582206 Laskennan mallit (syksy 2016)

Harjoitus 1, ratkaisuja

1. Tarkastellaan kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ osajoukkoja $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{2, 3, 4\}$. Merkinnällä $\overline{C}$ tarkoitetaan joukon C komplementtia:

$$\begin{aligned}\overline{C} &= \mathbb{Z} - C \\ &= \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \notin C \}.\end{aligned}$$

Mitä alkioita kuuluu seuraaviin joukkoihin:

(a) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Ratkaisu: Joukkoa $C = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ sanotaan joukkojen A ja B *symmetriseksi erotukseksi* ja merkitään usein $A \Delta B$ tai $A \oplus B$. Siinä ovat ne alkiot, jotka kuuluvat tasan yhteen joukoista A ja B. Siis tässä $C = \{1, 4\}$.

(b) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$?

Ratkaisu: De Morganin lain mukaan (katso tehtävää 3)

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B.$$

Siis $D = \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Olkoon $a \neq 0$ jokin kiinteä reaaliluku.

(a) Esitä rekursiivinen määritelmä potenssille a^n, missä $n \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a \qquad\qquad \text{kun } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(b) **Väite:** Kaikilla $n, k \in \mathbb{N}$ pätee $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

Todistus: Induktio k:n suhteen.

Perustapaus: Olkoon $k = 0$. Koska $a^0 = 1$ ja $n + 0 = n$, väite tulee muotoon $a^n \cdot 1 = a^n$, joka selvästi pätee.

Induktioaskel: Oletetaan, että väite pätee, kun $k = m$. Osoitetaan, että väite pätee myös, kun $k = m + 1$. Saamme

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^k &= a^n \cdot a^{m+1} \\ &= a^n \cdot (a^m \cdot a) && \text{potenssin määritelmä} \\ &= (a^n \cdot a^m) \cdot a \\ &= a^{n+m} \cdot a && \text{induktio-oletus} \\ &= a^{(n+m)+1} && \text{potenssin määritelmä} \\ &= a^{n+k} \end{aligned}$$

eli väite pätee myös, kun $k = m + 1$. □

3. **Väite:** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Todistus:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow \text{ei päde, että } x \in A \text{ ja } x \in B \\ &\Leftrightarrow \text{pätee, että } x \notin A \text{ tai } x \notin B \\ &\Leftrightarrow \text{pätee, että } x \in \overline{A} \text{ tai } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

$\square$

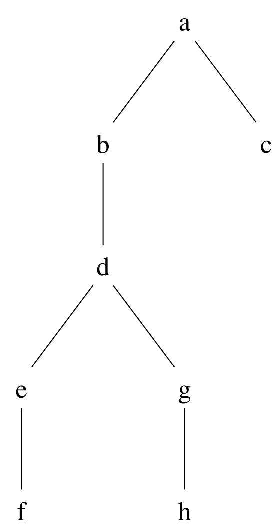
Väite: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Todistus:

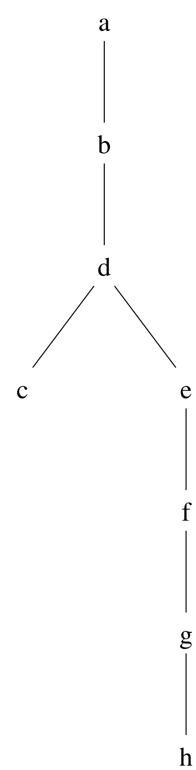
$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow \text{ei päde, että } x \in A \text{ tai } x \in B \\ &\Leftrightarrow \text{pätee, että } x \notin A \text{ ja } x \notin B \\ &\Leftrightarrow \text{pätee, että } x \in \overline{A} \text{ ja } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

$\square$

4.



leveyssuuntainen



syvyyssuuntainen

5. **Lause** Jos suuntaamattomassa verkossa on ainakin kaksi solmua, niin siinä on ainakin kaksi solmua, joiden aste on sama.

