М. И. Шабунин
Ю. В. Сидоров

Теория функций комплексного переменного

МАТЕМАТИКА

Лаборатория ЗНАНИЙ

М. И. Шабунин
Ю. В. Сидоров

Теория функций комплексного переменного

5-е издание, электронное

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области прикладных математики и физики в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Прикладные математика и физика», а также для других математических и естественнонаучных направлений и специальностей и по смежным направлениям и специальностям в области техники и технологий

Москва
Лаборатория знаний
2020

УДК 517.9
ББК 22.161.1
Ш13

Шабунин М. И.

Ш13 Теория функций комплексного переменного / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. — 5-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 303 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-00101-916-9

В учебнике рассматриваются методы теории функций комплексного переменного, которые часто применяются в прикладных задачах: операции с функциями комплексного переменного, разложения в ряды, конформные отображения, вычисление интегралов с помощью вычетов, основы операционного исчисления. В книге разобрано большое количество примеров, помогающих читателю глубже освоить теорию и приобрести навыки решения практических задач.

Студентам физико-математических и инженерно-физических специальностей университетов и вузов с расширенной математической подготовкой.

УДК 517.9
ББК 22.161.1

Деривативное издание на основе печатного аналога: Теория функций комплексного переменного / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. — 4-е изд. — М. : Лаборатория знаний, 2018. — 300 с. : ил. — ISBN 978-5-00101-135-4.

ISBN 978-5-00101-916-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана на основе многолетнего опыта преподавания теории функций комплексного переменного (ТФКП) в Московском физико-техническом институте (государственном университете). Она является учебником для студентов высших технических учебных заведений с углубленным курсом математики и может оказаться полезной для самостоятельного изучения курса ТФКП.

Основное внимание в книге уделяется методам ТФКП, которые находят широкое применение в прикладных задачах (разложение в ряды, вычисление интегралов с помощью вычетов, конформные отображения).

При изложении материала особое внимание уделено тому, чтобы помочь читателю успешно овладеть основами ТФКП. С этой целью в книге разобрано большое число примеров, которые дают возможность читателю не только глубоко усвоить теоретический материал, но и приобрести необходимые навыки в решении задач.

Первая глава содержит сведения о комплексных числах, кривых и областях на комплексной плоскости, непрерывных функциях комплексного переменного и об интегрировании этих функций.

Во второй главе введено одно из основных понятий ТФКП — понятие регулярной функции, изложены основные свойства регулярных функций, доказаны интегральная теорема и интегральная формула Коши, рассмотрены ряды Лорана и особые точки однозначного характера.

Третья глава посвящена многозначным аналитическим функциям. В ней подробно изучены аналитические свойства и приведены основные формулы для вычисления значений важнейших элементарных функций. Особое внимание уделено вопросу о выделении регулярных ветвей многозначных аналитических функций.

В четвертой главе изложена теория вычетов и ее приложения. Рассмотрено много важных типов интегралов от однозначных и неоднозначных аналитических функций.

В пятой главе рассматриваются свойства конформных отображений, подробно изучаются отображения, задаваемые элементарными функциями, дается решение задачи Дирихле с помощью конформных отображений.

Шестая глава содержит краткие сведения о преобразовании Лапласа и его применении к решению дифференциальных уравнений.

Во втором издании, как и в первом, в числе авторов указан Ю. В. Сидоров, с которым мы обсуждали структуру книги. К сожалению, Юрий Викторович не смог принять участие в работе над книгой в связи с продолжительной болезнью и кончиной в начале 2001 г. Меня связывало с ним многолетнее сотрудничество и совместная работа над многими учебниками и учебными пособиями, в том числе и над учебником по ТФКП (авторы Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин), на который имеется много ссылок в данном учебнике.

Во второе издание внесены существенные изменения: подробно изучено понятие аргумента, переработан материал, связанный с обратной функцией и теоремой единственности, заменены многие примеры (особенно из раздела «Особые точки»), переработана глава о многозначных функциях, много внимания уделено выделению регулярных ветвей.

Выражаю искреннюю благодарность своим коллегам по кафедре высшей математики МФТИ и, в первую очередь, профессору Е. С. Половинкину, за конструктивную критику первого издания книги и предложения по ее переработке.

М. И. Шабунин

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Комплексные числа

1. Определение комплексного числа

Комплексными числами называются пары (x, y) действительных чисел x и y, если для них определены понятие равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

1. Два комплексных числа (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
2. *Суммой* двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
3. *Произведением* двух комплексных чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) называется комплексное число $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Для обозначения равенства, суммы, произведения и других операций над комплексными числами применяются те же знаки, что и для действительных чисел. Таким образом, по определению комплексного числа

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2), \quad \text{если} \quad x_1 = x_2 \quad \text{и} \quad y_1 = y_2; \tag{1}$$

сумма и произведение двух комплексных чисел соответственно равны

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \tag{2}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{3}$$

Множество комплексных чисел, в котором введено равенство, а также операции сложения и умножения по формулам (1)–(3), обозначают $\mathbb{C}$. Напомним, что множество натуральных чисел обозначают $\mathbb{N}$, множество целых чисел — буквой $\mathbb{Z}$, а множество действительных чисел — буквой $\mathbb{R}$.

Из формул (2), (3) получаются, в частности, равенства

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами $(x,0)$ совпадают с операциями над действительными числами x. Поэтому комплексные числа $(x,0)$ отождествляются с действительными числами: $(x,0)=x$.

Комплексное число $(0,1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается буквой i, т. е. $i=(0,\ 1)$. По формуле (3) находим

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1,$$

а по формулам (2) и (3) получается равенство

$$(x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy.$$

Таким образом, каждое комплексное число можно записать в *алгебраической форме*: $(x,\ y) = x + iy$.

Комплексные числа $0+iy=iy$ называют *чисто мнимыми*. В частности, число $0+i\cdot 0=0$ является единственным числом, которое одновременно и действительное, и чисто мнимое.

С помощью алгебраической формы комплексного числа соотношения (1)–(3) записываются так:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \quad \text{если} \quad x_1 = x_2 \quad \text{и} \quad y_1 = y_2, \tag{4}$$

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \tag{5}$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{6}$$

Комплексное число $x+iy$ принято обозначать одной буквой z, т. е. $z=x+iy$. Число x называется *действительной частью*, а число y — *мнимой частью* комплексного числа $z=x+iy$. Для этих чисел приняты следующие обозначения*:

$$x = \mathrm{Re}(x+iy) = \mathrm{Re}z, \quad y = \mathrm{Im}(x+iy) = \mathrm{Im}z.$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, в записи $z=x+iy$ предполагается, что x и y — действительные числа.

2. Комплексно сопряженные числа

Комплексное число $x-iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z=x+iy$ и обозначается $\overline{z}$, т. е.

$$\overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy. \tag{7}$$

* Обозначения Re и Im являются сокращениями французских слов Reel (действительный) и Imaginaire (мнимый).

Из этого определения следует, что операция сопряжения перестановочна с арифметическими операциями над комплексными числами:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из (7) получается также, что для любого комплексного числа z справедливо равенство $\overline{(\overline{z})} = z$, а равенство $\overline{z} = z$ выполняется только тогда, когда z — действительное число.

Пример 1. Если $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен с действительными коэффициентами, то по свойствам операции сопряжения получаем:

$$\overline{P(z)} = a_0(\overline{z})^n + a_1(\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_n = P(\overline{z}).$$

Если $P(z_0) = 0$, то $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = 0$, т. е. если число z_0 является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и комплексно сопряженное число $\overline{z_0}$ также является корнем этого многочлена.

3. Модуль комплексного числа

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$, т. е.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{8}$$

Из этого определения следует, что $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0$ только тогда, когда $z = 0$. Модуль действительного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа. Из (8) получаются также следующие равенства:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|;$$

$$|z^n| = |z|^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$|\overline{z}| = |z|, \quad z\overline{z} = |z|^2. \tag{9}$$

4. Свойства арифметических операций над комплексными числами

Из формул (4)–(6) следует, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами.

1. **Коммутативность:**

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

2. **Ассоциативность:**

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3. **Дистрибутивность:**

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Поэтому операции сложения и умножения над комплексными числами $x + iy$ обладают формально такими же свойствами, как если бы число i было действительным. В частности, нет необходимости запоминать формулы (5) и (6), их можно получить по обычным правилам алгебры. Например, (6) получается из равенства

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2,$$

где $i^2 = -1$.

Числа нуль и единица в множестве комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и в множестве действительных чисел. А именно, для любого комплексного числа z имеют место равенства:

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z.$$

4. **Вычитание.** Операция сложения комплексных чисел обладает обратной операцией, которую, как обычно, называют *вычитанием*. Это означает, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 существует, и притом только одно, число z, удовлетворяющее уравнению

$$z + z_2 = z_1. \tag{10}$$

Это число называется *разностью* чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 - z_2$. В частности, разность $0 - z$ обозначается $-z$.

○ Из (4), (5) следует, что для любых комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ уравнение (10) имеет единственный корень $z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$. Таким образом,

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad \bullet$$

5. **Деление.** Операция умножения комплексных чисел обладает обратной операцией, которую, как обычно, называют *делением*. Это

означает, что для любых двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ существует, и притом только одно, число z, удовлетворяющее уравнению

$$zz_2 = z_1. \tag{11}$$

Это число называется частным чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 : z_2$ или $\dfrac{z_1}{z_2}$.

○ Докажем, что уравнение (11) имеет единственный корень для любых комплексных чисел z_1 и z_2, если $z_2 \neq 0$. Умножая обе части уравнения (11) на число $\overline{z_2}$ и используя формулу (9), получаем $z|z_2|^2 = z_1\overline{z_2}$, откуда умножением на число $\dfrac{1}{|z_2|^2}$ находим $z = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$. Таким образом,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0. \tag{12}$$

●

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то формулу (12) можно записать так:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Эту формулу можно не запоминать — достаточно помнить, что она получается умножением числителя и знаменателя на число, сопряженное со знаменателем.

5. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой плоскости с координатами (x, y), и эта точка обозначается той же буквой z (рис. 1).

Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости является взаимно однозначным. При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые — точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Отметим, что точки z и $-z$ симметричны относительно точки 0, а точки z и $\overline{z}$ симметричны относительно действительной оси: если $z = x + iy$, то $-z = (-x) + i(-y)$, а $\overline{z} = x + i(-y)$ (рис. 1).

Комплексное число z изображается также вектором с началом в точке 0 и концом в точке z (рис. 1). Такое соответствие между комплексными числами и векторами комплексной плоскости с началом в точке 0 также является взаимно однозначным. Поэтому вектор, изображающий комплексное число z, обозначается той же буквой z.

Из формулы (8) и рис. 1 видно, что *длина вектора z равна* $|z|$ и имеют место неравенства

$$|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|.$$

С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сложение и вычитание комплексных чисел. Из формулы (5) следует, что число $z_1 + z_2$ изображается вектором, построенным по обычному правилу сложения векторов z_1 и z_2 (рис. 2). Вектор $z_1 - z_2$ строится как сумма векторов z_1 и $-z_2$ (рис. 2).

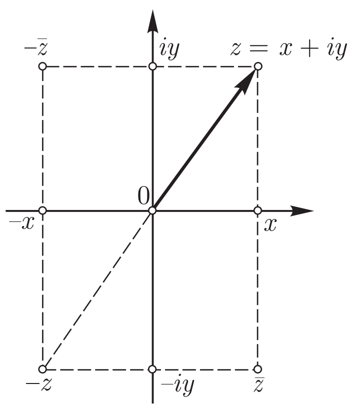

Рис. 1

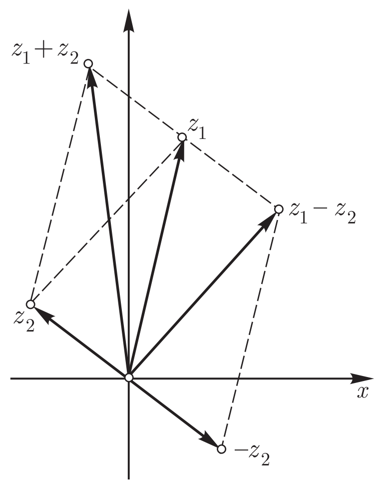

Рис. 2

Из рис. 2 видно, что *расстояние между точками z_1 и z_2* равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е. *равно* $|z_1 - z_2|$.

Пример 2. Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_0| = R$ есть окружность радиуса R с центром в точке z_0, так как $|z - z_0|$ — расстояние между точками z и z_0.

Пример 3. Множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| = |z - z_2|$ есть множество точек, равноудаленных от точек z_1 и z_2. Следовательно, это уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1, z_2, и проведенной через его середину.

Неравенства треугольника. *Для любых комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *выполняются неравенства*

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{13}$$

○ Длины сторон треугольника с вершинами в точках 0, z_1, $z_1 + z_2$ равны $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$ (рис. 2). Следовательно, неравенства (13) являются известными из элементарной геометрии неравенствами для длин сторон треугольника. ●

Следствие. *Для любых комплексных чисел* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

6. Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми координатами x, y, но и полярными координатами r, φ (рис. 3), где $r = |z|$ — расстояние от точки 0 до точки z, а φ — угол между действительной осью и вектором z, отсчитываемый от положительного направления действительной оси. При этом если отсчет ведется против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной. Этот угол называется *аргументом* комплексного числа z $(z \neq 0)$ и обозначается так*: $\varphi = \arg z$. Для числа $z = 0$ аргумент не определяется, поэтому во всех дальнейших рассуждениях, связанных с понятием аргумента, предполагается, что $z \neq 0$.

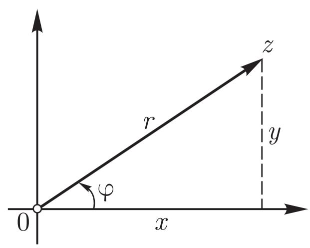

Рис. 3

Из рис. 3 видно, что

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{14}$$

Следовательно, любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi). \tag{15}$$

Запись комплексного числа в виде (15) называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

---

* Обозначение arg является сокращением французского слова argument (аргумент).

Из формул (14) получается, что если $z = x + iy$, $\varphi = \arg z$, то

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{16}$$

Таким образом, для нахождения аргумента комплексного числа $z = x + iy$ нужно решить систему уравнений (16).

Система (16) имеет бесконечно много решений, и все эти решения задаются формулой $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где φ_0 — одно из решений системы (16). Таким образом, аргумент комплексного числа определяется неоднозначно: если φ_0 — одно из значений аргумента комплексного числа z, то все значения аргумента этого числа находятся по формуле

$$\arg z = \varphi_0 + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{17}$$

Из системы (16) получается, что аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,, \quad x \neq 0. \tag{18}$$

Следует иметь в виду, что не все корни уравнения (18) являются решениями системы (16).

7. Показательная форма комплексного числа

Пусть $|z| = 1$, $\varphi = \arg z$. Тогда по формуле (15) имеем $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Это комплексное число обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. функция $e^{i\varphi}$ для любого действительного числа φ определяется формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{19}$$

В частности $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{-\pi i/2} = -i$ (рис. 4). Отметим, что $|e^{i\varphi}| = 1$ для любого действительного числа φ. Из (19) заменой φ на $(-\varphi)$ получается равенство

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{20}$$

Сложением и вычитанием равенств (19) и (20) получаются *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\,(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}),$$

с помощью которых тригонометрические функции выражаются через показательную функцию.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает обычными свойствами показательной функции, как если бы число i было действительным. Отметим основные из

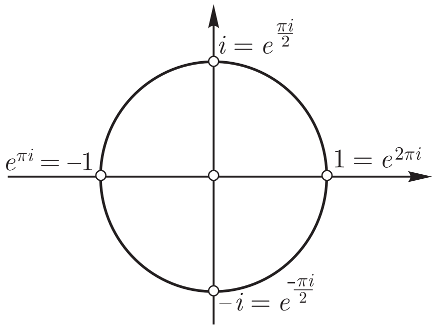

Рис. 4

них:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{21}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{22}$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Докажем, например, равенство (21):

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Аналогично проверяется равенство (22). Равенство (23) получается из (21) и (22) по индукции.

Из (23) и (19) получается *формула Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из формул (15) и (19) следует, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = re^{i\varphi}, \tag{24}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Запись комплексного числа в виде (24) называется *показательной формой* комплексного числа.

С помощью равенств (21) и (22) получаются формулы умножения и деления комплексных чисел, записанных в показательной форме:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{25}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{26}$$

а из равенства (23) — формула возведения в целую степень:

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{27}$$

Из формул (25)–(27) получаются, в частности, формулы (9), а также следующие свойства аргумента:

$$\text{если} \quad \varphi_1 = \arg z_1, \varphi_2 = \arg z_2, \text{то} \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 z_2); \tag{28}$$

$$\text{если} \quad \varphi_1 = \arg z_1, \varphi_2 = \arg z_2, \text{то} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \arg \frac{z_1}{z_2}\,; \tag{29}$$

$$\text{если} \quad \varphi_1 = \arg z, \text{то} \quad n\varphi = \arg(z^n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \tag{30}$$

$$\text{если} \quad \varphi_1 = \arg z, \text{то} \quad -\varphi = \arg \overline{z}. \tag{31}$$

Сформулируем правило равенства комплексных чисел, записанных в тригонометрической или показательной форме: если $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2$, то равенство $z_1 = z_2$ имеет место только тогда, когда

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{и} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \tag{32}$$

где k — некоторое целое число.

8. Извлечение корня

Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \tag{33}$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, n — натуральное число. Пусть $a = \rho e^{i\theta}$, $z = re^{i\varphi}$. Тогда

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}.$$

Из этого уравнения с помощью правила (32) находим $r^n = \rho$, $n\varphi = \theta + 2k\pi$, откуда $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi_k = (\theta + 2k\pi)/n$ и

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{(\theta+2k\pi)i/n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{34}$$

Среди этих чисел ровно n различных, получаемых, например, при $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$. На комплексной плоскости эти точки расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке 0 (рис. 5).

З а м е ч а н и е. Комплексное число z называется *корнем n-й степени из числа a* (обозначается $\sqrt[n]{a}$), если $z^n = a$. Выше показано, что при $a \neq 0$ имеется ровно n различных корней n-й степени из числа a.

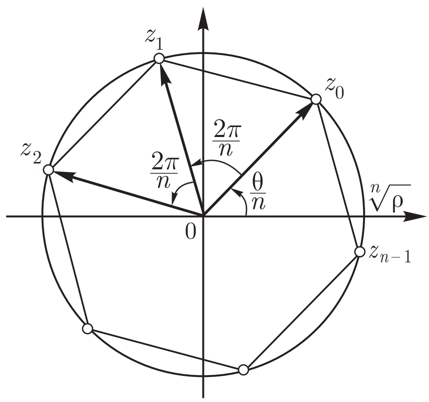

Рис. 5

§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел

1. Предел последовательности

Определение предела последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ формально такое же, как и определение предела последовательности действительных чисел.

Определение 1. *Комплексное число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство*

$$|z_n - z_0| < \varepsilon. \tag{1}$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Другими словами, число z_0 называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0. \tag{2}$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.*

Геометрический смысл неравенства (1) заключается в том, что точка z_n лежит в круге радиуса ε с центром в точке z_0 (рис. 6). Этот круг, т. е. множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z_n - z_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-окрестностью точки z_0. Следовательно, точка z_0 является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки z_0 содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа.

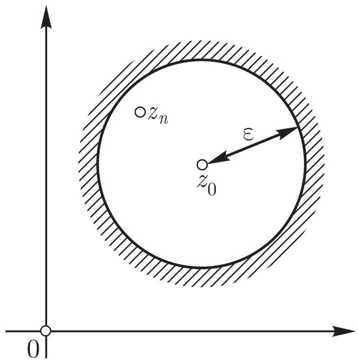

Рис. 6

Таким образом, определение предела последовательности $\{z_n\}$ является обычным определением предела последовательности точек плоскости, сформулированным в терминах комплексных чисел.

Пусть $z_n = x_n + iy_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В курсе математического анализа доказывается

Теорема 1. *Существование предела* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ *равносильно существованию двух пределов:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Из этой теоремы и свойств сходящихся последовательностей действительных чисел получаются следующие свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел:

если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta_0$, где $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
то $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm \zeta_n) = z_0 \pm \zeta_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot \zeta_n) = z_0 \cdot \zeta_0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{z_0}{\zeta_0}$, если $\zeta_n \neq 0$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Точно так же, как и в курсе математического анализа, доказывается

Критерий Коши. *Последовательность* $\{z_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* N, *что для всех* $n > N$ *и* $m > N$ *выполняется неравенство* $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число R, что $|z_n| < R$ для всех номеров n.

Из геометрической интерпретации предела последовательности получается, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Сформулируем свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел, связанные со свойствами последовательностей модулей и аргументов этих чисел.

1. Из определения предела последовательности $\{z_n\}$ и неравенства $\Big||z_n| - |z_0|\Big| \leqslant |z_n - z_0|$ получается следующее свойство: если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|$.
2. Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, где $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Из формулы $z_n = r_n \cos\varphi_n + i r_n \sin\varphi_n$ и теоремы 1 получается следующее достаточное условие сходимости последовательности $\{z_n\}$: если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = r_0 e^{i\varphi_0}$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k, \tag{3}$$

составленный из комплексных чисел. Этот ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм $s_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. При этом предел s последовательности $\{s_n\}$ называют *суммой ряда* (3) и пишут $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$.

Ряд (3) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|.$$

Если $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то по теореме 1 исследование свойств ряда (3) сводится к исследованию свойств рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

2. Расширенная комплексная плоскость

Понятие «бесконечность» вводится с помощью следующего определения.

Определение 2. *Последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}$ *называют сходящейся к бесконечности и пишут*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \tag{4}$$

если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty. \tag{5}$$

Это определение формально совпадает с соответствующим определением для действительных чисел, так как соотношение (5) означает, что для любого $R > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|z_n| > R. \tag{6}$$

Геометрически неравенство (6) означает, что точка z_n лежит вне круга радиуса R с центром в точке O (рис. 7). Это множество называется *окрестностью бесконечности*. Следовательно, точка $z = \infty$ является пределом последовательности $\{z_n\}$, если в любой окрестности точки $z = \infty$ содержатся все члены этой последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа.

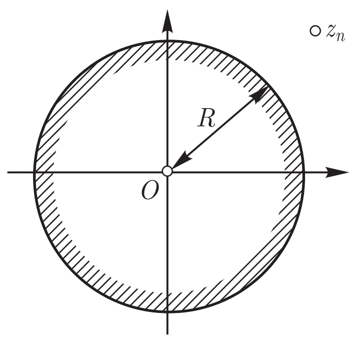

Рис. 7

Таким образом, «числу» $z = \infty$ ставится в соответствие символическая бесконечно удаленная точка. Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\mathbb{C}}$. Приведем геометрическую интерпретацию расширенной комплексной плоскости.

Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в точке O (рис. 8). Обозначим через P точку сферы S, диаметрально противоположную точке O. Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M, которая является точкой пересечения сферы S с отрезком, соединяющим точки z и P (рис. 8). При этом последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек сферы S, сходящаяся к точке P. Поэтому точке $z = \infty$ поставим в соответствие точку P.

Такое соответствие между точками расширенной комплексной плоскости и точками сферы S является взаимно однозначным. Оно на-

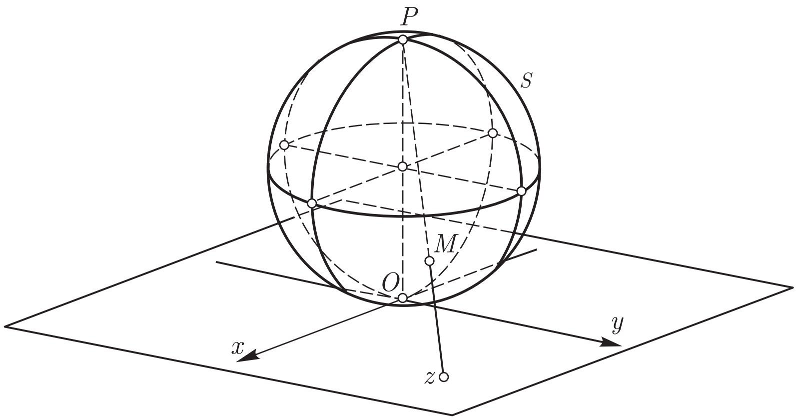

Рис. 8

зывается *стереографической проекцией*, а сфера S называется *сферой Римана*.

Комплексные числа (включая $z = \infty$) можно изображать точками сферы Римана. При этом сходящиеся последовательности комплексных чисел изображаются на сфере Римана сходящимися последовательностями точек.

При стереографической проекции окружности переходят в окружности, угол между пересекающимися кривыми на плоскости равен углу между образами этих кривых на сфере Римана.

Теорема 2. *Расширенная комплексная плоскость компактна, т. е. из любой последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся (может быть, к бесконечности) подпоследовательность.*

Эта теорема доказывается в курсе математического анализа.

§ 3. Кривые и области на комплексной плоскости

1. Непрерывные кривые

Пусть на конечном отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ заданы две непрерывные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Тогда на этом отрезке задана непрерывная комплекснозначная функция действительного переменного:

$$z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

В этом случае говорят, что задана непрерывная кривая*

$$z = \sigma(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{1}$$

а уравнение (1) называется *параметрическим уравнением* этой кривой. При этом, если $z_1 = \sigma(t_1)$ и $z_2 = \sigma(t_2)$, где $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$, то говорят, что точка z_2 кривой (1) следует за точкой z_1 (или: точка z_1 предшествует точке z_2). Таким образом, *кривая* (1) *является упорядоченным множеством точек комплексной плоскости*. Другими словами, кривая (1) всегда считается ориентированной в направлении возрастания параметра t. *Направление* движения точки z вдоль кривой (1), соответствующее возрастанию параметра t, называется *положительным*. Точка $a = \sigma(\alpha)$ называется *началом* (или начальной точкой) кривой (1), а точка $b = \sigma(\beta)$ — ее *концом* (или конечной точкой).

Пусть кривая γ задана уравнением (1). Тогда на комплексной плоскости точки $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, образуют некоторое множество $M(\gamma)$. Это множество отличается от самой кривой, во-первых, тем, что кривая является упорядоченным множеством точек.

Пример 1. Кривая $z = \cos t$, $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ является отрезком $[-1, 1]$, ориентированным в направлении от точки $z = -1$ к точке $z = 1$ (рис. 9).

Рис. 9

Пример 2. Кривая $z = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$ является полуокружностью $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, ориентированной против часовой стрелки (рис. 10).

Второе отличие кривой γ от множества $M(\gamma)$ состоит в том, что различным точкам кривой может отвечать одна и та же точка плоскости: если $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, то точки $z_1 = \sigma(t_1)$ и $z_2 = \sigma(t_2)$ являются различными на кривой γ, но как точки плоскости они совпадают. Такие точки называются *точками самопересечения кривой* (1). Исключением является совпадение начала и конца кривой: если $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, то эта точка не считается самопересечением кривой (1).

Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *простой кривой*. Кривая, у которой начало и конец совпадают, называется *замкнутой кривой*.

* В дальнейшем для краткости слово «непрерывная» опускается.

Кривые в примерах 1 и 2 являются простыми незамкнутыми (рис. 9 и 10).

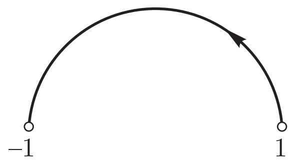

Рис. 10

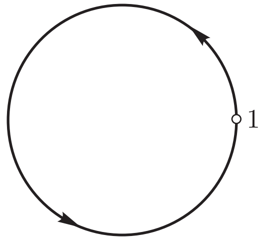

Рис. 11

Пример 3. Кривая $z = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ является окружностью $|z| = 1$, ориентированной против часовой стрелки, с началом и концом в точке $z = 1$. Это пример простой замкнутой кривой (рис. 11).

Пример 4. Кривая $z = \sigma(t)$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant 2\pi$, где

$$\sigma(t) = \begin{cases} e^{it}, & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi, \\ \dfrac{3t}{\pi} - 4, & \pi \leqslant t \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

является незамкнутой с самопересечением в точке $z = 1$ (рис. 12). При этом точки $z_1 = \sigma(0)$ и $z_2 = \sigma(5\pi/3)$ являются различными на данной кривой, хотя как точки плоскости они совпадают: $z_1 = z_2 = 1$.

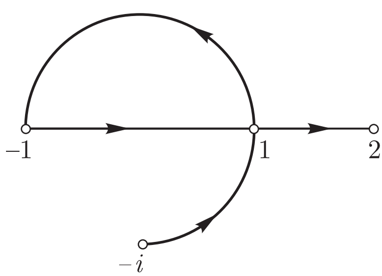

Рис. 12

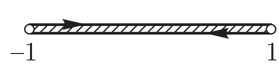

Рис. 13

Пример 5. Кривая $z = \cos t$, $-\pi \leqslant t < \pi$, является отрезком $[-1, 1]$, проходимым дважды: сначала от точки $z = -1$ к точке $z = 1$, затем от точки $z = 1$ к точке $z = -1$ (рис. 13). Это пример замкнутой кривой, у которой каждая точка интервала $(-1, 1)$ является точкой самопересечения.

З а м е ч а н и е. Две кривые $z = \sigma_1(t)$, $\alpha_1 \leqslant t \leqslant \beta_1$, и $z = \sigma_2(\tau)$, $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$, считаются совпадающими, если существует действительная функция $t = s(\tau)$, непрерывная и возрастающая на отрезке $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$, такая, что $s(\alpha_2) = \alpha_1$, $s(\beta_2) = \beta_1$ и $\sigma_1(s(\tau)) \equiv \sigma_2(\tau)$ при $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$.

Совпадающим кривым отвечает одно и то же множество точек плоскости.

Уравнение любой кривой $z = \sigma_1(t)$, $\alpha_1 \leqslant t \leqslant \beta_1$, можно записать в виде $z = \sigma_2(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, например, с помощью замены $t = \alpha + (\beta - \alpha)\tau$; $\sigma_1(t) = \sigma_1(\alpha + (\beta - \alpha)\tau) = \sigma_2(\tau)$. Таким образом, не теряя общности, уравнение кривой можно записывать с помощью комплекснозначной функции, определенной на отрезке $[0, 1]$.

Пример 6. Уравнение кривой, рассмотренной в примере 1, можно записать в виде $z = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, или в виде $z = 2t - 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. Кусочно-гладкие кривые

Рассмотрим кривую γ, заданную уравнением $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Обозначим через γ^{-1} кривую, полученную из кривой γ изменением ориентации на противоположную. Тогда уравнение кривой γ^{-1} можно записать в виде $z = \sigma(-t)$, $-\beta \leqslant t \leqslant -\alpha$. Часть кривой γ, проходимая от точки $z_1 = \sigma(t_1)$ до точки $z_2 = \sigma(t_2)$, где t_1 и t_2 принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, называется *дугой кривой* γ.

Пусть $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$ и γ_k — дуга кривой γ, проходимая от точки $z_{k-1} = \sigma(t_{k-1})$ до точки $z_k = \sigma(t_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда будем говорить, что кривая γ *разбита на дуги* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *или кривая* γ *состоит из дуг* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Этот факт будем обозначать так: $\gamma = \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n$. Ломаная с последовательными вершинами в точках $z_k = \sigma(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, называется *ломаной, вписанной в кривую* γ (рис. 14).

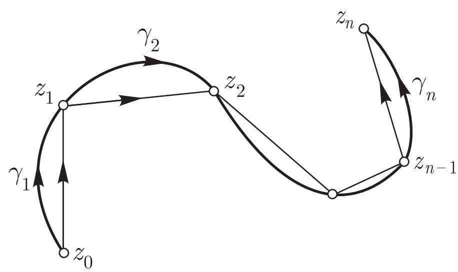

Рис. 14

Рассмотрим совокупность всех ломаных, вписанных в кривую γ. Если множество длин этих ломаных ограничено, то кривая γ называется *спрямляемой*, а точная верхняя грань этого множества называется *длиной кривой* γ.

Кривая называется *гладкой*, если ее уравнение можно записать в виде $z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$, т. е. на этом отрезке функция $\sigma(t)$ имеет непрерывную производную $\sigma'(t) = \xi'(t) + i\eta'(t)$ и $\sigma'(t) \neq 0$, причем если кривая замкнута, то должно выполняться равенство $\sigma'(\alpha) = \sigma'(\beta)$.

Кривая называется *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых. Простейшим примером кусочно-гладкой кривой является ломаная.

Уравнение кусочно-гладкой кривой можно записать в виде $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где функция $\sigma(t)$ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ и на этом отрезке $\sigma'(t) \neq 0$. Всюду в дальнейшем уравнение кусочно-гладкой кривой будем записывать только с помощью таких функций.

Геометрический смысл производной комплекснозначной функции состоит в следующем: если кривая γ задана уравнением $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, и в некоторой точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$ существует $\sigma'(t_0) \neq 0$, то кривая γ в точке $z_0 = \sigma(t_0)$ имеет касательный вектор $\sigma'(t_0)$. Следовательно, кусочно-гладкая кривая во всех точках имеет касательную, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых существует предельное положение касательной слева и справа. Эти исключительные точки называются *угловыми точками кривой.*

Из курса математического анализа известно, что кусочно-гладкая кривая γ: $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, спрямляема и ее длина $l(\gamma)$ выражается формулой

$$l(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\sigma'(t)\,|dt,$$

так как $|\sigma'(t)\,|dt = dl$ — элемент длины кривой γ.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать только кусочно-гладкие кривые.

Введем понятие неограниченной кривой. Пусть на луче $t \geqslant \alpha$ задана непрерывная комплекснозначная функция $z = \sigma(t)$ и $\sigma(+\infty) = \infty$, т. е. $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma(t)=\infty$. Тогда говорят, что задана *неограниченная кривая*

$$z=\sigma(t),\quad \alpha\leqslant t<+\infty, \tag{2}$$

а уравнение (2) называется *параметрическим уравнением* этой кривой. Неограниченная кривая (2) называется *кусочно-гладкой*, если для каждого конечного $\beta>\alpha$ кривая $z=\sigma(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, является кусочно-гладкой.

Аналогично определяются неограниченные кривые в случае, когда параметр t пробегает полуось $-\infty<t\leqslant\alpha$ или всю числовую ось.

Уравнение неограниченной кривой (2) можно записать в виде $z=\sigma_1(\tau)$, $\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta_1$, где $\sigma_1(\tau)\to\infty$ при $\tau\to\beta_1$ (β_1 — конечное число). Для определенности уравнение такой кривой будем записывать только в виде (2).

3. Области

Множество D точек комплексной плоскости называется *областью*, если это множество:

открытое, т. е. для каждой точки, принадлежащей D, существует окрестность этой точки, принадлежащая D;

связное, т. е. любые две точки, принадлежащие D, можно соединить кривой, все точки которой принадлежат D.

Граничной точкой области D называется точка, в любой окрестности которой есть точки, принадлежащие D, и точки, не принадлежащие D. Множество граничных точек называется *границей этой области.* Область D, дополненная всеми своими граничными точками, называется *замыканием области* D и обозначается $\overline{D}$.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать **только** *такие области, границы которых состоят из конечного числа кусочно-гладких кривых и изолированных точек.*

Кроме того, будем считать, что все граничные кривые области D ориентированы так, что *при движении точки вдоль граничной кривой в направлении этой ориентации область D остается слева.* Поясним это на примерах.

Пример 7. Границей области $0<|z-z_0|<\varepsilon$, $\varepsilon>0$, является точка $z=z_0$ и окружность $|z-z_0|=\varepsilon$, ориентированная против часовой стрелки и проходимая один раз (рис. 15). Эту область будем называть так: «*круг* $|z-z_0|<\varepsilon$ *с выколотой точкой* z_0» или «*проколотая окрестность точки* z_0».

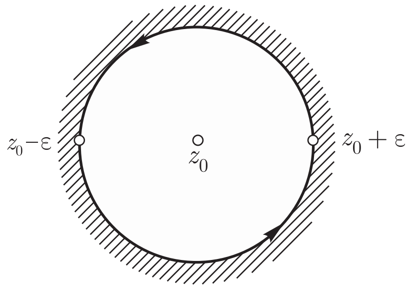

Рис. 15

Пример 8. Область $|z| < 1$, $0 < \arg z < 2\pi$ будем изображать, как указано на рис. 16, и называть так: «*круг* $|z| < 1$ *с разрезом по отрезку* $[0, 1]$». Граничная кривая Γ этой области состоит из следующих частей: отрезок $[0, 1]$, проходимый от точки $z = 1$ до точки $z = 0$ — нижний берег разреза; отрезок $[0, 1]$, проходимый от точки $z = 0$ до точки $z = 1$ — верхний берег разреза; окружность $|z| = 1$, проходимая против часовой стрелки один раз. Отметим, что каждой точке полуинтервала $(0, 1]$ соответствуют две различные точки кривой Γ.

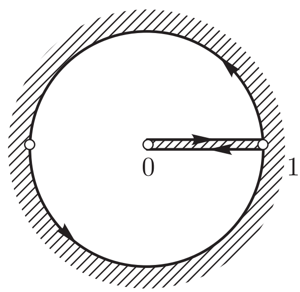

Рис. 16

Пример 9. Граница Γ области $1 < |z| < 2$ состоит из двух кривых:

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 — окружность $|z| = 2$, ориентированная против часовой стрелки,

Γ_2 — окружность $|z| = 1$, ориентированная по часовой стрелке.

Область D называется *ограниченной*, если существует такой круг K: $|z| < R$, что $D \subset K$. Примерами ограниченных областей являются области на рис. 15–17.

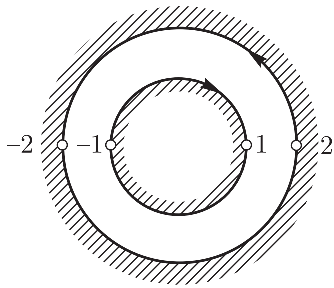

Рис. 17

Пример 10. Следующие области являются неограниченными (рис. 18):

а) $1 < |z| < \infty$;
б) верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку $[0, i]$;
в) полоса $|\operatorname{Im} z| < 1$;
г) полуполоса $|\operatorname{Im} z| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$ с разрезом по отрезку $[1, 2]$.

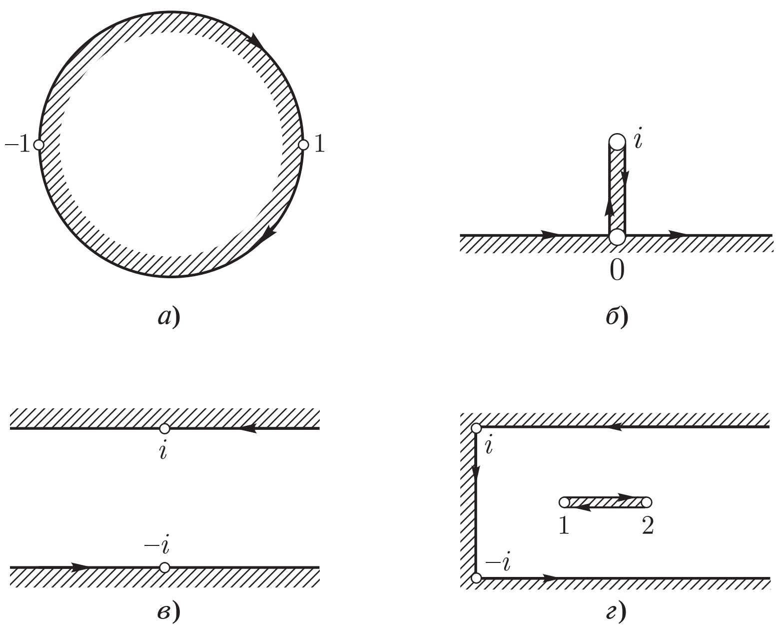

Рис. 18

Область D на комплексной плоскости называется *односвязной*, если любую замкнутую кривую, лежащую в D, можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области D. Непрерывную деформацию кривой достаточно понимать наглядно геометрически (рис. 19–21), но можно дать и строгое аналитическое определение (см. п. 4, § 3).

Примерами односвязных областей являются области на рис. 16 и 18 (*б*, *в*), а неодносвязными являются области на рис. 15, 17, 18 (*а*, *г*).

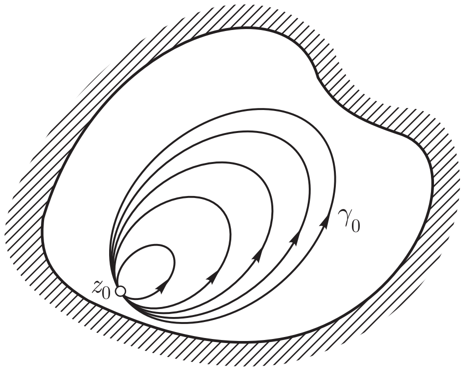

Рис. 19

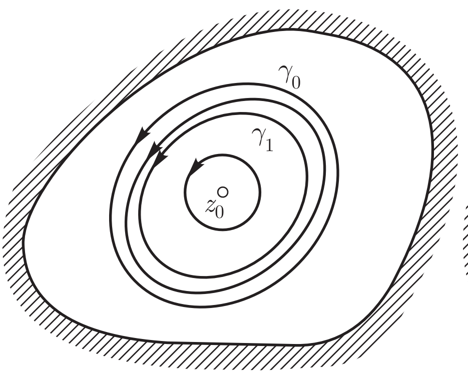

Рис. 20

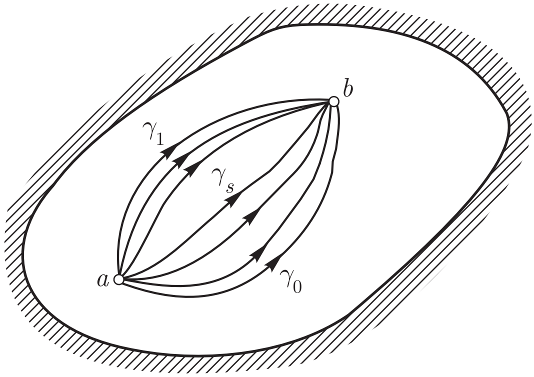

Рис. 21

З а м е ч а н и е. В односвязной области любые две кривые с общим началом и общим концом можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области (рис. 21).

Область D на комплексной плоскости является односвязной только тогда, когда внутренность любой простой замкнутой кривой, лежащей в D, целиком принадлежит области D. Образно односвязную область можно представить как лист бумаги произвольной формы, может быть, с разрезами по краям, но без «дырок» внутри.

Ограниченная область является односвязной, если ее граница состоит только из одной замкнутой кривой.

4. Непрерывная деформация кривой

Пусть кривые γ_0: $z = \sigma_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и γ_1: $z = \sigma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежат в области D и имеют общее начало в точке $a = \sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ и общий конец в точке $b = \sigma_0(1) = \sigma_1(1)$ (рис. 21).

Будем говорить, что кривую γ_0 можно непрерывно деформировать в кривую γ_1, оставаясь в области D, если существует функция $\sigma(t, s)$, непрерывная в квадрате $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ и удовлетворяющая следующим условиям:

а) при каждом фиксированном $s \in [0, 1]$ кривая γ_s: $z = \sigma(t, s)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, лежит в области D;
б) $\sigma(t, 0) \equiv \sigma_0(t)$, $\sigma(t, 1) \equiv \sigma_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
в) $\sigma(0, s) \equiv a$, $\sigma(1, s) \equiv b$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

В частности, если кривая γ_0 замкнутая, т. е. $a = b$, а кривая γ_1 — это только одна точка $a = b = z_0 \in D$, т. е. $\sigma_1(t) \equiv z_0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то будем говорить, что кривую γ_0 можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в области D (рис. 20). При этом можно отказаться от условия в) (рис. 19, 20).

§ 4. Непрерывные функции комплексного переменного

Пусть на множестве E определена комлекснозначная функция $w = f(z)$, т. е. каждой точке $z = x + iy \in E$ поставлено в соответствие комплексное число $w = u + iv$. Тогда говорят, что задано отображение множества E во множество E' и пишут $E' = f(E)$. Эту функцию можно представить в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Таким образом, комплекснозначную функцию комплексного переменного можно рассматривать как пару действительных функций двух действительных переменных.

1. Предел функции

Пусть функция $f(z)$ определена в проколотой окрестности точки z_0, т. е. в кольце $K : 0 < |z - z_0| < R$. Формально так же, как и для действительной функции действительного переменного, сформулируем два эквивалентных определения предела функции $f(z)$: по Коши и по Гейне.

Определение предела по Коши. Комплексное число A называется пределом по Коши функции $f(z)$ при z, стремящемся к z_0 (в точке z_0), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех z, удовлетворяющих условию: $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ или $f(z) \to A$ при $z \to z_0$.

Определение предела по Гейне. Комплексное число A называется пределом по Гейне функции $f(z)$ в точке z_0, если для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \in K$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся к z_0, последовательность $\{f(z_n)\}$ сходится к A, т. е. из условия $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = A$.

Из теоремы 1, § 2 следует, что существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, равносильно существованию двух пределов $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y)$, причем

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y).$$

Отсюда, а также из определения предела функции по Гейне и свойств сходящихся последовательностей комплексных чисел получаются следующие свойства пределов функций:

если существуют пределы

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \quad \text{и} \quad \lim_{z \to z_0} g(z) = B,$$

то существуют пределы

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A + B, \quad \lim_{z \to z_0} [f(z)g(z)] = AB,$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad \text{где} \quad B \neq 0.$$

2. Непрерывность функции в точке и в области

Определение 1. *Функция $f(z)$, определенная в окрестности точки z_0, называется непрерывной в точке z_0, если*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Это определение эквивалентно следующему: функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Определение 2. *Функция $f(z)$ называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области.*

Из свойств пределов функции вытекают следующие свойства непрерывных функций. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны (в точке или в области). Тогда (в этой точке или области) непрерывны функции $f(z) \pm g(z)$ и $f(z)g(z)$, а функция $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ непрерывна в тех точках, в которых $g(z) \neq 0$.

Суперпозиция непрерывных функций также является непрерывной функцией: если функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, а функция $F(\xi)$ непрерывна в точке $\xi_0 = f(z_0)$, то функция $F(f(z))$ непрерывна в точке z_0.

Пример 1. Функции z, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$, $|z|$ непрерывны во всей комплексной плоскости.

Пример 2. Многочлен $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ с комплексными коэффициентами является непрерывной функцией во всей комплексной плоскости.

Пример 3. Рациональная функция $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$, $Q(z)$ — многочлены, непрерывна во всех точках комплексной плоскости, в которых $Q(z) \neq 0$.

3. Непрерывность функции на кривой

Пусть задана кривая

$$\gamma : z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{1}$$

и пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$ заданы две действительные функции $u(t)$ и $v(t)$. Тогда будем говорить, что на кривой γ задана функция

$$w = f(t) = u(t) + iv(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{2}$$

Определение 3. *Функция (2) называется непрерывной на кривой (1), если на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывны функции $u(t)$ и $v(t)$, причем, если кривая (1) замкнутая, то должно выполняться равенство $f(\alpha) = f(\beta)$.*

Обозначим $M(\gamma)$ множество точек z комплексной плоскости, таких, что $z = \sigma(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Если кривая γ простая, то соотношение (2) определяет на $M(\gamma)$ однозначную функцию $w = f(z) = f(\sigma(t)) = f_1(t)$. В общем случае, когда кривая γ имеет точки самопересечения, функция (2), как функция от z, может оказаться неоднозначной на $M(\gamma)$. Однако и в этом случае вместо записи (2) для краткости будем писать $w = f(z) = f(\sigma(t))$.

Справедливы следующие утверждения:

1) если функция $f(z)$ непрерывна в области D, то она непрерывна на каждой кривой, лежащей в области D;

2) если функция $f(z)$ определена в области D и непрерывна на каждой кривой, лежащей в области D, то функция $f(z)$ непрерывна в области D.

4. Непрерывность функции в области вплоть до границы

Рассмотрим сначала ограниченную область D, у которой граница Γ состоит из конечного числа простых замкнутых кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ (рис. 22). В этом случае будем писать $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n$.

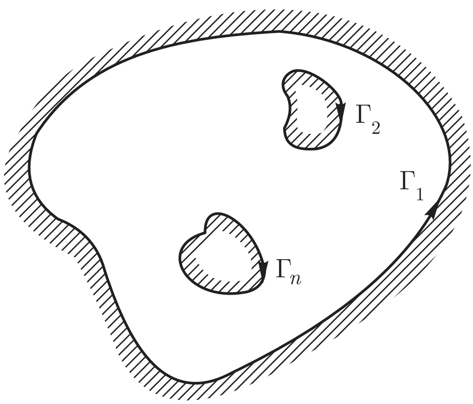

Рис. 22

Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ непрерывна в области D, т. е. в этой области непрерывны функции $u(x, y)$, $v(x, y)$. И пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ можно доопределить на границе Γ так, что получатся функции, непрерывные в $\overline{D}$. В таком случае всегда будем считать, что функция $f(z)$ определена в $\overline{D}$ по формуле $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, и называть ее *непрерывной в области D вплоть до ее границы* Γ. Отметим, что в этом случае функция $f(z)$ непрерывна на каждой граничной кривой Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 4. Пусть D — полукруг $|z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 23). Рассмотрим в этой области функцию $f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}$, где $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$.

Эту функцию можно записать в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где

$$u(x, y) = \sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$
$$v(x, y) = \sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt[4]{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

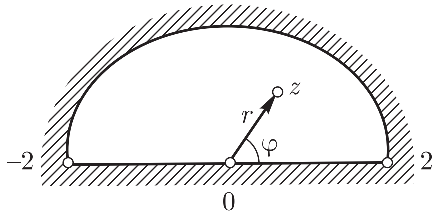

Рис. 23

Так как функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывны в области D, то функция $f(z)$ также непрерывна в этой области. По условленной договоренности считаем, что эта функция доопределена на граничной кривой своими предельными значениями изнутри области по формулам: $f(ze^{i\varphi}) = \sqrt{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $f(x) = \sqrt{x}$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$, $f(x) = i\sqrt{|x|}$ при $-2 \leqslant x \leqslant 0$. Поэтому функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}$.

Пример 5. Пусть D — круг $|z| < 2$ с разрезом по отрезку $[0, 2]$ (рис. 24). Рассмотрим в этой области функцию $f(z) = \sqrt{r}e^{\frac{i\varphi}{2}}$, где $z = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Так же, как и в примере 4, можно доказать, что функция $f(z)$ непрерывна в области D. Впрочем, и геометрически видно, что $r = |z|$ и полярный угол φ (рис. 24) являются непрерывными функциями от (x, y). Доопределим функцию $f(z)$ на граничной кривой области D формулами: $f(re^{i\varphi}) = \sqrt{2}e^{\frac{i\varphi}{2}}$, при $0 < \varphi < \pi$, на верхнем берегу разреза $f(x + i0) = \lim\limits_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z>0}} f(z) = \sqrt{x}$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$, на нижнем берегу разреза $f(x - i0) = \lim\limits_{\substack{z\to x\\ \operatorname{Im} z<0}} f(z) = -\sqrt{x}$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Получилась функция, которая не является непрерывной в $\overline{D}$, так как на разных берегах разреза она принимает разные значения: ее нельзя «склеить» вдоль разреза так, чтобы она оставалась непрерывной. В этом случае функцию $f(z)$ будем называть непрерывной в области D вплоть до ее границы.

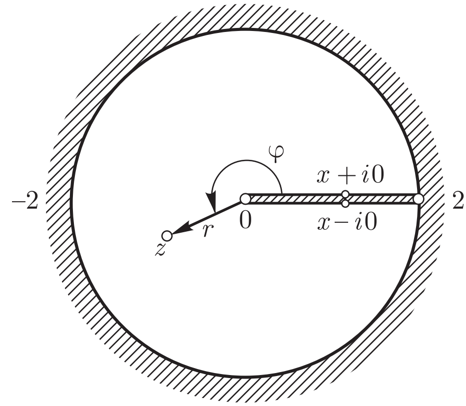

Рис. 24

«Разрежем» (разобьем) область D примера 5 отрезком $[-2, 0]$ на две области: D_1 — верхний полукруг $|z| < 2$, $\mathrm{Im}\ z > 0$ (рис. 23) и D_2 — нижний полукруг $|z| < 2$, $\mathrm{Im}\ z < 0$. Тогда функция $f(z)$ примера 5 непрерывна в $\overline{D_1}$ и в $\overline{D_2}$.

Определение 4. *Непрерывная в ограниченной области D функция $f(z)$ называется непрерывной в области D вплоть до ее границы, если область D можно разбить на конечное число областей D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, так, что функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{D_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Это определение эквивалентно следующему: функция $f(z)$ является непрерывной в ограниченной области D вплоть до ее границы, если для каждой подобласти $D_1 \subset D$, граница которой является простой кривой, функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{D_1}$.

5. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции

1) *Показательная функция*

Функция e^z для комплексных $z = x + iy$ определяется формулой

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что

$$\mathrm{Re}\, e^z = e^x \cos y, \quad \mathrm{Im}\, e^z = e^x \sin y, \quad |e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

Поэтому функция e^z непрерывна на всей комплексной плоскости.

Функция e^z обладает следующими свойствами:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \quad e^{z+2\pi i} = e^z.$$

Функция e^z принимает все комплексные значения, кроме нуля, т. е. уравнение $e^z = A$ имеет корни при любом $A \neq 0$. Действительно, если $A \neq 0$ и $A = |A|e^{i\alpha}$, где $\alpha = \arg A$, то равенство $e^z = A$ можно записать в виде

$$e^x \cdot e^{iy} = |A|e^{i\alpha},$$

откуда следует, что

$$e^x = |A|, \quad x = \ln|A|, \quad y = \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Введем обозначение $\operatorname{Arg} A = \arg A + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\arg A$ — одно из значений аргумента числа A, $A \neq 0$. Если $e^z = A$, $A \neq 0$, то комплексное число z называется *логарифмом числа* A и обозначается $\operatorname{Ln} A$.

Тогда множество корней уравнения $e^z = A$ можно записать в виде

$$z = \operatorname{Ln} A = \ln|A| + i\operatorname{Arg} A. \tag{4}$$

Действительная часть числа z (формула (4)), т. е. $\ln|A|$, определяется однозначно, а мнимая часть, т. е. $\operatorname{Arg} A$ — неоднозначно в виде $\operatorname{Arg} A = \arg A + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\arg A$ — одно из значений аргумента числа A.

В частности, уравнение $e^z = 1$ имеет корни $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, а уравнение $e^z = -1$ — корни $z_k = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) *Тригонометрические функции*

Функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ для комплексных z определяются формулами

$$\sin z = \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz}), \tag{5}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz}), \tag{6}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}\,, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}\,. \tag{7}$$

Отметим, что все формулы элементарной тригонометрии, справедливые для действительных значений x, остаются в силе и для всех $z \in \mathbb{C}$.

Это можно доказать, используя формулы (3), (5)–(7) и теорему единственности (§ 14).

Например,

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,$$
$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

Заметим еще, что функции $\sin z$ и $\cos z$ принимают все комплексные значения, а функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ — все значения кроме $\pm i$.

Покажем, что

$$|\sin z| \sim \frac{e^{|y|}}{2}, \quad |\cos z| \sim \frac{e^{|y|}}{2} \quad \text{при} \quad y \to \infty \tag{8}$$

равномерно относительно x.

Действительно, по свойствам модуля комплексного числа,

$$\frac{1}{2}\,|e^y - e^{-y}| \leqslant |\sin z| \leqslant \frac{1}{2}\left(|e^{iz}| + |e^{-iz}|\right) = \frac{1}{2}\,(e^y + e^{-y}),$$

$$\frac{1}{2}\,|e^y - e^{-y}| \leqslant |\cos z| \leqslant \frac{1}{2}\,(e^y + e^{-y}),$$

откуда следуют асимптотические равенства (8).

Пример 6. Найдем корни уравнений $\sin z = 0$, $\cos z = 0$. Уравнение $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$ равносильно уравнению $e^{2iz} = 1$, откуда $2iz = 2k\pi i$, $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, уравнение $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$ равносильно уравнению $e^{2iz} = -1$, откуда $2iz = (\pi + 2k\pi)i$, $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, на множестве $\mathbb{C}$ уравнения $\sin z = 0$ и $\cos z = 0$ имеют те же корни, что и на множестве $\mathbb{R}$.

Функция $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ определена при $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а функция $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ определена при $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 7. Найдем все решения уравнения $\sin z + \cos z = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\,i$.

1) Используя формулы тригонометрии, запишем уравнение в виде

$$\sqrt{2}\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\,i \quad \text{или} \quad \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}\,i,$$

откуда, полагая $e^{i\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} = t$, получаем по формуле (6)

$$t + \frac{1}{t} = \frac{3}{2}\,i \quad \text{или} \quad 2t^2 - 3it + 2 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $t_1 = 2i$, $t_2 = -\dfrac{i}{2}$.

Если $e^{i\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} = 2i$, то по формуле (4) находим

$$i\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad \text{откуда} \quad z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\ln 2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если $e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} = -\dfrac{i}{2}$, то $i\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\ln 2 + i\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, откуда

$$z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi + i\ln 2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\ln 2$, $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi + i\ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 8. Найдем все решения уравнения

$$\operatorname{tg} z = \frac{2}{\sqrt{3}} - i.$$

Используя определение тангенса и формулы (5), (6), получаем

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{2}{\sqrt{3}} - i.$$

Полагая $e^{2iz} = t$, запишем уравнение в виде $\dfrac{t-1}{t+1} = 1 - \dfrac{2}{t+1} = 1 + \dfrac{2i}{\sqrt{3}}$, откуда $t = -1 + i\sqrt{3}$, т. е. $e^{2iz} = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

По формуле (4) получаем

$$2iz = \ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad z = -\frac{i}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{3} + \pi k - \dfrac{i}{2}\ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) *Гиперболические функции*

Функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ определяются формулами

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \tag{9}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{10}$$

Из формул (9)–(10) следует, что

$$\operatorname{sh} z = -i\sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz. \tag{11}$$

$$\operatorname{th} z = -i\operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz. \tag{12}$$

Поэтому функция $\operatorname{th} z$ определена при $z \neq \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$, а функция $\operatorname{cth} z$ при $z \neq \pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Из равенств (11) следует, что уравнение $\operatorname{sh} z = 0$ имеет корни $z_k = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, а уравнение $\operatorname{ch} z = 0$ — корни $z_k = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что все формулы для гиперболических функций, справедливые при действительных z, остаются верными и для $z \in \mathbb{C}$.

З а м е ч а н и е. Приведенные в п. 5 формулы для функции e^z, тригонометрических и гиперболических функций будут доказаны в § 14.

§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного

1. Определение интеграла

Пусть γ — гладкая или кусочно-гладкая кривая, заданная уравнением

$$z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{1}$$

Пусть на отрезке $\Delta = [\alpha, \beta]$ выбраны точки τ_k такие, что

$$\alpha = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = \beta.$$

Эти точки задают *разбиение* T *отрезка* Δ. Число $l(T) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(\tau_k - \tau_{k-1})$ назовем *мелкостью разбиения* T, $\Delta_k = [\tau_{k-1}, \tau_k]$ — *отрезком разбиения* T.

Пусть $t_k \in \Delta_k$, $\zeta_k = \sigma(t_k)$, $k = \overline{1, n}$. Разбиению T отрезка Δ соответствует разбиение кривой γ на дуги γ_k, где γ_k — дуга с начальной точкой $z_{k-1} = \sigma(\tau_{k-1})$ и конечной точкой $z_k = \sigma(\tau_k)$ (см. рис. 25), а точке $t_k \in \Delta_k$ соответствует точка $\zeta_k \in \gamma_k$. Пусть $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$.

Составим интегральную сумму

$$\sum_T(f; \zeta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \tag{2}$$

для функции f, соответствующую разбиению T и выборке ζ.

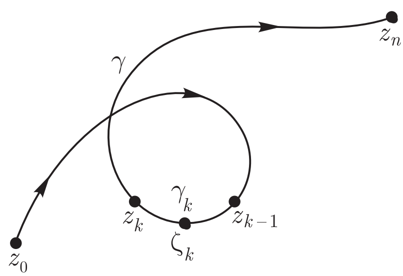

Рис. 25

Если существует конечный предел J суммы (2) при $l(T) \to 0$, не зависящий от разбиения T и выборки ζ, то этот предел (число J)

называется *интегралом* от функции $f(z)$ по кривой γ и обозначается

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Пусть $z = x+iy$, $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$, $z_k = x_k+iy_k$, $\Delta x_k = x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_T(f;\zeta) &= \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(u(M_k) + iv(M_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k), \qquad (3)\end{aligned}$$

где $M_k = (\xi_k, \eta_k) \in \gamma_k$.

Выделяя в правой части равенства (3) действительную и мнимую части, получаем

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_T(f;\zeta) = \\ = \sum_{k=1}^{n}(u(M_k)\Delta x_k - v(M_k)\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(u(M_k)\Delta y_k + v(M_k)\Delta x_k) = \\ = \textstyle\sum_T^{(1)}(\zeta) + i\sum_T^{(2)}(\zeta), \qquad (4)\end{gathered}$$

где $\sum_T^{(1)}(\zeta)$ и $\sum_T^{(2)}(\zeta)$ — интегральные суммы, соответствующие криволинейным интегралам второго рода J_1 и J_2, где

$$J_1 = \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy, \quad J_2 = \int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy.$$

Если $f = u+iv$ — непрерывная на кривой γ функция, то u и v — непрерывные функции. В курсе математического анализа [9] доказывается, что если $l(T) \to 0$, то существуют пределы интегральных сумм $\sum_T^{(1)}(\zeta)$ и $\sum_T^{(2)}(\zeta)$, равные соответственно J_1 и J_2.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если γ — кусочно-гладкая кривая, а функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непрерывна на кривой γ, то существует интеграл от функции $f(z)$ по кривой γ, причем*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\gamma} v\,dx + u\,dy. \qquad (5)$$

Если кривая γ задана уравнением $z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то в формуле (3) $dx = \xi'(t)dt$, $dy = \eta'(t)dt$ и, следовательно,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta (u\xi' - v\eta')dt + i\int_\alpha^\beta (v\xi' + u\eta')dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta (u+iv)(\xi' + i\eta')dt = \int_\alpha^\beta f(\sigma(t))\sigma'(t)dt. \tag{6}$$

Пример 1. Пусть $f(z) \equiv 1$, a и b — соответственно начало и конец кривой γ. Тогда интегральная сумма (1) равна

$$\sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 = b - a,$$

откуда $\int\limits_\gamma dz = b - a$. Таким образом, $\int\limits_\gamma dz$ зависит только от начальной и конечной точек кривой γ и *не зависит от пути интегрирования*. В этом случае вместо $\int\limits_\gamma dz$ можно писать $\int\limits_a^b dz$. В частности, если $a = b$, то $\int\limits_\gamma dz = 0$, т. е. интеграл $\int\limits_\gamma dz$ по любой замкнутой кривой равен нулю.

Пример 2. Вычислим интеграл $I_n = \int\limits_{C_\rho} (z - z_0)^n dz$, где n — целое число, C_ρ — окружность $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$, ориентированная против часовой стрелки.

Уравнение окружности C_ρ запишем в виде $z = z_0 + \rho e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда $dz = i\rho e^{it}dt$ и по формуле (6) находим

$$I_n = i\rho^{n+1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt,$$

откуда при $n = -1$ получаем $I_{-1} = 2\pi i$, а при $n \neq -1$ по формуле Ньютона–Лейбница находим

$$I_n = \frac{\rho^{n+1}}{n+1}\, e^{it(n+1)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n = 0,\, 1,\, \pm 2,\, \pm 3,\, \ldots\,, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

2. Свойства интегралов

Из формулы (5) и свойств криволинейных интегралов следует, что интегралы от функций комплексного переменного обладают следующими свойствами:

1) $\int\limits_{\gamma}[af(z)+bg(z)]dz = a\int\limits_{\gamma} f(z)dz + b\int\limits_{\gamma} g(z)dz,$

где a и b — любые комплексные числа (линейность интеграла);

2) $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma^{-1}} f(z)dz,$

т. е. при изменении ориентации кривой интеграл меняет знак;

3) $\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$

Имеет место также следующее свойство:

если ряд $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из непрерывных на кривой γ функций $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходится равномерно на γ, то его можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma} f_n(z)dz.$$

3. Оценки интегралов

Лемма 1. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна на кривой γ. Тогда имеет место оценка*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f(z)||dz|, \tag{7}$$

где $|dz| = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = ds$ — элемент длины кривой γ.

○ Имеем
$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||z_k - z_{k-1}|,$$

откуда, переходя к пределу, получаем оценку (7). ●

Следствие. *Из неравенства (7) получается оценка*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leqslant M\cdot l(\gamma),$$

где $M = \max\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$, $l(\gamma)$ — длина кривой γ.

Лемма 2. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D и кривая γ лежит в D. Тогда интеграл от $f(z)$ по γ можно с любой точностью приблизить интегралом от $f(z)$ по ломаной, лежащей в области D, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует ломаная C (близкая к кривой γ), лежащая в области D, такая, что*

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{C} f(z)dz \right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Покажем, как можно доказать лемму 2.

○ Если функция $f(z)$ непрерывна в области D, то при непрерывной деформации кривой интеграл от функции $f(z)$ изменяется непрерывно. Это означает следующее: пусть непрерывная деформация кривой γ_0 в области D осуществляется кривыми $\gamma_s : z = \sigma(t, s)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $s \geqslant 0$ (см. п. 4, § 3). Тогда интеграл

$$\int_{\gamma_s} f(z)dz = \int_0^1 f(\sigma(t, s))\sigma_t'(t, s)dt$$

является непрерывной функцией параметра s.

Если параметр s мало отличается от нуля, то кривую γ_s естественно назвать «близкой» к кривой γ_0. В частности, можно выбрать ломаную γ_s, близкую к кривой γ_0, откуда и получается оценка (8). ●

Лемма 3. *Пусть D — ограниченная односвязная область, Γ — ее граница. Если функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до границы, то интеграл от $f(z)$ по Γ можно с любой точностью приблизить интегралом от $f(z)$ по замкнутой ломаной, лежащей в области D.*

Доказательство леммы 3 выходит за рамки нашего курса.

Рассмотрим неодносвязную область. Пусть граница Γ ограниченной области D состоит из кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$. Если функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до границы, то интеграл от $f(z)$ по Γ определяется формулой

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)dz.$$

Из леммы 3 получается

Следствие. *Если функция $f(z)$ непрерывна в области D вплоть до границы, то интеграл от $f(z)$ по границе области D можно с любой точностью приблизить суммой интегралов от $f(z)$ по замкнутым ломаным, лежащим в области D.*

§ 6. Функция $\mathrm{Arg}\, z$

Функция $\mathrm{Ln}\, z$ была определена в § 4 формулой

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i \mathrm{Arg}\, z,$$

где $z \neq 0$, $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\arg z$ — одно из значений аргумента числа z.

В гл. 3 будет показано, что все элементарные многозначные функции выражаются через логарифмическую функцию, которая является многозначной (ее мнимая часть $\mathrm{Arg}\, z$ является многозначной функцией).

Поэтому необходимо исследовать функцию $\mathrm{Arg}\, z$.

1. Полярные координаты

Декартовы и полярные координаты точки $z = x + iy \in \mathbb{C}$ связаны формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

Если по заданным полярным координатам (r, φ) декартовы координаты (x, y) определяются однозначно формулами (1), то φ (аргумент числа z) из системы уравнений

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2}$$

определяется неоднозначно с точностью до $2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Это обстоятельство является существенным при исследовании многозначных функций (например, функций $\mathrm{Ln}\, z$, $\sqrt[n]{z}$).

Пусть D_0 — плоскость с разрезом l по полуоси $(-\infty, 0]$ (см. рис. 26). Если считать, что точки положительной полуоси Ox $(0; \infty)$ имеют аргумент, равный нулю, то аргумент точки $z_0 \in D_0$ равен углу, образованному лучом $z = te^{i\varphi_0}$ $(0 \leqslant t < +\infty)$, проходящим через точку z_0 из точки $z = 0$, с полуосью $(0; +\infty)$.

Точки верхнего берега l^+ разреза l имеют аргумент π, а точки нижнего берега l^- разреза l имеют аргумент $-\pi$. В этом случае аргумент каждой внутренней и граничной точки области D_0 однозначно определяется значением аргумента в одной точке (например, в точке x, где $0 < x < +\infty$). Функция $\varphi(z) = \arg z$ непрерывна в области D_0, ее называют однозначной непрерывной ветвью функции $\mathrm{Arg}\, z$.

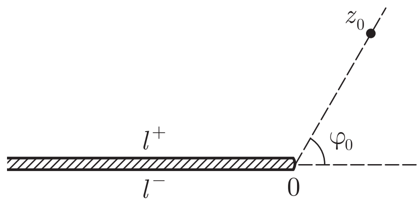

Рис. 26

В области D_0 существует бесконечно много однозначных непрерывных ветвей $\varphi_k(z)$ функции $\operatorname{Arg} z$. Они описываются формулами

$$\varphi_k(z) = \varphi(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\varphi(z)$ — указанная выше ветвь функции $\operatorname{Arg} z$ такая, что

$$-\pi < \varphi(z) < \pi.$$

Функцию $\varphi(x) = \arg z$ можно выразить через обратные тригонометрические функции. Например, $\arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ при $x > 0$, $\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ при $x < 0$, $y > 0$. Однако в случае произвольной области нельзя получить простую формулу для представления непрерывной ветви $\arg z$ функции $\operatorname{Arg} z$ через обратные тригонометрические функции, так как эти функции меняются в пределах от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$, а аргумент может меняться в любых пределах.

Более удобным является интегральное представление функции $\arg z$.

2. Приращение аргумента вдоль кривой

Пусть кривая γ не проходит через точку $z = 0$. Угол поворота вектора z при движении точки z вдоль кривой γ от начальной до конечной точки этой кривой назовем *приращением аргумента z вдоль кривой γ* и обозначим его $\Delta_\gamma \arg z$ (см. рис. 27).

Пример 1. а) Если γ — отрезок прямой с началом в точке $1-i$ и концом в точке $1+i$, то $\Delta_\gamma \arg z = \dfrac{\pi}{2}$;

б) если γ_+ — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, ориентированная против часовой стрелки, то $\Delta_{\gamma_+} \arg z = \pi$ (см. рис. 28).

в) если γ_- — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, ориентированная по часовой стрелке, то $\Delta_{\gamma_-} \arg z = -\pi$ (см. рис. 28).

