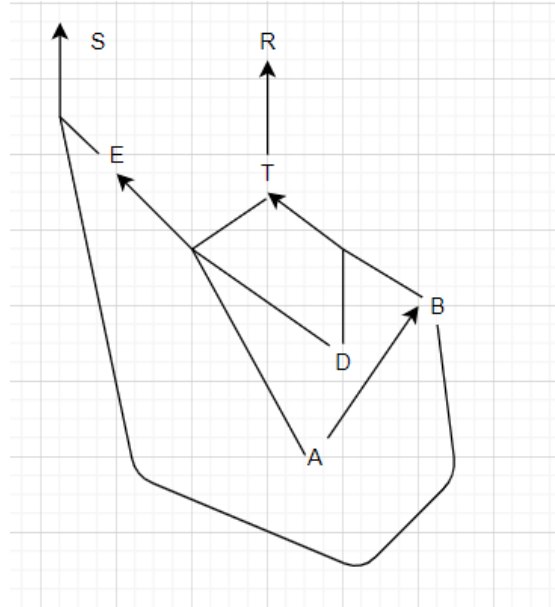


سوال (۱)

الف) نماد های اتمیک P, C, Q استنتاج نمی شوند.



ب) با افزودن تنها نماد اتمیک F به fact های فوق تمام نماد های اتمیک دیگر قابل استنتاج خواهند بود. زیرا در صورت افزودن f آنگاه $F \rightarrow Q$ و به علاوه $D \wedge F \rightarrow C$ سپس در نتیجه استنتاج C در گام بعدی خواهیم داشت $S \wedge A \wedge C \rightarrow P$ و با استنتاج P خواهیم داشت $P \wedge Q \rightarrow R$ و به این ترتیب تمام نماد های P, C, Q که در قسمت الف قابل استنتاج نبودند استنتاج خواهد شد.

سوال (۲)

می بایست اثبات کنیم عبارت زیر ارضا ناپذیر است

$$P \wedge (V \vee T) \wedge (\sim P \vee U) \wedge (R \vee \sim Q) \wedge (\sim V \vee W) \wedge (\sim P \vee Q) \wedge (\sim S \vee U \vee T) \wedge (\sim P \vee \sim R \vee S) \wedge \sim S$$

- | | | |
|---|-------------------------------|------|
| 1) P | 10) $\sim P \vee \sim R$ | 8,9 |
| 2) $V \vee T$ | 11) $\sim P \vee \sim Q$ | 4,10 |
| 3) $\sim P \vee U$ | 12) $\sim P$ | 6,11 |
| 4) $R \vee \sim Q$ | 13) EMPTY CLUSE | 1,12 |
| 5) $V \rightarrow W = \sim V \vee W$ | نتیجتا استدلال فوق معتبر است. | |
| 6) $P \rightarrow Q = \sim P \vee Q$ | | |
| 7) $S \rightarrow (U \vee T) = \sim S \vee U \vee T$ | | |
| 8) $(P \wedge R) \rightarrow S = \sim P \vee \sim R \vee S$ | | |
| 9) $\sim S$ | | |

سوال (۳)

الف) با استفاده از رزولوشن خواهیم داشت :

- 1) $E \wedge R \rightarrow B = \sim E \vee \sim R \vee B$
- 2) $E \rightarrow R \vee P \vee L = \sim E \vee R \vee P \vee L$
- 3) $K \rightarrow B = \sim K \vee B$
- 4) $\sim(L \wedge B) = \sim L \vee \sim B$
- 5) $P \rightarrow \sim K = \sim P \vee \sim K$
- 6) $\sim K \vee \sim L$ resolution 3,4
- 7) $\sim K \vee \sim E \vee R \vee L$ resolution 2,5
- 8) $\sim K \vee \sim E \vee R$ resolution 6,7 = $\sim(K \wedge E) \vee R = K \wedge E \rightarrow R$
- 9) $\sim E \vee \sim K \vee B$ resolution 1,8
- 10) $\sim L \vee \sim E \vee \sim K$ resolution 4,9 = $\sim L \vee \sim(K \wedge E) = L \rightarrow \sim(K \wedge E)$

مورد ۳ نیز مطابق زیر قابل استنتاج است.

