Cálculo de Programas
Trabalho Prático
MiEI+LCC — 2017/18

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2018

Grupo nr.	82 (preencher)
a73700	Sara Alexandra da Silva Pereira
a74155	Bruno Filipe da Silva Ferreira
a74813	André Filipe de Araújo Pereira de Sousa

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em Haskell. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1718t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp1718t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1718t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1718t.lhs > cp1718t.tex
$ pdflatex cp1718t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1718t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1718t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp1718t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

[1] O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo C com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp1718t.aux
$ makeindex cp1718t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário QuickCheck, que ajuda a validar programas em Haskell, a biblioteca JuicyPixels para processamento de imagens e a biblioteca gloss para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck JuicyPixels gloss
```

Para testar uma propriedade QuickCheck *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Problema 1

Segundo uma notícia do Jornal de Notícias, referente ao dia 12 de abril, *"apenas numa hora, foram transacionadas 1.2 mil milhões de dólares em bitcoins. Nas últimas 24 horas, foram transacionados 8,5 mil milhões de dólares, num total de 24 mil milhões de dólares referentes às principais criptomoedas"*.

De facto, é inquestionável que as criptomoedas, e em particular as bitcoin, vieram para ficar. Várias moedas digitais, e em particular as bitcoin, usam a tecnologia de block chain para guardar e assegurar todas as transações relacionadas com a moeda. Uma block chain é uma coleção de blocos que registam os movimentos da moeda; a sua definição em Haskell é apresentada de seguida.

$$\mathbf{data}\ Blockchain = Bc\ \{bc :: Block\} \mid Bcs\ \{bcs :: (Block, Blockchain)\}\ \mathbf{deriving}\ Show$$

Cada bloco numa block chain regista um número (mágico) único, o momento da execução, e uma lista de transações, tal como no código seguinte:

$$\mathbf{type}\ Block = (MagicNo, (Time, Transactions))$$

Cada transação define a entidade de origem da transferência, o valor a ser transacionado, e a entidade destino (por esta ordem), tal como se define de seguida.

$$\mathbf{type}\ Transaction = (Entity, (Value, Entity))$$
$$\mathbf{type}\ Transactions = [Transaction]$$

A partir de uma block chain, é possível calcular o valor que cada entidade detém, tipicamente designado de ledger:

$$\mathbf{type}\ Ledger = [(Entity, Value)]$$

Seguem as restantes definições Haskell para completar o código anterior. Note que $Time$ representa o momento da transação, como o número de milisegundos que passaram desde 1970.

$$\begin{aligned}&\textbf{type } MagicNo = String\\&\textbf{type } Time = Int \quad \text{-- em milisegundos}\\&\textbf{type } Entity = String\\&\textbf{type } Value = Int\end{aligned}$$

Neste contexto, implemente as seguintes funções:

1. Defina a função $allTransactions :: Blockchain \to Transactions$, como um catamorfismo, que calcula a lista com todas as transações numa dada block chain.

   Propriedade QuickCheck 1 *As transações de uma block chain são as mesmas da block chain revertida:*

   $$prop1a = sort \cdot allTransactions \equiv sort \cdot allTransactions \cdot reverseChain$$

   Note que a função $sort$ é usada apenas para facilitar a comparação das listas.

2. Defina a função $ledger :: Blockchain \to Ledger$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que calcula o ledger (i.e., o valor disponível) de cada entidade numa uma dada block chain. Note que as entidades podem ter valores negativos; de facto isso acontecerá para a primeira transação que executarem.

   Propriedade QuickCheck 2 *O tamanho do ledger é inferior ou igual a duas vezes o tamanho de todas as transações:*

   $$prop1b = \mathsf{length} \cdot ledger \leqslant (2*) \cdot \mathsf{length} \cdot allTransactions$$

   Propriedade QuickCheck 3 *O ledger de uma block chain é igual ao ledger da sua inversa:*

   $$prop1c = sort \cdot ledger \equiv sort \cdot ledger \cdot reverseChain$$

3. Defina a função $isValidMagicNr :: Blockchain \to Bool$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que verifica se todos os números mágicos numa dada block chain são únicos.

   Propriedade QuickCheck 4 *A concatenação de uma block chain com ela mesma nunca é válida em termos de números mágicos:*

   $$prop1d = \neg \cdot isValidMagicNr \cdot concChain \cdot \langle id, id \rangle$$

   Propriedade QuickCheck 5 *Se uma block chain é válida em termos de números mágicos, então a sua inversa também o é:*

   $$prop1e = isValidMagicNr \Rightarrow isValidMagicNr \cdot reverseChain$$

Problema 2

Uma estrutura de dados frequentemente utilizada para representação e processamento de imagens de forma eficiente são as denominadas quadtrees. Uma *quadtree* é uma árvore quaternária em que cada nodo tem quatro sub-árvores e cada folha representa um valor bi-dimensional.

$$\begin{aligned}&\textbf{data } QTree\ a = Cell\ a\ Int\ Int \mid Block\ (QTree\ a)\ (QTree\ a)\ (QTree\ a)\ (QTree\ a)\\&\quad \textbf{deriving } (Eq, Show)\end{aligned}$$

```
( 0 0 0 0 0 0 0 0 )
( 0 0 0 0 0 0 0 0 )
( 0 0 0 0 1 1 1 0 )
( 0 0 0 0 1 1 0 0 )
( 1 1 1 1 1 1 0 0 )
( 1 1 1 1 1 1 0 0 )
( 1 1 1 1 0 0 0 0 )
( 1 1 1 1 0 0 0 1 )
```

(a) Matriz de exemplo bm.