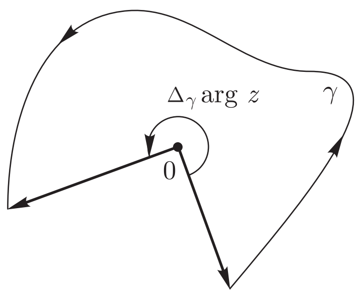

Рис. 27

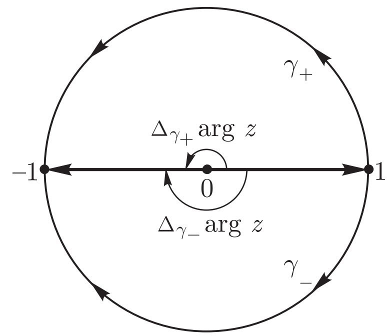

Рис. 28

Выведем формулу для $\Delta_\gamma \arg z$. Из формул (1) имеем

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi, \tag{3}$$

откуда $r\,d\varphi = -\sin\varphi dx + \cos\varphi\, dy$. Следовательно,

$$d\varphi = d\arg z = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}\,. \tag{4}$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_\gamma d\arg z$. Этот интеграл равен разности значений аргумента z в конечной и начальной точках кривой γ, т. е. равен приращению аргумента вдоль кривой: $\Delta_\gamma \arg z$. Следовательно,

$$\Delta_\gamma \arg z = \int\limits_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}\,. \tag{5}$$

Формулу (5) можно записать в виде

$$\Delta_\gamma \arg z = \operatorname{Im}\int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}\,, \tag{6}$$

так как $\operatorname{Im}\dfrac{dz}{z} = \operatorname{Im}\dfrac{dx + i\,dy}{x+iy} = \operatorname{Im}\dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, а переменную интегрирования в (6) можно обозначить любой буквой.

Если кривая γ задана уравнением

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

или уравнением

$$z = r(t)e^{i\varphi(t)}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

то

$$\Delta_\gamma \arg z = \int\limits_\gamma d\varphi = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \operatorname{Im}\int\limits_\alpha^\beta \frac{z'(t)}{z(t)}\,dt.$$

Рассмотрим свойства приращения аргумента.

1. Пусть кривую γ можно непрерывно деформировать в кривую γ_1, не проходя через точку $z = 0$ (т.е. кривые γ и γ_1 гомотопны в области $0 < |z| < \infty$) (см. рис. 29). Тогда имеет место равенство

$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z. \tag{7}$$

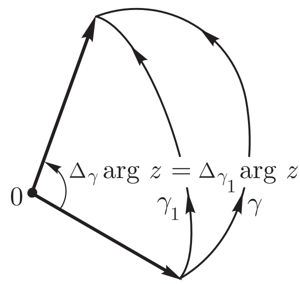

Рис. 29

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy, \tag{8}$$

где функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области D, и кривая γ лежит в области D. В курсе математического анализа [5] доказана

Теорема. *Если область D односвязна, то для того, чтобы интеграл (8) по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы во всей области D выполнялось равенство*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{9}$$

Следствие. *Если в области D (может быть, не односвязной) выполняется равенство (9) и кривую γ можно непрерывно деформировать в кривую γ_1, оставаясь в области D (т. е. кривые γ и γ_1 гомотопны в области D), то имеет место равенство*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy. \tag{10}$$

Положим в (10)

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти функции удовлетворяют условию (9) в области $0 < |z| < \infty$. Таким образом, из (5) и (10) получаем равенство (7). ●

Формула (7) следует также из геометрического смысла приращения аргумента вдоль кривой (см. рис. 29).

Из свойства 1 вытекает, в частности, свойство

2. Если замкнутая кривая γ не проходит через точку $z = 0$ и эту кривую можно непрерывно деформировать в точку, не проходя через точку $z = 0$ (т. е. кривая γ гомотопна нулю в области $0 < |z| < \infty$), то имеет место равенство

$$\Delta_\gamma \arg z = 0. \tag{11}$$

Заметим, что равенство (7) выполняется не для любых кривых γ и γ_1 с общим началом и общим концом (ср. пример 1, б и в). Также и равенство (11) справедливо не для любой замкнутой кривой γ.

Пример 2. Если γ — окружность $|z| = 1$, ориентированная против часовой стрелки и проходимая один раз, то $\Delta_\gamma \arg z = 2\pi$.

Отметим еще два свойства приращения аргумента:

3. Если кривая γ не проходит через точку $z = 0$, то

$$\Delta_\gamma \arg z = -\Delta_{\gamma^{-1}} \arg z. \tag{12}$$

4. Если кривая $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ не проходит через точку $z = 0$, то

$$\Delta_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \arg z = \Delta_{\gamma_1} \arg z + \Delta_{\gamma_2} \arg z. \tag{13}$$

Эти свойства вытекают из формулы (6) и свойств интегралов (§ 5).

3. Непрерывные ветви функции $\mathrm{Arg}\, z$

Пусть D — односвязная область, не содержащая точек $z = 0$ и $z = \infty$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ и выберем $\arg z_0$ — одно из значений аргумента z_0. Положим

$$\arg z = \arg z_0 + \Delta_\gamma \arg z, \tag{14}$$

где кривая γ с началом в точке z_0 и концом в точке z лежит в области D.

По свойству 1 п. 2 приращение аргумента $\Delta_\gamma \arg z$ не зависит от кривой γ, так как в односвязной области любые кривые с общим началом и общим концом можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области D (п.4, § 3). Следовательно, функция (14) *однозначна* в области D. Эта функция непрерывна в области D, так как ее можно написать в виде

$$\arg z = \arg z_0 + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\,. \tag{15}$$

Таким образом, функция (14) является *однозначной непрерывной ветвью многозначной функции* Arg z *в области* D.

Очевидно, таких ветвей бесконечно много:

$$(\arg z)_k = \arg z_0 + \Delta_\gamma \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

т. е. многозначная функция $\operatorname{Arg} z$ в области D распадается на однозначные непрерывные ветви (16). Отсюда следует, что непрерывная ветвь функции $\operatorname{Arg} z$ в области D полностью определяется своим значением в одной точке $z_0 \in D$.

Пример 3. Пусть D_0 — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0)$. Положим $z_0 = 1$, $\arg 1 = 0$. Тогда

$$\arg z = \Delta_\gamma \arg z, \tag{17}$$

где кривая γ с началом в точке $z_0 = 1$ и концом в точке z лежит в области D_0 (см. рис. 30). Очевидно, функция (17) совпадает с функцией $\varphi(z)$, рассмотренной в п. 1. В частности, имеем:

$$\begin{aligned} &\arg x = 0, && \text{если} \quad x > 0, \\ &\arg(iy) = \frac{\pi}{2}\,, && \text{если} \quad y > 0, \\ &\arg(iy) = -\,\frac{\pi}{2}\,, && \text{если} \quad y < 0 \ \text{и т. д.} \end{aligned}$$

В формуле (14) точка z_0 может быть граничной точкой области D.

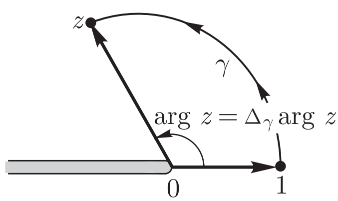

Рис. 30

Пример 4. Пусть D_1 — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$. Пусть $z_0 = 1$ — точка верхнего берега разреза,

$\arg z_0 = \arg 1 = 0$. Тогда

$$\arg z = \Delta_\gamma \arg z, \tag{18}$$

где кривая γ с началом в точке $z_0 = 1$ и концом в точке z лежит в области D_1 (см. рис. 31). В частности, имеем:

$$\begin{aligned} &\arg(iy) = \frac{\pi}{2}, && \text{если} \quad y > 0, \\ &\arg x = \pi, && \text{если} \quad x < 0, \\ &\arg(iy) = \frac{3\pi}{2}, && \text{если} \quad y < 0 \end{aligned}$$

и т. д. (ср. пример 3).

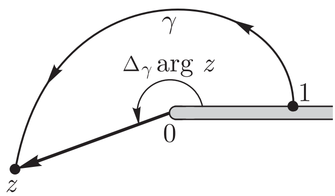

Рис. 31

Найдем значения функции (18) на верхнем и нижнем берегах разреза. При $x > 0$ имеем $\arg(x+i0) = \lim\limits_{y\to+0} \arg(x+iy) = 0$, аналогично $\arg(x - i0) = 2\pi$. Следовательно, функцию (18) нельзя «склеить» вдоль луча $(0, +\infty)$ так, чтобы эта функция осталась непрерывной. (Функцию (17) также нельзя склеить непрерывно вдоль луча $(-\infty, 0)$.) Отсюда, в частности, следует, что в области $0 < |z| < \infty$ нельзя выделить непрерывную ветвь функции $\operatorname{Arg} z$.

Из формулы (14) видно, что для того, чтобы функция (14) была однозначна в области D, необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента $\Delta_\gamma \arg z$ не зависело от кривой γ, т. е. чтобы для любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, имело место равенство $\Delta_\gamma \arg z = 0$. Другими словами, в области D не должно быть простых замкнутых кривых, содержащих внутри себя точку $z = 0$, т. е. нужно, чтобы в области D нельзя было обойти вокруг точки $z = 0$ (одновременно вокруг точки $z = \infty$). Такой областью является, например, вся комплексная плоскость с разрезом по неограниченной кривой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = \infty$. В такой области и в любой ее подобласти многозначная функция $\operatorname{Arg} z$ допускает выделение однозначных непрерывных ветвей.

Заметим, что значения функции (17) изменяются в пределах от $-\pi$ до π: $-\pi < \arg z < \pi$, $z \in D_0$, а значения функции (18) — от 0 до

2π: $0 < \arg z < 2\pi$, $z \in D_1$. Но в случае произвольной области непрерывная ветвь функции $\operatorname{Arg} z$ может меняться в любых пределах.

Пример 5. Пусть D_2 — вся комплексная плоскость с разрезом по кривой $z = \dfrac{t}{\pi}\,e^{it}$, $0 \leqslant t < \infty$. Положим $\arg 5 = 2\pi$. Тогда

$$\arg z = 2\pi + \Delta_\gamma \arg z,$$

где кривая γ с началом в точке $z_0 = 5$ и концом в точке z лежит в области D_2 (см. рис. 32). В частности, вычисляя значения приращения аргумента, находим: $\arg(-6) = 3\pi$, $\arg 7 = 4\pi$, $\arg(-4) = \pi$, $\arg 3 = 0$, $\arg(-2) = -\pi$, $\arg 1 = -2\pi$ и т. д.

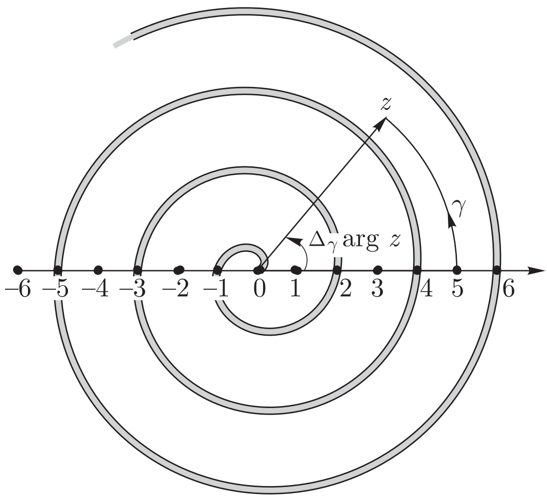

Рис. 32

Глава 2

РЕГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 7. Дифференцируемые функции. Условия Коши–Римана

1. Производная

Определение 1. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки z_0 (в круге $|z - z_0| < \rho$) и пусть существует конечный предел отношения $\dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$. Тогда этот предел называется производной функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.*

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых Δz, удовлетворяющих условию $0 < |\Delta z| < \delta$, справедливо неравенство $\left|\dfrac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$, откуда следует, что

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z), \tag{1}$$

$$\text{где} \quad \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta z \to 0. \tag{2}$$

Утверждение (2) записывают так

$$\alpha(\Delta z) = o(\Delta z). \tag{3}$$

Равенство (3) эквивалентно условию $\dfrac{\alpha(\Delta z)}{|\Delta z|} \to 0$ при $\Delta z \to 0$, а функцию $\alpha(\Delta z)$ в записях (2) и (3) называют о-малой функцией.

Пример 1. Докажем, что функции $f(z) = C = \mathrm{const}$ и $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеют производные в каждой точке z, и найдем их производные.

1) Если $f(z) = C$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{C - C}{\Delta z} \to 0$ при $\Delta z \to 0$, т. е. $C' = 0$.

2) Если $f(z) = z^n$, то $\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \dfrac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} =$ $= \dfrac{nz^{n-1}\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} \to nz^{n-1}$ при $\Delta z \to 0$, т. е.

$$(z^n)' = nz^{n-1}. \tag{4}$$

Определение 2. *Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z, если она определена в некоторой окрестности точки и в этой окрестности справедливо равенство*

$$f(z+\Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(\Delta z), \tag{5}$$

и $A = A(z)$ не зависит от Δz.

Из равенства (5) следует, что функция $f(z)$, дифференцируемая в точке z, имеет производную в точке z и $f'(z) = A$. Обратно, если функция $f(z)$ имеет производную в точке z, то из равенства (1) следует, что она дифференцируема в точке z. Поэтому функцию, имеющую производную в точке, называют дифференцируемой в этой точке.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в области*, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Операцию нахождения производной функции называют *дифференцированием* этой функции.

Из определения производной и свойств предела функции следует, что правила дифференцирования функций комплексного переменного формально такие же, как и для функций действительного переменного.

1. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в точке z, то их сумма, произведение и частное (если $g(z) \neq 0$) также дифференцируемы в точке z и справедливы формулы

$$(Af + Bg)' = Af' + Bg'; \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'. \tag{6}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \tag{7}$$

где A и B — комплексные числа.

2. Суперпозиция дифференцируемых функций также является дифференцируемой функцией: если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, а функция $F(\zeta)$ дифференцируема в точке $\zeta = f(z)$, то функция $\widehat{F}(z) = F(f(z))$ также дифференцируема в точке z и

$$\widehat{F}'(z) = F'(\zeta)|_{\zeta=f(z)} \cdot f'(z). \tag{8}$$

Пример 2. Из формул (4), (6) и (7) следует, что многочлен

$$\mathcal{P}(x) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

является дифференцируемой функцией во всей комплексной плоскости, а рациональная функция $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены, дифференцируема в точках z, в которых $Q(z) \neq 0$, причем формулы дифференцирования формально такие же, как если бы эти функции были действительными, например: $(3z^4 - 2iz^2 + 4i)' = 12z^3 - 4iz$,

$$\left(\frac{z^2+2i}{z^2-3i}\right)' = \frac{(z^2+2i)'(z^2-3i) - (z^2+2i)(z^2-3i)'}{(z^2-3i)^2} = = \frac{-10iz}{(z^2-3i)^2}\,.$$

Замечание. Напомним, что непрерывность функции $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ в точке $z = x+iy$ эквивалентна непрерывности функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x,y). Но из дифференцируемости функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ в точке (x,y) еще не следует, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке z. Это связано с тем, что в определении производной содержится требование, чтобы предел (1) не зависел от способа стремления Δz к нулю.

Пример 3. Покажем, что функция $f(z) = \overline{z}$ не является дифференцируемой ни в одной точке.

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\overline{(z+\Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\,.$$

Если $\Delta y = 0$, т. е. $\Delta z = \Delta x$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

а если $\Delta x = 0$, т. е. $\Delta z = i\Delta y$, то

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ не существует, т. е. функция $f(z) = \overline{z}$ не дифференцируема в точке z.

2. Условия Коши–Римана

Пусть $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, тогда

$$\{\Delta z \to 0\} \iff \{|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho \to 0\} \iff$$
$$\iff \{\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0\}.$$

Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$, $\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$, то $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) (как функции действительных переменных x и y);

2) в точке (x_0, y_0) выполнялись условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{9}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{10}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0. Тогда справедливы равенства (1) и (2).

Если $\alpha(\Delta z) = \alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$, $f'(z_0) = A + iB$, то равенство (1) примет вид

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1 + i\alpha_2, \tag{11}$$

$$\text{где} \quad \frac{\alpha_1(\Delta x, \Delta y)}{\rho} \to 0, \quad \frac{\alpha_2(\Delta x, \Delta y)}{\rho} \to 0 \tag{12}$$

$$\text{при } \rho \to 0 \ (\Delta z \to 0).$$

Приравнивая в (11) действительные и мнимые части, получаем

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1, \tag{13}$$

$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2, \tag{14}$$

$$\text{где} \quad \alpha_1 = o(\rho), \quad \alpha_2 = o(\rho) \quad \text{при} \quad \rho \to 0. \tag{15}$$

Равенство (13) и условие $\alpha_1 = o(\rho)$ означают, что функция $u(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), причем

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \quad -B = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{16}$$

Аналогично из (14) и (15) следует, что функция $v(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), причем

$$B = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \quad A = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{17}$$

Из равенств (16) и (17) заключаем, что для функций u и v выполняются условия (9) и справедливы равенства (10).

Достаточность. Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполняются условия (9). Тогда умножая равенство (14) на i и складывая с равенством (13), получаем

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = A\Delta x - B\Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y) + \alpha_1 + i\alpha_2,$$

где $\alpha_1 + i\alpha_2 = \alpha(\Delta z) = o(\Delta z)$, или

$$\Delta f = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_1 + i\alpha_2 = (A + iB)\Delta z + \alpha(\Delta z),$$

где $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z)$ при $\Delta z \to 0$.

Таким образом, функция $f(z)$ удовлетворяет в точке z_0 условию (5). Это означает, что она дифференцируема в точке z_0, а ее производная $f'(z_0)$ выражается формулами (10). ●

Пример 4. Выясним, в каких точках дифференцируема функция $f(z) = \overline{z}^2$, и найдем ее производную в этих точках.

Так как $f(z) = \overline{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$, то $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = -2xy$. Функции $x^2 - y^2$ и $-2xy$ дифференцируемы во всей плоскости. Поэтому осталось выяснить, в каких точках выполняются условия Коши–Римана (9). Получаем: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -2x$, т. е. первое равенство (9) выполняется при $x = 0$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $-\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y$, т. е. второе равенство (9) выполняется при $y = 0$. Оба равенства (9) выполняются при $x = 0$ и $y = 0$, т. е. функция $\overline{z}^2$ дифференцируема только в точке $z = 0$. По формуле (10) находим $f'(0) = 0$.

Пример 5. Выясним, в каких точках дифференцируемы функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, и найдем их производные.

1) Если

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

то функции $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ дифференцируемы во всей комплексной плоскости и $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Следовательно, функция e^z дифференцируема во всей плоскости. По формуле (10) находим

$$(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z,$$

$$\text{т. е.} \quad (e^z)' = e^z. \tag{18}$$

2) Из определения тригонометрических, гиперболических функций (см. § 4) и правил дифференцирования следует, что функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ дифференцируемы во всей комплексной плоскости и

$$\begin{gathered} (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \\ (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z. \end{gathered} \tag{19}$$

Отметим, что формулы (18), (19) формально такие же, как и для действительных значений $z = x$, поэтому они легко запоминаются. Однако нужно иметь в виду, что для комплексных значений z эти формулы имеют более глубокий смысл, так как на дифференцируемую функцию комплексного переменного накладываются дополнительные условия, содержащиеся в доказанной теореме.

Тем не менее и для других тригонометрических и гиперболических функций формулы для производных такие же, как и для действительных значений аргумента. Например:

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}\,, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \qquad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}\,, \quad z \neq \pi k,$$

где $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

З а м е ч а н и е. Если $z = re^{i\varphi}$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то из формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ следует, что условия Коши–Римана (9) можно записать в полярных координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,, \tag{20}$$

и производную $f'(z)$ можно находить по формулам

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \tag{21}$$

Пример 6. Пусть D — плоскость z с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ $f(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$, $g(z) = \ln r + i\varphi$, где $0 < \varphi < 2\pi$.

Из формул (20) следует, что функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в области D, а по формуле (21) находим

$$f'(z) = \frac{1}{2z}\,f(z), \quad g'(z) = \frac{1}{z}\,.$$

§ 8. Интегральная теорема Коши

1. Теорема Коши

Теорема 1 (*интегральная теорема Коши*). *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной области D. Тогда интеграл от функции $f(z)$ по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равен нулю:*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

○ Докажем теорему 1 в предположении, что производная функции $f(z)$ непрерывна в области D. Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$\int_\gamma f(z)dz = J_1 + iJ_2,$$

где

$$J_1 = \int_\gamma u\,dx - v\,dy, \quad J_2 = \int_\gamma v\,dx + u\,dy.$$

Воспользуемся теоремой из курса математического анализа: если функции P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области D и $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \in D$, то интеграл

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$$

по любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равен нулю. Из этой теоремы и условий Коши–Римана следует, что

$$\int_\gamma f(z)dz = J_1 + iJ_2 = 0. \qquad \bullet$$

Доказательство теоремы 1 в общем случае (без предположения о непрерывности производной) см. в [8].

2. Следствия и дополнения к интегральной теореме Коши

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, т. е.*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz,$$

где γ и γ_1 — кривые, лежащие в области D, с общим началом в точке a и общим концом в точке b. В этом случае пишут $\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_a^b f(z)dz$.

○ Кривая $\gamma\gamma_1^{-1}$ является замкнутой. Поэтому по теореме 1 и свойствам интегралов

$$\int\limits_{\gamma\gamma_1^{-1}} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz - \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = 0. \qquad \bullet$$

З а м е ч а н и е 1. Напомним, что в односвязной области D любые две кривые с общим началом и общим концом можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области D. Следовательно, при непрерывной деформации кривой (с сохранением начала и конца) значение интеграла от дифференцируемой в односвязной области функции не меняется.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в ограниченной односвязной области D и непрерывна вплоть до ее границы Γ. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0. \tag{1}$$

○ Так как $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ можно с любой точностью приблизить интегралом по замкнутой ломаной C, лежащей в области D (близкой к кривой Γ), а по теореме 1 $\int\limits_{C} f(z)dz = 0$, то справедливо равенство (1). ●

Следствие 2. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в ограниченной области D (не обязательно односвязной) и непрерывна вплоть до ее границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n$. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0. \tag{2}$$

○ Пусть Γ_1 — внешняя кривая, т. е. кривые $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_n$ лежат во внутренности кривой Γ_1 (рис. 33). Соединим кривую Γ_1 с кривыми $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_n$ разрезами по кривым $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ так, чтобы получилась односвязная область $\widetilde{D}$ (рис. 33). Граничная кривая $\tilde{\Gamma}$ области $\tilde{D}$ состоит из кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ и $\gamma_2, \gamma_2^{-1}, \ldots, \gamma_n, \gamma_n^{-1}$. По теореме 2

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} f(z)dz = 0. \tag{3}$$

Так как $\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_k^{-1}} f(z)dz = 0$, $k = 2, 3, \ldots, n$, то из равенства (3) следует равенство (2). ●

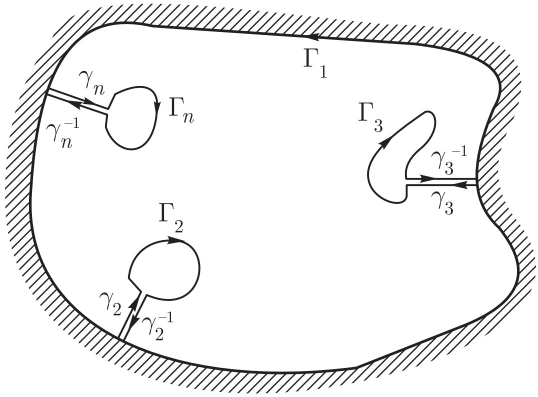

Рис. 33

З а м е ч а н и е 2. В неодносвязной области теорема 1 может быть неверна. Например, удалим из односвязной области D одну точку $z_0 \in D$. Получится неодносвязная область D_1. В области D_1 функция $\dfrac{1}{z-z_0}$ дифференцируема. Однако интеграл $J_\rho = \int\limits_{C_\rho} \dfrac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ (§ 5, пример 2), где C_ρ — окружность $|z-z_0| = \rho$, принадлежащая области D_1, ориентированная против часовой стрелки (рис. 34). Отметим, что интеграл J_ρ не зависит от ρ. Более того: если замкнутая кривая γ получена из окружности C_ρ непрерывной деформацией, оставаясь в области D_1, то также $J_\gamma = \int\limits_\gamma \dfrac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$.

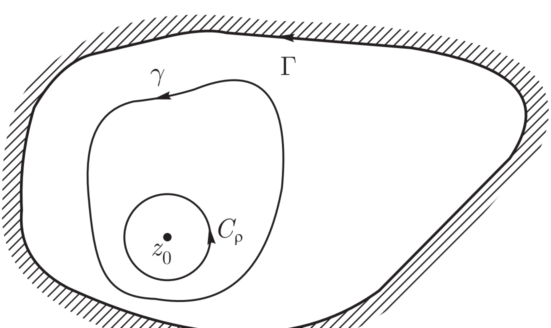

Рис. 34

○ Докажем это утверждение в случае, когда γ — простая замкнутая кривая, принадлежащая области D_1, является границей своей внутренности (ориентирована так, что при движении точки по кривой γ в направлении этой ориентации внутренность кривой γ остается слева) и окружность C_ρ принадлежит внутренности γ (рис. 34). Тогда граница области, заключенной между γ и C_ρ, состоит из кривых γ и C_ρ^{-1}. По следствию 2

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} + \int\limits_{C_\rho^{-1}} \frac{dz}{z-z_0} = 0,$$

откуда

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i. \qquad \bullet$$

Можно доказать

Следствие 3. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D (не обязательно односвязной) и замкнутые кривые γ_1, γ_2, лежащие в области D, можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области D. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Замечание 1 и следствие 3 можно кратко сформулировать так: при непрерывной деформации кривой значение интеграла от дифференцируемой функции не меняется.

3. Первообразная

Определение. *Функция $F(z)$ называется первообразной функции $f(z)$, определенной в области D, если функция $F(z)$ определена в области D, дифференцируема в этой области и*

$$F'(z) = f(z), \qquad z \in D.$$

В курсе математического анализа доказывается, что если действительная функция $f(z)$ непрерывна на интервале, то она имеет первообразную на этом интервале. Аналогичное утверждение справедливо и для комплекснозначной функции $f(z)$, непрерывной в области при дополнительном условии, что интеграл от нее не зависит от пути интегрирования.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D и интеграл от нее не зависит от пути интегрирования. Тогда эта функция имеет первообразную в области D.*

○ Рассмотрим функцию
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \tag{4}$$
где $\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int\limits_{\gamma} f(\zeta)d\zeta$, кривая γ с началом в точке z_0 и концом в точке z принадлежит области D. Так как интеграл от $f(z)$ не зависит от пути интегрирования, то функция (4) однозначна в области D. Покажем, что функция (4) дифференцируема в области D и $F'(z) = f(z)$.

Рассмотрим отношение
$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right),$$
где второй интеграл — это интеграл по некоторой кривой γ, а первый — это интеграл по той же кривой γ от z_0 до z и далее по отрезку $[z, z+\Delta z]$. Тогда по свойствам интегралов получаем
$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta,$$
откуда
$$\begin{gathered}\frac{\Delta F}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z) + f(z)]d\zeta = \\ = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta + f(z)\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = \\ = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta + f(z),\end{gathered} \tag{5}$$
так как $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = (z+\Delta z) - z = \Delta z$.

Осталось показать, что первое слагаемое в правой части формулы (5) стремится к нулю при $\Delta z \to 0$. По свойствам интегралов (§ 5 п. 2) получаем
$$\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta z|}\max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)||\Delta z| = \\ = \max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta z \to 0,$$
так как функция $f(z)$ непрерывна. ●

Из теоремы 3 и следствия 1 получается

Следствие 4. *Если функция дифференцируема в односвязной области, то она имеет первообразную в этой области.*

Замечание 3. В теореме 3 доказано, что при выполнении условий этой теоремы (или следствия 4) справедлива формула дифференцирования интеграла по верхнему переменному пределу:

$$\left(\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right)' = f(z).$$

Из определения первообразной следует, что если $F(z)$ — первообразная функции $f(z)$ в области D, то функция $F(z) + C$, где C — комплексное число, также является первообразной функции $f(z)$ в области D.

Докажем обратное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — две первообразные одной и той же функции $f(z)$ в области D. Тогда $F_1(z) - F_2(z) = C$, $z \in D$, где C — некоторое комплексное число.*

○ Пусть $w(z) = F_1(z) - F_2(z)$. По условиям леммы функция $w(z)$ дифференцируема в области D и $w'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0$, $z \in D$.

Если $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то по формулам для производной получаем, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$ в области D, откуда по теореме из курса математического анализа следует, что функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и $w(z)$ — постоянные в области D. ●

Таким образом, если $F(z)$ — первообразная функции $f(z)$ в области D, то все первообразные функции $f(z)$ находятся по формуле $F(z) + C$, где C — произвольная комплексная постоянная.

Следствие 5. *При выполнении условий теоремы 3 (или следствия 4) справедлива формула Ньютона–Лейбница*

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a), \tag{6}$$

где $F(z)$ — какая-нибудь первообразная функция функции $f(z)$ в области D.

○ Так как $\int\limits_a^z f(\zeta)d\zeta$ — первообразная функции $f(z)$, то

$$\int\limits_a^z f(\zeta)d\zeta = F(z) + C. \tag{7}$$

Из этой формулы при $z = a$ получаем

$$F(a) + C = 0, \quad \text{т. е.} \quad C = -F(a).$$

Из формулы (7) при $z = b$ и обозначении переменной интегрирования $\zeta = z$ получаем формулу (6). ●

По формуле (6) (формально так же, как и для действительных функций) можно вычислять значения интегралов, например, от дифференцируемых в односвязной области функций.

Пример. Вычислим интегралы $\int\limits_a^b e^z dz$, $\int\limits_a^b z^n dz$, где n — целое число, $n \geqslant 0$.

Функции e^z и z^n, $n \in \mathbb{N}$, дифференцируемы во всей комплексной плоскости (это односвязная область). По формуле (6) находим

$$\int\limits_a^b e^z dz = e^z\Big|_a^b = e^b - e^a,$$

$$\int\limits_a^b z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

§ 9. Регулярные функции. Степенные ряды

Определение. *Функция $f(z)$ называется регулярной в точке z_0, если она определена в окрестности точки z_0 и в некоторой окрестности этой точки*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

и степенной ряд (1) с комплексными коэффициентами c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходится к функции $f(z)$ в некотором круге $|z - z_0| < \delta$, $\delta > 0$.

Функция $f(z)$ называется регулярной в области, если она регулярна в каждой точке этой области.

Регулярные функции являются основой всей теории функций комплексного переменного. Поэтому сначала рассмотрим свойства функциональных и, в особенности, степенных рядов.

Лемма. *Пусть ряд*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \tag{2}$$

где функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны в области D, сходится в области D к функции $f(z)$ и сходится равномерно в каждой области D_1 такой, что $\overline{D}_1 \subset D$. Тогда функция $f(z)$ непрерывна в области D и ряд (2) можно интегрировать почленно по любой кривой γ, лежащей в области D.

○ Утверждения этой леммы доказаны в курсе математического анализа, так как если $f_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y)$, то сходимость ряда (2) означает, что сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x, y)$. ●

Замечание. Из леммы следует, что если интеграл от каждой функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, не зависит от пути интегрирования, то и интеграл от функции $f(z)$ также не зависит от пути интегрирования.

Напомним некоторые сведения о степенных рядах $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, известные из курса математического анализа, а также рассмотрим важный вопрос об интегрируемости и дифференцируемости степенного ряда. Для краткости записи (не теряя общности) будем считать, что $z_0 = 0$, т. е. рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{3}$$

Известно, что могут быть следующие три случая:

1. Ряд (3) сходится только при $z = 0$. В этом случае говорят, что радиус сходимости ряда (3) равен нулю.
2. Ряд (3) сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$, где $0 < R < \infty$. Тогда круг $|z| < R$ называют *кругом сходимости ряда* (3), а его радиус R — *радиусом сходимости ряда* (3).
3. Ряд (3) сходится при всех z. Тогда всю комплексную плоскость называют *кругом сходимости ряда* (3), а число $R = \infty$ — *радиусом сходимости.*

Из определения регулярной функции следует, что свойства регулярных функций тесно связаны со свойствами степенных рядов. Сформулируем главные из них.

Теорема. *Если* R — *радиус сходимости степенного ряда* (3), $0 < R < \infty$, *то в круге сходимости* $K : |z| < R$ *ряд* (3) *можно интегрировать и дифференцировать почленно, при этом радиус сходимости ряда не меняется.*

Здесь слово «интегрировать» означает, что рассматривается интеграл

$$\int\limits_0^z f(\zeta)d\zeta \tag{4}$$

по кривой, лежащей в круге K.

Отметим, что каждый из интегралов $\int\limits_0^z \zeta^n d\zeta$, $n = 1, 2, \ldots,$ не зависит от пути интегрирования в круге K и $\int\limits_0^z \zeta^n d\zeta = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$. Поэтому интеграл (4) также не зависит от пути интегрирования и

$$\int\limits_0^z f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\,.$$

Это равенство следует из леммы, но для этого нужно доказать, что ряд (3) сходится равномерно в любом круге $K_1 : |z| < R_1$, где $0 < R_1 < R$. Докажем это утверждение (его называют *теоремой Абеля*).

○ Пусть $R_1 < |z_1| < R$. Тогда ряд (3) сходится в точке z_1, поэтому $c_n z_1^n \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, существует такое число $\mu > 0$, что $|c_n z_1^n| < \mu$ при $n = 1, 2, \ldots$.

Оценим общий член ряда (3) при $|z| \leqslant R_1$:

$$|c_n z^n| = |c_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n < \mu q^n, \tag{5}$$

где $q = \dfrac{R_1}{|z_1|} < 1$. Так как оценка (5) не зависит от z при $|z| \leqslant R_1$, то по теореме Вейерштрасса ряд (3) сходится равномерно в круге K_1. ●

Теперь докажем, что ряд (3) можно почленно дифференцировать в круге сходимости и при этом радиус сходимости R не уменьшается, если $R > 0$.

○ Рассмотрим ряд

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}, \tag{6}$$

составленный из производных членов ряда (3). Докажем, что ряд (6) сходится равномерно в круге $K_1 : |z| \leqslant R_1$ (здесь воспользуемся теми же обозначениями, что и в предыдущем доказательстве). Оценим общий член ряда (6):

$$|nc_n z^{n-1}| = n|c_n z_1^n| \frac{1}{|z_1|} \left|\frac{z}{z_1}\right|^{n-1} < \frac{\mu}{|z_1|} nq^{n-1}, \tag{7}$$

где $q = \dfrac{R_1}{|z_1|} < 1$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ сходится (по признаку Даламбера) и оценка (7) не зависит от z при $|z| \leqslant R_1$, то ряд (6) сходится равномерно в круге K_1.

По лемме сумма $S(z)$ ряда (6) является непрерывной в круге K функцией и ряд (6) можно интегрировать почленно по любой кривой, лежащей в круге. Поэтому

$$\int_0^z S(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = f(z) - c_0,$$

откуда следует, что функция $f(z)$ дифференцируема в круге K и

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}, \quad z \in K. \qquad \bullet$$

Следствие 1. *Регулярная в области функция бесконечно дифференцируема в этой области.*

○ По определению регулярной в точке z_0 функции $f(z)$ она представляется сходящимся к ней степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{8}$$

в некотором круге $K : |z - z_0| < R$, $R > 0$. По доказанной теореме ряд (8) можно дифференцировать в круге K любое число раз, поэтому функция $f(z)$ бесконечно дифференцируема в круге K и, в частности, в точке z_0. ●

Из свойств дифференцируемых функций следует, что если функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны (в точке или области), то функции $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ (если $g \neq 0$) также регулярны; суперпозиция регулярных функций также является регулярной функцией.

Следствие 2. Для коэффициентов ряда (8) верны формулы

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

○ Дифференцируя ряд (8), получаем

$$f^{(n)}(z_0) = c_n n! + c_{n+1}(n+1)!(z - z_0) + \ldots ,$$

откуда при $z = z_0$ получаются формулы (9). ●

Из формул (9) следует *единственность разложения функции в степенной ряд.*

Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)$$

называют *рядом Тейлора* функции $f(z)$.

Более подробно свойства степенных рядов рассмотрены в [1] и [4].

§ 10. Интегральная формула Коши

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и γ — простая замкнутая кривая, лежащая в области D, такая, что внутренность γ принадлежит D и кривая γ ориентирована так, что является границей своей внутренности. Тогда для любой точки z, лежащей внутри кривой γ, справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{1}$$

Формулу (1) называют *интегральной формулой Коши.*

○ Пусть $J = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, где z — фиксированная точка внутри γ. Тогда существует круг $|\zeta - z| \leqslant \rho$, $\rho > 0$, лежащий внутри γ, граница которого — окружность $C_\rho : |\zeta - z| = \rho$ ориентирована против часовой стрелки.

Так как функция $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ дифференцируема по ζ в области D с выколотой точкой z и кривую γ можно непрерывно деформировать в окружность C_ρ, то

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

откуда получаем

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\, f(z) \int\limits_{C_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\,.$$

Напомним, что $\int\limits_{C_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$, поэтому $J = J_1 + f(z)$, где

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Осталось показать, что $J_1 = 0$. Оценим этот интеграл:

$$|J_1| \leqslant \frac{1}{2\pi\rho} \max_{\zeta \in C_\rho} |f(\zeta) - f(z)| 2\pi\rho = \max_{\zeta \in C_\rho} |f(\zeta) - f(z)| \to 0$$

при $\rho \to 0$, так как функция $f(\zeta)$ непрерывна в точке z. Так как интеграл J_1 не зависит от ρ, то $J_1 = 0$. ●

Следствие 1. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в односвязной ограниченной области D и непрерывна вплоть до ее границы Γ. Тогда для любой точки $z \in D$ справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{2}$$

○ Так как интеграл (2) можно с любой точностью приблизить интегралом по замкнутой ломаной, лежащей в области D, близкой к кривой Γ и содержащей внутри себя точку z, то из формулы (1) следует формула (2). ●

Следствие 2. *Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в ограниченной области D (не обязательно односвязной) и непрерывна вплоть до ее границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n$, Тогда для любой точки $z \in D$ также справедлива формула (2).*

○ Проведем дополнительные разрезы, не проходящие через точку z, так, чтобы получилась односвязная область (рис. 33). По следствию 1 интеграл (2) по границе полученной области равен $f(z)$, а интегралы по дополнительным разрезам взаимно сокращаются. Поэтому получается формула (2). ●

Формулу (2) обычно также называют *формулой Коши.*

С помощью интегральной формулы Коши доказываются многие свойства дифференцируемых и регулярных функций. Рассмотрим основные из них.

Теорема 2. *Дифференцируемая в области функция регулярна в этой области.*

○ Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в области D и $z_0 \in D$. Нужно доказать, что функцию $f(z)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{3}$$

сходящийся в некоторой окрестности точки z_0.

Рассмотрим круг $K : |z - z_0| \leqslant \rho$, $\rho > 0$, принадлежащий области D вместе со своей границей — окружностью $C_\rho : |z - z_0| = \rho$, ориентированной против часовой стрелки. Если $z \in K$, то по интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{4}$$

Разложим функцию $\dfrac{1}{\zeta - z}$ по степеням $(z - z_0)$ по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,. \tag{5}$$

Напомним, что z, z_0 — фиксированные точки такие, что $|z - z_0| < \rho$, а $\zeta \in C_\rho$, т. е. $|\zeta - z_0| = \rho$. Поэтому $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \dfrac{|z - z_0|}{\rho} < 1$ и эта оценка не зависит от $\zeta \in C_\rho$. Следовательно, ряд (5) сходится равномерно относительно $\zeta \in C_\rho$.

Умножая ряд (5) на непрерывную на C_ρ функцию $f(\zeta)$ (и поэтому ограниченную на C_ρ), получаем равномерно сходящийся при $\zeta \in C_\rho$

ряд
$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \tag{6}$$

Подставляя ряд (6) в формулу (4), почленным интегрированием получаем
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{7}$$
где
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{8}$$

●

§ 11. Свойства регулярных функций

1. Свойства функций, дифференцируемых в области

Свойство 1. *Дифференцируемая в области функция является бесконечно дифференцируемой.*

○ По теореме 2 из § 10 дифференцируемая в области функция является регулярной, которая бесконечно дифференцируема (см. следствие 1 в § 9). ●

Пример 1. Функция, дифференцируемая в точке, может быть нерегулярной в этой точке. Так, функция $\overline{z}^2$ дифференцируема только в точке $z = 0$ (§ 7, пример 4), поэтому она нерегулярна в этой точке, так как регулярная в точке функция дифференцируема в некоторой ее окрестности (§ 9).

Свойство 2. *Если функция $f(z)$ регулярна в области D, то*
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \tag{1}$$
где γ — простая замкнутая кривая, лежащая в области D, такая, что внутренность γ принадлежит области D, γ — граница своей внутренности, и точка z принадлежит внутренности γ.

○ Пусть точка z_0 и круг $|z - z_0| \leqslant \rho$ принадлежат внутренности кривой γ. Так как ряд (7) § 10 — это ряд Тейлора функции $f(z)$, то

$c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Отсюда и из формулы (8) § 10 получаем

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{2}$$

Этот интеграл равен интегралу по кривой γ, т. е.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Заменив в этой формуле z_0 на z, получаем формулу (1). ●

Замечание. Формулу (1) можно получить из интегральной формулы Коши формальным дифференцированием интеграла (1) § 10 по параметру z.

Свойство 3. *Если функция $f(z)$ регулярна в круге K: $|z - z_0| < R$, то ее ряд Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \tag{3}$$

сходится к функции $f(z)$ во всем круге K.

○ При доказательстве теоремы 1 рассматривался любой круг $|z - z_0| \leqslant \rho$, лежащий в области D. Поэтому радиус сходимости ряда (3) не меньше расстояния от точки z_0 до ближайшей граничной точки области D, откуда и следует утверждение свойства 3. ●

2. Примеры разложения регулярных функций в ряды Тейлора

Пример 2. Вычисляя производные функций в точке $z = 0$, получаем формулы

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,,$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\,,$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,.$$

По свойству 3 каждый из этих рядов сходится во всей комплексной плоскости.

Пример 3. Разложим функцию $f(z) = \dfrac{1}{3-z}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$.

Искомое разложение можно получить, записав $f(z)$ в виде $f(z) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}}$. По формуле бесконечно убывающей геометрической прогрессии при $|z| < 3$ находим

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\,.$$

3. Достаточные условия регулярности функции в области

Теорема 1 (***теорема Мореры***). *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D и интеграл от нее не зависит от пути интегрирования в области D. Тогда функция $f(z)$ регулярна в области D.*

○ Из условий теоремы следует, что в области D существует первообразная функции $f(z)$, т. е. дифференцируемая в области D функция $F(z)$ такая, что $F'(z) = f(z)$, $z \in D$ (§ 8, п. 3). Так как дифференцируемая в области функция бесконечно дифференцируема (§ 9), то функция $f(z) = F'(z)$ также дифференцируема и поэтому регулярна в области D. ●

Теорема 2 (***первая теорема Вейерштрасса***). *Пусть функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, регулярны в области D и ряд*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{4}$$

сходится равномерно в каждой области D_1 такой, что $\overline{D_1} \subset D$. Тогда функция $f(z)$ регулярна в области D.

○ Функция $f(z)$ непрерывна в области D и ряд (4) можно интегрировать почленно по любой кривой, лежащей в D (§ 9). В любом круге $K : |z - z_0| < \rho$, лежащем в D, интеграл от каждой функции $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, не зависит от пути интегрирования и поэтому интеграл от функции $f(z)$ также не зависит от пути интегрирования в круге K. По теореме Мореры функция $f(z)$ регулярна в круге K и, следовательно, регулярна во всей области D. ●

Теорема 3 (***вторая теорема Вейерштрасса***). *При условиях теоремы 2 ряд* (4) *можно дифференцировать почленно любое число раз; получаемые при этом ряды сходятся равномерно в каждой области D_1 такой, что $\overline{D_1} \subset D$.*

○ Пусть круг $K : |z - z_0| < \rho$ принадлежит области D вместе с окружностью $C_\rho : |z - z_0| = \rho$, ориентированной против часовой стрелки. Из (4) получаем, что ряд, стоящий в правой части равенства

$$\frac{k!}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}, \tag{5}$$

сходится равномерно на окружности C_ρ при каждом $k = 1, 2, \ldots$. Интегрируя ряд, стоящий в правой части равенства (5), по окружности C_ρ, находим

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0).$$

Отсюда, заменив z_0 на z, получаем равенство

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \tag{6}$$

справедливое для любой точки $z \in D$.

Можно доказать, что ряд (6) сходится равномерно в каждой области D_1 такой, что $\overline{D_1} \subset D$. ●

4. Лемма об устранимой особенности (о стирании пунктира)

Лемма. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D и регулярна во всех точках области D, кроме точек, принадлежащих кривой γ, где $\gamma \subset D$. Тогда функция $f(z)$ регулярна и в точках кривой γ, т. е. во всей области D.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой Мореры. Достаточно доказать, что интеграл функции $f(z)$ по простому контуру $\Gamma \subset D$ (замкнутой кусочно-гладкой кривой) равен нулю (что равносильно независимости интеграла от пути интегрирования).

Пусть контур Γ не имеет общих точек с кривой γ. Тогда по теореме Мореры $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$. Поэтому нужно рассматривать только тот случай, когда контур Γ, лежащий в области D, имеет общие точки с кривой γ (см. рис. 35).

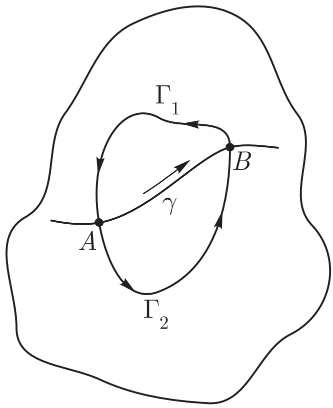

Рис. 35

Пусть A и B — точки пересечения кривых Γ и γ, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 и Γ_2 — части кривой Γ, лежащие соответственно выше и ниже γ;

$$\gamma_1 = \Gamma_1 \cup \gamma_{AB}, \quad \gamma_2 = \Gamma_2 \cup \gamma_{BA},$$

γ_{AB} — часть кривой γ от точки A до точки B, γ_{BA} — часть кривой γ от точки B до точки A.

По интегральной теореме Коши (функция $f(z)$ регулярна в D_1 и D_2, где D_1 и D_2 — области с границами γ_1 и γ_2, и непрерывна вплоть до их границ) имеем

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_{AB}} f(z)dz = 0,$$

$$\int\limits_{\gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_{BA}} f(z)dz = 0.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $\int\limits_{\gamma_{AB}} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_{BA}} f(z)dz = 0$, получаем

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_{AB}} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_{BA}} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Лемма остается в силе и в случае, когда кривая γ состоит из одной точки. ●

§ 12. Гармонические функции. Теоремы о среднем

В § 11 доказано, что дифференцируемая в области D функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ бесконечно дифференцируема. Поэтому из § 7 следует, что функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ имеют непрерывные частные производные любого порядка и в области D выполняются условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Дифференцируя первое равенство (1) по x, а второе по y, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ (эти производные непрерывны), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *уравнением Лапласа*. Обычно уравнение (2) записывают кратко: $\Delta u = 0$, где буквой Δ обозначен оператор $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Действительная функция $u(x, y)$, имеющая в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической* в области D.

Уравнения Лапласа описывают многие физические процессы. Например, если $u(x, y)$ — установившаяся температура пластинки; если $u(x, y)$ — потенциал плоско-параллельного векторного поля (электрического, магнитного, гидродинамического, аэродинамического и др.). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать свойства гармонических функций.

Вернемся к дифференцируемой в области D функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Из формул (1) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

т. е. функция $v(x, y)$ также является гармонической в области D.

Гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющие условиям Коши–Римана (1), называются *сопряженными гармоническими*[*]. Таким образом, действительная и мнимая части дифференцируемой в области функции являются в этой области сопряженными гармоническими функциями.

Верно и обратное утверждение: если $u(x,y)$, $v(x,y)$ являются сопряженными гармоническими функциями в области, то функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема в этой области (§ 7). Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для дифференцируемости функции $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ в области необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ были сопряженными гармоническими в этой области.*

Покажем, что если известна одна из сопряженных гармонических функций, то другую можно найти с точностью до постоянного слагаемого.

Лемма 1. *Пусть функции $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ являются сопряженными гармоническими функциями в области D с одной и той же функцией $v(x,y)$. Тогда $u_1(x,y) - u_2(x,y) \equiv \text{const}$, $z \in D$.*

○ Положим $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$. Из условий (1) получаем $\dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, $z \in D$. Отсюда по теореме из курса математического анализа следует, что $u(x,y) \equiv \text{const}$, $z \in D$. ●

Лемма 2. *Для гармонической в односвязной области D функции $u(x,y)$ существует сопряженная с ней гармоническая функция в этой области.*

○ Покажем, что функция

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy \tag{3}$$

является сопряженной гармонической с функцией $u(x,y)$.

По теореме из курса математического анализа [9] интеграл (3) не зависит от пути интегрирования в области D, так как $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Поэтому функция $v(x,y)$ однозначна в области D.

[*] Порядок в паре (u,v) является существенным.

Из формулы (3) получаем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

откуда следует, что функция $v(x, y)$ является сопряженной гармонической с функцией $u(x, y)$ в области D. ●

Аналогично можно доказать, что если $v(x, y)$ — гармоническая в односвязной области функция, то в этой области существует сопряженная с ней гармоническая функция $u(x, y)$.

Из леммы 1 следует, что если задана одна из двух сопряженных гармонических функций, то другая находится с точностью до постоянного слагаемого. Отметим, что если область неодносвязна и функция $u(x, y)$ гармоническая в этой области, то функция (3) может быть неоднозначной, т. е. для гармонической в неодносвязной области функции может не существовать ей сопряженная гармоническая функция.

Пример 1. Рассмотрим функцию $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) = \ln |z|^2$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $u(x, y)$ является гармонической в области $|z| > 0$.

Вычисляя интеграл (3), получаем, что функция $u(x, y) = 2 \arg z$ неоднозначна в области $|z| > 0$.

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что если $u(x, y)$ — гармоническая в односвязной области функция, то в этой области существует регулярная функция $f(z)$ такая, что $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x, y)$, а именно $f(z) = u + iv$, где функцию $v(x, y)$ можно найти по формуле (3). Таким образом, регулярную в односвязной области функцию можно найти (с точностью до постоянного слагаемого), зная ее действительную или мнимую часть.

В практических задачах вместо вычисления интеграла (3), что часто затруднительно, обычно функцию $v(x, y)$ находят непосредственно из условий Коши–Римана.

Пример 2. Выясним, существует ли регулярная во всей комплексной плоскости функция $f(z)$ такая, что

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u(x, y) = y^3 - 3x^2 y, \tag{4}$$

и если существует, то найдем функцию $f(z)$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $u(x, y)$ является гармонической во всей комплексной плоскости. По лемме 2 существует регулярная во всей комплексной плоскости функция, удовлетворяющая условию (4).

Из условия (4) и первого равенства (1) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy,$$

откуда $v(x, y) = -3xy^2 + g(x)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + g'(x)$,

Из второго равенства (1) и условия (4) следует, что $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + 3x^2$. Поэтому $g'(x) = 3x^2$, $g(x) = x^3 + C$, $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$, где C — произвольная действительная постоянная.

Функция

$$f(z) = u + iv = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2) + iC = iz^3 + iC$$

регулярна во всей комплексной плоскости.

Лемма 3. *Гармоническая в области D функция является аналитической в этой области, т. е. в окрестности каждой точки $(x_0, y_0) \in D$ представима сходящимся к ней степенным рядом*

$$u(x, y) = \sum_{n,k=0}^{\infty} c_{nk}(x - x_0)^n (y - y_0)^k. \tag{5}$$

○ По лемме 2 в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ существует такая регулярная функция $f(z)$, что $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$. Так как

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)[(x - x_0) + i(y - y_0)]^n,$$

то, приравнивая в этом равенстве действительные части, получаем формулу (5). ●

Ряд (5) называют *рядом Тейлора* функции $u(x, y)$.

Напомним, что действительные функции одного или нескольких действительных переменных могут быть не аналитическими, даже если они бесконечно дифференцируемы, т. е. их ряды Тейлора могут сходиться, но не к данной функции.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на всей действительной оси. Так как $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то ряд Тейлора для функции $f(x)$ тождественно равен нулю. Этот ряд сходится при всех $x \in \mathbb{R}$, но не к функции $f(x)$.

Регулярные и гармонические функции отличаются от обычных действительных функций действительных переменных тем, что их ряды Тейлора обязательно сходятся к самой функции в некоторой окрестности заданной точки. Отсюда, в частности, и принят термин «регулярные функции».

Теорема 2 (**о среднем для регулярных функций**). *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D и круг $|z - z_0| \leqslant R$ принадлежит области D. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi, \tag{6}$$

т. е. значение функции $f(z)$ в центре круга равно среднему арифметическому значений этой функции на границе круга.

○ Пусть окружность $C_R : |\zeta - z_0| = R$ ориентирована против часовой стрелки, т. е. $\zeta = z_0 + Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Тогда $d\zeta = iRe^{i\varphi} d\varphi$ и по интегральной формуле Коши находим

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{if(z_0 + Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

●

Теорема 3 (**о среднем для гармонических функций**). *Пусть $u(z) = u(x, y)$ — гармоническая в области D функция и круг $|z - z_0| \leqslant R$ принадлежит области D. Тогда*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi, \tag{7}$$

т. е. значение гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому значений этой функции на границе этого круга.

Здесь и далее вместо записи $u(x, y)$ обычно будем писать $u(z)$. Например, формула (7) означает, что

$$u(x_0,\, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\varphi,\, y_0 + R\sin\varphi) d\varphi.$$

○ Рассмотрим круг $K : |z - z_0| < R_1$, принадлежащий области D, такой, что $R_1 > R$.

В круге K существует регулярная функция $f(z)$ такая, что $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$. По теореме 2 справедлива формула (6). Приравнивая в этой формуле действительные части, получаем формулу (7). ●

В курсе уравнений математической физики доказывается следующая теорема, обратная теореме 3.

Теорема 4. *Пусть функция $u(z) = u(x, y)$ непрерывна в области D и для каждого круга $|z - z_0| \leqslant R$, принадлежащего области D, справедлива формула (7). Тогда функция $u(x, y)$ является гармонической в области D.*

С помощью теоремы 4 доказывается сходимость приближенных решений уравнения Лапласа методом конечных разностей.

§ 13. Обратная функция

1. Понятие обратной функции

Пусть функция $u = f(z)$ определена на множестве E и пусть $E' = f(E)$ — множество значений функции f. Тогда для каждого значения $w \in E'$ найдется одно или более одного значения $z \in E$ таких, что $f(z) = w$, т. е. для каждого значения $w \in E'$ уравнение

$$f(z) = w \tag{1}$$

имеет по крайней мере одно решение $z \in E$.

Если существует закон (правило), по которому каждому значению $w \in E_1 \subset E'$ можно поставить в соответствие одно значение $z \in E$, то на множестве E_1 определена функция $z = h(w)$, которую называют *обратной* к функции $w = f(z)$.

Из определения обратной функции следует, что

$$f(h(w)) = w, \quad w \in E_1. \tag{2}$$

Приведем достаточные условия, при которых существует регулярная функция $h(w)$, обратная к функции $w = f(z)$.

Теорема (*об обратной функции*). *Пусть $w = f(z)$ — функция, регулярная в точке z_0, и пусть $f'(z_0) \neq 0$. Тогда*

1) *существуют круг K: $|z - z_0| < \rho$ и круг K': $|w - w_0| < \rho'$, где $w_0 = f(z_0)$, такие, что для каждого $w \in K'$ уравнение (1) имеет единственное решение $z = h(w)$, где $z \in K$ (существует обратная к $f(z)$ функция $h(w)$);*
2) *функция $z = h(w)$ регулярна в точке w_0;*

3) *в некоторой окрестности точки* w_0 *имеет место формула*

$$h'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(h(w))}\,. \tag{3}$$

Доказательство. Полагая $z=x+iy$, $w=u+iv$, заменим уравнение (1) эквивалентной системой уравнений

$$u(x,y)=u, \quad v(x,y)=v. \tag{4}$$

Найдем якобиан $J(x,y)$ отображения (4), используя условия Коши–Римана $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ и формулу $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (см. формулу (10) в § 7). Получим

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

Так как $f'(z_0)\neq 0$, то $f'(z)\neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0 в силу непрерывности функции $f'(z)$. Поэтому $J(x,y)\neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0).

В силу известной теоремы из курса математического анализа (см. [9]) в некоторой окрестности точки $w_0=u_0+iv_0$ существует круг K': $|w-w_0|<\rho'$ такой, что для каждого $w\in K'$ уравнение (1) имеет единственное решение

$$z = x(u,v)+iy(u,v) = h(w)$$

такое, что $z\in K$ и $z=h(w)$ — непрерывная функция.

Остается доказать, что функция $h(w)$ регулярна в точке w_0. Пусть $w\in K'$ и $w+\Delta w\in K'$. Рассмотрим отношение $\Delta z/\Delta w$, где $\Delta w\neq 0$, а $\Delta z = h(w+\Delta w)-h(w)$. Заметим, что если $\Delta w\neq 0$, то $\Delta z\neq 0$, так как функция $w=f(z)$ взаимно однозначно отображает достаточно малую окрестность точки z_0 на окрестность точки w_0.

Рассмотрим тождество

$$\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}}\,. \tag{5}$$

Пусть $\Delta w\to 0$, тогда в силу непрерывности функции $h(w)$ имеем $\Delta z\to 0$. Перейдем к пределу при $\Delta z\to 0$ в правой части равенства (5). Этот предел существует при любом способе стремления к нулю величины Δz, так как функция $w=f(z)$ дифференцируема в окрестности точки z_0, и равен $\dfrac{1}{f'(z)}$. Следовательно, существует предел левой части равенства (5) при $\Delta w \to 0$ и имеет место формула (3). Теорема доказана. ●

Формулу (3) можно получить, дифференцируя тождество (2).

Замечание. Теорема об обратной функции характеризует локальные свойства регулярной функции: если $f'(z_0) \neq 0$, то функция $z = h(w)$, обратная к функции $w = f(z)$, существует лишь в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$, а условие $f'(z) \neq 0$ не гарантирует существование обратной функции в заданной области.

Например, если $f(z) = z^2$, то $f'(z) \neq 0$ при $z \neq 0$, но в любой области D, содержащей точки z_1 и z_2 такие, что $z_2 = -z_1$, функция $f(z)$ принимает равные значения, откуда следует, что в области $D' \subset f(D)$ не существует однозначной функции, обратной к $f(z)$.

Необходимо выяснить, при каких условиях функция $f(z)$ имеет обратную. В связи с этим нужно ввести одно понятие.

2. Однолистные функции

Функция $f(z)$ называется *однолистной* в области D (на множестве E), если для любых точек $z_1 \in D$, $z_2 \in D$ из равенства $f(z_1) = f(z_2)$ следует равенство $z_1 = z_2$.

Из определения однолистности следует, что функция $w = f(z)$ однолистна в области D тогда и только тогда, когда существует однозначная функция $h(w)$, обратная к функции $w = f(z)$.

Отметим еще, что если функция $f(z)$ регулярна и однолистна в области D и, кроме того, $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in D$, то $D' = f(D)$ — область. Действительно, D' — открытое множество (вместе с каждой точкой $w_0 \in D'$ множеству D' принадлежит и некоторая окрестность точки w_0). Кроме того, D' — связное множество (непрерывная кривая $\gamma \subset D$ при непрерывном отображении переходит в непрерывную кривую $\gamma' = f(\gamma) \subset D'$).

3. Функция $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, и обратная к ней

Если на множестве $E \subset \mathbb{C}$ определена функция $w = f(z)$, то каждой точке $z \in E$ (§ 4) ставится в соответствие одна точка $w \in E' \subset \mathbb{C}$.

Введем понятие многозначной функции. Если каждой точке $z \in E$ поставлено в соответствие некоторое множество (более одной точки) точек из множества $E' \subset \mathbb{C}$, то говорят, что на множестве E *задана многозначная функция*.

Рассмотрим функцию $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. В § 1 (п. 8) было показано, что для любого $w \neq 0$ уравнение $w = z^n$ относительно неизвестного z имеет n различных решений

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}e^{\frac{i}{n}(\arg w + 2\pi k)}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{6}$$

где $\arg w$ — одно из значений аргумента числа w. Поэтому функция

$$z = F(w) = \sqrt[n]{w},$$

значения которой в каждой точке $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, определяются формулой (6), является многозначной (точнее, n-значной), а функция $w = z^n$ не однолистна на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Чтобы функция $w = z^n$ была однолистна в области G, эта область не должна содержать ни одной пары точек z_1, z_2 таких, что $z_1 \neq z_2$, но

$$z_1^n = z_2^n. \tag{7}$$

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то равенство (7) при $z_1 \neq z_2$ означает, что $r_1 = r_2$, $n\varphi_2 = n\varphi_1 + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$), откуда получаем

$$n(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0.$$

Если $0 < n(\varphi_2 - \varphi_1) \leqslant 2\pi$, то функция $w = z^n$ однолистна в области G. В частности, если $G = \{z\colon\ z \neq 0,\ \alpha < \arg z < \beta\}$, где $0 < \beta - \alpha \leqslant \dfrac{2\pi}{n}$, то функция $w = z^n$ однолистна в области G.

Рассмотрим область $G_0 = \{z\colon\ z \neq 0, \quad 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{n}\}$, ограниченную лучами $l_0 = \{\arg z = 0\}$ и $l_1 = \left\{\arg z = \dfrac{2\pi}{n}\right\}$. Заметим, что луч $l = \{z\colon$ $z = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant r < +\infty\}$ при отображении $w = z^n$ перейдет в луч $l' = \{w\colon$ $w = r^n e^{in\varphi}\}$ (см. рис. 36).

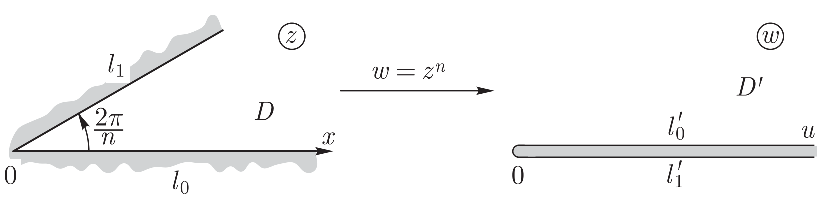

Рис. 36

Будем вращать луч l около точки $z = 0$ против часовой стрелки, непрерывно увеличивая φ от 0 до $\dfrac{2\pi}{n}$. Тогда l' (образ луча l при отображении $w = z^n$) опишет плоскость D' с разрезом γ по положительной полуоси Ou плоскости w.

При этом луч l_0 $(\varphi = 0)$ перейдет в верхний берег l'_0 $(\arg w = 0)$ разреза γ, а луч l_1 $\left(\varphi = \dfrac{2\pi}{n}\right)$ — в нижний берег l'_1 $(\arg w = 2\pi)$ разреза γ.

Функция $w = z^n$ взаимно однозначно отображает область D на область D' с указанным выше соответствием границ этих областей. Следовательно, в области D' существует функция

$$z = g_0(w) = |w|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n} \arg w}, \quad 0 < \arg w < 2\pi, \tag{8}$$

обратная к функции $w = z^n$.

Эта функция дифференцируема в окрестности каждой точки $w \in D'$ по теореме об обратной функции ($w' \neq 0$ при $z \neq 0$) и поэтому она регулярна в области D'. Ее называют *регулярной ветвью* многозначной функции $\sqrt[n]{w}$. Эта функция определяется условиями $\arg w_0 = 0$ при $w_0 \in l'_0$, где l'_0 — верхний берег разреза γ. Заменив это условие на условие $\arg w_0 = 2\pi$ при $w_0 \in l'_0$, получим функцию

$$z = g_1(w) = \sqrt[n]{|w|} e^{\frac{i}{n} \arg w}, \quad 2\pi < \arg w < 4\pi,$$

где $g_1(w) = g_0(w) e^{i\frac{2\pi}{n}}$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[n]{w}$, отображающая область D' на область $\dfrac{2\pi}{n} < \arg z < \dfrac{4\pi}{n}$.

В области D' для многозначной функции $\sqrt[n]{w}$ существует n регулярных ветвей вида

$$g_k(w) = g_0(w) \cdot e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{9}$$

Каждая из функций (9) является обратной к функции $w = z^n$ и поэтому

$$g_k^n(w) = w, \quad \forall\, w \in D'. \tag{10}$$

Дифференцируя тождество (10), получаем

$$n g_k^{n-1}(w) g'_k(w) = 1. \tag{11}$$

Из (10) и (11) находим

$$g'_k(w) = \frac{g_k(w)}{nw},$$

где $g_k(w)$ определяется формулами (8) и (9).

4. Функция $w = e^z$ и обратная к ней

В § 4 (п. 5) была определена функция

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = u + iv.$$

Эта функция регулярна в $\mathbb{C}$,

$$w'(z) = e^z = w(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Решая уравнение

$$e^z = w \tag{12}$$

относительно z ($w \neq 0$ фиксировано), получаем

$$|w| = e^x, \quad y = \operatorname{Arg} w = \arg w + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$\arg w$ — одно из значений аргумента числа $w \neq 0$. Множество решений уравнения (12) называется логарифмом w (§ 4, п. 5) и обозначается

$$\operatorname{Ln} w = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w. \tag{13}$$

Формулой (13) определяется многозначная функция, действительная часть которой $\ln|w|$ однозначна.

Функция e^z однолистна в области D, если для любых точек z_1, z_2 этой области из условия $z_1 \neq z_2$ следует, что $e^{z_1} \neq e^{z_2}$.

Если $e^{z_1} = e^{z_2}$, то $z_2 = z_1 + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому функция e^z однолистна в области D, если из условия $z \in D$ следует, что $z + 2\pi i \notin D$ для любой точки $z \in D$.

Рассмотрим область $D_0 = \{z\colon\ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ — это горизонтальная полоса (см. рис. 37) шириной 2π, ограниченная прямыми $y = 0$ и $y = 2\pi$.

Заметим, что прямая $l = \{z\colon\ z = x + iy_0,\ y_0$ — фиксировано, $x \in \mathbb{R}\}$ при отображении $w = e^z$ переходит в луч $l' = \{w\colon\ w = e^x \cdot e^{iy_0},\ x \in \mathbb{R}\}$. При изменении y_0 от 0 до 2π луч l покрывает область D_0, а его образ D_0' — плоскость w с разрезом γ по положительной полуоси Ou (см. рис. 37). При этом прямая l_0 ($y = 0$) отображается на верхний берег l^+ разреза γ, а прямая l_1 ($y = 2\pi$) — на нижний берег l^- разреза γ (см. рис. 37).

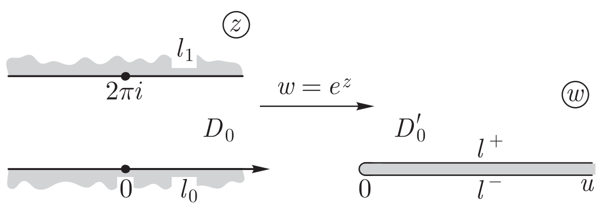

Рис. 37

Функция

$$g_0(w) = \ln|w| + i\arg w, \quad 0 < \arg w < 2\pi, \tag{14}$$

обратная к функции e^z в области D_0', регулярна в области D_0', так как эта функция дифференцируема в окрестности каждой точки $w \in D'$ (теорема об обратной функции).

Так как

$$e^{g_0(w)} \equiv w, \quad w \in D_0', \tag{15}$$

то, дифференцируя тождество (15), получаем

$$g_0'(w)w = 1, \quad \text{откуда}$$

$$g_0'(w) = \frac{1}{w}\,, \quad w \in D_0'.$$

Функция $z = \operatorname{Ln} w$ имеет в области D_0' бесчисленное множество регулярных ветвей вида

$$g_k(w) = g_0(w) + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z},$$

причем

$$g_k'(w) = g_0'(w) = \frac{1}{w}\,.$$

Отметим еще, что не только в области D_0', но и в других областях, например, в плоскости с разрезом $(-\infty, 0]$ функция $\operatorname{Ln} w$ имеет регулярные ветви, определяемые формулами

$$h_0(w) = \ln|w| + i\arg w, \quad -\pi < \arg w < \pi,$$
$$h_k(w) = h_0(w) + 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

§ 14. Теорема единственности

1. Нули регулярной функции

Точка $z = a$ называется *нулем* регулярной функции $f(z)$, если

$$f(a) = 0.$$

а) Пусть $a \neq \infty$ — нуль функции $f(z)$ и пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1}$$

— степенной ряд (ряд Тейлора) функции $f(z)$ в окрестности точки $z = a$.

Тогда $c_0 = f(a) = 0$. Пусть c_m — первый отличный от нуля коэффициент ряда (1), т. е. $c_n = 0$ при $n = \overline{0, m-1}$, $c_m \neq 0$ и

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots, \quad c_m \neq 0, \tag{2}$$

$$\text{где} \quad c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}\,. \tag{3}$$

В этом случае число m называют *кратностью* (порядком) нуля функции $f(z)$. Из (3) следует, что порядок нуля $z = a$ функции $f(z)$ равен наименьшему порядку производной этой функции, отличной от нуля в точке $z = a$.

Равенство (2) можно записать в виде

$$f(z) = (z-a)^m[c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots],$$

где ряд $h(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots$ сходится в том же круге, что и ряд (1). Поэтому функция $h(z)$ регулярна в точке a и $h(a) = c_m \neq 0$.

Итак, если $z = a$ — нуль кратности m функции $f(z)$, то справедливо равенство

$$f(z) = (z-a)^m h(z), \quad h(a) \neq 0, \tag{4}$$

где функция $h(z)$ регулярна в точке $z = a$.

Обратно, из (4) следуют равенства (2) и (3), т. е. $z = a$ — нуль функции $f(z)$ порядка m.

б) Пусть $z = \infty$ — нуль функции $f(z)$. Тогда

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}\,, \quad c_0 = f(\infty) = 0. \tag{5}$$

Если c_n — первый отличный от нуля коэффициент ряда (5), то число m называют порядком (кратностью) нуля при $z = \infty$ функции $f(z)$, а равенство (5) имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{z^m}\left(c_m + \frac{c_{m+1}}{z} + \ldots\right), \quad c_m \neq 0,$$

откуда

$$f(z) = z^{-m}\psi(z), \quad \psi(\infty) = c_m \neq 0, \tag{6}$$

где $\psi(z)$ — функция, регулярная в точке $z = \infty$.

