INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO

Título del trabajo

TESIS/TESINA/CASO

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
Maestrx en Ciencia de Datos

PRESENTA
Sara Luz Valenzuela Camacho

ASESORA
Edgar Francisco Román Rangel / Diego Jiménez Badillo

MÉXICO, D.F. 2026

"Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal de Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada **"Título de trabajo"**, otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la biblioteca Raúl Baillères Jr., autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación"

Estudiante

____

FECHA

____

FIRMA

Dedicatoria

Agradecimientos

Titulo del trabajo

Sara Luz Valenzuela Camacho

Prólogo

En esta tesina se estudian . . .. La estructura de este trabajo es el siguiente:

1. **Introducción**.

$\vdots$

n. **Conclusiones**.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Colocar aquí la justificación

porque usar redes en arqueología, proposito etc etc

El uso de redes en arqueología bla bla bla

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Capítulo 2

Definiciones

Colocar aquí las definiciones de grafos que vamos a necesitar, con ejemplos

- acyclic
- complete graph
- *minimum spannng tree*
- gabriel graph
- beta skeleton
- voronoi
- delaunay
- super-graph

Esto es un ejemplo de una cita [7].

Capítulo 3

Algoritmos

3.1. Desigualdad del Triángulo

3.2. Delaunay

3.3. Línea de Barrido

3.3.1. Conjunto de Intersecciones

3.3.2. El problema de los $n-$círculos

El problema de los $n-$círculos dice lo siguiente:

> Dado un conjunto C de n círculos y un conjunto P de m puntos, encontrar todos los círculos en C que están vacíos.

El algoritmo explicado en esta sección está tomado del artículo de 2001 de Rao y Mukhopadhyay [4].

Datos del ejemplo

Para definir a los n círculos, vamos a usar la notación $c : ((h, k), r)$, donde las coordenadas de su centro son (h, k), y su radio r, tal que

$$c_{limit} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \tag{3.1}$$

$$c_{fill} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2 \tag{3.2}$$

$$c = c_{limit} \cup c_{fill} \tag{3.3}$$

Para nuestro ejemplo tenemos 16 círculos y 6 puntos de entrada mostrados en la figura 3.1, cuyos datos se muestran en la siguiente tabla:

Círculos	**Puntos**
$c_1 : ((9.5, 30.5), 3.5)$	$p_1 = (14, 30.5)$
$c_2 : ((11, 30.5), 3.5)$	$p_2 = (9, 17)$
$c_3 : ((18, 24), 5)$	$p_3 = (18, 20)$
$c_4 : ((4, 23), 3)$	$p_4 = (28, 18)$
$c_5 : ((4, 17), 4)$	$p_5 = (11, 5)$
$c_6 : ((7, 17), 4.5)$	
$c_7 : ((12.5, 17), 3)$	
$c_8 : ((18, 15), 6)$	
$c_9 : ((27, 19), 3)$	
$c_{10} : ((30, 17), 3)$	
$c_{11} : ((4, 11), 3)$	
$c_{12} : ((12, 9), 2)$	
$c_{13} : ((16, 9), 3)$	
$c_{14} : ((6, 4), 3)$	
$c_{15} : ((7.5, 4), 2.5)$	
$c_{16} : ((18, 5), 5)$	

Cuadro 3.1: Datos de círculos y puntos

Inicialización

Para nuestro caso los conjuntos C y P son:

$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\} \tag{3.4}$$

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\} \tag{3.5}$$

Definición 1. *El estado de línea de barrido $\mathcal{L}$ es un ordenamiento del conjunto de regiones Θ que atraviesa la línea vertical $x = a$. En donde, para dos regiones $r_i \in \Theta$ y $r_j \in \Theta$, se dice que $r_i <_a r_j$ si la intersección de la región r_i con la línea vertical $x = a$ está por debajo de la intersección de la región r_j con esa misma línea.*

La figura 3.2 muestra las 35 zonas en las que los 16 círculos dividen $\mathbb{R}^2$, cabe notar que la región r_1 se compone de la siguiente manera:

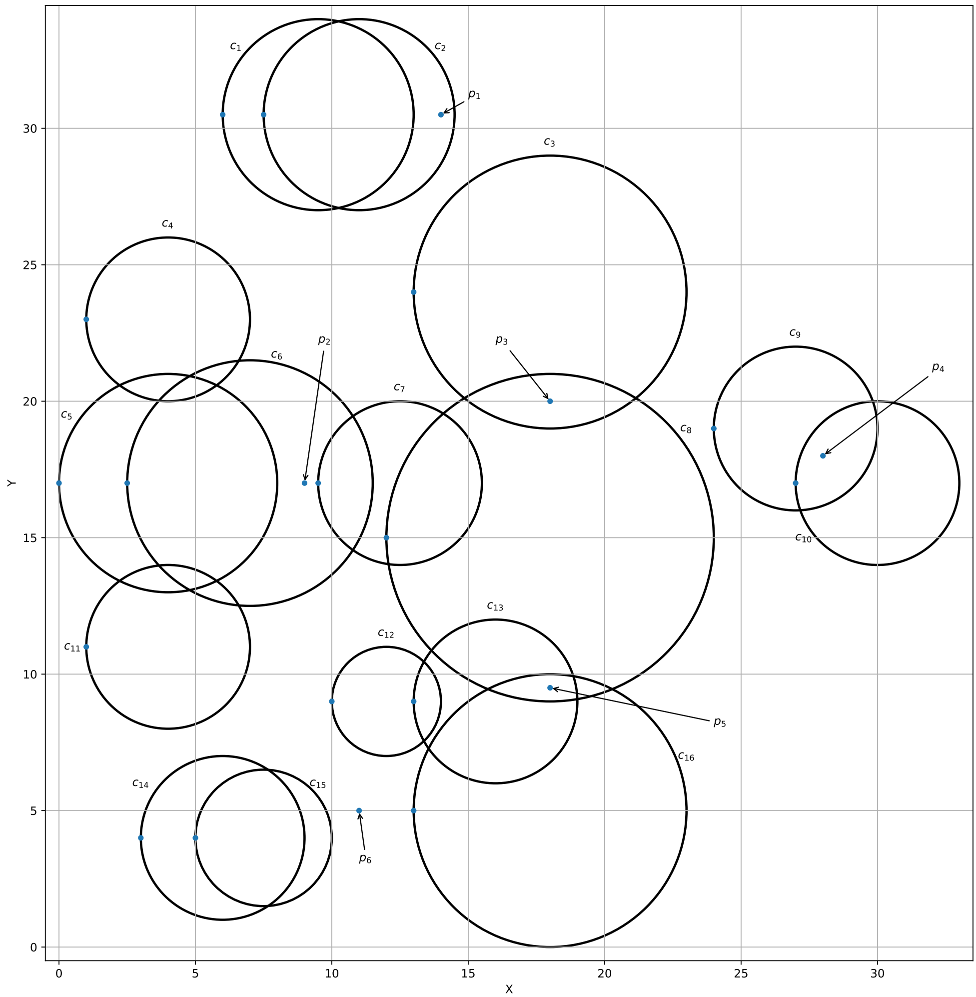

Figura 3.1: Datos del ejemplo del problema de los $n-$círculos

circles_da

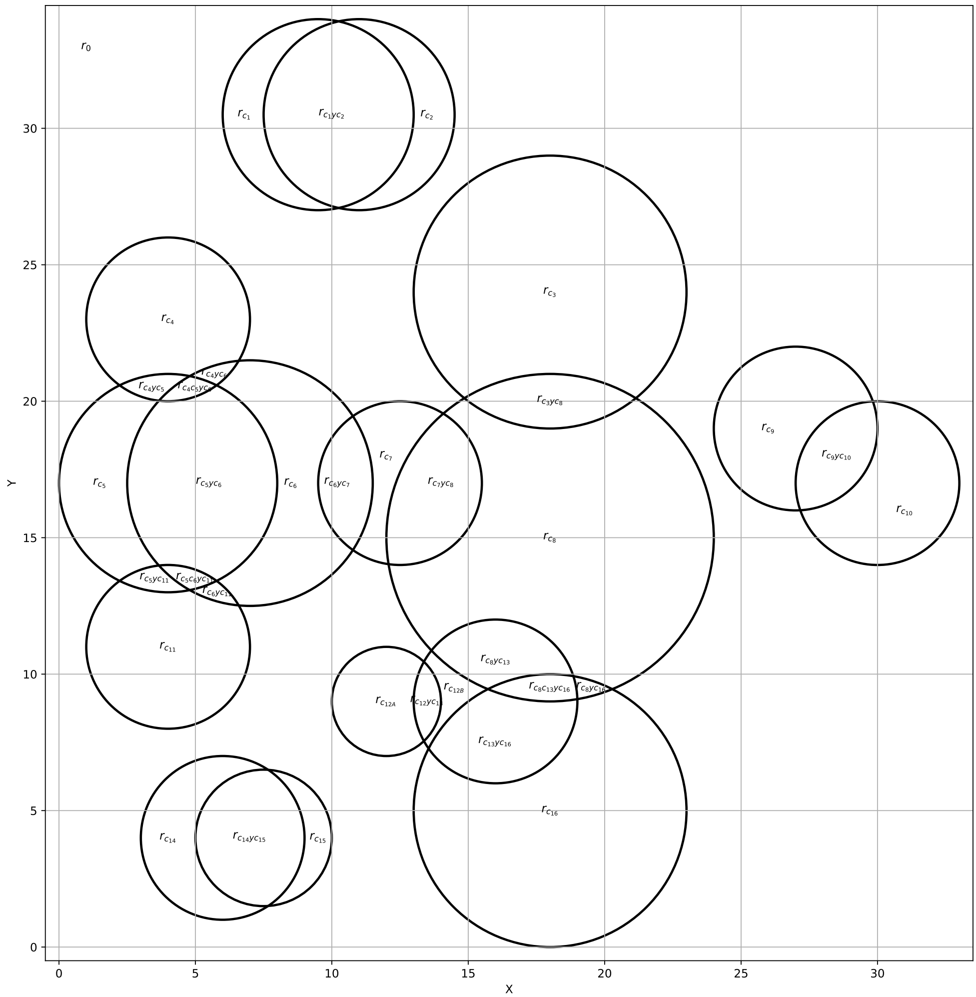

Figura 3.2: Regiones en las que los 16 círculos dividen a $\mathbb{R}^2$

circles_re

$$r_0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \notin c_{fill}, c \in C \tag{3.6}$$

Definición 2. *Para cada región $r_i \in \mathcal{L}$, llamamos C_{r_i} al conjunto de círculos activos que contienen esa región.*

Por definición, para nuestro ejemplo: $C_{r_1} = \emptyset$.

Definición 3. *Un punto de evento q puede ser:*

- *un punto de entrada (p_j)*
- *un punto de intersección entre dos círculos ($p_{int-a_{i,k}}, p_{int-b_{i,k}}$)*
- *el punto más a la izquierda de un círculo (nos referiremos a ellos como puntos izquierdos, p_{izq-c_i})*
- *el punto más a la derecha de un círculo (nos referiremos a ellos como puntos derechos, p_{der-c_i})*

Estos eventos se mantienen en una fila de prioridad Q que se inicializa con los puntos izquierdos y con los puntos de entrada.

Con las definiciones anteriores, podemos inferir que para todo $x < p$, donde p es el primer punto en Q,

$$\mathcal{L} = r_1 \tag{3.7}$$

Para nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned}
\text{Puntos de entrada} &= P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\} \\
\text{Puntos de intersección} &= \{p_{int-a_{1,2}}, p_{int-b_{1,2}}, p_{int-a_{4,5}}, p_{int-b_{4,5}}, p_{int-a_{4,6}}, p_{int-b_{4,6}}, \\
&\quad p_{int-a_{3,8}}, p_{int-b_{3,8}}, p_{int-a_{5,6}}, p_{int-b_{5,6}}, p_{int-a_{5,11}}, p_{int-b_{5,11}}, \\
&\quad p_{int-a_{6,7}}, p_{int-b_{6,7}}, p_{int-a_{7,8}}, p_{int-b_{7,8}}, p_{int-a_{8,13}}, p_{int-b_{8,13}}, \\
&\quad p_{int-a_{8,16}}, p_{int-b_{8,16}}, p_{int-a_{9,10}}, p_{int-b_{9,10}}, p_{int-a_{12,13}}, p_{int-b_{12,13}}, \\
&\quad p_{int-a_{14,15}}, p_{int-b_{14,15}}, \} \\
\text{Puntos izquierdos} &= \{p_{izq-c_1}, p_{izq-c_2}, p_{izq-c_3}, p_{izq-c_4}, p_{izq-c_5}, p_{izq-c_6}, p_{izq-c_7}, \\
&\quad p_{izq-c_8}, p_{izq-c_9}, p_{izq-c_{10}}, p_{izq-c_{11}}, p_{izq-c_{12}}, p_{izq-c_{13}}, p_{izq-c_{14}}, \\
&\quad p_{izq-c_{15}}, p_{izq-c_{16}}\} \\
\text{Puntos derechos} &= \{p_{der-c_1}, p_{der-c_2}, p_{der-c_3}, p_{der-c_4}, p_{der-c_5}, p_{der-c_6}, p_{der-c_7}, \\
&\quad p_{der-c_8}, p_{der-c_9}, p_{der-c_{10}}, p_{der-c_{11}}, p_{der-c_{12}}, p_{der-c_{13}}, p_{der-c_{14}}, \\
&\quad p_{der-c_{15}}, p_{der-c_{16}}\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

