

# Etude d'article: The use of scaling properties to detect relevant changes in financial time series: a new visual warning tool

Sara Boutigny

Nesrine Latrache

Heimana Zhong

Steven Worick

## 1 Introduction

Le concept de « scaling » fait couler beaucoup d'encre dans la littérature. Aujourd'hui, il y a un consensus sur le fait que les séries chronologiques financières, notamment celles relevant des indices boursiers, présentent un multiscaling. La notion de « multiscaling » tire ses origines de la physique. Elle fut très rapidement appliquée au monde de la sociologie avant de prendre place en finance. C'est ainsi que plusieurs chercheurs soulèvent l'idée que les prix des séries financières présentent des patterns à différentes échelles temporelles. Le multiscaling vient en réponse au mouvement brownien, seul modèle stochastique et scalaire en finance dans les années 60 et qui suppose que les rendements des prix du marché suivent une distribution normale avec une moyenne stable et une variance finie. Ces rendements ne sont en réalité pas normalement distribués et présentent un pic autour de la moyenne et des queues plus larges. La propriété de multiscaling prend également une importance certaine lorsqu'un modèle suppose une indépendance des rendements des actifs mais qu'il n'en est vraisemblablement pas le cas, que les actifs présentent une dépendance à long terme à différents degrés. D'autres facteurs liés à la dynamique des transactions peuvent expliquer la pertinence qu'a le multiscaling dans le monde de la finance : l'autocorrélation de la valeur absolue des rendements logarithmiques, la dynamique de liquidité, la corrélation (non linéaire) entre rendements élevés et faibles générés à différents horizons temporels par des opérateurs et selon les volumes négociés, ou encore l'endogénéité des marchés.

## 2 Objectif

L'évolution dynamique des propriétés multiscalaires est au cœur des investigations de ce papier. Les auteurs recherchent les changements significatifs des séries chronologiques financières en considérant les propriétés scalaires et en faisant usage de la méthode des exposants d'Hurst généralisés (GHE) variant dans le temps comme outil de signalisation pour les marchés financiers : prédire les crises et bulles financières. Pour aller plus loin dans l'utilisation des exposants de Hurst, ce papier présente une méthode augmentée, le weighted GHE, qui permet d'introduire une variable de pondération dans le calcul, afin de diminuer la contribution des données les plus lointaines. Cette évolution sera portée par le calcul des exposants de Hurst de quatre indices boursiers : le S&P, le Tokyo-Nikkei, l'Athens Stock Exchange (ASE) ainsi que le Bombay-Sensex.

## 3 Méthodes

### 3.1 Datas

Comme indiqué précédemment, le calcul des Exposants de Hurst se feront sur les 4 indices boursiers suivants :

Market	Time period
S&P 500	1927-2020
NIKKEI	1969-2020
ASE	1991-2020
SENSEX	2001-2020

## 3.2 GHE : Generalized Hurst Exponent

L'exposant de Hurst est une mesure du comportement d'un marché. Il indique si un marché suit une tendance, adopte un comportement aléatoire ou de retour à la moyenne. Cette connaissance permet de sélectionner la meilleure stratégie de trading pour un marché donné.

Les exposants de Hurst généralisés (*GHE*) sont plus qu'utiles à l'étude multiscalaire des séries financières. Leur dynamique permet de mettre en évidence les changements dans l'échelle des séries chronologiques étudiées. Dans cet article, les GHE dépendent du temps et de différents paramètres  $q$  ( $H_q$ ).

Dans l'approche GHE dépendante du temps, les séries temporelles de  $H_q$  sont générées pour une gamme de valeurs  $q$ , en divisant les séries temporelles en segments temporels (qui se chevauchent généralement) et en calculant les valeurs  $H_q$  pour chaque segment. En regardant les valeurs relatives de  $H_q$  pour les différentes valeurs de  $q$  à un segment de temps particulier, nous pouvons évaluer le degré de multiscaling.

Pour calculer l'exposant scalaire, il faut tout d'abord étudier les moments d'ordre  $q$  défini comme suit :

$$\Xi(\tau, q) = \mathbb{E}[|X_{t+\tau} - X_t|^q] \approx K_q \tau^{q \cdot H_q} \quad (1)$$

Avec  $q$  l'ordre du moment,  $\tau$  le retard considéré,  $K_q$  est le moment d'ordre  $q$  (avec  $\tau = 1$ ), et  $H_q$  le *GHE*.

La fonction  $qH_q$  décrit les exposants des différents scaling du processus. Elle est concave. Un proxy peut être dégagé en combinant ses exposants avec un polynôme du second degré. Nous avons :  $H_q = A + B * q$

Nous retrouvons que :

- Si  $B=0$ , le processus est uniscale sinon, le processus est multiscalaire
- Pour  $q=2$ ,  $\Xi(\tau, 2)$  est proportionnelle à l'autocorrélation de  $X_t$
- Pour  $q=1$ ,  $H_q = H$

$H_1 = 0.5$  : Random Walk (par exemple) même probabilité de monter ou baisser

$H_1 > 0.5$  : Si le cours monte à  $t$ , la probabilité de monter à  $t+1$  est plus forte que la probabilité de baisser. Le processus est persistant.