Обратно, из равенства (6) следует равенство

$$f(z) = \frac{c_m}{z^m} + \frac{c_{m+1}}{z^{m+1}} + \ldots = \frac{1}{z^m}\left(c_m + \frac{c_{m+1}}{z} + \ldots\right), \quad c_m \neq 0,$$

которое означает, что точка $z = \infty$ — нуль порядка m функции $f(z)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. а) *Точка $a \neq \infty$ является нулем порядка m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ представляется в виде (4), где функция $h(z)$ регулярна в точке a и $h(a) \neq 0$.*

б) *Точка $z = \infty$ является нулем порядка m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ представляется в виде (6), где функция $\psi(z)$ регулярна в точке $z = \infty$ и $\psi(\infty) \neq 0$.*

Замечание 1. Функции $f(z)$ и $g(z)$ называют *эквивалентными* при $z \to a$ и пишут $f(z) \sim g(z)$, если они регулярны в проколотой окрестности точки a и

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = 1.$$

Замечание 2. Из равенств (4) и (6) следует, что асимптотические формулы

$$f(z) \sim c_m (z-a)^m, \quad c_m \neq 0 \quad (z \to a), \tag{7}$$

$$f(z) \sim \frac{A}{z^m}, \quad A \neq 0 \quad (z \to \infty), \tag{8}$$

выражают необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $f(z)$, регулярная в точке $a \neq \infty$ и в точке $z = \infty$ соответственно, имела в этой точке нуль порядка m.

Докажем еще одну теорему о нулях регулярной функции.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в точке $a \neq \infty$ и $f(a) = 0$. Тогда либо $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $z = a$, либо существует такая окрестность точки a, в которой нет нулей функции $f(z)$, отличных от a.*

Доказательство. Возможны два случая:

1) все коэффициенты ряда (1) равны нулю, тогда $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a;

2) существует число $m \geqslant 1$ такое, что

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0, \quad c_m \neq 0.$$

В этом случае $z = a$ — нуль порядка m и по теореме 1 справедливо равенство (4), в котором $h(z)$ — функция, регулярная в точке a и $h(a) \neq 0$. В силу непрерывности функции $f(z)$ в точке a из условия $h(a) \neq 0$ следует, что $h(z) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a, т. е. функция $f(z)$ не имеет в этой окрестности нулей, отличных от a. Таким образом, нули регулярной функции изолированы. ●

Пример 1. Для функций $f_1(z) = 1 - \cos z$, $f_2(z) = \sin 3z$, $f_3(z) = \operatorname{sh} z - z$ точка $z = 0$ является нулем. Найдем порядок этого нуля.

Так как $1-\cos z \sim \dfrac{z^2}{2}$, $\sin 3z \sim 3z$, $\operatorname{sh} z - z \sim \dfrac{z^3}{6}$ при $z \to 0$, для функций f_1, f_2, f_3 точка $z=0$ является нулем соответственно второго, первого и третьего порядка.

Пример 2. Найдем все нули функций $f_1(z) = \sin\dfrac{1}{z}$, $f_2(z) = \operatorname{ch} z - 1$, $f_3(z) = \operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$ и определим их порядок.

1) Если $\sin\dfrac{1}{z} = 0$, то $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Так как $f_1'(z) = \left(\sin\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}\cos\dfrac{1}{z}$ и $f_1'(z_k) \neq 0$, то z_k — нули первого порядка. Точка $z=\infty$ — нуль первого порядка, так как $\sin\dfrac{1}{z} \sim \dfrac{1}{z}$ при $z \to \infty$.

2) Если $\operatorname{ch} z = 1$, то $e^z + e^{-z} = 2$, $e^z = 1$, $z_k = 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$, $f_2'(z) = \operatorname{sh} z$, $f_2'(z_k) = 0$, $f''(z) = \operatorname{ch} z$, $f''(z_k) = 1$. Точки z_k — нули второго порядка.

3) $\operatorname{sh}\dfrac{1}{z} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{z} = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $z_k = \dfrac{i}{k\pi}$ — нули первого порядка, так как $\left(\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}\right)'\Big|_{z=z_k} \neq 0$. Точка $z=\infty$ — нуль первого порядка, так как $\operatorname{sh}\dfrac{1}{z} \sim \dfrac{1}{z}$ при $z \to \infty$.

2. Теорема единственности

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D и пусть существует последовательность различных точек $\{z_n\}$ таких, что $z_n \in D$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, $a \in D$, и $f(z_n) = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в области D.*

Доказательство. а) Так как функция $f(z)$ регулярна в точке a, то существует круг $K_0 = \{z\colon |z-a| < \rho_0\}$ такой, что $K_0 \subset D$ и в круге K_0 функция $f(z)$ представляется сходящимся к ней рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{9}$$

Докажем, что $c_n = 0$ при всех n, т. е. $c_0 = 0$, $c_n = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. Предположим противное. Тогда найдется хотя бы один коэффициент ряда (9), отличный от нуля, и пусть m — наименьший из номеров таких коэффициентов, т. е. $c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$. Тогда по теореме 1 функция $f(z)$ представляется в круге K_0 в виде

$$f(z) = (z-a)^m h(z), \tag{10}$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в круге K_0 и такая, что $h(a) \neq 0$, а по теореме 2 она не имеет нулей, отличных от $z = a$, в некоторой окрестности точки a.

С другой стороны, из условий $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $f(z_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, следует, что в любой окрестности точки a содержатся нули функции $f(z)$. Откуда следует, что предположение о том, что среди коэффициентов ряда (9) имеются отличные от нуля, неверно и поэтому $f(z) \equiv 0$ в круге $K_0 = \{|z-a| < \rho_0\}$.

б) Пусть b — произвольная точка области D. Докажем, что $f(b) = 0$. Так как D — область, то существует кусочно-гладкая кривая $\gamma \subset D$, соединяющая точки a и b.

Пусть ρ_1 — расстояние между γ и границей Γ области D, тогда $\rho_1 > 0$. Обозначим $\rho = \min(\rho_1, \rho_0)$ и построим конечное число кругов K_0, K_1, ..., K_m с центрами в точках $\zeta_0 = a$, ζ_1, ..., ζ_{m-1}, $\zeta_m = b$, лежащих на кривой γ (в порядке движения по кривой из точки a к точке b) и одинаковыми радиусами, равными ρ, а точки ζ_j выберем так, чтобы $|\zeta_j - \zeta_{j-1}| < \frac{\rho}{2}$ $(j = \overline{1,m})$. Тогда $\zeta_{j+1} \in K_j \cap K_{j+1}$ $(j = \overline{0, m-1})$ (см. рис. 38).

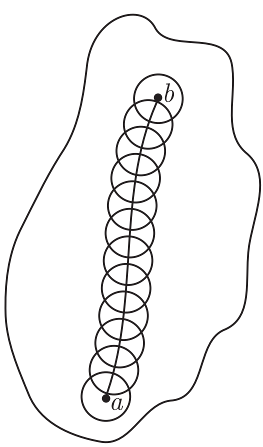

Рис. 38

Так как $\rho_0 \geqslant \rho$, то по доказанному $f(z) \equiv 0$ в круге

$$K_0 = \{z: \ |z-a| < \rho\}.$$

Обратимся к кругу $K_1 = \{z\colon |z-\zeta_1| < \rho\}$. Так как $f(z) \equiv 0$ при всех $z \in K_0 \cap K_1$ и существует последовательность $\{z_n^{(1)}\}$ различных точек такая, что

$$z_n^{(1)} \in K_0 \cap K_1 \quad \text{и} \quad z_n^{(1)} \to \zeta_1$$

при $n \to \infty$, $f(z_n^{(1)}) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, то по доказанному выше следует, что

$$f(z) \equiv 0, \quad \forall\, z \in K_1.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, можем утверждать, что если $f(z) \equiv 0$ в круге K_{j-1}, то $f(z) \equiv 0$ в круге K_j при любом $j \in \overline{1,m}$, в том числе и в круге $K_m = \{z\colon |z-b| < \rho\}$, откуда следует, что $f(b) = 0$. ●

Следствие 1. *Если функция $f(z)$ регулярна в области D и $f(z) \equiv 0$ при всех $z \in \gamma$, где γ — некоторая кривая, лежащая в области D, то $f(z) \equiv 0$, $\forall\, z \in D$.*

Следствие 2. *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в области D и принимают равные значения в различных точках z_n, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in D$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$, $\forall\, z \in D$.*

Замечание 3. В дальнейшем будем использовать следующий, ослабленный вариант теоремы единственности: если функции $f(z)$, $g(z)$ регулярны в области D и $f(z) \equiv g(z)$ на некоторой кривой, лежащей в области D, или в некоторой подобласти области D, то $f(z) \equiv g(z)$, $z \in D$.

Пример 3. Покажем, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо равенство

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{11}$$

Напомним, что функция e^z регулярна во всей комплексной плоскости и при действительных значениях $z = x$ совпадает с действительной функцией e^x.

1) Рассмотрим равенство

$$e^{z}e^{x_2} = e^{z+x_2}. \tag{12}$$

Левая и правая части этого равенства являются регулярными функциями во всей комплексной плоскости. Так как при действительных $z = x$ равенство (12) справедливо, то по теореме единственности оно верно при всех комплексных z.

2) Теперь рассмотрим равенство

$$e^{z_1}e^z = e^{z_1+z}. \tag{13}$$

Левая и правая части этого равенства являются регулярными функциями во всей комплексной плоскости. В п. 1 доказано, что равенство (12) справедливо при действительных $z = x$. По теореме единственности равенство (13) верно при всех комплексных z, т. е. справедливо равенство (11).

Пример 4. Покажем, что

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \tag{14}$$

при всех комплексных z.

Напомним, что функции $\sin z$, $\cos z$ регулярны во всей комплексной плоскости и при действительных значениях $z = x$ совпадают с действительными функциями соответственно $\sin x$ и $\cos x$.

Левая и правая части равенства (14) являются регулярными во всей комплексной плоскости. При действительных значениях $z = x$ равенство (14) справедливо, следовательно, по теореме единственности оно верно при всех комплексных z.

Аналогично, как и в примерах 3, 4, доказывается, что все формулы для тригонометрических и гиперболических функций, справедливые для действительных $z = x$, верны и для всех комплексных z:

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$
$$\cos(z + 2\pi) = \cos z,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z,$$
$$\cos(-z) = \cos z,$$
$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z.$$

§ 15. Ряд Лорана

1. Разложение регулярной функции в ряд Лорана

Определение. *Рядом Лорана называется степенной ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \tag{1}$$

где $z_0 \neq \infty$.

Ряд (1) называется сходящимся в кольце $K : \rho < |z - z_0| < R$, где $0 \leqslant \rho < R \leqslant \infty$, если в каждой точке $z \in K$ сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \tag{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}\,. \tag{3}$$

Отметим, что ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, если $c_n = 0$ при $n = -1, -2, \ldots$ и ряд (2) сходится в круге $|z| < R$.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $K : \rho < |z - z_0| < R$, то в этом кольце*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \tag{4}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta, \tag{5}$$

окружность $C_0 : |\zeta - z_0| = \rho_0$, $\rho < \rho_0 < R$ ориентирована против часовой стрелки. Ряд (4) сходится равномерно к функции $f(z)$ в каждом кольце $K_1 : \rho_1 < |z - z_0| < R_1$, где $\rho < \rho_1 < R_1 < R$.

○ Если $z \in K_1$, то по интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{6}$$

где окружности $\Gamma_1 : |\zeta - z_0| = R_1$, $\Gamma_2 : |\zeta - z_0| = \rho_1$ ориентированы против часовой стрелки (рис. 39).

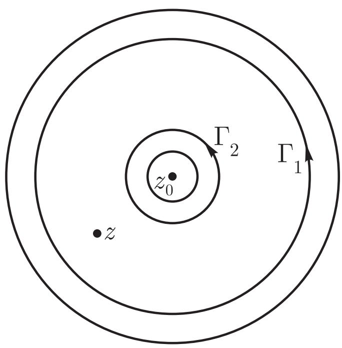

Рис. 39

1) Рассмотрим первое слагаемое в формуле (6):

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{7}$$

Разложим функцию $\dfrac{1}{\zeta - z}$ при $\zeta \in \Gamma_1$ в ряд по степеням $(z - z_0)$ по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} =$$
$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,. \tag{8}$$

Этот ряд сходится равномерно относительно $\zeta \in \Gamma_1$ (z и z_0 — фиксированы), так как $\dfrac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \dfrac{|z - z_0|}{R_1} < 1$ и эта оценка не зависит от ζ.

Умножив ряд (8) на непрерывную и поэтому ограниченную на Γ_1 функцию $f(\zeta)$, получим также равномерно сходящийся ряд относительно $\zeta \in \Gamma_1$. Подставляя этот ряд в формулу (7), интегрированием почленно получаем

$$J_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{9}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{10}$$

Так как R_1 — любое, $R_1 < R$, то ряд (9) сходится в круге $|z| < R$ и по теореме Абеля равномерно сходится в круге $|z| < R_1$.

Отметим, что интеграл (10) равен интегралу (5), так как функция $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ дифференцируема по ζ при $0 < |\zeta - z_0| < R$ и при непрерывной деформации окружности Γ_1 в окружность C_0 значение интеграла (10) не изменяется.

2) Рассмотрим второе слагаемое в формуле (6):

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{11}$$

Разложим функцию $\dfrac{1}{\zeta - z}$ при $\zeta \in \Gamma_2$ по степеням $(z - z_0)$ по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} =$$

$$= -\frac{1}{z - z_0}\,\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^k}\,, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}\,. \tag{12}$$

Этот ряд сходится равномерно относительно $\zeta \in \Gamma_2$, так как $\dfrac{|\zeta - z_0|}{|z - z_0|} = \dfrac{\rho_1}{|z - z_0|} < 1$ и эта оценка не зависит от ζ. Полагая в (12) $k = -(n + 1)$, получаем

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,. \tag{13}$$

Умножая этот ряд на $f(\zeta)$, подставляя полученный ряд в формулу (11) и интегрируя его почленно, получаем:

$$J_2 = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n, \tag{14}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

равен интегралу (5). Так как ρ_1 — любое, $\rho_1 > \rho$, то ряд (14) сходится при $|\zeta - z_0| > \rho$, и по теореме Абеля равномерно сходится при $\rho_1 < |\zeta - z_0| < \infty$.

Подставляя ряды (9), (14) в формулу (6), получаем ряд (4). ●

2. Единственность разложения функции в ряд Лорана

Теорема 2. *Пусть ряды*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \tag{15}$$

равномерно сходятся на окружности $K: |z-z_0|=R$, $R>0$, *к одной и той же функции* $f(z)$, *непрерывной на окружности* K. *Тогда* $c_n=b_n$ *при* $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

○ Умножая ряды (15) на $(z-z_0)^m$, где m — фиксированное целое число, получаем равномерно сходящиеся на окружности K ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+m}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n+m}. \tag{16}$$

Интегрируя эти ряды по окружности K, ориентированной против часовой стрелки, и учитывая, что

$$\int\limits_K (z-z_0)^{n+m}dz=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad n+m\neq -1,\\ 2\pi i, & \text{если} \quad n+m=-1,\end{cases}$$

получаем $c_n=b_n$ при $n=-m-1$. Так как m — любое целое число, то $c_n=b_n$ при всех целых n. ●

Следствие. *Из теорем 1, 2 следует, что разложение регулярной в кольце функции в ряд Лорана единственно.*

3. Примеры разложений рациональных функций в ряды Лорана

Пример 1. Разложим функцию

$$f(z)=\frac{1}{3-z}$$

в ряды Лорана по степеням z в кольцах $|z|<3$ и $3<|z|<\infty$.

Из теоремы 2 следует, что коэффициенты ряда Лорана не зависят от того, каким способом получено разложение данной функции. Воспользуемся формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Если $|z| < 3$, то

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}\,, \tag{17}$$

а если $3 < |z| < \infty$, то

$$\frac{1}{3-z} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\dfrac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)\cdot 3^n}{z^{n+1}}\,. \tag{18}$$

Отметим, что по 2-й теореме Вейерштрасса ряд Лорана можно дифференцировать почленно, при этом кольцо сходимости не меняется. Например, дифференцируя ряды (17), (18) получаем: если $|z| < 3$, то

$$\frac{1}{(3-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{3^{n+1}}\,,$$

а если $3 < |z| < \infty$, то

$$\frac{1}{(3-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot 3^n}{z^{n+2}}\,.$$

Пример 2. Разложим функцию

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$$

в ряды Лорана по степеням z в кольцах $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $|z| > 2$.

При $z \neq 1$ и $z \neq -2$ получаем

$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z+2}\right). \tag{19}$$

Если $|z| < 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{20}$$

а если $|z| > 1$, то

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{z^{n+1}}\,. \tag{21}$$

Если $|z| < 2$, то

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\dfrac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}\,, \tag{22}$$

а если $|z| > 2$, то

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} \,. \tag{23}$$

Из формул (19)–(23) получаем:
– если $|z| < 1$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) z^n,$$

– если $1 < |z| < 2$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{3} \, \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3 \cdot 2^{n+1}} \,,$$

– если $|z| > 2$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n - 1}{3 \cdot z^{n+1}} \,.$$

Пример 3. Разложим функцию

$$f(z) = \frac{(1+3i)z}{z^2 - (1-3i)z - 3i}$$

в ряд Лорана по степеням $z-1+i$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 2$, и найдем границы кольца сходимости.

Разложим знаменатель дроби $f(z)$ на множители

$$z^2 - (1-3i)z - 3i = z^2 + 3iz - (z+3i) = (z+3i)(z-1),$$

а функцию $f(z)$ представим в виде $\dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z+3i}$, заметив, что $(1+3i)z = z + 3i + 3i(z-1)$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{3i}{z+3i} \,.$$

Пусть $z - 1 + i = t$, тогда $z = t + 1 - i$, точка $z_0 = 2$ переходит в точку $t_0 = 1 + i$, $f(z) = g(t) = \dfrac{1}{t-i} + \dfrac{3i}{t+1+2i}$. Функция $g(t)$ регулярна в кольцах, границы которых проходят через точки $t = i$, $t = -1 - 2i$. Точка $t_0 \in K$, где $K = \{t\colon\ 1 < |t| < \sqrt{5}\}$. Учитывая это, преобразуем функцию $g(t)$:

$$g(t) = \frac{1}{t}\,\frac{1}{1-\dfrac{i}{t}} + \frac{3i}{1+2i}\,\frac{1}{1+\dfrac{t}{1+2i}}\,.$$

Отсюда находим

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{t^{n+1}} + 3i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(1+2i)^{n+1}}\,,$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(z-1+i)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3i(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}}\,(z-1+i)^n,$$

$$1 < |z-1+i| < \sqrt{5}.$$

§ 16. Изолированные особые точки однозначного характера

1. Классификация изолированных особых точек

Определение 1. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки z_0, т. е. в кольце $K = \{0 < |z-z_0| < \rho\}$, если $z_0 \ne \infty$, и в области $|z| > R$, если $z_0 = \infty$. Тогда точка z_0 называется изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$.*

Определение 2. *Изолированная особая точка z_0 однозначного характера функции $f(z)$ называется:*

а) *устранимой особой точкой, если существует конечный предел*

$$\lim_{z\to z_0} f(z);$$

б) *полюсом, если*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty;$$

в) *существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.*

Замечание 1. В определениях 1, 2 предполагается, что функция $f(z)$ может быть не определена в точке z_0.

2. Устранимая особая точка

Пусть точка $z_0 \ne \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$. Будем считать, что $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Тогда функция $f(z)$ будет непрерывна в точке z_0. По лемме об устранимой особенности (§ 11, п. 4) функция регулярна в круге

$|z - z_0| < \rho$. Поэтому точку z_0 будем называть неособой, т. е. регулярной.

Пример 1. Покажем, что функция $f(z)$ регулярна в точке $z = 0$, если:

1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$; 2) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{\operatorname{sh} z}$.

1) Так как $\sin z \sim z$ при $z \to 0$, то $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$. Полагая $f(0) = 1$, получаем функцию, регулярную в точке $z = 0$.

2) Так как $1 - \cos z \sim \dfrac{z^2}{2}$ и $\operatorname{sh} z \sim z$ при $z \to 0$, то $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$. Полагая $f(0) = 0$, получаем функцию, регулярную в точке $z = 0$.

Пусть $z_0 = \infty$ — устранимая особая точка функции $f(z)$, тогда существует конечный предел в точке $z = \infty$. Полагая $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$, получаем функцию, регулярную в точке $z = \infty$.

Пример 2. Покажем, что функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, если: 1) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$; 2) $f(z) = \dfrac{z^2 + 3z + 2}{2z^2 - 4z + 3}$.

1) Так как функция $f(z)$ регулярна в области $|z| > 1$ и $f(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{6z^3} + \ldots$, то $f(z) \sim \dfrac{1}{z}$ при $z \to \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Полагая $f(\infty) = 0$, получаем функцию, регулярную в точке $z = \infty$.

2) $f(z) = \dfrac{1 + \dfrac{3}{z} + \dfrac{2}{z^2}}{2\left(1 - \dfrac{2}{z} + \dfrac{3}{2z^2}\right)} \sim \dfrac{1}{2}$ при $z \to \infty$. Полагая $f(\infty) = \dfrac{1}{2}$, получаем функцию, регулярную в точке $z = \infty$.

3. Полюс

Теорема 1. *Пусть $z_0 \neq \infty$ — полюс функции $f(z)$. Тогда существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что в некоторой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ представляется в виде*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad g(z_0) \neq 0, \tag{1}$$

где $g(z)$ — функция, регулярная в точке z_0.

○ По условию функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки z_0 и выполняется условие $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, откуда следует, что существует кольцо $K = \{0 < |z - z_0| < \rho\}$, в котором

$$|f(z)| > 1 \tag{2}$$

и функция $f(z)$ регулярна.

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}\,. \tag{3}$$

Тогда $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$. Положим

$$g(z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z) = 0. \tag{4}$$

Функция $g(z)$ регулярна в точке z_0, которая является нулем этой функции. Пусть m — порядок нуля z_0. Тогда по теореме 1 § 14 функция $g(z)$ в окрестности точки z_0 представляется в виде

$$g(z) = (z - z_0)^m h(z), \quad h(z_0) \neq 0, \tag{5}$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке z_0.

Из (3) и (5) следует равенство (1), в котором $g(z) = \dfrac{1}{h(z)}$, $g(z_0) = \dfrac{1}{h(z_0)} \neq 0$. ●

Следствие 1. *Точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом порядка m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ регулярна в некоторой проколотой окрестности точки z_0 и выполняется условие*

$$f(z) \sim \frac{A}{(z - z_0)^m}\,, \quad A \neq 0, \quad z \to z_0. \tag{6}$$

Пример 3. Покажем, что для функции $f(z)$ точка $z = 0$ является полюсом, и найдем его порядок, если:

1) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{(\operatorname{ch} z - 1)^2}$; 2) $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{\cos z - \cos 3z}$.

1) Функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки $z = 0$. Так как $e^z - 1 \sim z$, $\operatorname{ch} z - 1 \sim \dfrac{z^2}{2}$ при $z \to 0$, то $f(z) \sim \dfrac{z}{\left(\dfrac{z^2}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{z^3}$ при $z \to 0$ и из (6) следует, что $z = 0$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$.

2) Так как $\cos z - \cos 3z = 2 \sin z \cdot \sin 2z$, то $f(z) = \dfrac{1}{2\sin z} \sim \dfrac{1}{2z}$ при $z \to 0$ и $z = 0$ — полюс первого порядка функции $f(z)$.

Замечание 2. Если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в точке $z_0\neq\infty$, которая является нулем кратности m функции $\varphi(z)$ и нулем кратности k функции $\psi(z)$, то

1) если $m>k$, то z_0 — нуль функции $f(z)$ кратности $m-k$,

2) если $m=k$, то z_0 — устранимая особая точка,

3) если $m<k$, то z_0 — полюс функции $f(z)$ порядка $k-m$.

Пример 4. Покажем, что точка $z=0$ — полюс функции $f(z)$, и найдем его порядок, если

$$f(z)=\frac{e^{2z}-e^z}{(\operatorname{ch}z-1)(\cos z-\cos 5z)(\sin z-z)}.$$

Так как $e^{2z}-e^z=e^z(e^z-1)\sim z$, $\operatorname{ch}z-1\sim\dfrac{z^2}{2}$, $\cos z-\cos 5z=2\sin 3z\cdot\sin 2z\sim 12z^2$, $\sin z-z=-\dfrac{z^3}{6}$ при $z\to 0$, то $f(z)\sim\dfrac{(-z)\cdot 6}{\dfrac{z^2}{2}\cdot 12z^5}=\dfrac{-1}{z^6}$ при $z\to 0$, и $z=0$ — полюс шестого порядка функции $f(z)$.

Замечание 3. Можно показать, что если $z=a$ — существенно особая точка для функции $f(z)$ и полюс для функции $g(z)$, то для функции $h(z)=f(z)g(z)$ точка $z=a$ является существенно особой.

Рассмотрим случай, когда точка $z=\infty$ является полюсом функции $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ регулярна в области $|z|>R$ и $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$. Функция $g(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ регулярна в кольце $0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}$ и $\lim\limits_{\zeta\to 0}f(\zeta)=\infty$, т. е. $\zeta=0$ — полюс функции $g(\zeta)$ и поэтому

$$g(\zeta)=\frac{g_1(\zeta)}{\zeta^m},\quad g_1(0)\neq 0,$$

где $g_1(\zeta)$ — регулярная в точке $\zeta=0$ функция. Отсюда следует, что

$$f(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)=z^m g_1\left(\frac{1}{z}\right),\quad \text{т. е.}$$

$$f(z)=z^m h(z),\quad h(\infty)\neq 0, \tag{7}$$

$h(z)=g_1\left(\dfrac{1}{z}\right)$ — функция, регулярная в точке $z=\infty$.

Число m называется *порядком полюса* функции $f(z)$ в точке $z=\infty$. Таким образом, для нахождения полюса в точке $z=\infty$ функции $f(z)$ и определения его порядка можно воспользоваться одним из следующих способов:

1) найти порядок полюса функции $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ в точке $\zeta = 0$,

2) представить функцию $f(z)$ в виде (7) или показать, что

$$f(z) \sim Az^m, \quad A \neq 0 \quad (z \to \infty).$$

Пример 5. Покажем, что для функции $f(z)$ точка $z = \infty$ является полюсом и найдем его порядок, если:

1) $f(z) = \dfrac{z^3 + 3z + 1}{2z^2 + z + 3}$; 2) $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 \frac{1}{z}}$.

1) Функция $f(z)$ регулярна в окрестности точки $z = \infty$ и $f(z) \sim \frac{z}{2}$ при $z \to \infty$. Поэтому $z = \infty$ — полюс первого порядка функции $f(z)$.

2) Для функции $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \dfrac{1}{\sin^2 \zeta}$ точка $\zeta = 0$ — полюс второго порядка. Поэтому точка $z = \infty$ — полюс второго порядка для функции $f(z)$.

4. Существенно особая точка

Конечная или бесконечно удаленная точка $z_0 = \infty$ является существенно особой для функции $f(z)$, если не существует предела этой функции в точке z_0.

Пример 6. Показать, что точка $z = 0$ является существенно особой для функции $f(z)$, если:

1) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$; 2) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$.

1) Пусть $z = x$, тогда $f(z) = e^{\frac{1}{x^2}} \to +\infty$ при $z \to 0$. А если $z = iy$, то $f(z) = e^{-\frac{1}{y^2}} \to 0$ при $z \to 0$. Поэтому функция $f(z)$ не имеет предела в точке $z = 0$ и $z = 0$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

2) Функция $\sin \dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$. Поэтому $z = 0$ — существенно особая точка функции $\sin \dfrac{1}{z}$.

Пример 7. Покажем, что точка $z = \infty$ является существенно особой для функций e^z, $\sin z$, $\cos z$.

1) Если $z = x > 0$ и $x \to +\infty$, то $e^x \to +\infty$, а если $z = x < 0$ и $x \to -\infty$, то $e^x \to 0$. Следовательно, $z = \infty$ — существенно особая точка функции e^z.

2) Так как функции $\sin x$ и $\cos x$ не имеют предела при $x \to \infty$, то $z = \infty$ — существенно особая точка функций $\sin z$ и $\cos z$.

Пример 8. Пусть $z = a$ — полюс функции $f(z)$. Тогда для функции $g(z) = e^{f(z)}$ точка $z = a$ является существенно особой.

Пусть m — порядок полюса $z = a$ функции $f(z)$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$f(z) \sim A(z-a)^{-m}, \quad A \neq 0, \quad z \to a.$$

Полагая $A = |A|e^{i\alpha}$, $z - a = re^{i\varphi}$, получаем

$$f(z) \sim |A|r^{-m}e^{i(\alpha - m\varphi)}. \tag{8}$$

Рассмотрим луч l_1: $z - a = re^{i\varphi_1}$, где $\varphi_1 = \dfrac{\alpha}{m}$, тогда из (8) следует, что

$$f(z) \sim |A|r^{-m}, \quad r \to 0.$$

Если $z \in l_1$ и $z \to a$ $(r \to 0)$, то $f(z) \to +\infty$ и $g(z) \to +\infty$. Если l_2 — луч: $z - a = re^{i\varphi_2}$, где $\varphi_2 = \dfrac{\alpha + \pi}{m}$, то $f(z) \sim -|A|r^{-m}$, $r \to 0$, и $f(z) \to -\infty$ при $z \to a$ $(r \to 0)$, а $g(z) \to 0$. Следовательно, функция $g(z)$ не имеет предела при $z \to a$, т. е. $z = a$ — существенно особая точка для $g(z)$.

Замечание 4. Аналогичное утверждение справедливо и для функций $\sin f(z)$, $\cos f(z)$, $\operatorname{sh} f(z)$, $\operatorname{ch} f(z)$: для этих функций точка $z = a$ является существенно особой, если $z = a$ — полюс функции $f(z)$.

Например, если $f(z) = \operatorname{sh}\dfrac{1}{\cos z}$, то все нули функции $\cos z$, т. е. точки $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы функции $\dfrac{1}{\cos z}$ и существенно особые для $f(z)$.

Пример 9. Найдем особые точки функций 1) $f(z) = e^{\frac{1}{\cos z}}$; 2) $f(z) = e^{\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}}$.

1) Нули функции $\cos z$, т. е. точки $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, — полюсы функции $\dfrac{1}{\cos z}$ и существенно особые для $f(z)$.

2) Нули функции $\sin\dfrac{1}{z}$, т. е. точки $z_k = \dfrac{1}{\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, — полюсы функции $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ и существенно особые для $f(z)$.

Пример 10. Найдем особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{tg} z - i}\,.$$

Найдем корни уравнения $\operatorname{tg} z = i$, т. е. уравнения

$$g(z) = \operatorname{tg} z - i = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} - i = \frac{2e^{iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = 0.$$

Так как $e^{iz} \neq 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то особыми точками функции $f(z)$ могут быть корни уравнения $e^{iz} + e^{iz} = 0$, т. е. уравнения $\cos z = 0$, откуда $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Эти точки не являются особыми (они являются нулями функции $f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$).

Точка $z = \infty$ является изолированной и

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{2e^{iz}} = \frac{i}{2}\,(1 + e^{-2iz}).$$

Отсюда следует, что $z = \infty$ — существенно особая для функции $f(z)$.

5. Исследование особых точек с помощью рядов Лорана

Пусть точка $z_0 \neq \infty$ является изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, т. е. функция $f(z)$ регулярна в некотором кольце $K : 0 < |z - z_0| < R$, $R > 0$. Тогда в этом кольце

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{9}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \tag{10}$$

окружность $C_\rho : |\zeta - z_0| = \rho$, $0 < \rho < R$, ориентирована против часовой стрелки, n — целое число.

Определение 3. *Ряды*

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n, \tag{11}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{12}$$

называются соответственно главной частью и правильной частью (или регулярной частью) ряда Лорана (9).

Отметим, что главная часть (11) состоит из тех членов ряда (9), каждый из которых стремится к бесконечности при $z \to z_0$.

Лемма 1. *Для того чтобы изолированная особая точка* $z_0 \neq \infty$ *функции* $f(z)$ *была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты главной части ряда* (9) *были равны нулю, т. е.* $f_1(z) \equiv 0,\ z \in K$.

○ Достаточность. Если $f_1(z) \equiv 0$, $z \in K$, то ряд (9) является рядом Тейлора (11) при $|z| < R$. Поэтому $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$, т. е. z_0 — устранимая (регулярная) точка функции $f(z)$.

Необходимость. Пусть z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$, т. е. существует $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \neq \infty$. Тогда эта функция ограничена в кольце $0 < |z - z_0| < R_1 < R$, т.е. $|f(z)| \leqslant M$. Оценим интеграл (10) при $\rho < R_1$:

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

Отсюда следует, что если $n < 0$, то $c_n \to 0$ при $\rho \to 0$. Но интеграл (10) не зависит от ρ, поэтому $c_n = 0$ при $n = -1, -2, \ldots$. ●

Замечание 5. В лемме 1 доказано, что если функция $f(z)$ регулярна и ограничена в проколотой окрестности точки z_0, то z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$.

Лемма 2. *Для того чтобы изолированная особая точка* $z_0 \neq \infty$ *была полюсом функции* $f(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы в главной части* (11) *было конечное (не равное нулю) число коэффициентов, не равных нулю.*

○ Достаточность. Пусть в кольце K

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots,$$

где $c_{-m} \neq 0$, m — натуральное число. Тогда

$$f(z) = \frac{c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \ldots}{(z - z_0)^m} = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m},$$

где функция $h(z)$ регулярна в точке z_0 и $h(z_0) = c_{-m} \neq 0$, т. е. z_0 — полюс функции $f(z)$ порядка m (п. 3).

Необходимость. Пусть z_0 — полюс функции $f(z)$ порядка m, т. е. в кольце K

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m},$$

где функция $h(z)$ регулярна в точке z_0 и $h(z_0) \neq 0$. Тогда $h(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots$, $c_0 = h(z_0) \neq 0$ и поэтому

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-z_0)^m} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots . \quad \bullet$$

Следствие 2. *Из лемм 1, 2 по принципу исключенного третьего следует, что для того чтобы точка $z_0 \neq \infty$ была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана* (9) *содержала бесконечное число коэффициентов, не равных нулю.*

Пример 11. Покажем, что точка $z = 0$ является существенно особой для функции $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

Эта функция регулярна в кольце $0 < |z| < \infty$ и в этом кольце

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n}.$$

Главная часть этого ряда Лорана $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)! z^n}$ содержит бесконечное число членов, не равных нулю.

Пример 12. Покажем, что точка $z = -1$ является существенно особой для функции $f(z) = \cos \dfrac{z}{z+1}$.

В кольце $|z+1| > 0$ получаем

$$f(z) = \cos\left(1 - \frac{1}{z+1}\right) = \cos 1 \cdot \cos \frac{1}{z+1} + \sin 1 \cdot \sin \frac{1}{z+1} =$$
$$= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}} + \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n+1}}.$$

Правильная часть этого ряда Лорана равна $\cos 1$, а главная часть ряда содержит бесконечное число членов, не равных нулю.

6. Ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$

В пп. 2–5 предполагалось, что $z_0 \neq \infty$. Теперь рассмотрим случай, когда точка $z_0 = \infty$ является изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, т. е. функция $f(z)$ регулярна в некотором кольце $K : R < |z| < \infty$, $R > 0$.

Так же, как и в теореме 1 (§ 15), доказывается, что в кольце K

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \tag{13}$$

где

$$c_n = \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta, \tag{14}$$

окружность $C_\rho : |\zeta| = \rho$, $R < \rho < \infty$, ориентирована против часовой стрелки, n — целое число. Ряд (13) называют *рядом Лорана* функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ и считают, что ряд (13) сходится в кольце K, если в этом кольце сходятся ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n, \tag{15}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \tag{16}$$

Так же, как и в теореме 2 (§ 15), доказывается, что разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана (13) *единственно*, т. е. его коэффициенты однозначно находятся по формулам (14).

Ряды (15), (16) называют соответственно правильной и главной частями ряда (28).

Отметим, что главная часть (16) состоит из тех членов ряда (13), каждый из которых стремится к бесконечности при $z \to \infty$. Поэтому для точки $z = \infty$, как и для точки $z \neq \infty$, справедливы леммы 1, 2 и следствие из них.

Пример 13. Покажем, что точка $z = \infty$ является полюсом второго порядка функции $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

Эта функция регулярна в кольце $0 < |z| < \infty$ и в этом кольце

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = z^2 + z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^{n+2}}.$$

Так как главная часть этого ряда Лорана равна $z^2 + z$, то $f(z) \sim z^2$ при $z \to \infty$.

Теорема 2 (***Сохоцкого***). *Если $z = a$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ существует последовательность точек $\{z_n\}$ таких, что*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = A. \tag{17}$$

Доказательство. Докажем теорему для случая $a \neq \infty$, $A \neq \infty$. Если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, z(\delta) : 0 < |z(\delta) - a| < \delta, \quad |f(z(\delta)) - A| < \varepsilon, \tag{18}$$

то утверждение (17) справедливо: достаточно взять $\varepsilon = \varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$, $\delta = \delta_n = \dfrac{1}{n}$, тогда $z_n = z\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Предположим, что (18) не выполняется. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \exists\, \delta_0 > 0 : \ \forall\, z : \ 0 < |z - a| < \delta_0 \to |f(z) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{19}$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}\,. \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\forall\, z : \ 0 < |z - a| < \delta_0 \to |g(z)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0}\,. \tag{21}$$

Так как $z = a$ — изолированная особая точка однозначного характера для функции $f(z)$, то эта функция регулярна в некоторой проколотой окрестности точки a, т. е. $\forall\, z$: $0 < |z - a| < \delta_1$.

Кроме того, $f(z) - A \neq 0$ в силу (19) для $\forall\, z$: $0 < |z - a| < \delta_2$, где $\delta_2 = \min(\delta_0, \delta_1)$. Поэтому функция $g(z)$ регулярна в проколотой δ_2-окрестности точки a, т. е. $z = a$ — изолированная особая точка для $g(z)$, и функция $g(z)$ ограничена (условие (21)) в этой окрестности.

По лемме 1 (см. замечание 5) $z = a$ — устранимая особая точка функции $g(z)$ и существует конечный

$$\lim_{z \to a} g(z) = B. \tag{22}$$

Из равенства (20) находим

$$f(z) = A + \frac{1}{g(z)}\,, \quad \forall\, z : \ 0 < |z - a| < \delta_2. \tag{23}$$

Но тогда из (22) и (23) следует, что функция $f(z)$ имеет конечный (при $B \neq 0$) и бесконечный (при $B = 0$) предел. Это означает, что a либо устранимая особая точка, либо полюс для функции $f(z)$, что противоречит условиям теоремы.

Следовательно, предположение (19) является неверным и справедливо утверждение (18), из которого следует (17). ●

Теорема 3 (***Пикара***). *В любой окрестности существенно особой точки функция принимает, и притом бесконечное число раз, любое значение, кроме, быть может, одного* [6].

Пример 14. Точка $z = \infty$ является существенно особой для функций e^z, $\sin z$, $\cos z$.

В области $|z| < \infty$ уравнение $e^z = A$ имеет бесконечное число корней для любого $A \neq 0$, а уравнения $\sin z = A$, $\cos z = A$ имеют бесконечное число корней для любого комплексного числа A (§ 4).

7. Теорема Лиувилля

Определение 4. *Функция $f(z)$ называется целой, если она регулярна во всей комплексной плоскости, т. е. при $|z| < \infty$.*

Например, многочлен, функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ являются целыми.

Теорема 4 (*Лиувилля для целой функции*). *Пусть целая функция $f(z)$ при $R < |z| < \infty$, $R > 0$, удовлетворяет неравенству*

$$|f(z)| \leqslant M|z|^m, \tag{24}$$

где $M > 0$, m — целое число, $m \geqslant 0$. Тогда $f(z)$ — многочлен степени не выше m.

○ Так как $f(z)$ целая, т. е. регулярная при $|z| < \infty$ функция, она представляется рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{25}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta, \tag{26}$$

окружность $C_\rho : |\zeta| = \rho$, $\rho > 0$, ориентирована против часовой стрелки.

Оценим интеграл (26) при $\rho > R$ с помощью неравенства (24):

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M\rho^m}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = M\rho^{m-n},$$

откуда следует, что $c_n \to 0$ при $\rho \to \infty$, если $m - n < 0$. Но интеграл (26) не зависит от ρ, поэтому $c_n = 0$ при $n > m$, т. е. ряд (25) является многочленом степени не выше m. ●

Следствие 3. *Целая ограниченная во всей комплексной плоскости функция $f(z)$ является постоянной: $f(z) \equiv \mathrm{const}$.*

Теорема 5 (*основная теорема алгебры*). *Многочлен $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$, где $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$, имеет хотя бы один нуль.*

○ Предположим, что многочлен $P_n(z)$ не имеет нулей. Тогда функция $g(z) = \dfrac{1}{P_n(z)}$ является целой и ограниченной во всей плоскости, т. е. $g(z) \equiv \mathrm{const}$, что противоречит условию теоремы. ●

Пример 15. Покажем, что если функция $f(z)$ регулярна в расширенной комплексной плоскости, за исключением одного полюса первого порядка, то она является *дробно-линейной*:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{27}$$

где a, b, c, d — комплексные числа, $ad - bc \neq 0$, в частности *линейной*, если $c = 0$. Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что функция (27) не является тождественной константой.

Пусть $z_0 \neq \infty$ — полюс $f(z)$ первого порядка. Тогда в проколотой окрестности точки z_0 функция $f(z) = \dfrac{A}{z - z_0}$. Поэтому функция $g(z) = f(z) - \dfrac{A}{z - z_0}$ регулярна и ограничена во всей расширенной комплексной плоскости, т. е. $g(z) \equiv B = \mathrm{const}$, откуда

$$f(z) = B + \frac{A}{z - z_0} = \frac{Bz - Bz_0 + A}{z - z_0}.$$

Если полюсом первого порядка функции $f(z)$ является точка $z = \infty$, то в проколотой окрестности этой точки $f(z) = Az$. Поэтому функция $g(z) = f(z) - Az$ регулярна и ограничена в расширенной комплексной плоскости, т. е. $g(z) \equiv B = \mathrm{const}$, откуда $f(z) = Az + B$.

Аналогично можно доказать, что если функция $f(z)$ регулярна в расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа полюсов, то $f(z)$ является рациональной функцией.

Теорема 6 (*Лиувилля для гармонической функции*). *Пусть гармоническая во всей комплексной плоскости функция $u(x, y)$ ограничена сверху или снизу. Тогда $u(x, y) \equiv \mathrm{const}$.*

○ Для гармонической во всей плоскости функции $u(x, y)$ существует регулярная во всей комплексной плоскости функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (§ 12). Поэтому функция $g(z) = e^{f(z)}$ также регулярна во всей плоскости, т. е. целая.

Если $u(x, y) < M$, то $|g(z)| = e^{u(x, y)} < e^M$. Следовательно, $g(z) \equiv \mathrm{const}$, $u(x, y) \equiv \mathrm{const}$. Если $u(x, y) > M$, то функция $-u(x, y)$ является гармонической и $-u(x, y) < -M$.

По доказанному $u(x, y) \equiv \mathrm{const}$. ●

Глава 3

МНОГОЗНАЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 17. Понятие аналитической функции и ее регулярной ветви

1. Аналитическое продолжение вдоль цепочки областей

Рассмотрим некоторые способы аналитического продолжения заданных функций.

Определение 1. *Пусть функция $g(z)$ определена на множестве E, функция $f(z)$ регулярна в области D, содержащей множество E, и*

$$f(z) = g(z) \quad \textit{при} \quad z \in E. \tag{1}$$

Тогда функция $f(z)$ называется аналитическим продолжением функции $g(z)$ с множества E в область D.

Если для заданной функции $g(z)$, $z \in E$, существует ее аналитическое продолжение в область $D \supset E$, т. е. регулярная в области D функция $f(z)$, удовлетворяющая условию (1), то говорят, что «функцию $g(z)$ можно аналитически продолжить в область D», или «функция $g(z)$ допускает аналитическое продолжение в область D».

Такое аналитическое продолжение может оказаться не единственным, например, если множество E состоит из конечного числа точек, или если множество E состоит из бесконечного числа точек, но не имеет предельных точек внутри области D.

Из теоремы единственности следует, что:

если множество E состоит из бесконечного числа различных точек и имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую области $D \supset E$, то аналитическое продолжение с множества E в область D единственно.

Пример. Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ являются единственными аналитическими продолжениями функций соответственно e^x, $\sin x$, $\cos x$ с действительной оси во всю комплексную плоскость.

Функция $\operatorname{tg} z$ является единственным аналитическим продолжением функции $\operatorname{tg} x$ с интервала $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ во всю комплексную плоскость с выколотыми точками $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Функция $\operatorname{ctg} z$ является единственным аналитическим продолжением функции $\operatorname{ctg} x$ с интервала $0 < x < \pi$ во всю комплексную плоскость с выколотыми точками $z = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Определение 2. *Пусть даны две области D_0 и D_1 такие, что существует область D_{01}, принадлежащая обеим областям D_0 и D_1 (рис. 40).*

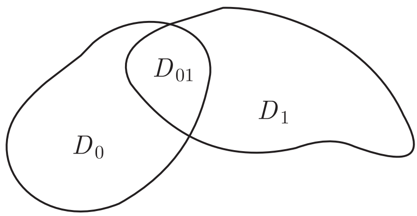

Рис. 40

Пусть функции $f_0(z)$, $f_1(z)$ регулярны в областях D_0, D_1 соответственно и совпадают в области D_{01}, т. е.

$$f_1(z) = f_0(z), \quad z \in D_{01}.$$

Тогда функция $f_1(z)$ называется непосредственным аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ из области D_0 в область D_1 через область D_{01}.

Это продолжение единственно по теореме единственности.

Отметим, что в рассмотренной ситуации может оказаться, что области D_0 и D_1 имеют кроме области D_{01} и другие общие точки (рис. 41), в которых значения функций $f_0(z)$ и $f_1(z)$ могут быть неравными. Но если $f_0(z) = f_1(z)$ во всех общих точках областей D_0 и D_1, то функция

$$F(z) = \begin{cases} f_0(z), & \text{если} \quad z \in D_0, \\ f_1(z), & \text{если} \quad z \in D_1, \end{cases}$$

регулярна в области $D = D_0 \cup D_1$ и является аналитическим продолжением функции $f_0(z)$ из области D_0 в область D в смысле определения 1.

Пусть теперь дана цепочка областей $D_0, D_1, \ldots, D_n$ (рис. 42). Предположим, что существуют регулярные функции $f_j(z)$, $z \in D_j$,

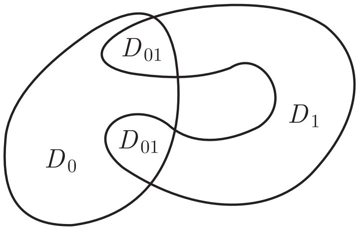

Рис. 41

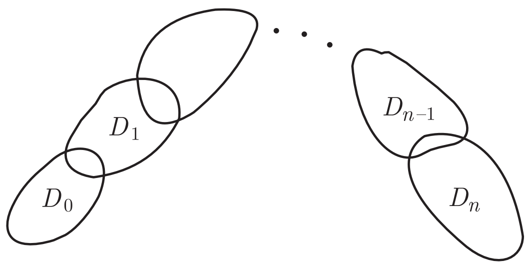

Рис. 42

$0 \leqslant j \leqslant n$, такие, что каждая последующая функция $f_{j+1}(z)$ является непосредственным аналитическим продолжением предыдущей функции $f_j(z)$ из области D_j в область D_{j+1}, $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Тогда функция $f_n(z)$ называется *аналитическим продолжением функции* $f_0(z)$ *вдоль цепочки областей* $D_0, D_1, \ldots, D_n$. Это продолжение единственно.

Полученный набор функций $\{f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)\}$ также называют *аналитическим продолжением функции* $f_0(z)$ *вдоль цепочки областей* $D_0, D_1, \ldots, D_n$, а функцию $f_n(z)$ называют *результатом аналитического продолжения функции* $f_0(z)$ *из области* D_0 *в область* D_n *вдоль цепочки областей* $D_0, D_1, \ldots, D_n$.

Регулярную в области D_j функцию $f_j(z)$ называют *элементом*. Пусть задан элемент $f_0(z)$, $z \in D_0$. Если существует аналитическое продолжение этого (исходного) элемента вдоль цепочки областей $D_0, D_1, \ldots, D_n$, то эту цепочку называют *допустимой* для элемента $f_0(z)$, $z \in D_0$.

Аналитической функцией (полной аналитической функцией) называется множество элементов, полученных из исходного элемента продолжением по всем допустимым для него цепочкам областей.

Отметим, что в результате аналитического продолжения исходного элемента $f_0(z)$, $z \in D_0$, вдоль двух различных допустимых цепочек областей в одну и ту же область D_n могут получиться различные элементы. Таким образом, аналитическая функция может оказаться *неоднозначной* как функция от z. Неоднозначность может получиться уже на первом шаге аналитического продолжения (рис. 40).

Во всех случаях аналитическую функцию с исходным элементом $f_0(z)$, $z \in D_0$, будем обозначать $F(z)$. Таким образом, аналитическая функция $F(z)$ — это обобщение понятия регулярной функции.

Аналитическая функция $F(z)$ «составлена» или «склеена» из однозначных элементов — регулярных функций.

Описанный общий подход к понятию аналитической функции оказывается неудобным при изучении конкретных функций. Не теряя общности, можно ограничиться рассмотрением цепочек областей, состоящих из кругов с центрами на заданной кривой, т. е. аналитическим продолжением вдоль кривых.

2. Аналитическое продолжение вдоль кривой

Элементом в точке z_0 будем называть функцию $f_0(z)$, регулярную в некоторой окрестности точки z_0, т. е. в круге $K_0 : |z - z_0| < R_0$, $R_0 > 0$.

Определение 3. *Пусть задана кривая γ с началом в точке a и концом в точке b (рис. 43). И пусть в начальной точке $z_0 = a$ задан элемент $f_0(z)$, т. е. регулярная в круге $K_0 : |z - z_0| < R_0$ функция $f_0(z)$.*

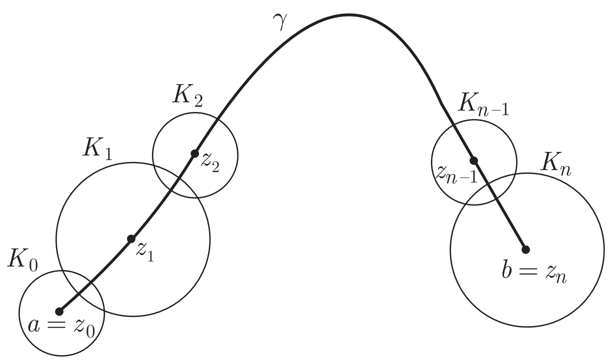

Рис. 43

Множество элементов $f_1(z)$, $z \in K_j : |z - z_j| < R_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, называется аналитическим продолжением элемента $f_0(z)$ вдоль кривой γ, если:

1) точки $a = z_0$, $z_1, z_2, \ldots, z_n = b$ принадлежат γ и занумерованы в порядке ориентации кривой γ;

2) пересечение $K_{j-1} \cap K_j$ не пусто и $f_{j-1}(z) \equiv f_j(z)$ при $z \in K_{j-1} \cap K_j$ для $j = 1, 2, \ldots, n$;

3) дуга кривой γ от точки z_{j-1} до z_j принадлежит объединению $K_{j-1} \cup K_j$ для $j = 0, 1, \ldots, n$.

При этом элемент $f_n(z)$ называется результатом аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ из точки a в точку b вдоль кривой γ.

Если для заданного элемента $f_0(z)$ в начальной точке кривой γ существует аналитическое продолжение вдоль γ, то будем говорить, что «элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой γ» или «элемент $f_0(z)$ допускает аналитическое продолжение вдоль кривой γ», а кривую γ будем называть *допустимой* для элемента $f_0(z)$.

Заметим, что аналитическое продолжение элемента $f_0(z)$ вдоль допустимой кривой γ определяет на кривой γ непрерывную функцию $F_\gamma(z)$ (значениями элементов $f_j(z)$), а в каждой точке $\zeta \in \gamma$ — элемент $f_\zeta(z)$ такой, что

$$f_\zeta(z) = F_\gamma(z), \quad z \in \gamma_\zeta, \tag{2}$$

где γ_ζ — дуга кривой γ, лежащая в некоторой окрестности точки ζ.

Можно доказать обратное утверждение: если на кривой γ задана непрерывная функция $F_\zeta(z)$ и в каждой точке $\zeta \in \gamma$ задан элемент $f_\zeta(z)$ такой, что выполняется условие (2), то из множества этих элементов $f_\zeta(z)$ можно выбрать конечное число элементов $f_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих определению 3.

Таким образом, эквивалентным определению 3 является

Определение 4. *Пусть в начальной точке z_0 кривой γ задан элемент $f_0(z)$. Множество элементов $f_\zeta(z)$, заданных во всех точках $\zeta \in \gamma$, называется аналитическим продолжением элемента $f_0(z)$ вдоль кривой γ, если существует такая непрерывная на кривой γ функция $F_\gamma(z)$, что выполняется условие (2).*

Теорема 1. *Аналитическое продолжение данного элемента вдоль допустимой для него кривой единственно, т. е. определяет на этой кривой единственную непрерывную функцию, а в каждой точке этой кривой — единственный элемент, удовлетворяющий условию* (2).

○ Пусть сначала γ — простая незамкнутая кривая (рис. 43). И пусть два множества элементов $f_j(z)$, $z \in K_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $\widetilde{f}_j(z)$, $z \in \widetilde{K}_j$, $j = 1, 2, \ldots, \widetilde{n}$, являются аналитическими продолжениями одного и того же элемента $f_0(z)$, $z \in K_0$, заданного в начальной точке z_0 кривой γ. Тогда существует такая область D, содержащая кривую γ (окрестность кривой γ), которая принадлежит как объединению кругов K_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, так и объединению кругов $\widetilde{K}_j$, $j = 0, 1, \ldots, \widetilde{n}$. В области D функции $f_j(z)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, определяют регулярную функцию $f(z)$, а функции $\widetilde{f}_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, \widetilde{n}$ — регулярную функцию $\widetilde{f}(z)$. По условию в некоторой окрестности точки z_0 эти функции совпадают: $f(z) \equiv \widetilde{f}(z) = f_0(z)$. По теореме единственности функции

$f(z)$ и $\widetilde{f}(z)$ совпадают во всей области D, в частности, на кривой γ и в окрестности каждой точки $\zeta \in \gamma$.

В общем случае кривую γ нужно разбить на конечное число простых незамкнутых дуг и поочередно для каждой дуги провести предыдущие рассуждения. ●

Определение 5. *Аналитической функцией с исходным элементом $f_0(z)$ (порожденной элементом $f_0(z)$) называется множество элементов, полученных в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ вдоль всех допустимых для него кривых.*

Аналитическую функцию с исходным элементом $f_0(z)$ будем обозначать $F(z)$, хотя эта функция может быть неоднозначной как функция точки плоскости z. Значениями функции $F(z)$ в точке z будем называть значения всех ее элементов в этой точке.

3. Суперпозиция аналитических функций

Определение 6. *Пусть $F(z)$ — аналитическая функция с исходным элементом $f_0(z)$, заданным в точке z_0, и пусть $H(\zeta)$ — аналитическая функция с исходным элементом $h_0(\zeta)$, заданная в точке $\zeta_0 = f_0(z_0)$. Тогда функция $g_0(z) = h_0(f_0(z))$ регулярна в точке z_0 как суперпозиция регулярных функций, т. е. является элементом в точке z_0. Аналитическая функция с исходным элементом $g_0(z)$ называется суперпозицией аналитических функций $F(z)$ и $H(z)$ и обозначается $G(z) = H(F(z))$.*

4. Определение аналитической в области функции

Определение 7. *Пусть заданы область D и элемент $f_0(z)$ в точке $z_0 \in D$ такой, что его можно аналитически продолжить по любой кривой с началом в точке z_0, лежащей в области D, т. е. любая такая кривая является допустимой для элемента $f_0(z)$. Аналитической в области D функцией с исходным элементом $f_0(z)$ (порожденной элементом $f_0(z)$) называется множество элементов, полученных в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ по всем кривым с началом в точке z_0, лежащим в области D.*

Аналитическую в области функцию будем обозначать $f(z)$, $F(z)$ и т. п., хотя эта функция может быть многозначной как функция точки плоскости z.

Замечание. Для исследования аналитической функции $F(z)$, заданной исходным элементом $f_0(z)$, обычно выясняют:

1) какие кривые являются допустимыми для элемента $f_0(z)$;
2) как находить значения функции $F(z)$, т. е. значения ее элементов;
3) как находить производные ее элементов;
4) как представлять ее элементы рядами Тейлора или Лорана.

5. Аналитические и регулярные ветви полных аналитических функций

Определение 8. *Аналитической ветвью полной аналитической функции $F(z)$ в области D называется аналитическая в области D функция $f(z)$ такая, что некоторый элемент функции $f(z)$ является одним из элементов функции $F(z)$.*

Если для заданной аналитической функции $F(z)$ существует аналитическая ветвь в заданной области D, то говорят, что «в области D можно выделить аналитическую ветвь функции $F(z)$» или «функция $F(z)$ допускает выделение аналитической ветви в области D».

Поясним более подробно определение 8. Пусть задана полная аналитическая функция $F(z)$ своим исходным элементом $f_0(z)$ в точке z_0. И пусть существует точка z_1, принадлежащая заданной области D, такая, что элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по некоторой кривой в точку z_1 и в результате в точке z_1 получится элемент $f_1(z)$ функции $F(z)$.

Предположим, что элемент $f_1(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой, лежащей в области D, с началом в точке $z_1 \in D$, т. е. элемент $f_1(z)$ порождает аналитическую в области D функцию $f(z)$. Тогда каждый элемент $f_2(z)$ функции $f(z)$ в каждой точке $z_0 \in D$ является элементом функции $F(z)$. Таким образом, $f(z)$ — это множество элементов функции $F(z)$ таких, что они получаются в результате аналитического продолжения элемента $f_1(z)$ из точки z_1 по всем кривым, лежащим в области D. В этом случае функцию $f(z)$ называют аналитической ветвью $F(z)$ в области D.

При этом может оказаться, что функция $f(z)$ однозначна и, следовательно, регулярна в области D, так как в окрестности каждой точки $z_2 \in D$ функция $f(z)$ является одним из элементов функции $F(z)$ и поэтому функция $f(z)$ регулярна в точке z_2. Тогда функцию $f(z)$ называют *регулярной ветвью функции $F(z)$ в области D*.

Определение регулярной ветви многозначной функции $F(z)$ (заданной своими значениями и не обязательно аналитической) можно сформулировать следующим образом.

Определение 9. *Регулярной ветвью многозначной функции $F(z)$ в области D называется такая регулярная в этой области функция $f(z)$, что в каждой точке $z \in D$ значение $f(z)$ равно одному из значений функции $F(z)$.*

Для доказательства возможности выделения в области D регулярной ветви аналитической функции $F(z)$ нужно доказать, что в некоторой точке $z_0 \in D$ существует такой элемент $f_0(z)$ функции $F(z)$, что:

1) элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой с началом в точке z_0, лежащей в области D.
2) аналитическая в области D функция $f(z)$, порожденная элементом $f_0(z)$, является однозначной и, следовательно, регулярной в области D.

В § 13 было показано, что можно выделить регулярные ветви многозначных функций $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt[n]{z}$ в плоскости с разрезом $[0, +\infty)$, используя понятие обратной функции.

В общем случае при решении вопроса о выделении регулярных ветвей может оказаться полезной следующая теорема.

Теорема 2 (*о монодромии*). *Пусть элемент $f_0(z)$, заданный в точке $z_0 \in D$, можно аналитически продолжить по любой кривой с началом в точке z_0 и общим концом в точке $z_1 \in D$, и пусть кривые γ_1 и γ_2, лежащие в области D, можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области D. Тогда в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ из точки z_0 в точку z_1 вдоль кривых γ_1 и γ_2 в точке z_1 получается один и тот же элемент.*

Доказательство этой теоремы см. в [8].

Если D — односвязная область, то любые две кривые с общим началом и общим концом можно непрерывно деформировать друг в друга, оставаясь в области D.

Следствие. *Аналитическая в односвязной области функция однозначна и, следовательно, регулярна.*

Теорема о монодромии не позволяет решить вопрос о выделении регулярных ветвей функции $F(z)$, аналитической в неодносвязной области D.

Эту проблему можно решать так. Пусть $f_0(z)$ — какой-нибудь элемент функции $F(z)$ в точке $z_0 \in D$ и пусть $\widetilde{\gamma}$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, лежащая в области D, z_0 — ее начало. Здесь и в дальнейшем такую кривую будем называть *простым контуром.*

Аналитически продолжив элемент $f_0(z)$ по кривой $\widetilde{\gamma}$, найдем элемент $g_0(z)$ в точке z_0. Условимся коротко эту процедуру записывать так:

$$f_0(z) \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} g_0(z).$$

Теорема 3. *Если при обходе по любому контуру $\widetilde{\gamma} \in D$*

$$f_0(z) \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} f_0(z),$$

то элемент $f_0(z)$ порождает регулярную в области D ветвь функции $F(z)$. Иными словами, в области D существует регулярная функция $F_0(z)$ такая, что

$$F_0(z) \equiv f_0(z)$$

в окрестности точки z_0.

С интуитивной точки зрения эта теорема вполне очевидна. Строгое доказательство теоремы 2 содержится, например, в [10]. Если же существует контур $\widetilde{\gamma} \subset D$ такой, что

$$f_0(z) \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} g_0(z), \quad \text{где} \quad g_0(z) \neq f_0(z),$$

то функция $F(z)$ не допускает выделение регулярных ветвей в области D. В дальнейшем теорема 2 будет использована для исследования логарифмической и степенной функций.

§ 18. Логарифмическая функция

Многозначная логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$ была определена в § 13 как обратная к показательной формулой

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $\arg z$ — одно из значений аргумента z, $z \neq 0$. Было установлено, что в плоскости с разрезом $[0, +\infty)$ функция $\operatorname{Ln} z$ имеет бесконечное множество регулярных ветвей.

Функцию $\operatorname{Ln} z$ можно ввести как аналитическое продолжение функции $\ln x$, $x > 0$, используя теорему единственности.

1. Определение логарифмической функции

В курсе математического анализа логарифмическая функция $\ln x$ определяется при $x > 0$ и изучаются ее свойства. Естественно определить логарифмическую функцию для комплексных значений z как аналитическое продолжение функции $\ln x$. Рассмотрим наиболее простой способ осуществления такого аналитического продолжения.

В курсе математического анализа доказывается, что функция $\ln x$ на интервале $0 < x < 2$ представляется рядом Тейлора

$$\ln x = \ln[1 + (x - 1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x - 1)^n,$$

сходящимся к этой функции на интервале (0, 2).

Этот ряд при комплексных значениях z обозначим $f_0(z)$, т. е.

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z - 1)^n, \quad z \in K_0 : |z - 1| < 1. \tag{1}$$

Ряд (1) сходится в круге K_0, т. е. является элементом в точке $z_0 = 1$, и $f_0(x) = \ln x$ при $0 < x < 2$. Следовательно, функция $f_0(z)$ является аналитическим продолжением (и притом единственным) функции $\ln x$ с интервала $0 < x < 2$ в круг K_0.

Аналитическую функцию с исходным элементом (1) назовем *логарифмической* и обозначим $\operatorname{Ln} z$.

2. Свойства логарифмической функции

Свойство 1. *Элемент* (1) *можно представить интегралом*

$$f_0(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in K_0, \tag{2}$$

по любой кривой γ*, лежащей в круге* K_0.

○ Докажем равенство (2) с помощью теоремы единственности.

1. Функция $f_0(z)$, заданная формулой (1), регулярна в круге K_0.
2. Интеграл, стоящий в правой части равенства (2), не зависит от пути интегрирования γ и является регулярной в круге K_0 функцией, так как подынтегральная функция регулярна в круге K_0.
3. Если $x \in (0, 2)$, то при действительных $\zeta = t$ интеграл (2) равен $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$.

По теореме единственности интеграл (2) совпадает с функцией (1) во всем круге K_0, т. е. верна формула (2). ●

Свойство 2. *Элемент* (1) *можно аналитически продолжить по любой кривой* γ *с началом в точке* $z = 1$*, не проходящей через точку* $z = 0$*, и это продолжение определяет на кривой* γ *непрерывную* *функцию*

$$F_\gamma(z) = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \gamma, \tag{3}$$

а в каждой точке $z_1 \in \gamma$ — *элемент*

$$f_1(z) = \int\limits_1^{z_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{z_1}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in K_1 : |z - z_1| < R \leqslant |z_1|, \tag{4}$$

где правая часть формулы (3) и первое слагаемое в правой части равенства (4) — это интегралы по кривой γ*, а второе слагаемое в правой части равенства (4) — это интеграл по любой кривой, лежащей в круге* K_1 *(рис. 44).*

○ Докажем, что элементы (2) удовлетворяют определению 4, § 17.

1. Интеграл (3) является непрерывной функцией на кривой γ как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной на γ функции.
2. Функция (4) является элементом в точке z_1, т. е. регулярной в круге K_1 функцией, так как первый из интегралов в формуле (4) не зависит от z, а второй интеграл не зависит от пути интегрирования и является регулярной в круге K_1 функцией, так как подынтегральная функция регулярна в круге K_1 (рис. 44).

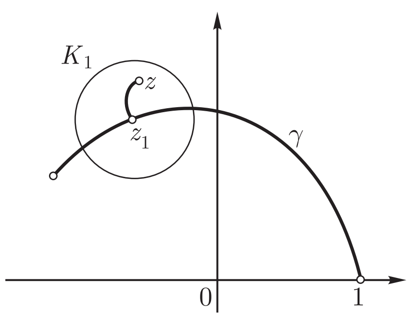

Рис. 44

3. Пусть в формуле (4) точка z принадлежит дуге кривой γ, лежащей в круге K_1. Выберем во втором интеграле (4) путь интегрирования от z_1 до z по кривой γ. Тогда по свойствам интегралов сумма интегралов (4) равна интегралу (3), т. е. $f_1(z) = F_\gamma(z)$, если z принадлежит дуге кривой γ, лежащей в некоторой окрестности точки z_1. ●

Свойство 3. *Все значения функции* $\operatorname{Ln} z$ *в точке* $z \neq 0$ *определяются формулой*

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z, \tag{5}$$

где $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\arg z$ — *одно из значений аргумента числа* z, *т. е.*

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

○ Вычислим первый интеграл в формуле (4), т. е. найдем $f_1(z)$.

Пусть $\zeta(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — параметрическое уравнение кривой γ с началом в точке $z = 1$ и концом в точке z_1. Тогда

$$d\zeta = r'(t)e^{i\varphi(t)}dt + ir(t)\varphi'(t)e^{i\varphi(t)}dt,$$
$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{r'(t)}{r(t)}\,dt + i\varphi'(t)dt,$$

и поэтому

$$f_1(z_1) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{r'(t)}{r(t)}\,dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t)dt = \ln r(\beta) - \ln r(\alpha) + i[\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)].$$

Так как $r(\alpha) = 1$, то полагая $\Delta\varphi = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$, получаем

$$f_1(z_1) = \ln|z_1| + i\Delta_\gamma \arg z, \tag{7}$$

где $\Delta\varphi$ — угол поворота вектора z при движении точки z по кривой γ от точки $z = 1$ до точки z_1. Этот угол называется приращением аргумента z вдоль кривой γ и обозначается $\Delta_\gamma \arg z$ (рис. 45), см. § 6, п. 2.

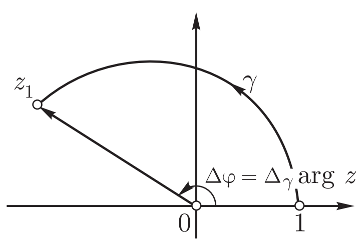

Рис. 45

Свойства приращения аргумента рассмотрены в § 6.

Из формулы (7) следует, что *элемент* $f_0(z)$, заданный формулой (1), *нельзя аналитически продолжить по кривой* γ (с началом в точке $z = 1$), *проходящей через точку* $z = 0$. В самом деле, аналитическое продолжение должно определять на такой кривой γ непрерывную функцию $F_\gamma(z)$, значения которой в точках кривой γ от точки $z=1$ до точки $z=0$ в силу формулы (7) находятся по формуле $F_\gamma(z)=\ln|z|+i\Delta_\gamma \arg z$, но $\ln|z|\to\infty$ при $z\to 0$ и поэтому $F_\gamma(z)\to\infty$ при $z\to 0$, $z\in\gamma$.

Таким образом, *функция* $\operatorname{Ln} z$ — *это множество элементов* (4), где z_1 — любая точка, $z_1\neq 0$, а γ — различные кривые, не проходящие через точку $z=0$ с началом в точке $z=1$ и концом в точке z_1.

Заметим, что в формуле (7) $\Delta\varphi=\varphi$ — одно из значений $\arg z_1$ (рис. 46), причем в зависимости от того, сколько оборотов вокруг точки $z=0$ делает кривая γ (по часовой или против часовой стрелки), φ может быть любым значением $\arg z_1$ (на рис. 46 $\Delta_{\gamma_1}\arg z=\varphi+2\pi$, $\Delta_{\gamma_2}\arg z=\varphi-2\pi$). Следовательно, все значения функции $\operatorname{Ln} z$ в точке $z_1\neq 0$ определяются формулой

$$\operatorname{Ln} z_1=\ln|z_1|+i(\varphi+2\pi k),\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{8}$$

где φ — одно из значений $\arg z_1$.

Так как в формуле (8) $z_1\neq 0$ — любая точка, то, обозначая $z_1=z$, получаем формулу (6), которую кратко можно записать в виде (5). ●

Пример 1. Вычислим по формуле (7) значение $\operatorname{Ln} z$ в заданной точке z_1, полученное в результате аналитического продолжения исходного элемента $f_0(z)$ вдоль заданной кривой γ, находя $\Delta_\gamma \arg z$ геометрически из рисунка.

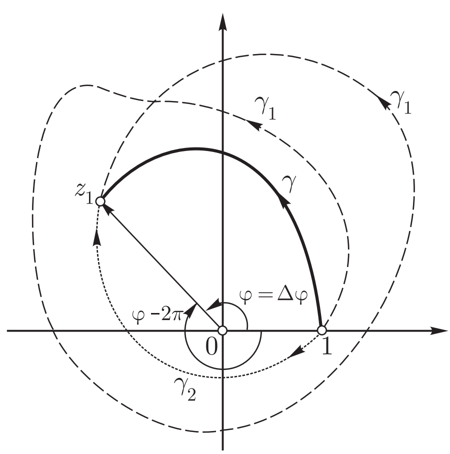

Рис. 46

1. Пусть $z_1 = 2i$, γ — отрезок $[1, 2i]$. Тогда $\operatorname{Ln} 2i = \ln 2 + \dfrac{\pi i}{2}$ (рис. 47).
2. Пусть $z_1 = -1$, γ_+ — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, ориентированная против часовой стрелки. Тогда $\operatorname{Ln}(-1) = \pi i$ (рис. 48).
3. Пусть $z_1 = -1$, γ_- — полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, ориентированная по часовой стрелке. Тогда $\operatorname{Ln}(-1) = -\pi i$ (рис. 48).