```
Block
  (Cell 0 4 4) (Block
    (Cell 0 2 2) (Cell 0 2 2) (Cell 1 2 2) (Block
      (Cell 1 1 1) (Cell 0 1 1) (Cell 0 1 1) (Cell 0 1 1)))
  (Cell 1 4 4)
  (Block
    (Cell 1 2 2) (Cell 0 2 2) (Cell 0 2 2) (Block
      (Cell 0 1 1) (Cell 0 1 1) (Cell 0 1 1) (Cell 1 1 1)))
```

(b) Quadtree de exemplo qt.

Figura 1: Exemplos de representações de bitmaps.

Uma imagem monocromática em formato bitmap pode ser representada como uma matriz de bits[2], tal como se exemplifica na Figura 1a.

O anamorfismo $bm2qt$ converte um bitmap em forma matricial na sua codificação eficiente em quadtrees, e o catamorfismo $qt2bm$ executa a operação inversa:

$$
\begin{aligned}
&bm2qt :: (Eq\ a) \Rightarrow Matrix\ a \to QTree\ a \\
&bm2qt = anaQTree\ f\ \textbf{where} \\
&\quad f\ m = \textbf{if}\ one\ \textbf{then}\ i_1\ u\ \textbf{else}\ i_2\ (a,(b,(c,d))) \\
&\qquad \textbf{where}\ x = (nub \cdot toList)\ m \\
&\qquad\qquad u = (head\ x, (ncols\ m, nrows\ m)) \\
&\qquad\qquad one = (ncols\ m \equiv 1 \vee nrows\ m \equiv 1 \vee \mathsf{length}\ \ x \equiv 1) \\
&\qquad\qquad (a,b,c,d) = splitBlocks\ (nrows\ m\ `div`\ 2)\ (ncols\ m\ `div`\ 2)\ m
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&qt2bm :: (Eq\ a) \Rightarrow QTree\ a \to Matrix\ a \\
&qt2bm = cataQTree\ [f,g]\ \textbf{where} \\
&\quad f\ (k,(i,j)) = matrix\ j\ i\ \underline{k} \\
&\quad g\ (a,(b,(c,d))) = (a \updownarrow b) \leftrightarrow (c \updownarrow d)
\end{aligned}
$$

O algoritmo $bm2qt$ particiona recursivamente a imagem em 4 blocos e termina produzindo folhas para matrizes unitárias ou quando todos os píxeis de um sub-bloco têm a mesma côr. Para a matriz bm de exemplo, a quadtree correspondente $qt = bm2qt\ bm$ é ilustrada na Figura 1b.

Imagens a cores podem ser representadas como matrizes de píxeis segundo o código de cores RGBA, codificado no tipo $PixelRGBA8$ em que cada pixel é um quádruplo de valores inteiros $(red, green, blue, alpha)$ contidos entre 0 e 255. Atente em alguns exemplos de cores:

$$
\begin{aligned}
whitePx &= PixelRGBA8\ 255\ 255\ 255\ 255 \\
blackPx &= PixelRGBA8\ 0\ 0\ 0\ 255 \\
redPx &= PixelRGBA8\ 255\ 0\ 0\ 255
\end{aligned}
$$

O módulo BMP, disponibilizado juntamente com o enunciado, fornece funções para processar ficheiros de imagem bitmap como matrizes:

$$
\begin{aligned}
&readBMP :: FilePath \to \mathsf{IO}\ (Matrix\ PixelRGBA8) \\
&writeBMP :: FilePath \to Matrix\ PixelRGBA8 \to \mathsf{IO}\ ()
\end{aligned}
$$

Teste, por exemplo, no $GHCi$, carregar a Figura 2a:

```
> readBMP "cp1718t_media/person.bmp"
```

Esta questão aborda operações de processamento de imagens utilizando quadtrees:

1. Defina as funções $rotateQTree :: QTree\ a \to QTree\ a$, $scaleQTree :: Int \to QTree\ a \to QTree\ a$ e $invertQTree :: QTree\ a \to QTree\ a$, como catamorfismos e/ou anamorfismos, que rodam[3], redimensionam [4] e invertem as cores de uma quadtree[5], respectivamente. Tente produzir imagens similares às Figuras 2b, 2c e 2d:

```
> rotateBMP  "cp1718t_media/person.bmp" "person90.bmp"
> scaleBMP 2 "cp1718t_media/person.bmp" "personx2.bmp"
> invertBMP  "cp1718t_media/person.bmp" "personinv.bmp"
```

[2] Cf. módulo $Data.Matrix$.
[3] Segundo um ângulo de 90º no sentido dos ponteiros do relógio.
[4] Multiplicando o seu tamanho pelo valor recebido.
[5] Um pixel pode ser invertido calculando $255 - c$ para cada componente c de cor RGB, exceptuando o componente alpha.

(a) Bitmap de exemplo.

(b) Rotação.

(c) Redimensionamento.

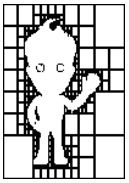
(d) Inversão de cores.

(e) Compresão de 1 nível.

(f) Compressão de 2 níveis.

(g) Compressão de 3 níveis.

(h) Compressão de 4 níveis.



(i) Bitmap de contorno.

(j) Bitmap com contorno.

Figura 2: Manipulação de uma figura bitmap utilizando quadtrees.

Propriedade QuickCheck 6 *Rodar uma quadtree é equivalente a rodar a matriz correspondente:*

$$prop2c = rotateMatrix \cdot qt2bm \equiv qt2bm \cdot rotateQTree$$

Propriedade QuickCheck 7 *Redimensionar uma imagem altera o seu tamanho na mesma proporção:*

$$prop2d\ (Nat\ s) = sizeQTree \cdot scaleQTree\ s \equiv ((s*) \times (s*)) \cdot sizeQTree$$

Propriedade QuickCheck 8 *Inverter as cores de uma quadtree preserva a sua estrutura:*

$$prop2e = shapeQTree \cdot invertQTree \equiv shapeQTree$$

2. Defina a função $compressQTree :: Int \to QTree\ a \to QTree\ a$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que comprime uma quadtree cortando folhas da árvore para reduzir a sua profundidade num dado número de níveis. Tente produzir imagens similares (mas não necessariamente iguais) às Figuras 2e, 2f, 2g e 2h:

```
> compressBMP 1 "cp1718t_media/person.bmp" "person1.bmp"
> compressBMP 2 "cp1718t_media/person.bmp" "person2.bmp"
> compressBMP 3 "cp1718t_media/person.bmp" "person3.bmp"
> compressBMP 4 "cp1718t_media/person.bmp" "person4.bmp"
```

Propriedade QuickCheck 9 *A quadtree comprimida tem profundidade igual à da quadtree original menos a taxa de compressão:*

$$prop2f\ (Nat\ n) = depthQTree \cdot compressQTree\ n \equiv (-n) \cdot depthQTree$$

3. Defina a função $outlineQTree :: (a \to Bool) \to QTree\ a \to Matrix\ Bool$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que recebe uma função que determina quais os píxeis de fundo e converte uma quadtree numa matriz monocromática, de forma a desenhar o contorno de uma malha poligonal contida na imagem. Tente produzir imagens similares (mas não necessariamente iguais) às Figuras 2i e 2j:

```
> outlineBMP    "cp1718t_media/person.bmp" "personOut1.bmp"
> addOutlineBMP "cp1718t_media/person.bmp" "personOut2.bmp"
```

Propriedade QuickCheck 10 *A matriz de contorno tem dimensões iguais às da quadtree:*

$$prop2g = sizeQTree \equiv sizeMatrix \cdot outlineQTree\ (<0)$$

Teste unitário 1 *Contorno da quadtree de exemplo qt:*

$$teste2a = outlineQTree\ (\equiv 0)\ qt \equiv qtOut$$

Problema 3

O cálculo das combinações de n k-a-k,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!} \tag{1}$$

envolve três factoriais. Recorrendo à lei de recursividade múltipla do cálculo de programas, é possível escrever o mesmo programa como um simples ciclo-for onde se fazem apenas multiplicações e somas. Para isso, começa-se por estruturar a definição dada da forma seguinte,

$$\binom{n}{k} = h\ k\ (n-k)$$

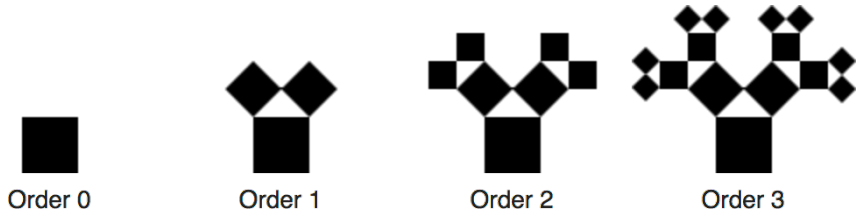


Figura 3: Passos de construção de uma árvore de Pitágoras de ordem 3.

onde

$$h\ k\ d = \frac{f\ k\ d}{g\ d}$$
$$f\ k\ d = \frac{(d+k)!}{k!}$$
$$g\ d = d!$$

assumindo-se $d = n - k \geqslant 0$. É fácil de ver que $f\ \ k$ e g se desdobram em 4 funções mutuamente recursivas, a saber

$$f\ k\ 0 = 1$$
$$f\ k\ (d+1) = \underbrace{(d+k+1)}_{l\ k\ d} * f\ k\ d$$
$$l\ k\ 0 = k+1$$
$$l\ k\ (d+1) = l\ k\ d + 1$$

e

$$g\ 0 = 1$$
$$g\ (d+1) = \underbrace{(d+1)}_{s\ d} * g\ d$$
$$s\ 0 = 1$$
$$s\ (d+1) = s\ d + 1$$

A partir daqui alguém derivou a seguinte implementação:

$$\binom{n}{k} = h\ k\ (n-k)\ \textbf{where}\ h\ k\ n = \textbf{let}\ (a, \_, b, \_) = \text{for}\ loop\ (base\ k)\ n\ \textbf{in}\ a\ /\ b$$

Aplicando a lei da recursividade múltipla para $\langle f\ k, l\ k\rangle$ e para $\langle g, s\rangle$ e combinando os resultados com a lei de banana-split, derive as funções $base\ k$ e $loop$ que são usadas como auxiliares acima.

Propriedade QuickCheck 11 *Verificação que* $\binom{n}{k}$ *coincide com a sua especificação (1):*

$$prop3\ (NonNegative\ n)\ (NonNegative\ k) = k \leqslant n \Rightarrow \binom{n}{k} \equiv n!\ /\ (k! * (n-k)!)$$

Problema 4

Fractais são formas geométricas que podem ser construídas recursivamente de acordo com um conjunto de equações matemáticas. Um exemplo clássico de um fractal são as árvores de Pitágoras. A construção de uma árvore de Pitágoras começa com um quadrado, ao qual se unem dois quadrados redimensionados pela escala $\sqrt{2}/2$, de forma a que os cantos dos 3 quadrados coincidam e formem um triângulo rectângulo isósceles. Este procedimento é repetido recursivamente de acordo com uma dada ordem, definida como um número natural (Figura 3).

Uma árvore de Pitágoras pode ser codificada em Haskell como uma full tree contendo quadrados nos nodos e nas folhas, sendo um quadrado definido simplesmente pelo tamanho do seu lado:

$$\textbf{data}\ FTree\ a\ b = Unit\ b \mid Comp\ a\ (FTree\ a\ b)\ (FTree\ a\ b)\ \textbf{deriving}\ (Eq, Show)$$
$$\textbf{type}\ PTree = FTree\ Square\ Square$$
$$\textbf{type}\ Square = Float$$

1. Defina a função $generatePTree :: Int \to PTree$, como um anamorfismo, que gera uma árvore de Pitágoras para uma dada ordem.

   Propriedade QuickCheck 12 *Uma árvore de Pitágoras tem profundidade igual à sua ordem:*

   $$prop4a\ (SmallNat\ n) = (depthFTree \cdot generatePTree)\ n \equiv n$$

   Propriedade QuickCheck 13 *Uma árvore de Pitágoras está sempre balanceada:*

   $$prop4b\ (SmallNat\ n) = (isBalancedFTree \cdot generatePTree)\ n$$

2. Defina a função $drawPTree :: PTree \to [Picture]$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que anima incrementalmente os passos de construção de uma árvore de Pitágoras recorrendo à biblioteca gloss. Anime a sua solução:

   ```
   > animatePTree 3
   ```

Problema 5

Uma das áreas em maior expansão no campo da informática é a análise de dados e machine learning. Esta questão aborda um *mónade* que ajuda a fazer, de forma simples, as operações básicas dessas técnicas. Esse mónade é conhecido por *bag*, *saco* ou *multi-conjunto*, permitindo que os elementos de um conjunto tenham multiplicidades associadas. Por exemplo, seja

$$\textbf{data}\ Marble = Red \mid Pink \mid Green \mid Blue \mid White\ \textbf{deriving}\ (Read, Show, Eq, Ord)$$

um tipo dado.[6] A lista $[Pink, Green, Red, Blue, Green, Red, Green, Pink, Blue, White]$ tem elementos repetidos. Assumindo que a ordem não é importante, essa lista corresponde ao saco