$H_1 < 0.5$  : Si le cours monte à  $t$ , la probabilité de baisser à  $t+1$  est plus forte que la probabilité de monter. Le processus est anti-persistant.

## 3.3 wGHE

Une modification est apportée au GHE. Il s'agit du GHE pondéré (weighted GHE) pour lequel le calcul de la moyenne temporelle a été modifié et donné par l'équation (1).

Plus précisément, en faisant la somme dans un intervalle de temps  $[t - \Delta t, t]$  de longueur  $\Delta t$ , chaque terme de la série temporelle est pondéré par un facteur qui dépend de l'éloignement du terme par rapport au temps présent  $t$  : plus il est éloigné dans le passé, moins ce terme est pondéré, de sorte que les temps plus récents ont une contribution plus élevée.

Ainsi, le calcul de la moyenne est remplacé par la définition suivante :

$$\mathbb{E}[f(X_t)]_\theta = \sum_{s=1}^{\Delta t-1} w_s(\theta) f(X_{(t-s)}). \quad (4)$$

où le facteur de pondération  $w_s$  est une fonction du temps à décroissance exponentielle définie comme :

$$w_s(\theta) = w_o(\theta) e^{-\frac{s}{\theta}} \quad (5)$$

où  $\theta$  est le temps caractéristique pour lequel  $w$  chute à  $1/e$  et  $w_o = w_o(\theta) = \frac{1-e^{-\frac{1}{\theta}}}{1-e^{-\frac{\Delta t}{\theta}}}$  est une constante de normalisation qui garantit que la somme de tous les poids  $w$  dans l'intervalle  $\Delta t$  est égale à 1.

Ainsi, l'équation (1) est maintenant remplacée par son équivalent en somme pondérée :

$$\Xi(\tau, q, \theta) = \mathbb{E}[|X_{t+\tau} - X_t|^q]_\theta \sim K_q \tau^{q H_q^\theta}, \quad (6)$$

où  $H_q(\theta)$  est le  $wGHE$  correspondant à un temps caractéristique  $\theta$

Dans toute la suite de cet article, nous utiliserons la version  $wGHE$  telle que définie ci-dessus.

Son principal avantage est qu'elle permet d'utiliser une fenêtre fixe  $\Delta t$  pour tous les calculs, en faisant varier uniquement le temps caractéristique  $\theta$  afin d'augmenter ou de diminuer la pondération du passé à court terme par rapport au passé à long terme. Cela fournit suffisamment de données pour obtenir des estimations précises des  $GHEs$  et en même temps elle donne une flexibilité dans le réglage de l'échelle de temps caractéristique de pondération, ajustant ainsi en douceur l'importance du passé récent par rapport au passé lointain dans le calcul des  $GHEs$ .

Outre les  $wGHEs$ , nous avons également estimé l'évolution temporelle de la volatilité d'un indice, définie comme l'écart type des rendements logarithmiques pondérés sur une fenêtre temporelle égale à  $\Delta t$ . Pour le calcul de la volatilité, le calcul de la moyenne a été à nouveau effectué comme une moyenne pondérée avec un temps caractéristique  $\theta$  en utilisant l'équation (4) :

$$V(t) = \sigma \left( \log \left( \frac{X_{\tau+1}}{X_\tau} w_t(\theta) \right) \right)_{\Delta t} \quad (7)$$

où  $\log(\dots)$  est le logarithme naturel,  $\sigma(\dots)\Delta t$  désigne l'écart-type de la série pour  $\tau = 1 \dots \Delta t - 1$  et le facteur de pondération temporel  $w$  est donné par l'équation (5).

### 3.4 Surrogate

Pour s'assurer que les résultats obtenus ne soient pas biaisés par les données, les auteurs utilisent une série d'exposants « surrogates »  $H_q^{surr(\theta)}$ . Cette série est obtenue en appliquant la méthode des  $wGHE$  sur une série de prix calculée aléatoirement à l'aide d'un mouvement brownien. Celui-ci est généré à l'aide d'une distribution normale centrée, dont la volatilité glissante  $V(t)$  est définie comme suit :

$$V(t) = \sigma \left( \log \left( \frac{X_{\tau+1}}{X_\tau} \right) w_t(\theta) \right)_{\Delta t}$$

## 4 Résultat

### 4.1 Standardisation des exposants de Hurst

Pour utiliser les modèles précédemment énoncés, les indices choisis sont le S&P500, le NIKKEI, l'ASE, et le SENSEX, depuis la date de création respective de chaque indice, à 2020. Les modèles sont calculés à partir des log prix :  $X_t = \log(P_t)$ .

Pour mieux étudier le comportement de la série temporelle, les auteurs ont recours à une standardisation des exposants de Hurst calculés par les  $wGHE$ .