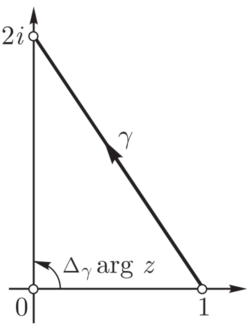

Рис. 47

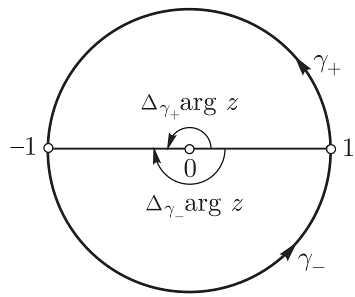

Рис. 48

Пример 2. Найдем по формуле (6) все значения функции $\operatorname{Ln} z$ в заданной точке:

1) $\operatorname{Ln}(-3) = \ln 3 + \pi(1 + 2k)i$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $\operatorname{Ln}(-i) = -\dfrac{\pi i}{2} + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$;

3) $\operatorname{Ln}(-1 + i) = \ln \sqrt{2} + \dfrac{3\pi i}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что функция $\operatorname{Ln} z$ *является обратной к функции* e^z, так как из формулы (5) получается равенство $e^{\operatorname{Ln} z} = z$.

Свойство 4. *Пусть* $f(z)$ — *элемент функции* $\operatorname{Ln} z$ *в точке* $z \neq 0$. *Тогда*

$$f'(z) = \frac{1}{z}. \tag{9}$$

○ Доказано, что функция $\operatorname{Ln} z$ — это множество элементов (4). В формуле (4) первый интеграл не зависит от z, а второй является первообразной функции $\dfrac{1}{z}$ в круге K_1. Следовательно, $f'(z) = \dfrac{1}{z}$. Заменяя здесь $f_1(z)$ на $f(z)$, получаем формулу (9). ●

Свойство 5. *Пусть $f(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$ в точке $z \neq 0$. Тогда этот элемент представляется рядом Тейлора*

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n, \tag{10}$$

сходящимся к функции $f(z)$ в круге $K_0 : |z - z_0| < |z_0|$; все элементы функции $\operatorname{Ln} z$ в точке z_0 имеют вид

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n, \tag{11}$$

где $\operatorname{Ln} z_0$ — все значения функции $\operatorname{Ln} z$ в точке z_0.

○ В формуле (4) первый интеграл равен $f_1(z_1)$. По свойству 4: $f_1'(z) = \dfrac{1}{z}$, откуда $f_1^{(n)}(z_1) = (-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{z_1^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. По формуле Тейлора получаем:

$$f_1(z) = f_1(z_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_1^n}(z - z_1)^n. \tag{12}$$

Этот ряд сходится к функции $f_1(z)$ в круге K_1: $|z - z_1| < |z_1|$, так как функция $f_1(z)$ регулярна в этом круге. Обозначая $f_1(z) = f(z)$, $z_1 = z_0$, из (12) получаем формулу (10).

В формуле (10) число $f(z_0)$ — одно из значений функции $\operatorname{Ln} z$ в точке z_0. Перебирая все значения функции $\operatorname{Ln} z$ в точке z_0, получаем разложения в ряды Тейлора (11) всех элементов функции $\operatorname{Ln} z$ в круге K_0. ●

Замечание 1. В формуле (11) ряд под знаком суммы один и тот же для всех значений $\operatorname{Ln} z_0$. Следовательно, *любой элемент функции $\operatorname{Ln} z$ в любой точке $z_0 \neq 0$ полностью определяется заданием своего значения в этой точке* (формула (10)).

В общем случае аналитическая функция может не обладать таким свойством.

Замечание 2. Так как значения функции $\operatorname{Ln} z$ в одной и той же точке $z_0 \neq 0$ отличаются друг от друга на $2\pi k i$, где k — целое число (формула (6)), то из формулы (11) следует, что *если $f(z)$ и $\widetilde{f}(z)$ — элементы функции $\operatorname{Ln} z$ в одной и той же точке $z_0 \neq 0$, то*

$$f(z) - \widetilde{f}(z) \equiv 2\pi k i, \quad |z - z_0| < |z_0|,$$

где k — некоторое целое число.

Замечание 3. Формулу (11) можно не запоминать, а получить ее формально такими же преобразованиями, как если бы z и z_0 были действительными:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}\left[z_0 + (z - z_0)\right] = \operatorname{Ln}\left[z_0\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)\right] =$$
$$= \operatorname{Ln} z_0 + \operatorname{Ln}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right) = \operatorname{Ln} z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}\,(z - z_0)^n.$$

Пример 3. Найдем разложения в ряды Тейлора всех элементов функции $\operatorname{Ln} z$ в круге $|z + 3i| < 3$ по степеням $(z + 3i)$.

Получаем:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}\left[-3i + (z + 3i)\right] = \operatorname{Ln}\left[(-3i)\left(1 - \frac{z + 3i}{3i}\right)\right] =$$
$$= \operatorname{Ln}(-3i) + \operatorname{Ln}\left(1 - \frac{z + 3i}{3i}\right) =$$
$$= \ln 3 - \frac{\pi i}{2} + 2\pi k i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3i)^n}\,(z + 3i)^n, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots .$$

Свойство 6. *Пусть* $f_1(z)$ — *элемент функции* $\operatorname{Ln} z$ *в точке* $z_1 \neq 0$, *заданный значением* $f_1(z_1) = \ln|z_1| + i\varphi_1$, *где* φ_1 — *одно из значений* $\arg z_1$. *И пусть* $f_2(z)$ — *результат аналитического продолжения элемента* $f_1(z)$ *из точки* z_1 *в точку* $z_2 \neq 0$ *вдоль кривой* γ_1, *не проходящей через точку* $z = 0$ (рис. 49). *Тогда*

$$f_2(z_2) = \ln|z_2| + i(\varphi_1 + \Delta\varphi) = \ln|z_2| + i(\varphi_1 + \Delta_{\gamma_1} \arg z). \tag{13}$$

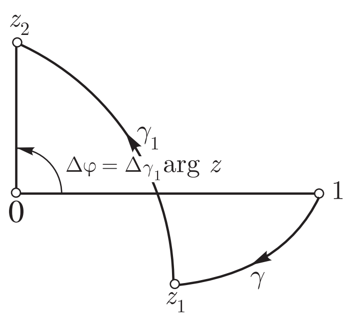

Рис. 49

○ По свойству 2 функция $f_1(z)$ — результат аналитического продолжения элемента (1) из точки $z = 1$ в точку z_1 вдоль некоторой кривой γ, не проходящей через точку $z = 0$ (рис. 49). Поэтому $f_2(z)$ — результат аналитического продолжения элемента (1) из точки $z = 1$ в точку z_2

вдоль кривой $\gamma\gamma_1$. Это аналитическое продолжение определяет на кривой $\gamma\gamma_1$ непрерывную функцию

$$F_{\gamma\gamma_1}(z) = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \gamma\gamma_1.$$

Поэтому

$$f_2(z_2) = \int\limits_1^{z_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_1^{z_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{14}$$

В этой формуле первый интеграл равен $f_1(z_1) = \ln|z_1| + i\varphi_1$, а второй (вычисляется так же, как и в свойстве 3) равен $\ln|z_2| - \ln|z_1| + i\Delta_{\gamma_1} \arg z$. Следовательно, из формулы (14) получается формула (13). ●

Пример 4. Пусть $f_1(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$ в точке $z \neq 0$. Найдем элемент $f_2(z)$, который получается в результате аналитического продолжения элемента $f_1(z)$ из точки z_1 в ту же точку z_1 вдоль окружности $\gamma : |z| = |z_1|$ (рис. 50), ориентированной против часовой стрелки. (Коротко будем говорить: «Совершим обход вокруг точки $z = 0$ в положительном направлении».)

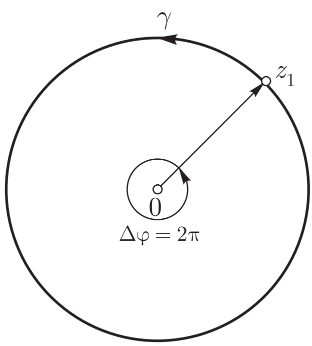

Рис. 50

По формуле (13) с помощью рис. 50 находим $f_2(z_1) = f_1(z_1) + 2\pi i$. Поэтому $f_2(z) = f_1(z) + 2\pi i$ (см. замечание 2). В этом случае будем говорить, что после одного обхода вокруг точки $z = 0$ элемент $f_1(z)$ переходит в элемент $f_1(z) + 2\pi i$ и писать

$$f_1(z) \to f_1(z) + 2\pi i.$$

После второго, третьего и т. д. оборотов вокруг точки $z=0$ в положительном направлении получаем:

$$f_1(z) \to f_1(z)+2\pi i \to f_1(z)+4\pi i \to f_1(z)+6\pi i \to \ldots .$$

Аналогично, после первого, второго и т. д. оборотов вокруг точки $z=0$ в отрицательном направлении (по часовой стрелке) получаем:

$$f_1(z) \to f_1(z)-2\pi i \to f_1(z)-4\pi i \to f_1(z)-6\pi i \to \ldots .$$

Итак, в результате аналитического продолжения после каждого оборота вокруг точки $z=0$ в положительном и отрицательном направлениях в точке z_1 получаются новые элементы. В таком случае точку $z=0$ называют *логарифмической точкой ветвления* функции $\operatorname{Ln} z$ (см. § 20).

Замечание 4. Пусть $f_1(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$, заданный в точке $z_1 \neq 0$. Аналитическую функцию с исходным элементом $f_1(z)$ обозначим $F(z)$. По свойствам функции $\operatorname{Ln} z$ получается, что функция $F(z)$ — это множество тех же элементов, что и множество элементов функции $\operatorname{Ln} z$. Во многих задачах не имеет значения, какой из элементов аналитической функции принят за исходный (см. примеры 2–4). Поэтому функцию $F(z)$ также называют логарифмической и обозначают $\operatorname{Ln} z$. Таким образом, $\operatorname{Ln} z$ — это совокупность аналитических функций, имеющих одно и то же множество элементов и отличающихся друг от друга только исходными элементами. В этом случае будем говорить также, что $\operatorname{Ln} z$ — это одна аналитическая функция с точностью до исходного элемента.

3. Регулярные ветви функции $\operatorname{Ln} z$

Функция $\operatorname{Ln} z$ аналитична в любой области G, не содержащей точку $z=0$. Если результат аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$ из точки $z_1 \neq 0$ в произвольную точку z области G, заданного значением $\arg z_1 = \alpha$, не зависит от кривой $\gamma_{z_1 z} \in G$ (z_1 — начало, z — конец этой кривой), то в результате аналитического продолжения в точке z получается один и тот же элемент. Тогда аналитическая функция, порождаемая элементом $f_0(z)$, регулярна в области G и является регулярной ветвью функции $\operatorname{Ln} z$. Условие независимости величины $\Delta_{\gamma_{z_1,z}} \arg z = \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma_{z_1,z}} \dfrac{d\zeta}{\zeta}$ от кривой $\gamma_{z_1,z}$ в односвязной области G равносильно условию

$$\Delta_{\gamma_0} \arg z = 0, \tag{15}$$

где $\gamma_0 \in G$ — произвольная замкнутая кусочно-гладкая кривая.

Условие (15) выполняется, например, в круге $|z - z_0| < |z_0|$, $z_0 \neq 0$, с центром в точке z_0, не содержащем точку $z = 0$, а также в плоскости с разрезом, соединяющим точки $z = 0$ и $z = \infty$ (см. § 6). Условие (15) выполняется и в неодносвязной области, если в ней нельзя провести замкнутый контур, обходящий точку $z = 0$.

Условие (15) является необходимым и достаточным для существования регулярных ветвей функции $\operatorname{Ln} z$ в области G (односвязной или неодносвязной) (см. § 17, теорема 2). В этом случае говорят, что многозначная функция $\operatorname{Ln} z$ распадается в области G на регулярные ветви.

Пример 5. Пусть G — комплексная плоскость с разрезом по отрезкам $[1; 3]$, $[3, 3+i]$ и лучу $(-\infty + i, 3+i]$. Так как в этой области нельзя провести замкнутый контур, обходящий точку $z = 1$, то в области G выполняется условие (15) и поэтому аналитическая функция $\operatorname{Ln}(z-1)$ распадается в области G на регулярные ветви, каждая из которых полностью определяется своим значением в точке $z_0 \in G$ — одним из значений $\operatorname{Ln}(z-1)$.

4. Регулярные ветви функции $\operatorname{Ln} f(z)$

Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в области G и удовлетворяет условию

$$f(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in G. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию

$$\operatorname{Ln} f(z) = \ln|f(z)| + i\operatorname{Arg} f(z).$$

Эта функция, полученная при решении уравнения $e^w = f(z)$, является многозначной. Ее можно рассматривать как суперпозицию регулярной функции $f(z)$ и функции $\operatorname{Ln} w$, которая является аналитической в области G, так как $w = f(z) \neq 0$ (условие (16)). Если $f_0(z) = f(z)$ — элемент функции f в точке a (сама функция $f(z)$), а $h_0(w)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} w$ в точке $w_0 = f(a)$, то $g_0(z) = h_0(f_0(z))$ — элемент функции $\operatorname{Ln} f(z)$ в точке a, так как $g_0(z)$ регулярна в точке a как суперпозиция регулярных функций.

Пусть $\gamma \subset G$ — кусочно-гладкая кривая, заданная уравнением

$$z = z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{17}$$

Γ — образ кривой γ при отображении $w = f(z)$, тогда уравнение кривой Γ имеет вид

$$w = w(t) = f(z(t)), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{18}$$

а результат аналитического продолжения элемента $g_0(z)$ из точки $a \in G$ в точку $z \in G$ вдоль кривой $\gamma = \gamma_{az}$ имеет вид (см. пп. 2 и 3)

$$w_0(z) = \ln|f(z)| + i(\alpha + \Delta_\gamma \arg f(z)), \tag{19}$$

где $\alpha = \arg f(a)$,

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\Gamma \arg w = \operatorname{Im} \int\limits_\Gamma \frac{dw}{w} = \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta. \tag{20}$$

Теорема. *Если функция $f(z)$ регулярна в области G и удовлетворяет условию (16), то результат аналитического продолжения элемента $g_0(z)$ из точки a в точку $z \in G$ не зависит от контура $\gamma \in G$, где $\gamma = \gamma_{az}$ — кусочно-гладкая кривая с началом в точке a и концом в точке z, тогда и только тогда, когда в области G выполняется условие*

$$\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = 0, \tag{21}$$

где $\widetilde{\gamma} \subset G$ — произвольная замкнутая кусочно-гладкая кривая (простой контур).

Доказательство. В односвязной области условие (21) выполняется, так как простой контур можно непрерывно деформировать в точку $a \in G$.

Пусть выполняется условие (16) и $\Delta_\gamma \arg f(z)$ не зависит от пути интегрирования $\gamma = \gamma_{az}$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \int\limits_{\gamma_{az}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \int\limits_a^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta. \tag{22}$$

Так как подынтегральная функция в (22) регулярна в области G (f регулярна и $f \neq 0$ в области G), а интеграл (22) не зависит от пути интегрирования, то подынтегральная функция имеет первообразную в области G (§ 8, п. 3), к ней применима формула Ньютона–Лейбница и тогда выполняется условие (21), откуда следует (формула (19) и равенство (20)), что $w_0(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции, определяемая значением $\arg f(a)$.

Обратно: если функция $f(z)$ регулярна в области и удовлетворяет условию (21), то из равенства (20) следует, что

$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_{\gamma_{az}} \arg f(z)$ не зависит от γ и тогда из (19) следует, что $w_0(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln} f(z)$, определяемая значением $\arg f(a)$. ●

Этот же результат можно получить, используя теорему 2 (§ 17), так как при выполнении условия (16) из (19) следует, что

$$g_0(z) \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} g_0(z) \quad \forall\, \widetilde{\gamma} \subset G,$$

где $g_0(z)$ — элемент функции $F(z) = \operatorname{Ln} f(z)$, заданный в точке $z_0 \in G$, $\widetilde{\gamma}$ — произвольный простой контур.

Из формулы (19) следует, что если задано значение $\alpha = \arg f(a)$, то значение $w_0(b)$ регулярной ветви функции $\operatorname{Ln} f(z)$ (при выполнении условия (21)) можно найти по формуле

$$w_0(b) = \ln|f(b)| + i(\arg f(a) + \Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z)), \tag{23}$$

$\gamma_{ab} \subset G$, a — начало, b — конец кривой γ_{ab}.

Заметим, что $\operatorname{Arg} f(a) = \arg f(a) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Поэтому все регулярные ветви функции $\operatorname{Ln} f(z)$ имеют вид

$$w_k(z) = w_0(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{24}$$

Так как

$$e^{w_k(z)} = f(z), \quad z \in G, \tag{25}$$

то дифференцируя тождество (25), получаем

$$e^{w_k(z)} w_k'(z) = f'(z), \quad \text{или} \quad f(z) w_k'(z) = f'(z),$$

откуда

$$w_k'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}\,. \tag{26}$$

Во многих задачах, относящихся к регулярным ветвям функции $\operatorname{Ln} f(z)$, часто рассматриваются случаи, когда $f(z)$ представляется в виде произведения или частного регулярных функций. Поэтому полезными оказываются следующие свойства приращения аргумента $f(z)$.

Пусть функции $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ — регулярные в области G функции, удовлетворяющие условию (16), γ — кусочно-гладкая кривая, $\gamma \in G$. Тогда

$$\Delta_\gamma \arg(f_1(z) f_2(z)) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z), \tag{27}$$

$$\Delta_\gamma \arg \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \Delta_\gamma \arg f_1(z) - \Delta_\gamma \arg f_2(z), \tag{28}$$

$$\Delta_\gamma \arg \frac{1}{f(z)} = -\Delta_\gamma \arg f(z), \tag{29}$$

$$\Delta_{\gamma^{-1}} \arg f(z) = -\Delta_\gamma \arg f(z), \tag{30}$$

γ^{-1} получена из γ изменением ориентации на противоположную.

Если $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ (кривая γ разбита на кривые γ_1 и γ_2), то

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_{\gamma_1} \arg f(z) + \Delta_{\gamma_2} \arg f(z). \tag{31}$$

Все перечисленные свойства аргумента можно доказать, используя формулу (20) и свойства интеграла. Докажем, например, равенство (27).

$$\Delta_\gamma \arg(f_1 f_2) = \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2}\, dz = \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2}\, dz =$$

$$= \operatorname{Im} \left[\int\limits_\gamma \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} \right] dz = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z).$$

Пример 6. Пусть

$$F(z) = \operatorname{Ln} \frac{(z+1)(z+3)}{(z-2)(z-4)}\,.$$

Покажем, что если G — плоскость с разрезом по отрезкам $\Delta_1 = [-3;-1]$ и $\Delta_2 = [2;4]$, то в этой области существуют регулярные ветви функции $F(z)$.

Функция $f(z) = \dfrac{(z+1)(z+3)}{(z-2)(z-4)}$ регулярна в области G и $f(z) \neq 0$ для всех $z \in G$.

Проверим, выполняется ли в области G условие (21).

Пусть $\widetilde{\gamma}$ — простой контур, ориентированный против часовой стрелки, $z_1 = -1$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$, $z_4 = 4$ (см. рис. 51).

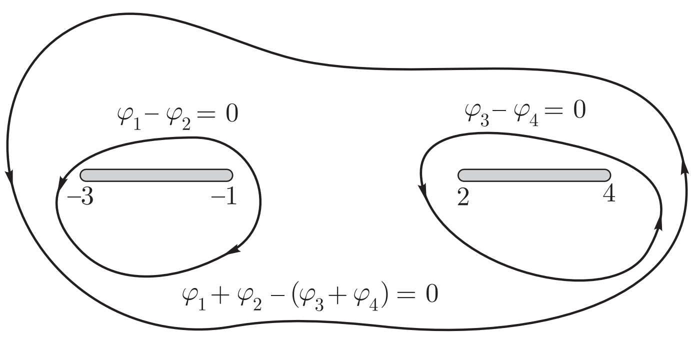

Рис. 51

Возможны 3 случая:

1) $\widetilde{\gamma}$ не содержит внутри себя ни одну из точек z_k;

2) $\widetilde{\gamma}$ содержит внутри себя один из отрезков Δ_1, Δ_2;

3) $\widetilde{\gamma}$ содержит внутри себя оба этих отрезка.

Обозначим $\varphi_k = \Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg(z-z_k)$, $\varphi = \Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = \varphi_1+\varphi_2-(\varphi_3+\varphi_4)$.

В первом случае $\varphi_k = 0$ $(k = \overline{1,4})$ и $\varphi = 0$.

Во втором случае, либо $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi - 2\pi = 0$, либо $\varphi = \varphi_3 - \varphi_4 = 2\pi - 2\pi = 0$.

В третьем случае $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - (\varphi_3 + \varphi_4) = 4\pi - 4\pi = 0$.

Итак, в области G выполняется условие (21) и функция $F(z)$ допускает выделение регулярных ветвей в этой области.

Пример 7. Пусть $F(z) = \mathrm{Ln}\,\dfrac{z-1}{3-z}$, G — плоскость с разрезом по отрезку $[1;3]$. Как и в примере 6, можно показать, что в области G существует регулярная ветвь функции $F(z)$.

Пусть $w_0(z)$ — регулярная ветвь функции $F(z)$ такая, что $w_0(2+i\cdot 0) = 0$, где $2+i\cdot 0$ — точка $z = 2$ на верхнем берегу разреза (см. рис. 52).

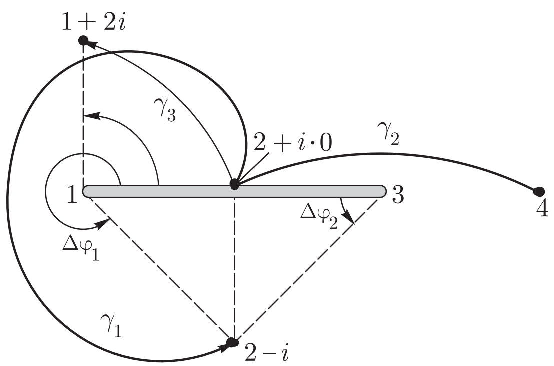

Рис. 52

Решим следующие задачи:

1) найдем $w_0(2-i)$ и $w_0'(2-i)$; $w_0(4)$, $w_0'(4)$, $w_0(1+2i)$;
2) разложим функцию $w_0(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1+2i$ по степеням $z - z_0$;
3) разложим $w_0(z)$ в ряд Лорана в кольце $3 < |z| < \infty$.

1) Воспользуемся формулами (19) и (26). По формуле (19)

$$w_0(z) = i \arg w_0(2+i0) + \ln\left|\frac{z-1}{3-z}\right| + i(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2),$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-1)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_{\gamma_1} \arg(3-z) = \Delta_{\gamma_1} \arg(z-3)$, γ_1 — кривая, соединяющая точку $2+i0$ с точкой $2-i$ (см. рис. 52).

а) Если $z = 2 - i$, то $\Delta\varphi_1 = \frac{5\pi}{4}$, $\Delta\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$ и

$$w_0(2-i) = 0 + \ln\left|\frac{2-i-1}{3-2+i}\right| + i\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = i\pi.$$

Для нахождения производной воспользуемся формулой (26):

$$w_0'(2-i) = \frac{f'(2-i)}{f(2-i)},$$

где $f(z) = \frac{z-1}{3-z}$, $f'(z) = -\frac{2}{(z-3)^2}$. Тогда $w_0'(2-i) = -i$.

б) Если $z = 4$, γ_2 — кривая, соединяющая точку $2 + i \cdot 0$ с точкой 4, то $\Delta_{\gamma_2} \arg f(z) = 0 - (-\pi) = \pi$, $\ln\left|\frac{4-1}{3-4}\right| = \ln 3$,

$$w_0(4) = \ln 3 + i\pi, \quad w_0'(4) = \frac{2}{3}.$$

в) Если $z = 1 + 2i$, γ_3 — кривая, соединяющая точку $2 + i0$ с точкой $1 + 2i$, то $\Delta_{\gamma_3} \arg f(z) = \Delta_{\gamma_3} \arg(z-1) - \Delta_{\gamma_3} \arg(z-3) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$ (см. рис. 52),

$$\ln\left|\frac{1+2i-1}{3-(1+2i)}\right| = \ln\left|\frac{i}{1+i}\right| = -\frac{1}{2}\ln 2,$$
$$w_0(1+2i) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi}{4}\, i.$$

2) Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $1 + 2i$ все регулярные ветви функции $F(z)$, а затем выделим ветвь $w_0(z)$. Положим $t = z - (1 + 2i)$ и преобразуем $F(z)$:

$$F(z) = \mathrm{Ln}\,\frac{z-1}{3-z} = \mathrm{Ln}\,\frac{t+2i}{2(1-i)-t} = \mathrm{Ln}\,\frac{2i\left(1 + \dfrac{t}{2i}\right)}{2(1-i)\left(1 - \dfrac{t}{2(1-i)}\right)} =$$
$$= \Phi(t) = \mathrm{Ln}\,\frac{2i}{2(1-i)} + \mathrm{Ln}\left(1 + \frac{t}{2i}\right) - \mathrm{Ln}\left(1 - \frac{t}{2(1-i)}\right),$$

где $\dfrac{2i}{2(1-i)} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}$. Тогда

$$\Phi(t) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2i)^n}\, t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n2^n(1-i)^n}\,,$$

$$F(z) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) i +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{1}{(1-i)^n} - i^n\right)(z-1-2i)^n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Этот ряд сходится в круге $|z-1-2i| < 2$, а его сумма при фиксированном k равна $w_k(z)$, где $w_k(z)$ — одна из регулярных ветвей функции $F(z)$.

Так как $w_0(1+2i) = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{3\pi}{4}\, i$, то $w_0(z)$ получается из $F(z)$ при $k = 0$, т. е.

$$w_0(z) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi i}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{1}{(1-i)^n} - i^n\right)(z-1-2i)^n.$$

3) В кольце $3 < |z| < \infty$ функция $F(z)$ распадается на регулярные ветви, так как в этом кольце выполняется условие (21). Для получения ряда Лорана в кольце $3 < |z| < \infty$ преобразуем $F(z)$:

$$F(z) = \mathrm{Ln}\,\frac{z-1}{3-z} = \mathrm{Ln}\,\frac{(-1)\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}{1-\dfrac{3}{z}} =$$

$$= \mathrm{Ln}\,(-1) + \mathrm{Ln}\left(1-\frac{1}{z}\right) - \mathrm{Ln}\left(1-\frac{3}{z}\right) =$$

$$= -\pi i + 2k\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-1}{nz^n}\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Каждому $k \in \mathbb{Z}$ в полученной формуле соответствует одна из регулярных ветвей функции $F(z)$. Этот ряд сходится в точке $z = 4$. Так как $F(4) = (-\pi + 2k\pi)i + \alpha$, где $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n-1}{n4^n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, и $w_0(4) = \pi i + \ln 3$, то $w_0(z) = F(z)$ при $k = 1$ и искомое разложение имеет вид

$$w_0(z) = \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-1}{nz^n}\,, \quad 3 < |z| < \infty.$$

5. Арифметические операции над аналитическими функциями

Определение. *Пусть аналитические функции $G(z)$ и $H(z)$ порождены исходными элементами соответственно $g_0(z)$ и $h_0(z)$, заданными в одной и той же точке z_0. Тогда аналитическая функция с исходными элементами $g_0(z) \pm h_0(z)$, $g_0(z)h_0(z)$ и $\dfrac{g_0(z)}{h_0(z)}$ (если $h_0(z) \neq 0$), называется соответственно суммой, разностью, произведением и частным аналитических функций $G(z)$ и $H(z)$ и обозначается*

$$G(z) \pm H(z), \quad G(z)H(z), \quad \frac{G(z)}{H(z)}.$$

Если аналитические функции заданы исходными элементами в разных точках, то арифметические операции над ними не определены.

Пример 8. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \mathrm{Ln}\,[(z-a)(z-b)], \tag{32}$$

где a, b — действительные числа, $a < b$.

Эту функцию можно определить как суперпозицию функций $\zeta = H(z) = (z-a)(z-b)$ и $G(\zeta) = \mathrm{Ln}\,\zeta$. Однако более простым для изучения свойств функции (32) является эквивалентное определение ее по формуле

$$F(z) = \mathrm{Ln}\,[(z-a)(z-b)] = \mathrm{Ln}\,(z-a) + \mathrm{Ln}\,(z-b). \tag{33}$$

Свойства функции вида $\mathrm{Ln}\,(z-a)$, определенной как суперпозиция функций $\zeta = z-a$ и $\mathrm{Ln}\,\zeta$, получаются непосредственно из свойств функции $\mathrm{Ln}\,z$.

По определению функция (33) — это аналитическая функция с исходным элементом $f_0(z) = g_0(z) + h_0(z)$, где $g_0(z)$, $h_0(z)$ — некоторые элементы соответственно функций $\mathrm{Ln}\,(z-a)$, $\mathrm{Ln}\,(z-b)$ в одной и той же точке z_0, где $z_0 \neq a$, $z_0 \neq b$.

Каждый из элементов $g_0(z)$ и $h_0(z)$ полностью определяется своим значением в точке z_0.

Пусть $g_0(z_0) = \ln|z_0 - a| + i\varphi_1^{(0)}$, $h_0(z_0) = \ln|z_0 - b| + i\varphi_2^{(0)}$, где $\varphi_1^{(0)}$ — одно из значений $\arg(z_0 - a)$, $\varphi_2^{(0)}$ — одно из значений $\arg(z_0 - b)$. Тогда

$$f_0(z_0) = \ln\Big|(z_0-a)(z_0-b)\Big| + (\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)})i. \tag{34}$$

Элементы $g_0(z)$ и $h_0(z)$ можно аналитически продолжить из точки z_0 в точку z вдоль любой кривой γ, не проходящей через точки $z = a$ и $z = b$, и значения этих продолжений вычисляются по формуле (19). Следовательно, элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по любой такой кривой и в результате в точке z получится такой элемент $f(z)$ функции $F(z)$, значения которого вычисляются по формуле

$$f(z) = \ln[(z-a)(z-b)] + \left(\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)}\right) i + (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)i, \tag{35}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(z-a)$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-b)$ (см. рис. 53).

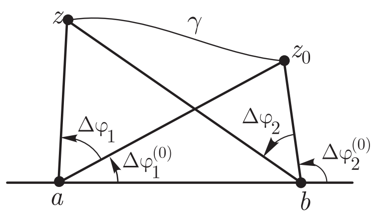

Рис. 53

Итак, значения функции (33) вычисляются по формуле (35).

Все остальные свойства функции (33) также получаются из соответствующих свойств функции $\mathrm{Ln}\, z$. Например, если $f(z)$ — элемент функции (33), то

$$f'(z) = \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b}\,.$$

Пример 9. Покажем, как можно определить обратные тригонометрические функции.

Решим уравнение $\sin w = z$ относительно w при заданном любом значении z. Получим:

$$\frac{1}{2i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right) = z, \qquad (e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}, \qquad w = -i\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

Поэтому естественно функцию $\arcsin z$ определить формулой

$$\arcsin z = -i\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1-z^2}). \tag{36}$$

Аналогично, решая уравнения $\cos w = z$, $\mathrm{tg}\, w = z$, $\mathrm{ctg}\, w = z$, получаем определение остальных обратных тригонометрических функций формулами:

$$\arccos z = -i\mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}), \tag{37}$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{i+z}{i-z}\,, \tag{38}$$

$$\operatorname{arcctg} z = \frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{z-i}{z+i}\,. \tag{39}$$

Таким же способом получаются формулы для обратных гиперболических функций.

Таким образом, свойства обратных тригонометрических функций и обратных гиперболических функций получаются из соответствующих свойств уже изученных функций $\mathrm{Ln}\,z$ и $\sqrt{z^2-1}$.

Отметим, что каждую из этих функций можно задать каким-нибудь из исходных элементов. Например, функцию $\operatorname{arctg} z$ можно определить ее исходным элементом

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, z^{2n+1}, \quad z \in K_0: \ \ |z| < 1.$$

Регулярная функция $f_0(z)$ является аналитическим продолжением (единственным) функции $\operatorname{arctg} x$ с интервала $-1 < x < 1$ в круг K_0. Элемент $f_0(z)$ можно представить интегралом

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}\,, \quad z \in K_0,$$

по любой кривой в круге K_0.

Подробнее об обратных тригонометрических и об обратных гиперболических функциях см. в [8].

З а м е ч а н и е. Каждая из формул (33), (36)–(39) задает одну аналитическую функцию с точностью до исходного элемента. Следует иметь в виду, что не всякая формула, содержащая логарифмы и степени, задает только одну аналитическую функцию. Например, $\sqrt{z^2}$ — это две аналитические функции z и $-z$, $\mathrm{Ln}\,e^z$ — это аналитические функции $z + 2\pi k i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В таких случаях для задания аналитической функции нужно задать ее исходный элемент.

§ 19. Степенная функция

1. Определение степенной функции

При действительных β и $x > 0$ справедлива формула $x^\beta = e^{\beta \ln x}$. Естественно распространить эту формулу на комплексные значения b и z так, чтобы выполнялось равенство $z^b = e^{b \operatorname{Ln} z}$. Воспользуемся определением суперпозиции аналитических функций, введенным в § 17, п. 3.

Определение. *Пусть $f_0(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$, заданный в точке $z_0 \neq 0$ (для определенности можно считать, что $z_0 = 1$ ((1), § 18)) и b — любое фиксированное комплексное число. Аналитическую функцию с элементом*

$$g_0(z) = e^{bf_0(z)}, \quad z \in K_0 : \ |z-1| < 1 \tag{1}$$

будем обозначать $e^{b \operatorname{Ln} z}$, а также z^b и называть степенной функцией, т. е. $z^b = e^{b \operatorname{Ln} z}$.

2. Свойства степенной функции

Из определения следует, что все свойства степенной функции получаются из соответствующих свойств логарифмической функции.

Свойство 1. *Элемент* (1) *допускает аналитическое продолжение по любой кривой γ с началом в точке $z_0 = 1$, не проходящей через точку $z = 0$.*

○ Пусть множество элементов $f_\zeta(z)$, $\zeta \in \gamma$, является аналитическим продолжением элемента $f_0(z)$ вдоль кривой γ (такое продолжение существует по свойству 1, § 18). Тогда множество элементов $g_\zeta(z) = e^{bf_\zeta(z)}$ является аналитическим продолжением элемента (1) вдоль кривой γ.

Таким образом, функция z^b в каждой точке $z \neq 0$ состоит из элементов

$$g(z) = e^{bf(z)}, \tag{2}$$

где $f(z)$ — элементы функции $\operatorname{Ln} z$. ●

Свойство 2. *Все значения функции z^b в точке $z \neq 0$ определяются формулой*

$$z^b = e^{b(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)}, \tag{3}$$

$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, φ — одно из значений аргумента числа z, т. е.

$$z^b = e^{b[\ln|z| + i(\varphi + 2\pi k)]}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Формулы (3), (4) получаются из формул (5), (6) § 18.

Пример 1. 1) Пусть $b = 0$. Тогда по формуле (3) $z^0 = 1$ при $z \neq 0$. По условленной договоренности значение функции z^0 при $z = 0$ также равно 1. Таким образом, функция $z^0 \equiv 1$ регулярна во всей комплексной плоскости.

2) Пусть $b = n$, где $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Тогда по формуле (3) при $z \neq 0$ получаем

$$z^1 = z, \quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{раз}} \quad \text{при} \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Доопределим эти функции в точке $z = 0$ равенством $(0)^n = 0$, получаем, что функция z^n регулярна во всей комплексной плоскости.

Отметим, что только в случаях 1) и 2) элемент (1) можно аналитически продолжить по всем кривым с началом в точке $z_0 = 1$, включая кривые, проходящие через точку $z = 0$, и при этом аналитическая функция с исходным элементом (1) оказывается регулярной во всей комплексной плоскости.

3) Пусть $b = -n$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Тогда по формуле (3) получаем $z^b = \dfrac{1}{z^n}$. В этом случае элемент (1) нельзя аналитически продолжить по кривой, проходящей через точку $z = 0$, так как $\dfrac{1}{z^n} \to \infty$ при $z \to 0$.

Отметим, что только в случаях 1)–3) функция z^b является однозначной.

4) Пусть $b = \dfrac{m}{n}$, где $m = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ n = 2,\ 3,\ \ldots$ и $\dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда по формуле (4) функция $z^b = z^{\frac{m}{n}}$ в каждой точке $z \neq 0$ принимает ровно n различных значений:

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m}{n}(\varphi + 2k\pi)i}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5}$$

где φ — одно из значений $\arg z$.

В частности, функцию $z^{\frac{1}{n}}$ называют *корнем* n-й степени из z и обозначают: $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$, $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$, $n = 3,\ 4,\ \ldots$. Тогда из (5) получается, что если $z \neq 0$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k)i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{6}$$

где $\varphi = \arg z$, $\sqrt[n]{|z|}$ — арифметический корень. Функция $\sqrt[n]{z}$, $n = 2,\ 3,\ \ldots$, является обратной к функции z^n, так как $(\sqrt[n]{z})^n = z$ (см. § 13).

5) Пусть число b не является рациональным, т. е. или b — действительное иррациональное число, или $\mathrm{Im} b \neq 0$. Тогда по формуле

(4) получается, что функция z^b в каждой точке $z \neq 0$ принимает бесконечное (счетное) число различных значений.

Например, функция z^i в точке $z = i$ принимает значения

$$i^i = e^{i[\ln|i| + i \arg i]} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что если $b = \beta$ — действительное число, то формулу (4) можно записать так:

$$z^\beta = |z|^\beta e^{\beta(\varphi + 2\pi k)i}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{7}$$

где $\varphi = \arg z$, $|z|^\beta > 0$.

Свойство 3. *Пусть $g(z)$ — элемент функции z^b. Тогда*

$$g'(z) = \frac{b}{z}\, g(z). \tag{8}$$

○ Из формулы (2) и свойства 4 § 17 следует, что

$$g'(z) = (e^{bf(z)})' = bf'(z)e^{bf(z)} = \frac{b}{z}\, e^{bf(z)} = \frac{b}{z}\, g(z). \qquad \bullet$$

Свойство 4. *Пусть $g(z)$ — элемент функции z^b в точке $z_0 \neq 0$. Тогда этот элемент представляется рядом Тейлора*

$$g(z) = g(z_0) \sum_{n=0}^{\infty} C_b^n \frac{1}{z_0^n} (z - z_0)^n, \tag{9}$$

сходящимся к $g(z)$ в круге K_0: $|z - z_0| < |z_0|$, а все элементы функции z^b в точке z_0 имеют вид

$$z^b = z_0^b \sum_{n=0}^{\infty} C_b^n \frac{1}{z_0^n} (z - z_0)^n, \tag{10}$$

где z_0^b — все значения функции z^b в точке z_0,

$$C_b^0 = 1, \quad C_b^n = \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

○ Из формулы (9) находим

$$g''(z) = -\frac{b}{z^2}\, g(z) + \frac{b}{z}\, g'(z) = -\frac{b}{z^2}\, g(z) + \frac{b^2}{z^2}\, g(z) = \frac{b(b-1)}{z^2}\, g(z).$$

По индукции находим $g^{(n)}(z) = C_b^n \frac{n!}{z^n}\, g(z)$ при $n \geqslant 1$. Следовательно, $g^{(n)}(z_0) = C_b^n \frac{n!}{z_0^n}\, g(z_0)$, $n = 1, 2, \ldots$. По формуле Тейлора получаем ряд (9). Этот ряд сходится в круге K_0 к функции $g(z)$, так как функция $g(z)$ регулярна в круге K_0.

Так как $g(z_0)$ может быть любым значением функции z^b в точке z_0, то все элементы функции z^b в точке z_0 имеют вид (10). $\bullet$

З а м е ч а н и е 1. В формуле (10) ряд под знаком суммы один и тот же для всех значений z_0^b. Следовательно, любой элемент функции z^b в любой точке $z_0 \neq 0$ полностью определяется заданием своего значения в этой точке (формула (9)).

Из формул (4) и (10) получается, что если $g(z)$ и $\widetilde{g}(z)$ — элементы функции z^b в одной и той же точке $z_0 \neq 0$, то

$$\widetilde{g}(z) = g(z)e^{2\pi kbi}, \quad |z - z_0| < |z_0|,$$

где k — некоторое целое число.

Пример 2. Разложим все элементы функции $\sqrt[n]{z}$, $n = 2, 3, \ldots$ в круге $|z + 4i| < 4$ в ряды Тейлора по степеням $(z + 4i)$.

Формулу (10) можно получить формально такими же преобразованиями, как если бы z и z_0 были действительными (замечание 3 § 18). Получаем

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = [-4i + (z + 4i)]^{\frac{1}{n}} = \left[(-4i)\left(1 - \frac{z+4i}{4i}\right)\right]^{\frac{1}{n}} =$$

$$= (-4i)^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{z+4i}{4i}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \sqrt[n]{4}e^{\frac{i}{n}(-\frac{\pi}{2}+2\pi k)} \sum_{m=0}^{\infty} C_{\frac{1}{n}}^m \frac{(-1)^m}{(4i)^m}(z + 4i)^m, \quad k = 0, 1, \ \ldots, \ n - 1.$$

Свойство 5. *Пусть $g_1(z)$ — элемент функции z^b в точке $z_1 \neq 0$, определенный значением $g_1(z_1) = e^{b(\ln|z_1|+i\varphi_1)}$, где φ_1 — одно из значений* $\arg z_1$. *И пусть $g_2(z)$ — результат аналитического продолжения элемента $g_1(z)$ из точки z_1 в точку $z_2 \neq 0$ вдоль кривой γ_1, не проходящей через точку $z = 0$. Тогда*

$$g_2(z_2) = e^{b[\ln|z_2|+i(\varphi_1+\Delta_{\gamma_1}\arg z)]}, \tag{11}$$

γ_1 — кривая с началом в точке z_1 и концом в точке z_2.

○ Формула (11) получается непосредственно из формулы (13) § 18. ●

Пример 3. Пусть $g_1(z)$ — элемент функции z^b в точке $z_1 \neq 0$. Найдем элемент $g_2(z)$, который получается в результате аналитического продолжения элемента $g_1(z)$ из точки z_1 в ту же точку z_1 вдоль окружности γ: $|z| = |z_1|$, ориентированной против часовой стрелки.

По формуле (11) находим $g_2(z_1) = g_1(z_1)e^{2\pi bi}$, поэтому $g_0(z) = g_1(z)e^{2\pi bi}$. Таким образом, после одного оборота вокруг точки

$z = 0$ в положительном направлении получаем

$$g_1(z) \to g_1(z)e^{2\pi bi}.$$

После второго, третьего и т. д. оборотов вокруг точки $z = 0$ в положительном направлении получаем

$$g_1(z) \to g_1(z)e^{2\pi bi} \to g_1(z)e^{4\pi bi} \to g_1(z)e^{6\pi bi} \to \ldots \tag{12}$$

Аналогично после оборотов вокруг точки $z = 0$ в отрицательном направлении находим

$$g_1(z) \to g_1(z)e^{-2\pi bi} \to g_1(z)e^{-4\pi bi} \to g_1(z)e^{-6\pi bi} \to \ldots \tag{13}$$

Из формул (12), (13) следует, что если число b не является рациональным, то $z = 0$ — логарифмическая точка ветвления функции z^b (см. § 20).

Пусть теперь $b = \dfrac{m}{n}$, где $m = \pm 1, \pm 2, \ldots, n = 2, 3, \ldots, \dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда числа $e^{\frac{2\pi km}{n}i}$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ различны, а $e^{\frac{2\pi mn}{n}i} = 1$. Следовательно, по формуле (12) в точке $z_1 \neq 0$ функция $z^{\frac{m}{n}}$ имеет ровно n различных элементов $g_1(z)e^{\frac{2\pi km}{n}i}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, а $g_1(z)e^{\frac{2\pi mn}{n}i} \equiv g_1(z)$. (По формуле (13) получаются эти же элементы.)

Итак, после первых $n-1$ оборотов вокруг точки $z = 0$ в точке z_1 получаются различные между собой элементы, отличные от $g_1(z)$, а после n-го оборота получается элемент $g_1(z)$. В таком случае точка $z = 0$ называется *алгебраической точкой ветвления порядка* n функции $z^{\frac{m}{n}}$ (см. § 20).

Вернемся к свойству 1. Докажем, что если b — не целое число, то элемент (1) функции z^b нельзя аналитически продолжить по кривой, проходящей через точку $z = 0$.

○ Предположим, что такое продолжение существует. Тогда в точке $z = 0$ оно определяет элемент $\widetilde{g}(z)$ функции z^b, т. е. регулярную в некотором круге $\widetilde{K}$: $|z| < R$ функцию $\widetilde{g}(z)$.

Пусть $z_1 \neq 0$, $0 < |z_1| < \widetilde{R}$. В окрестности точки z_1 функция $g_1(z) = \widetilde{g}(z)$ является элементом функции z^b. Рассмотрим аналитическое продолжение этого элемента вдоль окружности γ: $|z| = |z_1|$, ориентированной против часовой стрелки.

Так как функция $\widetilde{g}(z)$ регулярна в круге $\widetilde{K}$, то в каждой точке $\zeta \in \gamma$ должен получиться элемент $g_\zeta(z) = \widetilde{g}(z)$, в частности, в точке z_1 должен получиться элемент $g_1(z) = \widetilde{g}(z)$. Но в примере 3 доказано, что после одного оборота вокруг точки $z = 0$ в точке z_1 получается элемент $g_1(z)e^{2\pi bi} \neq g_1(z)$, так как b — нецелое число. Это противоречие и доказывает сформулированное утверждение. ●

Таким образом, если b — нецелое число, то функция z^b — это множество элементов в точках $z \neq 0$, которые можно представить, например, по формулам (2), (9), (10).

Замечание 2. Как и для $\operatorname{Ln} z$ (замечание 4, § 18), символом z^b обозначается совокупность аналитических функций, имеющих одно и то же множество элементов и отличающихся друг от друга только исходными элементами.

Замечание 3. Для исследования аналитической функции $F(z)$, заданной исходным элементом $f_0(z)$ (как и в § 17, § 18), обычно выясняют:

1) какие кривые являются допустимыми для элементов $f_0(z)$;
2) как находить значения функции $F(z)$ и значения ее элементов;
3) как находить производные ее элементов;
4) как представлять ее элементы рядами Тейлора или Лорана.

3. Регулярные ветви функции $\sqrt[n]{z}$

В § 13 многозначная функция $\sqrt[n]{z}$ была определена формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{i}{n}\operatorname{Arg} z}, \quad z \neq 0,$$

где $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\arg z$ — одно из значений аргумента числа z.

Было показано, что функция $\sqrt[n]{z}$ имеет в плоскости с разрезом по положительной действительной полуоси регулярные ветви

$$g_0(z) = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{i}{n}\arg z}, \quad 0 < \arg z < 2\pi,$$

$$g_k(z) = g_0(z)e^{\frac{i}{n}2\pi k}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Было отмечено, что регулярные ветви можно выделить в области $G \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда в этой области нельзя провести простой контур (замкнутую кусочно-гладкую кривую), содержащий внутри себя точку $z = 0$.

Этот же результат можно получить, используя понятие аналитической функции.

Пусть область G не содержит точку $z = 0$ и $f_0(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$ в точке $a \in G$, заданной значением $\alpha = \arg a$. Так как $\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z}$, то $\dfrac{1}{n} f_0(z)$ — элемент функции $\sqrt[n]{z}$ в точке a, а результат его аналитического продолжения из точки a в точку $z \in G$ по кривой $\gamma = \gamma_{az}$ имеет вид

$$h_0(z) = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i(\alpha + \Delta_\gamma \arg z))} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{i}{n}(\alpha + \Delta_\gamma \arg z)}.$$

По теореме 3 § 17 функция $\sqrt[n]{z}$ имеет в области G регулярные ветви тогда и только тогда, когда $\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg z = 0$, $\widetilde{\gamma}$ — произвольный простой контур, принадлежащий области G, так как в этом случае $h_0(z) \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} h_0(z)$.

Это означает, что в области G нельзя обойти точку $z = 0$ по замкнутой кривой, лежащей в этой области.

4. Регулярные ветви функции $\sqrt[n]{f(z)}$

Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G и

$$f(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in G. \tag{14}$$

По определению степенной функции

$$F(z) = \sqrt[n]{f(z)} = e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} f(z)}.$$

При выполнении условия (14) функция $\operatorname{Ln} f(z)$ является аналитической в области G. Поэтому $F(z)$ является аналитической в области G как суперпозиция показательной и логарифмической функций.

Если $w_0(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} f(z)$, заданный в точке a значением $\alpha = \arg f(a)$, то $g_0(z)$ — исходный элемент функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в точке a, то $g_0(z) = e^{\frac{1}{n} w_0(z)}$, а результат аналитического продолжения элемента $g_0(z)$ вдоль кривой $\gamma = \gamma_{az}$ из точки a в точку z имеет вид

$$\begin{aligned} h_0(z) &= e^{\frac{1}{n}(\ln|f(z)| + i(\alpha + \Delta_\gamma \arg f(z)))} = \\ &= \sqrt[n]{|f(z)|}\, e^{\frac{i}{n}(\alpha + \Delta_\gamma \arg f(z))}. \end{aligned} \tag{15}$$

По теореме 3 § 17 функция $\sqrt[n]{f(z)}$ имеет в области G регулярные ветви тогда и только тогда, когда

$$h_0(z) \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} h_0(z), \tag{16}$$

где $\widetilde{\gamma} \subset G$ — произвольный простой контур.

Из (15) следует, что (16) равносильно условию

$$e^{\frac{i}{n} \Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z)} = 1 = e^{2\pi k i}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{1}{n}\, \Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Если условие (17) при некотором $k \in \mathbb{Z}$ выполняется в области G, то регулярные ветви можно выделять, а если это условие не выполняется, то функция $\sqrt[n]{f(z)}$ не имеет в области G регулярных ветвей.

Если задано значение $\alpha = \arg f(a)$, то значение регулярной ветви $h_0(z)$ функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в точке b можно найти по формуле

$$h_0(b) = \sqrt[n]{|f(b)|}e^{\frac{i}{n}(\alpha+\Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z))}, \tag{18}$$

где $\gamma_{ab} \subset G$, a и b — ее начало и конец, $\alpha = \arg f(a)$.

Заметим, что $\operatorname{Arg} f(a) = \arg f(a) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому все регулярные ветви функции $\sqrt[n]{f(z)}$ имеют вид

$$h_k(z) = h_0(z)e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{19}$$

где $h_0(z)$ представляется формулой (15).

Так как

$$h_k^n(z) = f(z) \quad \forall\, z \in G, \tag{20}$$

то дифференцируя тождество (20), получим

$$nh_k^{n-1}(z)h_k'(z) = f'(z) \quad \text{или} \quad nh_k^n(z)h_k'(z) = f'(z)h_k(z),$$

откуда

$$h_k'(z) = \frac{h_k(z)f'(z)}{nf(z)}\,. \tag{21}$$

Получена формула для производной регулярной ветви $h_k(z)$ функции $\sqrt[n]{f(z)}$.

Заметим, что если выполняется условие (14) и G — односвязная область, то

$$\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = 0$$

и в области G можно выделять регулярные ветви.

Важно отметить, что выполнение условия (17) обычно проверяется в случае, когда G — неодносвязная область. Доказательство того, что условие (17) является необходимым и достаточным условием существования регулярных в области ветвей функции $\sqrt[n]{f(z)}$, содержится в [5].

Пример 4. Докажем, что существуют регулярные ветви функции $F(z)$ в области G, если:

1) $F(z) = \sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$, G — плоскость с разрезом по отрезкам $\Delta_1 = [-2, -1]$ и $\Delta_2 = [1; 2]$.
2) $F(z) = \sqrt[3]{z^2(2-z)}$, G — плоскость с разрезом $[0, 2]$.
3) $F(z) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(z+1)(2-z)^3}}$, G — плоскость с разрезом $[-1, 2]$.

1) $f(z) = (z+2)(z+1)(z-1)(z-2)$. Пусть $\widetilde{\gamma} \in G$. Возможны следующие случаи:

а) $\widetilde{\gamma}$ не содержит внутри себя ни один из отрезков, тогда $\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = 0$;
б) $\widetilde{\gamma}$ содержит внутри себя один из отрезков, например, Δ_1, тогда $\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = 4\pi$ и условие (17) выполняется при $k = 1$;
в) $\widetilde{\gamma}$ содержит внутри себя оба отрезка, тогда $\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = 8\pi$, а тогда (условие (15)) $k = 2$.

2) $f(z) = z^2(2 - z)$. Если $\widetilde{\gamma}$ содержит внутри себя отрезок $[0;1]$, то $\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = 2 \cdot 2\pi + 2\pi = 6\pi$ и условие (17), в котором $n = 3$, выполняется при $k = 2$.

3) $f(z) = (z+1)^{-1}(2-z)^{-3}$. Тогда $\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = -\dfrac{1}{4}\left(\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg(z+1) + \right.$ $\left. + \ 3\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg(z - 2)\right)$. При обходе по $\widetilde{\gamma}$ отрезка $[-1;2]$ имеем $\Delta_{\widetilde{\gamma}} \arg f(z) = 8\pi$ и условие (17) выполняется при $k = 2$.

Пример 5. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь функции $F(z) = \sqrt[3]{z^2(2 - z)}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0;2]$ такая, что $h(1 + i0) = 1$.

Найдем $h(-1)$ и $h'(-1)$ и разложим функцию $h(z)$ в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < \infty$ по степеням z.

В примере 4 (2) было установлено, что функция $F(z)$ имеет регулярную ветвь в плоскости с разрезом по отрезку $[0;2]$.

1) По формуле (18) находим

$$h(-1) = \sqrt[4]{|f(-1)|}\, e^{\frac{1}{3}(\alpha + \Delta_\gamma \arg f(z))},$$

где $\alpha = 0$, так как $h(1 + i0) = 1$, γ — кривая, соединяющая точку $1 + i0$ с точкой -1 (см. рис. 54).

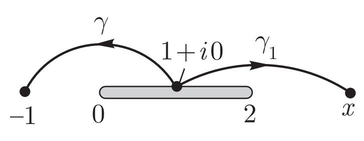

Рис. 54

$$f(z) = z^2(2 - z),$$

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = 2\Delta_\gamma \arg z + \Delta_\gamma \arg(z - 2) = 2\pi + 0 = 2\pi,$$

$$f(-1) = 3, \quad \sqrt[3]{|f(-1)|} = \sqrt[3]{3}, \quad h(-1) = e^{\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{3}.$$

2) Для нахождения $h'(-1)$ воспользуемся формулой (21):

$$h'(-1) = \frac{h(-1)f'(-1)}{3f(-1)} = \frac{7\sqrt[3]{3}}{9}\, e^{-\frac{i\pi}{3}},$$

так как $f'(z) = 4z - 3z^2$, $f'(-1) = -7$, $-e^{\frac{2\pi i}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

3) В кольце $2 < |z| < \infty$ функция $\sqrt[3]{z^2(2-z)}$ распадается на три регулярные ветви, для которых ряды Лорана по степеням z можно получить следующим образом:

$$\sqrt[3]{z^2(2-z)} = (-z^3)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{3}} = ze^{\frac{\pi+2\pi k}{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/3}^n (-2)^n \frac{1}{z^n},$$

где $k = 0,\ 1,\ 2$.

Так как функция $h(z)$ является одной из этих ветвей, то

$$h(z) = ze^{\frac{\pi+2\pi k}{3}i} \left(1 - \frac{2}{3z} - \frac{4}{9z^2} - \ldots\right), \tag{22}$$

где k нужно найти.

Ряд (22) сходится в области $2 < |z| < \infty$, а коэффициенты ряда

$$g(z) = 1 - \frac{2}{3z} - \frac{4}{9z^2} - \ldots$$

действительны и $g(z) \to 1$ при $z \to \infty$. Поэтому $g(x) > 0$ при достаточно больших x ($x > 2$).

Полагая в (22) $z = x$, получаем

$$h(x) = xg(x)e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i} = |h(x)|e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i},$$

а по формуле (18) находим ($\Delta_{\gamma_1} \arg f(z) = -\pi$), γ_1 — кривая, соединяющая точку $1 + i0$ с точкой x ($x > 2$).

$$h(x) = |h(x)|e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

Поэтому $e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ и $k = -1$ (или $k = 2$), тогда

$$h(z) = e^{-\frac{i\pi}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/3}^n (-2)^n \frac{1}{z^{n-1}}, \quad 2 < |z| < \infty.$$

Пример 6. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь функции $F(z) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(z+1)(2-z)^3}}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1; 2]$ такая, что $h(x + i0) > 0$ при $x \in (-1, 2)$.

Существование регулярных ветвей функции $F(z)$ установлено в примере 4 (3). Найдем $h(-2)$, используя формулу (18).

Пусть $f(z) = (z+1)(2-z)^3$. Тогда

$$h(-2) = |f(z)|^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{4}(\Delta_\gamma \arg(z+1) + 3\Delta_\gamma \arg(z-2))},$$

где γ — кривая, соединяющая точку $1 + i0$ с точкой -2 (см. рис. 55).

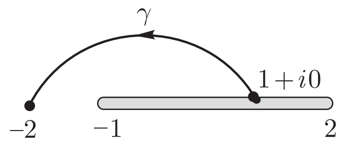

Рис. 55

Как и в примере 5, находим $\Delta_\gamma \arg(z+1) = \pi$, $\Delta_\gamma \arg(z-2) = 0$. Так как $f(-2) = -4^3$, то $|f(-2)|^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ и

$$h(-2) = \frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

5. Римановы поверхности функций $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt{z}$

Пример 7. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$. В этой области функция $\operatorname{Ln} z$ распадается на регулярные ветви

$$f_k(z) = \ln|z| + (\varphi + 2\pi k)i, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{23}$$

где $\varphi = \arg z$, $-\pi < \varphi < \pi$.

Вместо того чтобы рассматривать бесконечное число регулярных функций $f_k(z)$ в одной области D, возьмем бесконечное число идентичных экземпляров этой области. Обозначим эти области D_k, $k \in \mathbb{Z}$, и будем считать, что в области D_k задана регулярная функция $f_k(z)$. Пусть γ_k^+ — верхний, γ_k^- — нижний берега разреза плоскости D_k (рис. 56).

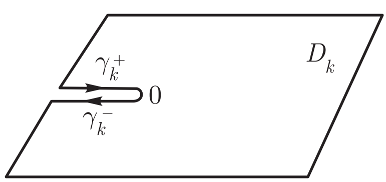

Рис. 56

Склеим области D_k («листы») в одну поверхность так, чтобы на этой поверхности функция $\operatorname{Ln} z$ была однозначна и непрерывна. По формуле (23) получаем

$$f_k(x)|_{\gamma_k^+} = f_{k+1}(x)|_{\gamma_{k+1}^-} = \ln|x| + \pi(2k+1)i, \quad x < 0.$$

Поэтому склеим верхний берег разреза γ_k^+ с нижним берегом разреза γ_{k+1}^-.

На построенной «винтовой» поверхности (рис. 57) функция $\operatorname{Ln} z$ однозначна и регулярна при $z \neq 0$ (по лемме об устранимой особенности). Эта поверхность называется *римановой поверхностью функции* $\operatorname{Ln} z$.

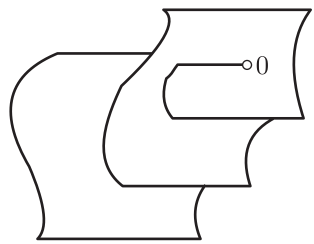

Рис. 57

Пример 8. Пусть D — вся комплексная плоскость с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ (рис. 56). В этой области функция $\sqrt{z}$ распадается на регулярные ветви

$$f_1(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{i\varphi}{2}} \quad \text{и} \quad f_2(z) = -\sqrt{|z|}e^{\frac{i\varphi}{2}}, \tag{24}$$

где $\varphi = \arg z$, $-\pi < \varphi < \pi$. Возьмем два экземпляра D_1 и D_2 области и будем считать, что функция $f_k(z)$ определена в области D_k, $k = 1, 2$. Пусть γ_k^+ — верхний, γ_k^- — нижний берега разреза плоскости D_k.

По формуле (24) получаем, что при $x \leqslant 0$

$$f_1(x)|_{\gamma_1^+} = f_2(x)|_{\gamma_2^-} = i\sqrt{|x|}, \quad f_1(x)|_{\gamma_1^-} = f_2(x)|_{\gamma_2^+} = -i\sqrt{|x|}.$$

Поэтому нужно склеить γ_1^+ с γ_2^- и γ_1^- с γ_2^+ (крест-накрест). Получится риманова поверхность функции $\sqrt{z}$ с самопересечением (рис. 58). Но можно сначала повернуть плоскость D_2 вокруг действительной оси на $180°$, а затем склеить γ_1^+ с γ_2^- и γ_1^- с γ_2^+. Тогда получится *риманова поверхность функции* $\sqrt{z}$ без самопересечения (рис. 59). На этой поверхности функция $\sqrt{z}$ однозначна и регулярна при $z \neq 0$ (по лемме об устранимой особенности).

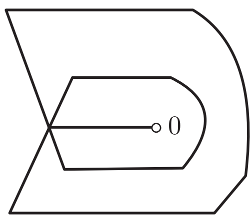

Рис. 58

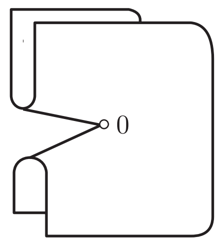

Рис. 59

§ 20. Особые точки аналитических функций. Граничные особые точки

1. Особые точки аналитических функций

Общее определение особой точки аналитической функции является довольно сложным и не будет детально рассматриваться в этом курсе. Однако для знакомства сформулируем определение, приведенное в [3].

Пусть аналитическая функция $F(z)$ порождена исходным элементом $f_0(z)$ в точке z_0 и кривая γ_1 с началом в точке z_0 и концом в точке z_1 такова, что элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить вдоль кривой γ_1 в каждую точку $z \in \gamma_1$, $z \neq z_1$, и нельзя продолжить в точку z_1. Тогда пару (γ_1, z_1) называют особой «точкой» функции $F(z)$.

Вы знакомы с определением и классификацией изолированных особых точек однозначного характера. Рассмотрим другие случаи особых точек аналитических функций.

2. Точки ветвления

Определение 1. *Пусть функция $F(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки z_0 и неоднозначна в этой окрестности. Тогда точка z_0 называется точкой ветвления функции $F(z)$.*

Пример 1. 1) Функция $\operatorname{Ln} z$ аналитична и неоднозначна в области $D : 0 < |z| < \infty$. Область D является проколотой окрестностью точки $z = 0$ и одновременно проколотой окрестностью точки $z = \infty$. Следовательно, $z = 0$ и $z = \infty$ — точки ветвления функции $\operatorname{Ln} z$.

2) Аналогично, точки $z = 0$ и $z = \infty$ — точки ветвления функции z^b, если b — нецелое число.

Приведем другое эквивалентное определение точки ветвления.

Пусть функция $F(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки z_0, т. е. в кольце $K_0 : 0 < |z - z_0| < R$, если $z \neq \infty$, или в кольце $K_0 : R < |z| < \infty$, если $z_0 = \infty$. И пусть $f_1(z)$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1 \in K_0$. Совершим обход вокруг точки z_0, т. е. рассмотрим аналитическое продолжение элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $\gamma : |z - z_0| = |z_1 - z_0|$, если $z_0 \neq \infty$, $\gamma : |z| = |z_1|$, если $z_0 = \infty$.

При этом может оказаться, что после одного оборота вокруг точки z_0 в точке z_1 получится тот же элемент $f_1(z)$. Тогда по теореме о монодромии можно доказать, что функция $F(z)$ однозначна и, следовательно, регулярна в кольце K_0. Поэтому z_0 — изолированная особая точка однозначного характера функции $F(z)$, т. е. z_0 — либо устранимая особая точка, либо полюс, либо существенно особая точка функции $F(z)$.

Если же после первого оборота вокруг точки z_0 в точке z_1 получается новый элемент $f_2(z) \not\equiv f_1(z)$, т. е.

$$f_1(z) \to f_2(z) \not\equiv f_1(z),$$

то точка z_0 называется *точкой ветвления функции* $F(z)$. Точка ветвления может быть или *логарифмической*, или *алгебраической* (пример 4, § 18; пример 3, § 19).

Логарифмические точки ветвления. Пусть в рассматриваемой ситуации при каждом следующем обходе вокруг точки z_0 в положительном или отрицательном направлениях в точке z_1 получаются новые элементы, отличные от всех предыдущих. Тогда точка z_0 называется *логарифмической точкой ветвления функции* $F(z)$.

В этом случае функция $F(z)$ в каждой точке $z_1 \in K_0$ имеет бесконечное множество различных элементов, однако значения этих элементов в точке z_1 могут быть одинаковыми. Подробнее: в этом случае функция $F(z)$ «почти» в каждой точке $z_1 \in K_0$ имеет бесконечное множество различных значений. Здесь и далее слово «почти» означает, что могут быть исключительные точки, в которых функция $F(z)$ имеет конечное число значений. Таких исключительных точек может быть конечное число или бесконечно много, но предельная точка этих точек не может принадлежать кольцу K_0.

Пример 2. 1) Для функции $(z^2 - 1)\mathrm{Ln}\, z$, аналитичной в кольце $K_0 : 0 < |z| < \infty$, точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются логарифмическими точками ветвления. Эта функция в каждой точке $z \in K_0$, $z \neq \pm 1$ имеет бесконечное число различных значений, а в точках $z = \pm 1$ — только одно значение, равное нулю.

2) Функция $\sin z \operatorname{Ln} z$ в каждой точке z того же кольца K_0, где $z \neq \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеет бесконечное множество различных значений, а в точках $z_k = \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — только одно значение, равное нулю. Предельная точка $z = \infty$ точек z_k не принадлежит кольцу K_0.

Алгебраические точки ветвления. Пусть в рассматриваемой ситуации после n оборотов ($n \geqslant 2$) вокруг точки z_0 в положительном направлении получается

$$f_1(z) \to f_2(z) \to \ldots \to f_n(z) \to f_{n+1}(z) \equiv f_1(z),$$

где все элементы $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\ldots$, $f_n(z)$ различны. Тогда точка z_0 называется *алгебраической точкой ветвления* функции $F(z)$ порядка n.

В этом случае функция $F(z)$ в каждой точке $z_1 \in K_0$ имеет ровно n различных элементов, однако значения некоторых из этих элементов в самой точке z_1 могут быть одинаковыми.

Пример 3. Для функции $\sin \dfrac{1}{z} \sqrt[n]{z}$, где n — натуральное число, $n \geqslant 2$, аналитической в кольце $K_0 : 0 < |z| < \infty$, точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются алгебраическими точками ветвления порядка n. Эта функция в каждой точке $z \in K_0$, $z \neq \dfrac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, принимает ровно n различных значений, а в точках $z_k = \dfrac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, только одно значение, равное нулю.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если $z_0 \neq \infty$ — алгебраическая точка ветвления порядка n аналитической в кольце $K_0 : 0 < |z - z_0| < R$ функции $F(z)$, то функцию $F(z)$ можно представить в виде ряда*

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^{\frac{k}{n}},$$

сходящегося к функции $F(z)$ во всем кольце K_0.

Если $z_0 = \infty$ — алгебраическая точка ветвления порядка n аналитической в кольце $K_0 : R < |z| < \infty$ функции $F(z)$, то эту функцию можно представить в виде ряда

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{\frac{k}{n}},$$

сходящегося к функции $F(z)$ во всем кольце K_0.

Такие ряды по дробным степеням называют *рядами Пюизе.*

Доказательство этой теоремы см. в [12].

Покажем на примерах, как исследуются особые точки многозначных аналитических функций.

Пример 4. Исследуем особые точки функции $F(z) = \dfrac{1}{2+\sqrt{z}}$. Эта функция аналитична в расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками $z = 0$, $z = \infty$ (это особые точки функции $\sqrt{z}$) и $z = 4$ (в этой точке одно из значений знаменателя $2+\sqrt{z}$ равно нулю).

1) Рассмотрим проколотую окрестность точки $z = 0$, не содержащую точку $z = 4$, например, кольцо $K_1 : 0 < |z| < 2$. Выберем в какой-нибудь точке этого кольца некоторый элемент функции $\sqrt{z}$. Пусть, например, $z_1 = 1$, $g_1(z)$ — элемент функции $\sqrt{z}$ в точке $z = 1$ такой, что $g_1(z) = 1$. Тогда $f_1(z) = \dfrac{1}{2+g_1(z)}$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1 = 1$. Так как этот элемент можно аналитически продолжить по любой кривой, лежащей в кольце K_1, то элемент $f_1(z)$ порождает аналитическую в кольце K_1 функцию $F(z)$ — аналитическую ветвь функции $F(z)$ в кольце K_1.

Рассмотрим аналитическое продолжение элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $z = 1$. После первого оборота вокруг точки z_0 получаем

$$f_1(z) \to \frac{1}{2-g_1(z)} \not\equiv f_1(z),$$

после второго оборота

$$\frac{1}{2-g_1(z)} \to \frac{1}{2+g_1(z)} \equiv f_1(z).$$

Следовательно, точка $z = 0$ является алгебраической точкой ветвления второго порядка функции $F_1(z)$.

Отметим, что в кольце K_1 можно выделить только одну аналитическую ветвь функции $F(z)$ (с точностью до исходного элемента). Поэтому точку z_0 называют алгебраической точкой ветвления второго порядка функции $F(z)$.

2) Рассмотрим кольцо $K_2 : 4 < |z| < \infty$ — проколотую окрестность точки $z = \infty$, не содержащую точек $z = 0$ и $z = 4$. Выберем в точке $z_2 = 16 \in K_2$ элемент $g_2(z)$ функции $\sqrt{z}$ такой, что $g_2(16) = 4$. Тогда элемент $f_2(z) = \dfrac{1}{2+g_2(z)}$ функции $F(z)$ порождает аналитическую ветвь $F_2(z)$ (единственную с точностью до исходного элемента) функции $F(z)$ в кольце K_2.

При аналитическом продолжении элемента $f_2(z)$ вдоль окружности $|z| = 16$ после первого оборота (вокруг точки $z = \infty$) получаем

$$f_2(z) \to \frac{1}{2 - g_2(z)} \not\equiv f_2(z),$$

после второго оборота

$$\frac{1}{2 - g_2(z)} \to \frac{1}{2 + g_2(z)} \equiv f_2(z).$$

Следовательно, точка $z = \infty$ является алгебраической точкой ветвления второго порядка функции $F_2(z)$ (и функции $F(z)$).