- 1) $E \wedge R \rightarrow B$
- 2) $E \rightarrow R \vee P \vee L$
- 3) $K \rightarrow B$
- 4) $\sim(L \wedge B) = B \rightarrow \sim L$
- 5) $P \rightarrow \sim K$
- 6) $K \rightarrow \sim L$ USING 3,4 (hypothetical syllogism)
- 7) $L \rightarrow \sim K$ USING 6 ($K \rightarrow \sim L = L \rightarrow \sim K$)
- 8) $L \vee P \rightarrow \sim K$ USING 5,7 (rule for proof by cases)

و مورد ۴ با مثال نقض زیر قابل استنتاج نمی باشد.

$E = \text{FALSE}, K = \text{FALSE}, L = \text{FALSE}, B = \text{FALSE}, P = \text{FALSE}, R = \text{FALSE}$

(ب) موارد ۱ و ۳ مطابق زیر قابل استنتاج است.

- 1) $A \rightarrow B \wedge C$
- 2) $C \rightarrow D \vee E \vee F$
- 3) $B \rightarrow D \wedge E$
- 4) A
- 5) $B \wedge C$ USING 1,4 (modus ponens)
- 6) B USING 5 (simplification)
- 7) C USING 5 (simplification)
- 8) $D \vee E \vee F$ USING 2,7 (modus ponens)
- 9) $D \wedge E$ USING 3,6 (modus ponens)
- 10) E USING 9 (simplification)
- 11) $C \vee E$ USING 10 (addition)

و مورد ۲ با مثال نقض زیر قابل استنتاج نمی باشد.

$D = \text{TRUE}, E = \text{TRUE}, A = \text{TRUE}, B = \text{TRUE}, C = \text{TRUE}, F = \text{FALSE}$

(پ)

موارد ۲ و ۳ مطابق زیر قابل استنتاج است.

- 1) $\sim C \rightarrow \sim K$
- 2) $C \rightarrow A \vee B$
- 3) $B \rightarrow R \vee C$
- 4) $K \wedge \sim M$
- 5) $K \rightarrow C$ USING 1 ($\sim C \rightarrow \sim K = K \rightarrow C$)
- 6) $K \rightarrow A \vee B$ USING 2,5 (hypothetical syllogism)
- 7) K USING 4 (simplification)
- 8) $A \vee B$ USING 6,7 (modus ponens)
- 9) $A \vee K$ USING 7 (addition)

و مورد 1 با مثال نقض زیر قابل استنتاج نمی باشد.

$K = \text{TRUE}, M = \text{FLASE}, C = \text{TRUE}, A = \text{FALSE}, R = \text{FALSE}, B = \text{TRUE}$

$A \vee R = \text{FALSE}$

به علاوه مورد ۴ نیز قابل استنتاج می باشد زیرا اگر نقیض true را به فرضیات اضافه کنیم عبارت حاصل باید ارضا ناپذیر باشد و مطابق زیر واضح است که عبارت ارضا ناپذیر خواهد بود پس True نیز قابل استنتاج است.

$(\sim C \rightarrow \sim K) \wedge (C \rightarrow A \vee B) \wedge (B \rightarrow R \vee C) \wedge (K \wedge \sim M) \wedge \text{FALSE}$

(سوال ۴)

الف) عبارت همواره صحیح است پس هم توتولوژی و هم ارضا پذیر است.

$\text{Smok} \rightarrow \text{smok} = \sim \text{smok} \vee \text{smok} = \text{True}$

ب) عبارت ارضا پذیر است اما توتولوژی نیست.

Smok	Fire	$\text{Smok} \rightarrow \text{Fire}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

سطری در جدول موجود است که حاصل $\text{smok} \rightarrow \text{Fire}$ برای آن true باشد پس گزاره ارضا پذیر است اما سطری در جدول موجود است که حاصل $\text{smok} \rightarrow \text{Fire}$ به ازای آن false است پس گزاره یک توتولوژی نیست

پ) عبارت ارضا پذیر است اما توتولوژی نیست.