La statistique  $H_q^{(\theta)}$  s'écrit comme suit :

$$H_q^{(\theta)} = \frac{H_q^{(\theta)} - H^*}{\sigma(H_q^{surr(\theta)})}$$

Avec :

- $H^*$  la valeur d'un exposant de Hurst d'une série totalement aléatoire.

$$H^* = 0,5$$

- $\sigma(H_q^{surr(\theta)}) = \sqrt{\sum_{\tau=1}^N \frac{(H_q^{surr}(\tau) - \mathbb{E}[H_q^{surr}])^2}{N-1}}$  où  $\sigma(H_q^{surr(\theta)})$  représente l'écart-type des exposants de Hurst générés par le mouvement brownien et  $N$  représente le nombre de points de la série.

La métrique  $H_q^{(\theta)}$  peut se lire comme une mesure de l'éloignement de 0,5 en unités d'écarts-types. La division par l'écart-type permet de quantifier la force statistique des comportements persistants, anti-persistants, uniscaling ou multiscaling.

Elle permet donc de mesurer dans quelles proportions la série de prix s'éloigne d'une série aléatoire. Plus  $H_q^{(\theta)}$  est proche de 0, plus on pourra considérer que notre indice se comporte de façon aléatoire.

## 4.2 Quantification des effets de multiscaling

Ensuite, pour quantifier les effets de multiscaling, il est possible d'utiliser une première métrique  $W_{q_1, q_2}$  qui représente la largeur :

$$W_{q_1, q_2} = H_{q_1} - H_{q_2}$$

Avec  $q_1$  et  $q_2$  des ordres de moments.

Tout comme pour la série  $H_q^{(\theta)}$ , il convient de standardiser la statistique  $W_{q_1, q_2}$  pour ne relever que du multiscaling qui soit significatif.

Les  $q_1$  et  $q_2$  choisis doivent être extrêmes, on a alors :

$$W'_{q_1, q_2}(t) = \frac{W_{0.1, 4}(t)}{\sigma(W_{q_1, q_2}^{surr})}$$

$$\text{Avec } \sigma(W_{q_1, q_2}^{surr}) = \sqrt{\sigma(H_{q_1}^{surr})^2 + \sigma(H_{q_2}^{surr})^2}.$$

La seconde métrique qui permet d'arriver à une information similaire est  $B'(t)$ . Elle mesure la profondeur du multiscaling et se calcule comme suit :

$$\text{Avec } \sigma(B^{surr}) = \sqrt{\sum_{\tau=1}^N \frac{(B^{surr}(\tau) - \mathbb{E}[B^{surr}])^2}{N-1}}$$

Alors que  $W_{q_1, q_2}$  mesure l'étendue du paramètre  $H_q$ ,  $B$  correspond à l'ajustement linéaire entre  $q$  et  $H_q^{(\theta)}$ . Si ces mesures sont proches de 0, alors on pourra conclure que la série  $H_q^{(\theta)}$  ne dépend pas de  $q$ , et qu'elle est donc de type uniscaling. Dans le cas contraire, on pourra dire que la série est de type multiscaling.

Quelque soit la métrique  $\gamma'$  utilisée, on la compare à  $\phi_L$  et  $\phi_H$  pour déterminer le degré multiscalaire :

$$\text{si } \gamma' < \phi_L = 0.32 \text{ alors } H_q \text{ est uniscalaire}$$

$$\text{si } \gamma' > \phi_H = 1.64 \text{ alors } H_q \text{ est fortement multiscalaire (ie) pattern } M$$

$$\text{Sinon } H_q \text{ est faiblement multiscalaire (ie) pattern } M^L$$

La seconde métrique qui permet d'arriver à une information similaire est  $B'(t)$ . Elle mesure la profondeur du multiscaling et se calcule comme suit :  $B'(t) = \frac{B(t)}{\sigma(B^{surr})}$ .

## 4.3 Le choix des paramètres

Pour faire les calculs précédemment expliqués, il convient de définir les paramètres  $\tau$ ,  $\Delta t$ , et  $\theta$ . Les paramètres les plus pertinents choisis par les auteurs sont :

- $\tau=19$
- $\Delta t = \theta = 250$

$\Delta t$  correspondent à la fenêtre de temps et  $\theta$  au paramètre de pondération des exposants dans le temps. Le choix de ces paramètres est supposé découler d'un arbitrage entre un résultat qui réduit les effets d'un jeu de données fini et qui capture en même temps les changements de scaling à court-terme. Si ces paramètres choisis sont trop faibles, alors les effet d'un jeu de données fini vont biaiser les résultats quand bien même la lecture à court-terme est précise. A l'inverse, s'ils sont choisis trop élevés, l'effet d'un jeu de données fini s'estompe mais il est alors plus difficile d'apercevoir les tendances de court-terme.

## 4.4 Identification des Patterns Temporels

La méthode du CPA permet de comparer la pente relative des séries wGHEs.

La figure 6 permet de caractériser les différents types de trends entre les 2 séries wGHEs extrêmes  $H_4$  et  $H_{0.1}$ .