3) Для исследования особой точки $z = 4$ воспользуемся тем, что в круге $K : |z - 4| < 2$ функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярных ветви $g_3(z)$ и $g_4(z) = -g_3(z)$ такие, что $g_3(4) = 2$, $g_4(4) = -2$. Поэтому функция $F(z)$ в кольце $K_3 : 0 < |z - 4| < 2$ распадается на две регулярные ветви $f_3(z) = \dfrac{1}{2 + g_3(z)}$ и $f_4(z) = \dfrac{1}{2 + g_4(z)}$.

Функция $f_3(z)$ регулярна во всем круге K, в частности, в точке $z = 4$, так как $2 + g_3(z) \neq 0$ при $z \in K$.

Для функции $f_4(z)$ точка $z = 4$ является полюсом, так как знаменатель $2 + g_4(4) = 0$. Для нахождения порядка этого полюса найдем кратность нуля знаменателя $2 + g_4(z) = 0$. Находим: $(2 + g_4(z))'|_{z=4} = \dfrac{1}{2z} g_4(z)|_{z=4} = -\dfrac{1}{4} \neq 0$. Следовательно, $z = 4$ — полюс функции $f_4(z)$ первого порядка.

Итак, в проколотой окрестности точки $z = 4$ функция $F(z)$ распадается на две регулярные ветви, для одной из которых $z = 4$ — регулярная точка, а для другой точка $z = 4$ — полюс первого порядка.

З а м е ч а н и е 1. Типичная ошибка при исследовании особых точек функции $F(z) = \dfrac{1}{2 + \sqrt{z}}$ такова: «Так как $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{2 + \sqrt{z}} = \dfrac{1}{2}$, то $z = 0$ — устранимая особая точка функции $F(z)$». Это утверждение неверно, так как устранимая особая точка — это изолированная особая точка однозначной регулярной функции, а функция $F(z)$ не является однозначной.

Пример 5. Исследуем особые точки функции $F(z) = \dfrac{1}{\operatorname{Ln} z}$. Эта функция аналитична во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками 0, ∞, 1.

1) Пусть $K_1 : 0 < |z| < 1$, $g_1(z)$ — элемент функции $\operatorname{Ln} z$ в точке $z_1 = \frac{1}{2}$ такой, что $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$. Тогда $f_1(z) = \frac{1}{g_1(z)}$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1 = \frac{1}{2}$.

При аналитическом продолжении элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $|z| = \frac{1}{2}$ после каждого оборота вокруг точки $z = 0$ получается новый элемент

$$\frac{1}{g_1(z)} \to \frac{1}{g_1(z) + 2\pi i} \to \frac{1}{g_1(z) + 4\pi i} \to \ldots .$$

Следовательно, $z = 0$ — логарифмическая точка ветвления функции $F(z)$.

2) Аналогично доказывается, что точка $z = \infty$ также является логарифмической точкой ветвления функции $F(z)$.

3) В круге $K : |z - 1| < 1$ функция $\operatorname{Ln} z$ распадается на регулярные ветви $g_k(z) = g_0(z) + 2\pi k i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $g_0(1) = 0$. Поэтому функция $F(z)$ в кольце $K_2 : 0 < |z - 1| < 1$ распадается на регулярные ветви $f_k(z) = \frac{1}{g_k(z)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Если целое число $k \neq 0$, то функция $f_k(z)$ регулярна во всем круге K, в частности, в точке $z = 1$, так как $g_k(z) \neq 0$ при $z \in K$.

Для функции $f_0(z)$ точка $z = 1$ является полюсом, так как $g_0(1) = 0$. А так как $g_0'(1) = \left.\frac{1}{z}\right|_{z=1} = 1 \neq 0$, то $z = 1$ — полюс функции $f_0(z)$ первого порядка.

Итак, в проколотой окрестности точки $z = 1$ функция $\frac{1}{\operatorname{Ln} z}$ распадается на бесконечное число регулярных ветвей, каждая из которых, кроме одной, регулярна в точке $z = 1$, а для одной из них точка $z = 1$ — полюс первого порядка.

Пример 6. Исследуем особые точки функции $F(z) = \operatorname{Ln}\frac{z-1}{3-z}$. Эта функция аналитична во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками $1, 3, \infty$.

1) Пусть $K_1 : 0 < |z - 1| < 2$, $f_1(z) = g_1(z) - h_1(z)$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1 = 2 \in K_1$, где $g_1(z)$, $h_1(z)$ — некоторые элементы соответственно функций $\operatorname{Ln}(z - 1)$, $\operatorname{Ln}(3 - z)$ в точке $z_1 = 2$.

При аналитическом продолжении элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $|z-1| = 1$ после каждого оборота вокруг точки $z = 1$ получается новый элемент:

$$f_1(z) \to f_1(z) + 2\pi i \to f_1(z) + 4\pi i \to \ldots,$$

так как

$$g_1(z) \to g_1(z) + 2\pi i \to g_1(z) + 4\pi i \to \ldots,$$
$$h_1(z) \to h_1(z) \to h_1(z) \to \ldots.$$

Следовательно, $z = 1$ — логарифмическая точка ветвления функции $F(z)$.

2) Аналогично доказывается, что точка $z = 3$ также является логарифмической точкой ветвления функции $F(z)$.

3) В кольце $3 < |z| < \infty$ функция $F(z)$ распадается на регулярные ветви $f_k(z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, такие, что $\lim\limits_{z\to\infty} f_k(z) = \pi(1+2k)i$, поэтому для каждой из этих ветвей точка $z = \infty$ является устранимой, т. е. регулярной.

Пример 7. Исследуем особые точки функции $F(z) = \sqrt[3]{z^2(2-z)}$. Эта функция аналитична во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками $0, 2, \infty$.

1) Пусть $K_1 : 0 < |z| < 2$, $f_1(z) = g_1(z)h_1(z)$ — элемент функции $F(z)$ в точке $z_1 = 1 \in K_1$, где $g_1(z)$, $h_1(z)$ — некоторые элементы функций соответственно $\sqrt[3]{z^2}$, $\sqrt[3]{2-z}$ в точке $z_1 = 1$.

При аналитическом продолжении элемента $f_1(z)$ вдоль окружности $|z| = 1$ после трех оборотов вокруг точки $z = 0$ получаем:

$$f_1(z) = g_1(z)h_1(z) \to \left[e^{\frac{4\pi i}{3}} g_1(z)\right] h_1(z) \to \left[e^{\frac{8\pi i}{3}} g_1(z)\right] h_1(z) \to$$
$$\to \left[e^{\frac{12\pi i}{3}} g_1(z)\right] h_1(z) \equiv f_1(z).$$

Следовательно, $z = 0$ — алгебраическая точка ветвления третьего порядка функции $F(z)$.

2) Аналогично доказывается, что $z = 2$ также алгебраическая точка ветвления третьего порядка функции $F(z)$.

3) В кольце $2 < |z| < \infty$ функция $F(z)$ распадается на три регулярные ветви $f_k(z) = zh_k(z)$, где функции $h_k(z)$ регулярны в точке $z = \infty$ и $h_k(\infty) = e^{\frac{\pi}{3}(1+2k)i}$, $k = 0, 1, 2$. Следовательно, для каждой из этих ветвей точка $z = \infty$ является полюсом первого порядка.

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 8. Исследуем особые точки аналитической функции

$$F(z) = \sqrt{z} + \sqrt{z-2}. \tag{1}$$

Исходный элемент этой функции выберем, например, в точке $z_0 = 1$. В этой точке функция $\sqrt{z}$ имеет два элемента $g_0(z)$,

$g_1(z)$ такие, что $g_0(1) = 1$, $g_1(1) = -1$, поэтому $g_1(z) = -g_0(z)$. Функция $\sqrt{z-2}$ в точке $z_0 = 1$ также имеет два элемента $h_0(z)$, $h_1(z)$ такие, что $h_0(1) = i$, $h_1(1) = -i$, поэтому $h_1(z) = -h_0(z)$.

Пусть $f_0(z) = g_0(z) + h_0(z)$ — исходный элемент функции $F(z)$. Допустимыми кривыми для элемента $f_0(z)$ являются все кривые с началом в точке $z_0 = 1$, не проходящие через точки $z = 0$ и $z = 2$, так как такие и только такие кривые являются допустимыми для обоих элементов $g_0(z)$ и $h_0(z)$.

В результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ из точки z_0 в точку z вдоль допустимой для него кривой γ в точке z получается элемент

$$f(z) = \sqrt{|z|}e^{\frac{i\Delta\varphi_2}{2}}, \tag{2}$$

где $\Delta\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg z$, $\Delta\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(z-2)$.

1) Пусть D_1 — кольцо $0 < |z| < 2$ (рис. 60). Так как элемент $f_0(z)$ можно аналитически продолжить по любой кривой γ с началом в точке z_0, лежащей в области D_1, то элемент $f_0(z)$ порождает аналитическую в области D_1 функцию, обозначим ее $F_1(z)$.

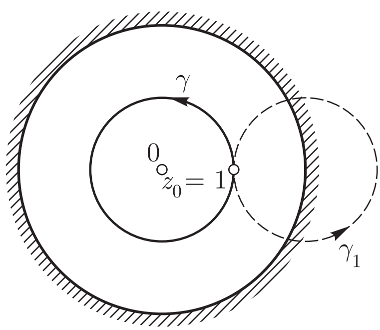

Рис. 60

По условию $f_0(1) = 1 + i$. Найдем результат аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ вдоль окружности $\gamma : |z| = 1$ с началом и концом в точке $z_0 = 1$, ориентированной против часовой стрелки, т. е. совершим обход вокруг точки $z = 0$ в положительном направлении.

После одного оборота в точке $z_0 = 1$ получим элемент $f_1(z)$, значение которого в точке $z_0 = 1$ по формуле (2) равно $f_1(1) = -1 + i$, так как $\Delta\varphi_1 = 2\pi$, $\Delta\varphi_2 = 0$. Поэтому $f_1(z) = -g_0(z) + h_0(z)$. Таким образом, после первого оборота вокруг точки $z = 0$ получаем

$$f_0(z) = g_0(z) + h_0(z) \to f_1(z) = -g_0(z) + h_0(z) \not\equiv f_0(z).$$

Аналогично, после второго оборота получаем

$$f_1(z) = -g_0(z) + h_0(z) \to g_0(z) + h_0(z) \equiv f_0(z).$$

Следовательно, $z = 0$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка функции $F_1(z)$.

Заметим, что функция $F(z)$ в каждой точке $z \neq 0$, $z \neq 2$ имеет четыре различных элемента, в частности, в точке $z_0 = 1$ четыре элемента $\pm g_0(z) \pm h_0(z)$. Так, элемент $g_0(z) - h_0(z)$ получается в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z) = g_0(z) + h_0(z)$ вдоль окружности $\gamma_1 : |z-2| = 1$ (рис. 60), а элемент $-g_0(z) - h_0(z)$ — в результате аналитического продолжения элемента $f_0(z)$ по кривой $\gamma\gamma_1$.

Пусть $F_2(z)$ — аналитическая в кольце D_1 функция с исходным элементом $f_2(z) = g_0(z) - h_0(z)$, заданным в точке $z_0 = 1$ значением $f_2(1) = 1 - i$. Так же, как и для функции $F_1(z)$, доказывается, что $z = 0$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка функции $F_2(z)$.

Итак, в кольце D_1 аналитическая функция $F(z)$ распадается на две различные аналитические ветви $F_1(z)$ и $F_2(z)$, для каждой из которых $z = 0$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка.

2) Аналогично доказывается, что:

в кольце $0 < |z - 2| < 2$ функция $F(z)$ распадается на две аналитические ветви, для каждой из которых $z = 2$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка;

в кольце $2 < |z| < \infty$ функция $F(z)$ распадается на две аналитические ветви, для каждой из которых $z = \infty$ — алгебраическая точка ветвления второго порядка.

3. Граничные особые точки регулярных функций

Определение 2. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D, границей которой является простая кривая Γ. Точка $z_0 \in \Gamma$ называется регулярной граничной точкой функции $f(z)$, если функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в точку z_0 по кривой γ с концом в точке z_0, лежащей в области D, за исключением точки z_0. В противном случае точка z_0 называется граничной особой точкой функции $f(z)$.*

Отметим, что если z_0 — регулярная граничная точка функции $f(z)$, то функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в точку z_0 по любой кривой с концом в точке z_0, лежащей в области D, за исключением точки z_0. При этом в точке z_0 получается один и тот же элемент $f_0(z)$ для всех таких кривых. Поэтому существует такая окрестность точки z_0, т. е. круг $K_0 : |z - z_0| < R_0$, что $f_0(z) = f(z)$ при $z \in D \cap K_0$.

Теорема 2. *На границе круга сходимости степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{3}$$

есть хотя бы одна особая точка его суммы.

○ Пусть $K_0 : |z - z_0| < R_0$ — круг сходимости ряда (3), $0 < R_0 < \infty$, и на окружности $\Gamma_0 : |z - z_0| = R_0$ нет особых точек функции $f(z)$. Тогда эту функцию можно аналитически продолжить в каждую точку $\zeta \in \Gamma_0$ и в точке ζ получится элемент $f_\zeta(z)$, $\zeta \in K_\zeta : |z - \zeta| < R_\zeta$, такой, что $f_\zeta(z) = f(z)$ при $z \in K_0 \cap K_\zeta$. Таким образом, окружность Γ_0 покрыта бесконечным числом кругов K_ζ.

По лемме Гейля–Бореля из этого бесконечного покрытия можно выбрать конечное покрытие, т. е. из всех кругов K_ζ можно выбрать конечное число кругов $K_j : |z - z_j| < R_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, таких, что каждая точка $z \in \Gamma_0$ принадлежит хотя бы одному из этих кругов.

Точку пересечения соседних окружностей $|z - z_j| = R_j$ и $|z - z_{j+1}| = R_{j+1}$, лежащую вне круга K_0, обозначим $\tilde{z}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ $(K_{n+1} = K_1)$. Пусть $\tilde{R}_0 = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\tilde{z}_j - z_0|$. Тогда функция $f(z)$ и элементы $f_j(z)$, $z \in K_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, определяют в круге $\tilde{K}_0 : |z - z_0| < \tilde{R}_0$ регулярную функцию $F(z)$ — аналитическое продолжение функции $f(z)$ из круга K_0 в круг $\tilde{K}_0$. Поэтому ряд (3) сходится в круге $\tilde{K}_0$ к функции $F(z)$, т. е. радиус сходимости ряда (3) больше R_0, что противоречит условию. ●

Пример 9. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ равен 1. На окружности $|z| = 1$ есть две особые точки его суммы $\dfrac{1}{1 + z^2}$, а именно, точки $\pm i$.

Следствие. *Радиус сходимости ряда* (3) *равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей к ней особой точки функции $f(z)$.*

Пример 10. Не вычисляя коэффициенты ряда

$$\frac{1}{(x+2)(z-3i)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

можно сразу сказать, что его радиус сходимости равен двум, так как ближайшей к точке $z = 0$ особой точкой его суммы является точка $z = -2$.

З а м е ч а н и е 2. Сходимость ряда (3) в точках границы его круга сходимости не связана с регулярностью суммы ряда в этих точках. Приведем примеры.

Пример 11. Ряд $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ расходится в каждой точке окружности $|z| = 1$. Для суммы ряда точка $z = 1$ — особая, а остальные точки этой окружности — регулярные.

Пример 12. Ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ сходится в точке $z = 1$ и его сумма регулярна в этой точке, так как $f(z)$ — это элемент функции $\mathrm{Ln}\,(1+z)$.

Пример 13. Ряд $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n(n+1)}$ сходится в каждой точке окружности $|z| = 1$, но точка $z = 1$ является особой для его суммы, так как $f(z)$ — это элемент функции $z + (1-z)\mathrm{Ln}\,(1-z)$, для которой $z = 1$ — точка ветвления.

Вопросы, связанные с более глубоким изучением темы «Граничные особые точки», рассматриваются в [11].

Глава 4

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 21. Теоремы о вычетах

1. Определение вычета

Пусть точка $z_0 \neq \infty$ является изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, т. е. функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z - z_0| < R$, $R > 0$. Тогда в этом кольце

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi, \tag{2}$$

окружность $C_\rho : |\zeta - z_0| = \rho$, $0 < \rho < R$, ориентирована против часовой стрелки.

Определение 1. *Вычетом функции $f(z)$ в точке $z_0 \neq \infty$ называется коэффициент ряда (1) при $\dfrac{1}{z - z_0}$, т. е. число c_{-1}, и обозначается*[*]

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}. \tag{3}$$

Из формул (2), (3) получаем

$$\int\limits_{C_\rho} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z). \tag{4}$$

Пример 1. Найдем вычет функции $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z = 0$.

[*] От французского résidu — остаток.

При $0 < |z| < \infty$ получаем

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3! z} + \frac{1}{4! z^2} + \ldots,$$

откуда $c_{-1} = \dfrac{1}{3!} = \dfrac{1}{6}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{6}$.

Пример 2. Найдем вычет функции $f(z) = z \cos \dfrac{1}{z+1}$ в точке $z = -1$.

При $0 < |z+1| < \infty$ получаем

$$f(z) = [(z+1) - 1] \left[1 - \frac{1}{2(z+1)^2} + \ldots\right] =$$

$$= (z+1) - 1 - \frac{1}{2(z+1)} + \ldots, \quad \text{откуда} \quad c_{-1} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

Пусть теперь точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, т. е. функция $f(z)$ регулярна в кольце $K : R < |z| < \infty$. Тогда в этом кольце

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \tag{5}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\, d\xi, \tag{6}$$

окружность $C_\rho : |\xi| = \rho$, $R < \rho < \infty$, ориентирована против часовой стрелки.

Определение 2. *Вычетом функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ называется коэффициент ряда (5) при $\dfrac{1}{z}$ с обратным знаком, т. е. число $-c_{-1}$, и обозначается*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \tag{7}$$

Из формул (6), (7) получаем

$$\int\limits_{C_\rho^{-1}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 1. В точке $z = \infty$ вычетом функции называют не число c_{-1}, а число $-c_{-1}$ для того, чтобы формулы (4) и (8) были одинаковыми: в формуле (4) C_ρ — граница окрестности точки $z_0 \neq \infty$ и в формуле (8) также C_ρ^{-1} — граница окрестности точки $z = \infty$.

Замечание 2. Если точка $z_0 \neq \infty$ является устранимой, т. е. регулярной для функции $f(z)$, то из определения 1 следует, что $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = 0$. Однако, если точка $z = \infty$ является регулярной для функции $f(z)$, то может оказаться, что $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) \neq 0$. Например, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} \frac{1}{z} = -1 \neq 0$.

Пример 3. Из примера 1 следует, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} z^2 e^{\frac{1}{z}} = -\frac{1}{6}.$$

Пример 4. Найдем вычет функции $f(z) = \dfrac{3}{z+2}\cos\dfrac{1}{z+2}$ в точке $z = \infty$.

Данная функция регулярна при $|z+2| > 0$ и $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 3$, т. е. $f(z) \sim \dfrac{3}{z}$ при $z \to \infty$, поэтому $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -3$.

2. Вычисление вычета в полюсе $z_0 \neq \infty$ и в регулярной точке $z = \infty$

Лемма 1. *Пусть точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом порядка m функции $f(z)$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \tag{9}$$

○ При z из проколотой окрестности точки z_0

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots .$$

Умножая обе части этого равенства на $(z-z_0)^m$, получаем

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \ldots .$$

Дифференцируя последнее равенство $(m-1)$ раз и переходя к пределу при $z \to z_0$, получаем формулу (9). ●

Пример 5. Найдем вычет функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2}\sin z$ в точке $z = 0$.

Так как $z = 0$ — полюс функции $f(z)$ первого порядка, то по формуле (9) находим

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Замечание 3. Если $z = z_0$ — полюс порядка m функции $f(z)$ и эта функция представлена в виде

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}, \quad h(z_0) \neq 0,$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке z_0, то из формулы (9) следует, что

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]\bigg|_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(z_0). \tag{10}$$

В частности, при $m = 1$ из формулы (10) получаем

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = (z-z_0)f(z)|_{z=z_0} = h(z_0). \tag{11}$$

Пример 6. Найдем вычеты функции $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ в точках $z = 1$ и $z = 2$.

По формуле (11) находим

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{z}{(z-2)^2}\bigg|_{z=1} = 1,$$

а по формуле (10) при $m = 2$ получаем

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)'\bigg|_{z=2} = -1.$$

Замечание 4. Если $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$, где функции $h(z)$, $g(z)$ регулярны в точке $z_0 \neq \infty$ и $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{12}$$

○ По формуле (11) находим

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)h(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{h(z)}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \qquad \bullet$$

Пример 7. Найдем вычеты функции $f(z) = \operatorname{ctg} z$ в точках $z_k = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

По формуле (12) находим

$$\operatorname*{res}_{z=\pi k} f(z) = \frac{\cos z}{(\sin z)'}\bigg|_{z=\pi k} = 1.$$

Замечание 5. При доказательстве леммы 1 не использовалось условие $c_{-m} \neq 0$, поэтому формулы (9), (10) верны и в случае, когда точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом функции $f(z)$ порядка не больше m, в частности, устранимой особой точкой.

Пример 8. Найдем вычет функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^6}$ в точке $z = 0$.

Для данной функции $z = 0$ — полюс порядка не больше 6. По формуле (9) при $m = 6$ находим

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{5!} \left.\frac{d^5 \sin z}{dz^5}\right|_{z=0} = \frac{1}{5!} \cos z\Big|_{z=0} = \frac{1}{5!}\,.$$

Лемма 2. *Пусть $z = \infty$ — регулярная точка функции $f(z)$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} [z(f(\infty) - f(z))]. \tag{13}$$

○ Из формулы (5) следует, что

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots \quad \text{при} \quad |z| > R,$$

откуда получаем $c_0 = f(\infty)$,

$$z[f(z) - f(\infty)] = c_{-1} + \frac{c_{-2}}{z} + \ldots\,,$$

$$-c_{-1} = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} [z(f(\infty) - f(z))].$$ ●

Пример 9. Найдем вычет функции $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z+1}$ в точке $z = \infty$.

Так как $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, то по формуле (13) находим

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \left[\frac{(-1)z}{z+1}\, e^{\frac{1}{z}}\right] = -1.$$

Пример 10. Найдем вычет функции $f(z) = \dfrac{z}{z^3+1} \sin \dfrac{1}{z}$ в точке $z = \infty$.

Так как $f(z) \sim \dfrac{1}{z^3}$ при $z \to \infty$, то при $|z| > 1$

$$f(z) = \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-4}}{z^4} + \ldots\,.$$

Поэтому $c_{-1} = 0$ и $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.

Пример 11. Найдем $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$, если $f(z) = \dfrac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}$, $b_2 \neq 0$.

Функция $f(z)$ регулярна в точке $z=\infty$, причем $f(\infty)=\dfrac{a_2}{b_2}$, а ее ряд Лорана в окрестности точки $z=\infty$ имеет вид

$$f(z)=c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\ldots,$$

откуда следует, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=\lim_{n\to\infty} z(c_0-f(z)), \quad \text{где} \quad c_0=f(\infty)=\frac{a_2}{b_2}\,.$$

Так как $\varphi(z)=z(c_0-f(z))=z\left[\dfrac{a_2}{b_2}-\dfrac{a_2+\dfrac{a_1}{z}+\dfrac{a_0}{z^2}}{b_2+\dfrac{b_1}{z}+\dfrac{b_0}{z^2}}\right]=\dfrac{a_2b_1-b_2a_1}{b_2^2}+$ $+\dfrac{\dfrac{\alpha}{z}}{1+\dfrac{\beta}{z}+\dfrac{\gamma}{z^2}}$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=\dfrac{a_2b_1-b_2a_1}{b_2^2}$.

3. Формулы для вычисления интегралов с помощью вычетов

Теорема 1 (*основная теорема теории вычетов*). *Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области D за исключением особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и непрерывна в области D вплоть до ее границы Γ. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{14}$$

○ Область D может быть и неодносвязной. На рис. 61 граница Γ области D состоит из кривых Γ_1, Γ_2, ориентированных так, что при обходе этих кривых область D остается слева.

Пусть D_1 — область, полученная из области D удалением непересекающихся кругов G_k : $|z-z_k|\leqslant\rho_k$, принадлежащих области D (рис. 61). Тогда функция $f(z)$ регулярна в области D_1 и непрерывна вплоть до ее границы $\tilde{\Gamma}=\Gamma\cup C_{\rho_1}^{-1}\cup\ldots\cup C_{\rho_n}^{-1}$. Здесь окружности C_{ρ_k} : $|z-z_k|=\rho_k$, $\rho_k>0$, ориентированы против часовой стрелки

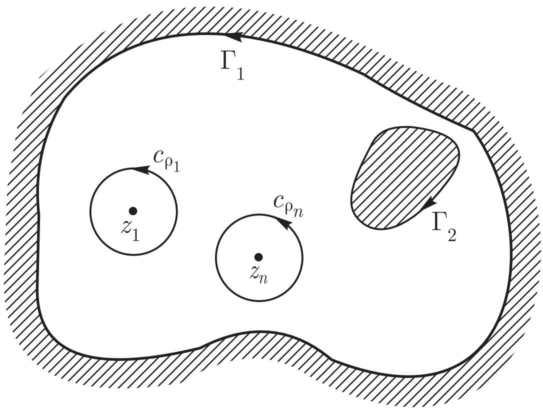

Рис. 61

(рис. 61). По интегральной теореме Коши $\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} f(z)dz = 0$, т. е.

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_{\rho_k}^{-1}} f(z)dz = 0,$$

откуда, используя (4), получаем формулу (14). ●

Пример 12. Вычислим интеграл $I = \oint\limits_{|z|=3} f(z)dz$, где $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)^2}$.

Здесь и далее запись $I = \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz$ означает, что окружность $|z - z_0| = \rho$ ориентирована против часовой стрелки.

По формуле (10) получаем

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = 2z|_{z=2} = 4.$$

По формуле (14) находим $I = 8\pi i$.

Пример 13. Вычислим интеграл $I = \oint\limits_{|z|=2} f(z)dz$, где $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z-1)}$.

В круге $|z| < 2$ функция имеет две особые точки: $z = 0$ — полюс второго порядка, $z = 1$ — полюс первого порядка. По формулам (10),

(11) получаем

$$\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z) = \frac{d}{dz}\,\frac{\cos z}{z-1}\bigg|_{z=0} = -1,$$

$$\underset{z=1}{\operatorname{res}} f(z) = \frac{\cos z}{z^2}\bigg|_{z=1} = \cos 1.$$

По формуле (14) находим

$$I = 2\pi i\left[\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z) + \underset{z=1}{\operatorname{res}} f(z)\right] = 2\pi i(-1+\cos 1).$$

Пример 14. Вычислим интеграл $I = \oint\limits_{|z-2i|=2} f(z)dz$, где $f(z) = \dfrac{1}{1+e^z}$.

В круге $|z-2i| < 2$ функция $f(z)$ имеет одну особую точку: $z = \pi i$ — полюс первого порядка. По формуле (12) получаем

$$\underset{z=\pi i}{\operatorname{res}} f(z) = \frac{1}{(1+e^z)'}\bigg|_{z=\pi i} = -1.$$

По формуле (14) находим $I = -2\pi i$.

Следствие. *Пусть функция $f(z)$ регулярна во всей расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая вычет в точке $z=\infty$, равна нулю, т. е.*

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z) + \underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = 0. \tag{15}$$

В равенстве (15) z_k $(k=\overline{1,n})$ — *все конечные особые точки функции $f(z)$, а точка $z=\infty$ является либо особой точкой, либо точкой регулярности функции $f(z)$.*

○ Пусть γ — ориентированная в положительном направлении окружность $|z| = R$, где радиус R выбран так, что все точки z_k $(k=\overline{1,n})$ лежат внутри γ. По теореме 1

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z). \tag{16}$$

С другой стороны, по определению вычета в точке $z=\infty$,

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z). \tag{17}$$

Сложив равенства (16) и (17), получаем равенство (15). ●

Пример 15. Вычислим интеграл

$$J = \oint\limits_{|z-1+i|=2} \frac{e^z}{z^2(z^2-4)}\,dz.$$

Внутри контура интегрирования (окружности радиуса 2 с центром в точке $1-i$) содержатся две особые точки: полюс второго порядка в точке $z=0$ и полюс первого порядка в точке $z=2$. Поэтому

$$J = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=2} f(z)\right], \quad \text{где}$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \left(\frac{e^z}{z^2-4}\right)'\Bigg|_{z=0} = e^z\left(\frac{1}{z^2-4} - \frac{2z}{(z^2-4)^2}\right)\Bigg|_{z=0} = -\frac{1}{4}\,.$$

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \frac{e^z}{z^2(z+2)}\Bigg|_{z=2} = \frac{e^2}{16}\,, \quad J = \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{e^2}{4}-1\right) = \frac{\pi i}{2}\left(\frac{e^2}{4}-1\right).$$

Пример 16. Вычислим интеграл

$$J = \oint\limits_{|z-1-i|=3} \frac{z^2\operatorname{sh}\dfrac{3}{z}}{z-5}\,dz.$$

Функция $f(z) = \dfrac{z^2\operatorname{sh}\dfrac{3}{z}}{z-5}$ имеет две конечные особые точки: $z=0$ (существенно особая точка, лежит внутри окружности радиуса 3 с центром в точке $1+i$) и $z=5$ — полюс первого порядка (лежит вне этой окружности). Используя следствие из теоремы 1, получаем

$$J = 2\pi i\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=5} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right), \quad \text{где}$$

$$\operatorname*{res}_{z=5} f(z) = \left(z^2\operatorname{sh}\frac{3}{z}\right)\Bigg|_{z=5} = 25\operatorname{sh}\frac{3}{5}\,.$$

Для нахождения вычета в точке $z=\infty$ преобразуем $f(z)$ и найдем коэффициент при $\dfrac{1}{z}$ ее ряда Лорана в точке $z=\infty$.

Имеем

$$f(z) = \frac{z}{1-\dfrac{5}{z}}\operatorname{sh}\frac{3}{z} = z\left(1+\frac{5}{z}+\frac{25}{z^2}+\ldots\right)\left(\frac{3}{z}-\left(\frac{3}{z}\right)^3\frac{1}{6}+\ldots\right) =$$

$$= z\left(\ldots+\frac{15}{z^2}+\ldots\right),$$

откуда $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -15$, $J = 2\pi i\left(15-25\operatorname{sh}\dfrac{3}{5}\right)$.

Обобщением теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек, и непрерывна вплоть до границы Γ этой области, а Γ состоит из конечного числа ограниченных кусочно-гладких кривых. Тогда*

а) если область D не содержит точку $z = \infty$, то

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z); \tag{18}$$

б) если точка $z = \infty$ принадлежит области D, то

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right). \tag{19}$$

Здесь z_k $(k = \overline{1,n})$ — все конечные особые точки, контур Γ ориентирован положительно.

Доказательство. а) Пусть D — ограниченная область, $\widetilde{D}$ — многосвязная область, полученная из области D выбрасыванием кругов K_j достаточно малого радиуса с центрами в точках z_j $(j = \overline{1,n})$. По теореме 2 § 8 интеграл по границе $\widetilde{\Gamma}$ области $\widetilde{D}$ от функции $f(z)$ равен нулю, т. е.

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \oint_{|z-z_j|=\rho} f(z)\,dz = 0 \tag{20}$$

(граница круга K_j ориентирована по часовой стрелке). Так как

$$\oint_{|z-z_j|=\rho} f(z)\,dz = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z), \tag{21}$$

то из (20) и (21) следует формула (18).

б) Пусть $K = \{|z| < R\}$, где R выбрано так, чтобы круг K содержал внутри себя границу Γ области D и все точки z_j $(j = \overline{1,n})$.

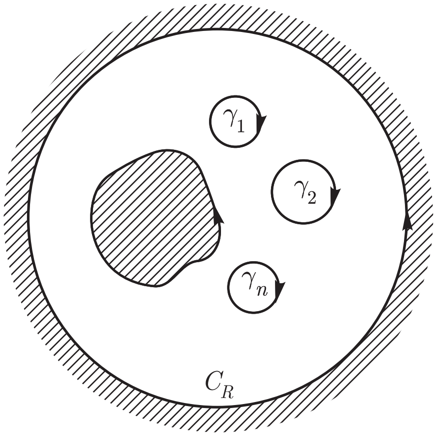

Рис. 62

Рассмотрим область $\widetilde{G}$, полученную из области $G = D \cap K$ выбрасыванием кругов $K_j = \{|z - z_j| < \rho\}$, $j = \overline{1, n}$, указанных выше. Граница $\widetilde{\Gamma}$ области $\widetilde{G}$ (см. рис. 62) состоит из границы Γ области D, окружностей $\gamma_j = \{|z - z_j| = \rho\}$, $j = \overline{1, n}$ и окружности $C_R = \{|z| = R\}$, кривые C_R и Γ ориентированы положительно (против часовой стрелки), а окружности γ_j — по часовой стрелке. По теореме 2 § 8

$$\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz + \sum_{j=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz + \oint\limits_{C_R} f(z)\,dz = 0,$$

откуда, используя равенство (21) и формулу $\oint\limits_{C_R} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$, получаем формулу (19). ●

§ 22. Применение теории вычетов к вычислению интегралов

1. Вычисление интегралов $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi$

Покажем, что интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция и интеграл I сходится, можно свести к интегралу от рациональной функции по окружности $|z| = 1$.

○ Пусть $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Тогда

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$
$$dz = ie^{i\varphi}d\varphi = izd\varphi, \quad d\varphi = \frac{1}{iz}\,dz.$$

Поэтому

$$I = \oint\limits_{|z|=1} R_1 dz,$$

где

$$R_1(z) = \frac{1}{iz}\,R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) -$$

рациональная функция. Этот интеграл можно вычислить по формулам § 21. ●

Пример 1. Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2},$$

где $|a| \neq 1$.

После замены $z = e^{i\varphi}$ получаем

$$I = \oint\limits_{|z|=1} R_1(z)dz,$$

где

$$R_1(z) = \frac{1}{iz}\,\frac{1}{1 - a\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + a^2} = \frac{1}{-ia(z-a)\left(z - \dfrac{1}{a}\right)}.$$

1) Если $|a| < 1$, то

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=a} R_1(z) = 2\pi i\, \frac{1}{-ia\left(z - \dfrac{1}{a}\right)}\Bigg|_{z=a} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

2) Если $|a| > 1$, то

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\frac{1}{a}} R_1(z) = 2\pi i\, \frac{1}{-ia(z-a)}\Bigg|_{z=\frac{1}{a}} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}.$$

2. Вычисление интегралов от регулярных ветвей аналитических функций

Покажем на примерах, как вычисляются интегралы от функций, содержащих регулярные ветви аналитических функций.

Пример 2. Вычислим интеграл

$$I = \oint\limits_{|z-8|=8} \frac{g(z)}{(z-8)^2}\, dz,$$

где $g(z)$ — регулярная в круге $|z-8| < 8$ ветвь функции $\sqrt[3]{z}$ такая, что $g(8) = 2$.

Используя формулу (8) § 19 и формулу (10) § 21, находим

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=8} \frac{g(z)}{(z-8)^2} = 2\pi i g'(z)|_{z=8} = 2\pi i \left. \frac{g(z)}{3z} \right|_{z=8} = \frac{\pi i}{6}\,.$$

Пример 3. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\dfrac{z-1}{3-z}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[1, 3]$ такая, что $f(2+i\cdot 0) = 0$. Вычислим интегралы

$$I_1 = \oint\limits_{|z-1-2i|=1} \frac{f(z)}{z-1-2i}\, dz, \quad I_2 = \oint\limits_{|z|=4} f(z)dz.$$

1) Так как

$$f(z) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi i}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \left(\frac{1}{(1-i)^n} - i^n \right) (z-1-2i)^n$$

при $|z-1-2i| < 2$ (§ 18, п. 4, пример 7), то точка $z = 1+2i$ является полюсом первого порядка функции $\dfrac{f(z)}{z-1-2i}$. Поэтому $I_1 = 2\pi i f(1+2i) = \pi i \ln 2 - \dfrac{3\pi^2}{2}$.

2) Так как

$$f(z) = \pi i + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \ldots$$

при $|z| > 3$ (§ 18, п. 4, пример 7), то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -2$ и поэтому $I_2 = -2\pi i \cdot (-2) = 4\pi i$.

3. Вычисление интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Лемма 1. *Пусть функция* $f(z)$ *регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$, *за исключением конечных особых точек* $z_1, z_2, \ldots z_n$, *непрерывна вплоть до действительной оси* $\operatorname{Im} z = 0$, *интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *сходится и*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0, \tag{1}$$

где C_R — *полуокружность* $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{2}$$

где $\sum\limits_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z)$.

Напомним, что основная теорема о вычетах доказана для ограниченной области. В данном случае область $\operatorname{Im} z > 0$ неограничена, поэтому для справедливости формулы (2) нужно дополнительное условие на поведение функции $f(z)$ при $z \to \infty$, а именно условие (1).

○ Рассмотрим полукруг $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$, такой, что точки z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, принадлежат этому полукругу (рис. 63). Граница этого полукруга состоит из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности C_R. По основной теореме о вычетах получаем

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),$$

откуда при $R \to \infty$ с учетом условия (1) получается формула (2). ●

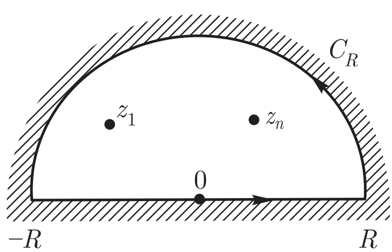

Рис. 63

По формуле (2) можно вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx, \tag{3}$$

где рациональная функция $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $P_n(z)$, $Q_m(z)$ — многочлены степеней соответственно n, m, и интеграл (3) сходится. Будем считать, что многочлены $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ не имеют общих нулей, так как иначе дробь $R(z)$ можно упростить сокращением числителя и знаменателя на общие множители. В курсе математического анализа доказано, что интеграл (3) сходится, если $Q_m(x) \neq 0$ и $m \geqslant n+2$, так как

$$|R(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^2} \tag{4}$$

при $|z| \geqslant R_0$, $R_0 > 0$, $M > 0$. Из оценки (4) следует, что

$$\left| \int_{C_R} R(z)dz \right| \leqslant \frac{M\pi}{R} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы и по формуле (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z). \tag{5}$$

Аналогично можно доказать формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z). \tag{6}$$

Для этого нужно рассмотреть полукруг $|z| < R$, $\operatorname{Im} z < 0$ (рис. 64)

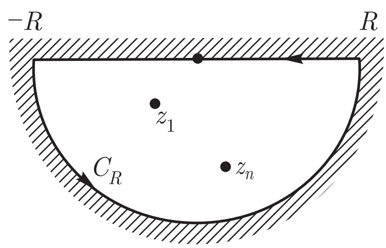

Рис. 64

З а м е ч а н и е 1. Точки z_k являются полюсами функции $R(z)$, поэтому вычисление интеграла (3) сводится к вычислению производных от рациональных функций и, следовательно, нет необходимости находить неопределенный интеграл $\int R(x)dx$.

З а м е ч а н и е 2. Если коэффициенты многочлена $Q_m(z)$ действительны, то его нули являются комплексно сопряженными, поэтому вычисления интеграла (3) по формулам (5), (6) одинаковы, но если коэффициенты многочлена $Q_m(z)$ не являются действительными, то число его нулей в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ может быть различным. Тогда из формул (5), (6) естественно выбрать одну, по которой вычисления будут проще.

Пример 4. Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$$

По формуле (5) находим

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4} = 2\pi i \, \frac{1}{3!} \, \frac{d^3}{dz^3} \, \frac{1}{(z+i)^4}\bigg|_{z=i} = \frac{5\pi}{16}.$$

Пример 5. Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x-i)^5}\, dx.$$

В полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функция $\dfrac{z^2}{(z-i)^5}$ имеет полюс 5-го порядка в точке $z = i$, а в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ эта функция регулярна. По формуле (6) находим $I = 0$.

Часто в задачах условие (1) приходится доказывать в случае, когда $f(z) = g(z)e^{i\alpha z}$, т. е. оценивать интеграл

$$I_R = \int\limits_{C_R} g(z)e^{i\alpha z} dz \tag{7}$$

при $R \to \infty$, где C_R — полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Лемма 2 (*Жордана*). *Пусть в интеграле (7) функция $g(z)$ непрерывна при $|z| \geqslant R_0 > 0$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $\alpha > 0$ и*

$$M_R = \max_{z \in C_R} |g(z)| \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty. \tag{8}$$

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} g(z)e^{i\alpha z} dz = 0. \tag{9}$$

○ Оценим интеграл (7). Так как C_R: $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то $dz = iRe^{i\varphi}d\varphi$,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha R(\cos\varphi + i\sin\varphi)}| = e^{-\alpha R\sin\varphi},$$

поэтому

$$|I_R| \leqslant M_R R \int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\varphi} d\varphi.$$

График функции $\sin\varphi$ на отрезке $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ симметричен относительно прямой $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ и $\sin\varphi \geqslant \dfrac{2}{\pi}\varphi$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 65). Отсюда с учетом условия $\alpha > 0$ получаем

$$\int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\varphi} d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\varphi} d\varphi \leqslant 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi}\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{\alpha R}\left(1 - e^{-\alpha R}\right).$$

Из этой оценки и условия (8) следует, что

$$|I_R| \leqslant \frac{M_R\pi}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha R}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty. \qquad \bullet$$

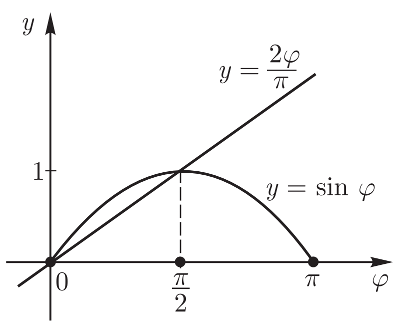

Рис. 65

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx, \tag{10}$$

где $\alpha > 0$, $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$. В курсе математического анализа доказано, что интеграл (10) сходится, если $Q_m(z) \neq 0$ и $m \geqslant n + 1$. Тогда выполняются условия лемм 1, 2 и по формуле (2) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[e^{i\alpha z} R(z)\right]. \tag{11}$$

При этом если функция $R(x)$ действительна, то приравнивая в формуле (11) действительные и мнимые части, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x \, dx = -2\pi \operatorname{Im} \left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} (e^{i\alpha z} R(z))\right], \tag{12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \alpha x \, dx = 2\pi \operatorname{Re} \left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} (e^{i\alpha z} R(z))\right]. \tag{13}$$

Пример 6. Вычислим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2 - 2x + 5} \, dx.$$

Функция $f(z) = \dfrac{(z-1)e^{5iz}}{z^2 - 2z + 5}$ имеет в верхней полуплоскости один полюс первого порядка — точку $z = 1+2i$. Найдем вычет $f(z)$ в этой точке (§ 21, формула (12)):

$$\operatorname*{res}_{z=1+2i} f(z) = \left.\frac{(z-1)e^{5iz}}{(z^2-2z+5)'}\right|_{z=1+2i} = \frac{1}{2} e^{-10} (\cos 5 + i \sin 5).$$

По формуле (12) получаем

$$I = -\pi e^{-10} \sin 5.$$

З а м е ч а н и е 3. Если в интегралах (11)–(13) $\alpha < 0$, то сразу эти формулы применять нельзя, нужно предварительно сделать замену $x = -\tilde{x}$.

З а м е ч а н и е 4. В формулах (11)–(13) точки z_k — полюсы функции $e^{i\alpha z} R(z)$, поэтому интегралы (11)–(13) вычисляются при помощи производных. Следовательно, нет необходимости находить неопределенные интегралы $\int e^{i\alpha x} R(z)\, dx$, $\int R(x) \cos \alpha x \, dx$, $\int R(x) \sin \alpha x \, dx$, которые часто нельзя выразить через элементарные функции.

Пример 7. Вычислим интегралы Френеля

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx, \quad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = e^{iz^2}$ в области D_R с границей Γ_R, показанной на рис. 66. Так как функция $f(z)$ регулярна в обла-

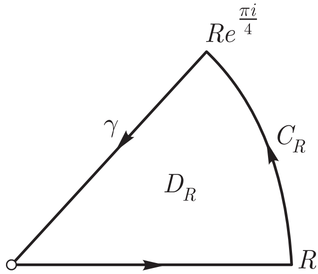

Рис. 66

сти D_R и непрерывна вплоть до границы Γ_R, то по интегральной теореме Коши $\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$, т. е.

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{\gamma} f(z)dz + \int\limits_0^R f(x)dx = 0. \tag{14}$$

Оценим интеграл $I_R = \int\limits_{C_R} f(z)dz$, где C_R — дуга окружности $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. При $z \in C_R$ получаем $|e^{iz^2}| = e^{-R^2 \sin 2\varphi} \leqslant e^{-\frac{4R^2}{\pi}\varphi}$, так как $\sin 2\varphi \geqslant \dfrac{4}{\pi}\varphi$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$|I_R| \leqslant R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{4R^2}{\pi}\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{4R}\,(1 - e^{-R^2}) \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Теперь рассмотрим интеграл $I_\gamma = \int\limits_\gamma f(z)dz = -\int\limits_{\gamma^{-1}} f(z)dz$, где $\gamma^{-1} : z = te^{\frac{\pi i}{4}}$, $0 \leqslant t \leqslant R$. Поэтому $I_\gamma = -e^{\frac{\pi i}{4}} \int\limits_0^R e^{-t^2} dt$. Переходя в равенстве (14) к пределу при $R \to \infty$, получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{\frac{\pi i}{4}} \int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt. \tag{15}$$

Из курса математического анализа известно, что

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Приравнивая действительные и мнимые части в формуле (15), находим

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

4. Вычисление интегралов $\int\limits_0^\infty x^\alpha R(x)dx$

Покажем на примерах способ вычисления интеграла $\int\limits_0^\infty x^\alpha R(x)dx$ с помощью теории вычетов в случае, когда этот интеграл сходится и α — действительное число.

Пример 8. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx. \tag{16}$$

В комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ функция $f(z) = \sqrt[3]{|z|}e^{i\frac{\varphi}{3}}$, $0 < \varphi < 2\pi$, является регулярной ветвью аналитической функции $\sqrt[3]{z}$ (§ 19).

Рассмотрим область D — круг $|z| < R$, $R > 8$, с разрезом по радиусу $[0, R]$. Граница этой области $\Gamma = \gamma_+ \cup C_R \cup \gamma_-$, где γ_+ — верхний берег разреза, C_R — окружность $|z| = R$, γ_- — нижний берег разреза, ориентация кривой Γ показана на рис. 67.

Функция $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z+8)^2}$ регулярна в области D, за исключением точки $z = -8$ — полюса 2-го порядка, и непрерывна вплоть до Γ. По теореме о вычетах (§ 21) получаем

$$\int_\Gamma g(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-8} g(z), \quad \text{т. е.}$$

$$\int_{C_R} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz + \int_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-8} \frac{f(z)}{(z+8)^2}. \tag{17}$$

Покажем, что именно с помощью этого равенства можно вычислить интеграл (16). Рассмотрим поочередно члены равенства (17).

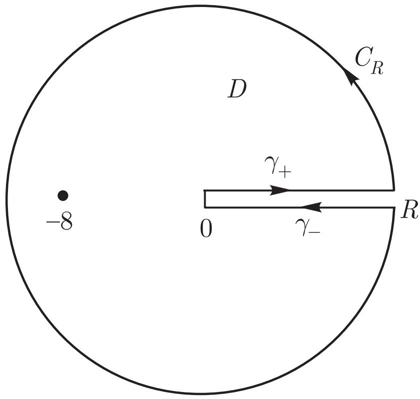

Рис. 67

1) Оценим интеграл $I_R = \int\limits_{C_R} \frac{f(z)}{(z+8)^2}dz$. При $|z| = R$ получаем $|f(z)| = \sqrt[3]{R}$, $|z+8| \geqslant ||z|-8| = R-8 > 0$, откуда $\frac{1}{|z+8|} \leqslant \frac{1}{R-8}$. Поэтому

$$|I_R| \leqslant \frac{\sqrt[3]{R}}{(R-8)^2} \cdot 2\pi R \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

2) Если $z \in \gamma_+$, то $\varphi = 0$ и $f(z) = f(x+i0) = \sqrt[3]{x} \geqslant 0$. Поэтому $I_1 = \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z+8)^2}dz = \int\limits_0^R \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}dx$. Отметим, что при $R \to \infty$ этот интеграл стремится к искомому интегралу (16).

3) Если $z \in \gamma_-$, то $\varphi = 2\pi$ и $f(z) = f(x-i0) = \sqrt[3]{x}e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Поэтому интеграл

$$I_2 = \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz = -\int\limits_{\gamma_-^{-1}} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int\limits_0^R \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx =$$

$$= -e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot I_1 \to -e^{\frac{2\pi i}{3}} I$$

при $R \to \infty$.

4) Правая часть равенства (17) не зависит от R при $R > 8$ и

$$2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=-8} \frac{f(z)}{(z+8)^2} = 2\pi i f'(z)|_{z=-8} = 2\pi i \left.\frac{f(z)}{3z}\right|_{z=-8} = \\ = 2\pi i \cdot \frac{2}{3(-8)}\, e^{\frac{\pi i}{3}} = -\frac{\pi i}{6}\, e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

В результате из равенства (17) при $R \to \infty$ получаем

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) I = -\frac{\pi i}{6}\, e^{\frac{\pi i}{3}},$$

откуда

$$I = -\frac{\pi i e^{\frac{\pi i}{3}}}{6(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}})} = \frac{\pi}{12} \frac{1}{\dfrac{e^{\frac{\pi i}{3}} - e^{-\frac{\pi i}{3}}}{2i}} = \frac{\pi}{12 \sin \dfrac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Пример 9. Вычислим интеграл

$$I = -\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x}}. \tag{18}$$

В комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ функция $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{|z|}} e^{-\frac{i\varphi}{2}}$, $0 < \varphi < 2\pi$ является регулярной ветвью аналитической функции $\dfrac{1}{\sqrt{z}}$ (§ 19).

Рассмотрим область D — кольцо $\rho < |z| < R$ с разрезом по отрезку $[\rho, R]$, где $0 < \rho < 1$, $R > 1$. Ее граница Γ показана на рис. 68. Функция $\dfrac{f(z)}{z^2+1}$ регулярна в области D, за исключением двух полюсов первого порядка в точках $z = \pm i$, и непрерывна вплоть до Γ. По основной теореме о вычетах получаем

$$\int_{C_\rho} \frac{f(z)dz}{z^2+1} + \int_{C_R} \frac{f(z)dz}{z^2+1} + \int_{\gamma_+} \frac{f(z)dz}{z^2+1} + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)dz}{z^2+1} = \\ = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=i} \frac{f(z)}{z^2+1} + \operatorname*{res}_{z=-i} \frac{f(z)}{z^2+1} \right]. \tag{19}$$

Рассмотрим поочередно члены этого равенства.

1) Оценим интеграл $I_\rho = \int\limits_{C_\rho} \dfrac{f(z)dz}{z^2+1}$. При $|z| = \rho$ получаем $|f(z)| = \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}$, $|z^2+1| \geqslant ||z^2| - 1| = 1 - \rho^2 > 0$. Откуда $\dfrac{1}{|z^2+1|} \leqslant \dfrac{1}{1-\rho^2}$.

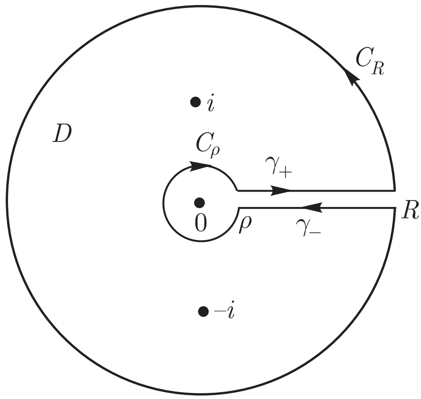

Рис. 68

Поэтому

$$|I_\rho| \leqslant \frac{2\pi\rho}{\sqrt{\rho}(1-\rho^2)} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

2) Аналогично

$$\left| \int\limits_{C_R} \frac{f(z)dz}{z^2+1} \right| \leqslant \frac{2\pi R}{\sqrt{R}(R^2-1)} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

3) Если $z \in \gamma_+$, то $\varphi = 0$ и $f(z) = f(x+i0) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)dz}{z^2+1} = \int\limits_{\rho}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x}}\,.$$

Отметим, что при $\rho \to 0$, $R \to \infty$ этот интеграл стремится к исходному интегралу (18).

4) Если $z \in \gamma_-$, то $\varphi = 2\pi$ и $f(z) = f(x-i0) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-\pi i}$, поэтому

$$\int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)dz}{z^2+1} = -e^{-\pi i} \int\limits_{\rho}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x}} = I_1.$$

5) Правая часть равенства (19) не зависит от ρ, R и равна

$$2\pi i \left[\frac{f(z)}{2z}\Big|_{z=i} + \frac{f(z)}{2z}\Big|_{z=-i} \right] = 2\pi i \left[\frac{1}{2i}\, e^{-\frac{\pi i}{4}} - \frac{1}{2i}\, e^{-\frac{3\pi i}{4}} \right] =$$

$$= \pi\left(e^{-\frac{\pi i}{4}} + e^{\frac{\pi i}{4}}\right) = 2\pi \cos\frac{\pi}{4}\,.$$

В результате из равенства (19) при $\rho \to 0$, $R \to \infty$ получаем $2I = 2\pi \cos\dfrac{\pi}{4}$, $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Обратимся к интегралу, при вычислении которого используется понятие регулярной ветви функции $\operatorname{Ln} z$.

Пример 10. Вычислим интеграл

$$J = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)(x+2)^2}\,dx. \tag{20}$$

В комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ функция $\ln z = \ln|z| + i\varphi$, $0 < \varphi < 2\pi$ является регулярной ветвью аналитической функции $\operatorname{Ln} z$ (§ 18).

Обозначим $R(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)^2}$, $f(z) = R(z)\ln^2 z$ и рассмотрим область D, граница которой Γ показана на рис. 68, где $0 < \rho < 1$, $R > 2$. В этой области функция $f(z)$ регулярна, за исключением точек $z = -1$, $z = -2$, и непрерывна вплоть до Γ. По теореме о вычетах (§ 21, теорема 2) получаем

$$\int_{C_\rho} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{\gamma_+} f(z)dz + \int_{\gamma_-} f(z)dz =$$
$$= 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-2} f(z)\right]. \tag{21}$$

Рассмотрим поочередно члены этого равенства. Так как $|\ln z| \leqslant |\ln|z|| + 2\pi$, то

$$\left|\int_{C_\rho} f(z)dz\right| = \left|\int_{C_\rho} \frac{\ln^2 z\,dz}{(z+1)(z+2)^2}\right| \leqslant \frac{(|\ln\rho| + 2\pi)^2 2\pi\rho}{(1-\rho)(2-\rho)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0,$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{C_R} \frac{\ln^2 z\,dz}{(z+1)(z+2)^2}\right| \leqslant \frac{(\ln R + 2\pi)^2 2\pi R}{(R-1)(R-2)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Если $z \in \gamma_+$, то $\ln z = \ln x$, а если $z \in \gamma_-$, то $\ln z = \ln x + 2\pi i$. Так как сумма интегралов по γ_+ и γ_- в левой части (21) равна

$$\int_\rho^R \ln^2 x R(x)dx - \int_\rho^R (\ln x + 2\pi i)^2 R(x)dx = -4\pi i\int_\rho^R \ln x R(x)dx + 4\pi^2\int_\rho^R R(x)dx,$$

то переходя в левой части равенства к пределу при $\rho \to 0$, $R \to \infty$, получаем $-4\pi i J + 4\pi^2 J_1$, где $J_1 = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$. Интеграл J_1 можно вычислить, представив подынтегральную функцию в виде суммы простых дробей $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$. Тогда

$$J_1=\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right]dx=$$
$$=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{x+2}\Bigg|_0^{+\infty}=\ln 2-\frac{1}{2}\,.$$

Найдем значение правой части (21), которая не зависит от ρ и R. Так как $z=-1$ — полюс первого порядка, а $z=-2$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=\frac{\ln^2 z}{(z+2)^2}\bigg|_{z=-1}=(i\pi)^2=-\pi^2,$$
$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z)=\left(\frac{\ln^2 z}{z+1}\right)'\bigg|_{z=-2}=\left[\frac{2\ln z}{z(z+1)}-\frac{\ln^2 z}{(z+1)^2}\right]\bigg|_{z=-2}=$$
$$=\ln 2+i\pi-(\ln 2+i\pi)^2=\pi^2+\ln 2-\ln^2 2+i\pi(1-2\ln 2).$$

Из равенства (21) следует, что

$$-4\pi iJ+4\pi^2(\ln 2-\tfrac{1}{2})=2\pi i[\pi^2+\ln 2-\ln^2 2+i\pi(1-2\ln 2)],$$

откуда находим $J=\dfrac{1}{2}(\ln^2 2-\ln 2-\pi^2)$.

5. Вычисление интегралов $\int\limits_a^b(x-a)^\alpha(b-x)^\beta R(x)dx$

Покажем на примерах способ вычисления с помощью теории вычетов интеграла

$$\int\limits_a^b(x-a)^\alpha(b-x)^\beta R(x)dx,$$

где $R(x)$ — рациональная функция, $a<b$, α, β — действительные числа такие, что степенная функция $(z-a)^\alpha(b-z)^\beta$ имеет регулярные ветви в плоскости с разрезом по отрезку $[a,b]$.

Пример 11. Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}{x+1}\,dx. \tag{22}$$

В комплексной плоскости с разрезом по отрезку $[0,\,2]$ функция

$$f(z) = \sqrt[3]{|z^2(2-z)|}\,e^{\frac{i}{3}(2\Delta\varphi_1+\Delta\varphi_2)} \tag{23}$$

является регулярной ветвью аналитической функции $\sqrt[3]{z^2(2-z)}$, такой, что $f(x+i0) = \sqrt[3]{x^2(2-x)} > 0$ при $0 < x < 2$ (§ 19, п. 4, пример 5), $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ находятся по рис. 69.

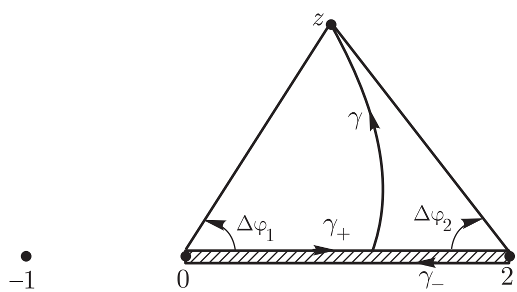

Рис. 69

Рассмотрим область D — внешность кривой Γ, состоящей из верхнего берега разреза γ_+ и нижнего берега γ_- (рис. 69). В этой области функция $\dfrac{f(z)}{z+1}$ регулярна, за исключением точки $z=-1$, и непрерывна вплоть до Γ. По теореме о вычетах (§ 21) получаем

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)dz}{z+1} + \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)dz}{z+1} = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=-1}\frac{f(z)}{z+1} + \operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{f(z)}{z+1}\right]. \tag{24}$$

Рассмотрим поочередно члены этого равенства.

1) Если $z\in\gamma_+$, то $f(x+i0) = \sqrt[3]{x^2(2-x)}$, поэтому

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)dz}{z+1} = \int\limits_0^2 \frac{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}{x+1}\,dx = I.$$

2) Если $z \in \gamma_-$, то по формуле (23) находим $f(x - i0) = e^{\frac{4\pi i}{3}} \sqrt[3]{x^2(2-x)}$, поэтому

$$I_2 = \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)dz}{z+1} = -e^{\frac{4\pi i}{3}} \int\limits_0^2 \frac{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}{x+1}\,dx = -e^{\frac{4\pi i}{3}} I.$$

Следовательно,

$$I_1 + I_2 = \left(1 - e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) I.$$

В § 19, п. 4 (пример 5) было установлено, что $f(-1) = \sqrt[3]{3}e^{\frac{2\pi i}{3}}$, поэтому $\operatorname*{res}\limits_{z=-1} \dfrac{f(z)}{z+1} = f(-1) = \sqrt[3]{3}e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

4) Разложим функцию $\dfrac{f(z)}{z+1}$ в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < \infty$. Находим

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{z}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots .$$

В § 19, п. 4, пример 5 показано, что если $2 < |z| < \infty$, то

$$f(z) = e^{-\frac{\pi i}{3}}\left(z - \frac{2}{3} - \frac{4}{9z} + \ldots\right).$$

Перемножая эти ряды, получаем

$$\frac{f(z)}{z+1} = e^{-\frac{\pi i}{3}}\left(1 - \frac{5}{3z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right).$$

Следовательно, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} \dfrac{f(z)}{z+1} = \dfrac{5}{3}e^{-\frac{\pi i}{3}} = -\dfrac{5}{3}e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

В результате из равенства (24) находим $\left(1 - e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) I = 2\pi i e^{\frac{2\pi i}{3}}\left(\sqrt[3]{3} - \dfrac{5}{3}\right)$, откуда

$$I = \frac{1}{1 - e^{\frac{4\pi i}{3}}} \cdot 2\pi i \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}\left(\sqrt[3]{3} - \frac{5}{3}\right) = \pi\left(\frac{5}{3} - \sqrt[3]{3}\right) \cdot \frac{1}{\dfrac{e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{2i}} =$$

$$= \pi\left(\frac{5}{3} - \sqrt[3]{3}\right)\frac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{5}{3} - \sqrt[3]{3}\right).$$

Пример 12. Вычислим интеграл

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,dx. \tag{25}$$

В комплексной плоскости с разрезом по отрезку $[1, 2]$ функция

$$f(z) = \sqrt{\left|\frac{z-1}{2-z}\right|}\, e^{\frac{i}{2}(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2)} \tag{26}$$

является регулярной ветвью аналитической функции $\sqrt{\dfrac{z-1}{2-z}}$ такой, что $f(x+i0) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}} > 0$ при $1 < x < 2$ (§ 19), где $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ находятся по рис. 70.

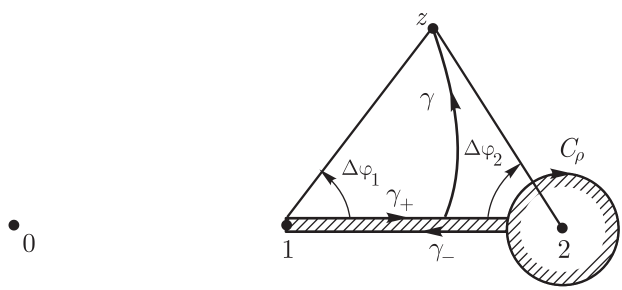

Рис. 70

Рассмотрим область D — внешность кривой Γ, показанной на рис. 70. В этой области функция $\dfrac{f(z)}{z^2}$ регулярна, за исключением точки $z = 0$, и непрерывна вплоть до Γ. По теореме о вычетах (§ 21, теорема 2) получаем

$$\int_{\gamma_+} \frac{f(z)}{z^2}\,dz + \int_{\gamma_-} \frac{f(z)}{z^2}\,dz + \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=0} \frac{f(z)}{z^2} + \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{f(z)}{z^2}\right]. \tag{27}$$

Рассмотрим члены этого равенства.

1) Пусть $z \in C_\rho : |z-2| = \rho$. Тогда $|z-1| = |(z-2)+1| \leqslant |z-2|+1 = \rho + 1$, $|z|^2 = |(z-2)+2|^2 \geqslant ||z-2|-2|^2 = (2-\rho)^2$, поэтому

$\dfrac{1}{|z|^2} \leqslant \dfrac{1}{(2-\rho)^2}$. Следовательно,

$$\left| \int\limits_{C_\rho} \frac{f(z)}{z^2}\,dz \right| \leqslant \frac{\sqrt{\rho+1}\cdot 2\pi\rho}{(2-\rho)^2\sqrt{\rho}} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

2) Если $z \in \gamma_-$, то по формуле (26) находим

$$f(x-i0) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}e^{\pi i} = -\sqrt{\frac{x-1}{2-x}},$$

поэтому

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)}{z^2}\,dz + \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)}{z^2}\,dz = \int\limits_1^{2-\rho} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}dx - \int\limits_1^{2-\rho} \frac{1}{x^2}\cdot(-1)\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}dx =$$

$$= 2\int\limits_1^{2-\rho} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}dx \to 2I \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

3) Как и в § 20, находим $f'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{z-1}{2-z}}}\left(\dfrac{z-1}{2-z}\right)'$, откуда

$f'(z) = \dfrac{f(z)}{2(z-1)(2-z)}$, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{f(z)}{z^2} = f'(z)|_{z=0} = \left.\frac{f(z)}{2(z-1)(2-z)}\right|_{z=0} = \frac{i}{\sqrt{2}\cdot 2\cdot(-1)\cdot 2} = \frac{-i\sqrt{2}}{8}.$$

4) Из формулы (26) следует, что при $|z| > 2$ функция $f(z)$ ограничена, поэтому

$$\frac{f(z)}{z^2} = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots$$

и $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} \dfrac{f(z)}{z^2} = 0$.

В результате, переходя к пределу в равенстве (27) при $\rho \to 0$, получаем $2I = 2\pi i\dfrac{-i\sqrt{2}}{8}$, откуда $I = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

Пример 13. Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{(x+2)\sqrt[4]{(x+1)(2-x)^3}}\,. \tag{28}$$

В комплексной плоскости с разрезом по отрезку $[-1, 2]$ функция

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{|(z+1)(2-z)^3|}}\, e^{-\frac{i}{4}(\Delta\varphi_1 + 3\Delta\varphi_2)} \tag{29}$$

является регулярной ветвью аналитической функции $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(z+1)(2-z)^3}}$ такой, что $f(x+i0) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(x+1)(2-x)^3}}$ при $-1 < x < 2$ (§ 19, п. 4, пример 4), где $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$ находятся по рис. 71.

Рассмотрим область D — внешность кривой Γ, показанной на рис. 71. В этой области функция $\dfrac{f(z)}{z+2}$ регулярна, за исключением точки $z = -2$, и непрерывна вплоть до Γ. По теореме о вычетах (§ 21) получаем

$$\int\limits_{C_\rho} \frac{f(z)dz}{z+2} + \int\limits_{C_{\rho_1}} \frac{f(z)dz}{z+2} + \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)dz}{z+2} + \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)dz}{z+2} =$$

$$= 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=-2} \frac{f(z)}{z+2} + \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{f(z)}{z+2} \right]. \tag{30}$$

Рассмотрим члены этого равенства.

1) Пусть $z \in C_\rho : |z+1| = \rho$. Тогда $|z+2| = |(z+1)+1| \geqslant ||z+1|-1| = 1-\rho$, поэтому $\dfrac{1}{|z+2|} \leqslant \dfrac{1}{1-\rho}$, $|2-z| = |3-(z+1)| \geqslant |3-|z+1|| = 3-\rho$,

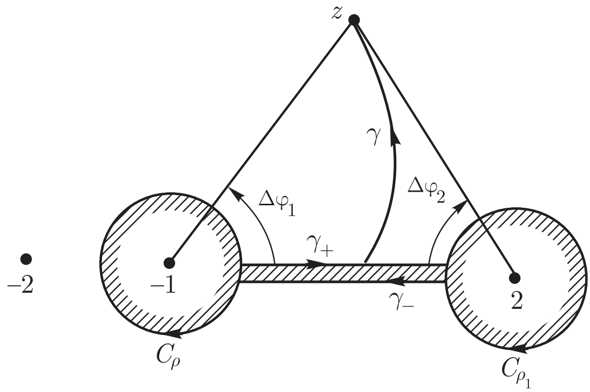

Рис. 71

поэтому $\dfrac{1}{|2-z|} \leqslant \dfrac{1}{3-\rho}$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{C_\rho} \frac{f(z)}{z+2}\,dz\right| \leqslant \frac{2\pi\rho}{(1-\rho)\sqrt[4]{\rho}\sqrt[4]{(3-\rho)^3}} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

2) Аналогично доказывается, что

$$\int\limits_{C_{\rho_1}} \frac{f(z)}{z+2}\,dz \to 0 \quad \text{при} \quad \rho_1 \to 0.$$

3) При $z \in \gamma_-$ по формуле (29) находим

$$f(x-i0) = \frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)(2-x)^3}}\,e^{-\frac{2\pi i}{4}}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)dz}{z+2} + \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)dz}{z+2} =$$

$$= (1-e^{-\frac{2\pi i}{4}}) \int\limits_{-1+\rho}^{2-\rho_1} \frac{dx}{(x+2)\sqrt[4]{(x+1)(2-x)^3}} \to (1-e^{-\frac{2\pi i}{4}})I$$

при $\rho \to 0$, $\rho_1 \to 0$.

4) По формуле (29) находим

$$f(-2) = \frac{1}{\sqrt[4]{|(-1)4^3|}}\,e^{-\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,e^{-\frac{\pi i}{4}},$$

поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=-2} \frac{f(z)}{z+2} = f(-2) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

5) При $z \to \infty$ получаем $f(z) \to 0$ и $\dfrac{1}{z+2} \to 0$, поэтому $\dfrac{f(z)}{z+2} = \dfrac{c_{-2}}{z^2} + \dfrac{c_{-3}}{z^3} + \ldots$ при $|z| > 2$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{f(z)}{z+2} = 0.$$

В результате, переходя в равенстве (30) к пределу при $\rho \to 0$, $\rho_1 \to 0$, получаем

$$(1-e^{-\frac{2\pi i}{4}})I = 2\pi i\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,e^{-\frac{\pi i}{4}},$$

откуда

$$I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,\frac{1}{\dfrac{e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{\frac{-\pi i}{4}}}{2i}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4\sin\dfrac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}.$$

6. Вычисление интегралов $\int\limits_{0}^{+\infty} R(x)dx$

Рассмотрим способ вычисления интегралов от рациональных функций, не являющихся четными (в отличие от рациональной функции из примера 4). В этом случае теорию вычетов применяют к функции $R(z)\ln z$, где $\ln z$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln} z$ в плоскости с разрезом по лучу $[0; +\infty)$.

Пример 14. Вычислим интеграл

$$J = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^2}\,.$$

Пусть $\ln z$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln} z$ в плоскости с разрезом по лучу $[0;\, +\infty)$ такая, что $\ln z = \ln|z| + i\varphi$, где $0 < \varphi < 2\pi$. Тогда на верхнем берегу разреза $z = x + i0$ $(x > 0)$, $\varphi = 0$, $\ln(x + i0) = \ln x$, а на нижнем берегу разреза $z = x - i0$ $(x > 0)$, $\varphi = 2\pi$ и $\ln(x - i0) = \ln x + 2\pi i$.