Todistus Olkoon verkossa n solmua, missä $n \geq 2$. Koska solmu ei voi olla oma naapurinsa, suurin mahdollinen naapurien lukumäärä eli aste on $n-1$. Toisaalta pienin mahdollinen aste on 0. Siis solmujen asteet ovat luonnollisia lukuja joukosta $\{ 0, 1, \ldots, n-1 \}$. Näitä mahdollisia asteita on n kappaletta.

Tehdään nyt vastaoletus, että millään kahdella solmulla ei ole sama aste. Koska solmujen lukumäärä n on sama kuin mahdollisten asteiden lukumäärä, tällöin jokainen mahdollinen aste joukosta $\{ 0, \ldots, n-1 \}$ esiintyy tasan yhdellä solmulla.

Erityisesti siis yhden solmun v aste on 0, eli solmu v ei ole minkään solmun naapuri.

Toisaalta yhden solmun w aste on $n-1$, eli solmu w on kaikkien muiden solmujen naapuri. Koska $n \geq 2$, niin $n-1 \neq 0$, joten v ja w eivät voi olla sama solmu. Siis solmu v on solmun w naapuri. Tämä on ristiriita sen kanssa, että solmu v ei ole minkään solmun naapuri. $\square$

6. Kuvaile sanallisesti seuraavat joukot:

   (a) $\{ 2n+1 \mid n \in \mathbb{N} \}$: parittomat luonnolliset luvut

   (b) $\{ ww^{\mathcal{R}} \mid w \in \{ 0, 1 \}^* \}$: parillisen mittaiset palindromit aakkostossa $\{ 0, 1 \}$

   (c) $\{ \mathrm{a}^n \mathrm{b}^n \mathrm{c}^n \mid n \in \mathbb{N} \}$: aakkoston $\{ \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \}$ merkkijonot, joissa a-merkit ovat ennen b-merkkejä ja b-merkit ennen c-merkkejä ja a-, b- ja c-merkkejä on sama määrä

   (d) $\{ u \in \Sigma^* \mid$ jollakin $v \in \Sigma^*$ pätee $uv = \texttt{abrakadabra} \}$, missä $\Sigma = \{ \texttt{a}, \ldots, \texttt{z} \}$: merkkijonon `abrakadabra` alkuosat (eli $\{ \varepsilon, \texttt{a}, \texttt{ab}, \texttt{abr}, \ldots, \texttt{abrakadabra} \}$).

7. Esitä tehtävän 1 tyylistä joukkomerkintää käyttäen seuraavat joukot:

   (a) aakkoston $\{ \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \}$ palindromit:

   $$\{ w \in \{ \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d} \}^* \mid w^{\mathcal{R}} = w \}$$

   (b) kolmella jaolliset luonnolliset luvut:

   $$\{ 3n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

   (c) aakkoston $\{ 0, 1 \}$ merkkijonot, joissa kaikki nollat ovat ennen ykkösiä:

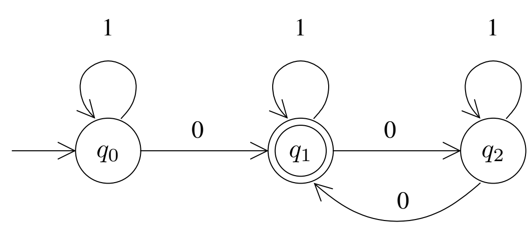
   $$\{ 0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N} \}$$

   (d) aakkoston $\{ \mathrm{a}, \mathrm{b} \}$ merkkijonot, jotka sisältävät osamerkkijonon bab:

   $$\{ u\mathrm{bab}v \mid u, v \in \{ \mathrm{a}, \mathrm{b} \}^* \}.$$

   Lisäksi (d)-kohdan kielen kymmenen ensimmäistä merkkijonoa leksikografisessa järjestyksessä: $\mathrm{bab}, \mathrm{abab}, \mathrm{baba}, \mathrm{babb}, \mathrm{bbab}, \mathrm{aabab}, \mathrm{ababa}, \mathrm{ababb}, \mathrm{abbab}, \mathrm{babaa}$

8. Automaatti tilakaaviona:



   Laskenta syötteellä 1010:

   $$q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_2.$$

   Tila q_2 ei ole hyväksyvä, joten automaatti hylkää syötteen.