- Quand ils sont parallèles, le trend est multiscalaire : soit il est fortement multiscalaire (pattern M) soit il est faiblement multiscalaire (pattern  $M^L$ )

- Quand ils sont asymétriques, le pattern est A. Il existe différents types de patterns A :

- $A^-$  quand  $H_4$  décroît plus vite que  $H_{0,1}$  : anti-persistent
- $mA^-$  quand  $H_4$  croît plus vite que  $H_{0,1}$
- $A^+$  quand  $H_{0,1}$  croît plus vite que  $H_4$  : persistant
- $mA^+$  quand  $H_{0,1}$  décroît plus vite que  $H_4$
- $A^0$  quand  $H_{0,1}$  croît à la même vitesse que  $H_4$  décroît : anti-persistent
- $mA^0$  quand  $H_{0,1}$  décroît à la même vitesse que  $H_4$  croît

- Pour les patterns asymétriques faiblement multiscalaire, il existe deux patterns :

- $A^L$  quand les wGHEs divergent
- $mA^L$  quand les wGHEs convergent

## 5 Résultats

Comme le montre les graphes des wGHEs, la propriété scalaire des différents indices varient fortement dans le temps : des périodes où l'indice est fortement multiscalaire, des périodes où elle est uniscaleire et des périodes de transitions. Ces graphes permettent aussi de définir les périodes persistantes ( $H' > 0$ ), périodes anti-persistantes ( $H' < 0$ ) et les périodes neutres ( $H' \sim 0$ ). Les patterns de type  $A^0$  et  $A^-$  sont dus aux événements à queues épaisses qui se produisent en direction opposée de la tendance du marché (ex : chute des prix alors que le marché est haussier ou inversement). Les exemples de ce type de patterns sont observés : Avril 1935 sur le S&P quand le prix chute de 9% et remonte de 9%, en Juin 1972 sur le NIKKEI lié à une chute de 8% puis d'une augmentation de 5.3%. Le pattern de type  $A^+$  est lié aux événements à queues épaisses qui se produisent dans la même direction que le marché. L'exemple le plus flagrant est la crise des subprimes en 2008 (graphe du S&P). Le comportement multiscalaire n'est pas forcément corrélé aux périodes de hausse de la volatilité ou période persistante : ils sont liés à une hausse de la volatilité et un comportement multiscalaire persistant ou à une baisse de volatilité accompagnée d'un comportement multiscalaire anti-persistant.

Au début d'une bulle financière, un fort comportement uniscaleire est observé. Quand le marché commence à augmenter, un pattern de type  $A^-$  ou  $A^L$  est observé. Puis le comportement redevient uniscaleire ou faiblement multiscalaire quand la bulle éclate. Cette transition de uniscaleire à multiscalaire sont des signes d'une future bulle/crise financière : les patterns  $A^-/A^L$  et  $A^0$  observés sont les conséquences de ces transitions. Par exemple : passage de  $A^-$  à  $A^0$  (flèche 5) du S&P est suivi d'une mini crise ; la transition  $A^- A^0 A^+ A^0$  sur l'index ASE est un signal de la bulle financière des années 2000 ; la transition à un pattern  $A^L$  pour l'index du S&P, NIKKEI, ASE et SENSEX avant la crise de 2008. Un pattern fortement multiscalaire  $M$  n'est pas forcément synonyme d'une mauvaise tendance du marché. Ce pattern reflète souvent une bonne tendance sur le marché mais avec une augmentation de l'hétérogénéité du marché. Les patterns observés selon la métrique  $W$  et la métrique  $B$  diffèrent lors des crises :  $W$  est plus asymétrique que  $B$ .

## 6 Conclusion

Nous avons vu que différents patterns temporels sont observables sur les séries GHEs. Ces patterns permettent d'identifier les phases uniscaleires et multiscalaire. La combinaison de l'identification de ces patterns ainsi que l'utilisation des métriques (largeur multiscalaire et courbure multiscalaire) permettent de signaler les événements à queue épaisse, crises et bulles financières. Les résultats montrent que les crises sont précédées par une transition d'un pattern uniscaleire à un pattern multiscalaire asymétrique accompagnée d'une volatilité faible ou croissante, constituant ainsi un signal d'avertissement.

## 7 Extension

Nous avons réalisés les méthodes sur l'indice du CAC 40 entre 2001 et 2020. (Cf. Annexe)

## 8 Annexe

FIGURE 1: Exposant de Hurst en fonction du temps du S&P 500 utilisant la méthode du wGHE pour  $q = 0.1$