$(\text{Smok} \rightarrow \text{Fire}) \rightarrow (\sim \text{Smok} \rightarrow \sim \text{Fire}) = \sim (\sim \text{smok} \vee \text{fire}) \vee (\text{smok} \vee \sim \text{fire})$
 $= (\text{smok} \wedge \sim \text{fire}) \vee (\text{smok} \vee \sim \text{fire}) = ((\text{smok} \wedge \sim \text{fire}) \vee \text{smok}) \vee ((\text{smok} \wedge \sim \text{fire}) \vee \sim \text{fire}) =$
 $\text{Smok} \vee \sim \text{fire} = \text{fire} \rightarrow \text{smok}$

fire	smok	$\text{fire} \rightarrow \text{smok}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

سطری در جدول موجود است که حاصل $\text{fire} \rightarrow \text{smok}$ برای آن true باشد پس گزاره ارضا پذیر است اما سطری در جدول موجود است که حاصل $\text{fire} \rightarrow \text{smok}$ به ازای آن false است پس گزاره یک توتولوژی نیست

ت) عبارت همواره صحیح است پس هم توتولوژی و هم ارضا پذیر است.

$$\text{Smok} \vee \text{fire} \vee \sim \text{fire} = \text{smok} \vee (\text{fire} \vee \sim \text{fire}) = \text{smok} \vee \text{True} = \text{True}$$

ث) عبارت همواره صحیح است پس هم توتولوژی و هم ارضا پذیر است.

$$((\text{Smok} \wedge \text{Heat}) \rightarrow \text{Fire}) \leftrightarrow ((\text{Smok} \rightarrow \text{Fire}) \vee (\text{Heat} \rightarrow \text{Fire})) =$$

$$((\text{Smok} \wedge \text{Heat}) \rightarrow \text{Fire}) \rightarrow ((\text{Smok} \rightarrow \text{Fire}) \vee (\text{Heat} \rightarrow \text{Fire}))$$

$$\wedge ((\text{Smok} \rightarrow \text{Fire}) \vee (\text{Heat} \rightarrow \text{Fire})) \rightarrow ((\text{Smok} \wedge \text{Heat}) \rightarrow \text{Fire})$$

$$(\sim(\sim \text{smok} \vee \sim \text{heat} \vee \text{fire}) \vee (\sim \text{smok} \vee \text{fire} \vee \sim \text{heat} \vee \text{fire})) \wedge$$

$$(\sim(\sim \text{smok} \vee \text{fire} \vee \sim \text{heat} \vee \text{fire}) \vee (\sim \text{smok} \vee \sim \text{heat} \vee \text{fire})) = (\text{If } \sim \text{smok} \vee \sim \text{heat} \vee \text{fire} = \text{p})$$

$$(\sim \text{p} \vee \text{p}) \wedge (\sim \text{p} \vee \text{p}) = \text{True} \wedge \text{True} = \text{True}$$

ث) عبارت همواره صحیح است پس هم توتولوژی و هم ارضا پذیر است.

$$(\text{Smok} \rightarrow \text{fire}) \rightarrow ((\text{smok} \wedge \text{heat}) \rightarrow \text{fire})$$

$$\sim(\sim \text{smok} \vee \text{fire}) \vee (\sim(\text{smok} \wedge \text{heat}) \vee \text{fire}) = (\text{smok} \wedge \sim \text{fire}) \vee (\sim \text{smok} \vee \sim \text{heat} \vee \text{fire})$$

$$= (\text{If } \sim \text{smok} \vee \text{fire} = \text{p}) \text{ then } \sim \text{p} \vee (\text{p} \vee \sim \text{heat}) = (\sim \text{p} \vee \text{p}) \vee \sim \text{heat} = \text{True} \vee \sim \text{heat} = \text{True}$$

ج) عبارت همواره صحیح است پس هم توتولوژی و هم ارضا پذیر است.

$$\text{Big} \vee \text{dump} \vee (\text{big} \rightarrow \text{dump}) = \text{big} \vee \text{dump} \vee (\sim \text{big} \vee \text{dump}) = (\text{big} \vee \sim \text{big}) \vee \text{dump} = \text{True} \vee \text{dump} = \text{True}$$

چ) عبارت همواره صحیح است پس هم توتولوژی و هم ارضا پذیر است.