```
{ Red |-> 2 , Pink |-> 2 , Green |-> 3 , Blue |-> 2 , White |-> 1 }
```

que habita o tipo genérico dos "bags":

$$\textbf{data}\ Bag\ a = B\ [(a, Int)]\ \textbf{deriving}\ (Ord)$$

O mónade que vamos construir sobre este tipo de dados faz a gestão automática das multiciplidades. Por exemplo, seja dada a função que dá o peso de cada berlinde em gramas:

$$\begin{aligned}
&marbleWeight :: Marble \to Int\\
&marbleWeight\ Red\ \ = 3\\
&marbleWeight\ Pink\ = 2\\
&marbleWeight\ Green = 3\\
&marbleWeight\ Blue\ = 6\\
&marbleWeight\ White = 2
\end{aligned}$$

Então, se quisermos saber quantos *berlindes* temos, de cada *peso*, não teremos que fazer contas: basta calcular

$$marbleWeights = \mathsf{fmap}\ marbleWeight\ bagOfMarbles$$

onde *bagOfMarbles* é o saco de berlindes referido acima, obtendo-se:

```
{ 2 |-> 3 , 3 |-> 5 , 6 |-> 2 }.
```

[6] "Marble" traduz para "berlinde" em português.

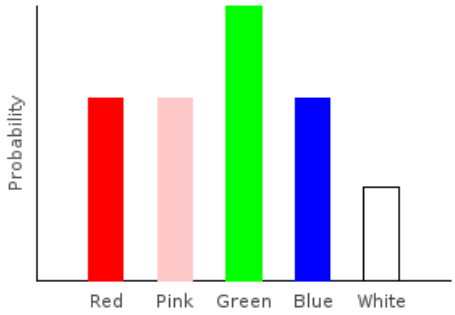


Figura 4: Distribuição de berlindes num saco.

Mais ainda, se quisermos saber o total de berlindes em $bagOfMarbles$ basta calcular fmap $(!)$ $bagOfMarbles$ obtendo-se `{ () |-> 10 }`; isto é, o saco tem 10 berlindes no total.

Finalmente, se quisermos saber a probabilidade da cor de um berlinde que tiremos do saco, basta converter o referido saco numa distribuição correndo:

$$marblesDist = dist\ bagOfMarbles$$

obtendo-se a distribuição (graças ao módulo Probability):

```
Green  30.0%
  Red  20.0%
 Pink  20.0%
 Blue  20.0%
White  10.0%
```

cf. Figura 4.

Partindo da seguinte declaração de Bag como um functor e como um mónade,

$$\begin{array}{l}\textbf{instance}\ Functor\ Bag\ \textbf{where}\\ \quad \mathsf{fmap}\ f = B \cdot \mathsf{map}\ (f \times id) \cdot unB\\ \textbf{instance}\ Monad\ Bag\ \textbf{where}\\ \quad x \gg\!= f = (\mu \cdot \mathsf{fmap}\ f)\ x\ \textbf{where}\\ \quad return = singletonbag\end{array}$$

1. Defina a função μ (multiplicação do mónade Bag) e a função auxiliar $singletonbag$.
2. Verifique-as com os seguintes testes unitários:

Teste unitário 2 *Lei* $\mu \cdot return = id$*:*

$$test5a = bagOfMarbles \equiv \mu\ (return\ bagOfMarbles)$$

Teste unitário 3 *Lei* $\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathsf{fmap}\ \mu$*:*

$$test5b = (\mu \cdot \mu)\ b3 \equiv (\mu \cdot \mathsf{fmap}\ \mu)\ b3$$

onde $b3$ *é um saco dado em anexo.*

Anexos

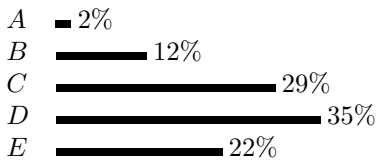
A Mónade para probabilidades e estatística

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\textbf{newtype}\ \mathsf{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{2}$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a $100/$.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \mathsf{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam $100/$. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

```
d1 :: Dist Char
d1 = D [('A',0.02),('B',0.12),('C',0.29),('D',0.35),('E',0.22)]
```

que o GHCi mostrará assim:

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular de programação monádica.

B Definições auxiliares

Funções para mostrar *bags*:

```
instance (Show a, Ord a, Eq a) => Show (Bag a) where
  show = showbag . consol . unB where
    showbag = concat .
      (++["  }"]) . ("{  ":) .
      (intersperse "  ,  ") .
      sort .
      (map f) where f (a,b) = (show a) ++ "  |->  " ++ (show b)
unB (B x) = x
```

Igualdade de *bags*:

```
instance (Eq a) => Eq (Bag a) where
  b == b' = (unB b) `lequal` (unB b')
    where lequal a b = isempty (a `ominus` b)
      ominus a b = a ++ neg b
      neg x = [(k,-i) | (k,i) <- x]
```

Ainda sobre o mónade *Bag*:

```
instance Applicative Bag where
  pure = return
  (<*>) = aap
```

O exemplo do texto:

$$bagOfMarbles = B\ [(Pink, 2), (Green, 3), (Red, 2), (Blue, 2), (White, 1)]$$

Um valor para teste (bags de bags de bags):

```
b3 :: Bag (Bag (Bag Marble))
b3 = B [(B [(B [(Pink,2),(Green,3),(Red,2),(Blue,2),(White,1)],5)
  ,(B [(Pink,1),(Green,2),(Red,1),(Blue,1)],2)],2)]
```

Outras funções auxiliares:

```
a ↦ b = (a, b)
consol :: (Eq b) ⇒ [(b, Int)] → [(b, Int)]
consol = filter nzero · map (id × sum) · col where nzero (_, x) = x ≢ 0
isempty :: Eq a ⇒ [(a, Int)] → Bool
isempty = all (≡ 0) · map π2 · consol
col x = nub [k ↦ [d' | (k', d') ← x, k' ≡ k] | (k, d) ← x]
consolidate :: Eq a ⇒ Bag a → Bag a
consolidate = B · consol · unB
```

C Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e / ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Problema 1

C.0.1 Definições iniciais

Sabendo o tipo da nossa estrutura podemos verificar que este ou contém um *Block*, denominado *Bc* , ou contém um tuplo com um *Block* e um *BlockChain*, sendo o tuplo denominado *Bcs*. Dessa maneira, dado um input, este será de um tipo ou do outro.

$$inBlockchain = [Bc, Bcs]$$

No caso do *out* queremos realizar a operação contrária, ou seja, criar apartir de uma *BlockChain*, um tipo que tanto pode ser um *Bc* ou um *Bcs*. Assim, queremos aplicar à nossa *BlockChain* a projeção à esquerda no caso desta ser um *Bc* ou a projeção à direita no caso contrário.

$$outBlockchain\ (Bc\ bc) = i_1\ (bc)$$
$$outBlockchain\ (Bcs\ (bc, a)) = i_2\ (bc, a)$$

Ao defenir a função *rec* estamos a defenir a função que trabalha sobre a soma que temos presente. Sendo dada uma função de transformação, esta será aplicada à parte do tipo que contem a informação do próximo elemento, neste caso sendo o *BlockChain*, presente no tuplo *Bcs*. Como verificado antes, temos um tipo que pode ser de dois tipos diferentes, assim para transformar esta soma é aplicado o co-produto na mesma, tendo assim criada a probabilidade de ser cada um dos tipos da soma. No entanto no lado direito da soma, temos presente um tipo que é um tuplo entre o tipo *Bc* e o tipo *Bcs*. Para tal é aplicado o produto neste tipo que transformaria o nosso tuplo no tuplo desejado.

$$recBlockchain\ f = id + id \times f$$

A função *cata* permite transformar um dado tipo de dados usando uma função que realiza esta tranformação. Essa função de transformação permite transformar uma dada soma num tipo de dados

único. Para poder propagar a função pelo tipo é usada a função *rec* definida anteriormente, no entanto, o tipo de dados recebido, *BlockChain*, não corresponde ao tipo recebido pela nossa *rec*. Para poder ultrupassar este problema é aplicada a função *out* definida, obtendo assim o tipo de dados pretendidos, e só após aplicamos a função *rec*. A função que será aplicada a cada elemento é a propria função *cata* tendo como função de transformação a anterior, para que a mesma seja aplicada a cada elemento. Tendo feita a recursividade, podemos aplicar a função de transformação ao elemento atual.

$$cataBlockchain\ f = f \cdot recBlockchain\ (cataBlockchain\ f) \cdot outBlockchain$$

A função *ana* pretende fazer o contrário, sendo a mesma aplicada inicialmente ao tipo uníco recebido, permitindo transformar o tipo recebido numa soma. Depois da mesma ser aplicada iriamos realizar a recursividade, da mesma maneira feita no *cata*, usando a propria função *ana* e a função de transformação. Para depois poder obter o tipo de dados pretendido, é realizada a função *in*, que permite transformar a nossa soma num tipo de dados concreto.

$$anaBlockchain\ f = inBlockchain \cdot recBlockchain\ (anaBlockchain\ f) \cdot f$$

A função *hylo* recebe duas funções, a primeira transformando um dado tipo de dados numa soma e a segunda transforma uma *BlockChain* num dado tipo de dados. Assim para poder realizar o *hylo* é aplicada inicialmente uma ana dada a segunda função e posteriormente um *cata* dada a primeira função.

$$hyloBlockchain\ f\ g = cataBlockchain\ f \cdot anaBlockchain\ g$$

C.0.2 allTransactions

De seguida é apresentada a defenição da função *allTransactions*, que permite obter a **lista de Transações** de uma dada *blockchain*. Para tal é aplicada a função *cata* à *BlockChain* sendo passada a função transformadora. Esta função é a função de transformação de uma soma, sendo do primeiro lado aplicado a projeção 2, que obtem o tuplo *(Time,Transactions)* do block e após isso sendo a aplicada de novo a projeção 2 para se obter as *Transactions*. Do segundo lado da soma temos de aplicar a concatenação das *Transactions* de um elemento, sendo o mesmo obtido da mesma forma, com as *Transcations* já obtidas.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\mathsf{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\ {\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\ B & \xleftarrow[g]{} & 1 + B \end{array}$$

$$\begin{aligned} &allTransactions = (cataBlockchain\ get\_transaction) \\ &\quad \textbf{where}\ get\_transaction = [\pi_2 \cdot \pi_2, \mathsf{conc} \cdot ((\pi_2 \cdot \pi_2) \times id)] \end{aligned}$$

C.0.3 ledger

Na função *ledger* pretendemos obter o **Value de Cada Entity** segundo uma dada *BlockChain*. Para tal é aplicada a função *allTransactions*, para obter a lista de todas as *Transaction* da *BlockChain*. Após, seria aplicada uma *cata* às *Transactions*, permitindo transformar os tuplos *(Entity1,(Value,Entity2))* em *((Entity1,-Value),(Entity2,Value))*. Sabendo que as listas não são de um tipo concreto, é usada a função *either* para identificar os dois casos. No caso de lista vazia, teremos também uma lista vazia. No outro caso teremos de transforma o nosso tuplo e concatenar o mesmo com os restantes. Para criar o nosso tuplo é aplicado um *split* ao mesmo, permitindo assim criar um tuplo de tuplos. A primeira função do *split* será um **produto** entre o *id de Entity1* e o *negate* aplicado apos a *projeção 2* do tuplo presente dentro do tuplo inicial. Este *negate* permite guardar a informação do *Entity 1*, receptor da transação. No caso da segunda função do *split* é aplicada a *projeção 2* do tuplo criado apartir do **produto** de *id* com *swap*. Este *swap* permite obter a informação de forma a ser guardada pelo *ledger*.

Após o primeiro *cata*, é necessário criar a lista que guardaria os tuplos presentes em cada projeção dos tuplos da lista anterior. Para isto é aplicado outro *cata* à lista, que permitira transformar cada elemento de maneira a que a informação *(Entity,Value)* esteja presente na mesma. No caso de paragem

novamente usado a lista vazia, e no outro caso como anteriormente temos de adicionar a informação de um elemento aos já presentes. Para isso é criada uma lista entre os dois elementos do tuplo sendo essa depois concatenada com a informação restante. Para poder agrupar a informação das várias *Entity* é usada a função *col*, permitindo agrupar os nossos tuplos como *(Entity,[Value])*.

