = \mu u$ для некоторого $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда

$$0 = f(\varphi)(u) = (\varphi^2 + p\varphi + q\mathrm{id}_V)u = (\mu^2 + p\mu + q)u$$

и μ — вещественный корень многочлена $f(t)$ в противоречии с нашим выбором многочлена f. ∎

Лемма 10.48. Пусть $0 \neq u \in U$. Тогда $W := \langle u, \varphi(u)\rangle \subseteq U$ — двумерное φ-инвариантное подпространство.

Доказательство. Заметим, что W содержится в U, так как $\varphi(u) \in U$ в силу φ-инвариантности U (см. лемму 10.45). Если $\varphi(u)$ пропорционально (с вещественным коэффициентом) u, то u — собственный вектор φ, чего в силу предыдущей леммы быть не может. Поэтому $\dim W = 2$. Осталось показать, что само W φ-инвариантно. Для этого, очевидно, достаточно показать, что его базис $\{u, \varphi(u)\}$ при применении φ остается в W. Для u это очевидно, для $\varphi(u)$ это следует из равенства $\varphi^2(u) = -p\varphi(u) - qu$, которое выполнено для любого $u \in U$ в силу определения U. ∎

Заметим, что матрицей $\varphi|_W$ в базисе $\{u, \varphi(u)\}$ пространства W будет $B = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & -p \end{pmatrix}$. Интересно заметить, что $\chi_B(t) = f(t)$. Как это связано с теоремой Гамильтона-Кэли?

Соберем вместе доказанные в леммах результаты.

Предложение 10.49. *Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор, λ — комплексный (невещественный) корень $\chi_\varphi(t)$. Пусть $f(t) = (t-\lambda)(t-\overline{\lambda}) \in \mathbb{R}[t]$ и $U = \ker f(\varphi)$. Тогда U — ненулевое φ-инвариантное подпространство в V, и произвольный ненулевой вектор $u \in U$ содержится в единственном двумерном φ-инвариантном подпространстве $W \subseteq U$.*

Следствие 10.50. *Пусть V — конечномерное линейное пространство положительной размерности над полем $\mathbb{R}$, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Тогда в V существует одно- или двумерное φ-инвариантное подпространство.*

Дадим теперь новое доказательство Предложения 10.12, утверждающего существование собственного вектора самосопряженного преобразования.

Итак, пусть $\varphi\colon V \to V$ — самосопряженное преобразование евклидова пространства V, $\dim V \geq 1$. Если у φ есть одномерное инвариантное подпространство, то его порождает собственный вектор. Если одномерного инвариантного подпространства нет, то обязательно найдется двумерное φ-инвариантное подпространство $U \subset V$. Ограничение $\psi := \varphi|_U$ является самосопряженным преобразованием двумерного евклидова пространства U. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ортонормированный базис в U и $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ — матрица ψ в нем. Легко посчитать, что дискриминант характеристического многочлена $\chi_B(t)$ равен $(a-c)^2+4b^2$, поэтому он всегда неотрицателен, и значит корни $\chi_B(t)$ вещественные, поэтому ψ имеет собственный вектор, а значит и φ имеет собственный вектор, лежащий в подпространстве U. Это противоречит предположению о том, что у φ нет одномерного инвариантного подпространства и завершает доказательство.

Выведем теперь из Следствия 10.50 существование канонического вида ортогонального оператора.

Предложение 10.51. *Пусть $\varphi\colon V \to V$ — ортогональное преобразование конечномерного евклидова пространства V. Тогда в V существует ортонормированный базис, в котором матрица имеет блочно-диагональный вид с диагональными блоками порядков 1 и 2. Блоки порядка 1 равны ± 1, блоки порядка 2 являются матрицами поворота на углы $\alpha \neq \pi k$ (вообще говоря, углы разные для разных блоков).*

Доказательство. Требуемый базис можно строить так. Напомним, что собственными значениями ортогонального оператора могут быть только ± 1. Если у φ есть собственные подпространства V_1 и V_{-1}, то легко проверяется, что они ортогональны. Выберем ортонормированный базис в каждом из них и объединим их, так мы получим часть искомого базиса, которая отвечает диагональным блокам порядка 1. Если $V_1 \oplus V_{-1} \neq V$, заметим, что так как $V_1 \oplus V_{-1}$ φ-инвариантно, то в силу Предложения 10.30 и $(V_1 \oplus V_{-1})^\perp$ φ-инвариантно. Подпространство $(V_1 \oplus V_{-1})^\perp$ уже не содержит собственных векторов φ, но согласно Следствию 10.50, в нем найдется 2-мерное φ-инвариантное подпространство U. Ограничение $\varphi|_U$ будет ортогональным преобразованием плоскости, не имеющим собственных векторов, и значит поворотом на угол $\alpha \neq \pi k$, и его матрицей в соответствующем ортонормированном базисе будет $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Далее переходим к $(V_1 \oplus V_{-1} \oplus U)^\perp$ и т.д., так как V по условию конечномерно, так мы придем к искомому базису за конечное число шагов. ∎

Следствие 10.52. *Корни характеристического многочлена ортогонального преобразования — в точности комплексные числа, по модулю равные единице.*

Доказательство. Легко следует из предыдущего Предложения с учетом того, что характеристические числа матрицы поворота плоскости на угол α равны $e^{i\alpha}$ и $e^{-i\alpha}$. ∎

Список литературы

[1] В.И. Арнольд Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: МЦНМО, 2002.— 40 с.

[2] А.А. Арутюнов, А.В. Ершов Дополнительные задачи по линейной алгебре: Учеб. пособие. — М.: МФТИ, 2016 — 214 с.

[3] Д.В. Беклемишев Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. — 13-е изд., испр. — СПб.: Издательство "Лань", 2015 — 448 с.

[4] Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебн. пособие / Под ред. Д.В. Беклемишева, 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.— 496 с.

[5] А.П. Веселов, Е.В. Троицкий Лекции по аналитической геометрии. — М.: МЦНМО, 2016. — 150 с.

[6] Э.Б. Винберг Курс алгебры. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2013. — 592 с.

[7] А.А. Гайфуллин, А.В. Пенской, С.В. Смирнов Задачи по линейной алгебре и геометрии. — М.: МЦНМО, 2014. — 152 с.

[8] И.М. Гельфанд Лекции по линейной алгебре. — Издание четвертое, дополненное. — М.: Наука, 1971 — 272 с.

[9] А.И. Кострикин Введение в алгебру: Ч. II: Линейная алгебра. — Второе издание, стереотип. — М.: МЦНМО, 2012.— 368 с.

[10] А.И. Кострикин, Ю.И. Манин Линейная алгебра и геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 320 с.