Applicazioni lineari iniettive, suriettive, biettive e isomorfismi, composte #GAL

Definizione:

$L : V \to W$ è iniettiva se $\underline{v_1} \neq \underline{v_2} \Rightarrow L(\underline{v_1}) \neq L(\underline{v_2})$ equivalentemente, se $L(\underline{v_1}) = L(\underline{v_2}) \Rightarrow \underline{v_1} = \underline{v_2}$

Esempio:

$L : V \to W$ definita da $L(\underline{v}) = 4\underline{v}$ è iniettiva

Esempio:

$T_a : R^2 \to R^2$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$T_a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = T_a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Proposizione:

$L : V \to W$ applicazione lineare iniettiva $\Leftrightarrow \ker(L) = \{\underline{0}_V\}$ $\quad$ ($\ker(L) = \{ \underline{v} \in V : L(\underline{v}) = \underline{0} \} \subseteq V$)

Dimostrazione:

$\Rightarrow$ supponiamo L iniettiva dimostriamo $\ker(L) = \{\underline{0}_V\}$

Sia $\underline{v} \in \ker(L) \Rightarrow L(\underline{v}) = \underline{0}_W = L(\underline{0}_V)$ =(iniettiva)=> $\underline{v} = \underline{0}_V \Rightarrow \ker(L) = \{\underline{0}_V\}$

$\Leftarrow$ supponiamo $\ker(L) = \{\underline{0}_V\}$, dimostriamo L iniettiva

Siano $\underline{v_1}, \underline{v_2} \in V$ t.c. $L(\underline{v_1}) = L(\underline{v_2})$

$\Rightarrow L(\underline{v_1}) - L(\underline{v_2}) = \underline{0}_W$ =(lineare)=> $L(\underline{v_1} - \underline{v_2}) = \underline{0}_W \Rightarrow \underline{v_1} - \underline{v_2} = \ker(L)$ =(per ipotesi)= $\{\underline{0}_V\}$

$\Rightarrow \underline{v_1} - \underline{v_2} = \underline{0}_V \Rightarrow \underline{v_1} = \underline{v_2} \Rightarrow$ L iniettiva

Corollario:

Sia $A \in Mat(m,n)$

$T_a : R^n \to R^m$ è iniettiva $\Leftrightarrow \ker(T_a) = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow \ker(A) = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow \dim Ker(A) = 0$ <=(nullità+rango)=> $rk(A) = n$

T_a iniettiva $\Leftrightarrow rk(A) = n$

Esempio:

$n > m \Rightarrow T_a : R^n \to R^m$ non è mai iniettiva

Osservazione:

In generale $L : V \to W$ qualsiasi $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$ L.I. $\not\Rightarrow L(\underline{v_1}), \dots, L(\underline{v_n}) \in W$ L.I.

Proposizione:

sia $L : V \to W$ iniettiva qualsiasi $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ L.I. => $L(\underline{v}_1), \ldots, L(\underline{v}_n) \in W$ L.I.

Dimostrazione:

supponiamo $c_1L(\underline{v}_1) + \ldots + c_nL(\underline{v}_n) = \underline{0}_W$ per qualche $c_i \in R$ =(applicazione lineare)=> $L(c_1\underline{v}_1 + \ldots + c_n\underline{v}_n) = \underline{0}_W$ =>

=> $(c_1\underline{v}_1 + \ldots + c_n\underline{v}_n) = \underline{0}_W$ => $(c_1\underline{v}_1 + \ldots + c_n\underline{v}_n) = \ker(L)$ =(iniettività)=> $\ker(L) = \underline{0}_V$ => $(c_1\underline{v}_1 + \ldots + c_n\underline{v}_n) = \underline{0}_V$ =>

($\underline{v}_i$ LI)=> $c_1 = \ldots = c_n = 0$

Corollario:

se $L : V \to W$ iniettiva, $H \subseteq V$ sottospazio => $\dim H = \dim L(H)$

Dimostrazione:

$\{b_1, \ldots, b_n\}$ base di H => $\{L(b_1), \ldots, L(b_n)\}$ base di L(H)

Definizione:

$L : V \to W$ è suriettiva se $Im(L) = W$

Esempio:

$L : R^2 \to R^2$ definita da $L(x \ \ y) = (x+y \ \ 0)$ non è suriettiva, $(0 \ \ 1) \notin Im(L)$

Corollario:

$L : V \to W$ applicazione lineare

L suriettiva <=> $\dim Im(L) = \dim W$

Corollario:

sia $A \in Mat(m,n)$

$T_a : R^n \to R^m$ è suriettiva <=> $\dim Im(T_a) = \dim R^m$ <=> $\dim Col(A) = m$ <=> $rk(A) = m$

Esempio:

se $n < m$ => $T_a : R^n \to R^m$ non è mai suriettiva

Definizione:

un'applicazione lineare $L : V \to W$ è un isomorfismo se L è biettiva (o biunivoca) ovvero iniettiva e suriettiva

Intuitivamente:

se $L : V \to W$ isomorfismo allora V e W hanno la stessa struttura di spazio vettoriale e L "traduce" V in W

Esempio:

$L : Mat(n,1) \to Mat(1,n)$ definitiva da $L(\underline{v}) = \underline{v}^t$ è un isomorfismo

Corollario:

sia A $\in$Mat(m,n) $T_a : R^n \to R^m$ è un isomorfismo <=> m = n = rk(A)

Esempio:

$L : R^2 \to R^2$ definita da L(x y) = (x+y x-y) è un isomorfismo
infatti L = T_a dove A(1 1; 1 -1) rk(A) = 2

Proposizione:

sia L : V->W un isomorfismo, $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$,   H,K $\subseteq$V sottospazi

1. dimV = dimW
2. dimH = dimL(H)
3. L(H+K) = L(H) + L(K)
4. L(H$\cap$K) = L(H) $\cap$ L(K)
5. $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ sono LI/generatori/base <=> L($\underline{v_1}$), ..., L($\underline{v_n}$) sono LI/generatori/base

Definizione:

siano U, V, W spazi vettoriale,   L : U->V, M : V->W applicazioni lineari
la composizione M•L->W è la funzione definita da M•L(U) = M(L(U))
U -(L)-> V -(M)-> W   U -(M•L)-> W (non commutativa)

Osservazione:

M•L è un'applicazione lineare

Osservazione:

R^n -(T_a)-> R^m -(T_b)-> R^p dove A $\in$Mat(m,n) e B $\in$Mat(p,m)

=> BA $\in$Mat(p,n) => $T_{ba} : R^n \to R^p$ $T_b \cdot T_a = T_{ba}$