La figura 3.1 muestra los puntos de entrada; la figura 3.3 muestra los puntos izquierdos y derechos, y la figura 3.4 muestra los puntos de intersección. Usando esta notación podemos construir Q

$$\begin{aligned}
Q &= (\text{Puntos izquierdos} \cup \text{Puntos de entrada})_{ordenados} \\
&= \big(\{p_{izq-c_1}, p_{izq-c_2}, p_{izq-c_3}, p_{izq-c_4}, p_{izq-c_5}, p_{izq-c_6}, p_{izq-c_7}, p_{izq-c_8}, p_{izq-c_9}, p_{izq-c_{10}}, \\
&\qquad p_{izq-c_{11}}, p_{izq-c_{12}}, p_{izq-c_{13}}, p_{izq-c_{14}}, p_{izq-c_{15}}, p_{izq-c_{16}}\} \cup \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}\big)_{\text{ordenados}} \\
&= \big(\{p_{izq-c_1}, p_{izq-c_2}, p_{izq-c_3}, p_{izq-c_4}, p_{izq-c_5}, p_{izq-c_6}, p_{izq-c_7}, p_{izq-c_8}, p_{izq-c_9}, p_{izq-c_{10}}, \\
&\qquad p_{izq-c_{11}}, p_{izq-c_{12}}, p_{izq-c_{13}}, p_{izq-c_{14}}, p_{izq-c_{15}}, p_{izq-c_{16}}, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}\big)_{\text{ordenados}} \\
&= \{p_{izq-c_5}, p_{izq-c_{11}}, p_{izq-c_4}, p_{izq-c_6}, p_{izq-c_{14}}, p_{izq-c_{15}}, p_{izq-c_1}, p_{izq-c_2}, p_2, p_{izq-c_7}, \\
&\qquad p_{izq-c_{12}}, p_6, p_{izq-c_8}, p_{izq-c_{16}}, p_{izq-c_{13}}, p_{izq-c_3}, p_1, p_5, p_3, p_{izq-c_9}, p_{izq-c_{10}}, p_4\}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Definición 4. *Se dice que un círculo c está activo si se encuentra vacío, o si aún no se ha detectado ningún testigo, esto es, un punto de entrada dentro del círculo.*

Al conjunto de círculos activos lo denotamos por A_c.

Al inicio $A_c = C$, conforme evaluemos a los puntos de entrada éste conjunto se irá "podando".

Desarrollo

Antes de iniciar, nuestros valores son los siguientes:

$$\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), \\
&(5, 4, \text{izq}, c_{15}), (6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), \\
&(10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), \\
&(13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1), (18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), \\
&(27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\} \\
A_c = C &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\} \\
\mathcal{L} &= \{r_0\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

