

-۱

- (a) نادرست- CLT یک تخمین نقطه‌ای (point estimate) برای میانگین جامعه آماری μ ارائه می‌کند. هر چند که احتمال اینکه $\mu = \bar{x}$ خیلی پایین است. در CLT به دنبال بازه اطمینان نیستیم بلکه با استفاده از مفهوم بازه اطمینان سعی می‌کنیم یک بازه‌ای را مشخص کنیم که این بازه با احتمال بالایی شامل مقدار μ می‌باشد.
- (b) -
- (c) نادرست- CLT بیان می‌کند توزیع میانگین سмпل‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کند در صورتی که ساینر سмпل به اندازه کافی بزرگ باشد (بزرگتر مساوی ۳۰) که اگر توزیع جامعه آماری مون چولگی داشته باشد از این هم باید بزرگتر باشد.
- (d) درست- در واقع برای یک توزیع با چولگی + (راست) ، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$Mean > Median > Mode$$

- (e) نادرست- با پایین آوردن سطح اطمینان، بازه اطمینان هم کوچکتر می‌شود. به بیان دیگر، هر چه سطح اطمینان را پایین تر بیاوریم، چون Z^* هم کوچکتر می‌شود، پهنای بازه اطمینان هم کمتر می‌شود.
- (f) نادرست- جمله‌ی اول به این معنی است که ((95% از رندوم سмпل‌هایی که گرفته شده، بازه های اطمینانی (بازه اطمینان = (350,400)) تولید می‌کنند که این بازه‌های اطمینان شامل مقدار میانگین واقعی جامعه آماری می‌باشند))
- (g) نادرست- معنی بازه اطمینان 95% در بخش f آورده شده و این جمله به ازای هر اندازه سмпلی (البته به شرطی که از ۳۰ بزرگتر باشد)، درست است. اندازه‌ی سмпل بزرگتر منجر به margin of error کمتر می‌شود. یعنی فقط اندازه‌ی بازه اطمینان 95% برای سмпل‌هایی با ساینر ۱۰۰۰ کوچکتر از بازه اطمینان 95% برای سмпل‌هایی با ساینر ۵۰۰ خواهد بود. و شانس قرار داشتن میانگین جامعه آماری در هر دوی آنها یکسان است.
- (h) درست- اگر بخواهیم معنی این جمله را تفسیر کنیم، می‌توان گفت: 95% از رندوم سмпل‌هایی که گرفته شده، بازه های اطمینانی (بازه اطمینان = (18.4,21.5)) تولید می‌کنند که این بازه‌های اطمینان شامل مقدار میانگین واقعی جامعه آماری می‌باشند.
- (i) درست - بیان دیگر این جمله در بخش های قبل آورده شده
- (j) -
- (k) درست - این دو نوع خطا mutually exclusive هستند. چرا که نمی‌توان همزمان یک null hypothesis را هم reject کرد و هم fail to reject.

- (l) درست- که این اتفاق همان خطای نوع ۱ (Type I error) می‌باشد.
- (m) نادرست - در این مثال Type I error معادل این است که ((یک فرد سالم، اشتباهاً بیمار تشخیص داده شده)) و در نتیجه نمی‌تواند وارد مکان عمومی شود در حالیکه Type II error معادل این است که ((یک فرد مبتلا به کووید ۱۹، اشتباهاً سالم تشخیص داده شده)) و وارد مکان عمومی شده و ممکن است افراد زیادی را مبتلا کند و در خطر جانی قرار دهد.

۳- طبق CLT اگر S_n یک متغیر تصادفی باشد که برابر با حاصل جمع n تا متغیر تصادفی I.I.D X_i ها این ویژگی را دارند) که $E[X_i] = \mu$ و $Sd(X_i) = \sigma$ ، آنگاه در صورتی که اندازه n به قدر کافی بزرگ باشد (در صورت سوال اینطور فرض شده که اندازه n مناسب است)، S_n دارای توزیع نرمال خواهد بود با: $E[S_n] = n\mu$ و $Sd(S_n) = \sqrt{n}\sigma$

پس داریم:

$$E[S_{10}] = 10 \times 3.5 = 35$$

$$Sd(S_{10}) = \sqrt{10} \times \sqrt{35} = \sqrt{350} = 18.71$$

$$S_{10} \sim N(35, 1.58)$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 25, X \geq 45) &= P(10 \leq X \leq 25) + P(45 \leq X \leq 60) \\ &= P(X \leq 60) - P(X \leq 45) + P(X \leq 25) - P(X \leq 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{60 - 35}{18.71} = 1.33, & Z_2 &= \frac{45 - 35}{18.71} = 0.53, & Z_3 &= \frac{25 - 35}{18.71} = -0.53, \\ Z_4 &= \frac{10 - 35}{18.71} = -1.33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Win}) &= P(X \leq 60) - P(X \leq 45) + P(X \leq 25) - P(X \leq 10) \\ &= P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.53) + P(Z \leq -0.53) - P(Z \leq -1.33) \\ &= 2 \times (P(Z \leq 1.33) - P(Z \leq 0.53)) = 2 \times (0.4082 - 0.2019) = 0.4126 \end{aligned}$$

$$\text{July: } 72 \pm 2 \times 6 = (60, 84)$$

$$\text{January: } 38 \pm 2 \times 12 = (14, 62)$$

بازه های حساب شده در بالا نشان دهنده دماهایی هستند که در هر یک از این دو ماه با احتمال 95% مشاهده می کنیم (طبق نمودار نرمال). طبق بازه های محاسبه شده احتمال مشاهده دمای 45°F در ماه July خیلی کم می باشد (دمای 45 در نمودار نرمال ماه July به فاصله 4σ از μ قرار دارد. پس احتمال مشاهده چنین دمایی در این ماه خیلی ناچیز است.

۵- می خواهیم بازه اطمینان 98% بسازیم. و طبق صورت سوال داریم Margin of error = 2

$$\frac{(1 - 0.98)}{2} = 0.01$$

طبق جدول توزيع نرمال $Z^* = 2.33$

$$ME = Z^* \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.33 \times \frac{25}{\sqrt{n}} = 2 \rightarrow \sqrt{n} = 29.125 \rightarrow n = 848.26 \rightarrow n = 849$$