Após o segundo *cata* é apenas necessário adicionar a informação presente na *[Values])* para obter o *Ledger* pretendido. Para isso é utilizada uma *cata* que transforma apenas a segunda parte do tuplo presente.

DIAGRAMA

$$
\begin{aligned}
&ledger = (cataList\ h) \cdot col \cdot (cataList\ g) \cdot (cataList\ f) \cdot allTransactions \\
&\quad \textbf{where}\ f = [nil, cons \cdot ((\langle id \times negate \cdot \pi_2, \pi_2 \rangle \cdot (id \times swap)) \times id)] \\
&\qquad g = [nil, \mathsf{conc} \cdot (\mathsf{conc} \cdot ((singl \times singl)) \times id)] \\
&\qquad h = [nil, cons \cdot ((id \times sum) \times id)]
\end{aligned}
$$

C.0.4 isValidMagicNr

Para verificar a validade dos *Magic Numbers* é necessário primeiramente obter uma lista de todos os *Magic Numbers*. Para isso é aplicada uma cata à *BlockChain*, que transformaria o primeiro elemento da soma num *Magic Number* e no segundo adicionava a sua informação à lista já presente. Após isso, duplicavamos a lista obtida, tendo um tuplo com a mesma lista. Depois disso, aplicavamos o produto ao tuplo, tendo de um lado o tamanho da lista e o outro o tamanho da lista depois de remover os repetidos de uma lista. Apos isso, comparavamos os dois elementos do tuplo, usando a função **uncurry (==)**

DIAGRAMA

$$
\begin{aligned}
&isValidMagicNr = \widehat{(\equiv)} \cdot (\mathsf{length} \times (\mathsf{length} \cdot nub)) \cdot dup \cdot cataBlockchain\ f \\
&\quad \textbf{where}\ f = [singl \cdot \pi_1, cons \cdot (\pi_1 \times id)]
\end{aligned}
$$

Problema 2

Tal como definido anteriormente temos para o tipo de dados pedido as funções básicas que trabalham sobre o mesmo. Estas seguem a mesma linha de pensamento, fazendo adptações à estrutura presente agora.

C.0.5 Definições iniciais

$$
\begin{aligned}
&inQTree\ (i_1\ (a, (b, c))) = Cell\ a\ b\ c \\
&inQTree\ (i_2\ (a, (b, (c, d)))) = Block\ a\ b\ c\ d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&outQTree\ (Cell\ a\ b\ c) = i_1\ (a, (b, c)) \\
&outQTree\ (Block\ a\ b\ c\ d) = i_2\ (a, (b, (c, d)))
\end{aligned}
$$

No caso da base deste tipo, são passadas duas funções, a função que é aplicada no tipo a da QTree e a funçao que será aplicada a cada uma das QTree presentes no block.

$$baseQTree\ g\ h = (g \times id) + (h \times (h \times (h \times h)))$$

$$recQTree\ f = baseQTree\ id\ f$$

$$cataQTree\ f = f \cdot recQTree\ (cataQTree\ f) \cdot outQTree$$

$$anaQTree\ f = inQTree \cdot recQTree\ (anaQTree\ f) \cdot f$$

$$hyloQTree\ f\ g = cataQTree\ f \cdot anaQTree\ g$$

$$
\begin{aligned}
&\textbf{instance}\ Functor\ QTree\ \textbf{where} \\
&\quad \mathsf{fmap}\ gen = cataQTree\ (inQTree \cdot baseQTree\ gen\ id)
\end{aligned}
$$

C.0.6 rotateQTree

O rotate pretende rodar a *Qtree* existente em **90 graus**. Para isso é necessário alterar o tamanho presente nas *Cell*. Para realizar o *rotate* é aplicada um *cata* à *Qtree*, em que a depois de aplicada uma função *f* é aplicada a *in* da *Qtree*, para poder obter de novo a *Qtree*. Esta função *f* é definida como uma soma sendo que do primeiro lado seria aplicado o produto entre *id* e *swap*, e do segundo lado teriamos de realizar um *split* para poder transformar o tuplo presente. Do primeiro lado iriamos colocar a *projeção 1* após a *projeção 2* após a *projeção 2*. Do segundo lado teriamos de realizar um novo *split*, para poder criar um tuplo neste local. Este tuplo seria criado com a *projeção 1* em conjunto com um novo *split*. Este seria formado pela *projeção 2* após a *projeção 2* após a *projeção 2* e pela *projeção 1* após a *projeção 2*. Isto é necessário para criar o tuplo com as *Qtree* presentes no *Block*.

$$
\begin{aligned}
&rotateQTree = cataQTree\ (inQTree \cdot f) \quad \text{-- inQTree para converter o either do cata para Qtree}\\
&\quad \textbf{where}\ f = g + h \quad \text{-- Co-produto para poder criar um either no fim}\\
&\qquad g = id \times swap\\
&\qquad h = \langle \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_2, s1 \rangle\\
&\qquad s1 = \langle \pi_1, s2 \rangle\\
&\qquad s2 = \langle \pi_2 \cdot \pi_2 \cdot \pi_2, \pi_1 \cdot \pi_2 \rangle
\end{aligned}
$$

C.0.7 scaleQTree

No caso da *scale* é necessário multiplicar o tamanho dado pelo tamanho presente em cada *Cell*. Para isso é usada a função *ana*. Esta permite que seja criada uma *QTree* dada uma função de geração de um tipo *C*, dado como input. Esta função de geração neste caso transforma a *QTree* usando a função *out* e aplica-lhe uma função *f*. Esta função *f* é defenida pela **soma** entre uma função *g* e a *identidade*, visto apenas querermos alterar a informação nas *Cell*. Esta função *g* é defenida como um **produto** entre a *identidade* e um **produto** cujas funções são a multiplicação do *Integer* do *Cell* pelo *Scale* dado.

$$
\begin{aligned}
&scaleQTree\ i = anaQTree\ (f \cdot outQTree) \quad \text{-- Out para converter a Qtree em either para a função ana}\\
&\quad \textbf{where}\ f = g + id\\
&\qquad g = id \times ((i*) \times (i*))
\end{aligned}
$$

C.0.8 invertQTree

Na função *invert* queremos apenas alterar a informação presente no tipo a da *Cell*. Para tal é usada o funtor defenido, sendo que este permite aplicar alteração apenas ao tipo da estrutura. A função criadora do novo pixel apenas altera o valor de cada pixel segundo a formula dada (255 - c).

$$
\begin{aligned}
&invertQTree = \mathsf{fmap}\ invert\\
&\quad \textbf{where}\ invert\ (PixelRGBA8\ r\ g\ b\ a) = PixelRGBA8\ (255 - r)\ (255 - g)\ (255 - b)\ (a)
\end{aligned}
$$

C.0.9 compressQTree

No caso da *compress* é criada uma função auxiliar *cataQTree'* que permite fazer a decrementação do valor passado à cata, valor esse que depende da profundidade da *Qtree* e do valor passado. A função geradora recorre à *p2p* para fazer a verificação. No caso de se verificar que o nivel é **menor ou igual a 0**, mantemos a estrutura igual, no caso de ser **maior** realizamos o *prune*. A função *prune* permite depois criar as novas cell com a informação das anteriores. Isto é feito através de um *cata*, que permite transformar a *QTree* presente nesse momento num unica *Cell*, no caso de este não ser já um *Cell*. Na função transformadora é aplicada a *uncell*, função que cria a *Cell* dado um tuplo, após ser aplicada a *assocl*, sendo esta aplicada após uma função *f*, que realiza a transformação do *Either* para um tipo pretendido. Nesta função é aplicado a *identidade* do lado esquerdo e do lado direito é realizado um *split*. Nesse *split*, a primeira parte é criada apartir da função *colorQTree* - obtendo a cor - após realizar a *projeção 1*. No outro lado do tuplo seria adicionada a informação dos sizes da *QTree* a ser criada.