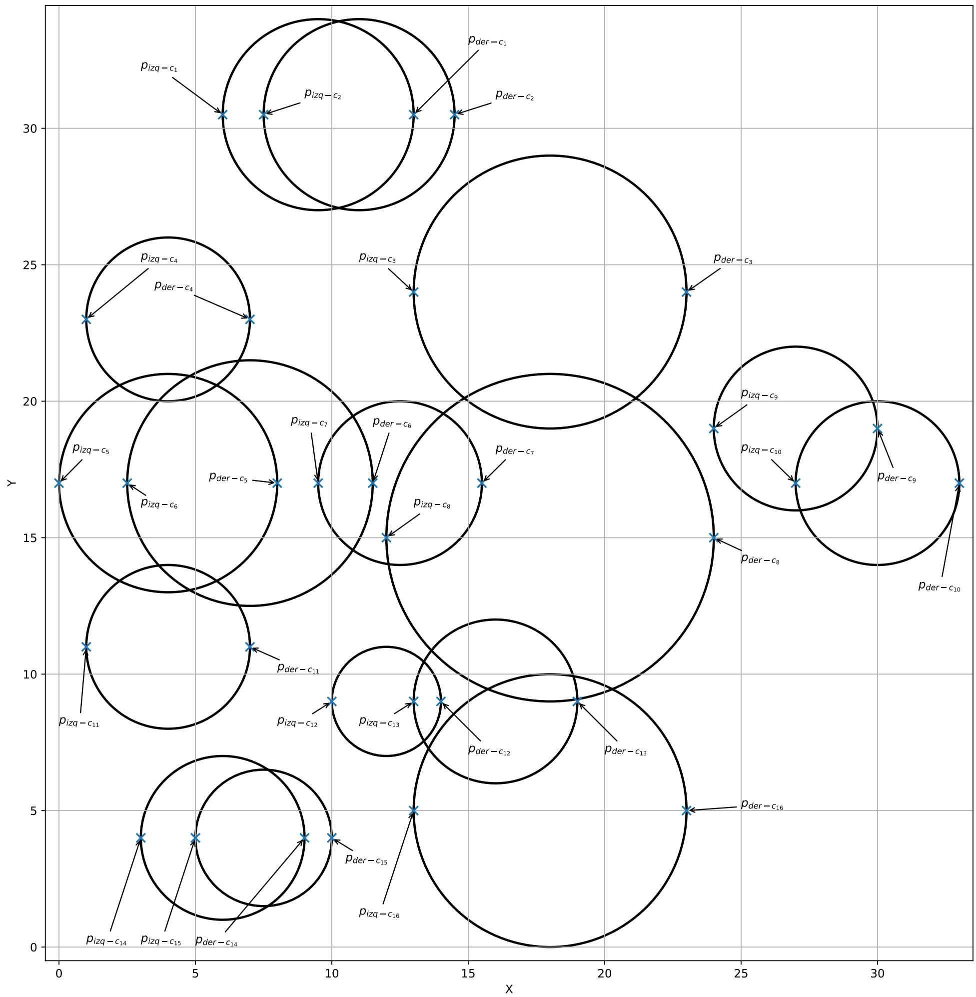

Figura 3.3: Puntos izquierdos y derechos

circles_iz

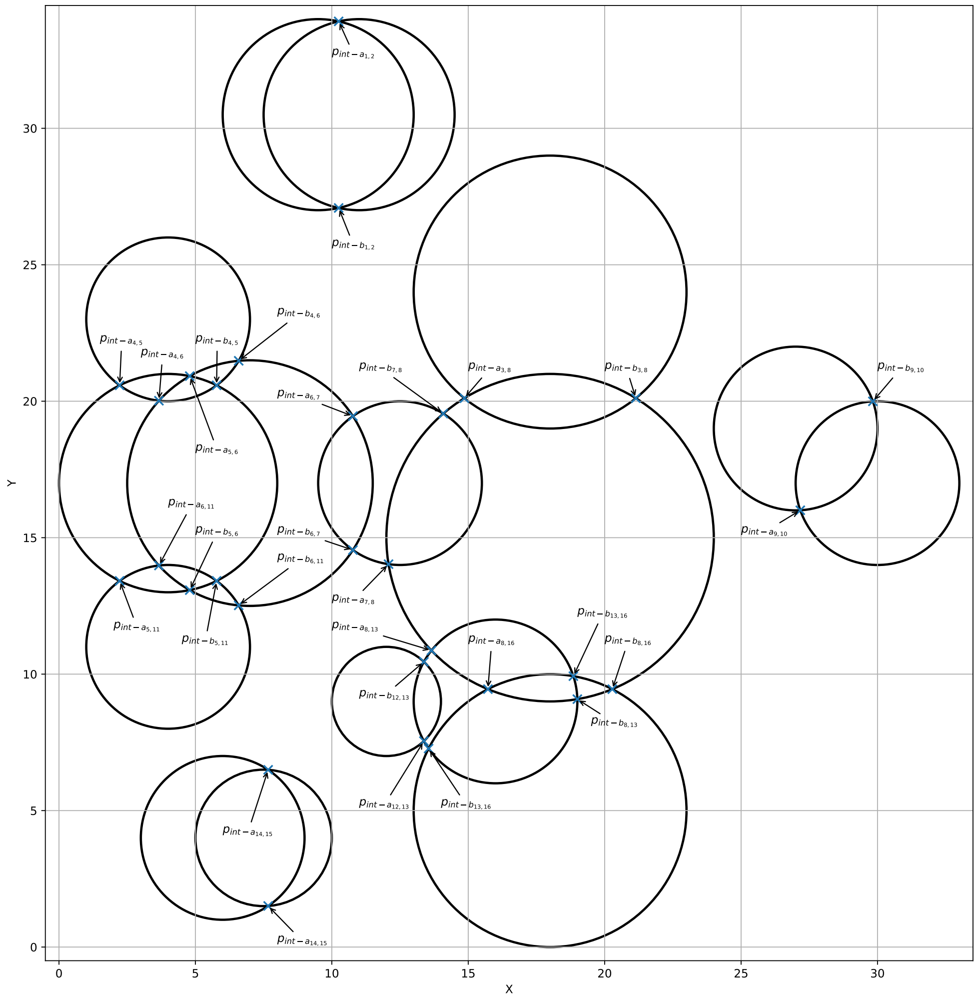

Figura 3.4: Puntos de intersección

circles_in

Paso 1: x = 0, Algoritmo de punto izquierdo

1. $(0, 17, \text{izq}, c_5)$
   a) Sea $e \in Q$ el punto izquierdo del círculo c_5
      - $e = (0, 17, \text{izq}, c_5)$
   b) Incertar en Q el punto derecho del círculo c_5
      - $Q = Q \cup \{(8, 17, \text{der}, c_5)\}$
   c) $r =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e
      - $\mathcal{L} = \{r_0\} \Rightarrow r = r_0$
   d) $r_{up} =$ la región arriba de c de r
      - $r_{up} = r_0$
   e) $r_{middle} =$ la región en c de r
      - $r_{middle} = r_{c5}$
   f) $r_{down} =$ la región debajo de c de r
      - $r_{down} = r_0$
   g) Quitar $r = r_0$ de $\mathcal{L}$.
      - $\mathcal{L} = \emptyset$
   h) Insertar r_{up}, r_{middle}, r_{down} en $\mathcal{L}$
      - $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup \{r_0, r_{c_5}, r_0\}$
   i) $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r$
      - $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r = \emptyset$
   j) $C_{r_{middle}} = C_r \cup \{c_5\}$
      - $C_{r_{middle}} = \emptyset \cup \{c_5\} = \{c_5\}$
   k) Si c_5 intersecta el arco circular que limita por arriba a r_{up}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - No aplica
   l) Si c_5 intersecta el arco circular que limita por abajo a r_{down}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - No aplica
   m) Fin

Al final del Paso 1 tenemos:

$$\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}),\\
&(5, 4, \text{izq}, c_{15}), (6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5), (9, 17, \text{ent}, p_2),\\
&(9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}),\\
&(13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1), (18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3),\\
&(24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_5}, r_0\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Paso 2: $x = 1$, Algoritmo de punto izquierdo

1. $(1, 11, \text{izq}, c_{11})$

   a) Sea $e \in Q$ el punto izquierdo del círculo c_{11}
      - $e = (1, 11, \text{izq}, c_{11})$

   b) Incertar en Q el punto derecho del círculo c_{11}
      - $Q = Q \cup \{(7, 11, \text{der}, c_{11})\}$

   c) $r =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e
      - $\mathcal{L} = \{r_{0_1}, r_{c_5}, r_{0_2}\} \Rightarrow r = r_{0_1}$

   d) $r_{up} =$ la región arriba de c de r
      - $r_{up} = r_0$

   e) $r_{middle} =$ la región en c de r
      - $r_{middle} = r_{c_{11}}$

   f) $r_{down} =$ la región debajo de c de r
      - $r_{down} = r_0$

   g) Quitar $r = r_{0_1}$ de $\mathcal{L}$.
      - $\mathcal{L} = \{r_{c_5}, r_{0_2}\}$

   h) Insertar r_{up}, r_{middle}, r_{down} en $\mathcal{L}$
      - $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup \{r_0, r_{c_{11}}, r_0\} = \{r_0, r_{c_{11}}, r_0, r_{c_5}, r_0\}$

   i) $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r$
      - $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r = \emptyset$

   j) $C_{r_{middle}} = C_r \cup \{c_{11}\}$
      - $C_{r_{middle}} = \emptyset \cup \{c_{11}\} = \{c_{11}\}$

   k) Si c_{11} intersecta el arco circular que limita por arriba a r_{up}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - c_{11} intersecta a c_5
      - $Q = Q \cup \{(2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11})\}$

   l) Si c_{11} intersecta el arco circular que limita por abajo a r_{down}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - No aplica

   m) Fin

   Al final tenemos:

$$
\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (2.5, 17, \text{izq}, c_6), \\
&(3, 4, \text{izq}, c_{14}), (5, 4, \text{izq}, c_{15}), (6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_11), (7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), \\
&(8, 17, \text{der}, c_5), (9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6), \\
&(12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1), \\
&(18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\} \\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\} \\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_{11}}, r_0, r_{c_5}, r_0\}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