$$(\text{A} \wedge \text{B}) \vee (\sim \text{C}) \vee (\sim \text{A} \wedge \text{C}) \rightarrow \sim \text{A} \vee \text{B} \vee \sim \text{C} = \sim((\text{A} \wedge \text{B}) \vee (\sim \text{C}) \vee (\sim \text{A} \wedge \text{C})) \vee (\sim \text{A} \vee \text{B} \vee \sim \text{C})$$

$$((\sim \text{A} \vee \sim \text{B}) \wedge \text{C} \wedge (\text{A} \vee \sim \text{C})) \vee (\sim \text{A} \vee \text{B} \vee \sim \text{C}) = ((\sim \text{A} \vee \sim \text{B}) \wedge ((\text{C} \wedge \text{A}) \vee (\text{C} \wedge \sim \text{C}))) \vee (\sim \text{A} \vee \text{B} \vee \sim \text{C})$$

$$= ((\sim \text{A} \vee \sim \text{B}) \wedge ((\text{C} \wedge \text{A}) \vee (\text{True}))) \vee (\sim \text{A} \vee \text{B} \vee \sim \text{C}) =$$

$$((\sim \text{A} \vee \sim \text{B}) \wedge (\text{True})) \vee (\sim \text{A} \vee \text{B} \vee \sim \text{C}) = (\sim \text{A} \vee \sim \text{B}) \vee (\sim \text{A} \vee \text{B} \vee \sim \text{C}) = (\text{B} \vee \sim \text{B}) \vee (\sim \text{A} \vee \sim \text{A} \vee \sim \text{C}) = \text{True} \vee (\sim \text{A} \vee \sim \text{A} \vee \sim \text{C}) = \text{True}$$

سوال ۵)

1) $\text{P} \wedge \text{Q}$ 5) P USING 1 (simplification)

2) $\text{P} \rightarrow (\text{R} \wedge \text{Q})$ 6) $\text{R} \wedge \text{Q}$ USING 2,5 (modus ponens)

3) $\text{R} \rightarrow (\text{S} \vee \text{T})$ 7) R USING 6 (simplification)

4) $\sim \text{S}$ 8) $\text{S} \vee \text{T}$ USING 3,7 (modus ponens)

_____ 9) T USING 4,8 (disjunctive syllogism)

T

1) $\text{P} \rightarrow (\text{Q} \rightarrow \text{R})$ 5) $\sim \text{S} \rightarrow \text{P}$ USING 2 ($(\text{P} \vee \text{S}) \leftrightarrow (\sim \text{S} \rightarrow \text{P})$)

2) $\text{P} \vee \text{S}$ 6) $\sim \text{S} \rightarrow (\text{Q} \rightarrow \text{R})$ USING 1,5 (hypothetical syllogism)

3) $\text{T} \rightarrow \text{Q}$ 7) $\text{Q} \rightarrow \text{R}$ USING 4,6 (modus ponens)

4) $\sim \text{S}$ 8) $\text{T} \rightarrow \text{R}$ USING 3,7 (hypothetical syllogism)

_____ 9) $\sim \text{R} \rightarrow \sim \text{T}$ USING 8 ($(\text{T} \rightarrow \text{R}) \leftrightarrow (\sim \text{R} \rightarrow \sim \text{T})$)

$\sim \text{R} \rightarrow \sim \text{T}$

- | | |
|--------------------|---|
| 1) $P \vee Q$ | 4) $\sim P$ USING 2,3 (disjunctive syllogism) |
| 2) $\sim P \vee R$ | 5) Q USING 1,4 (disjunctive syllogism) |
| 3) $\sim R$ | با توجه به اینکه Q از داده ها استنتاج می گردد پس هرگز $\sim Q$ نمی تواند استنتاج شود. |
| _____ | مثال نقض زیر نیز این موضوع را تایید می کند. |
| $\sim Q$ | $Q = \text{TRUE}, R = \text{FALSE}, P = \text{FALSE}$ |
| | $\sim Q = \text{FALSE}$ |

- | | |
|---------------------------|---|
| 1) $P \leftrightarrow Q$ | مثال نقض زیر نشان می دهد که استدلال معتبر نمی باشد و S قابل استنتاج نیست. |
| 2) $Q \rightarrow R$ | $P = \text{TRUE}$ |
| 3) $R \vee \sim S$ | $Q = \text{TRUE}$ |
| 4) $\sim S \rightarrow Q$ | $R = \text{TRUE}$ |
| _____ | $S = \text{FALSE}$ |
| S | |