```
-- Criar um cata que faça a subtração do valor de k, para poder descer até onde se quer manter a arvore igual
```

$$compressQTree\ k\ qt = cataQTree'\ f\ (depthQTree\ qt - k)\ qt$$

$$
\begin{aligned}
&\textbf{where } f\ k = p2p\ (id, pruneQTree)\ (k \leqslant 0) \cdot inQTree \\
&\quad cataQTree'\ f\ k = (f\ k) \cdot recQTree\ (cataQTree'\ f\ (k-1)) \cdot outQTree
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&pruneQTree = cataQTree\ (uncell \cdot assocl \cdot f) \\
&\quad \textbf{where } f = [id, \langle colorQTree \cdot \pi_1, addSizes \cdot getSizes \rangle] \\
&\qquad uncell = \widehat{\cdot}\ \$\ \widehat{Cell} \\
&\qquad addSizes\ ((x1, y1), (x2, y2)) = (x1 + x2, y1 + y2) \\
&\qquad getSizes = sizeQTree \times (sizeQTree \cdot \pi_2 \cdot \pi_2) \\
&\qquad colorQTree = cataQTree\ \$\ [\pi_1, \pi_1]
\end{aligned}
$$

C.0.10 outlineQTree

No caso da *outline*, o que pretendemos fazer é criar uma *Matrix Bool*, dada uma *QTree* e a função de verificação. Visto que apenas é necessário alterar a informação presente nas folhas da *QTree* podemos usar a função *fmap*, que permite transformar o tipo presente nas folhas, num novo tipo. Passamos assim a função *f*, recebida ao *fmap*. Após isso é necessário converter a *QTree Bool* para *Matrix Bool*, criando a **borda** nos casos necessários. Para tal é usada a função *convert* que consiste num *cata* que iria realizar no lado direito da **soma**, uma condição, que iria verificar se é possivel adicionar uma borda a uma dada *Cell*, sabendo se esta tem mais de 3 pixeis de largura e altura (1 para cada lado da borda e o pixel do meio). Caso a condição seja verificada, é criada uma nova matrix com a informação da anterior, e no outro caso, temos a criação de uma *Matrix* com a informação presente. A criação das *Matrix* é feita usando as funções *(< − >)* e *(<|>)* que permitem criar a parte superior e inferior de uma *Matrix* e a parte esquerda e direita de uma *Matrix* respetivamente.

$$
\begin{aligned}
&convert :: QTree\ Bool \to Matrix\ Bool \\
&convert = cataQTree\ (f) \\
&\quad \textbf{where } f = [g, h] \\
&\qquad g\ (c, (i, j)) = \textbf{if } (c \wedge (i \geqslant 3) \wedge (j \geqslant 3))\ \textbf{then } line\ i\ j\ \textbf{else } matrix\ j\ i\ \underline{c} \\
&\qquad h\ (a, (b, (c, d))) = (a \updownarrow b) \leftrightarrow (c \updownarrow d) \\
&\qquad line\ i\ j = ((matrix\ 1\ i\ true) \leftrightarrow ((matrix\ (j-2)\ 1\ true) \updownarrow ((matrix\ (j-2)\ (i-2)\ false) \updownarrow (matrix\ (j-2)\ 1 \\
&outlineQTree\ f = convert \cdot \mathsf{fmap}\ f
\end{aligned}
$$

Problema 3

Conversão de l k:

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{l} l\ k\ 0 = k + 1 \\ l\ k\ (d+1) = l\ k\ d + 1 \end{array} \right. \\
\equiv\ &\quad \{\ \text{Igualdade extensional } \{73\}; \text{Cancelamento-x } \{7\}\ \} \\
&\left\{ \begin{array}{l} l\ k \cdot \underline{0} = \mathsf{succ}\ \cdot k \\ l\ k \cdot \mathsf{succ}\ = \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \langle f\ k, l\ k \rangle \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Conversão de f k:

$$
\begin{aligned}
&\left\{ \begin{array}{l} f\ k\ 0 = 1 \\ f\ k\ (d+1) = (d + k + 1) * f\ k\ d \end{array} \right. \\
\equiv\ &\quad \{\ \text{Igualdade extensional}\{73\}; (\text{d + k + 1}) = \text{l k d}\ \} \\
&\left\{ \begin{array}{l} f\ k \cdot \underline{0} = \underline{1} \\ f\ k \cdot \mathsf{succ}\ = mul\ \langle f\ k, l\ k \rangle \end{array} \right. \\
\equiv\ &\quad \{\ \text{Eq-+ } \{27\}\ \}
\end{aligned}
$$

$[f\ k \cdot \underline{0}, f\ k \cdot \mathsf{succ}\ ] = [\underline{1}, mul\ \langle l\ k, f\ k\rangle]$

$\equiv$ { Fusão-+; in = $[\underline{0}, \mathsf{succ}\ ]$; Absorção-+ }

$f\ k \cdot \mathbf{in} = [\underline{1}, mul] \cdot (id + \langle l\ k, f\ k\rangle)$

$\equiv$ { F f = (id + f) }

$f\ k \cdot \mathbf{in} = [\underline{1}, mul] \cdot F\ \langle l\ k, f\ k\rangle <=> f\ k \cdot \mathbf{in} = [\underline{1}, mul] \cdot (id + \langle l\ k, f\ k\rangle)$

Fokkinga:

$\equiv$ { Fokkinga {50} }

$\langle f\ k, l\ k\rangle = (\!|\langle [one, mul], [\mathsf{succ}\ , \mathsf{succ}\ ]\rangle|\!)$

□

Conversão g:

$$\begin{cases} g\ 0 = 1 \\ g\ (d+1) = (d+1) * g\ d \end{cases}$$

$\equiv$ { Igualdade extensional {73} x 2, Def-comp {74} }

$$\begin{cases} g \cdot zero = one \\ g \cdot \mathsf{succ}\ = mul \cdot \langle s, g\rangle \end{cases}$$

$\equiv$ { Eq-+ {27} }

$[g \cdot zero, g \cdot \mathsf{succ}\ ] = [one, mul \cdot \langle s, g\rangle]$

$\equiv$ { Fusão-+, Absorção-+ }

$g \cdot \mathbf{in} = [\underline{1}, mul] \cdot (id + \langle s, g\rangle$

$\equiv$ { F f = (id + f) }

$g \cdot \mathbf{in} = [\underline{1}, mul] \cdot F\ \langle s, g\rangle <=> [\underline{1}, mul] \cdot (id + \langle s, g\rangle)$

□

Conversão s:

$$\begin{cases} s\ 0 = 1 \\ s\ (d+1) = (s\ d) + 1 \end{cases}$$

$\equiv$ { Igualdade extensional {73} x 2, Def-comp {74}, Cancelamento-x }

$$\begin{cases} s \cdot 0 = 1 \\ s \cdot \mathsf{succ}\ = \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \langle g, s\rangle \end{cases}$$

$\equiv$ { Eq-+ }

$[s \cdot \underline{0}, s \cdot \mathsf{succ}\ ] = [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \langle g, s\rangle]$

□

$$flatet :: ((Integer, Integer), (Integer, Integer)) \to (Integer, Integer, Integer, Integer)$$
$$flatet\ ((a, b), (c, d)) = (a, b, c, d)$$

$$unflatet :: (Integer, Integer, Integer, Integer) \to ((Integer, Integer), (Integer, Integer))$$
$$unflatet\ (a, b, c, d) = ((a, b), (c, d))$$

$$base = flatet \cdot \langle f, g\rangle$$

$$\textbf{where } f = \langle one, \mathsf{succ} \rangle$$
$$g = \langle one, one \rangle$$

-- loop (a,b,c,d) = (a*b , b+1 , c*d, d+1)

$$loop = flatet \cdot f \cdot unflatet$$
$$\textbf{where } f = \langle g, h \rangle$$
$$g = \langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle$$
$$h = \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$$

Problema 4

C.0.11 Definições iniciais

$$inFTree\ (i_1\ b) = Unit\ b$$
$$inFTree\ (i_2\ (a, (b, c))) = Comp\ a\ b\ c$$
$$outFTree\ (Unit\ b) = i_1\ b$$
$$outFTree\ (Comp\ a\ b\ c) = i_2\ (a, (b, c))$$
$$baseFTree\ f\ g\ h = g + (f \times (h \times h))$$
$$recFTree\ f = baseFTree\ id\ id\ f$$
$$cataFTree\ f = f \cdot recFTree\ (cataFTree\ f) \cdot outFTree$$
$$anaFTree\ f = inFTree \cdot recFTree\ (anaFTree\ f) \cdot f$$
$$hyloFTree\ f\ g = cataFTree\ f \cdot anaFTree\ g$$
$$\textbf{instance } Bifunctor\ FTree \textbf{ where}$$
$$bimap\ f\ g = cataFTree\ (inFTree \cdot baseFTree\ f\ g\ id)$$

C.0.12 generatePTree

De maneira a gerar uma árvore de Pitágoras de uma dada ordem, recebendo a mesma como argumento é necessário aplicar a função *outNat* para gerar um *Either* que será o argumento de um *ana* aplicado à ordem recebida. Sendo assim, a função *g* devolve, também, um *Either*, pois é o tipo da nossa *Ftree*. Como sabemos que uma *Unit* corresponde ao maior quadrado que detém lado igual a 1, o lado esquerdo da **soma** corresponde ao *Float 1.0*. Ao lado direito queremos multiplicar $sqrt(2)/2$ elevado à ordem + 1 .

$$generatePTree = anaFTree\ (g \cdot outNat)$$
$$\textbf{where } g = \underline{(1.0)} + \langle ((sqrt\ (2)\ /\ 2)\uparrow) \cdot \mathsf{succ}\ , \langle id, id \rangle \rangle$$

C.0.13 drawPTree

$$drawPTree = \bot$$

Problema 5

C.0.14 singletonbag

A função *singleton*, dada uma cor cria um *Bag* com um berlinde dessa mesma cor. Para isso, foi aplicado um *split* de maneira a ser criado o tuplo *(cor, número de berlindes dessa cor)*. De seguida, é aplicado o *singl* a esse resultado para criar uma lista com o tuplo, após isso basta aplicar o construtor do *Bag*.

-- Dada uma cor constroi um bag com um berlinde dessa cor

$$singletonbag = B \cdot singl \cdot \langle id, \underline{(1)} \rangle$$

C.0.15 muB

Para a multiplicação de *Bags* é necessário o desdobramento do tipo recebido pela *muB* (*Bag (Bag (Bag Marble))*) de maneira a ser obtido apenas uma lista do tipo *[(Bag a, Int)]* através da aplicação da função *unB* a todos os tuplos da lista. Seguidamente é, ainda, necessário uma nova aplicação da função *unB* para ficar com o tipo desejado. Assim, conseguimos efetuar a multiplicação do inteiro por todos os inteiros de todos os *Bags* (caso existam) através de um *map*. No final, de maneira a ser devolvido novamente um *Bag a*, é preciso concatenar a lista de listas devolvida pelo *map* e aplicar o construtor do *Bag*.

