Permanenza del segno, algebra dei limiti, due carabinieri, confronto, gerarchia degli infiniti e aritmetizzazione parziale di ∞ #Analisi1

Teorema (permanenza del segno):

1. Data una successione a_n, se esiste $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l \in R^*$
   e se $l > 0$ (cioè $l \in (0, \infty) \cup \{+\infty\}$) allora $a_n > 0$ definitivamente in $n \in N$
   Similmente se esiste $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l \in R^*$
   e se $l < 0$ (cioè $l \in \{-\infty\} \cup (\infty, 0)$) allora $a_n < 0$ definitivamente in $n \in N$
2. Se esiste $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l \in R^*$ e se $a_n \geq 0$ definitivamente in $n \in N$
   allora $l \geq 0$ (cioè $l \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}$)
   Similmente se $a_n \leq 0$ definitivamente in $n \in N$
   allora $l \leq 0$ (cioè $l \in \{-\infty\} \cup (\infty, 0]$)

Osservazione: se $a_n > 0$ definitivamente ed $\exists \text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l \in R^*$
allora $l \geq 0$ per permanenza del segno 2) potrebbe però essere $l = 0$ infatti se $a_n = 1/n$
allora $a_n \geq 0 \ \ \forall n \in N$ $\qquad$ $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0$

Dimostrazione: $l = \text{Lim}_{n\to\infty} a_n \in (0, \infty]$

1. Se $l = +\infty$ per definizione di limite $\forall M > 0 \ \ \exists n_1 \in N$ t.c. $\forall n \geq n_1 \ \ a_n > M > 0$
   quindi $a_n > 0$ definitivamente in $n \in N$ se $l \in (0, \infty)$
   Scegliamo $\varepsilon = l/2 > 0$ nella definizione di limite $\exists n_1 \in N$ t.c. $\forall n \geq n_1$ $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ in particolare $\forall n \geq n_1$ $a_n > (l - \varepsilon = l/2 > 0)$
   quindi $a_n > 0$ definitivamente in $n \in N$

2. Sia $a_n > 0$ definitivamente e $\exists l = \text{Lim}_{n\to\infty} a_n \in R^*$ vogliamo mostrare che $l \geq 0$
   per assurdo sia $l < 0$ per la parte 1) del teorema deve essere $a_n < 0$ definitivamente in $n \in N$
   Assurdo perché dovrebbe essere $a_n \geq 0$ e $a_n < 0$ definitivamente in $n \in N \Rightarrow l \geq 0$

Similmente si dimostra che se $\exists l = \text{Lim}_{n\to\infty} a_n \in R^*$ e se $a_n \leq 0$ definitivamente in $n \in N$ allora $l \leq 0$

Teorema (algebra dei limiti):

siano a_n, b_n due successioni t.c. esistano $a = \text{Lim}_{n\to\infty} a_n$, $b = \text{Lim}_{n\to\infty} b_n$ $\quad a,b \in R$ allora:

1. $\text{Lim}_{n->\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\text{Lim}_{n->\infty} a_n b_n = ab$
3. $\text{Lim}_{n->\infty} a_n/b_n = a/b$ se $b \neq 0$
4. $\text{Lim}_{n->\infty} a_n^{b_n} = a^b$ se $a > 0$

Dimostrazione:

1. Vogliamo dimostrare che $\text{Lim}_{n->\infty} (a_n + b_n) = a + b$ osserviamo che

$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$ (per disuguaglianza triangolare)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in N$ t.c. $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$ ed $\exists n_2 \in N$ t.c. $|b_n - b| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_2$

Se $n \geq \max\{n_1, n_2\} \in N$ allora $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2\varepsilon$

Per la definizione di limite $\text{Lim}_{n->\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

2. Vogliamo dimostrare che $\text{Lim}_{n->\infty} a_n b_n = ab$ osserviamo che

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \leq |b_n| * |a_n - a| + |a| * |b_n - b|$ (per disuguaglianza triangolare)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in N$ t.c. $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$ ed $\exists n_2 \in N$ t.c. $|b_n - b| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_2$