Обозначим $R(z) = \dfrac{1}{(z^3+1)^2}$, $f(z) = \ln z R(z)$, $I_\Gamma = \int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, где Γ — контур, указанный на рис. 68. Тогда

$$I_\Gamma = \int\limits_{\rho}^{R} \ln x R(x)dx + \int\limits_{R}^{\rho} (\ln x + 2\pi i)R(x)dx + \int\limits_{C_\rho} f(z)dz + \int\limits_{C_R} f(z)dz. \tag{31}$$

Функция $f(z)$ имеет внутри контура Γ полюсы в точках $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{3}}$, $k = 1,\, 2,\, 3$, которые являются нулями функции $z^3 + 1$. По теореме о вычетах

$$I_\Gamma = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{32}$$

Как и в примере 10, нетрудно показать, что

$$\int\limits_{C_\rho} f(z)dz \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0, \qquad \int\limits_{C_R} f(z)dz \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Переходя в равенствах (31) и (32) к пределу при $\rho \to 0$, $R \to \infty$, получаем

$$-2\pi i \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^3+1)^2} = 2\pi i \sum_{k=1}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),$$

откуда

$$J = -2\pi i \sum_{k=1}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{33}$$

Так как z_1 — полюс второго порядка для функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{\ln z}{(z-z_2)^2(z-z_3)^2}\right]'_{z=z_1} =$$
$$= \frac{1}{z_1(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2} - \frac{2[2z_1-(z_2+z_3)]\ln z_1}{(z_1-z_2)^3(z_1-z_3)^3}.$$

Используя равенства $\ln z_1 = \pi i$, $(z_1-z_2)(z_1-z_3) = (z^3+1)'_{z=z_1} = 3z_1^2$, $z_1^3 = -1$, $z_1+z_2+z_3 = 0$, получаем

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{z_1}{9}(1-2\pi i).$$

Аналогично, учитывая, что $\ln z_2 = \dfrac{5}{3}\pi i$, $\ln z_2 = \dfrac{\pi i}{3}$, находим

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \frac{z_2}{9}\left(1-\frac{10}{3}\pi i\right), \quad \operatorname*{res}_{z=z_3} f(z) = \frac{z_3}{9}\left(1-\frac{2}{3}\pi i\right).$$

По формуле (33) находим

$$J = \frac{\pi i}{9}\left(2z_1 + \frac{10}{3}z_2 + \frac{2}{3}z_3\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Более подробная информация о вычислении несобственных интегралов с помощью вычетов содержится в [8, 11].

§ 23. Принцип аргумента. Теорема Руше

1. Принцип аргумента

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной односвязной области D, за исключением конечного числа полюсов, функции $f(z)$, $f'(z)$ непрерывны в области D вплоть до ее границы Γ*

и $f(z)|_{z\in\Gamma} \neq 0$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P\,, \tag{1}$$

где N — *число нулей,* P — *число полюсов функции* $f(z)$ *в области* D. *При этом каждый нуль функции* $f(z)$ *считается столько раз, какова его кратность, а каждый полюс столько раз, каков его порядок.*

○ Покажем, что число нулей функции $f(z)$ в области D конечно. Если функция $f(z)$ имеет бесконечное число нулей, то существует их предельная точка $z_0 \in D$, так как $f(z)|_{z\in\Gamma} \neq 0$. Тогда по теореме единственности $f(z) \equiv 0$, что противоречит условию $f(z)|_{z\in\Gamma} \neq 0$.

Таким образом, функция $F(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ имеет в области D конечное число полюсов — это полюсы и нули функции $f(z)$. По теореме о вычетах левая часть формулы (1) равна $\sum\limits_k \operatorname*{res}\limits_{z=z_k} F(z)$, где z_k — полюсы функции $F(z)$. Найдем эти вычеты.

В проколотой окрестности точки z_k имеем

$$f(z) = (z - z_k)^{n_k} f_k(z), \tag{2}$$

где $n_k > 0$, если z_k — нуль функции $f(z)$ кратности n_k, или $n_k < 0$, где n_k — порядок полюса z_k функции $f(z)$, функция $f_k(z)$ регулярна в точке z_k и $f_k(z_k) \neq 0$.

Из формулы (2) получаем

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_k}{z - z_k} + \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}\,.$$

Отсюда находим $\operatorname*{res}\limits_{z=z_k} F(z) = n_k$. Таким образом, левая часть формулы (1) равна $\sum\limits_k n_k$, в которой сумма положительных n_k равна N, а сумма отрицательных n_k равна $-P$. ●

Теорема 2 (*принцип аргумента*). *При условиях теоремы 1 справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg f(z) = N - P. \tag{3}$$

○ Пусть Γ — гладкая замкнутая кривая, заданная уравнением

$$z = z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

и пусть Γ' — образ кривой Γ при отображении $w = f(z)$. Тогда

$$J = \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int\limits_{\Gamma'} \frac{dw}{w} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f(z(t))z'(t)}{f(z(t))}\, dt. \tag{4}$$

Если $w = re^{i\varphi}$, $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $w = f(z(t))$, то

$$dw = e^{i\varphi} dr + rie^{i\varphi} d\varphi,$$

$$J = \int\limits_{\Gamma'} \frac{dw}{w} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\varphi} dr + rie^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi} d\varphi} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{r} + i \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi.$$

Так как $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{r} = \ln r(t)\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = \ln |f(z(t))|\Big|_{\alpha}^{\beta} = 0$, то

$$J = i \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi = i\Delta_{\Gamma'} \arg w = i\Delta_{\Gamma} \arg f(z). \tag{5}$$

Из (1), (4) и (5) получаем

$$i\Delta_{\Gamma} \arg f(z) = 2\pi i(N - P),$$

откуда следует равенство (3). ●

Формула (3) носит название «принцип аргумента».

Следствие. *Если функция $f(z)$ регулярна в ограниченной односвязной области D, непрерывна вплоть до ее границы Γ и $f(z) \neq 0$ при $\forall z \in \Gamma$, то*

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z). \tag{6}$$

Выясним геометрический смысл формулы (6).

Пусть Γ' — образ кривой Γ при отображении $w = f(z)$ (рис. 72). Тогда $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma} \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma'} \arg w$, поэтому N — число оборотов кривой Γ' вокруг точки $w = 0$.

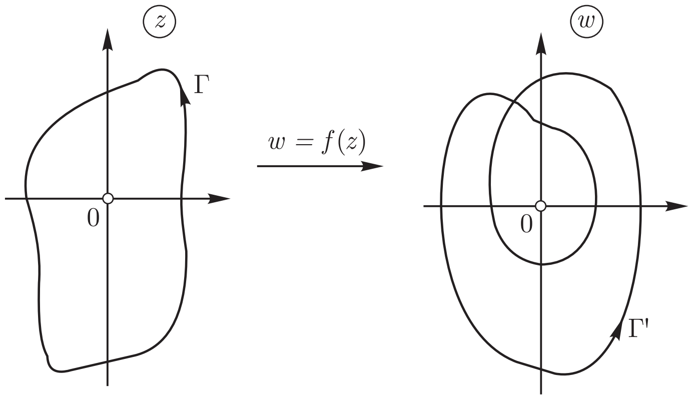

Рис. 72

2. Теорема Руше

Теорема 3 (*Руше*). *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в ограниченной односвязной области D, непрерывны вплоть до ее границы Γ и при $z \in \Gamma$ выполняется неравенство*

$$|f(z)| > |g(z)|. \tag{7}$$

Тогда функции $f(z)$ и $F(z) = f(z) + g(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей.

○ Пусть N_F и N_f — числа нулей соответственно функций $F(z)$ и $f(z)$ в области D. Из условия (6) следует, что при $z \in \Gamma$ выполняются неравенства

$$|f(z)| > 0, \quad |F(z)| \geqslant ||f(z)| - |g(z)|| > 0.$$

По формуле (5) и свойствам приращения аргумента получаем

$$N_F = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg F(z) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg\left[f(z)\Bigl(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Bigr)\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg f(z) + \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg\Bigl(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Bigr) =$$
$$= N_f + \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg\Bigl(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\Bigr).$$

Покажем, что

$$\frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)=0. \tag{8}$$

Пусть Γ' — образ кривой Γ при отображении $w=1+\dfrac{g(z)}{f(z)}$ (рис. 73). Так как при $z\in\Gamma$ выполняется неравенство

$$|w-1|=\frac{|g(z)|}{|f(z)|}<1,$$

то кривая Γ' принадлежит кругу $|w-1|<1$ (рис. 73), поэтому число оборотов кривой Γ' вокруг точки $w=0$ равно нулю и справедливо равенство (8). ●

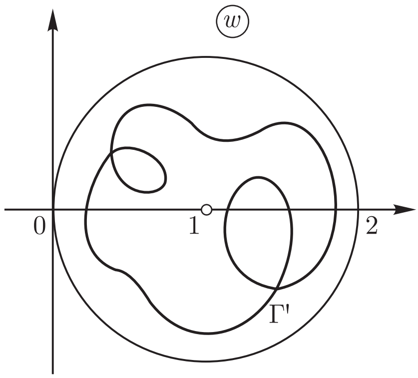

Рис. 73

Пример 1. Найдем число корней уравнения

$$z^9+6z^4+3z-1=0$$

внутри круга $|z|<1$.

Обозначим $f(z)=6z^4$, $g(z)=z^9+3z-1$. Если $z\in\Gamma: |z|=1$, то $|f(z)|=6$, $|g(z)|\leqslant|z|^9+3|z|+1=5$, откуда $|f(z)|>|g(z)|$ при $z\in\Gamma$. По теореме Руше число корней исходного уравнения в круге $|z|<1$ совпадает с числом корней уравнения $6z^4=0$, т. е. равно 4.

Пример 2. Докажем, что уравнение

$$z+\lambda-e^z=0,\quad \lambda>1, \tag{9}$$

в полуплоскости $\operatorname{Re} z<0$ имеет единственный и притом действительный корень.

Рассмотрим полукруг $D:\operatorname{Re} z<0,\ |z|<R$, где $R>\lambda+1$. Граница Γ области D состоит из отрезка $\gamma:[-iR,\,iR]$ и полуокружности $C_R:|z|<R,\ \operatorname{Re} z\leqslant 0$. Обозначим $f(z)=z+\lambda$, $g(z)=e^z$.

Если $z \in \gamma$, т. е. $z = iy$, $-R \leqslant y \leqslant R$, то $|f(z)| \geqslant |\lambda - |z|| \geqslant \lambda > 1$, а $|g(z)| = |e^{iy}| = 1$. Если $z \in C_R$, то $|f(z)| \geqslant ||z| - \lambda| \geqslant R - \lambda > 1$, $|g(z)| = e^x \leqslant 1$, так как $x \leqslant 0$.

По теореме Руше в области D число корней уравнения (9) равно числу корней уравнения $z + \lambda = 0$, т. е. равно 1. Этот корень уравнения (9) является действительным, так как левая часть уравнения (9) непрерывна при $z = x$, $x \leqslant 0$, положительна при $x \leqslant 0$ и стремится к $-\infty$ при $x \to -\infty$.

В § 14 доказано, что многочлен

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \tag{10}$$

с комплексными коэффициентами, где $a_0 \neq 0$, n — натуральное число, имеет в комплексной плоскости хотя бы один нуль. Докажем более общее утверждение.

Теорема 4 (*основная теорема высшей алгебры*). *Многочлен* (10) *в комплексной плоскости имеет ровно n нулей.*

○ Обозначим $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$. Тогда

$$P(z) = f(z) + g(z).$$

Так как $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{g(z)}{f(z)} = 0$, то существует такое число $R_0 > 0$, что $\dfrac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$ при $|z| \geqslant R_0$.

По теореме Руше многочлен $P(z)$ имеет в любом круге $|z| < R \leqslant R_0$ одинаковое число нулей с функцией $f(z) = z^n$, т. е. n. ●

Замечание. Если число R_0 такое, что $\dfrac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$ при $|z| \geqslant R_0$, то все нули функции $P(z)$ находятся в круге $|z| < R_0$.

§ 24. Мероморфные функции

Определение 1. *Функция $f(z)$ называется мероморфной, если она регулярна в комплексной области (не расширенной), за исключением полюсов, число которых может быть бесконечным, но в каждой ограниченной области их должно быть конечное число.*

Например, мероморфными являются функции $R(z)$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\dfrac{1}{\sin z}$, $\dfrac{1}{1 - e^z}$.

Рациональная функция $R(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ равна сумме многочлена и элементарных дробей [8]. Например, если полюсы $R(z)$ простые, т. е.

первого порядка, и $n \geqslant m$, то

$$R(z) = M_{n-m}(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k}\,, \tag{1}$$

где M_{n-m} — многочлен степени $n-m$, z_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, — нули функции $Q_m(z)$. Если же $n < m$, то

$$R(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k}\,. \tag{2}$$

Отметим, что числа A_k можно находить по формулам

$$A_k = \operatorname*{res}_{z=z_k} R(z) = \lim_{z \to z_k} \frac{(z - z_k)P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{P_n(z_k)}{Q'_m(z_k)}\,,$$

поэтому нет необходимости находить эти числа методом неопределенных коэффициентов.

В общем случае мероморфная функция $f(z)$ представляется в виде суммы многочлена и бесконечной суммы элементарных дробей при некоторых условиях на поведение $f(z)$ при $z \to \infty$. Рассмотрим простой из этих случаев (в более общем случае см. [3]).

1. Разложение мероморфной функции на элементарные дроби

Теорема. *Пусть мероморфная функция $f(z)$ регулярна в точке $z = 0$, ее полюсы z_k, $k = 1, 2, \ldots$, простые, занумерованные в порядке неубывания их модулей: $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots$, $A_k = \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)$. И пусть существует последовательность окружностей $C_\nu : |z| = r_\nu$, $0 < r_1 < r_2 < \ldots$ такая, что $\lim\limits_{\nu \to \infty} r_\nu = \infty$ и функция $f(z)$ ограничена на этой последовательности: $|f(z)| \leqslant M$ при $z \in C_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Тогда*

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right) \tag{3}$$

при $z \neq z_k$, причем в (3) сначала суммируются все члены суммы, для которых $|z| < r_1$, затем все члены, для которых $r_1 < |z_k| < r_2$ и т. д. Ряд (3) сходится равномерно в каждой ограниченной области D с выколотыми в ней полюсами функции $f(z)$.

○ Рассмотрим интеграл

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\nu} \frac{z f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta, \tag{4}$$

где $|z| < r_\nu$, $z \neq z_k$.

Обозначим $F(\zeta) = \dfrac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}$. По теореме о вычетах

$$I_\nu(z) = \operatorname*{res}_{\zeta=0} F(\zeta) + \operatorname*{res}_{\zeta=z} F(\zeta) + \sum_{|z_k|<r_\nu} \operatorname*{res}_{z=z_k} F(\zeta). \tag{5}$$

Найдем вычеты в этой формуле:

$$\operatorname*{res}_{\zeta=0} F(\zeta) = \left.\frac{zf(\zeta)}{\zeta - z}\right|_{\zeta=0} = -f(0),$$

$$\operatorname*{res}_{\zeta=z} F(\zeta) = \left.\frac{zf(\zeta)}{\zeta}\right|_{\zeta=z} = f(z),$$

$$\operatorname*{res}_{\zeta=z_k} F(\zeta) = \left.\frac{z}{\zeta(\zeta - z)}\right|_{\zeta=z_k} \cdot \operatorname*{res}_{\zeta=z_k} f(\zeta) =$$

$$= \frac{z}{z_k(z_k - z)} \cdot A_k = -A_k\left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right).$$

В результате из равенства (5) получаем

$$f(z) = f(0) + \sum_{|z_k|<r_\nu} A_k\left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right) + I_\nu(z). \tag{6}$$

Оценим интеграл $I_\nu(z)$. Пусть D — ограниченная область, не содержащая точки z_k, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда существует круг $K : |z| < R$ такой, что $D \subset K$. Если $r_\nu \geqslant R$, то для всех $z \in D$ получаем

$$|I_\nu(z)| \leqslant \frac{RM2\pi r_\nu}{2\pi r_\nu(r_\nu - R)} = \frac{RM}{r_\nu - R} \to 0 \quad \text{при} \quad r_\nu \to \infty.$$

Так как эта оценка не зависит от $z \in D$, то, переходя в равенстве (6) к пределу при $\nu \to \infty$, получаем равномерно сходящийся ряд (3). ●

З а м е ч а н и е. В теореме условие ограниченности функции $f(z)$ на окружностях C_ν можно заменить условием ограниченности этой функции на *правильной* последовательности кривых Γ_ν (см. [12]). В частности, Γ_ν может быть границей квадрата с вершинами в точках $r_\nu(\pm 1 \pm i)$, $0 < r_1 < r_2 < \ldots$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} r_\nu = \infty$ (рис. 74).

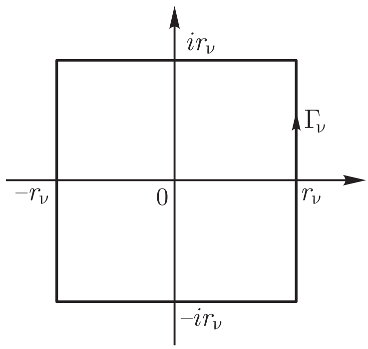

Рис. 74

Пример 1. Разложим на элементарные дроби функцию $\operatorname{ctg} z$.

Покажем, что для функции $f(z) = \operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$ выполняются все условия теоремы.

1) Если точка z принадлежит проколотой окрестности точки $z = 0$, то

$$f(z) = \frac{z\cos z - \sin z}{z\sin z} = \frac{z^3\left(-\dfrac{1}{3} + c_1 z + \ldots\right)}{z^2(1 + b_1 z + \ldots)} \to 0 \quad \text{при} \quad z \to 0,$$

т. е. функция $f(z)$ регулярна в точке $z = 0$ и $f(0) = 0$.

2) Точки $z_k = \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — простые полюсы функции $f(z)$ и

$$A_k = \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\pi k} \frac{\cos z}{\sin z} = \left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi k} = 1.$$

3) Покажем, что на сторонах Γ_ν квадратов с вершинами в точках $\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\nu\right)(\pm 1 \pm i)$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ функция $f(z)$ ограничена. При $z \in \Gamma_\nu$ получаем $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant \dfrac{2}{3\pi}$.

Пусть $z = \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\nu\right)i + x$. Тогда

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|1 + e^{2iz}|}{|1 - e^{2iz}|} \leqslant \frac{1 + e^{-\pi - 2\pi\nu}}{1 - e^{-\pi - 2\pi\nu}} \leqslant \frac{2}{1 - e^{-\pi}}\,.$$

Так как $\operatorname{ctg}(-z) = -\operatorname{ctg} z$, то $|\operatorname{ctg} z| \leqslant \dfrac{2}{1 - e^{-\pi}}$ при $z = -\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\nu\right)i + x$.

Если $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi\nu + iy$, то $|\operatorname{ctg} z| = |\operatorname{tg} iy| = \left|\dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right| \leqslant 1.$

Следовательно, функция $f(z)$ ограничена на Γ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$.

В результате по формуле (3), учитывая порядок суммирования ряда (3), получаем

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{\pi k} + \frac{1}{z + \pi k} - \frac{1}{\pi k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}. \tag{7}$$

По теореме ряд (7) равномерно сходится в каждой ограниченной области, не содержащей точки $z_k = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Пример 2. Разложим на элементарные дроби функцию $g(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$.

Из примера 1 (или из формулы (7)) следует, что

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{\pi k} \right). \tag{8}$$

Так как $\dfrac{1}{\sin^2 z} = -(\operatorname{ctg} z)'$, то дифференцируя ряд (8), по второй теореме Вейерштрасса, получаем

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(z - \pi k)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - \pi k)^2}.$$

2. Разложение целой функции на элементарные множители

Определение 2. *Бесконечное произведение* $(1+c_1)(1+c_2)\ldots(1+c_n)\ldots$ *обозначается*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n) \tag{9}$$

и называется сходящимся, если существует предел

$$\lim_{N \to \infty} \prod_{n=1}^{N} (1 + c_n) \neq 0. \tag{10}$$

Из этого определения следует, что для сходимости произведения (9) необходимо, чтобы $c_n \neq -1$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$.

Из формулы (10) получается, что сходимость произведения (9) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ln}\,(1+c_n), \tag{11}$$

где $\mathrm{Ln}\,(1+c_n) \sim c_n$ при $n \to \infty$. Поэтому сходимость произведения (9) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Таким образом, исследование свойств сходящихся бесконечных произведений сводится к исследованию свойств сходящихся рядов.

Например, произведение (9) сходится абсолютно, т. е. сходится произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} |1+c_n|,$$

если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

Покажем на примере, как можно разложить целую функцию на элементарные множители.

Пример 3. Разложим функцию

$$g(z) = \sin z$$

на элементарные множители.

Пусть $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. Тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}\,. \tag{12}$$

Интегрируя этот ряд почленно от точки $z = 0$ до точки z по кривой γ, не проходящей через точки $z = \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$

получаем

$$\operatorname{Ln} f(\zeta)\Bigg|_{\zeta=0}^{\zeta=z} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ln}(\zeta^2 - \pi^2 k^2)\Bigg|_{\zeta=0}^{\zeta=z},$$

откуда, учитывая, что $f(0) = 1$, получаем

$$\operatorname{Ln} f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{Ln}(z^2 - \pi^2 k^2) - \operatorname{Ln}(-\pi^2 k^2)\right] = \operatorname{Ln} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right),$$

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right),$$

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Общие теоремы о разложении целых функций на элементарные дроби см. в [3, 6, 8].

Глава 5

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 25. Геометрический смысл производной

1. Линейное растяжение и угол поворота кривой в точке

Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — гладкие, т. е. непрерывно дифференцируемые в окрестности точки (x_0, y_0) функции (здесь условия Коши–Римана могут не выполняться). И пусть якобиан отображения

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{1}$$

т. е. определитель

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

не равен нулю в точке (x_0, y_0) и ее окрестности. Тогда отображение (1) является взаимно однозначным в окрестности точки (x_0, y_0) (см. [9]).

Рассмотрим на плоскости z гладкую кривую γ с началом в точке z_0 (рис. 75, *а*). Пусть точка $z \in \gamma$, $z \neq z_0$. Обозначим $\Delta z = z - z_0$, $\varphi = \arg \Delta z$, l — касательный вектор к кривой γ в точке z_0, $\varphi_0 = \arg l$.

Образом кривой γ при отображении $w = f(z)$ является гладкая кривая γ' на плоскости w с началом в точке $w_0 = f(z_0)$. Если точка $z \in \gamma$, $z \neq z_0$, то точка $w = f(z)$ принадлежит кривой γ', $w \neq w_0$ (рис. 75, *б*). Обозначим $\Delta w = w - w_0$, $\theta = \arg \Delta w$, l' — касательный вектор к кривой γ' в точке w_0, $\theta_0 = \arg l'$.

В курсе математического анализа число $k = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \gamma}} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ называют *линейным растяжением кривой* γ *в точке* z_0, а разность $\theta_0 - \varphi_0$

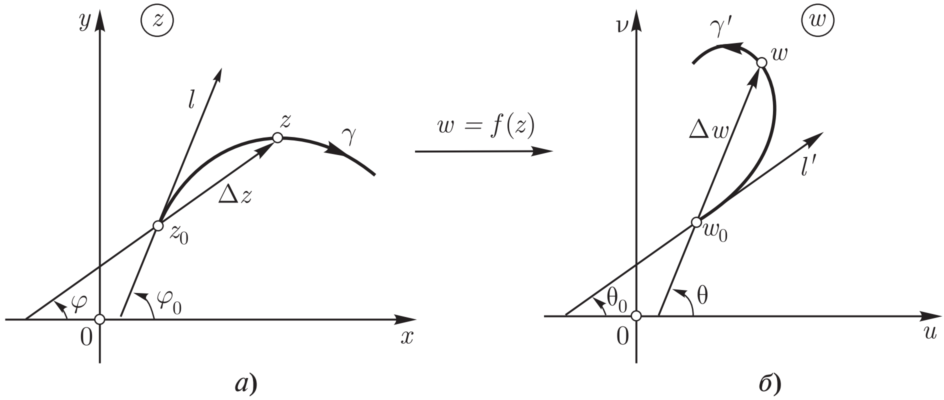

Рис. 75

называют *углом поворота кривой* γ *в этой точке* при отображении $w = f(z)$.

Отметим, что при гладком отображении (1) и линейное растяжение, и угол поворота в точке z_0 могут быть различными для различных кривых γ с началом в этой точке.

2. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть теперь (и далее) функция $w = f(z)$ регулярна в точке $z_0 \neq \infty$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z),$$

где $z \to z_0$ любым «способом», в частности по любой кривой с началом в точке z_0. Отсюда, используя обозначения п. 1, получаем

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \gamma}} \left(\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \, e^{i(\theta - \varphi)} \right) = |f'(z_0)| e^{i \arg f'(z_0)},$$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \gamma}} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|, \qquad (2)$$

$$\theta_0 - \varphi_0 = \arg f'(z_0). \qquad (3)$$

Постоянство растяжений. Правая часть формулы (2) не зависит от вида и направления кривой γ (направления вектора l), т. е. линейное растяжение в точке z_0 одно и то же для всех кривых γ с началом в точке z_0 и равно $|f'(z_0)|$. Это свойство называется *свойством постоянства растяжений отображения* $w = f(z)$ *в точке* z_0.

Таким образом, геометрический смысл модуля производной состоит в том, что $|f'(z_0)|$ — это *линейное растяжение в точке* z_0.

Из формулы (2) следует также, что

$$|\Delta w| = |f'(z_0)||\Delta z| + o(|\Delta z|),$$

т. е. при отображении $w = f(z)$ окружность $|z - z_0| = \rho$ с точностью до $o(\rho)$ переходит в окружность $|w - w_0| = \rho|f'(z_0)|$. Поэтому свойство постоянства растяжений называют также *круговым свойством* отображения $w = f(z)$ в точке z_0.

Сохранение угла между кривыми. Правая часть формулы (3) не зависит от вида и направления кривой γ, т. е. угол поворота в точке z_0 один и тот же для всех кривых с началом в точке z_0 и равен $\arg f'(z_0)$.

Таким образом, геометрический смысл аргумента производной состоит в том, что $\arg f'(z_0)$ — *это угол поворота кривых в точке* z_0.

Углом между кривыми γ_1, γ_2 с началом в точке z_0 называют угол между касательными к ним векторами в этой точке (рис. 76, *а*). При рассматриваемом отображении $w = f(z)$ все кривые с началом в точке z_0 поворачиваются на один и тот же угол, равный $\arg f'(z_0)$. Отсюда получается следующее *свойство сохранения углов*: при отображении $w = f(z)$ угол между кривыми γ_1, γ_2 в точке z_0 равен углу между образами этих кривых соответственно γ_1', γ_2' в точке $w_0 = f(z_0)$ как *по абсолютной величине*, так и *по направлению отсчета* (рис. 76, *б*).

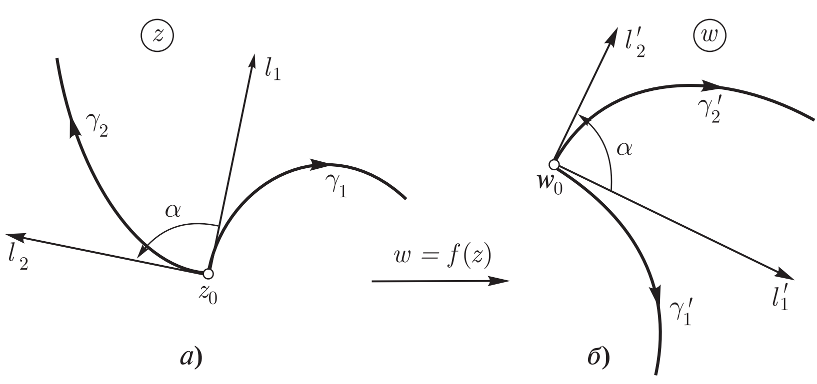

Рис. 76

Коэффициент растяжения областей. Якобиан отображения (1) называют *коэффициентом растяжения областей.* Если функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ регулярна в области D, то из условий Коши–Римана следует, что якобиан отображения (1) равен

$$J(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \quad \text{т. е.}$$

$$J(z) = J(x,y) = |f'(z)|^2. \tag{4}$$

Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в области D и осуществляет взаимно однозначное отображение области D на область G плоскости w. Тогда из формулы (4) следует, что площадь области G равна

$$S(G) = \iint\limits_G dudv = \iint\limits_D |J(x,y)|dxdy = \iint\limits_D |f'(z)|^2 dxdy.$$

Если при этом кивая γ принадлежит области D и γ' — ее образ при отображении $w = f(z)$, то длина кривой γ' равна

$$l(\gamma') = \int\limits_{\gamma'} |dw| = \int\limits_{\gamma} |f'(z)||dz|.$$

§ 26. Локальные свойства отображений регулярными функциями

1. Теорема об n-значной обратной функции

В § 13 доказана теорема об обратной функции к функции $f(z)$, регулярной в точке z_0, в случае, когда $f'(z_0) \neq 0$. Рассмотрим случай, когда $f'(z_0) = 0$.

Теорема. *Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в точке $z_0 \neq \infty$ и*

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0, \tag{1}$$

где $n \geqslant 2$. Тогда существуют окрестности U, V точек z_0, $w_0 = f(z_0)$ соответственно и функция $z = \psi(w)$ такие, что:

а) уравнение

$$f(z) = w \tag{2}$$

(относительно z) при каждом $w \in V$, $w \neq w_0$, имеет ровно n различных решений $z = \psi(w) \in U$,

б) функция $z = \psi(w)$ аналитична в области V, $w \neq w_0$, и

$$f(\psi(w)) = w \quad \forall\, w \in V. \tag{3}$$

○ Из (1) следует, что точка z_0 является нулем функции $f(z)-f(z_0)$ порядка n. Поэтому (§ 14, п. 1)

$$w-w_0=f(z)-f(z_0)=(z-z_0)^n h(z), \quad h(z_0)\neq 0, \tag{4}$$

где функция $h(z)$ регулярна в точке z_0.

Полагая

$$w-w_0=\zeta^n, \tag{5}$$

из (4) получаем $\zeta^n=(z-z_0)^n h(z)$, откуда

$$\zeta=(z-z_0)\sqrt[n]{h(z)}. \tag{6}$$

Так как $h(z_0)\neq 0$ и функция $h(z)$ регулярна в точке z_0, то $h(z)\neq 0$ в некоторой окрестности точки z_0. Поэтому (§ 19, п. 4) функция $\sqrt[n]{h(z)}$ распадается в окрестности точки z_0 на регулярные ветви.

Пусть $h_1(z)$ — одна из этих ветвей и

$$\zeta=\zeta(z)=(z-z_0)h_1(z), \quad h_1(z_0)\neq 0, \tag{7}$$

где $h_1(z)$ — функция, регулярная в точке z_0.

Функция $\zeta(z)$, определяемая формулой (7), удовлетворяет условиям теоремы об обратной функции (§ 13), так как

$$\zeta'(z_0)=h_1(z_0)\neq 0.$$

По этой теореме существует окрестность U точки z_0, которую функция $\zeta=\zeta(z)$ взаимно однозначно отображает на некоторый круг $K=\{\zeta\colon\ |\zeta|<\rho\}$, $\zeta_0=\zeta(z_0)=0$.

При этом обратной к функции $\zeta=\zeta(z)$, $z\in U$, является функция $z=g(\zeta)$, регулярная в круге K.

Функция $\zeta_1=\zeta^n$ отображает проколотую окрестность точки $\zeta=0$ (круг радиуса δ) на проколотую окрестность точки $\zeta_1=0$ (круг радиуса δ^n) n-листно, так как каждый сектор радиуса δ с углом $\dfrac{2\pi}{n}$ при отображении $\zeta_1=\zeta^n$ переходит в круг радиуса δ^n (§ 13, п. 2).

Из (5) и (7) следует, что

$$f(z)=w_0+\zeta^n(z), \quad \zeta(z)=(z-z_0)h(z).$$

Поэтому для каждого $w\in K=\{|w-w_0|<\delta^n,\ w\neq w_0\}$ уравнение (2) имеет ровно n решений в круге $\widetilde{K}=\{|z-z_0|<\delta\}$. ●

Пример 1. Пусть точка z_0 — полюс функции $f(z)$ порядка n. Покажем, что существуют такая проколотая окрестность K точки z_0 и такое число $\alpha>0$, что для каждого комплексного числа A, $A>\alpha$, уравнение

$$f(z)=A \tag{8}$$

имеет ровно n корней $z\in K$.

1) Пусть $z_0 \neq \infty$. Тогда функция $w = g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ регулярна в точке z_0, $g(z_0) = g'(z_0) = \ldots = g^{(n-1)}(z_0) = 0$, $g^{(n)}(z_0) \neq 0$. По теореме получаем, что для каждого $w = \dfrac{1}{A}$ из некоторой проколотой окрестности точки $w_0 = 0$ уравнение $g(z) = \dfrac{1}{A}$ имеет ровно n корней, принадлежащих проколотой окрестности точки z_0.

2) Пусть $z_0 = \infty$. Рассмотрим взаимно однозначное отображение $\zeta = \dfrac{1}{z}$ окрестности точки $z = \infty$ на окрестность точки $\zeta = 0$. Тогда функция $w = h(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ имеет полюс в точке $\zeta = 0$ порядка n. Как и в случае 1), уравнение $h(\zeta) = A$ имеет ровно n корней в окрестности точки $\zeta = 0$, поэтому уравнение (8) имеет ровно n корней в окрестности точки $z = \infty$.

§ 27. Принцип сохранения области

Теорема (*принцип сохранения области*). *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D и $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда при отображении $w = f(z)$ образом области D является область G.*

○ Пусть G — образ области D при отображении $w = f(z)$.

1) Покажем, что G — открытое множество. Пусть точка $w_0 \in G$, т. е. $w_0 = f(z_0)$, где $z_0 \in D$. Так как $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то существует производная $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, $n \geqslant 1$. По теоремам § 13 и § 26 для любой точки w из окрестности точки w_0 существует такая точка z из окрестности точки z_0, что $w = f(z)$, т. е. окрестность точки w_0 принадлежит множеству G.

2) Связность множества G следует из непрерывности отображения $w = f(z)$, так как при этом отображении образом кривой $\gamma \in D$ является непрерывная кривая $\gamma' \in G$. ●

§ 28. Принцип максимума для регулярной и гармонической функций

Теорема 1 (*принцип максимума модуля регулярной функции*). *Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в области D и $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда $|f(z)|$ не может достигать своего максимума (ни локального, ни абсолютного) во внутренней точке области D.*

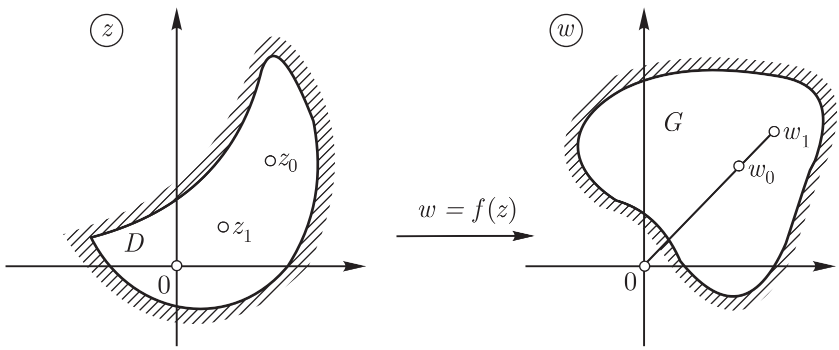

Рис. 77

○ Согласно принципу сохранения области (§ 27) образом области D является область G (рис. 77). Пусть $z_0 \in D$. Покажем, что существует точка $z_1 \in D$ в окрестности точки z_0 такая, что $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.

Образом точки z_0 при отображении $w = f(z)$ является точка $w_0 = f(z_0)$. Поэтому на прямой, проходящей через точки 0, w_0, существует точка w_1 в окрестности точки w_0 такая, что $|w_1| > |w_0|$ (рис. 77). Так как прообразом точки w_1 является точка z_1 из окрестности точки z_0, т. е. $f(z_1) = w_1$, то $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. ●

Следствие. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области D, непрерывна вплоть до границы этой области и $f(z) \not\equiv \text{const}$. Тогда максимум модуля этой функции*

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)|$$

достигается только на границе области D.

Теорема 2 (*принцип максимума и минимума гармонической функции*). *Гармоническая в области D функция $u(x, y) \not\equiv \text{const}$ не может достигать ни своего максимума, ни своего минимума (ни локального, ни абсолютного) во внутренней точке области D.*

○ Предположим, что функция $u(x, y)$ достигает своего максимума в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Так как в окрестности точки z_0 существует (см. § 12) функция $v(x, y)$, сопряженно гармоническая с функцией $u(x, y)$, и регулярная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то функция $g(z) = e^{f(z)}$ также регулярна в окрестности точки z_0 и $|g(z)| = e^{u(x,y)}$ достигает своего максимума в точке z_0. По теореме 1 получаем $g(z) \equiv \text{const}$, поэтому $u(z, y) \equiv \text{const}$, что противоречит условиям теоремы.

Если функция $u(x,y)$ достигает своего минимума в точке $z_0 \in D$, то функция $-u(x,y)$ также является гармонической и достигает своего максимума в точке z_0, а по доказанному это невозможно. ●

§ 29. Однолистные функции

Понятие однолистности было введено в § 13, п. 1.

Ранее рассматривались области, состоящие из конечных точек. Сформулируем определение области на расширенной комплексной плоскости (на сфере Римана).

Определение 1. *Пусть области D, состоящей из конечных точек, принадлежит проколотая окрестность $R < |z| < \infty$ точки $z = \infty$. Тогда множество $D_1 = D \cup \{z = \infty\}$ также будем называть областью.*

Поэтому в дальнейшем (если не оговорено противное) будем считать, что, в частности, может быть, что $z = \infty$, $w = \infty$ и т. д.

Определение 2. *Функция $f(z)$ называется однолистной в области D, если $f(z_1) \neq f(z_2)$ для любых точек $z_1 \in D$, $z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$.*

Таким образом, функция $f(z)$ является однолистной в области, если она обратима, т. е. обратная ей функция однозначна.

Отображение однолистной функцией $w = f(z)$ является взаимно однозначным.

Определение 3. *Функция $f(z)$, определенная в области D, называется однолистной в точке $z_0 \in D$, если она однолистна в некоторой окрестности точки z_0.*

Из определений 2, 3 следует, что однолистная в области функция является однолистной в каждой точке этой области. В дальнейшем будут рассмотрены примеры, когда однолистные в каждой точке области функции не являются однолистными во всей области.

Теорема (*критерий однолистности функции в конечной регулярной точке*). *Для однолистности функции $f(z)$ в регулярной точке $z_0 \neq \infty$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $f'(z_0) \neq 0$.*

○ Необходимость. Пусть $f'(z) = 0$ и $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда по теореме § 26 функция, обратная к $f(z)$, неоднозначна в проколотой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$, поэтому функция $f(z)$ не является однолистной в точке z_0.

Если $f(z) \equiv \text{const}$, то $f(z_1) = f(z_2)$ для любых точек $z_1 \neq z_2$ из окрестности точки z_0, т. е. функция $f(z)$ не является однолистной в точке z_0.

Достаточность. Если $f'(z_0) \neq 0$, то по теореме § 13 функция, обратная к $f(z)$, однозначна в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$, поэтому функция $f(z)$ однолистна в точке z_0. ●

Следствие 1. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, т. е.*

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z} + \ldots \quad \textit{при} \quad |z| > R > 0.$$

Тогда для однолистности функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$c_{-1} = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \neq 0.$$

○ Функцию $w = f(z)$ можно представить как суперпозицию двух функций

$$\zeta = \frac{1}{z} \quad \text{и} \quad w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Так как функция $\zeta = \dfrac{1}{z}$ взаимно однозначно отображает окрестность $|z| > R$ точки $z = \infty$ на окрестность $|\zeta| < \dfrac{1}{R}$ точки $\zeta = 0$, то для однолистности функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = c_0 + c_{-1}\zeta + c_{-2}\zeta + \ldots, \quad |\zeta| < \frac{1}{R},$$

была однолистной в точке $\zeta = 0$. Следовательно, по критерию однолистности должно выполняться условие

$$\varphi'(0) = c_{-1} \neq 0.$$

●

Следствие 2. *Пусть точка z_0 является полюсом функции $f(z)$. Тогда для однолистности функции $f(z)$ в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы порядок этого полюса равнялся единице.*

○ 1) Пусть $z_0 \neq \infty$, тогда

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n},$$

где функция $h(z)$ регулярна в точке z_0, $h(z_0) \neq 0$, n — натуральное число. Функцию $w = f(z)$ можно представить как суперпозицию двух функций

$$\zeta = \frac{1}{f(z)} \quad \text{и} \quad w = \frac{1}{\zeta}\,.$$

Так как функция $w = \dfrac{1}{\zeta}$ взаимно однозначно отображает окрестность точки $\zeta = 0$ на окрестность точки $w = \infty$, то для однолистности функции $f(z)$ в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\zeta(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^n}{h(z)} \tag{1}$$

была однолистной в точке z_0. По критерию однолистности должно выполняться условие $\zeta'(z_0) \neq 0$, а из формулы (1) следует, что это условие выполняется только при $n = 1$.

2) Пусть $z_0 = \infty$, тогда

$$f(z) = z^n h(z),$$

где функция $h(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, $h(\infty) \neq 0$, n — натуральное число. Функцию $w = f(z)$ можно представить как суперпозицию двух функций

$$\zeta = \frac{1}{z} \quad \text{и} \quad w = f\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Так как функция $\zeta = \dfrac{1}{z}$ взаимно однозначно отображает окрестность точки $z = \infty$ на окрестность точки $\zeta = 0$, то для однолистности функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ необходимо и достаточно, чтобы функция

$$w(\zeta) = \frac{1}{\zeta^n}\, h\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

была однолистной в точке $\zeta = 0$. По доказанному в п. 1) должно выполняться условие $n = 1$. ●

Пример 1. Функция $f(z) = e^z$ однолистна в каждой точке $z \neq \infty$, так как $f'(z) = e^z \neq 0$. Однако эта функция не является однолистной в области $|z| < \infty$, так как, например, $e^{2\pi k i} = 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Пример 2. Функция $f(z) = z^2$ является однолистной в каждой точке кольца $K : 1 < |z| < 3$, так как $f'(z) = 2z \neq 0$ при $z \in K$. Однако эта функция не является однолистной в кольце K, так как, например, $f(z) = f(-z)$ при $z \in K$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D, за исключением двух полюсов в точках $z_1 \in D$, $z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$. Тогда эта функция не является однолистной в области D, так как $f(z_1) = f(z_2) = \infty$.

Замечание 2. Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то эта функция не является однолистной в точке z_0, так как по теореме Пикара (§ 16) уравнение $f(z) = A$ имеет бесконечное число корней в проколотой окрестности точки z_0 для любого комплексного числа A, кроме, быть может, одного.

Итак, если функция $f(z)$ регулярна в области D, за исключением конечного числа точек, то для однолистности этой функции в области D *необходимо*, чтобы выполнялись следующие условия:

1) функция $f(z)$ должна быть регулярной в области D, за исключением, быть может, одной точки — полюса первого порядка;

2) в каждой конечной регулярной точке $z \in D$ функции $f(z)$ должно выполняться условие $f'(z) \neq 0$;

3) Если точка $z = \infty$ принадлежит области D и в этой точке функция $f(z)$ регулярна, то должно выполняться условие

$$c_{-1} = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \neq 0.$$

Замечание 3. В примерах 1, 2 показано, что условия 1)–3) могут быть не достаточными для однолистности функции в области.

§ 30. Определение и общие свойства конформных отображений

Определение 1. *Отображение $w = f(z)$ области D расширенной комплексной плоскости z называется конформным, если:*

1) функция $f(z)$ регулярна в области D, за исключением, быть может, одного полюса первого порядка;

2) функция $f(z)$ однолистна в области D.

Рассмотрим некоторые свойства конформных отображений.

Свойство 1. *При конформном отображении $w = f(z)$ образом области D является область расширенной комплексной плоскости w* (§ 27).

Из определения 1 непосредственно получаются следующие свойства 2, 3.

Свойство 2. *Отображение, обратное к конформному отображению, также является конформным.*

Свойство 3. *Суперпозиция (последовательное выполнение) конформных отображений также является конформным.*

Из определения 1 и § 28 следует, что при конформном отображении $w = f(z)$ области D выполняется условие $f'(z) \neq 0$ при $z \in D$, $z \neq \infty$. Поэтому справедливо следующее

Свойство 4 (*постоянство растяжений, т. е. круговое свойство*). *При конформном отображении $w = f(z)$ области D в каждой конечной точке $z_0 \in D$ линейное растяжение одинаково для всех гладких кривых с началом в точке z_0 и равно $|f'(z_0)|$, т. е. образом окружности $|z - z_0| = \rho$ с точностью до $o(\rho)$ является окружность $|w - w_0| = \rho|f'(z_0)|$, где $w_0 = f(z_0)$ (§ 25).*

Сформулируем определение угла между кривыми в точке $z = \infty$.

Определение 2. *Углом между кривыми γ_1, γ_2 с концами в точке $z = \infty$ называется угол между образами этих кривых при отображении $\zeta = \dfrac{1}{z}$ в точке $\zeta = 0$.*

Пример 1. Пусть два луча γ_1, γ_2 выходят из одной и той же конечной точки z_0. Покажем, что тогда угол между лучами γ_1, γ_2 в точке $z = \infty$ равен углу между этими лучами в точке z_0, взятому с противоположным знаком.

Ограничимся случаем, когда $z_0 = 0$. Пусть γ_j — луч: $\arg z = \varphi_j$ $(j = 1, 2)$. Тогда угол между γ_1, γ_2 (в направлении от γ_1 к γ_2) в точке $z = 0$ равен $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ (рис. 78). Образом луча γ_j при отображении $\zeta = \dfrac{1}{z}$ является луч $\widetilde{\gamma}_j$: $\arg\zeta = -\varphi_j$ $(j = 1, 2)$ и поэтому угол между $\widetilde{\gamma}_1$, $\widetilde{\gamma}_2$ в точке $\zeta = 0$ равен $(-\varphi_2) - (-\varphi_1) = -\alpha$ (рис. 78). Следовательно, по определению 2 угол между лучами γ_1, γ_2 в точке $z = \infty$ равен $-\alpha$.

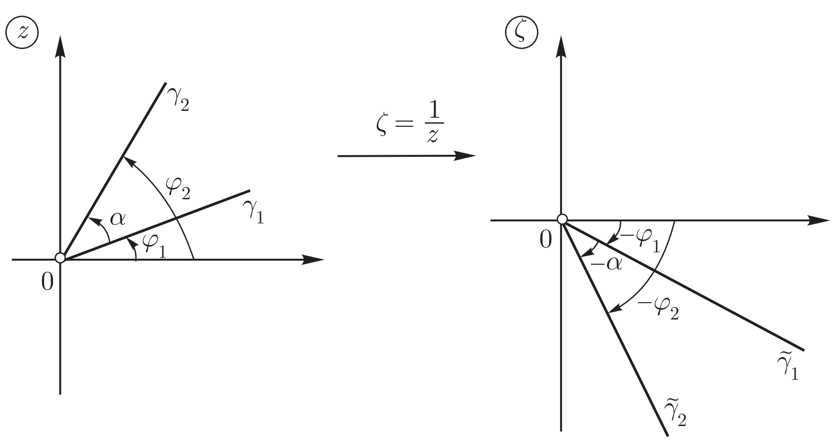

Рис. 78

З а м е ч а н и е 1. Отображение $\zeta = \dfrac{1}{z}$ является поворотом сферы Римана на $180°$ вокруг диаметра с концами в точках $z = \pm 1$ (их образами при стереографической проекции $\zeta = \dfrac{1}{z}$). Следовательно, при этом отображении сохраняются углы между кривыми в каждой точке сферы Римана.

Из определения 2 и § 25 получается следующее

Свойство 5 (***сохранение углов***). *При конформном отображении $w = f(z)$ области D углы между кривыми сохраняются в каждой точке $z_0 \in D$: угол между кривыми с началом в точке $z_0 \in D$, $z_0 \neq \infty$, или с концом в точке $z_0 = \infty$ равен углу между образами этих кривых в точке $w_0 = f(z_0)$; при этом если $z_0 \neq \infty$, то угол поворота всех кривых с началом в точке z_0 равен $\arg f'(z_0)$.*

Теорема 1 (***принцип соответствия границ***). *Пусть D — ограниченная односвязная область плоскости z с границей Γ, G — ограниченная односвязная область плоскости w с границей $\widetilde{\Gamma}$ и пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на область G. Тогда функция $w = f(z)$ является непрерывной в области D вплоть до границы Γ и отображает кривую Γ на кривую $\widetilde{\Gamma}$ взаимно однозначно с сохранением ориентации.*

Доказательство этой теоремы содержится в [4].

Докажем теорему, обратную теореме 1.

Теорема 2 (***критерий однолистности функции в области***). *Пусть D — ограниченная односвязная область плоскости z с границей Γ, G — ограниченная односвязная область плоскости w с границей $\widetilde{\Gamma}$ и пусть функция $w = f(z)$ регулярна в области D, непрерывна вплоть до границы Γ и отображает кривую Γ на кривую $\widetilde{\Gamma}$ взаимно однозначно с сохранением ориентации. Тогда функция $w = f(z)$ однолистна в области D и отображает конформно область D на область G.*

○ Покажем, что для каждой точки $w_0 \in G$ существует только одна точка $z \in D$ такая, что $f(z) = w_0$, причем функция $f(z) - w_0$ имеет ровно один нуль в области D.

По условию теоремы функция $f(z) - w_0$ не обращается в нуль на Γ, так как при $z \in \Gamma$ точка $w = f(z) \in \Gamma$, $w_0 \in G$. По принципу аргумента

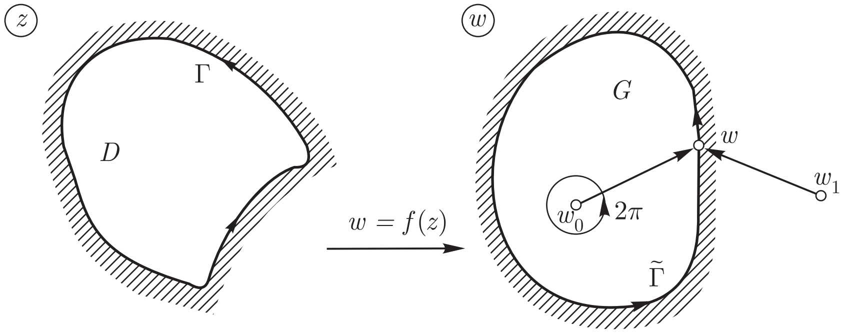

Рис. 79

(§ 23) число нулей функции $f(z) - w_0$ в области D равно

$$N = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg[f(z) - w_0] = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_{\widetilde{\Gamma}} \arg(w - w_0).$$

Так как точка $w_0 \in G$, то $\Delta_{\widetilde{\Gamma}} \arg(w - w_0) = 2\pi$ и $N = 1$ (рис. 79).

Аналогично, если точка w_1 принадлежит внешности кривой $\widetilde{\Gamma}$, то $\Delta_{\widetilde{\Gamma}} \arg(w - w_1) = 0$ (рис. 79) и уравнение $f(z) = w_1$ не имеет корней в области D. ●

Замечание 2. Теоремы 1, 2 справедливы и для областей расширенной комплексной плоскости (и не только для односвязных): при конформном отображении граница области переходит в границу образа этой области взаимно однозначно с сохранением ориентации.

Фундаментальной теоремой теории конформных отображении является следующая

Теорема 3 (*Римана*). *Пусть D — односвязная область расширенной комплексной плоскости, граница которой состоит более чем из одной точки, G — односвязная область расширенной комплексной плоскости w, граница которой также состоит более чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение $w = f(z)$ области D на область G.*

Исключительными являются следующие области:

1) вся расширенная комплексная плоскость — ее можно конформно отобразить только на всю расширенную комплексную плоскость;

2) вся расширенная комплексная плоскость с одной выколотой точкой — ее можно отобразить только на всю расширенную комплексную плоскость с одной выколотой точкой.

Отметим, что конформное отображение односвязной области D на односвязную область G не единственно. Для единственности достаточно, например, выполнения условий

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha, \tag{1}$$

где $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, α — действительное число.

Условия (1) называют *условиями нормировки* конформного отображения $w = f(z)$. Эти условия содержат три произвольных действительных параметра: если точка $z_0 \in D$ задана, то точка $w_0 \in G$ содержит два действительных параметра $\operatorname{Re} w_0$, $\operatorname{Im} w_0$ и, кроме этого, условия (1) содержат еще один действительный параметр α.

Геометрически условия (1) будем изображать так, как показано на рис. 80.

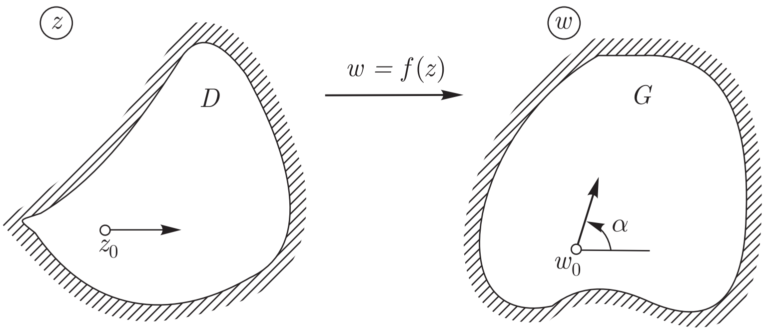

Рис. 80

Условия нормировки конформных отображений могут быть и другими, например:

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1,$$

где $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, а точки z_1, w_1 принадлежат соответственно границам областей D и G:

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1,\, 2,\, 3,$$

где z_k, w_k — точки соответственно границ областей D, G, взятых в направлении ориентации этих границ.

Рассмотрим конформные отображения, задаваемые конкретными элементарными функциями.

§ 31. Дробно-линейные отображения

Дробно-линейной называется функция

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{1}$$

где a, b, c, d — заданные комплексные числа. Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что $w \not\equiv \mathrm{const}$. Отображение, осуществляемое функцией (1), называется *дробно-линейным.* При этом предполагается, что если $c \neq 0$, то $w\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$, а если $c = 0$, то $w(\infty) = \infty$. В частности, если $c = 0$, то функция (1) является линейной, а отображение, осуществляемое линейной функцией, называется *линейным.*

Рассмотрим основные свойства дробно-линейных отображений.

1. Конформность

Теорема 1. *Дробно-линейная функция конформно отображает расширенную комплексную плоскость на расширенную комплексную плоскость.*

○ Функция (1) регулярна во всей расширенной комплексной плоскости, за исключением одного полюса первого порядка.

Решая уравнение (1) относительно z, находим функцию

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{2}$$

обратную к функции (1). Так как функция (2) однозначна, то функция (1) однолистна. ●

З а м е ч а н и е 1. В § 16 доказано, что если функция $f(z)$ регулярна в расширенной комплексной плоскости, за исключением одного полюса первого порядка, то эта функция является дробно-линейной. Следовательно, любое конформное отображение расширенной комплексной плоскости на расширенную комплексную плоскость является дробно-линейным.

2. Групповое свойство

Теорема 2. *Совокупность дробно-линейных отображений образует группу, т. е.*

1) *суперпозиция (произведение) дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением;*

2) *отображение, обратное к дробно-линейному, также является дробно-линейным.*

○ Свойство 2) доказано в п. 1. Докажем свойство 1). Пусть

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0, \tag{3}$$

$$w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), получаем

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{5}$$

где $ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$, т. е. отображение является дробно-линейным. ●

Замечание 2. Группа дробно-линейных отображений некоммутативна. Например, если $w(z) = 1/z$, $\zeta(z) = z + 1$, то

$$w = (\zeta(z)) = \frac{1}{z + 1},$$

$$\zeta(w(z)) = \frac{1}{z} + 1,$$

$$w(\zeta(z)) \neq \zeta(w(z)).$$

3. Круговое свойство

Теорема 3. *При дробно-линейном отображении образом любой окружности или прямой является окружность или прямая.*

○ Сначала рассмотрим линейное отображение $w = az + b$, $a \neq 0$, которое можно представить как последовательное выполнение следующих отображений:

$\zeta = |a|z$ — подобие с центром в точке $z = 0$ и коэффициентом $|a|$;

$\eta = \zeta e^{i\alpha}$, $\alpha = \arg a$ — поворот плоскости ζ вокруг точки $\zeta = 0$ на угол α;

$w = \eta + b$ — параллельный перенос плоскости η на вектор b.

Из курса аналитической геометрии известно, что при каждом из этих отображений образом прямой является прямая (причем образами параллельных прямых также являются параллельные прямые), образом окружности также является окружность, и каждая фигура переходит в подобную ей фигуру.

Пусть теперь дробно-линейная функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ не является линейной, т. е. $c \neq 0$. Тогда

$$w = A + \frac{B}{z+z_0}\,, \tag{6}$$

где $A = a/c$, $B = (bc-ad)/c^2$, $z_0 = d/c$. Поэтому отображение (6) сводится к последовательному выполнению следующих отображений:

$$\zeta = z + z_0, \quad \eta = \frac{1}{z}\,, \quad w = A + B\eta. \tag{7}$$

Первое и третье отображения (7) обладают круговым свойством, так как они линейные. Остается доказать, что второе отображение (7), т. е. отображение

$$w = \frac{1}{z}\,, \tag{8}$$

также обладает круговым свойством.

Рассмотрим уравнение окружности или прямой на действительной плоскости (x, y):

$$\alpha(x^2+y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0 \tag{9}$$

(если $\alpha = 0$, то (9) — уравнение прямой). Так как

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\overline{z}, \quad x = \frac{1}{2}\,(z+\overline{z}), \quad y = \frac{1}{2i}\,(z-\overline{z}),$$

то уравнение (9) таково:

$$\alpha z\overline{z} + Dz + \overline{D}\overline{z} + \delta = 0, \tag{10}$$

где $D = \dfrac{1}{2}(\beta - i\gamma)$. Подставляя в (10) $z = 1/w$, получаем

$$\delta w\overline{w} + \overline{D}w + D\overline{w} + \alpha = 0. \tag{11}$$

Следовательно, образом окружности (10) (прямой, если $\alpha = 0$) при отображении (8) является окружность (11) (прямая, если $\delta = 0$). ●

Отметим, что дробно-линейное отображение $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ переводит окружности и прямые, проходящие через точку $z = -d/c$, в прямые, а остальные окружности и прямые — в окружности.

В дальнейшем будем считать, что прямая — окружность бесконечного радиуса. Поэтому круговое свойство можно коротко сформулировать так: при дробно-линейном отображении окружности переходят в окружности.

4. Свойство сохранения симметрии

Понятие симметрии (инверсии) относительно окружности определяется в элементарной геометрии следующим образом. Пусть Γ — окружность радиуса R с центром в точке O.

Определение. *Точки M и M^* называются симметричными относительно окружности Γ, если они лежат на одном луче, выходящем из точки O, и $OM \cdot OM^* = R^2$ (рис. 81).*

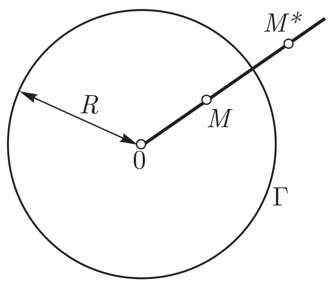

Рис. 81

В частности, каждая точка окружности Γ является симметричной сама себе относительно этой окружности.

Таким образом, на комплексной плоскости точки z и z^* являются симметричными относительно окружности Γ: $|z - z_0| = R$, если они лежат на одном луче, выходящем из точки z_0 и $|z - z_0||z^* - z_0| = R^2$. Точка $z = \infty$ считается симметричной относительно окружности Γ с точкой z_0 — центром этой окружности.

Из этого определения следует, что симметричные относительно окружности $|z| = R$ точки z, z^* связаны соотношением

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z}}\,. \tag{12}$$

В частности, симметричные относительно единичной окружности $|z| = 1$ (рис. 82) точки z, z^* связаны соотношением

$$z^* = \frac{1}{\overline{z}}\,. \tag{13}$$

Так как точки z и $\overline{z}$ симметричны относительно действительной оси, то из (13) следует, что точка $1/\overline{z}$ получается из точки z двойной симметрией: относительно действительной оси и относительно единичной окружности (в любом порядке) (рис. 82).

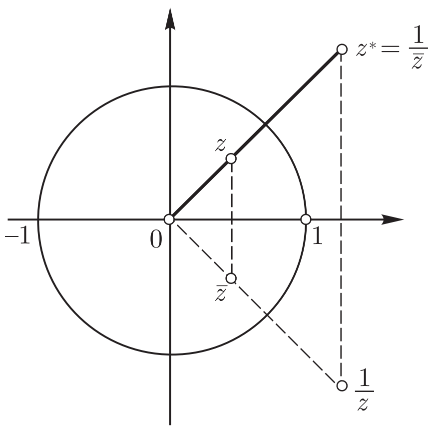

Рис. 82

Из (12) получается, что симметричные относительно окружности $|z - z_0| = R$ точки z, z^* связаны соотношением

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}\,. \tag{14}$$

Дробно-линейное отображение обладает следующим свойством *сохранения симметрии.*

Теорема 4. *При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.*

Здесь «окружность», в частности, может быть прямой.

Для доказательства теоремы 4 предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Точки M и M^* являются симметричными относительно окружности Γ тогда и только тогда, когда любая окружность γ, проходящая через эти точки, пересекается с окружностью Γ под прямым углом.*

○ Необходимость. Пусть точки M, M^* симметричны относительно окружности Γ радиуса R с центром в точке O (рис. 83). Рассмотрим окружность γ, проходящую через точки M, M^*. Проведем из точки O прямую, касающуюся окружности γ в точке P. По теореме элементарной геометрии (квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть) $OP^2 = OM \cdot OM^*$. Это произведение равно R^2, так как точки M, M^* симметричны относительно окружности Γ. Значит, $OP = R$, т. е. точка P лежит на окружности Γ. Таким образом, касательная к окружности γ является радиусом окружности Γ и,

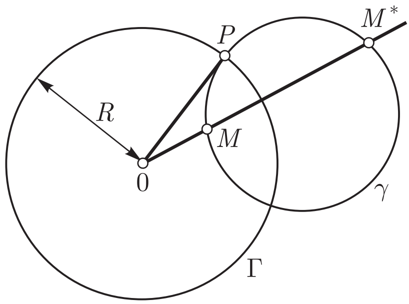

Рис. 83

следовательно, окружности γ, Γ пересекаются в точке P под прямым углом.

Достаточность. Пусть любая окружность γ, проходящая через точки M, M^*, пересекается с окружностью Γ под прямым углом (рис. 83). Тогда прямая (частный случай окружности), проходящая через точки M, M^*, также пересекается с окружностью Γ под прямым углом, т. е. эта прямая проходит через центр O окружности Γ. Более того, точки M, M^* лежат на одном луче, выходящем из точки O, так как в противном случае окружность радиуса $\frac{1}{2}MM^*$, проходящая через точки M, M^*, не пересекается с Γ под прямым углом.

Остается доказать, что $OM \cdot OM^* = R^2$. Пусть окружность γ, проходящая через точки M, M^*, пересекается с Γ в точке P (рис. 83). Тогда OP — касательная к γ и, следовательно, $OP^2 = OM \cdot OM^*$ по теореме о квадрате касательной (см. необходимость). ●

Доказательство теоремы 4. Пусть точки z и z^* симметричны относительно окружности Γ, и пусть дробно-линейное отображение $w = f(z)$ переводит окружность Γ в $\widetilde{\Gamma}$, а точки z, z^* — в точки w, w^* соответственно. В силу кругового свойства $\widetilde{\Gamma}$ — окружность. Нужно доказать, что точки w, w^* симметричны относительно $\widetilde{\Gamma}$. Для этого в силу леммы достаточно доказать, что любая окружность $\widetilde{\gamma}$, проходящая через точки w, w^*, пересекается с $\widetilde{\Gamma}$ под прямым углом,

Прообразом окружности $\widetilde{\gamma}$ при дробно-линейном отображении $w = f(z)$ является окружность γ, проходящая через точки z, z^*. Эта окружность γ пересекается с Γ также под прямым углом. Следовательно, $\widetilde{\gamma}$ пересекается с $\widetilde{\Gamma}$ под прямым углом, так как дробно-линейное отображение является конформным во всей расширенной комплексной плоскости и поэтому сохраняет углы между кривыми в каждой точке. ●

5. Дробно-линейное отображение, переводящее три точки в три точки

Теорема 5. *Существует единственное дробно-линейное отображение, при котором три различные точки z_1, z_2, z_3 переходят соответственно в три различные точки w_1, w_2, w_3. Это отображение определяется формулой*

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \tag{15}$$

○ Из теоремы 1 следует, что функция $w=f(z)$, определяемая соотношением (15), является дробно-линейной и $w_k=f(z_k)$, $k=1, 2, 3$.

Докажем, что если дробно-линейная функция $w=f_1(z)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция $w=f(z)$, а именно $w_k=f_1(z_k)$ ($k=1, 2, 3$), то $f_1(z)\equiv f(z)$. Пусть $z=f^{-1}(w)$ — функция, обратная к функции $w=f(z)$. Тогда $f^{-1}(f_1(z))$ — дробно-линейная функция:

$$f^{-1}(f_1(z))=\frac{az+b}{cz+d}$$

и $f^{-1}(f_1(z_k))=z_k$, т. е.

$$\frac{az_k+b}{cz_k+d}=z_k,\quad k=1, 2, 3.$$

Отсюда получаем

$$cz_k^2+(d-a)z_k-b=0,$$

т. е. квадратное уравнение $cz^2+(d-a)z-b=0$ имеет три различных корня. Следовательно, $c=0$, $d=a$, $b=0$ и $f^{-1}(f_1(z))\equiv z$, откуда $f_1(z)\equiv f(z)$. ●

Следствие. *Функция $w=f(z)$, определяемая формулой* (15), *конформно отображает круг, граница которого проходит через точки z_k ($k=1, 2, 3$), на круг, граница которого проходит через точки w_k ($k=1, 2, 3$).*

Здесь и далее «круг» — внутренность окружности, или внешность окружности, или полуплоскость. Будет доказано (см. п. 6, пример 5), что любое конформное отображение круга на круг является дробно-линейным.

Замечание 3. В теореме 4 и ее следствии не предполагается, что все точки z_k, w_k ($k=1, 2, 3$) являются конечными. Например, при

$w_3 = \infty$ формулу (15) можно записать так:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\,.$$

Замечание 4. Из доказательства теоремы 4 следует, что дробно-линейное отображение $w = w(z)$ может иметь не более двух неподвижных точек z_1, z_2, т. е. таких, что $w(z_k) = z_k$ $(k = 1, 2)$, если $w(z) \not\equiv z$. Дробно-линейное отображение, имеющее две неподвижные точки z_1, z_2, определяется формулой

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = A\,\frac{z - z_1}{z - z_2}\,,$$

где A — некоторое комплексное число.

Пример 1. Если дробно-линейное отображение переводит точку z_1 в точку $w = 0$, а точку z_2 — в точку $w = \infty$, то

$$w = A\,\frac{z - z_1}{z - z_2}\,, \tag{16}$$

где A — некоторое комплексное число.

6. Примеры дробно-линейных отображений

Пример 2. Дробно-линейное (и любое конформное) отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ имеет вид

$$w = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\,e^{i\alpha}, \tag{17}$$

где $\operatorname{Im} z_0 > 0$, α — действительное число.

Пусть дробно-линейная функция $w = w(z)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = 0$ $(\operatorname{Im} z_0 > 0)$. Тогда по теореме 4 $w(\overline{z}_0) = \infty$ и по формуле (16)

$$w = A\,\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\,. \tag{18}$$

Покажем, что $|A| = 1$. Так как точки действительной оси переходят в точки единичной окружности, т. е. $|w| = 1$ при действительных $z = x$, то из (18) получаем

$$1 = \left|A\,\frac{x - z_0}{x - \overline{z}_0}\right| = |A|\left|\frac{x - z_0}{x - \overline{z}_0}\right| = |A|,$$

т. е. $A = e^{i\alpha}$, где α — действительное число.

Найдем угол поворота кривых в точке z_0 при отображении (17). Из формулы (17) получаем

$$w'(z_0) = \frac{1}{z_0 - \overline{z}_0}\, e^{i\alpha} = \frac{1}{2i \operatorname{Im} z_0}\, e^{i\alpha}.$$

Так как $\operatorname{Im} z_0 > 0$, то $\arg w'(z_0) = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$, т. е. при отображении (17) угол поворота кривых в точке z_0 равен $\alpha - \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 84).

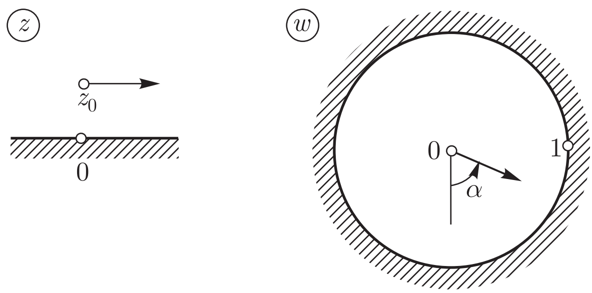

Рис. 84

Пример 3. Дробно-линейное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ имеет вид

$$w = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0}\, e^{i\alpha}, \tag{19}$$

где $|z_0| < 1$, α — действительное число.

Пусть дробно-линейная функция $w = w(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = 0$ ($|z_0| < 1$). Тогда по теореме 3 $w(1/\overline{z}_0) = \infty$ и по формуле (16)

$$w = A\, \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0}\,. \tag{20}$$

Покажем, что $|A| = 1$. По условию точки единичной окружности переходят в точки единичной окружности, т. е. $|w| = 1$ при $z = e^{i\varphi}$. Поэтому из (20) находим

$$1 = \left| A\, \frac{e^{i\varphi} - z_0}{1 - e^{i\varphi}\overline{z}_0} \right| = |A|\, \frac{|e^{i\varphi} - z_0|}{|e^{i\varphi}||e^{-i\varphi} - \overline{z}_0|} = |A|,$$

так как $\quad |e^{i\varphi} - z_0| = |\overline{e^{i\varphi} - z_0}| = |e^{-i\varphi} - \overline{z}_0|$.

Следовательно, $A = e^{i\alpha}$ и из (20) получаем формулу (19).

Найдем угол поворота кривых в точке z_0 при отображении (19). Из формулы (19) следует, что

$$w'(z_0) = \frac{1}{1-|z_0|^2}\, e^{i\alpha}.$$

Так как $|z_0| < 1$, то $\arg w'(z_0) = \alpha$, т. е. при отображении (19) угол поворота кривых в точке z_0 равен α (рис. 85).