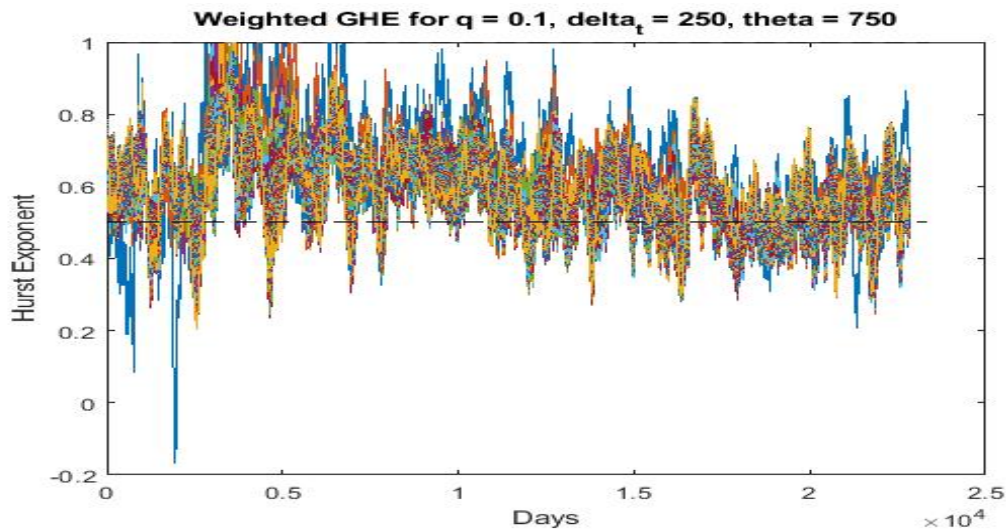


FIGURE 2: Exposant de Hurst en fonction du temps de la série Surrogate du S&P 500 utilisant la méthode du wGHE pour  $q = 0.1$

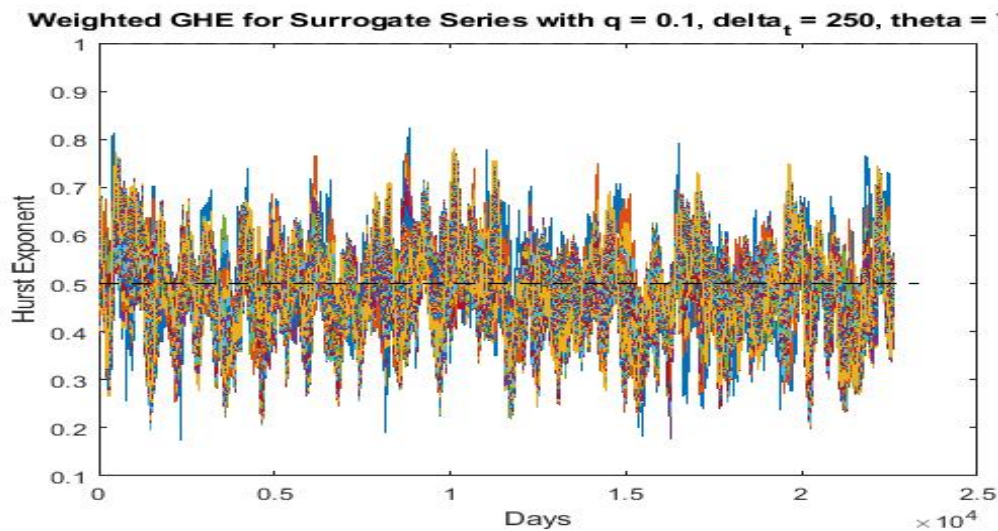


FIGURE 3: Exposant de Hurst en fonction de  $q$  du S&P 500 utilisant la méthode du GHE

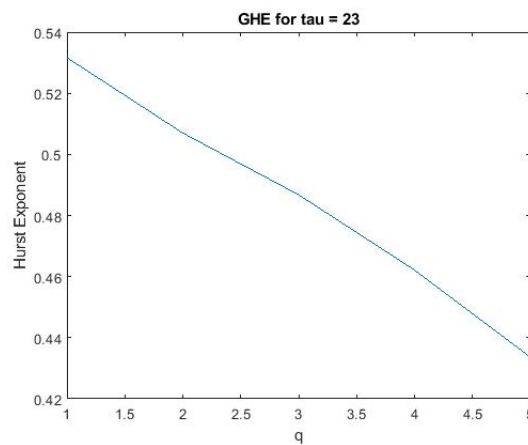


FIGURE 4: Exposant de Hurst en fonction du temps du S&amp;P 500 utilisant la méthode du GHE

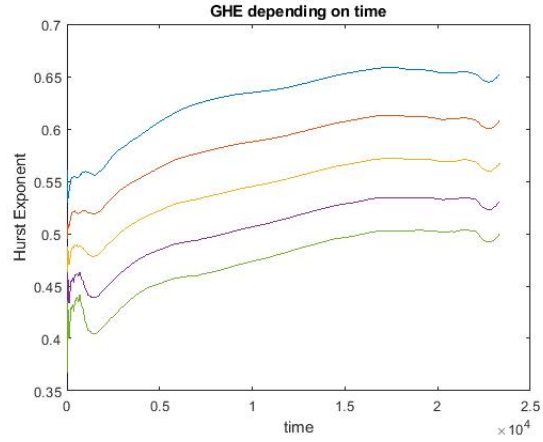


FIGURE 5

	$H_{0.1}^{(\theta)}$	$H_1^{(\theta)}$	$H_4^{(\theta)}$
<b>S&amp;P 500</b>	0.5511 $\pm 4.7 \times 10^{-4}$	0.5244 $\pm 3.2 \times 10^{-4}$	0.4454 $\pm 4.9 \times 10^{-4}$
<b>(Standard deviation)</b>	0.06101 $\pm 7.1 \times 10^{-6}$	0.05671 $\pm 4.8 \times 10^{-6}$	0.06623 $\pm 8.8 \times 10^{-6}$
<b>Surrogate data</b>	0.4943 $\pm 3.7 \times 10^{-4}$	0.4940 $\pm 2.5 \times 10^{-4}$	0.4853 $\pm 3.1 \times 10^{-4}$
<b>(Standard deviation)</b>	0.03615 $\pm 5.7 \times 10^{-6}$	0.03472 $\pm 2.0 \times 10^{-5}$	0.04324 $\pm 5.0 \times 10^{-6}$