Laskenta syötteellä 000111:

$$q_0 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{0} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_1.$$

Tila q_1 on hyväksyvä, joten automaatti hyväksyy syötteen.

Seuraamalla siirtymät tilasta q_0 syötteellä 0110 nähdään, että $\delta^*(q_0, 0110) = q_2$.

Automaatin tunnistama kieli koostuu binääriaakkoston merkkijonoista, joissa on pariton määrä nollia.

9. Binääriaakkostossa on korkeintaan 2-merkkisiä merkkijonoja 7 kappaletta: ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11. Näistä alkioista voidaan muodostaa $2^7 = 128$ joukkoa. Siis kieliä on kaikkiaan 128.

   Yleisemmin, olkoon Σ akkosto, jossa on $k \geq 2$ symbolia. Tasan m-merkkisiä aakkoston Σ merkkijonoja on k^m kappaletta. Siis korkeintaan n-merkkisiä merkkijonoja on $k^0 + k^1 + k^2 + \ldots + k^n = (k^{n+1} - 1)/(k-1)$. Korkeintaan n-merkkisistä merkkijonoista koostuvia kieliä on siis $2^{(k^{n+1}-1)/(k-1)}$.

   Erikoistapauksessa $|\Sigma| = 1$ korkeintaan n-merkkisiä merkkijonoja on $n+1$ ja siis kysytynlaisia kieliä 2^{n+1} kappaletta.

10. Kieli A on *rajoitettu*, jos sen merkkijonojen pituudet ovat ylhäältä rajoitettuja, ts. jollain luonnollisella luvulla $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $|w| \leq n$ kaikilla $w \in A$.

    Väite: Jos A ja B ovat rajoitettuja, niin myös $A \cup B$ on.

    Todistus: Olkoot A ja B rajoitettuja. Siis jollain $n_A \in \mathbb{N}$ pätee, että $|w| \leq n_A$ kun $w \in A$, ja jollain $n_B \in \mathbb{N}$ pätee, että $|w| \leq n_B$ kun $w \in B$. Valitaan esim. $n = \max\{\, n_A, n_B \,\}$. Jos $w \in A \cup B$, niin $w \in A$ tai $w \in B$, joten $|w| \leq n$. Siis $A \cup B$ on rajoitettu. $\Box$

    Väite: Jos A ja B ovat rajoitettuja, niin myös $A \cap B$ on.

    Todistus: Selvästi rajoitetun joukon osajoukot ovat rajoitettuja. Koska $A \cap B \subseteq A$ ja A on rajoitettu, niin myös $A \cap B$ on rajoitettu. $\Box$

    Väite: Kieli on rajoitettu, jos ja vain jos se on äärellinen.

    Todistus: Oletetaan ensin, että $A = \{\, w_1, \ldots, w_m \,\}$ on äärellinen kieli, missä $m = |A|$. Äärellisellä joukolla luonnollisia lukuja $\{\, |w_1|, \ldots, |w_m| \,\}$ on suurin alkio; olkoon se n. Selvästi $|w| \leq n$ kaikilla $w \in A$, joten A on rajoitettu.

    Oletetaan nyt, että A on rajoitettu. Olkoon n sellainen, että $|w| \leq n$ kaikilla $w \in A$. Siis $A \subseteq \Sigma^{\leq n}$, missä on merkitty

    $$\Sigma^{\leq n} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \ldots \cup \Sigma^n.$$

    Tehtävän 9 mukaan $|\Sigma^{\leq n}| \leq (k^{n+1} - 1)/(k-1)$, missä $k = |\Sigma|$. Koska $|A| \leq |\Sigma^{\leq k}|$, erityisesti A on äärellinen. $\Box$.