Capitolo 2: spazi vettoriali #GAL

Definizione: uno spazio vettoriale è un insieme V dotato di due operazioni:

1. Somma: dati $\underline{v},\underline{w} \in V \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in V$ proprietà:
    1. Associativa: $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{u})$
    2. Commutativa: $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
    3. Elemento neutro: $\exists \underline{0} \in V : \underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$
    4. Elemento opposto: $\forall \underline{v} \in V \quad \exists (-\underline{v}) \in V : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
2. Prodotto per uno scalare dati $\underline{v} \in V$, $c \in R \Rightarrow c\underline{v} \in V$
    1. Associativa: $c(d*\underline{v}) = (cd)*\underline{v}$
    2. Elemento neutro: $1*\underline{v} = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$
    3. Distributiva scalare: $c(\underline{v} + \underline{w}) = c*\underline{v} + c*\underline{w}$
    4. Distributiva vettore: $(c + d)\underline{v} = c*\underline{v} + d*\underline{v}$

L'algebra lineare è lo studio degli spazi vettoriali gli elementi $\underline{v} \in V$ si dicono vettori

Osservazioni:

- Per ogni $\underline{v},\underline{w} \in V$, $c \in R \Rightarrow \underline{v} + \underline{w}$, $c\underline{v}$ sono definiti e sono elementi di V
- Il concetto di spazio vettoriale non prevede alcuna operazione di prodotto tra vettori
- La conseguenza generale degli assiomi di spazio vettoriale: l'algebra dei vettori colonna/riga vale in qualsiasi spazio vettoriale

Esempi:

- Se $\underline{v} + \underline{w} = \underline{v} + \underline{u} \Rightarrow \underline{w} = \underline{u}$ (aggiungete a entrambi $-\underline{v}$)
- $0w = 0$ Dimostrazione: $0 + 0w = 0w \rightarrow (0 + 0)w = 0$

Esempi di spazi vettoriali:

1. R^n = {vettori riga/colonna}
2. Mat(m,n)
    - Somma di matrici è una matrice
    - Prodotto tra uno scalare e una matrice è una matrice
    - 8 proprietà delle operazioni
3. Spazio dei polinomi R[t] = {insieme dei polinomi nella variabile t} = $\{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_pt^p : a_i \in R, p \in N\}$
    - Somma di polinomi è un polinomio
    - Prodotto tra uno scalare e un polinomio è un polinomio
    - 8 proprietà delle operazioni
4. Spazio dei polinomi di grado limitato: fissiamo $d \in N$ $R[t]_{\leq d}$ = {polinomi in t con grado ≤ d} = $\{p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_dt^d : a_i \in R, p \in N\}$
    - Somma di polinomi di grado ≤ d ha ancora grado ≤ d
    - Prodotto tra uno scalare e un polinomio di grado ≤ d non aumenta il

  grado
  - 8 proprietà delle operazioni
5. Spazi di funzioni V = {funzioni f: R->R} è uno spazio vettoriale
   - Somma di funzioni è una funzione
   - Prodotto tra uno scalare e una funzione è una funzione
   - 8 proprietà delle operazioni
6. Sottospazio delle funzioni continue V = {funzioni continue F : R->R} è uno spazio vettoriale
   - Somma di funzioni continue è ancora una funzione continua
   - Prodotto tra uno scalare e una funzione continua è ancora una funzione continua
   - 8 proprietà delle operazioni
7. Spazio delle funzioni derivabili V = {funzioni derivativi f : R->R} è uno spazio vettoriale
   - Somma di funzioni derivabili è ancora una funzione derivabile
   - Prodotto tra uno scalare e una funzione derivabile è ancora una funzione derivabile
   - 8 proprietà delle operazioni
8. Spazio di successioni infinite V = $\{(x_r)_{r \in R} : x_r \in R\}$ è uno spazio vettoriale
   - Somma di successioni infinite è ancora una successione infinita
   - Prodotto tra uno scalare e una successione infinita è ancora una successione infinita
   - 8 proprietà delle operazioni