FIGURE 6

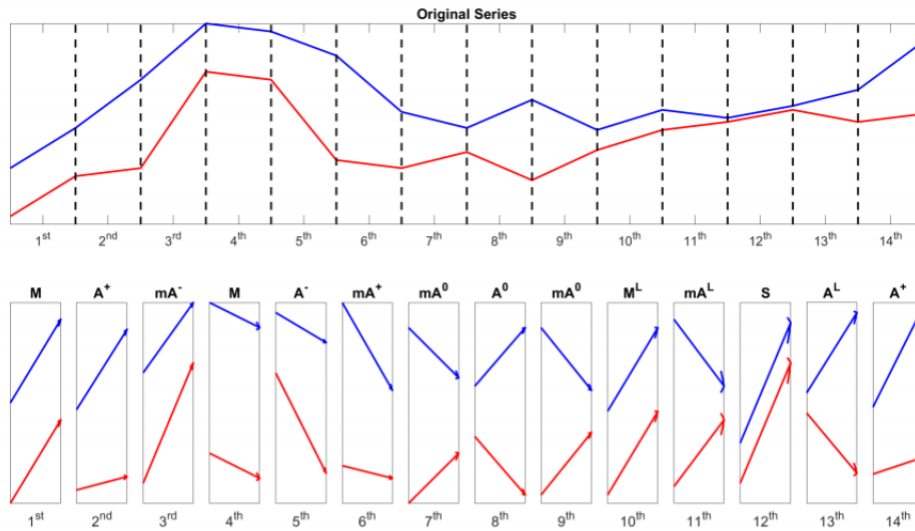


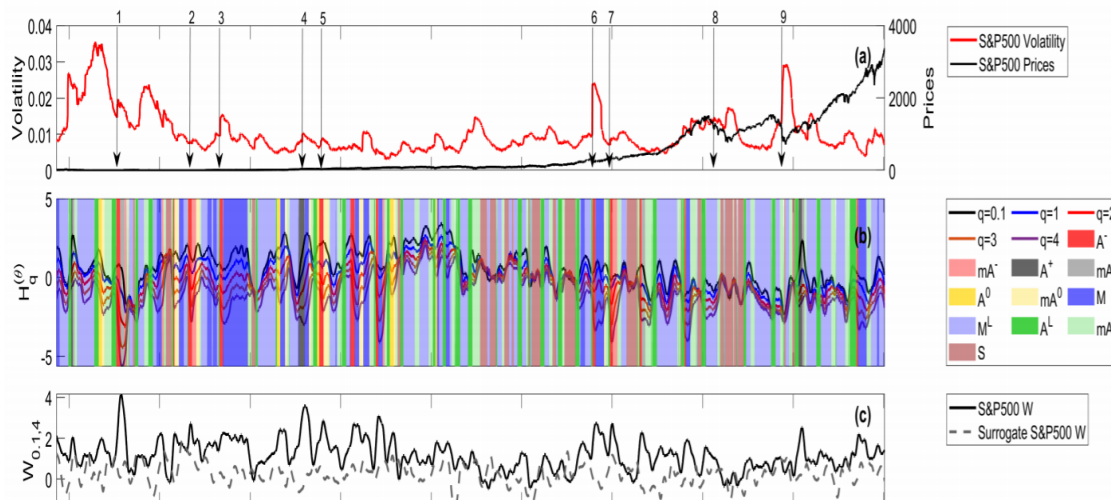
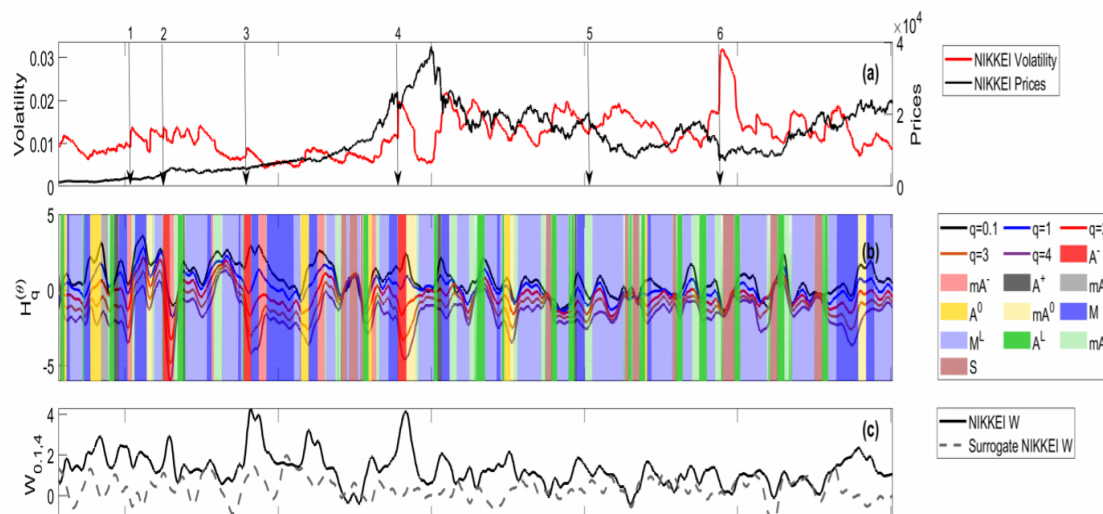
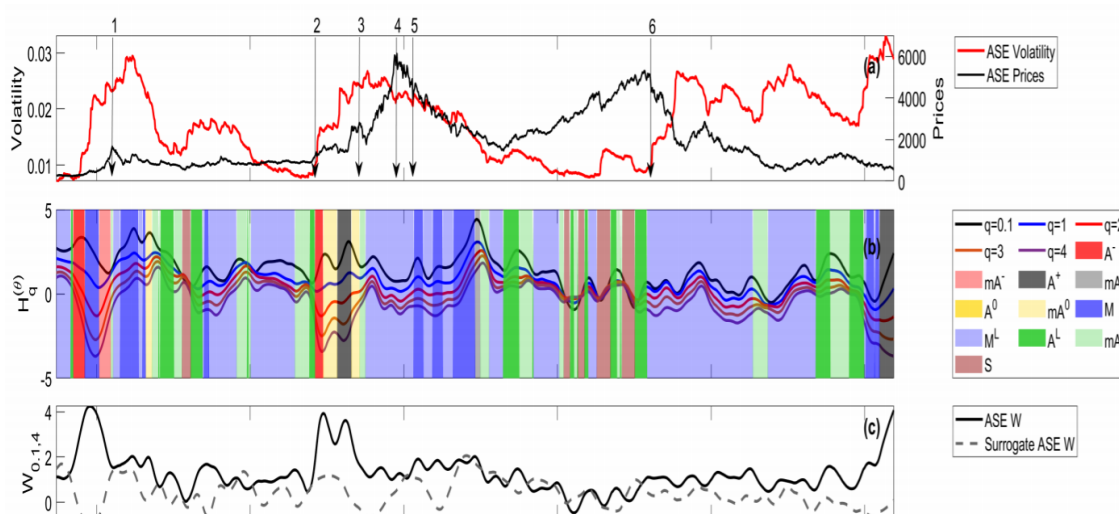
FIGURE 7: S&P 500 : (a) Closing Prices et weighted volatility (b)wGHEs (c) largeur multiscale  $W_{0,1,4}$ FIGURE 8: NIKKEI : (a) Closing Prices et weighted volatility (b)wGHEs (c) largeur multiscale  $W_{0,1,4}$ FIGURE 9: ASE : (a) Closing Prices et weighted volatility (b)wGHEs (c) largeur multiscale  $W_{0,1,4}$ 