```
-- Multiplicação do monade
μ = B · concat · (map (f) · unB · fmap unB)
  where f (a, b) = map (id × (∗b)) a
```

C.0.16 dist

Como é referido no enunciado, um exemplo de uma **Distribuição** é dada por *d1 = D [('A', 0.02),('B', 0.12),('C', 0.29),('D', 0.35),('E', 0.22)]*. Logo, a um *bagOfMarbles* é aplicado uma *unB* de maneira a ser retirada apenas a lista de tuplos que constitui um *Bag*, de seguida efetuamos um somatório das quantidades de berlindes de cada cor e geramos um tuplo *([a,Int], Total de berlindes)*. Agora, a cada elemento da lista, através de um *map* é dividido o número total de berlindes pelo número de berlindes de cada cor e gerados os tuplos constituintes de uma distribuição.

```
dist = D · f · ⟨id, sum · map (π2)⟩ · unB
     where f (a, b) = map (λ(c, d) → (c, toFloat d / toFloat b)) a
```

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:[7]

$$
\begin{array}{ll}
 & id = \langle f, g\rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\ \mathsf{in}\ } & 1 + \mathbb{N}_0 \\
{\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\
B & \xleftarrow[\ g\ ]{} & 1 + B
\end{array}
$$

[7] Exemplos tirados de [?].