2. $(1, 23, \text{izq}, c_4)$

   a) Sea $e \in Q$ el punto izquierdo del círculo c_4
      - $e = (1, 23, \text{izq}, c_4)$

   b) Incertar en Q el punto derecho del círculo c_4
      - $Q = Q \cup \{(7, 23, \text{der}, c_4)\}$

   c) $r =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e
      - $\mathcal{L} = \{r_0, r_{c_{11}}, r_0, r_{c_5}, r_{0_e}\} \Rightarrow r = r_{0_e}$

   d) $r_{up} =$ la región arriba de c de r
      - $r_{up} = r_0$

   e) $r_{middle} =$ la región en c de r
      - $r_{middle} = r_{c_4}$

   f) $r_{down} =$ la región debajo de c de r
      - $r_{down} = r_0$

   g) Quitar $r = r_{0_e}$ de $\mathcal{L}$.
      - $\mathcal{L} = \{r_0, r_{c_{11}}, r_0, r_{c_5}\}$

   h) Insertar r_{up}, r_{middle}, r_{down} en $\mathcal{L}$
      - $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup \{r_0, r_{c_4}, r_0\} = \{r_0, r_{c_{11}}, r_0, r_{c_5}, r_0, r_{c_4}, r_0\}$

   i) $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r$
      - $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r = \emptyset$

   j) $C_{r_{middle}} = C_r \cup \{c_4\}$
      - $C_{r_{middle}} = \emptyset \cup \{c_4\} = \{c_4\}$

   k) Si c_4 intersecta el arco circular que limita por arriba a r_{up}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - No aplica

   l) Si c_4 intersecta el arco circular que limita por abajo a r_{down}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - c_{11} intersecta a c_5
      - $Q = Q \cup \{(2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5})\}$

   m) Fin

Al final del Paso 2 tenemos:

$$\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}),\\
&(2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}), (2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (5, 4, \text{izq}, c_{15}), (6, 30.5, \text{izq}, c_1),\\
&(7, 11, \text{der}, c_1 1), (7, 23, \text{der}, c_4), (7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5), (9, 17, \text{ent}, p_2),\\
&(9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}),\\
&(13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1), (18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3),\\
&(24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_{11}}, r_0, r_{c_5}, r_0, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Paso 3: $x = 2.2224$, Algoritmo de punto de intersección

1. $(2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11})$

    a) Sea e el punto de intersección entre los círculos c_{11} y c_5.
      - $e = (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11})$

    b) $r_i =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e en el límite, para $i = c_5, 0, c_{11}$, en orden de arriba a abajo.

    c) Los arcos que limitan a la región r_0 cambian: El arco del círculo c_{11} que limitaba a r_0 por abajo ahora lo limita por arriba, y el arco del círculo c_5 que limitaba a r_0 por arriba, ahora lo limita por abajo.

    d) $C'_{r_0} = C_{r_0} - \{c_5, c_{11}\} = \emptyset - \{c_5, c_{11}\} = \emptyset$

    e) Si $r_{c_5 y c_{11}} \in c_5$ then $C'_{r_0} \cup \{c_5\}$
      - $C''_{r_0} = \emptyset \cup \{c_5\} = \{c_5\}$

    f) Si $r_{c_5 y c_{11}} \in c_{11}$ then $C''_{r_0} \cup \{c_{11}\}$
      - $C'''_{r_0} = \{c_5\} \cup \{c_{11}\} = \{c_5, c_{11}\} = C_{r_{c_5 y c_{11}}}$
      - se sustituye r_0 en $\mathcal{L}$ por $r_{c_5 y c_{11}}$

    g) Si los arcos que limitan a la región $r_{c_{11}}$ intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.
      - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_{11}$ es (7,11), que ya se encuentra dentro de Q.

    h) Si los arcos que limitan a la región r_{c_5} intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.
      - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_5$ es (8,17), que ya se encuentra dentro de Q.

Al final tenemos:

$$
\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}),\\
&(2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}), (2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (5, 4, \text{izq}, c_{15}),\\
&(6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_1 1), (7, 23, \text{der}, c_4), (7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5),\\
&(9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6), (12, 15, \text{izq}, c_8),\\
&(13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1), (18, 9.5, \text{ent}, p_5),\\
&(18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} &= \{r_0, r_{c_{11}}, r_{c_5 y c_{11}}, r_{c_5}, r_0, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

2. $(2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5})$

   a) Sea e el punto de intersección entre los círculos c_4 y c_5.

   - $e = (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11})$

   b) $r_i =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e en el límite, para $i = c_4, 0, c_5$, en orden de arriba a abajo.

   c) Los arcos que limitan a la región r_0 cambian: El arco del círculo c_5 que limitaba a r_0 por abajo ahora lo limita por arriba, y el arco del círculo c_4 que limitaba a r_0 por arriba, ahora lo limita por abajo.

   d) $C'_{r_0} = C_{r_0} - \{c_4, c_5\} = \emptyset - \{c_4, c_5\} = \emptyset$

   e) Si $r_{c_4 y c_5} \in c_4$ then $C'_{r_0} \cup \{c_4\}$

   - $C''_{r_0} = \emptyset \cup \{c_4\} = \{c_4\}$

   f) Si $r_{c_4 y c_5} \in c_5$ then $C''_{r_0} \cup \{c_5\}$

   - $C'''_{r_0} = \{c_4\} \cup \{c_5\} = \{c_4, c_5\} = C_{r_{c_4 y c_5}}$
   - se sustituye r_0 en $\mathcal{L}$ por $r_{c_4 y c_5}$

   g) Si los arcos que limitan a la región r_{c_5} intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.

   - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_5$ es (8,17), que ya se encuentra dentro de Q.

   h) Si los arcos que limitan a la región r_{c_4} intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.

   - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_4$ es (7,23), que ya se encuentra dentro de Q.

Al final del Paso 3 tenemos:

$$\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}),\\
&(2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}), (2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (5, 4, \text{izq}, c_{15}),\\
&(6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_1 1), (7, 23, \text{der}, c_4), (7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5),\\
&(9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6), (12, 15, \text{izq}, c_8),\\
&(13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1), (18, 9.5, \text{ent}, p_5),\\
&(18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} &= \{r_0, r_{c_{11}}, r_{c_5 y c_{11}}, r_{c_5}, r_{c_4 y c_5}, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Paso 4: x = 2.5, Algoritmo de punto izquierdo

1. $(2.5, 17, \text{izq}, c_6)$
   a) Sea $e \in Q$ el punto izquierdo del círculo c_6
      - $e = (2.5, 17, \text{izq}, c_6)$
   b) Incertar en Q el punto derecho del círculo c_6
      - $Q = Q \cup \{(11.5, 17, \text{der}, c_6)\}$
   c) $r =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e
      - $\mathcal{L} = \{r_0, r_{c_{11}}, r_{c_5 y c_{11}}, r_{c_5}, r_0, r_{c_4}, r_0\} \Rightarrow r = r_{c_5}$
   d) $r_{up} =$ la región arriba de c de r
      - $r_{up} = r_{c_5}$
   e) $r_{middle} =$ la región en c de r
      - $r_{middle} = r_{c_5 y c_6}$
   f) $r_{down} =$ la región debajo de c de r
      - $r_{down} = r_{c_5}$
   g) Quitar $r = r_{c_5}$ de $\mathcal{L}$.
      - $\mathcal{L} - r_{c_5} = \{r_0, r_{c_{11}}, r_{c_5 y c_{11}}, r_0, r_{c_4}, r_0\}$
   h) Insertar r_{up}, r_{middle}, r_{down} en $\mathcal{L}$
      - $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup \{r_{c_5}, r_{c_5 y c_6}, r_{c_5}\}$
   i) $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r$
      - $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r = \{c_5\}$
   j) $C_{r_{middle}} = C_r \cup \{c_6\}$
      - $C_{r_{middle}} = \{c_5\} \cup \{c_6\} = \{c_5, c_6\}$
   k) Si c_6 intersecta el arco circular que limita por arriba a r_{up}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - c_6 intersecta a c_4
      - $Q = Q \cup \{(3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6})\}$
   l) Si c_6 intersecta el arco circular que limita por abajo a r_{down}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - c_6 intersecta a $c_1 1$
      - $Q = Q \cup \{(3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11})\}$
   m) Fin