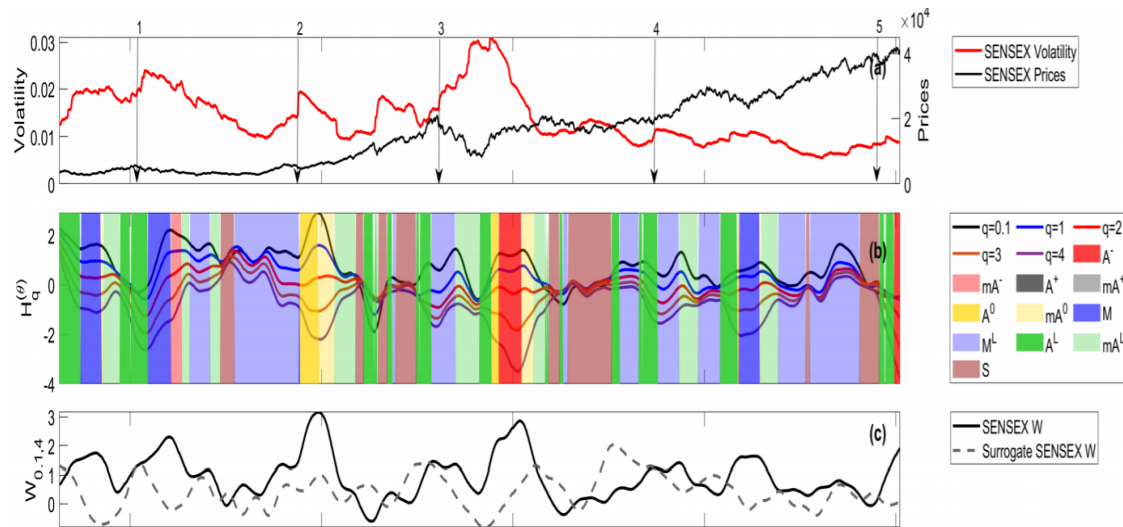
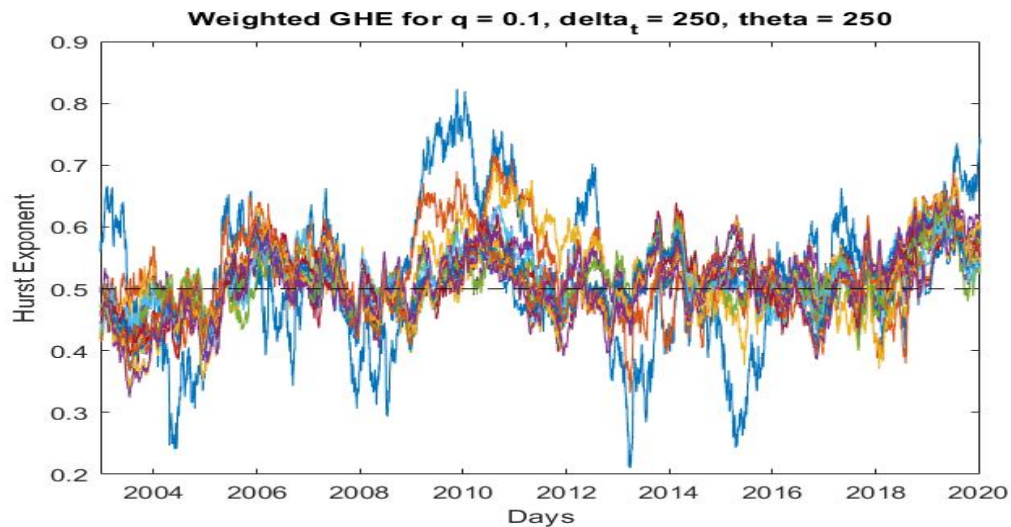
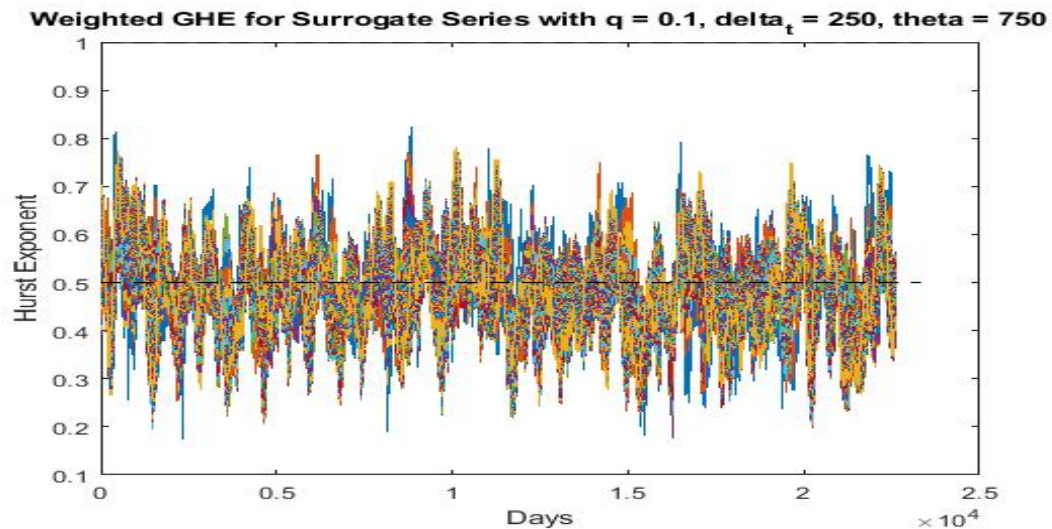
FIGURE 10: SENSEX : (a) Closing Prices et weighted volatility (b)wGHEs (c) largeur multiscalaire  $W_{0.1,4}$ FIGURE 11: Exposant de Hurst en fonction du temps du CAC 40 utilisant la méthode du wGHE pour  $q = 0.1$ FIGURE 12: Exposant de Hurst en fonction du temps de la série Surrogate du CAC 40 utilisant la méthode du wGHE pour  $q = 0.1$ 