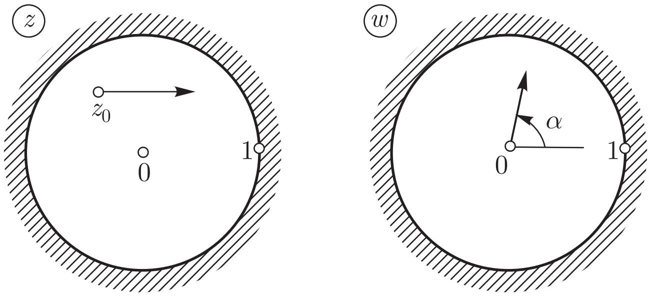

Рис. 85

Пример 4. Дробно-линейное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ имеет вид

$$w = \frac{az+b}{cz+d}\,, \tag{21}$$

где a, b, c, d — действительные числа и $ad - bc > 0$.

Пусть дробно-линейная функция $w = w(z)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Рассмотрим три различные точки z_1, z_2, z_3 границы области $\operatorname{Im} z > 0$, т. е. z_k — различные действительные числа. Образы этих точек являются граничными точками области $\operatorname{Im} w > 0$, т. е. $w_k = w(z_k)$ — действительные числа. Тогда функция $w = w(z)$ определяется формулой (15), откуда получаем формулу (21), где a, b, c, d — действительные числа.

Покажем, что $ad - bc > 0$. По принципу соответствия границ (§ 30, теорема 1) конформное отображение $w = w(z)$ переводит действительную ось $\operatorname{Im} z = 0$ в действительную ось $\operatorname{Im} w = 0$ с сохранением ориентации. Следовательно, $\arg w'(x) = 0$ при действительных $z = x$, т. е.

$$w'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0,$$

откуда $ad - bc > 0$.

Пример 5. Конформное отображение $w = w(z)$ круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$, определяется формулой

$$\frac{w - w_0}{1 - w\overline{w}_0} = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0}\, e^{i\alpha}. \tag{22}$$

Функция

$$\zeta = g(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0}\, e^{i\alpha}$$

отображает круг $|z| < 1$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $g(z_0) = 0$ и $\arg g'(z_0) = \alpha$ (пример 3). Функция

$$\zeta = h(w) = \frac{w - w_0}{1 - w\overline{w}_0}$$

отображает круг $|w| < 1$ на тот же круг $|\zeta| < 1$ так, что $h(w_0) = 0$ и $\arg h'(w_0) = 0$ (пример 3). Следовательно, функция $w = w(z)$, определяемая формулой (22), отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = w_0$ и $\arg w'(z_0) = \alpha$.

Пример 6. Конформное отображение $w = w(z)$ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, удовлетворяющее условиям $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$, определяется формулой

$$\frac{w - w_0}{w - \overline{w}_0} = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\, e^{i\alpha}.$$

Доказательство итого утверждения аналогично доказательству формулы (22).

§ 32. Конформные отображения элементарными функциями

1. Функция $w = z^2$

Однолистность. Функция $w = w(z) = z^2$ *однолистна в каждой конечной точке* $z \neq 0$, так как в этих точках $w'(z) = 2z \neq 0$; *неоднолистна в точке* $z = 0$, так как $w'(0) = 0$; *неоднолистна в точке* $z = \infty$, так как $z = \infty$ — полюс функции $w = z^2$ второго порядка.

Выясним, в каких областях эта функция однолистна, используя определение однолистности. Пусть $z_1 \neq z_2$ и $z_1^2 = z_2^2$. Тогда $z_1 = -z_2$, т. е. точки z_1, z_2 симметричны относительно точки $z = 0$. Таким образом, *функция* $w = z^2$ *является однолистной в области, если эта область не содержит ни одной пары точек, симметричных относительно точки* $z = 0$. Например, функция $w = z^2$ однолистна в любой полуплоскости, границей которой является прямая, проходящая через точку $z = 0$ (а также в любой части такой полуплоскости).

Рассмотрим отображение координатной сетки функцией $w = z^2$ для случаев полярной и декартовой систем координат.

Образы лучей $\arg z = \alpha$ и окружностей $|z| = \rho$. Равенство $w = z^2$ означает, что $|w| = |z|^2$, $\arg w = 2\arg z$. Следовательно, отображение $w = z^2$ переводит:

1) луч $\arg z = \alpha$ в луч $\arg w = 2\alpha$ взаимно однозначно;

2) окружность $|z| = \rho$ в окружность $|w| = \rho^2$, проходимую дважды;

3) дугу окружности $|z| = \rho$, $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, где $\beta - \alpha < \pi$, в дугу окружности $|w| = \rho^2$, $2\alpha \leqslant \arg w \leqslant 2\beta$, взаимно однозначно.

Пример 1. Найдем образ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ при отображении $w = z^2$.

Отметим, что это отображение является конформным, так как функция $w = z^2$ регулярна и однолистна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Будем вращать луч $\arg z = \alpha$, непрерывно увеличивая α, $0 < \alpha < \pi$. Тогда этот луч опишет всю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 86). При этом луч $\arg w = 2\alpha$ опишет всю плоскость w за исключением луча $\arg w = 0$, т. е. луча $[0; +\infty)$ (рис. 86).

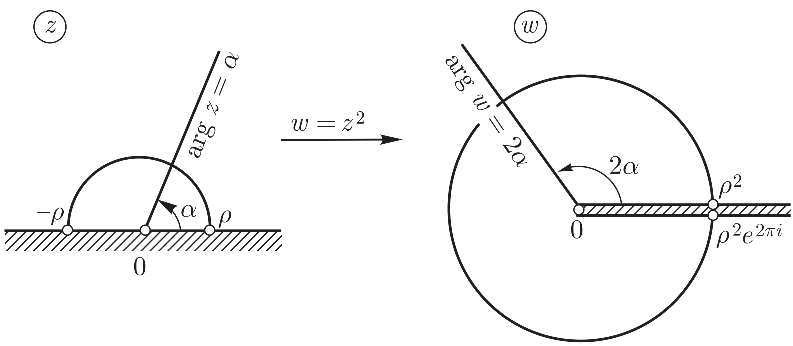

Рис. 86

Таким образом, функция $w = z^2$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на всю плоскость w с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 86).

При этом луч $[0, +\infty)$ плоскости z переходит в верхний берег разреза, а луч $(-\infty, 0]$ — в нижний берег разреза плоскости w по лучу $[0, +\infty)$. Точка $z = \rho$ $(\rho > 0)$ переходит в точку $w = \rho^2$ верхнего берега разреза, а точка $z = -\rho$ переходит в точку $w = \rho^2 e^{2\pi i} = \rho^2$ нижнего берега разреза (рис. 86).

Отметим также, что функция $w = z^2$ конформно отображает кольцевой сектор S: $\rho_1 < |z| < \rho_2$, $0 < \arg z < \alpha \leqslant \pi$, где

$0 \leqslant \rho_1 < \rho_2 \leqslant \infty$, на кольцевой сектор $\widetilde{S}$: $\rho_1^2 < |w| < \rho_2^2$, $0 < \arg w < 2\alpha$ (рис. 87).

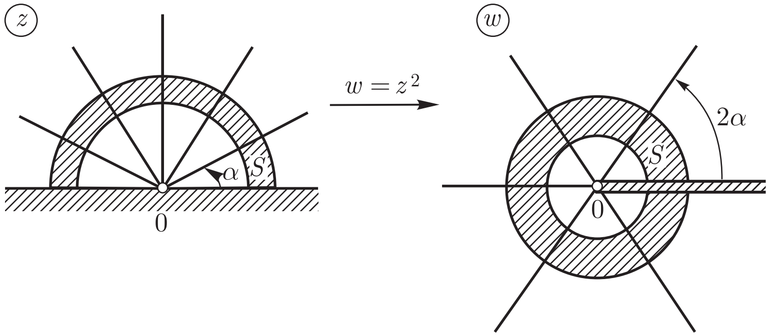

Рис. 87

Пример 2. Как и в примере 1, получается, что функция $w = z^2$ конформно отображает:

1) нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ на плоскость w с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 88);

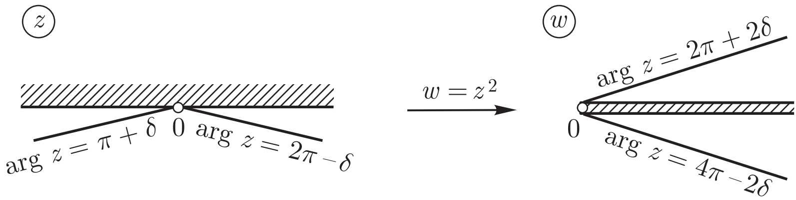

Рис. 88

2) правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ на плоскость w с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ (рис. 89);

3) левую полуплоскость $\operatorname{Re} z < 0$ также на плоскость w с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ (рис. 89).

Замечание 1. При отображении $w = z^2$ углы между кривыми в точке $z = 0$ увеличиваются в два раза. Можно доказать, что вообще если функция $w = f(z)$ регулярна в точке $z_0 \neq \infty$, $f'(z_0) = 0$, $f''(z_0) \neq 0$, то при отображении $w = f(z)$ углы между кривыми в точке z_0 увеличиваются в два раза.

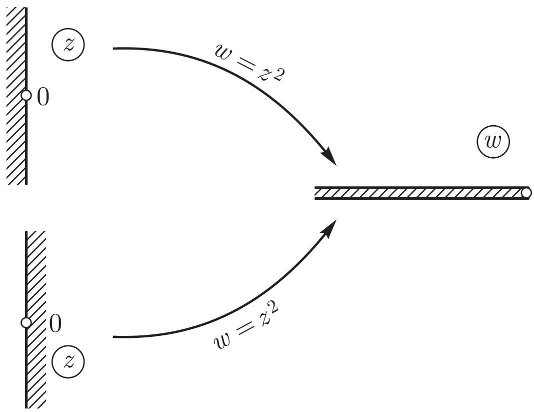

Рис. 89

Образы прямых $\mathrm{Re}\, z = C$ и $\mathrm{Im}\, z = C$. Полагая, как обычно, $z = x + iy$, $w = u + iv$, получаем

$$w = u + iv = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \quad \text{т. е.}$$

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Отсюда следует, что отображение $w = z^2$ взаимно однозначно переводит:

1) прямую $\mathrm{Re}\, z = x = C \neq 0$ в параболу

$$u = C^2 - y^2, \quad v = 2Cy, \quad -\infty < y < \infty, \tag{1}$$

уравнение которой можно также записать (исключая y из уравнений (1)) в виде

$$v^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - u\right), \tag{2}$$

где $p = 2C^2$;

2) прямую $\mathrm{Im}\, z = y = C \neq 0$ в параболу

$$u = x^2 - C^2, \quad v = 2xC, \quad -\infty < x < \infty, \tag{3}$$

уравнение которой можно также записать в виде

$$v^2 = 2p\left(u + \frac{p}{2}\right), \tag{4}$$

где $p = 2C^2$.

Пример 3. Функция $w = z^2$ конформно отображает прямоугольник со сторонами, параллельными действительной и мнимой осям, лежащий в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$, на криволинейный четырехугольник, ограниченный дугами парабол (2), (4) (рис. 90).

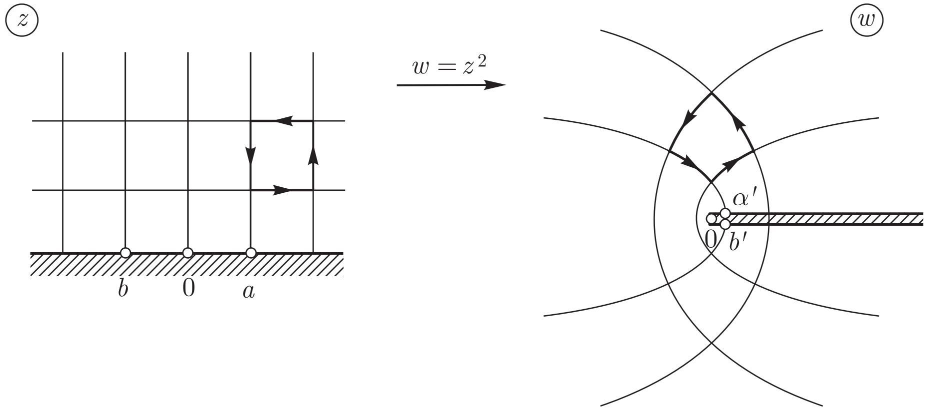

Рис. 90

В частности функция $w = z^2$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > C > 0$ (и полуплоскость $\operatorname{Im} z < -C$) на *внешность параболы* (4), т. е. на область $v^2 > 2p\left(u + \dfrac{p}{2}\right)$, где $p = 2C^2$ (рис. 91).

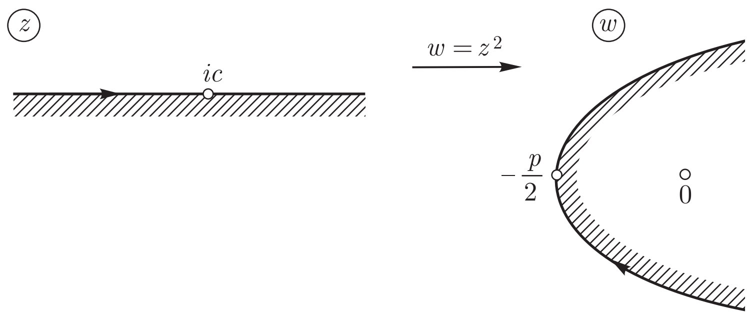

Рис. 91

Отметим, что точка $w = 0$ является фокусом всех парабол (2), (4) и любая парабола (2) пересекается с любой параболой (4) под прямым углом по свойству сохранения углов при конформном отображении.

Если $C = 0$, то парабола (1) вырождается в луч $(-\infty, 0]$, проходимый дважды (пример 2), а парабола (3) — в луч $[0, +\infty)$, проходимый дважды (пример 1).

2. Функция $w = \sqrt{z}$

Напомним, что аналитическая функция $w = \sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви в плоскости z с разрезом по кривой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = \infty$. Отметим, что если в области D плоскости z можно выделить регулярную ветвь $w = f(z)$ функции $w = \sqrt{z}$, то функция $f(z)$ однолистна в области D, так как обратная к ней функция $z = w^2$ однозначна. Поэтому отображение области D функцией $w = f(z)$ является конформным и обратным к соответствующему отображению функцией $w = z^2$ (см. § 13).

Пример 4. Пусть D — плоскость с разрезом по лучу $[0, +\infty)$. В этой области функция $\sqrt{z}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z) = -f_1(z)$, где $f_1(-1) = i$, $f_2(-1) = -i$. Из примеров 1, 2 (рис. 86, 87) получаем, что функция $w = f_1(z)$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$, а функция $w = f_2(z)$ — на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ (рис. 92).

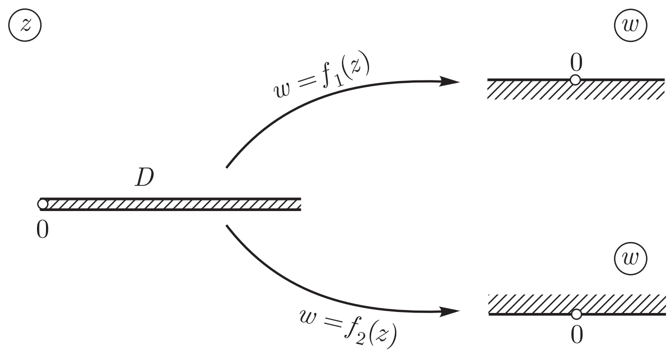

Рис. 92

В таких случаях обычно выбирают только одну из регулярных ветвей многозначной функции и эту ветвь обозначают так же, как и саму многозначную функцию. При этом с помощью рисунка (или его описания) можно установить, какой является выбранная регулярная ветвь.

Так, вместо того, чтобы подробно описывать ситуацию примера 4, говорят коротко: «Функция $w = \sqrt{z}$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 93)». Эта фраза и рис. 93 означают, что в области D можно выделить такую регулярную ветвь $w = f(z)$ функции $w = \sqrt{z}$, которая осуществляет данное отображение; функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f(-1) = i$.

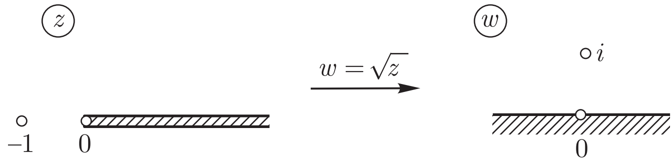

Рис. 93

Пример 5. Функция $w = \sqrt{z}$ такая, что $w(1) = 1$, конформно отображает:

1) плоскость z с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ (рис. 94) — это следует из примера 2, рис. 89;

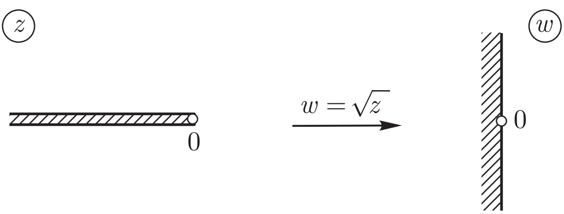

Рис. 94

2) внешность параболы $y^2 = 2p\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$, где $p > 0$, т. е. область $y^2 > 2p\left(x + \dfrac{p}{2}\right)$, на полуплоскость $\operatorname{Im} w > \sqrt{\dfrac{p}{2}}$ (рис. 95) — это следует из примера 3, рис. 91.

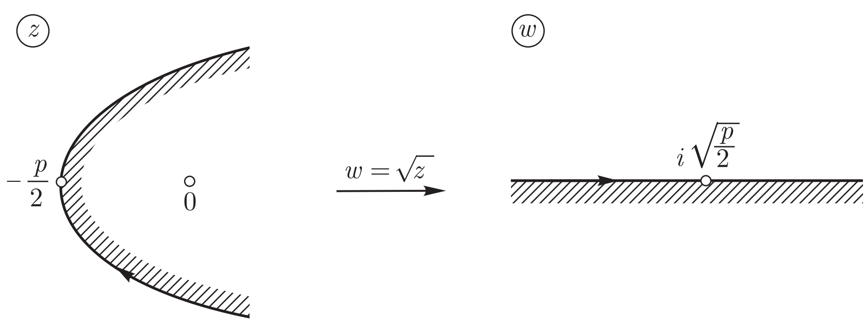

Рис. 95

Пример 6. Пусть D — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку $[0, ih]$ $(h > 0)$ (рис. 96). Найдем конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

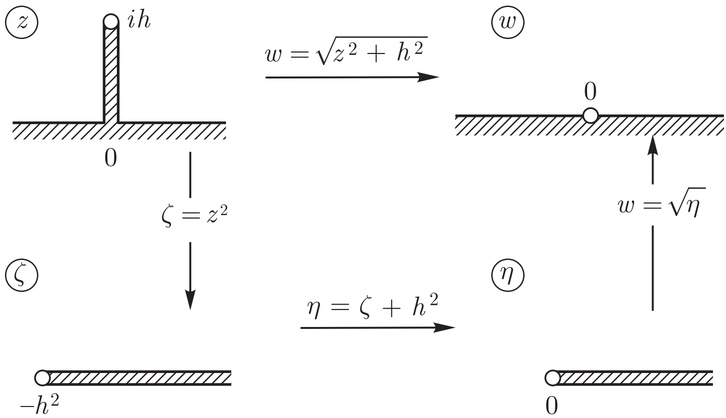

Рис. 96

1) Функция $\zeta = z^2$ конформно отображает область D на область D_1 — плоскость ζ с разрезом по лучу $[-h^2, +\infty)$ (рис. 96).

2) Функция $\eta = \zeta + h^2$ (сдвиг) конформно отображает область D_1 на область D_2 — плоскость η с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 96).

3) Функция $w = \sqrt{\eta}$ такая, что $w(-1) = i$, конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Следовательно, суперпозиция отображений 1)–3), т. е. функция $w = \sqrt{z^2 + h^2}$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 96).

3. Функция $w = z^\alpha$

Здесь и в дальнейшем $\alpha > 0$,

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Функция $w = z^\alpha$ конформно отображает сектор $0 < \arg z < \beta$, где $\beta \leqslant 2\pi/\alpha$, на сектор $0 < \arg w < \alpha\beta$ (рис. 97).

В частности, функция $w = z^{\frac{\pi}{\beta}}$ конформно отображает сектор $0 < \arg z < \beta$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Пример 7. Рассмотрим область D, ограниченную двумя дугами окружностей, пересекающихся в точках a и b под углом α (рис. 98). Эта область называется *луночкой*. Покажем, что луночку D можно конформно отобразить на верхнюю полуплоскость с помощью дробно-линейной и степенной функций.

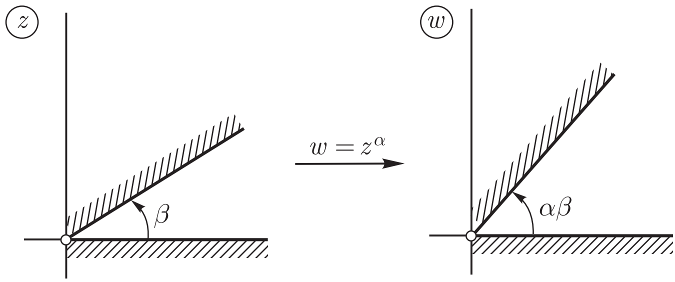

Рис. 97

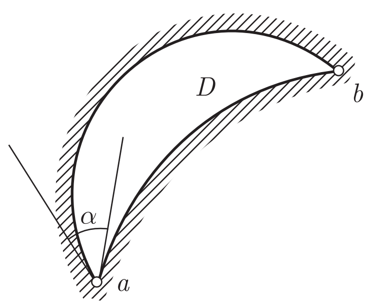

Рис. 98

Применим дробно-линейное отображение $\zeta = \dfrac{z-a}{z-b}$, при котором $\zeta(a) = 0$, $\zeta(b) = \infty$. Это отображение переводит дуги, ограничивающие D, в лучи, пересекающиеся в точке $\zeta = 0$ под углом α. Следовательно, образом луночки D является угол $\beta < \arg\zeta < \beta + \alpha$, где β — некоторое число.

Этот угол поворотом $\eta = \zeta e^{-i\beta}$ отображается на угол $0 < \arg\eta < \alpha$, который функция $w = \eta^{\frac{\pi}{\alpha}}$ отображает на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$. Таким образом, функция

$$w = \left(\frac{z-a}{z-b}\, e^{-i\beta}\right)^{\pi/\alpha}$$

конформно отображает луночку D на верхнюю полуплоскость.

Пример 8. Конформные отображения областей, указанных на рис. 99, на верхнюю полуплоскость осуществляются следующими

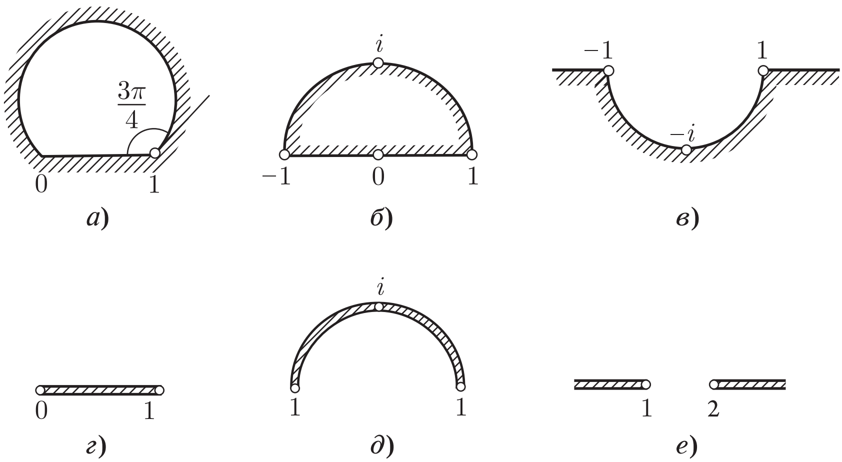

Рис. 99

функциями:

$$\text{а) } w = \left(\frac{z}{1-z}\right)^{4/3}; \quad \text{б) } w = \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2/3}; \quad \text{в) } w = \left(\frac{z-1}{1+z}\right)^{2/3};$$

$$\text{г) } w = \sqrt{\frac{z}{1-z}}; \quad \text{д) } w = \sqrt{i\,\frac{1+z}{z-1}}; \quad \text{е) } w = \sqrt{\frac{z-1}{z-2}}.$$

4. Функция e^z

Однолистность. *Функция $w = e^z$ однолистна в каждой точке $z \neq \infty$, так как $(e^z)' = e^z \neq 0$; неоднолистна в точке $z = \infty$, так как $z = \infty$ — существенно особая точка функции $w = e^z$.*

Выясним, в каких областях эта функция однолистна. Пусть $z_1 \neq z_2$ и $e^{z_1} = e^{z_2}$. Тогда

$$z_1 - z_2 = 2\pi k i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{5}$$

Таким образом, функция $w = e^z$ является *однолистной в области, если эта область не содержит ни одной пары точек, связанных соотношением* (5). Например, функция $w = e^z$ однолистна в любой горизонтальной полосе шириной 2π (§ 13), т. е. в полосе $h < \operatorname{Im} z < h + 2\pi$ (а также в любой части такой полосы).

Образы прямых $\operatorname{Re} z = c$, $\operatorname{Im} z = c$. Равенство $w = e^z = e^{x+iy}$ означает, что $|w| = e^x$, $\arg w = y$. Следовательно, отображение $w = e^z$ взаимно однозначно переводит:

1) отрезок $\operatorname{Re} z = a$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2\pi$ в окружность $|w| = e^a$, $a \leqslant \arg w \leqslant b$;

2) прямую $\operatorname{Im} z = c$ в луч $\arg w = c$.

Пример 9. Из приведенных свойств получается, что функция $w = e^z$ конформно отображает прямоугольник $c_1 < \operatorname{Re} z < c_2$, $a < \operatorname{Im} z < b$, где $-\infty \leqslant c_1 < c_2 \leqslant +\infty$, $b - a \leqslant 2\pi$, на кольцевой сектор $e^{c_1} < |w| < e^{c_2}$, $a < \arg w < b$.

Частным случаем такого «прямоугольника» является полоса $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ (рис. 100).

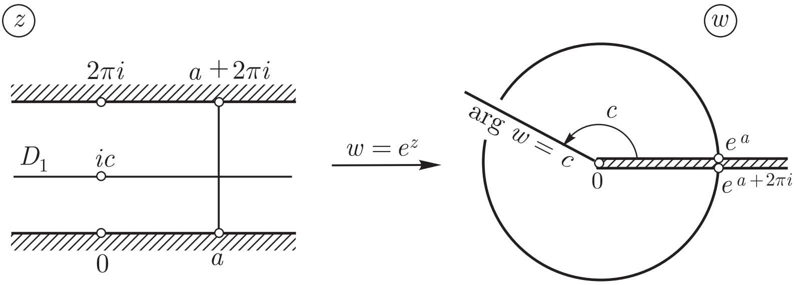

Рис. 100

Пример 10. Найдем образ полосы $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ при отображении $w = e^z$.

Отметим, что это отображение является конформным, так как функция $w = e^z$ регулярна и однолистна в полосе $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$.

Будем двигать прямую $z = x + ic$ параллельно действительной оси, непрерывно увеличивая c, $0 < c < 2\pi$. Тогда эта прямая опишет всю полосу $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ (рис. 100). При этом луч $\arg w = c$ опишет всю комплексную плоскость w, за исключением луча $[0, +\infty)$ (рис. 100).

Таким образом, функция $w = e^z$ отображает конформно полосу $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ на всю плоскость w с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 100).

При этом:

прямая $\operatorname{Im} z = 0$ переходит в верхний берег разреза, а прямая $\operatorname{Im} z = 2\pi$ — в нижний берег разреза по лучу $[0, +\infty)$;

точка $z = a$ действительной оси переходит в точку e^a верхнего берега разреза, а точка $a + 2\pi i$ — в точку $e^{a+2\pi i} = e^a$ нижнего берега разреза;

интервал $\operatorname{Re} z = a$, $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ переходит в окружность $|w| = e^a$ с выколотой точкой $w = e^a$ (рис. 100).

Другие частные случаи конформных отображений «прямоугольников» функцией $w = e^z$ показаны на рис. 101.

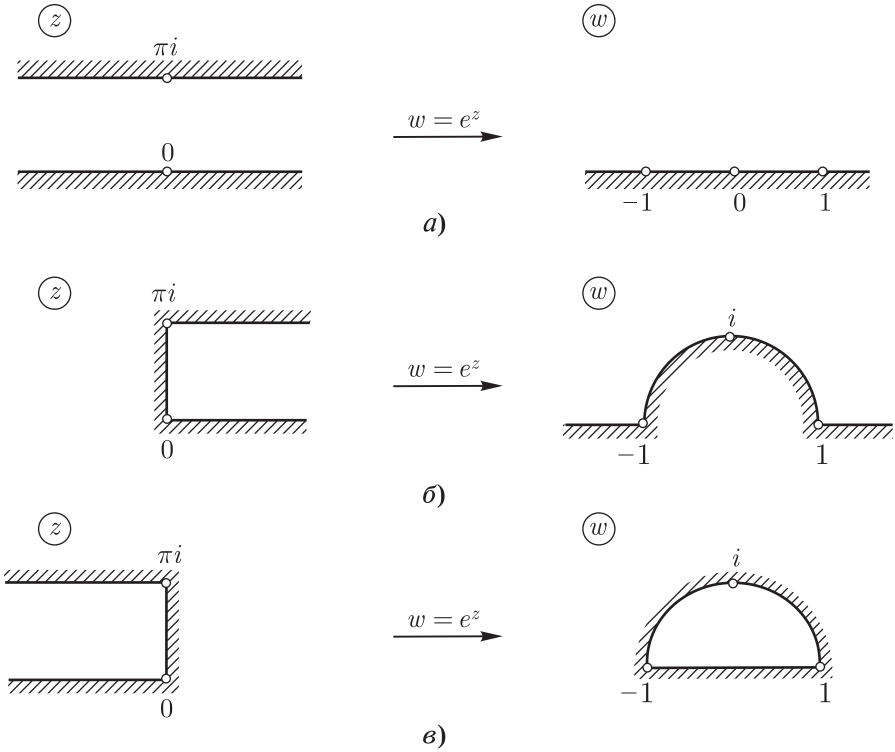

Рис. 101

5. Функция $w = \operatorname{Ln} z$

Напомним, что аналитическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ распадается на регулярные ветви в плоскости z с разрезом по кривой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = \infty$. Отметим, что если в области D можно выделить регулярную ветвь $w = f(z)$ функции $w = \operatorname{Ln} z$, то функция $f(z)$ однолистна в области D, так как обратная к функции $w = f(z)$ функция $z = e^w$ однозначна (в любой области плоскости w). Поэтому отображение области D функцией $w = f(z)$ является конформным и обратным к соответствующему отображению функцией $w = e^z$.

Пример 11. Из примера 10 (рис. 100) следует, что функция $w = \operatorname{Ln} z$ конформно отображает плоскость z с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$ (рис. 102). Подробнее это означает, что в плоскости z с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ можно выделить регулярную ветвь $w = f(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$, которая конформно отображает эту область на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$. Рисунок 102 показывает, что эта регулярная ветвь такова, что, $f(x+i0) = \ln x$, $f(x-i0) = \ln x + 2\pi i$ (при $x > 0$), $f(-1) = \pi i$.

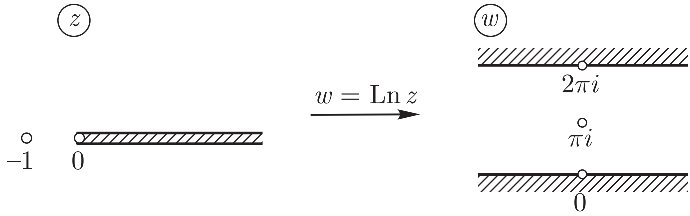

Рис. 102

Пример 12. Из рис. 101, *б* получается, что функция $w = \operatorname{Ln} z$ конформно отображает область $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| > 1$ на полуполосу $0 < \operatorname{Im} w < \pi$, $\operatorname{Re} w > 0$ (рис. 103).

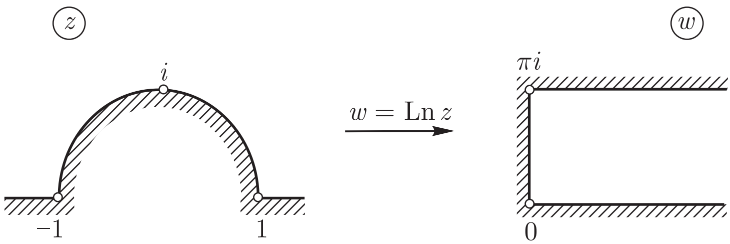

Рис. 103

6. Функция Жуковского

Функция

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{6}$$

называется *функцией Жуковского*. Эта функция:

1) при действительных значениях $z = x \neq 0$ принимает действительные значения $w(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$, причем $w(1) = 1$, $w(-1) = -1$, $w(x) > 1$ при $x > 0$, $x \neq 1$, $w(x) < -1$ при $x < 0$, $x \neq -1$;

2) при $z = iy \neq 0$ принимает значения $w(iy) = \dfrac{i}{2}\left(y - \dfrac{1}{y}\right)$, в частности, $w(i) = w(-i) = 0$;

3) при $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, принимает значения $w(e^{i\varphi}) = \cos\varphi$, т. е. точки единичной окружности переходят в точки отрезка $[-1, 1]$ на плоскости w.

Однолистность. Функция Жуковского (6) регулярна в точках $z \neq 0,\ \infty$, причем $w'(z) = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \dfrac{1}{z^2}\Big)$, а в точках $z = 0$ и $z = \infty$ имеет полюсы первого порядка.

Так как $w'(z) \neq 0$ при $z \neq \pm 1$, то *функция Жуковского однолистна в каждой точке расширенной комплексной плоскости, кроме точек $z = \pm 1$, и неоднолистна в точках $z = \pm 1$*, так как $w'(\pm 1) = 0$.

Таким образом, при отображении функцией Жуковского (6):

1) углы между кривыми сохраняются в каждой точке $z \neq \pm 1$ расширенной комплексной плоскости z;

2) в каждой из точек $z = \pm 1$ углы между кривыми удваиваются, так как $w'(\pm 1) = 0$, а $w''(\pm 1) = \dfrac{1}{z^3}\Big|_{z=\pm 1} = \pm 1 \neq 0$.

Выясним, в каких областях функция Жуковского (6) является однолистной. Пусть $z_1 \neq z_2$ и $\dfrac{1}{2}\Big(z_1 + \dfrac{1}{z_1}\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(z_2 + \dfrac{1}{z_2}\Big)$. Тогда $(z_1 - z_2)\Big(1 - \dfrac{1}{z_1 z_2}\Big) = 0$, откуда

$$z_1 z_2 = 1. \tag{7}$$

Геометрически равенство (7) означает, что точка $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$ получается из точки z_1 двойной симметрией относительно окружности $|z| = 1$ и относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$ в любом порядке.

Таким образом, *функция Жуковского* (6) *однолистна в области, если эта область не содержит ни одной пары различных точек, которые получаются одна из другой двойной симметрией: относительно единичной окружности и относительно действительной оси.*

Пример 13. Функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ однолистна в следующих областях:

1) $|z| > 1$ — внешность единичного круга,
2) $|z| < 1$ — единичный круг,
3) $\operatorname{Im} z > 0$ — верхняя полуплоскость,
4) $\operatorname{Im} z < 0$ — нижняя полуплоскость.

Замечание 2. Пусть $\widetilde{D}$ — область, состоящая из точек $1/z$, где $z \in D$. Тогда функция Жуковского однолистна в области D, если области D и $\widetilde{D}$ не имеют общих точек. При отображении $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ образами областей D и $\widetilde{D}$ является одна и та же область, так как $w(z) = w(1/z)$.

Образы окружностей и лучей. Найдем образы окружностей $|z| = \rho$ и лучей $\arg z = \alpha$ (полярная координатная сетка) при отображении функцией Жуковского. Полагая в (6) $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, получаем $u + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}\right)$, откуда

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{8}$$

Рассмотрим окружность

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \tag{9}$$

($\rho > 0$ — фиксировано). Из (8) следует, что при отображении функцией Жуковского образом окружности (9) является эллипс

$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{10}$$

с полуосями $a_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $b_\rho = \frac{1}{2}\left|\rho - \frac{1}{\rho}\right|$ и с фокусами в точках $w = \pm 1$ (так как $a_\rho^2 - b_\rho^2 = 1$). Исключая из уравнений (10) параметр φ, при $\rho \neq 1$ уравнение эллипса можно записать в каноническом виде

$$\frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} = 1. \tag{11}$$

Отметим, что при замене ρ на $1/\rho$ ($\rho \neq 1$) эллипс остается тем же самым, но его ориентация меняется на противоположную. На рис. 104 показаны окружности $|z| = \rho$, $\rho > 1$, ориентированные по часовой стрелке, и их образы — эллипсы (11); из (10) видно, что эти эллипсы ориентированы также по часовой стрелке. На рис. 105 показаны окружности $|z| = \rho$ при $0 < \rho < 1$ и их образы — эллипсы (11); при этом ориентация меняется на противоположную: окружность $|z| = \rho$, ориентированная против часовой стрелки, переходит в эллипс (11), ориентированный по часовой стрелке.

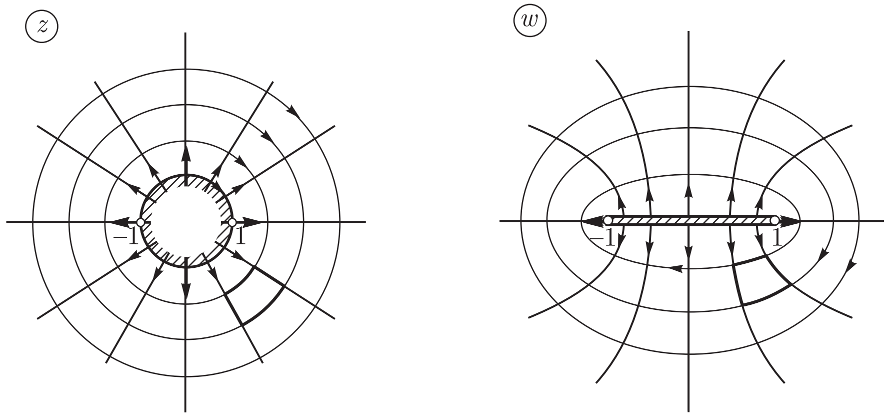

Рис. 104

При $\rho = 1$ эллипс (10) вырождается в отрезок $[-1,\, 1]$, проходимый дважды, т. е. окружность $|z| = 1$ переходит в отрезок $[-1,\, 1]$, проходимый дважды (рис. 104, 105).

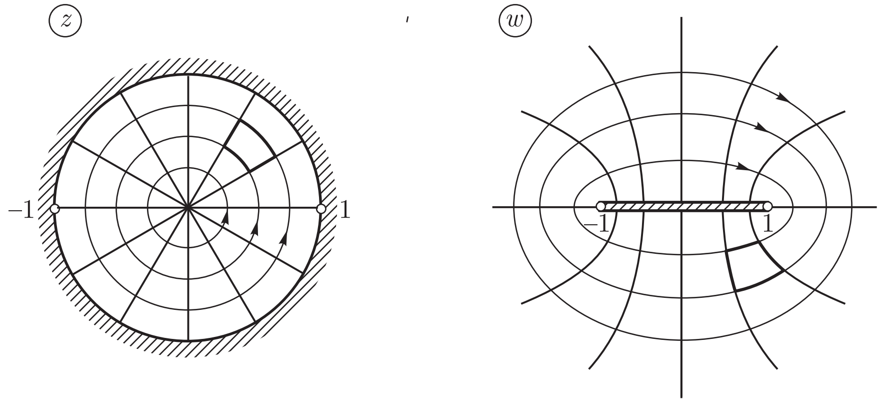

Рис. 105

Рассмотрим луч

$$z = re^{i\alpha}, \quad 0 < r < +\infty \tag{12}$$

(α — фиксировано). При отображении функцией Жуковского образом этого луча (см. (8)) является кривая

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha, \quad 0 < r < \infty. \tag{13}$$

Исключая из уравнений (13) параметр r, при $\alpha \neq k\pi/2$ (k — целое), получаем

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1. \tag{14}$$

Кривая (14) — гипербола с фокусами в точках $w = \pm 1$ и с асимптотами $v = \pm u \operatorname{tg} a$.

Если $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то кривая (13) является правой ветвью гиперболы (14), т. е. луч (12) при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ переходит в правую ветвь гиперболы (14) (ориентация показана на рис. 106). При замене в (13) α на $\pi - \alpha$ получается левая ветвь той же гиперболы (14), поэтому луч (12) при $\pi/2 < \alpha < \pi$ переходит в левую ветвь гиперболы (14) (рис. 106). Отметим также, что при замене в (13) α на $-\alpha$ получается та же ветвь гиперболы (14), но ее ориентация меняется на противоположную.

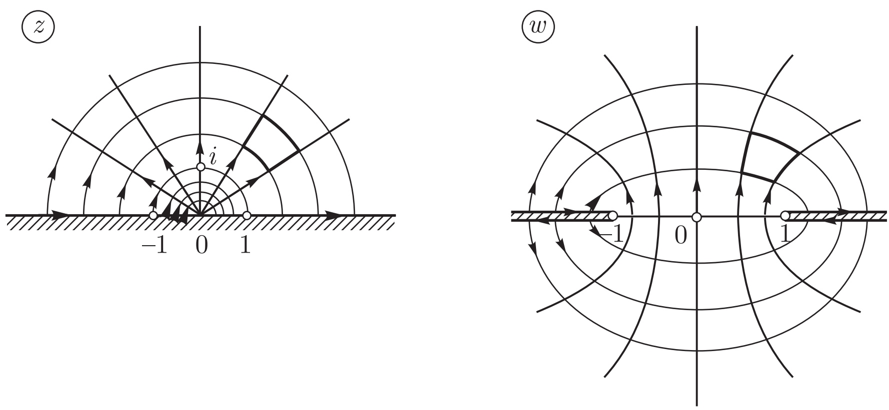

Рис. 106

Рассмотрим лучи (12) при $\alpha = \pi k/2$ (k — целое). Из (13) следует, что луч $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$ переходит в мнимую ось $\operatorname{Re} w = 0$ (рис. 106). Луч $\arg z = \dfrac{3\pi}{2}$ также переходит в мнимую ось $\operatorname{Re} w = 0$. При $\alpha = 0$ кривая (13) вырождается в луч $[1, +\infty)$, проходимый дважды (сложенный вдвое) (рис. 106), т. е. луч $\arg z = 0$ переходит в луч $[1, +\infty)$, проходимый дважды; луч $[1, +\infty)$ переходит в луч $[1, +\infty)$ и полуинтервал $(0, 1]$ в луч $(+\infty, 1]$ (рис. 106). Аналогично, луч $\arg z = \pi$ переходит в луч $(-\infty, -1]$, проходимый дважды (рис. 106).

Таким образом, функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ переводит окружности $|z| = \rho$ в эллипсы (11), а лучи $\arg z = \alpha$ — в ветви гипербол (14); фокусы всех эллипсов (11) и гипербол (14) расположены в точках $w = \pm 1$; любой эллипс (11) пересекается с любой гиперболой (14) под прямым углом.

Конформные отображения областей функцией Жуковского. Покажем на примерах, как с помощью установленных свойств функции Жуковского находятся образы областей при отображении (6).

Пример 14. Пусть $D{:}|z|>1$ — внешность единичного круга (рис. 107). Отображение области D функцией Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ является конформным, так как эта функция регулярна в области D, за исключением одного полюса первого порядка — точки $z = \infty$, и однолистна в этой области.

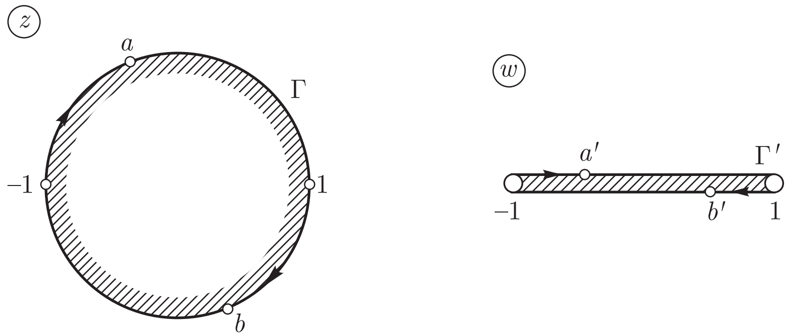

Рис. 107

Найдем образ области D при отображении функцией Жуковского.

Способ 1. Окружности $|z| = \rho$, $\rho > 1$, заполняют всю область D. Образы этих окружностей — эллипсы (11) заполняют всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1;\, 1]$ (рис. 104). Следовательно, функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1;\, 1]$ (рис. 107).

Способ 2. Луч

$$z = re^{i\alpha}, \quad 1 < r < +\infty, \tag{15}$$

переходит в кривую

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha, \quad 1 < r < +\infty, \tag{16}$$

которая является частью (половиной) ветви гиперболы (13).

При изменении α от 0 до 2π лучи (15) заполняют всю область D, их образы — кривые (16) — заполняют всю область w с разрезом по отрезку $[-1;\,1]$ (рис. 104). Следовательно, функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1;\,1]$.

Способ 3. Воспользуемся принципом соответствия границ при конформных отображениях. Границей области D является окружность $\Gamma : |z| = 1$, ориентированная по часовой стрелке. Пусть D' — образ области D при отображении функцией Жуковского, Γ' — граница области D'. Тогда при этом отображении кривая Γ переходит в кривую Γ' взаимно однозначно с сохранением направления ориентации.

Найдем уравнение кривой Γ'. Так как Γ: $z = e^{-i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то Γ': $w = \dfrac{1}{2}(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}) = \cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Таким образом, окружность Γ переходит в отрезок $[-1;\,1]$, проходимый дважды, т. е. в два берега разреза по отрезку $[-1;\,1]$. При этом, когда точка b движется по нижней полуокружности $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ от точки $z = 1$ до точки $z = -1$, ее образ — точка b' движется по нижнему берегу разреза от точки $w = 1$ до точки $w = -1$ (рис. 107). При дальнейшем движении точки (точка a) по верхней полуокружности ее образ (точка a') движется по верхнему берегу разреза (рис. 107). Образно говоря, окружность $|z| = 1$ «сжимается» в разрез по отрезку $[-1;\,1]$ с сохранением направления ориентации. Следовательно, D' — это вся комплексная плоскость w с разрезом по отрезку $[-1;\,1]$, т. е. функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1;\,1]$.

Отметим, что именно третьим способом обычно находят образ области при заданном конформном отображении. В частности, таким способом можно было найти образы областей при конформных отображениях, рассмотренных в примерах 2–13.

Пример 15. Как и в примере 14, получаем, что функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ конформно отображает единичный круг $|z| < 1$ на внешность отрезка $[-1;\,1]$ (рис. 108).

Отметим, что при этом отображении окружность $|z| = 1$, ориентированная против часовой стрелки (граница круга $|z| < 1$), переходит в разрез по отрезку $[-1;\,1]$, ориентированный по часовой стрелке. Подробнее: полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ переходит

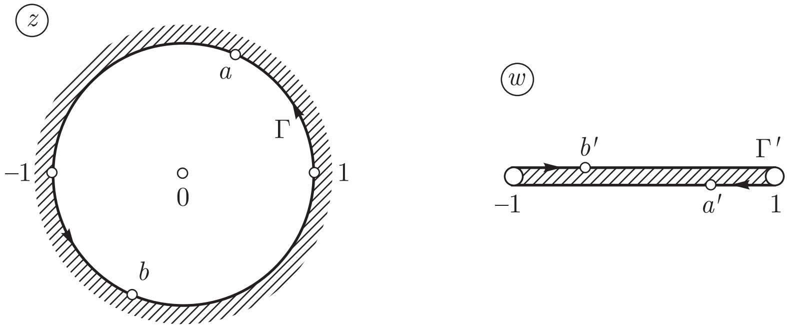

Рис. 108

в нижний берег разреза, а полуокружность $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ — в верхний берег разреза (рис. 108).

Пример 16. Как и в примере 14, получаем, что функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на плоскость w с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ (рис. 109). При этом отображении луч $(-\infty, -1]$ переходит в верхний берег разреза по лучу $(-\infty, -1]$, полуинтервал $[-1, 0)$ — в нижний берег разреза $(-\infty, 1]$, полуинтервал $(0, 1]$ — в нижний берег разреза $[1, +\infty)$, луч $[1, +\infty)$ — в верхний берег разреза $[1, +\infty)$ (рис. 109).

Рис. 109

Пример 17. Из примера 16 следует, что функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ конформно отображает нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ на плоскость w с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$.

На рис. 105–106 жирными линиями отмечены кольцевые секторы на плоскости z и их образы на плоскости w при отображении функцией Жуковского. Следующие частные случаи таких отображений часто встречаются в практике конформных отображений.

Пример 18. Функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ конформно отображает:

1) область $\operatorname{Im} z > 0$, $|z| > 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 110);

Рис. 110

2) полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$; полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ (рис. 111);

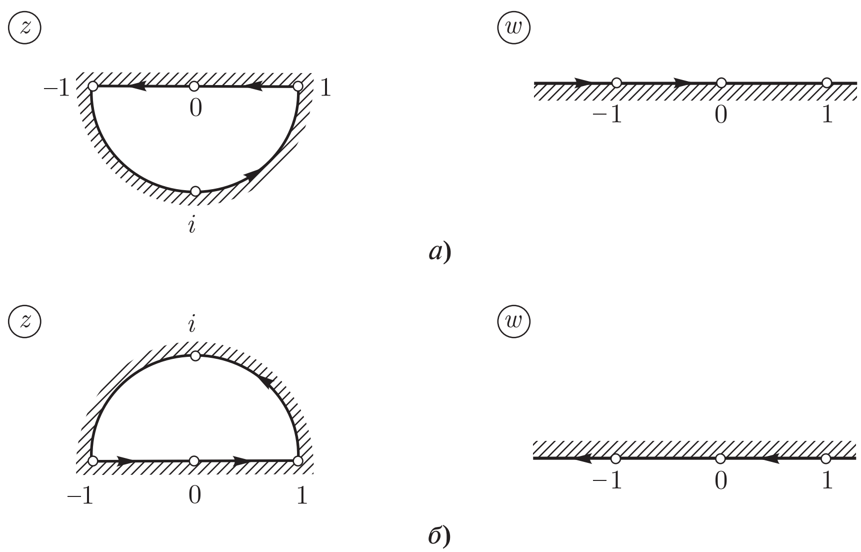

Рис. 111

3) область $|z| > \rho > 1$ на внешность эллипса (11) (рис. 112); круг $|z| < \rho < 1$ на внешность эллипса (11) (рис. 112);

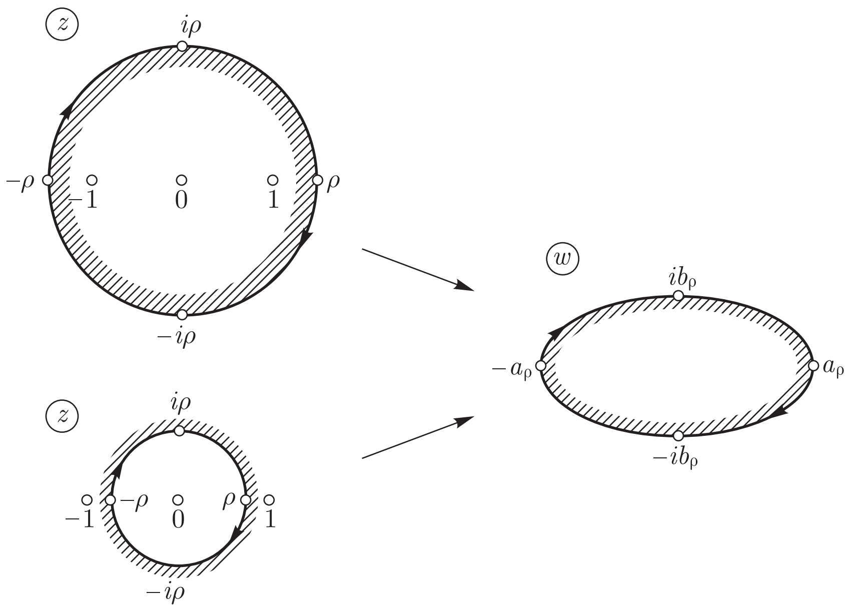

Рис. 112

4) сектор $\alpha < \arg z < \pi - \alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$, на внешность гиперболы (14) (рис. 113).

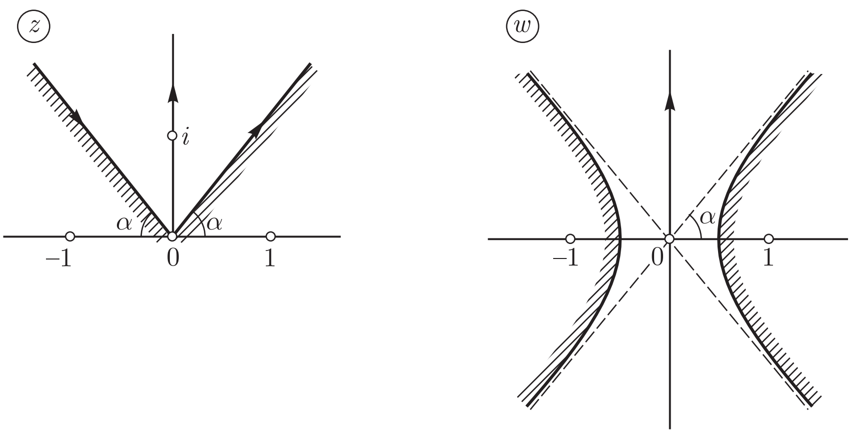

Рис. 113

5) сектор $0 < \arg z < \alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$, на внутренность правой ветви гиперболы (14) с разрезом по лучу $[1, +\infty)$ (рис. 114).

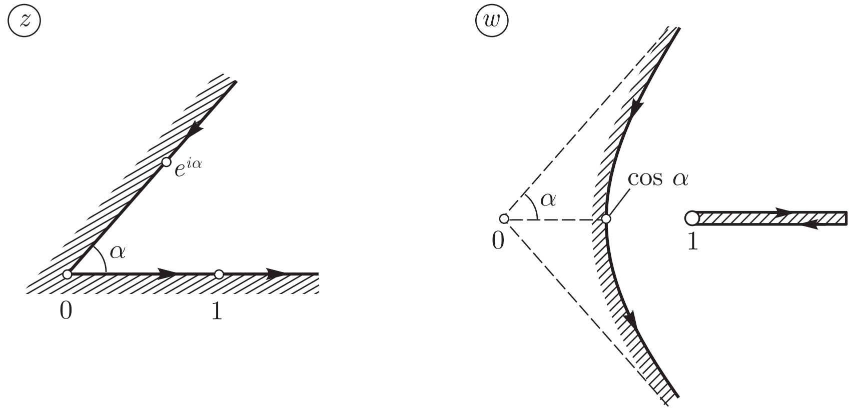

Рис. 114

6) сектор $0 < \arg z < \alpha$, $|z| > 1$, где $0 < \alpha < \pi/2$, на область $\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{v^2}{\sin^2\alpha} > 1$, $u > 0$, $v > 0$ $(w = u + iv)$ (рис. 115).

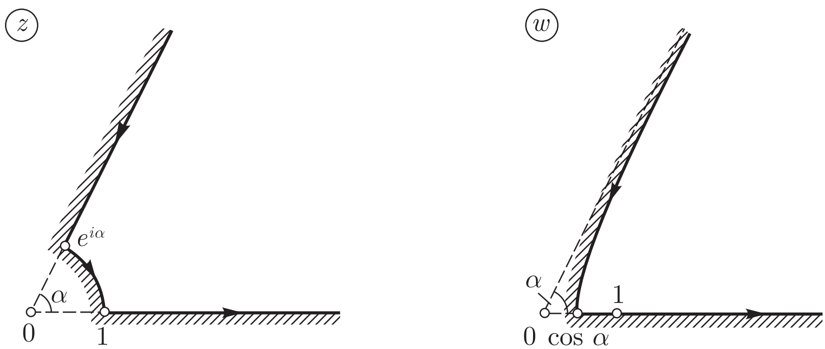

Рис. 115

7. Функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обратная к функции Жуковского

Решая уравнение $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ относительно z, находим $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, т. е. функция

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{17}$$

является обратной к функции Жуковского.

Аналитическая функция (17) в плоскости z с разрезом по кривой, соединяющей точки $z = \pm 1$, распадается на две регулярные ветви.

Отметим, что если в области D плоскости z можно выделить регулярную ветвь $w = f(z)$ функции (17), то функция $f(z)$ однолистна в области D, так как обратная к функции $w = f(z)$ функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ однозначна (в любой области плоскости w). Поэтому отображение области D функцией $w = f(z)$ является конформным и обратным к соответствующему отображению функцией Жуковского.

Пример 19. Пусть D — плоскость z с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (рис. 116). Из примеров 14, 15 следует, что в области D функция $z + \sqrt{z^2 - 1}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$, $f_2(z)$, такие, что функция $w = f_1(z)$ конформно отображает область D на внешность единичного круга, а функция $f_2(z)$ — на круг $|w| < 1$ (рис. 116). Отметим, что $f_1(\infty) = \infty$, $f_2(\infty) = 0$.

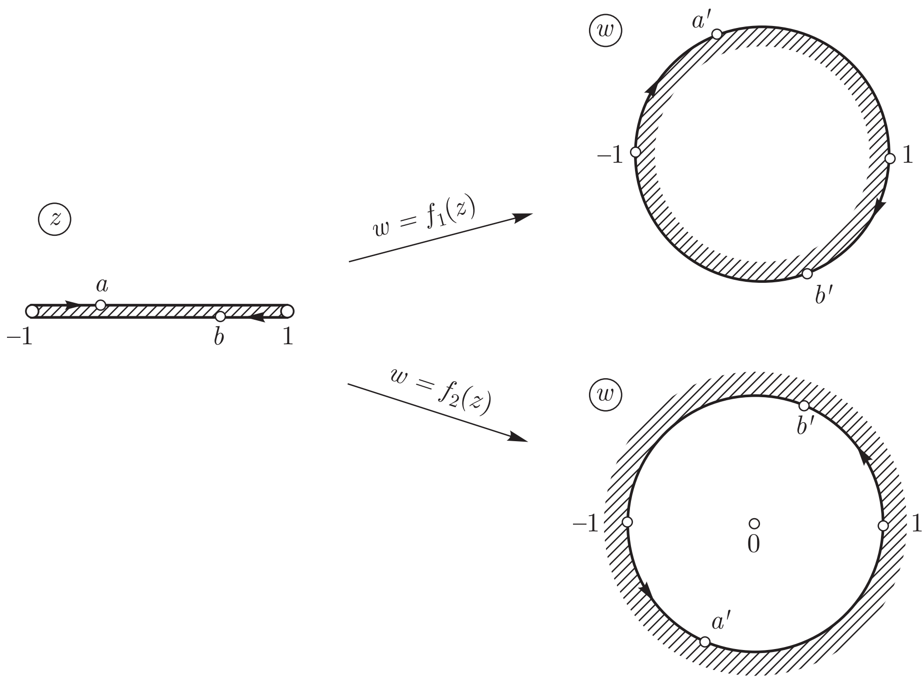

Рис. 116

Пример 20. Пусть D — плоскость z с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ (рис. 117). Эти два луча на расширенной комплексной плоскости (сфере Римана) образуют один «отрезок», соединяющий точки $z = \pm 1$ и проходящий через точку $z = \infty$. Из примеров 16, 17 получается, что в области D функция $z + \sqrt{z^2 - 1}$

распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$, $f_2(z)$, где функция $w = f_1(z)$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а функция $w = f_2(z)$ — на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ (рис. 117). Отметим, что $f_1(0) = i$, $f_2(0) = -i$.

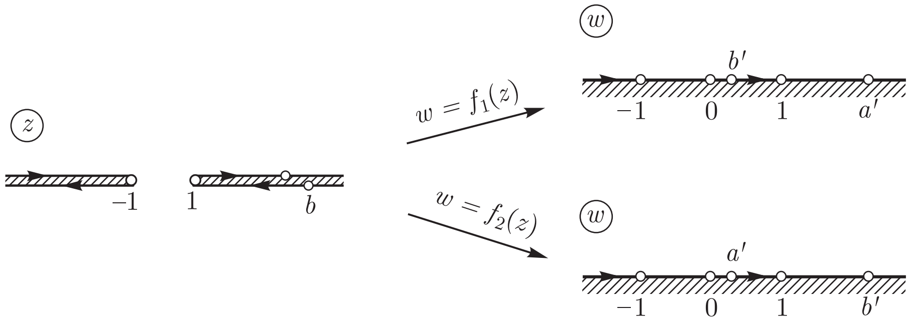

Рис. 117

Пример 21. Пусть D — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 118). Из примера 18 получается, что в области D функция $z + \sqrt{z^2 - 1}$ распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$, $f_2(z)$, где функция $w = f_1(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на область $\operatorname{Im} w > 0$, $|w| > 1$, а функция $w = f_2(z)$ — на полукруг $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w < 0$ (рис. 118).

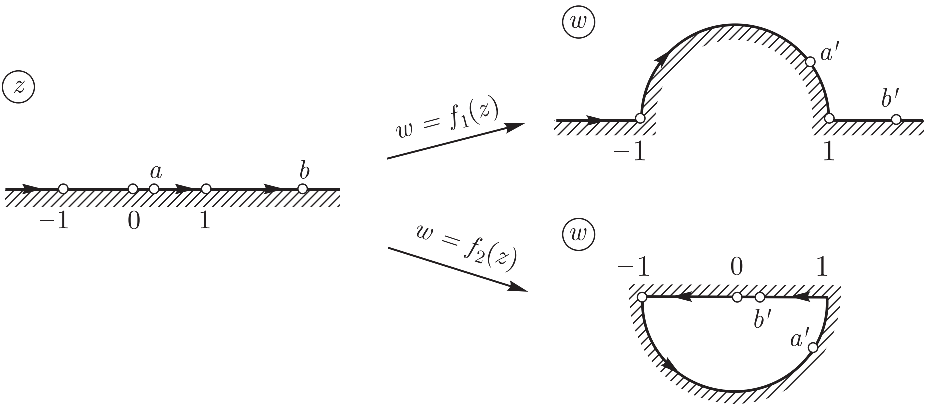

Рис. 118

8. Тригонометрические и гиперболические функции

Рассмотрим примеры конформных отображений тригонометрическими и гиперболическими функциями.

Пример 22. Покажем, что функция $w = \operatorname{ch} z$ конформно отображает полуполосу $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 119).

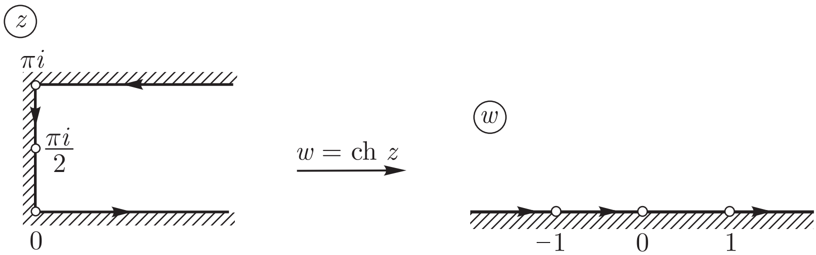

Рис. 119

Функция $w = \operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}\Big(e^z + e^{-z}\Big)$ является суперпозицией двух функций:

$$\zeta = e^z, \quad w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

В результате последовательного выполнения отображения $\zeta = e^z$ (рис. 101) и затем отображения $w = \dfrac{1}{2}\Big(\zeta + \dfrac{1}{\zeta}\Big)$ (рис. 110) получаем отображение рис. 119.

Пример 23. Покажем, что функция $w = \cos z$ конформно отображает полуполосу $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Так как $\cos z = \operatorname{ch}(-iz)$, то, выполняя сначала отображение $\zeta = -iz$ (поворот вокруг точки $z = 0$ на угол $-\pi/2$), а затем отображение $w = \operatorname{ch} \zeta$ (рис. 119), получаем отображение рис. 120.

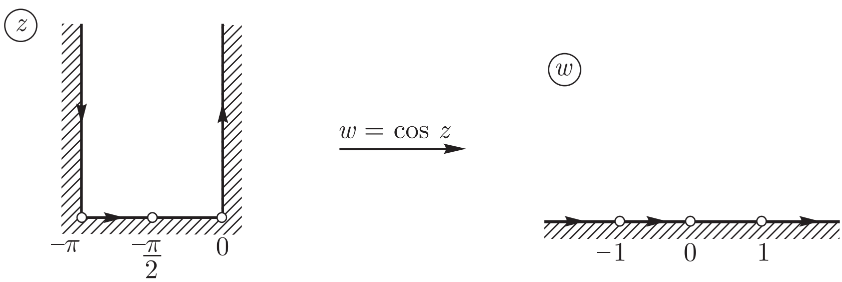

Рис. 120

Пример 24. Покажем, что функция $w = \sin z$ конформно отображает полуполосу $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Так как $\sin z = \cos\left(\zeta - \dfrac{\pi}{2}\right)$, то, выполняя сначала отображение $\zeta = z - \dfrac{\pi}{2}$ (сдвиг), а затем отображение $w = \cos\zeta$, получаем отображение рис. 121.

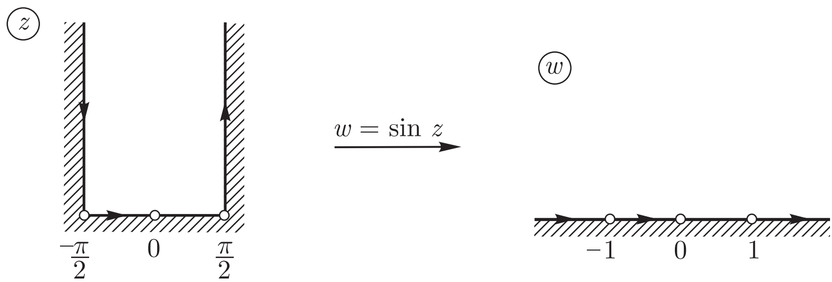

Рис. 121

Пример 25. Покажем, что функция $w = \operatorname{tg} z$ конформно отображает полосу $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$ на единичный круг $|w| < 1$.

Так как

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = (-i)\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}\,,$$

то отображение $w = \operatorname{tg} z$ можно рассматривать как суперпозицию трех отображений:

$$\zeta = 2iz, \quad \eta = e^{\zeta}, \quad w = (-i)\,\frac{\eta - 1}{\eta + 1}\,.$$

Выполняя последовательно эти отображения, получаем отображение рис. 122.

Отметим, что отображение $w = \operatorname{tg} z$ удовлетворяет условиям $w(0) = 0$, $\arg w'(0) = 0$ (рис. 122).

Рассмотренные примеры (22–25) показывают, что отображения тригонометрическими и гиперболическими функциями сводятся к последовательному выполнению отображений, изученных ранее.

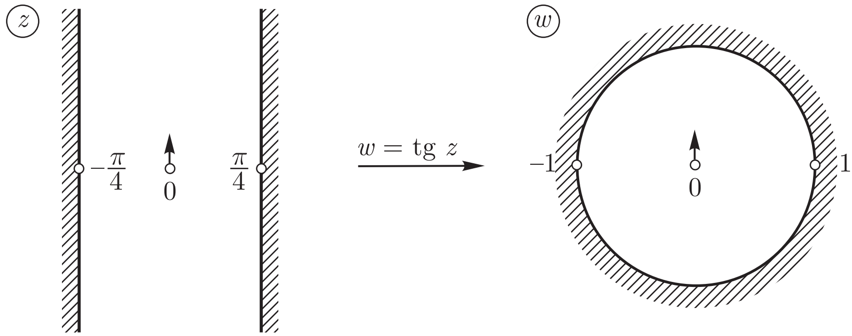

Рис. 122

9. Разные примеры

Конформные отображения, рассмотренные ранее, являются «табличными». С их помощью находятся конформные отображения других областей.

Приведем примеры конформных отображений $w = w(z)$ заданной области D плоскости z на *верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} w > 0$.

Пример 26. Пусть D — плоскость z с разрезами по лучам $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$, где $-\infty < a < b < +\infty$ (рис. 123).

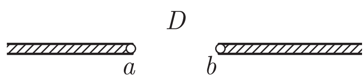

Рис. 123

Способ 1. Как и в примере 8 (рис. 99, *е*), находим

$$w = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}, \quad \text{где} \quad w = \left(\frac{a+b}{2}\right) = i.$$

Способ 2. Линейная функция $\zeta = \left(z - \frac{a+b}{2}\right)\frac{2}{b-a}$ (сдвиг и растяжение) отображает область D на плоскость ζ с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. Затем, как и в примере 20 (рис. 117), $w = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$, где $w|_{\zeta=0} = i$.

Пример 27. Пусть D — полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по дуге $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$, где $0 < \alpha < \pi$ (рис. 124).

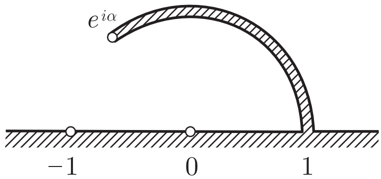

Рис. 124

Функция Жуковского $\zeta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ отображает область D на плоскость ζ с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[\cos\alpha, +\infty)$. Далее см. пример 26.

Пример 28. Пусть D — полоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом по отрезку $[0, id]$, где $0 < d < \pi$ (рис. 125).

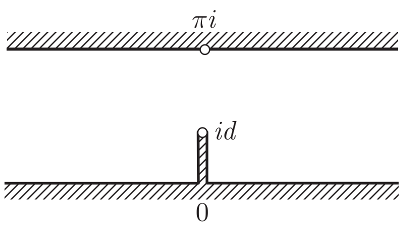

Рис. 125

Функция $\zeta = e^z$ отображает область D на область рис. 124. Далее см. пример 27.

Пример 29. Пусть D — полоса $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ с разрезом по лучу $[a, +\infty)$, где a — действительное число (рис. 126).

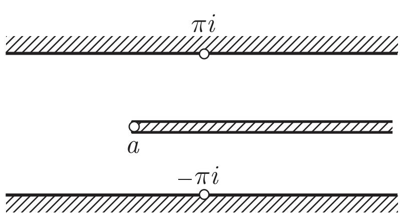

Рис. 126

Функция $\zeta = e^z$ отображает область D на плоскость ζ с разрезами по лучам $(-\infty, 0]$ и $[e^a, +\infty)$. Далее см. пример 26.

Пример 30. Пусть D — полуполоса $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ с разрезом по отрезку $\left[\dfrac{\pi i}{2}, \alpha + \dfrac{\pi i}{2}\right]$, где $\alpha > 0$ (рис. 127).