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) P | 5) R USING 1,2 (modus ponens) |
| 2) $P \rightarrow R$ | 6) $Q \vee \sim R$ USING 1,3 (modus ponens) |
| 3) $P \rightarrow (Q \vee \sim R)$ | 7) Q USING 5,6 (disjunctive syllogism) |
| 4) $\sim Q \vee \sim S$ | 8) $\sim S$ USING 4,7 (disjunctive syllogism) |
| _____ | با توجه به اینکه $\sim S$ از داده ها استنتاج می گردد پس هرگز S نمی تواند استنتاج شود. |
| S | مثال نقض زیر نیز این موضوع را تایید می کند. |
| | $P = \text{TRUE}, R = \text{TRUE}, Q = \text{TRUE}, S = \text{FALSE}$ |

P

$$P \rightarrow ((q \vee r) \wedge \sim(q \wedge r)) = \sim p \vee ((q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r)) = (\sim p \vee (q \vee r)) \wedge (\sim p \vee (\sim q \vee \sim r))$$

$$P \rightarrow ((s \vee t) \wedge \sim(s \wedge t)) = \sim p \vee ((s \vee t) \wedge (\sim s \vee \sim t)) = \sim p \vee ((s \vee t) \wedge (\sim s \vee \sim t))$$

$$= (\sim p \vee (s \vee t)) \wedge (\sim p \vee (\sim s \vee \sim t))$$

$$S \rightarrow q = \sim s \vee q$$

$$\sim r \rightarrow t = r \vee t$$

$$t \rightarrow s = \sim t \vee s$$

1) P

9) $q \vee r$ resolution 1,22) $\sim p \vee q \vee r$ 10) $\sim q \vee \sim r$ resolution 1,33) $\sim p \vee \sim q \vee \sim r$

11) empty clause resolution 9,10

4) $\sim p \vee s \vee t$

ارضا ناپذیر بوده و استدلال معتبر است.

5) $\sim p \vee \sim s \vee \sim t$ 6) $\sim s \vee q$ 7) $r \vee t$ 8) $\sim t \vee s$

سوال ۷) عبارت ها در صورتی صحیح اند که یک توتولوژی باشند.

(۱) عبارت صحیح است.

$$[A \wedge B \rightarrow Y] \rightarrow [A \rightarrow Y] \vee [B \rightarrow Y] = \sim[\sim(A \wedge B) \vee Y] \vee ([\sim A \vee Y] \vee [\sim B \vee Y])$$

$$= [A \wedge B \wedge \sim Y] \vee [\sim A \vee Y \vee \sim B] = (\text{IF } [A \wedge B \wedge \sim Y] = P) \text{ THEN } P \vee \sim P = T$$

(۲) عبارت صحیح است.

$$[A \rightarrow Y] \vee [B \rightarrow Y] \rightarrow [A \wedge B \rightarrow Y] = \sim[\sim A \vee Y] \vee [\sim B \vee Y] \vee \sim[A \wedge B \vee Y]$$

$$= [A \wedge \sim Y] \wedge [B \wedge \sim Y] \vee [\sim A \vee \sim B \vee Y] = [A \wedge B \wedge \sim Y] \vee [\sim A \vee \sim B \vee Y] = (\text{IF } [A \wedge B \wedge \sim Y] = P) \text{ THEN } P \vee \sim P = T$$

(۳) عبارت ناصحیح است.

$$[A \wedge B \rightarrow Y] \rightarrow [A \rightarrow Y] \wedge [B \rightarrow Y]$$

مثال نقض زیر نشان می دهد که عبارت همواره TRUE نبوده و توتولوژی نیست پس عبارت ناصحیح است.

$$\text{IF } (A = \text{FALSE}, B = \text{TRUE}, Y = \text{FALSE}) \text{ THEN } [A \wedge B \rightarrow Y] \rightarrow [A \rightarrow Y] \wedge [B \rightarrow Y] = \text{false}$$

(۴) عبارت ناصحیح است.

$$[A \rightarrow Y] \vee [B \rightarrow Y] \rightarrow [A \vee B \rightarrow Y]$$

مثال نقض زیر نشان می دهد که عبارت همواره TRUE نبوده و توتولوژی نیست پس عبارت ناصحیح است.

$$\text{IF } (A = \text{TRUE}, B = \text{FALSE}, Y = \text{FALSE}) \text{ THEN } [A \rightarrow Y] \vee [B \rightarrow Y] \rightarrow [A \vee B \rightarrow Y] = \text{false}$$

متغیر F با احتمال 1/2 صحیح و با احتمال 1/2 ناصحیح است.