Al final del Paso 4 tenemos:

$$
\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}),\\
&(2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11}), (3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6}), (5, 4, \text{izq}, c_{15}),\\
&(6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_{11}), (7, 23, \text{der}, c_4),\\
&(7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5), (9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6),\\
&(11.5, 17, \text{der}, c_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1),\\
&(18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_{11}}, r_{c_5 y c_{11}}, r_{c_5}, r_{c_5 y c_6}, r_{c_5}, r_{c_4 y c_5}, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Paso 5: x = 3, Algoritmo de punto izquierdo

1. $(3, 4, \text{izq}, c_{14})$
   a) Sea $e \in Q$ el punto izquierdo del círculo c_{14}
      - $e = (3, 4, \text{izq}, c_{14})$
   b) Incertar en Q el punto derecho del círculo c_14
      - $Q = Q \cup \{(9, 4, \text{der}, c_{14})\}$
   c) $r =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e
      - $\mathcal{L} = \{r_0, r_{c_{11}}, r_{c_5yc_{11}}, r_{c_5}, r_{c_5yc_6}, r_{c_5}, r_0, r_{c_4}, r_0\} \Rightarrow r = r_0$
   d) $r_{up} =$ la región arriba de c de r
      - $r_{up} = r_0$
   e) $r_{middle} =$ la región en c de r
      - $r_{middle} = r_{c_{14}}$
   f) $r_{down} =$ la región debajo de c de r
      - $r_{down} = r_0$
   g) Quitar $r = r_0$ de $\mathcal{L}$.
      - $\mathcal{L} - r_0 = \{r_{c_{11}}, r_{c_5yc_{11}}, r_{c_5}, r_{c_5yc_6}, r_{c_5}, r_0, r_{c_4}, r_0\}$
   h) Insertar r_{up}, r_{middle}, r_{down} en $\mathcal{L}$
      - $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup \{r_0, r_{c_{14}}, r_0\}$
   i) $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r$
      - $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r = \{0\}$
   j) $C_{r_{middle}} = C_r \cup \{c_{14}\}$
      - $C_{r_{middle}} = \emptyset \cup \{c_{14}\} = \{c_{14}\}$
   k) Si c_{14} intersecta el arco circular que limita por arriba a r_{up}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - No aplica
   l) Si c_14 intersecta el arco circular que limita por abajo a r_{down}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - No aplica
   m) Fin

Al final del Paso 5 tenemos:

$$\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}),\\
&(2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11}), (3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6}), (5, 4, \text{izq}, c_{15}),\\
&(6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_{11}), (7, 23, \text{der}, c_4),\\
&(7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5), (9, 4, \text{der}, c_{14}), (9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6),\\
&(11.5, 17, \text{der}, c_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1),\\
&(18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_{14}}, r_0, r_{c_{11}}, r_{c_5yc_{11}}, r_{c_5}, r_{c_5yc_6}, r_{c_5}, r_{c_4yc_5}, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Paso 6: $x = 3.6630$, Algoritmo de punto de intersección

1. $(3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11})$

   a) Sea e el punto de intersección entre los círculos c_6 y c_{11}.

   - $e = (3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11})$

   b) r_i = la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e en el límite, para $i = c_5yc_6, c_5, c_5yc_{11}$, en orden de arriba a abajo.

   c) Los arcos que limitan a la región r_{c_5} cambian: El arco del círculo c_{11} que limitaba a r_{c_5} por abajo ahora lo limita por arriba, y el arco del círculo c_6 que limitaba a r_0 por arriba, ahora lo limita por abajo.

   d) $C'_{r_{c_5}} = C_{r_{c_5}} - \{c_6, c_{11}\} = \{c_5\} - \{c_6, c_{11}\} = \{c_5\}$

   e) Si $r_{c_5 c_6 y c_{11}} \in c_6$ then $C'_{r_{c_5}} \cup \{c_6\}$

   - $C''_{r_0} = \{c_5\} \cup \{c_6\} = \{c_6\}$

   f) Si $r_{c_5 c_6 y c_{11}} \in c_{11}$ then $C''_{r_{c_5}} \cup \{c_{11}\}$

   - $C'''_{r_0} = \{c_5, c_6\} \cup \{c_{11}\} = \{c_5, c_6, c_{11}\} = C_{r_{c_5 c_6 y c_{11}}}$
   - se sustituye r_{c_5} en $\mathcal{L}$ por $r_{c_5 c_6 y c_{11}}$

   g) Si los arcos que limitan a la región $r_{c_5 y c_6}$ intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.

   - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_5 \cap c_6$ es (8,17), que ya se encuentra dentro de Q.

   h) Si los arcos que limitan a la región $r_{c_5 y c_{11}}$ intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.

   - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_5 \cap c_{11}$ y en el límite de la región c_6 es (4.7917, 13.0791), se agrega $(4.7917, 13.0791, \text{int}, c_{5y6})$ a Q.

Al final tenemos:

$$
\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}),\\
&(2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11}), (3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6}), (4.7917, 13.0791, \text{int}, c\\
&(6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_{11}), (7, 23, \text{der}, c_4),\\
&(7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5), (9, 4, \text{der}, c_{14}), (9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6)\\
&(11.5, 17, \text{der}, c_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1),\\
&(18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_{14}}, r_0, r_{c_{11}}, r_{c_5 y c_{11}}, r_{c_5 c_6 y c_{11}}, r_{c_5 y c_6}, r_{c_5}, r_{c_4 y c_5}, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

2. $(3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6})$

   a) Sea e el punto de intersección entre los círculos c_4 y c_6.
      - $e = (3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6})$

   b) $r_i =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e en el límite, para $i = c_4 y c_5, c_5, c_5 y c_6$, en orden de arriba a abajo.

   c) Los arcos que limitan a la región r_{c_5} cambian: El arco del círculo c_6 que limitaba a r_{c_5} por abajo ahora lo limita por arriba, y el arco del círculo c_4 que limitaba a r_{c_5} por arriba, ahora lo limita por abajo.

   d) $C'_{r_{c_5}} = C_{r_{c_5}} - \{c_4, c_6\} = \{c_5\} - \{c_4, c_6\} = \{c_5\}$

   e) Si $r_{c_4 c_5 y c_6} \in c_4$ then $C'_{r_{c_5}} \cup \{c_4\}$
      - $C''_{r_{c_5}} = \{c_5\} \cup \{c_4\} = \{c_4, c_5\}$

   f) Si $r_{c_4 c_5 y c_6} \in c_6$ then $C''_{r_{c_5}} \cup \{c_6\}$
      - $C'''_{r_{c_5}} = \{c_4, c_5\} \cup \{c_6\} = \{c_4, c_5, c_6\} = C_{r_{c_4 c_5 y c_6}}$
      - se sustituye r_{c_5} en $\mathcal{L}$ por $r_{c_4 c_5 y c_6}$

   g) Si los arcos que limitan a la región $r_{c_4 y c_5}$ intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.
      - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_4 \cap c_5$ y en el límite de la región c_6 es (4.7917, 20.9209), se agrega $(4.7917, 20.9209, \text{int}, c_{5y6})$ a Q.

   h) Si los arcos que limitan a la región $r_{c_5 y c_6}$ intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.
      - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_5 \cap c_6$ es (8,17), que ya se encuentra dentro de Q.