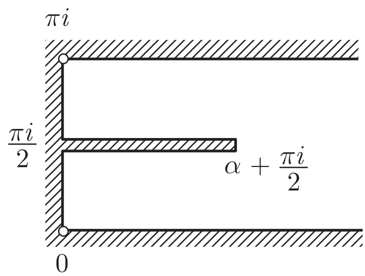

Рис. 127

Функция $\zeta = \operatorname{ch} z$ отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ с разрезом по отрезку $[0, i \operatorname{sh}\alpha]$. Далее см. пример 6.

Пример 31. Пусть D — область $\operatorname{Re} z > 0$, $|z-1| > 1$ с разрезом по отрезку $[2,3]$ (рис. 128).

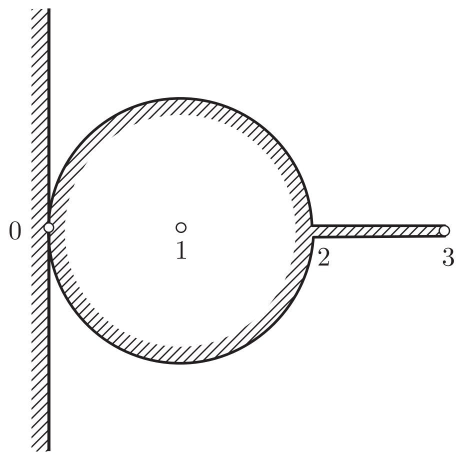

Рис. 128

Функция $\zeta = 1/z$ отображает область D на область D_1 — полосу $0 < \operatorname{Re}\zeta < 1/2$ с разрезом по отрезку $[1/3, 1/2]$. Область D_1 линейной функцией можно отобразить на область рис. 125. Далее см. пример 28.

Пример 32. Пусть D — область $|z-1| > 1$, $|z-2| < 2$, $\operatorname{Im} z < 0$ (рис. 129).

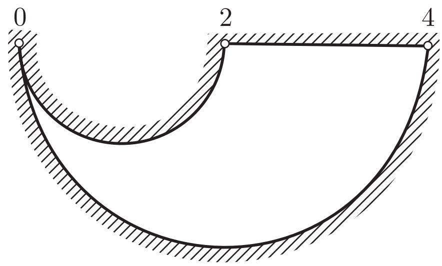

Рис. 129

Функция $\zeta = 1/z$ отображает область D на полуполосу D_1: $1/4 < \operatorname{Re}\zeta < 1/2$, $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Область D_1 линейной функцией можно отобразить на область рис. 119. Далее см. пример 22.

Приведем примеры конформных отображений $w = w(z)$ заданной области D плоскости z на *единичный круг* $|w| < 1$.

Пример 33. Пусть D — плоскость z с разрезом по отрезку $[a, b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$ (рис. 130).

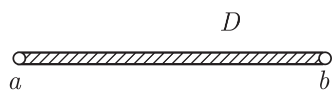

Рис. 130

Линейная функция $\zeta = \left(z - \dfrac{a+b}{2}\right)\dfrac{2}{b-a}$ (сдвиг и растяжение) отображает область D на внешность отрезка $[-1, 1]$. Затем, как и в примере 19, $w = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$, где $w(\infty) = 0$.

Пример 34. Пусть D — круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[-1, a]$, где $-1 < a < 0$ (рис. 131).

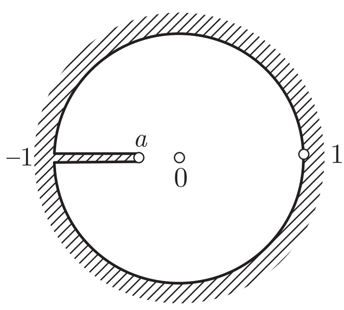

Рис. 131

Функция Жуковского $\zeta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ отображает область D на плоскость ζ с разрезом по отрезку $\left[\dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right);\, 1\right]$. Далее см. пример 33.

Пример 35. Пусть D — область $|z| > 1$ с разрезами по лучам $[a,\, -1]$ и $[1,\, b]$, где $-\infty < a < -1$, $1 < b < +\infty$ (рис. 132).

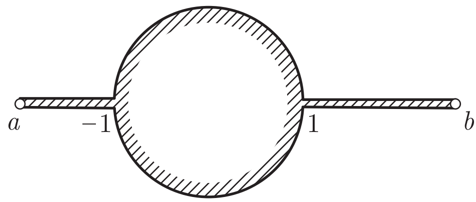

Рис. 132

Функция Жуковского $\zeta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ отображает область D на внешность отрезка $[a',\, b']$, где $a' = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$, $b' = \dfrac{1}{2}\left(b + \dfrac{1}{b}\right)$. Далее см. пример 33.

Пример 36. Пусть D — круг $|z| < 1$ с разрезом по отрезку $[0,\, 1]$ (рис. 133).

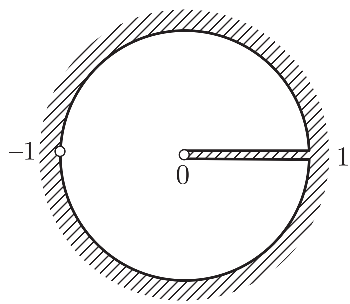

Рис. 133

Функция Жуковского $\zeta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ отображает область D на область D_1: плоскость ζ с разрезом по лучу $[-1,\, +\infty)$. Функция $\eta = \sqrt{\zeta + 1}$, где $\eta|_{\zeta=-5} = 2i$, отображает область D_1 на полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$. Наконец, функция $w = (\eta - i)/(\eta + i)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$ на круг $|w| < 1$.

Разнообразные примеры конформных отображений элементарными функциями содержатся в [11].

Пример 37. Пусть D — область $\operatorname{Im} z < 0$, $|z + il| > R$, где $l > R > 0$ (рис. 134). Эту область можно назвать неконцентрическим кольцом (прямая — окружность бесконечного радиуса). Найдем конформное отображение области D на концентрическое кольцо.

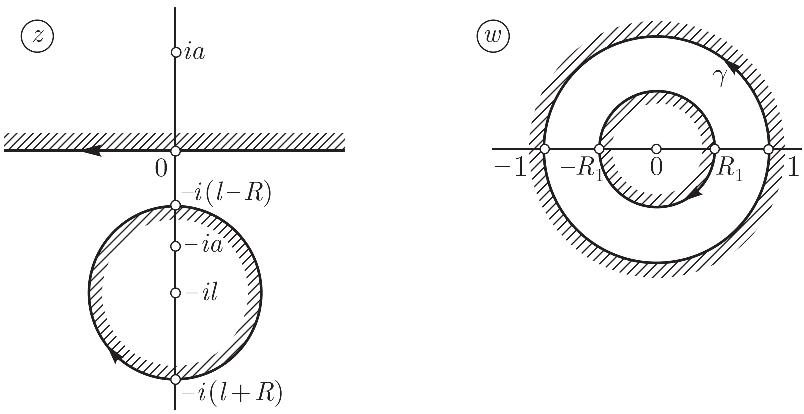

Рис. 134

Найдем две точки, симметричные одновременно относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$ и относительно окружности $|z + il| = R$. Эти точки должны лежать на общем перпендикуляре к прямой и к окружности, т. е. на мнимой оси. Из симметрии относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$ следует, что это точки $\pm ia$, где $a > 0$. Из симметрии относительно окружности $|z + il| = R$ получаем $(l + a)(l - a) = R^2$, откуда $a = \sqrt{l^2 - R^2}$. Покажем, что функция

$$w = \frac{z + ia}{z - ia} \tag{18}$$

осуществляет искомое отображение. При этом отображении прямая $\operatorname{Im} z = 0$ переходит в окружность γ. По свойству сохранения симметрии точки $z = \pm ia$ переходят в точки $w = 0$, $w = \infty$, симметричные относительно окружности γ. Следовательно, $w = 0$ — центр окружности γ. Так как точка $w(0) = -1$ принадлежит γ, то γ — окружность $|w| = 1$ (рис. 134). Аналогично доказывается, что окружность $|z + il| = R$ при отображении (18) переходит в окружность $|w| = R_1$, где $R_1 = \dfrac{R + l - a}{R + l + a}$. В силу соответствия границ функция (18) конформно отображает область D на концентрическое кольцо $R_1 < |w| < 1$ (рис. 134).

Пример 38. Пусть D — область $|z - ih| > \sqrt{1 + h^2}$, где h — действительное число. Граница этой области — окружность γ с центром в точке

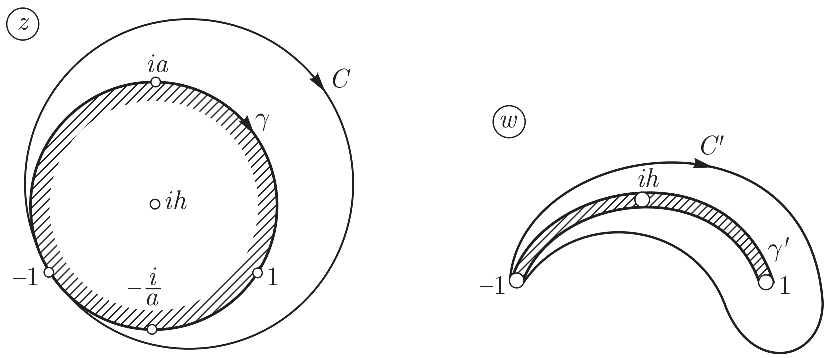

Рис. 135

ih, проходящая через точки $z=\pm1$, $z=ia$, $z=-\dfrac{i}{a}$, $a=h+\sqrt{1+h^2}$ (рис. 135). Покажем, что функция Жуковского $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ однолистна в области D.

Рассмотрим отображение $\zeta=1/z$, причем точки ζ будем изображать на той же плоскости z. При этом отображении точки $z=\pm1$ остаются на месте, а точка $z=ia$ переходит в точку $z=-\dfrac{i}{a}$, поэтому окружность γ переходит сама в себя. Кроме того, точка $z=\infty$ переходит в точку $\zeta=0$, лежащую внутри γ. Следовательно, внешность D окружности γ переходит во внутренность D этой окружности. Так как области D и $\widetilde{D}$ не имеют общих точек, то функция Жуковского однолистна в области D (и в области $\widetilde{D}$).

Найдем образ области D при отображении функцией Жуковского. Заметим, что соотношение $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ можно записать в виде $\dfrac{w-1}{w+1}=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$. Поэтому функцию Жуковского можно рассматривать как суперпозицию двух функций:

$$w=\frac{1+\zeta}{1-\zeta},\quad \zeta=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

При отображении $\zeta=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$ окружность γ переходит в разрез по некоторому лучу $\widetilde{\gamma}$, соединяющему точки $\zeta=0$ и $\zeta=\infty$. При отображении $w=\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}$ луч $\widetilde{\gamma}$ переходит в дугу окружности γ' с концами в точках $w=\pm1$. Так как точка $z=ia$ при отображении функцией Жуковского переходит в точку $w=\dfrac{1}{2}\left(ia-\dfrac{i}{a}\right)=ih$, то дуга γ' проходит через точку $w = ih$. Следовательно, функция Жуковского конформно отображает внешность окружности γ на внешность дуги окружности γ' с концами в точках $w = \pm 1$, проходящей через точку $w = ih$ (рис. 135).

Отметим, что при отображении функцией Жуковского окружность C, близкая к γ и касающаяся γ в точке $z = -1$, переходит в кривую C' (рис. 135), напоминающую профиль крыла самолета. Кривые C' (профили Жуковского) были использованы Н. Е. Жуковским для расчета подъемной силы крыла самолета [3].

§ 33. Принцип симметрии

В этом параграфе рассматривается способ аналитического продолжения с помощью симметрии относительно прямой или окружности. Этот способ называют *принципом симметрии Римана–Шварца*. Будет показано, как с помощью принципа симметрии можно решать задачи о нахождении конформных отображений областей, симметричных относительно прямой или окружности.

1. Симметрия относительно действительной оси

В следующей теореме граница области D, лежащей в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, содержит интервал γ действительной оси, D^* — область, симметричная с областью D относительно действительной оси (рис. 136).

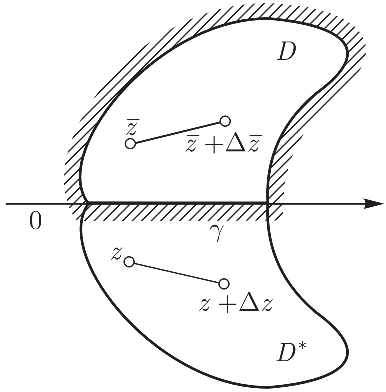

Рис. 136

Теорема (*принцип симметрии*). *Пусть функция $f(z)$ регулярна в области D, непрерывна вплоть до γ и принимает действительные значения на интервале γ, т. е.* $\operatorname{Im} f(x) = 0$ *при* $x \in \gamma$. *Тогда функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в область $D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ и это продолжение находится по формуле*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D^*. \end{cases} \tag{1}$$

○ Докажем, что функция

$$f_1(z) = \overline{f(\overline{z})}, \quad z \in D^*, \tag{2}$$

имеет производную $f_1'(z)$ в каждой точке $z \in D^*$. Рассмотрим отношение

$$\frac{f_1(z + \Delta z) - f_1(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\overline{z + \Delta z})} - \overline{f(\overline{z})}}{\Delta z} = \overline{\left[\frac{f(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - f(\overline{z})}{\overline{\Delta z}}\right]}, \tag{3}$$

где $z \in D^*$ и $z + \Delta z \in D^*$. Тогда $\overline{z} \in D$, $\overline{z} + \overline{\Delta z} \in D$ (рис. 136) и, следовательно, при $\Delta z \to 0$ предел отношения (3) существует и равен $\overline{f'(\overline{z})}$, т. е. $f_1'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$ при $z \in D^*$. Таким образом, функция $f_1(z)$ дифференцируема и, следовательно, регулярна в области D^*.

Из непрерывности функции $f(z)$ вплоть до γ и формулы (2) следует, что функция $f_1(z)$ также непрерывна вплоть до γ и $f_1(x) = \overline{f(x)}$ при $x \in \gamma$. А так как $\operatorname{Im} f(x)|_{x \in \gamma} = 0$, то $f_1(x) = f(x)$ при $x \in \gamma$, т. е. значения функций $f(z)$ и $f_1(z)$ на интервале γ совпадают. Следовательно, по лемме об устранимой особенности (§ 11) функция $F(z)$ регулярна в области D_0 и является аналитическим продолжением функции $f(z)$ из области D в область D_0. ●

Замечание 1. В теореме интервал γ может быть неограниченным, в частности, лучом действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$, или интервалом, содержащим точку $z = \infty$, или всей действительной осью.

Замечание 2. Из формулы (1) следует, что для любой точки $z \in D_0$ выполняется равенство

$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)}. \tag{4}$$

Пример 1. Если целая функция $f(z)$ принимает действительные значения на действительной оси, то для любого z имеет место равенство $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$. Например, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$, $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$, $\cos \overline{z} = \overline{\cos z}$, $\operatorname{sh} \overline{z} = \overline{\operatorname{sh} z}$, $\operatorname{ch} \overline{z} = \overline{\operatorname{ch} z}$.

2. Применения принципа симметрии

Пусть область D такая же, как и в п. 1. И пусть область G плоскости w лежит в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$, а граница области G содержит интервал γ' действительной оси $\operatorname{Im} w = 0$ (рис. 137). Из принципа симметрии получается

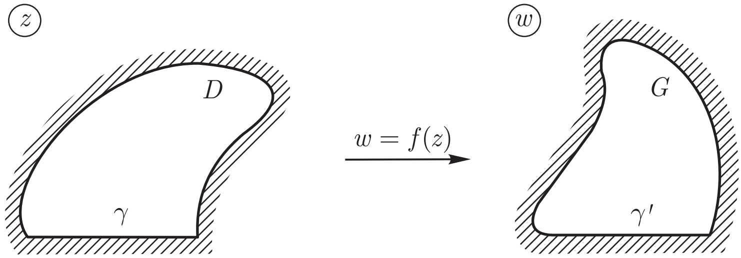

Рис. 137

Следствие. *Пусть функция* $w = f(z)$ *конформно отображает область* D *на область* G *так, что образом интервала* γ *является интервал* γ'. *Тогда функция* $w = F(z)$, *определенная формулой* (1), *конформно отображает область* $D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ *на область* $G_0 = G \cup \gamma' \cup G^*$, *где* G^* — *область, симметричная с областью* G *относительно действительной оси* $\operatorname{Im} w = 0$ (*рис. 138*).

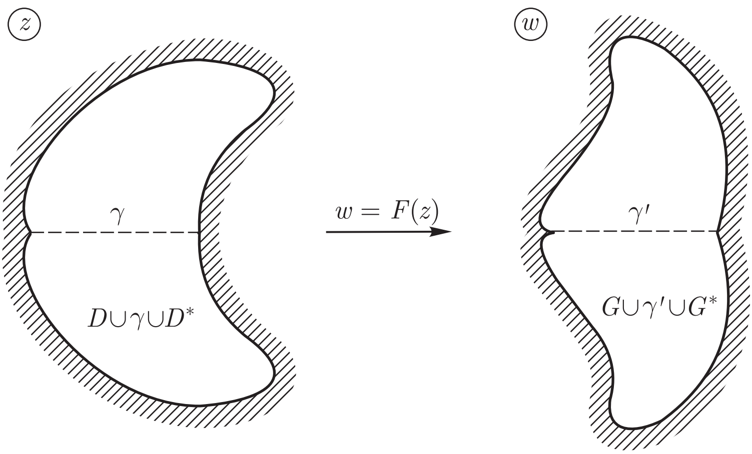

Рис. 138

○ По условию функция $w = f(z)$ регулярна и однолистна в области D, а в теореме доказано, что функция $w = F(z)$ регулярна в области D_0. Из формулы (1) получается, что при отображении $w = F(z)$

точки z, $\overline{z}$, симметричные относительно действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$, переходят в точки w, $\overline{w}$, симметричные относительно действительной оси $\operatorname{Im} w = 0$. Следовательно, функция $w = F(z)$ однолистна в области D_0 и конформно отображает область D_0 на область G_0. ●

Пример 2. Отображение внешности креста на полуплоскость. Пусть D_0 — плоскость z с разрезами по лучу $[-4, +\infty)$ и отрезку $[-3i, 3i]$ (рис. 139). Найдем конформное отображение области D_0 на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

На первый взгляд кажется, что естественно воспользоваться отображением $\eta = z^2$. Но это отображение не является конформным, так как функция z^2 не однолистна в области D_0 (например, $(4i)^2 = (-4i)^2 = -16$). Поэтому рассмотрим сначала «половину» области D_0. Пусть D — верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по отрезку $[0, 3i]$ (рис. 140). В этой области функция $\eta = z^2$ однолистна.

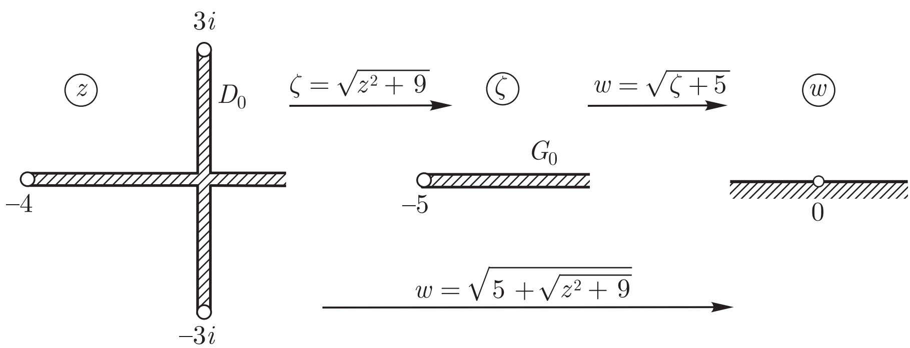

Рис. 139

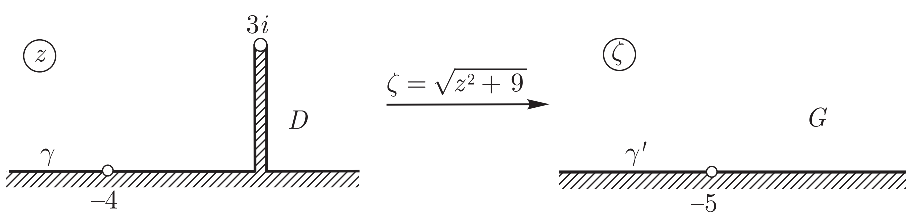

Рис. 140

Функция $\zeta = f(z) = \sqrt{z^2 + 9}$ конформно отображает область D на область G: $\operatorname{Im} \zeta > 0$ так, что интервал γ: $(-\infty, -4)$ переходит в интервал γ': $(-\infty, -5)$ (рис. 140).

По следствию из принципа симметрии функция $\zeta = F(z) = \sqrt{z^2+9}$ конформно отображает область $D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ на область $G_0 = G \cup \gamma' \cup G^*$, G_0 — плоскость ζ с разрезом по лучу $[-5, +\infty)$ (рис. 139). Здесь $F(z)$ — аналитическое продолжение функции $f(z)$ в область D_0, т. е. $F(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{z^2+9}$ в области D_0 такая, что $F(x+0i) > 0$ при $x > 0$.

Отображая область G_0 функцией $w = \sqrt{\zeta+5}$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, окончательно находим конформное отображение $w = \sqrt{5+\sqrt{z^2+9}}$ области D_0 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 139).

Пример 3. Отображение внутренности параболы на полуплоскость. Пусть D_0 — область $y^2 < 2p(x+p/2)$, где $z = x+iy$, $p > 0$ (рис. 141). Найдем конформное отображение области D_0 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

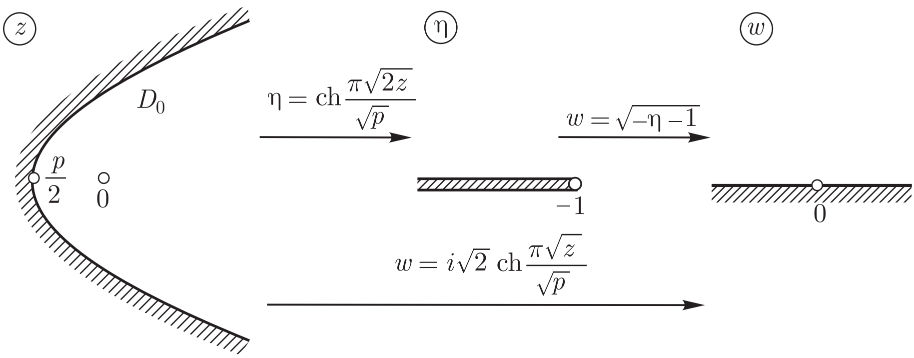

Рис. 141

Парабола $y^2 = 2p(x+p/2)$ переходит в прямую при отображении $\zeta = \sqrt{z}$. Но область D_0 содержит точку ветвления $z = 0$ функции $\sqrt{z}$. Поэтому рассмотрим половину области D_0; пусть D — область $y^2 < 2p(x+p/2)$, $y > 0$ (рис. 142). Найдем конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость.

Функция $\zeta = \sqrt{z}$ конформно отображает область D на полуполосу Π: $0 < \operatorname{Im}\zeta < \sqrt{p/2}$, $\operatorname{Re}\zeta > 0$.

Функция $\eta = \operatorname{ch}\dfrac{\pi\sqrt{2}\zeta}{\sqrt{p}}$ конформно отображает полуполосу Π на полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$.

Таким образом, функция $\eta = \operatorname{ch}\dfrac{\pi\sqrt{2z}}{\sqrt{p}}$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im}\eta > 0$ так, что интервал $\gamma : (-p/2, +\infty)$ переходит в интервал $\gamma' : (-1; +\infty)$ (рис. 142).

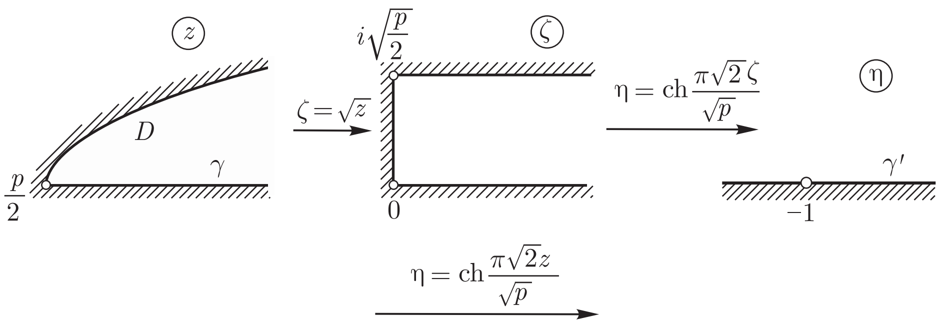

Рис. 142

По следствию из принципа симметрии функция $\eta = \operatorname{ch}\dfrac{\pi\sqrt{2z}}{\sqrt{p}}$ конформно отображает область D_0 на плоскость η с разрезом по лучу $(-\infty, -1]$ (рис. 141).

Функция $w = \sqrt{-\eta - 1}$ отображает плоскость η с разрезом по лучу $(-\infty, -1]$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Окончательно получаем: функция $w = i\sqrt{2}\operatorname{ch}\dfrac{\pi\sqrt{z}}{\sqrt{p}}$ конформно отображает область D_0 на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 141).

Пример 4. Отображение внутренности правой ветви гиперболы на полуплоскость. Найдем конформное отображение области $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} > 1$, $x > 0$ (область D_0, рис. 143), где $z = x + iy$, $0 < \alpha < \pi/2$, на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

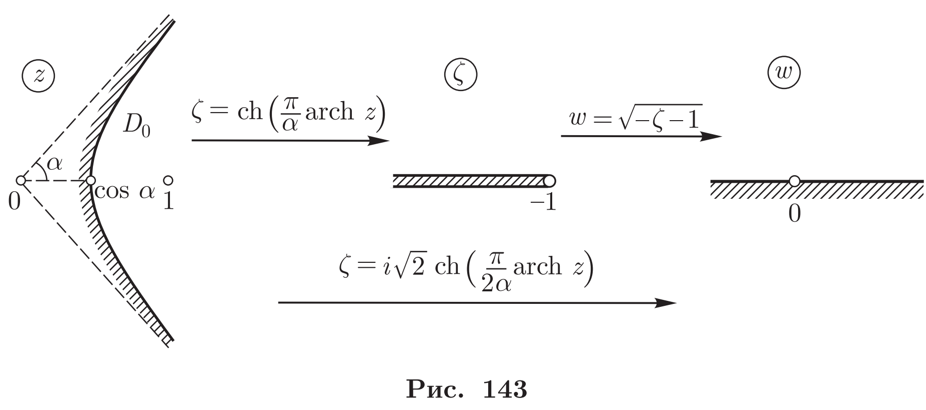

Рис. 143

Гипербола «распрямляется» при отображении функцией $\tau = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обратной к функции Жуковского. Но область D_0

содержит точку ветвления $z = 1$ этой функции. Поэтому рассмотрим половину области D_0. Пусть D — область $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} > 1$, $x > 0$, $y > 0$ (рис. 144). Найдем конформное отображение области D на верхнюю полуплоскость.

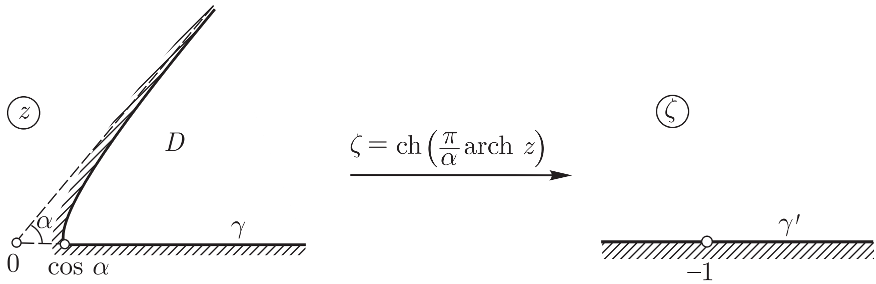

Рис. 144

Выполняя последовательно отображения:

$$\tau = z + \sqrt{z^2-1} = e^{\mathrm{arch}\,z}, \quad \eta = \tau^{\pi/\alpha}, \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right),$$

получаем, что функция $\zeta = \mathrm{ch}\,(\dfrac{\pi}{\alpha}\mathrm{arch}\,z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$, причем интервал $\gamma : (\cos\alpha, +\infty)$ переходит в интервал $\gamma' : (-1, +\infty)$. По следствию принципа симметрии функция $\zeta = \mathrm{ch}\,(\dfrac{\pi}{\alpha}\mathrm{arch}\,z)$ конформно отображает область D_0 на область G_0 — плоскость ζ с разрезом по лучу $(-\infty; -1]$ (рис. 143).

Функция $w = \sqrt{-\zeta - 1}$ отображает область G_0 на полуплоскость $\mathrm{Im}\,w > 0$. Таким образом, функция $w = i\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,(\dfrac{\pi}{2\alpha}\mathrm{arch}\,z)$ конформно отображает область D_0 на полуплоскость $\mathrm{Im}\,w > 0$ (рис. 143).

3. Симметрия относительно окружности

Принцип симметрии и следствие из него можно перенести на случай, когда γ и γ' — дуги окружностей (в частности, интервалы любых прямых). При этом области D и D^* должны быть симметричными относительно окружности, которой принадлежит дуга γ, а области G и G^* — симметричными относительно окружности, которой принадлежит дуга γ'. Для этого нужно дробно-линейным отображением перевести γ и γ' в интервалы действительной оси и воспользоваться свойством сохранения симметрии при дробно-линейном отображении.

Пример 5. Отображение круга на круг. Докажем, что любое конформное отображение круга на круг является дробно-линейным. Здесь «круг» может быть внешностью окружности или полуплоскостью.

Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает круг D с границей γ на круг G с границей γ'. Тогда $D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ — вся расширенная комплексная плоскость z, $G_0 = G \cup \gamma' \cup G^*$ — вся расширенная комплексная плоскость w (D^* — область, симметричная с областью D относительно окружности γ, G^* — область, симметричная с областью G относительно окружности γ').

По принципу симметрии функцию $w = f(z)$ можно аналитически продолжить в область D_0 и в результате этого продолжения получится функция $w = F(z)$, которая конформно отображает всю расширенную комплексную плоскость z на всю расширенную комплексную плоскость w. Следовательно, $F(z)$ (и $f(z) = F(z)$ при $z \in D$) — дробно-линейная функция.

Пример 6. Отображение концентрического кольца на концентрическое кольцо. Выясним, в каких случаях существует конформное отображение кольца $K : \rho < |z| < R$ на кольцо $K' : \rho' < |w| < R'$, и найдем это отображение.

Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает кольцо K на кольцо K'. Тогда по принципу соответствия границ возможны два случая:

1) окружность $|z| = \rho$ переходит в окружность $|w| = \rho'$, окружность $|z| = R$ — в окружность $|w| = R'$;

2) окружность $|z| = \rho$ переходит в окружность $|w| = R'$, окружность $|z| = R$ — в окружность $|w| = \rho'$.

Рассмотрим первый случай. По принципу симметрии существует аналитическое продолжение $F_1(z)$ функции $f(z)$ в кольцо $K_1 : \rho_1 < |z| < R$, где $\rho_1 = \rho^2/R$. Функция $w = F_1(z)$ конформно отображает кольцо K_1 на кольцо $K_1' : \rho_1' < |w| < R'$, где $\rho_1' = (\rho')^2/R$, так, что окружность $|z| = \rho_1$ переходит в окружность $|w| = \rho_1'$. Аналогично, существует аналитическое продолжение $F_2(z)$ функции $F_1(z)$ (и $f(z)$) в кольцо $K_2 : \rho_2 < |z| < R$, где $\rho_2 = \rho^4/R^3$ и т. д. Таким образом, получаем аналитическое продолжение $F(z)$ функции $f(z)$ в кольцо $0 < |z| < R$, причем $\lim\limits_{z\to 0} F(z) = 0$. Тогда точка $z = 0$ является устранимой особой точкой функции $F(z)$, т. е. функция $w = F(z)$ конформно отображает круг $|z| < R$ на круг $|w| < R'$, причем $F(0) = 0$. Следовательно, $F(z)$ — дробно-линейная функция и $F(\infty) = \infty$, т. е.

$$f(z) = Az, \quad A \neq 0. \tag{5}$$

Аналогично, во втором случае получаем

$$f(z) = \frac{A}{z}, \quad A \neq 0. \tag{6}$$

В обоих случаях из формул (5), (6) получается, что

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{R}{R'},$$

т. е. кольца K и K' подобны.

Итак, конформное отображение кольца K на кольцо K' существует только тогда, когда эти кольца подобны, и все эти отображения можно найти по формулам (5), (6).

§ 34. Отображения многоугольников

В этом параграфе формулируются без доказательства некоторые сведения о конформных отображениях верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на многоугольники П плоскости w (подробнее см. в [8]).

Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на ограниченный многоугольник П плоскости w (такое отображение существует по теореме Римана). Введем следующие обозначения: A_k — последовательные вершины (рис. 145) многоугольника П, $k = 1, 2, \ldots, n$; $\pi\alpha_k$ — угол многоугольника П в вершине A_k, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2$; a_k — прообраз вершины A_k при отображении

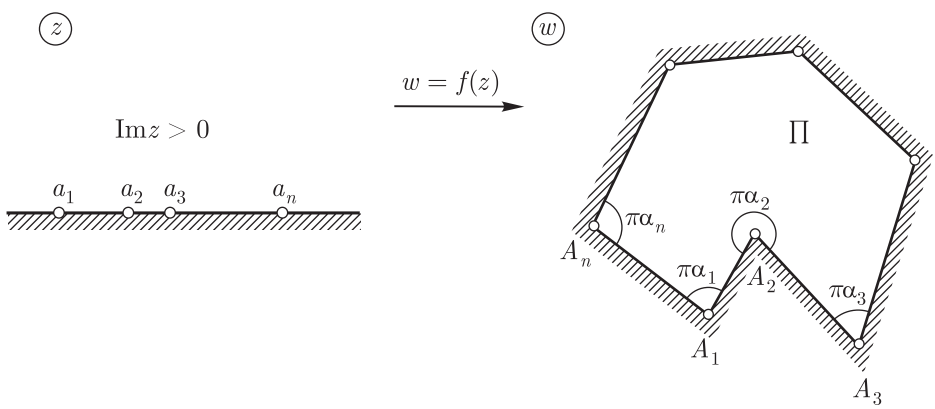

Рис. 145

$w = f(z)$, т. е. $f(a_k) = A_k$, где $a_k \neq \infty$. Тогда справедлива следующая *теорема Кристоффеля–Шварца.*

Теорема. *Конформное отображение полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *на многоугольник* Π *определяется формулой Кристоффеля–Шварца:*

$$w = f(z) = c \int\limits_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1} d\zeta + c_1, \qquad (1)$$

где c, c_1 — *постоянные и интеграл берется по кривой, лежащей в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$.

Замечание 1. Если, например, $a_n = \infty$, то формула (1) изменяется так:

$$w = f(z) = c \int\limits_{z_0}^{z} (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} d\zeta + c_1. \qquad (2)$$

Пример 1. Отображение полуплоскости на треугольник.

Функция

$$w = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int\limits_{0}^{z} \zeta^{\alpha_1 - 1} (1 - \zeta)^{\alpha_2 - 1} d\zeta,$$

где $B(\alpha_1, \alpha_2) = \int\limits_0^1 x^{\alpha_1 - 1}(1 - x)^{\alpha_2 - 1} dx$ — бета-функция, конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на ограниченный треугольник Π с вершинами A_1, A_2, A_3, где $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $\operatorname{Im} A_3 > 0$ (рис. 146) так, что $w(0) = 0$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = A_3$.

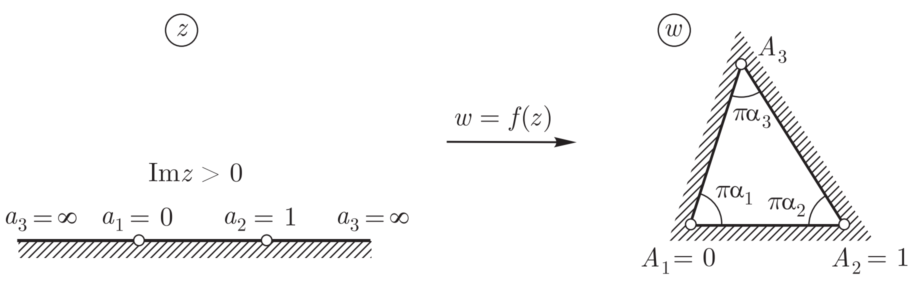

Рис. 146

Пример 2. Отображение полуплоскости на четырехугольник. Функция

$$w = f(z) = A \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \tag{3}$$

конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на четырехугольник Π (рис. 147) так, что $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = \pm 1$, $f(\pm a) = \pm 1 + iH$, $f(\infty) = iH$. Здесь $a > 1$, $H > 0$, $k = \dfrac{1}{a}$ и параметры k, A, H связаны равенствами

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{1}{A}, \quad \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \frac{H}{A}.$$

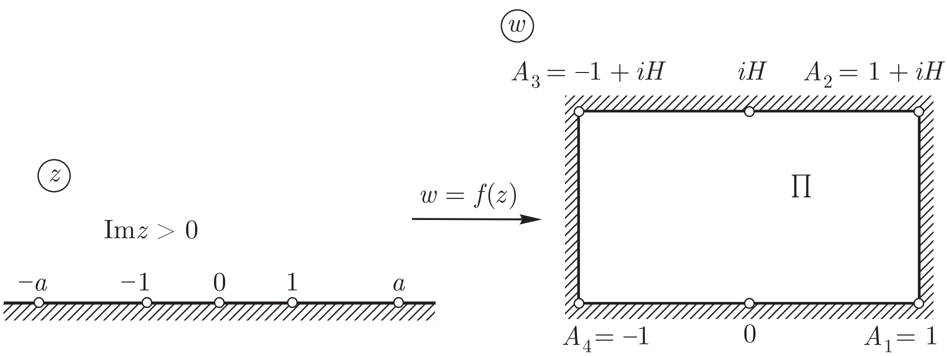

Рис. 147

Интеграл (3) при $A = 1$ называется *эллиптическим интегралом Лежандра первого рода*. Функция $z = \psi(w)$, обратная к функции (3), называется *эллиптической функцией Якоби*. Эта функция конформно отображает четырехугольник Π на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

Отметим, что с помощью эллиптических функций можно найти конформное отображение внутренности эллипса на полуплоскость.

Замечание 2. Формулы (1), (2) сохраняются и в случае, когда многоугольник Π плоскости w является неограниченным, но не содержит внутри себя точку $w = \infty$. При этом одна или несколько «вершин» многоугольника Π могут быть расположены в точке $w = \infty$.

Пример 3. Пусть четырехугольник Π — полоса $0 < \operatorname{Im} w < \pi$ с разрезом по лучу $(-\infty + \pi hi, \pi hi]$, $0 < h < 1$ (рис. 148). Здесь $A_1 = \pi hi$, $A_2 = \infty$, $A_3 = \infty$, $A_4 = \infty$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Функция

$$w = f(z) = \int_0^z \frac{\zeta d\zeta}{(\zeta - 1)(\zeta + b)} + \pi hi = \operatorname{Ln}\left[(z-1)^h \left(1 + \frac{hz}{1-h}\right)^{1-h}\right],$$

где $b = \dfrac{1}{h} - 1$, конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на четырехугольник Π так, что $f(0) = \pi hi$, $f(1) = \infty$, $f(\infty) = \infty$, $f(-b) = \infty$ (рис. 148).

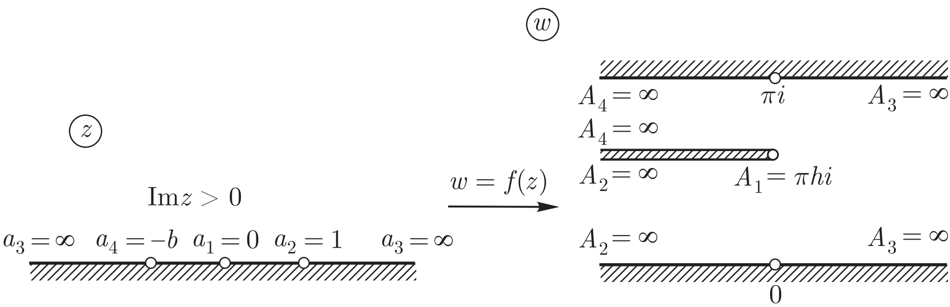

Рис. 148

Заметим, что функция $\zeta = e^w$ конформно отображает четырехугольник Π на область G — полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$ с разрезом по отрезку $[0, e^{i\pi h}]$ (рис. 149). Следовательно, функция

$$\zeta = (z-1)^h = \left(1 + \frac{hz}{1-h}\right)^{1-h}$$

конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на область G.

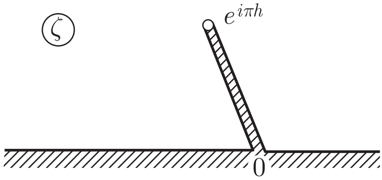

Рис. 149

§ 35. Задача Дирихле

Широкий класс стационарных физических задач сводится к отысканию гармонических функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. В этом параграфе рассматривается метод решения таких задач с помощью конформных отображений.

1. Постановка задачи Дирихле. Существование и единственность решения

Пусть на границе Γ ограниченной области D задана функция $u_0(z)$, непрерывная на каждой замкнутой кривой $\Gamma_k \subset \Gamma$.

Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа состоит в следующем: найти функцию $u(z)$, гармоническую в области D, непрерывную вплоть до границы Γ и принимающую на Γ значения $u_0(z)$:

$$\Delta u = 0, \quad z \in D, \quad u|_{z\in\Gamma} = u_0(z). \tag{1}$$

Здесь и далее $u(z) = u(x, y)$, $u_0(z) = u_0(x, y)$ — действительные функции, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Решение классической задачи Дирихле (1) *существует и единственно.* Доказательство существования решения содержится в [12]. Докажем единственность решения.

○ Пусть $u_1(z)$, $u_2(z)$ — гармонические в области D функции, непрерывные вплоть до границы Γ и $u_1|_{z\in\Gamma} = u_2|_{z\in\Gamma}$. Тогда разность $u_1(z) - u_2(z)$ — гармоническая в области D функция, непрерывная вплоть до Γ и равная нулю при $z \in \Gamma$. По принципу максимума и минимума для гармонических функции получаем $u_1(z) - u_2(z) \equiv 0$ при $z \in D$, т. е. $u_1(z) \equiv u_2(z)$, $z \in D$. ●

Наряду с классической задачей (1) будем рассматривать также и более общую задачу Дирихле, когда функция $u_0(z)$ ограничена и имеет конечное число точек разрыва. Требуется найти гармоническую в области D функцию $u(z)$, *ограниченную* в D, непрерывную вплоть до границы Γ во всех точках непрерывности функции $u_0(z)$ и в этих точках удовлетворяющую граничному условию $u(z)|_{z\in\Gamma} = u_0(z)$. При этом область D может быть неограниченной.

Решение этой задачи Дирихле существует и единственно [12].

Следующий пример показывает, что если в постановке задачи Дирихле отказаться от требования ограниченности искомой функции $u(z)$, то теорема единственности будет неверна.

Пример 1. 1) Функция $u(x, y) = y$, гармоническая в полуплоскости $y > 0$, непрерывна вплоть до границы и равна нулю при $y = 0$ $(x \neq \infty)$. Функция, тождественно равная нулю, также удовлетворяет всем этим условиям.

2) Функция $u(x, y) = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2} = \operatorname{Re}\dfrac{1+z}{1-z}$, гармоническая в круге $x^2 + y^2 < 1$, непрерывна вплоть до границы этого круга, за исключением точки $(1, 0)$, и равна нулю во всех точках окружности $x^2 + y^2 = 1$, кроме точки $(1, 0)$. Функция, тождественно равная нулю, также удовлетворяет всем этим условиям.

2. Инвариантность уравнения Лапласа относительно конформных отображений

Теорема 1. *Пусть регулярная функция $z = g(\zeta)$ конформно отображает область G на область D и $u(z)$ — гармоническая в области D функция. Тогда функция $\widetilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ — гармоническая в области G.*

○ Рассмотрим односвязную область $G_1 \subset G$. Образом области G_1 при конформном отображении $z = g(\zeta)$ является односвязная область $D_1 \subset D$. Пусть $f(z)$ — регулярная в области D_1 функция такая, что $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$. Тогда функция $\widetilde{f}(\zeta) = f(g(\zeta))$ регулярна в области G_1 и поэтому $\widetilde{u}(\zeta) = \operatorname{Re} f(\zeta)$ — гармоническая в G_1 функция. Так как G_1 — произвольная односвязная подобласть области G, то $\widetilde{u}(\zeta)$ — гармоническая в области G функция. ●

Теорему 1 можно также доказать следующим образом. Обозначим $x(\xi, \eta) = \operatorname{Re} g(\zeta)$, $y(\xi, \eta) = \operatorname{Im} g(\zeta)$, где $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда отображение $z = g(\zeta) (z = x + iy)$ можно записать в виде

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta). \tag{2}$$

Так как $g(\zeta)$ — регулярная функция, то функции $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ удовлетворяют условиям Коши–Римана. Поэтому при замене переменных (2) непосредственно получается формула

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) |g'(\zeta)|^2. \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что если $u(z)$ — гармоническая функция по переменным x, y, то $\widetilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ — гармоническая функция по переменным ξ, η, т. е. уравнение Лапласа инвариантно относительно конформных отображений. Этот факт лежит в основе метода решения задачи Дирихле с помощью конформных отображений.

Пример 2. Пусть D — область $\operatorname{Im} z < 0$, $|z + il| > R$, где $l > R > 0$ (рис. 134, с. 263). Решим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad z \in D; \tag{4}$$

$$u|_{\operatorname{Im} z=0} = 0, \quad u|_{|z+il|=R} = T \equiv \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Рассмотрим конформное отображение $\zeta = h(z) = \dfrac{z+ia}{z-ia}$ области D на концентрическое кольцо K: $R_1 < |\zeta| < 1$, где $a = \sqrt{l^2 - R^2}$, $R_1 = (R + l - a)/(R + l + a)$. При этом отображении прямая $\operatorname{Im} z = 0$ переходит в окружность $|\zeta| = 1$, а окружность $|z+il| = R$ — в окружность $|\zeta| = R_1$. Пусть $z = g(\zeta)$ — функция, обратная к функции $\zeta = h(z)$. По теореме 1 $\widetilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ — гармоническая в кольце K функция:

$$\Delta\widetilde{u} = 0, \quad \zeta \in K. \tag{6}$$

Из условий (5) получаем

$$\widetilde{u}|_{|\zeta|=l} = 0, \quad \widetilde{u}|_{|\zeta|=R_1} = T. \tag{7}$$

Таким образом, задача (4)–(5) свелась к задаче Дирихле (6)–(7). Решим эту задачу.

Пусть $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$. После замены $\xi = \rho\cos\theta$, $\eta = \rho\sin\theta$ уравнение Лапласа (6) запишется в виде

$$\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\theta^2} = 0.$$

Так как граничные функции в условиях (7) не зависят от θ, то естественно предположить, что и решение задачи (6)–(7) не зависит от θ, т. е. функция $\widetilde{u}(\zeta)$ является функцией только от одной переменной ρ. Найдем такое решение — тем самым, по теореме единственности решения задачи Дирихле будет показано, что решение задачи (6)–(7) не зависит от θ. В случае, когда функция $\widetilde{u}(\zeta)$ не зависит от θ, уравнение Лапласа (6) является обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2\widetilde{u}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\widetilde{u}}{d\rho} = 0.$$

Общее решение этого уравнения $\widetilde{u}(\zeta) = c_1 + c_2 \ln \rho = c_1 + c_2 \ln |\zeta|$. Из условий (7) находим $c_1 = 0$, $c_2 = T/\ln R_1$, т. е. функция

$$\widetilde{u}(\zeta) = \frac{T}{\ln R_1} \ln |\zeta|$$

является решением задачи (6)–(7). Для нахождения решения задачи (4)–(5) остается перейти к координатам $z = x + iy$. Так как $u(z) = \widetilde{u}(h(z))$ и

$$|\zeta| = |h(z)| = \left|\frac{z+ia}{z-ia}\right| = \frac{|x^2+y^2-a^2+i2ax|}{x^2+(y-a)^2},$$

то решением задачи (4)–(5) является функция

$$u(x,y) = \frac{T}{\ln R_1} \ln \frac{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2x^2}}{x^2+(y-a)^2},$$

где $a = \sqrt{l^2 - R^2}$, $R_1 = (R+l-a)/(R+l+a)$.

3. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Теорема 2. *Пусть функция $u(z)$, гармоническая в круге $|z| < 1$, непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Тогда справедлива* ***формула Пуассона***

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\, u(e^{i\theta})d\theta, \tag{8}$$

где $z = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant r < 1$.

○ Зафиксируем точку $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$, $0 \leqslant r_0 < 1$, и рассмотрим конформное отображение

$$\zeta = h(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0} \tag{9}$$

круга $|z| < 1$ на круг $|\zeta| < 1$, $h(z_0) = 0$. Из (9) находим

$$z = g(\zeta) = \frac{\zeta + z_0}{1 + \zeta\overline{z}_0}. \tag{10}$$

Функция $z = g(\zeta)$ конформно отображает круг $|\zeta| < 1$ на круг $|z| < 1$, так что $g(0) = z_0$.

Функция $u(z)$, гармоническая в круге $|z| < 1$, непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Следовательно, функция $\widetilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ является гармонической в круге $|\zeta| < 1$ (теорема 1) и непрерывной в замкнутом круге $|\zeta| \leqslant 1$. По теореме о среднем для гармонических функций находим

$$u(z_0) = \widetilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{u}(e^{i\psi}) d\psi. \tag{11}$$

Вернемся к прежним переменным. В интеграле (11) сделаем замену

$$e^{i\psi} = h(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - z_0}{1 - e^{i\theta}\overline{z}_0}\,. \tag{12}$$

Тогда $\widetilde{u}(e^{i\psi}) = \widetilde{u}(h(e^{i\theta})) = u(e^{i\theta})$. Из (12) находим

$$d\psi = \frac{1 - |z_0|^2}{(e^{i\theta} - z_0)(e^{-i\theta} - \overline{z}_0)}\, d\theta = \frac{1 - r_0^2}{1 - 2r_0 \cos(\varphi_0 - \theta) + r_0^2}\, d\theta. \tag{13}$$

Заменяя $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ на $z = re^{i\varphi}$, из (11)–(13) получаем формулу (8). ●

З а м е ч а н и е 1. Теорема о среднем справедлива для гармонических и ограниченных функций в круге, непрерывных вплоть до границы круга, за исключением конечного числа точек. Поэтому для таких функций справедлива и формула Пуассона.

Рассмотрим задачу

$$\Delta u = 0, \quad |z| < 1; \quad u|_{|z|=1} = u_0(z), \tag{14}$$

где $u_0(z)$ — непрерывная на окружности $|z| = 1$ функция.

Непосредственной проверкой можно доказать, что классическое решение задачи (14) существует и находится по формуле Пуассона

$$u(z) = u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2}\, u_0(e^{i\theta}) d\theta. \tag{15}$$

Пример 3. Пусть в задаче (14) $u_0(z) = u_0(e^{i\varphi}) = \dfrac{\sin\varphi}{5 + 4\cos\varphi}$.

Вычисляя интеграл (15), получаем, что в этом случае классическим решением задачи (14) является функция

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{r\sin\varphi}{r^2 + 4r\cos\varphi + 4}\,.$$

З а м е ч а н и е 2. Существование решения задачи (1) для односвязной области D можно доказать следующим образом. Отобразим конформно область D на круг $|\zeta| < 1$ функцией $\zeta = \zeta(z)$. Задача (1) перейдет в задачу

$$\Delta\widetilde{u}(\zeta) = 0, \quad |\zeta| < 1; \quad \widetilde{u}(\zeta)|_{|\zeta|=1} = u_0(z(\zeta)).$$

Решение $\widetilde{u}(\zeta)$ этой задачи существует. Поэтому функция $u(z) = \widetilde{u}(\zeta(z))$ является решением задачи (1).

4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости

Теорема 3. *Пусть функция* $u(z)$, *гармоническая и ограниченная в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$, *непрерывна вплоть до прямой* $\operatorname{Im} z = 0$, *за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда справедлива* ***формула Пуассона***

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{yu(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt, \tag{16}$$

где $z = x + iy$, $y > 0$.

○ Зафиксируем точку $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$, и рассмотрим конформное отображение

$$\zeta = h(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0} \tag{17}$$

полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|\zeta| < 1$, $h(z_0) = 0$. Из (17) находим

$$z = g(\zeta) = \frac{\zeta\overline{z}_0 - z_0}{\zeta - 1}\,. \tag{18}$$

Функция $z = g(\zeta)$ конформно отображает круг $|\zeta| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ так, что $g(0) = z_0$. По теореме 1 $\widetilde{u}(\zeta) = u(g(\zeta))$ — гармоническая в круге $|\zeta| < 1$ функция. Из условий теоремы следует, что функция $\widetilde{u}(\zeta)$ ограничена в круге $|\zeta| < 1$ и непрерывна вплоть до его границы $|\zeta| = 1$ (за исключением конечного числа точек). По теореме о среднем получаем

$$u(z_0) = \widetilde{u}(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{u}(e^{i\psi})d\psi. \tag{19}$$

Вернемся к прежним переменным. В интеграле (19) сделаем замену

$$e^{i\psi} = h(t) = \frac{t - z_0}{t - \overline{z}_0}\,. \tag{20}$$

Так как $\widetilde{u}(e^{i\psi}) = \widetilde{u}(h(t)) = u(t)$, то из (20) находим

$$d\psi = \frac{z_0 - \overline{z}_0}{i|t - z_0|^2}\, dt = \frac{2y_0}{(t - x_0)^2 + y_0^2}\, dt. \tag{21}$$

Заменяя $z_0 = x_0 + iy_0$ на $z = x + iy$, из (19)–(21) получаем формулу (16). ●

Пример 4. Найдем решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad y > 0, \quad u|_{y=0} = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

Вычисляя интеграл (16) при $u(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$, находим $u(x, y) = \dfrac{y + 1}{x^2 + (y + 1)^2}$.

5. Функция Грина задачи Дирихле

Функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области D называется функция

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - \zeta| + g(z, \zeta), \quad z \in D, \quad \zeta \in D, \tag{22}$$

где $g(z, \zeta)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) при каждом $\zeta \in D$ функция $g(z, \zeta)$ является гармонической в области D, т. е.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + iy \in D; \tag{23}$$

2) при каждом $\zeta \in D$ функция $g(z, \zeta)$ непрерывна вплоть до границы Γ области D и

$$g(z, \zeta)|_{z\in\Gamma} = -\frac{1}{2\pi} \ln|z - \zeta|\Big|_{z\in\Gamma}\,. \tag{24}$$

Из (24) следует, что

$$G(z, \zeta)|_{z\in\Gamma} = 0.$$

Таким образом, при каждом $\zeta \in D$ функция $g(z, \zeta)$ является решением задачи Дирихле (23)–(24). Из теоремы существования и единственности решения задачи Дирихле следует, что функция Грина существует и единственна для любой ограниченной области. Покажем, что задача о нахождении функции Грина для односвязной области сводится к отысканию конформного отображения этой области на единичный круг.

Теорема 4. *Пусть D — ограниченная односвязная область и пусть функция $w = w(z, \zeta)$, $z \in D$, $\zeta \in D$, при каждом $\zeta \in D$ конформно отображает область D на круг $|w| < 1$ так, что точка $z = \zeta$ переходит в точку $w = 0$: $w(\zeta, \zeta) = 0$. Тогда*

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(z, \zeta)|. \tag{25}$$

○ Зафиксируем точку $\zeta \in D$. Так как отображение $w = w(z, \zeta)$ конформно, т. е. функция $w(z, \zeta)$ регулярна и однолистна в области D, то $\dfrac{dw(z, \zeta)}{dz} \neq 0$ при $z \in D$. Из условия $w(\zeta, \zeta) = 0$ следует, что $w(z, \zeta) \neq 0$ при $z \neq \zeta$. Следовательно,

$$w(z, \zeta) = (z - \zeta)\psi(z, \zeta), \tag{26}$$

где функция $\psi(z, \zeta)$ регулярна в области D и $\psi(z, \zeta) \neq 0$ при $z \in D$. Из (26) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \ln |w(z, \zeta)| = \frac{1}{2\pi} \ln |z - \zeta| + g(z, \zeta), \tag{27}$$

где $g(z, \zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \ln |\psi(z, \zeta)|$ — гармоническая в области D функция как действительная часть регулярной в области D функции — регулярной ветви функции $\dfrac{1}{2\pi} \operatorname{Ln} \psi(z, \zeta)$.

Далее, если $z \in \Gamma = \partial D$, то $|w(z, \zeta)| = 1$ и из (27) получается условие (24). Следовательно, функция (27) является функцией Грина. ●

Замечание 3. Если $w = w(z)$ — какое-нибудь конформное отображение области D на круг $|w| < 1$, то функция $w(z, \zeta)$ находится по формуле

$$w(z, \zeta) = \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}. \tag{28}$$

Функция Грина обладает следующими свойствами:

1) симметрична

$$G(z, \zeta) = G(\zeta, z); \tag{29}$$

2) при каждом $z \in D$ является гармонической по переменным ξ, η $(\zeta = \xi + i\eta)$ в области D с выколотой точкой $\zeta = z$;

3) при каждом $z \in D$ непрерывна вплоть до границы Γ области D и

$$G(z, \zeta)|_{\zeta \in \Gamma} = 0.$$

Свойства 2) и 3) получаются из свойства 1) и определения функции Грина. Докажем свойство 1 для односвязной области.

○ Из (28) имеем $|w(\zeta, z)| = |w(z, \zeta)|$, и поэтому из (25) следует (29). ●

С помощью функции Грина можно находить решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = F(z), \quad z \in D, \tag{30}$$

с граничным условием

$$u|_\Gamma = u_0(z). \tag{31}$$

При достаточно широких предположениях можно доказать, что решение задачи (30)–(31) имеет вид

$$u(z) = \iint\limits_D G(z, \zeta)F(\zeta)d\xi\, d\eta + \int\limits_\Gamma \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n}\, u_0(\zeta)|d\zeta|,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, символ $\dfrac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к границе Γ области D по переменной ζ.

Глава 6

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 36. Преобразование Лапласа

1. Оригинал и его изображение

Определение 1. *Оригиналом называют комплекснозначную функцию $f(t)$ действительного переменного t, если:*

1) $f(t) = 0$ *при* $t < 0$;

2) *на каждом отрезке полуоси* $t \geqslant 0$ *функция* $f(t)$ *непрерывна, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода*;

3) *существуют такие действительные числа* $M > 0$ *и* α, *что для всех* $t \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}. \tag{1}$$

Определение 2. *Изображением оригинала* $f(t)$ *называют комплекснозначную функцию*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \tag{2}$$

комплексного переменного p.

Интеграл (2) *называют преобразованием Лапласа функции* $f(t)$. *Из неравенства* (1) *и свойств интеграла, зависящего от параметра* [8], *следует, что функция* (2) *регулярна в полуплоскости* $\operatorname{Re} p > \alpha$ *и* $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) = 0$.

Связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ записывают так:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \fallingdotseq f(t).$$

Пример 1. Функция Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

является оригиналом. Для нее неравенство (1) выполняется при $M = 1$, $\alpha = 0$. Найдем изображение этой функции.

Вычисляя интеграл (2) при $f(t) = \theta(t)$, $\operatorname{Re} p > 0$, находим $F(p) = \frac{1}{p}$. Следовательно,

$$\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}\,. \tag{3}$$

Замечание 1. Пусть функция $g(t)$ удовлетворяет условиям 2, 3 определения 1. Тогда функция $f(t) = \theta(t)g(t)$ является оригиналом. Обычно множитель $\theta(t)$ опускают. Например, вместо $\theta(t)$, $\theta(t)t^2$, $\theta(t)\sin t$ пишут соответственно 1, t^2, $\sin t$, формулу (3) записывают так:

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}\,.$$

Пример 2. Вычисляя интеграл (2) для функции $f(t) = e^{at}$, где a — комплексное число, получаем

$$e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a}\,. \tag{4}$$

2. Свойства преобразования Лапласа

Линейность. Из свойств интеграла (2) следует, что если

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad g(t) \risingdotseq G(p),$$

то

$$af(t) + bg(t) \risingdotseq aF(p) + bG(p), \tag{5}$$

где a, b — любые комплексные числа.

Пример 3. Найдем изображения функций $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\operatorname{sh}\omega t$, $\operatorname{ch}\omega t$, где ω — комплексное число.

Из равенства $\sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$ и формул (4), (5) находим

$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,, \quad \text{т. е.}$$

$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,.$$

Аналогично получаем

$$\cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}\,, \quad \operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}\,, \quad \operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}\,.$$

Подобие. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\beta > 0$, то

$$f(\beta t) \risingdotseq \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right).$$

○ Из интеграла (2) заменой $t = \dfrac{\tau}{\beta}$ получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} f(\beta t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\beta} \int\limits_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\beta}\tau} d\tau = \frac{1}{\beta} F\left(\frac{p}{\beta}\right). \qquad \bullet$$

Дифференцирование оригинала. Если $f(t)$, $f'(t)$, …, $f^{(n)}(t)$ — оригиналы и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad (6)$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

○ Из формулы (2) интегрированием по частям получаем

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0).$$

При $n \geqslant 2$ формула (6) доказывается по индукции. ●

Замечание 2. Если $f^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p), \quad (7)$$

т. е. дифференцированию оригинала соответствует умножение на p его изображения.

Дифференцирование изображения. Если $F(p) \risingdotseq f(t)$, то

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t). \quad (8)$$

○ Дифференцируя интеграл (2) по параметру p, получаем

$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} (-t) f(t) dt \risingdotseq (-t) f(t).$$

При $n \geqslant 2$ формула (8) доказывается по индукции. ●

Пример 4. По формулам (3), (4), (8) находим

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad t^n e^{at} \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}},$$

$$t \sin \omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad t \cos \omega t \risingdotseq \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Интегрирование оригинала. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}. \tag{9}$$

○ Так как $f(t)$ — оригинал, то по определению 1 функция $g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ также является оригиналом, причем $g'(t) = f(t)$, $g(0) = 0$. Если $g(t) \risingdotseq G(p)$, то по формуле (7) получаем

$$g'(t) \risingdotseq pG(p), \quad \text{т. е.} \quad F(p) = pG(p),$$

откуда следует формула (9). ●

Интегрирование изображения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\frac{1}{t}f(t)$ — оригинал, то

$$\frac{1}{t}f(t) \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(\zeta)d\zeta, \tag{10}$$

где (p, ∞) — горизонтальный луч, принадлежащий полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$, от точки p до точки $\operatorname{Re} p = +\infty$.

○ Пусть $\frac{1}{t}f(t) \risingdotseq G(p)$. Тогда по формуле (8) получаем $G'(p) \risingdotseq -f(t) \risingdotseq -F(p)$, откуда

$$G(\infty) - G(p) = -\int\limits_p^\infty F(\zeta)d\zeta$$

и из равенства $G(\infty) = 0$ (п. 1) следует формула (10). ●

Пример 5. Найдем изображение интегрального синуса

$$\operatorname{si} t = \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau.$$

Из примера 3 и формулы (10) следует, что

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p,$$

откуда по формуле (9) находим

$$\operatorname{si} t \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\operatorname{arcctg} p.$$

Запаздывание оригинала. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f(t) = 0$ при $t < \tau$, где $\tau > 0$, то

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p). \tag{11}$$

○ По формуле (2)

$$f(t-\tau) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt,$$

откуда заменой $t = \tau + \alpha$ получаем

$$f(t-\tau) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f(\alpha) e^{-p(\tau+\alpha)} d\alpha = e^{-p\tau} F(p). \qquad \bullet$$

Пример 6. Найдем изображение ступенчатой функции

$$f(t) = h[\theta(t) + \theta(t-\tau) + \ldots + \theta(t-k\tau) + \ldots],$$

где $\tau > 0$.

По формулам (3), (11) получаем

$$f(t) \risingdotseq h\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p}\, e^{-p\tau} + \ldots + \frac{1}{p}\, e^{-kp\tau} + \ldots\right] = \frac{h}{p(1-e^{-p\tau})}\,.$$

Смещение изображения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого комплексного числа a

$$f(t) e^{at} \risingdotseq F(p-a). \tag{12}$$

○ По формуле (2) получаем

$$f(t) e^{at} \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a). \qquad \bullet$$

Пример 7. Из примера 3 и формулы (12) следует, что

$$e^{at} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}\,, \qquad e^{at} \cos \omega t \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}\,.$$

В заключение приведем таблицу оригиналов и их изображений.

Оригинал	Изображение
1	$\dfrac{1}{p}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$

§ 37. Восстановление оригинала по его изображению

1. Формула обращения преобразования Лапласа

Теорема 1. *Пусть* $F(p) \risingdotseq f(t)$, *где функция* $f(t)$ *непрерывна при* $t \geqslant 0$. *Тогда*

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp, \tag{1}$$

где $b \geqslant \alpha$ *(см.* (1), § 36).

Более подробную формулировку этой теоремы и ее доказательство см. в [8].

Пример 1. С помощью формулы (1) можно показать, что

$$\frac{1}{p}\, e^{-\alpha\sqrt{p}} \risingdotseq \mathrm{Er}f\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right),$$

где $\alpha > 0$, $\mathrm{Er}f(x) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\tau^2} d\tau$.

2. Теорема разложения

Теорема 2. *Пусть функция $F(p)$ регулярна в точке $p = \infty$ и $F(\infty) = 0$, т. е.*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n} \quad \text{при} \quad |p| > R.$$

Тогда оригиналом функции $F(p)$ является функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!}\, t^n. \tag{2}$$

Доказательство теоремы 2 см. в [8].

Пример 2. Найдем оригинал функции

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-2)^n)\, \frac{1}{p^n}\,.$$

По формуле (2) получаем

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-2)^n)\, \frac{t^n}{n!} = 3e^t - 2^{-2t}.$$

Замечание. Результат примера 2 можно получить, если показать, что

$$F(p) = \frac{3}{p-1} - \frac{2}{p+2}\,,$$

и воспользоваться таблицей § 36.

§ 38. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений

Способ решения задач для дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа (а также с помощью преобразований Фурье и др.) называют *операционным исчислением*. Приведем примеры решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем.

Пример 1. Решим задачу Коши для уравнения

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 6e^{-t} \tag{1}$$

с начальными условиями $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

В курсе дифференциальных уравнений доказано, что искомая функция $x(t)$ является оригиналом. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, тогда (см. § 36):

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 2,$$
$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 2p.$$

Поэтому, переходя в уравнении (1) к изображениям, получаем

$$p^2X(p) - 2p - 3(pX(p)) - 2) + 2X(p) = \frac{6}{p+1},$$

откуда $X(p) = \dfrac{2p}{p^2 - 1}$.

По свойству линейности интеграла Лапласа и таблице (§ 36) находим $x(t) = 2\operatorname{ch} t$.

Как и в этом примере, задача Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами сводится к алгебраическому уравнению относительно образа искомой функции. Оригинал по изображению находится с помощью свойств преобразования Лапласа, часто по таблице (§ 36).

Пример 2. Найдем решение задачи Коши для уравнения

$$x'''(t) + x' = \cos t$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$, $x''(0) = 0$.

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $x'''(t) \risingdotseq p^2X(p) + 2p$. Переходя в уравнении к изображениям, получаем

$$(p^3 + p)X(p) + 2p = \frac{p}{p^2+1},$$

откуда

$$X(p) = -\frac{1}{2}\,\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{(p^2+1)}.$$

По свойству линейности преобразования Лапласа и таблице (§ 36) находим

$$x(t) = -\frac{1}{2}\,t\cos t - \frac{3}{2}\sin t.$$

Пример 3. Найдем решение задачи Коши для уравнения

$$x^{(\mathrm{IV})}(t) + 2x'' + x(t) = \sin t$$

с нулевыми начальными условиями: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$, $x'''(0) = 0$.

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда $x^{(\mathrm{IV})}(t) \risingdotseq p^4X(p)$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p)$. Переходя в уравнении к изображениям, получаем

$$(p^4 + 2p^2 + 1)X(p) = \frac{1}{p^2+1}\,,$$

откуда $X(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^3}$.

По свойствам преобразования Лапласа и таблице (§ 36) находим

$$x(t) = \frac{3}{8}\sin t - \frac{3}{8}\,t\cos t - \frac{1}{8}\,t^2\sin t.$$

Замечание. Оригинал $f(t)$ можно рассматривать и для $t < 0$ в предположении, что $f(t) = 0$ при $t > 0$. Поэтому в каждом из примеров 1–3 найдено решение уравнения при всех t, удовлетворяющее заданным условиям при $t = 0$.

Пример 4. Решим задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} x'(t) + y'(t) + x(t) + y(t) = t, \\ x''(t) - y'(t) + 2x(t) = 3(e^{-t} - 1), \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда $x'(t) \risingdotseq pX(x)$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) + 1$, $y'(t) \risingdotseq pY(p)$. Переходя к изображениям в системе уравнений, получаем

$$\begin{cases} pX(p) + pY(p) + X(p) + Y(p) = \dfrac{1}{p^2}\,, \\ p^2X(p) + 1 - pY(p) + 2X(p) = 3\left(\dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{p}\right). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$X(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p}\,, \quad Y(p) = \frac{1}{p^2}\,,$$

откуда $x(t) = e^{-t} - 1$, $y(t) = t$.

Операционное исчисление часто применяется при решении задач для дифференциальных уравнений с частными производными, а также для решения интегральных уравнений (см. [8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций. — М.: Наука, 1972.
2. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1968.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
4. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. — М.: Наука, Т. 1, 1967, Т. 2, 1968.
5. *Половинкин Е. С.* Курс лекций по теории функций комплексного переменного. — М.: Физматкнига, 2003.
6. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1967.
7. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1979.
8. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1989.
9. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.
10. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. I, II. — М.: Наука, 1985.
11. *Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
12. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Учебное электронное издание

Шабунин Михаил Иванович
Сидоров Юрий Викторович

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. Е. Шкерин*
Оригинал-макет подготовлен *Е. Г. Ивлевой* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано к использованию 24.03.20.
Формат 145×225 мм

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Учебник по теории функций комплексного переменного написан авторами на основе многолетнего опыта преподавания этого предмета в Московском физико-техническом институте.

Изложение теоретического материала подкреплено большим количеством примеров с решениями.

Содержание настоящего учебника тесно связано с книгой М. И. Шабунина, Е. С. Половинкина, М. И. Карлова «Сборник задач по теории функций комплексного переменного».

Для студентов инженерно-физических и физико-технических вузов, а также для студентов университетов.