Inoltre, poiché b_n converge, b_n è necessariamente limitata, cioè $\exists M > 0$ t.c. $|b_n| < M$ $\forall n \in N$

Allora se $n \geq \max\{n_1, n_2\} \in N$ $|a_n b_n - ab| \leq b_n| * |a_n - a| + |a| * |b_n - b| < M\varepsilon + |a|\varepsilon = (M + |a|)\varepsilon$

Per la definizione di limite $\text{Lim}_{n->\infty} a_n b_n = ab$

3) e 4) non li dimostriamo

Corollario (permanenza del segno e algebra dei limiti):

Date due successioni a_n, b_n t.c. $\exists \text{Lim}_{n->\infty} a_n = a$ e $b = \text{Lim}_{n->\infty} b_n$

1. Se $a > b$ (o $a < b$) allora $a_n > b_n$ definitivamente (o $a_n < b_n$ definitivamente)
2. Se $a \geq b$ (o $a \leq b$) allora $a_n \geq b_n$ definitivamente (o $a_n \leq b_n$ definitivamente)

Dimostrazione: se $c_n = a_n - b_n$, allora $\exists \text{Lim}_{n->\infty} (a_n - b_n) = a - b$ $\in R$ (per algebra dei limiti)

nel caso 1) se $a > b$ allora $c > 0$ per permanenza del segno $a_n - b_n = c_n > 0$ definitivamente Quindi $a_n > b_n$ definitivamente

nel caso 2) se $a \geq b$ allora $c \geq 0$ per permanenza del segno $a_n - b_n = c_n \geq$

0 definitivamente Quindi $a_n \geq b_n$ definitivamente

Teorema (del confronto o dei due carabinieri):

date tre successioni a_n, b_n, c_n t.c. $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente in $n \in N$ t.c. $Lim_{n->\infty}\ a_n = Lim_{n->\infty}\ c_n = l \in R$

allora $\exists Lim_{n->\infty}\ b_n = l$

Dimostrazione: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_1 \in N$ t.c. $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \ \forall n \geq n_1$

e $\exists n_2 \in N$ t.c. $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_2$

inoltre $\exists n_3 \in N$ t.c. $a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \geq n_3$

allora $\forall n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\} \in N \qquad l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$

$\Rightarrow Lim_{n->\infty}\ b_n = l \in R$ per definizione di limite

Teorema (del confronto, caso ±∞): date a_n, b_n successioni t.c. $a_n \leq b_n$ definitivamente in $n \in N$

1. $Lim_{n->\infty}\ a_n = +\infty$ allora $\exists Lim_{n->\infty}\ b_n = +\infty$
2. $Lim_{n->\infty}\ b_n = -\infty$ allora $\exists Lim_{n->\infty}\ a_n = -\infty$

Dimostrazione:

$\forall M > 0 \ \ \exists n_1 \in N$ t.c. $a_n > M \quad \forall n \geq n_1$

inoltre $\exists n_2 \in N$ t.c. $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_2$

quindi se $n \geq \max\{n_1, n_2\} \in N$

allora $b_n \geq a_n \geq M \Rightarrow b_n \geq M$

$\Rightarrow Lim_{n->\infty}\ b_n = \pm\infty$ per definizione di limite

La dimostrazione per 2) è analoga

Corollario:

1. Se b_n, c_n successioni t.c. $|b_n| \leq c_n$ definitivamente in $n \in N$
   e se $Lim_{n->\infty}\ c_n = 0$, allora $Lim_{n->\infty}\ b_n = 0$
2. Se b_n, c_n successioni t.c. c_n sia limitato e $Lim_{n->\infty}\ b_n = 0$
   $Lim_{n->\infty}\ b_n c_n = 0$ (vero anche se c_n non ammette limite $\nexists Lim_{n->\infty}\ c_n$)

Dimostrazione:

1. Per ipotesi $|b_n| \leq c_n$ cioè $-c_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente $n \in N$ inoltre $Lim_{n->\infty}\ c_n = 0$ e $Lim_{n->\infty}\ -c_n = 0$ per algebra dei limiti
   Per teorema dei due carabinieri $Lim_{n->\infty}\ b_n = 0$
2. Vogliamo mostrare che $Lim_{n->\infty}\ b_n c_n = 0$ se $Lim_{n->\infty}\ b_n = 0$ e c_n limitata
   essendo c_n limitata $\exists M > 0$ t.c. $|c_n| < M \qquad \forall n \in N$

