Capitolo 1: Vettori #GAL

Vettori in R^2 = { (x_1,x_2) : $x_1,x_2 \in R$ } (vettore colonna)

Insieme delle coppie ordinate di numeri reali:

1. Punto nel piano $P(x_1,x_2)$
2. Vettore: $\underline{v} = (x_1\ x_2)$ rappresentabile come vettore riga
3. Segmento orientato: OP = $(x_1\ x_2)$ => segmento che ha inizio in O e termina in $P(x_1,x_2)$

Operazioni tra vettori in R^2

Somma:

- Somma componente per componente: $(x_1\ x_2) + (y_1\ y_2) = (x_1+y_1\ x_2+y_2)$
- Interpretazione geometrica: regola del parallelogramma

Prodotto per uno scalare:

- Scalare componente per componente: $c*(x_1\ x_2) = (c*x_1\ c*x_2)$ $c \in R$

Retta in R^2 in forma parametrica: r = { $\underline{v} + t\underline{w}$: $t \in R$ } $\subseteq R^2$ t = parametro, $\underline{w}$ = vettore direzione di r $\underline{w} \neq \underline{0}$

nota: la forma parametrica di una retta non è unica

Retta in R^2 in forma cartesiana: r = { $(x_1\ x_2) \in R^2$: $ax_1 + bx_2 + c = 0$ }   a,b = coefficienti, c = termine noto

Vettori in R^3 = { $(x_1\ x_2\ x_3)$: $x_1,x_2,x_3 \in R$ } (vettore colonna)

Insieme delle triple ordinate di numeri reali:

1. Punto nello spazio: $P(x_1,x_2,x_3)$
2. Vettore: $\underline{v} = (x_1\ x_2\ x_3)$ rappresentabile come vettore riga
3. Segmento orientato (direzione): OP = $(x_1\ x_2\ x_3)$ => segmento che ha inizio in O e termina in $P(x_1,x_2,x_3)$

Operazioni tra vettori in R^3

Somma:

- Somma componente per componente: $(x_1\ x_2\ x_3) + (y_1\ y_2\ y_3) = (x_1+y_1\ x_2+y_2\ x_3+y_3)$

Prodotto per uno scalare:

- Scalare componente per componente: $c*(x_1\ x_2\ x_3) = (c*x_1\ c*x_2\ c*x_3)$ $c \in R$

Retta in R^3 in forma parametrica: r = { $\underline{v} + t\underline{w}$: $t \in R$ } $\subseteq R$ t = parametro, $\underline{w}$ = vettore direzione di r $\underline{w} \neq \underline{o}$

nota: la forma parametrica di una retta non è unica

Retta in R^3 in forma cartesiana: intersezione di due piani cioè sistema di due equazioni cartesiane di piani

- $\{ x \in R^3 : \{ a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0; \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0\} \}$

Piano in R^3 in forma parametrica: $\pi = \{ \underline{v} + t\underline{w_1} + s\underline{w_2} : t,s \in R \} \subseteq R^3$

Piano in R^3 in forma cartesiana: $\pi = \{ \underline{x} = (x_1\ x_2\ x_3) \in R^3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \}$ a,b,c = coefficienti, d = termine noto

Vettori in Rn ($n \in N$) = $\{ (x_1\ x_2\ x_n) : x_1, x_2, x_n \in R \}$ (vettore colonna)

Insieme delle n-uple di numeri reali:

1. Punto nello spazio n-dimensionale: $\underline{v} = P\ (x_1, x_2, x_n)$
2. Vettore: $\underline{v} = (x_1\ x_2\ x_n)$
3. Segmento ordinato $\underline{v}$ = OP

Operazioni tra vettori in Rn

Somma:

- Somma componente per componente: $(x_1\ x_2\ x_n) + (y_1\ y_2\ y_n) = (x_1{+}y_1\ \ x_2{+}y_2\ \ x_n{+}y_n)$

Prodotto per uno scalare:

- Scalare componente per componente: $c^*(x_1\ x_2\ x_n) = (c^*x_1\ c^*x_2\ c^*x_n)$ $c \in R$

Proprietà delle operazioni in Rn

Dati $\underline{v},\underline{w},\underline{u} \in Rn$ $c,d \in R$

Proprietà della somma:

1. Associativa: $(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{u})$
2. Commutativa: $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
3. Elemento neutro: $\exists\ \underline{0} : v + \underline{0} = \underline{v}$
4. Elemento opposto: $\forall \underline{v}\ \exists\ \underline{w} : \underline{v} + \underline{w} = 0$

Proprietà del prodotto:

5. Associativa: $c(d^*\underline{v}) = (c^*d)\underline{v}$
6. Elemento neutro: $1^*\underline{v} = \underline{v}$
7. Distributiva scalare: $c(\underline{v} + \underline{w}) = c^*\underline{v} + c^*\underline{w}$
8. Distributiva vettore: $(c + d)\underline{v} = c^*\underline{v} + d^*\underline{v}$

Definizione: dati $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_m} \in R^m$ una loro combinazione lineare è un vettore nella forma $c_1\underline{v_1} + c_2\underline{v_2} + c_m\underline{v_m} = \underline{w}$