اگر F صحیح باشد:

آنگاه عبارت $E \vee ((A \rightarrow B) \wedge C) \leftrightarrow D$ نیز می بایست صحیح باشد.

اگر مقدار E TRUE داشته باشد آن گاه متغیر های A, B, C, D می توانند هر مقدار دلخواه TRUE یا FALSE اخذ کنند لذا تعداد مدل ها در این حالت برابر ۱۶ خواهد بود.

اگر مقدار E FALSE داشته باشد آن گاه $D \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge C)$ می بایست صحیح باشد.

اگر متغیر D مقدار TRUE اخذ کند آنگاه عبارت $((A \rightarrow B) \wedge C)$ نیز می بایست صحیح باشد.

لذا متغیر C می بایست مقدار TRUE داشته باشد و $A \rightarrow B$ نیز باید صحیح باشد یعنی A, B می توانند مقادیر زیر را داشته باشند

A = TRUE, B = TRUE

A = FALSE, B = TRUE

A = FALSE, B = FALSE

پس در این حالت نیز تعداد ۳ مدل خواهیم داشت.

اگر متغیر D مقدار FALSE اخذ کند آنگاه عبارت $((A \rightarrow B) \wedge C)$ نیز می بایست ناصحیح باشد.

اگر C مقدار FALSE بگیرد A, B می توانند هر مقدار دلخواه TRUE یا FALSE را اخذ کنند پس در این حالت ۴ مدل داریم.

اگر C مقدار TRUE بگیرد آنگاه عبارت $A \rightarrow B$ می بایست FALSE شود به این معنی که A = TRUE و B = FALSE باشد پس ۱ مدل در این حالت خواهیم داشت.

اگر F ناصحیح باشد:

آنگاه عبارت $E \vee ((A \rightarrow B) \wedge C) \leftrightarrow D$ نیز می بایست ناصحیح باشد.

در این حالت متغیر E می بایست مقدار FALSE داشته باشد به علاوه عبارت $D \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge C)$ نیز می بایست FALSE باشد.

اگر D مقدار TRUE بگیرد عبارت $((A \rightarrow B) \wedge C)$ باید FALSE شود

اگر C FALSE شود A, B هر مقدار دلخواهی می توانند اخذ کنند و لذا ۴ مدل خواهیم داشت.

اگر C TRUE شود $A \rightarrow B$ باید FALSE شود و لذا تنها ۱ مدل خواهیم داشت (A = TRUE, B = FALSE)

اگر D مقدار FALSE بگیرد عبارت $((A \rightarrow B) \wedge C)$ باید TRUE شود

در این حالت متغیر C می بایست TRUE باشد و عبارت $A \rightarrow B$ نیز باید TRUE باشد یعنی A, B مقادیر زیر را می توانند داشته باشند.

A = TRUE, B = TRUE

A = FALSE, B = TRUE

A = FALSE, B = FALSE

پس در این حالت نیز تعداد ۳ مدل خواهیم داشت.

تعداد کل مدل ها برابر است با: $32 = 16 + 16$

ب) سه مدل وجود دارد.

یا همزمان می بایست A, B صحیح باشند یا همزمان B, C صحیح باشند.

(۱) A = TRUE, B = TRUE, C = TRUE

(۲) A = TRUE, B = TRUE, C = FALSE

(۳) B = TRUE, C = TRUE, A = FALSE

(پ)

اگر متغیر C مقدار FALSE اخذ کند عبارت $A \leftrightarrow B$ نیز می بایست مقدار FALSE اخذ کند. پس در این حالت A, B مقادیر زیر را می توانند اخذ کنند.

A = TRUE, B = FALSE

A = FALSE, B = TRUE

در این حالت ۲ مدل خواهیم داشت.

اگر متغیر C مقدار TRUE اخذ کند عبارت $A \leftrightarrow B$ نیز می بایست مقدار TRUE اخذ کند. پس در این حالت A, B مقادیر زیر را می توانند اخذ کنند.

A = TRUE, B = TRUE

A = FALSE, B = FALSE

در این حالت ۲ مدل خواهیم داشت.

تعداد کل مدل ها برابر است با : $2 + 2 = 4$