Al final del Paso 6 tenemos:

$$
\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}),\\
&(2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11}), (3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6}), (4.7917, 13.0791, \text{int}, c_5\\
&(6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_{11}), (7, 23, \text{der}, c_4),\\
&(7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5), (9, 4, \text{der}, c_{14}), (9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6)\\
&(11.5, 17, \text{der}, c_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1),\\
&(18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_{14}}, r_0, r_{c_{11}}, r_{c_5 y c_{11}}, r_{c_5 c_6 y c_{11}}, r_{c_5 y c_6}, r_{c_4 c_5 y c_6}, r_{c_4 y c_5}, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Paso 7: $x = 4.7917$, Algoritmo de punto de intersección

1. $(4.7917, 13.0791, \text{int}, c_{5y6})$

   a) Sea e el punto de intersección entre los círculos c_5 y c_6.

   - $e = (4.7917, 13.0791, \text{int}, c_{5y6})$

   b) $r_i =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e en el límite, para $i = c_5 c_6 y c_{11}, c_5 y c_{11}, c_{11}$, en orden de arriba a abajo.

   c) Los arcos que limitan a la región $r_{c_5 y c_{11}}$ cambian: El arco del círculo c_5 que limitaba a $r_{c_5 y c_{11}}$ por abajo ahora lo limita por arriba, y el arco del círculo c_6 que limitaba a $r_{c_5 y c_{11}}$ por arriba, ahora lo limita por abajo.

   d) $C'_{r_{c_5 y c_{11}}} = C_{r_{c_5 y c_{11}}} - \{c_5, c_6\} = \{c_5, c_{11}\} - \{c_5, c_6\} = \{c_{11}\}$

   e) Si $r_{c_4 y c_6} \in c_5$ then $C'_{r_{c_5 y c_{11}}} \cup \{c_5\}$

   - $C''_{r_{c_5 y c_{11}}} = \{c_1 1\}$

   f) Si $r_{c_4 y c_6} \in c_6$ then $C''_{r_{c_5 y c_{11}}} \cup \{c_6\}$

   - $C'''_{r_{c_5 y c_{11}}} = \{c_{11}\} \cup \{c_6\} = \{c_{11}, c_6\} = C_{r_{c_{11} y c_6}}$
   - se sustituye $r_{c_5 y c_{11}}$ en $\mathcal{L}$ por $r_{c_{11} y c_6}$

   g) Si los arcos que limitan a la región $r_{c_5 c_6 y c_{11}}$ intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.

   - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_5 \cap c_6 \cap c_{11}$ es (5.7776, 13.4167), se agrega $(5.7776, 13.4167, \text{int}, c_{5y11})$ a Q.

   h) Si los arcos que limitan a la región $r_{c_{11}}$ intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.

   - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_{11}$ es (7,11), que ya se encuentra dentro de Q.

Al final tenemos:

$$
\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}),\\
&(2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11}), (3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6}), (4.7917, 13.0791, \text{int}, c_5\\
&(5.7776, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_{11}), (7, 23, \text{der}, c_4),\\
&(7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5), (9, 4, \text{der}, c_{14}), (9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6)\\
&(11.5, 17, \text{der}, c_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1),\\
&(18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_{14}}, r_0, r_{c_{11}}, r_{c_6 y c_{11}}, r_{c_5 c_6 y c_{11}}, r_{c_5 y c_6}, r_{c_5}, r_{c_4 y c_5}, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

2. $(4.7917, 20.9209, \text{int}, c_{5y6})$

   a) Sea e el punto de intersección entre los círculos c_5 y c_6.
      - $e = (4.7917, 20.9209, \text{int}, c_{5y6})$

   b) r_i = la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e en el límite, para $i = c_4, c_4yc_5, c_4c_5yc_6$, en orden de arriba a abajo.

   c) Los arcos que limitan a la región $r_{c_4yc_5}$ cambian: El arco del círculo c_6 que limitaba a $r_{c_4yc_5}$ por abajo ahora lo limita por arriba, y el arco del círculo c_5 que limitaba a $r_{c_4yc_5}$ por arriba, ahora lo limita por abajo.

   d) $C'_{r_{c_4yc_5}} = C_{r_{c_4yc_5}} - \{c_5, c_6\} = \{c_4, c_5\} - \{c_5, c_6\} = \{c_4\}$

   e) Si $r_{c_4yc_6} \in c_4$ then $C'_{r_{c_5}} \cup \{c_4\}$
      - $C''_{r_{c_4yc_5}} = \{c_4\} \cup \{c_4\} = \{c_4\}$

   f) Si $r_{c_4yc_6} \in c_6$ then $C''_{r_{c_5}} \cup \{c_6\}$
      - $C'''_{r_{c_4yc_5}} = \{c_4\} \cup \{c_6\} = \{c_4, c_6\} = C_{r_{c_4yc_6}}$
      - se sustituye r_{c_4yc5} en $\mathcal{L}$ por $r_{c_4yc_6}$

   g) Si los arcos que limitan a la región r_{c_4} intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.
      - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_4 \cap c_6$ es (7,23), que ya se encuentra dentro de Q.

   h) Si los arcos que limitan a la región $r_{c_4c_5yc_6}$ intersectan, agregar ese punto de intersección a Q.
      - El punto más a la derecha que cumple con $(x, y) \in c_4 \cap c_5 \cap c_6$ es (5.7776, 20.5833), se agrega $(5.7776, 20.5833, \text{int}, c_{4y5})$ a Q.

