Successioni di numeri reali, convergenze e divergenze #Analisi1

Definizione: una successione (di numeri reali) è una funzione $f : \{n \in N : n \geq n_0\}$->R $\forall n_0 \in N$

Esempio: $f(n) = 1/(n-5)$ $n \geq 6$ $f(n) = \log(n - 73)$ $n \geq 74$

Osservazione: a livello di notazione scriveremo a_n, $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ invece di $f(n)$

Osservazione: il grafico di una successione a_n è dato da una sequenza di punti R^2, della forma (n, a_n), $n \in N$

Definizione: una successione a_n si dice

- Limitata dall'alto (o superiormente) se $\exists M \in R$ t.c. $a_n \leq M$ $\forall n \in N$
- Limitata dal basso (o inferiormente) se $\exists m \in R$ t.c. $a_n \geq m$ $\forall n \in N$
- Limitata se è limitata sia dal basso che dall'alto se $\exists m, M \in R$ t.c. $m \leq a_n \leq M$ $\forall n \in N$
  equivalentemente, $\exists M > 0$ t.c. $|a_n| \leq M$ $\forall n \in N$

Definizione: diremo che una successione a_n soddisfa una certa proprietà P definitivamente (in $n \in N$) se esiste $n_1 \in N$ t.c. che a_n definisce P $\forall n \geq n_1$

Esempio: $a_n = 1/n$ è definitivamente minore di $1/2\pi$ $\forall n \geq 2\pi$ (se si preferisce $n \geq 7$) (la proprietà falsa $n = 1,2,3,4,5,6$)

Definizione: diremo che una successione a_n converge a $l \in R$ e scriveremo: $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l$

se $\forall \varepsilon > 0$ (soglia di tolleranza) $\exists n_1 \in N$ t.c. $|a_n - l| < \varepsilon$ $\forall n \in N$

o equivalentemente $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ $\forall n \in N$

Osservazione: $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l \iff \text{Lim}_{n\to\infty} |a_n - l| = 0$

Osservazione: non tutte le successioni ammettono limite

Esempio: $a_n = (-1)^n$ non ammette limite

Teorema (unicità del limite): data una successione a_n, se esiste $l = \text{Lim}_{n\to\infty} a_n \in R$, Allora esso è unico

Dimostrazione (per assurdo):

da n_1 in poi a_n deve essere in due insiemi $[l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon]$ e $[l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon]$ la cui intersezione è vuota

per assurdo supponiamo esistano $l_1, l_2 \in R$, $l_1 > l_2$ t.c. $l_1 = \text{Lim}_{n \to \infty} a_n$ $l_2 = \text{Lim}_{n \to \infty} a_n$

scegliamo nella definizione di limite $\varepsilon = |l_1 - l_2| / 3 l_1 > l_2 \to \varepsilon * (l_1 - l_2)/3$ allora

$\exists n_1 \in N$ t.c. $n \geq n_1$ $l_1 - \varepsilon < a_n < l_1 + \varepsilon$

$\exists n_2 \in N$ t.c. $n \geq n_2$ $l_1 - \varepsilon < a_n < l_1 + \varepsilon$

Quindi $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$ $a_n \in [l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon] \cap [l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon]$ abbiamo l'assurdo perché $[l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon] \cap [l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon] = \emptyset$

Infatti $\inf [l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon] = l_1 - \varepsilon$ $\sup [l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon] = l_2 + \varepsilon$

e $(l_1 - \varepsilon) - (l_2 - \varepsilon) > 0$ perché $(l_1 - \varepsilon) - (l_2 - \varepsilon) = l_1 - l_2 - 2\varepsilon = (l_1 - l_2) - 2/3 * (l_1 - l_2) = (l_1 - l_2)/3 > 0$ abbiamo cioè l'assurdo

Definizione: data una successione a_n

diremo che essa diverge a $+\infty$ e scriveremo $\text{Lim}_{n \to \infty} a_n = +\infty$

se $\forall M > 0$ $\exists n_1 \in N$ t.c. $a_n > M$ $n \geq n_1$ da n_1 in poi la successione è sempre $>M$ (non n_1 ottimale)

diremo che essa diverge a $-\infty$ e scriveremo $\text{Lim}_{n \to \infty} a_n = -\infty$

se $\forall M > 0$ $\exists n_1 \in N$ t.c. $a_n < -M$ $n \geq n_1$ da n_1 in poi la successione è sempre $<M$ (non n_1 ottimale)

Definizione:

se $\text{Lim}_{n \to \infty} a_n = l \in R$ diremo che converge (a $l \in R$)

se $\text{Lim}_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$ diremo che diverge (a $\pm\infty$)

In entrambi i casi diremo che a_n è regolare

Se a_n non converge né diverge diremo che essa è irregolare, indeterminata o oscillante ($\nexists \text{Lim}_{n \to \infty} a_n$)

Esempio: $a_n = (-1)^n$ è irregolare, limitata $a_n = (-2)^n$ è irregolare, illimitata

Definizione: chiamiamo retta reale estesa (R esteso) l'insieme $\underline{R} = R^* = R \cup \{\pm\infty\}$

Teorema: se esiste $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l \in R$ allora tale limite è unico

Definizione:

se esiste $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0$ diremo che la successione a_n è infinitesima

se esiste $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ diremo che la successione a_n è infinita

Definizione: diremo che a_n converge a $l \in R$ per eccesso (o per difetto) se $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l$

ed inoltre $a_n \geq l$ (o $a_n \leq l$) definitivamente per $n \in N$ scriveremo $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l^+$ (o $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l^-$)

Osservazione:

$\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l^+ \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in N$ t.c. $l < a_n < l + \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

$\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l^- \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in N$ t.c. $l - \varepsilon < a_n < l \quad \forall n \geq n_1$