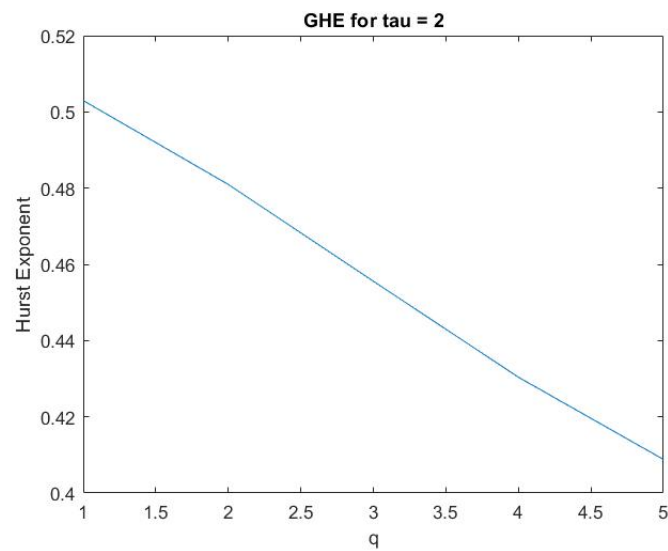
FIGURE 13: Exposant de Hurst en fonction de  $q$  du CAC 40 utilisant la méthode du GHE

FIGURE 14: Exposant de Hurst en fonction du temps du S&amp;P 500 utilisant la méthode du GHE