Al final del Paso 7 tenemos:

$$
\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}), \\
&(2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11}), (3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6}), (4.7917, 13.0791, \text{int}, c_{5} \\
&(5.7776, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (5.7776, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}), (6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_{11}), (7, 23, \text{der}, c_4), \\
&(7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (8, 17, \text{der}, c_5), (9, 4, \text{der}, c_{14}), (9, 17, \text{ent}, p_2), (9.5, 17, \text{izq}, c_7), (10, 9, \text{izq}, c_{12}), (11, 5, \text{ent}, p_6) \\
&(11.5, 17, \text{der}, c_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1), \\
&(18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\} \\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\} \\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_{14}}, r_0, r_{c_{11}}, r_{c_6yc_{11}}, r_{c_5c_6yc_{11}}, r_{c_5yc_6}, r_{c_5}, r_{c_4yc_6}, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Paso 8: x = 5, Algoritmo de punto izquierdo

1. $(5, 4, \text{izq}, c_{15})$
   a) Sea $e \in Q$ el punto izquierdo del círculo c_{15}
      - $e = (5, 4, \text{izq}, c_{15})$
   b) Incertar en Q el punto derecho del círculo c_15
      - $Q = Q \cup \{(10, 4, \text{der}, c_{15})\}$
   c) $r =$ la región en $\mathcal{L}$ que contiene a e
      - $\mathcal{L} = \{r_0, r_{c_{14}}, r_0, r_{c_{11}}, r_{c_6 y c_{11}}, r_{c_5 c_6 y c_{11}}, r_{c_5 y c_6}, r_{c_5}, r_{c_4 y c_6}, r_{c_4}, r_0\} \Rightarrow r = r_{c_{14}}$
   d) $r_{up} =$ la región arriba de c de r
      - $r_{up} = r_{c_{14}}$
   e) $r_{middle} =$ la región en c de r
      - $r_{middle} = r_{c_{14} y c_{15}}$
   f) $r_{down} =$ la región debajo de c de r
      - $r_{down} = r_{c_{14}}$
   g) Quitar $r = r_{c_14}$ de $\mathcal{L}$.
      - $\mathcal{L} - r_{c_{14}} = \{r_0, r_0, r_{c_{11}}, r_{c_6 y c_{11}}, r_{c_5 c_6 y c_{11}}, r_{c_5 y c_6}, r_{c_5}, r_{c_4 y c_6}, r_{c_4}, r_0\}$
   h) Insertar r_{up}, r_{middle}, r_{down} en $\mathcal{L}$
      - $\mathcal{L} = \mathcal{L} \cup \{r_{c_{14}}, r_{c_{14} y c_{15}}, r_{c_{14}}\}$
   i) $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r$
      - $C_{r_{up}} = C_{r_{down}} = C_r = \{c_{14}\}$
   j) $C_{r_{middle}} = C_r \cup \{c_{15}\}$
      - $C_{r_{middle}} = \{c_{14}\} \cup \{c_{15}\} = \{c_{14}, c_{15}\}$
   k) Si c_{15} intersecta el arco circular que limita por arriba a r_{up}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - c_{15} intersecta a c_{14}
      - $Q = Q \cup \{(7.6667, 6.4944, int, c_{14y15})\}$
   l) Si c_15 intersecta el arco circular que limita por abajo a r_{down}, entonces inserta este punto de intersección en Q
      - c_{15} intersecta a c_{14}
      - $Q = Q \cup \{(7.6667, 1.5056, int, c_{14y15})\}$
   m) Fin

Al final del Paso 8 tenemos:

$$
\begin{aligned}
Q = \{&(0, 17, \text{izq}, c_5), (1, 11, \text{izq}, c_{11}), (1, 23, \text{izq}, c_4), (2.2224, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (2.2224, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}),\\
&(2.5, 17, \text{izq}, c_6), (3, 4, \text{izq}, c_{14}), (3.6630, 13.9810, \text{int}, c_{6y11}), (3.6630, 20.0190, \text{int}, c_{4y6}), (4.7917, 13.0791, \text{int}, c_{5y6}), (4.\\
&(5.7776, 13.4167, \text{int}, c_{5y11}), (5.7776, 20.5833, \text{int}, c_{4y5}), (6, 30.5, \text{izq}, c_1), (7, 11, \text{der}, c_{11}), (7, 23, \text{der}, c_4),\\
&(7.5, 30.5, \text{izq}, c_2), (7.6667, 1.5056, int, c_{14y15}), (7.6667, 6.4944, int, c_{14y15}), (8, 17, \text{der}, c_5), (9, 4, \text{der}, c_{14}), (9, 17, \text{ent}, p\\
&(11.5, 17, \text{der}, c_6), (12, 15, \text{izq}, c_8), (13, 5, \text{izq}, c_{16}), (13, 9, \text{izq}, c_{13}), (13, 24, \text{izq}, c_3), (14, 30.5, \text{ent}, p_1),\\
&(18, 9.5, \text{ent}, p_5), (18, 20, \text{ent}, p_3), (24, 19, \text{izq}, c_9), (27, 17, \text{izq}, c_{10}), (28, 18, \text{ent}, p_4)\}\\
A_c = C = \{&c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}\}\\
\mathcal{L} = \{&r_0, r_{c_{14}}, r_{c_{14} y c_{15}}, r_{c_{14}}, r_0, r_{c_{11}}, r_{c_6 y c_{11}}, r_{c_5 c_6 y c_{11}}, r_{c_5 y c_6}, r_{c_5}, r_{c_4 y c_6}, r_{c_4}, r_0\}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Código en python

Capítulo 4

Modelos

Colocar aquí modelos deterministicos y no deterministicos
Esto es un ejemplo de una cita [7].

1. deterministas

   a)

2. probabilisticos

   a)

Capítulo 5

Caso Práctico

Colocar aquí los modelos aplicados a tenochtitlan
Hablar sobre los datos y variables a estudiar
hacer varios modelos o un modelado progresivo
Esto es un ejemplo de una cita [7].

Capítulo 6

Conclusiones

Colocar aquí los modelos aplicados a tenochtitlan
Esto es un ejemplo de una cita [7].

Bibliografía

inetti1972 [1] B. De Finetti. *Probability, Induction and Statistics: The Art of Guessing*. J. Wiley, 1972. ISBN 9780471201403.

Gilboa2009 [2] Itzhak Gilboa. *Theory of Decision Under Uncertainty*. Cambridge University Press, 2009.

alpern2017 [3] Joseph Y Halpern. *Reasoning About Uncertainty*. MIT Press, 2017.

Rao2001 [4] S.V. Rao and Asish Mukhopadhyay. Fast algorithms for computing β-skeletons and thier relatives. *Pattern Recognition Society*, 34:2163–2172, 2001. 9

Savage1972 [5] L.J. Savage. *The Foundations of Statistics*. Dover Publications, 1972. ISBN 9780486623498.

Straub2016 [6] Daniel Straub, Iason Papaioannou, and Wolfgang Betz. Bayesian analysis of rare events. *Journal of Computational Physics*, 314:538–556, 2016.

Stuart2018 [7] Andrew Stuart and Aretha Teckentrup. Posterior consistency for Gaussian process approximations of Bayesian posterior distributions. *Mathematics of Computation*, 87(310):721–753, 2018. 7, 31, 33, 35