Quindi $|b_n c_n| = |b_n|*|c_n| < M*|b_n|$ inoltre $\text{Lim}_{n\to\infty} |b_n| = 0$ per algebra dei limiti e $\text{Lim}_{n\to\infty} M*|b_n| = 0$ per punto 1)

allora $\text{Lim}_{n\to\infty} b_n c_n = 0$

Esempio:

$\text{Lim}_{n\to\infty} n^{\partial} = \{+\infty$ se $\partial > 0$; 1 se $\partial = 0$; 0 se $\partial < 0\}$

si vede con la definizione di limite

Teorema (gerarchia degli infiniti):

1. $\text{Lim}_{n\to\infty} (\text{Log}_a n)/n^{\partial} = 0$ $[\infty/\infty]$ $\forall a > 1, \forall \partial > 0$
2. $\text{Lim}_{n\to\infty} n^{\partial}/a^n = 0$ $[\infty/\infty]$ $\forall a > 1, \forall \partial > 0$
3. $\text{Lim}_{n\to\infty} a^n/n! = 0$ $[\infty/\infty]$ $\forall a > 1$

Osservazione:

1. $\forall c > 0$, $\forall a > 1, \forall \partial > 0$ $0 < \log_a n < cn^{\partial}$ definitivamente in $n \in N$
2. $\forall c > 0$, $\forall a > 1, \forall \partial > 0$ $n^{\partial} < ca^n$ definitivamente in $n \in N$
3. $\forall c > 0$, $\forall a > 1$ $a^n < n!$ definitivamente in $n \in N$

Esempio:

$a_n = (\cos n)/n^{1/2}$ $|a_n| = |\cos n| / n^{1/2} \leq 1/n^{1/2} \to 0$ => per confronto $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0$

Osservazione:

$a_n = P(n)/Q(n)$ P, Q sono somme di potenze di n e di funzioni limitate in n, dove la potenza massima di n in P (positiva) sia più piccola della potenza massima di n in Q(positiva), possiamo ragionare e concludere che $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0$

Osservazione:

$a_n = P(n)/Q(n)$ P, Q sono somme di potenze di n e di funzioni limitate in n, dove la potenza massima di n in P (positiva) sia uguale alla potenza massima di n in Q(positiva), ALLORA $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l \in R\setminus\{0\}$ dove l è il quoziente fra il coefficiente della potenza massima di n in P e il coefficiente della potenza massima di n in Q

Teorema (aritmetizzazione parziale di ∞):

siano a_n, b_n successioni

1. Se $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = a \in R$, $\text{Lim}_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ => $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n + b_n =$

$\pm\infty$ $(a \pm\infty = \pm\infty \ \ \forall a \in R)$

2. Se $Lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty = Lim_{n\to\infty} b_n$ => $Lim_{n\to\infty} a_n+b_n = \pm\infty$ $(+\infty +\infty = +\infty; -\infty -\infty = -\infty)$
3. Se $Lim_{n\to\infty} a_n = a \in R^*\setminus\{0\}$, $Lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ => $Lim_{n\to\infty} a_nb_n = \pm\infty$ $(a*\infty = \infty$ con la regola dei segni $\forall a \in R^*\setminus\{0\})$
4. Se $Lim_{n\to\infty} a_n = a \in R^*\setminus\{0\}$, $Lim_{n\to\infty} b_n = 0^\pm$ => $Lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \pm\infty$ $(a/0^\pm = \infty$ con la regola dei segni $\forall a \in R^*\setminus\{0\})$
5. Se $Lim_{n\to\infty} a_n = a \in R$, $Lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ => $Lim_{n\to\infty} a_nb_n = \pm\infty$ $(a*\infty = \infty$ con la regola dei segni $\forall a \in R^*\setminus\{0\})$

Osservazione:

$\infty-\infty \infty*0 \ \infty/\infty \ 0/0$ forme di indeterminazione

Esempio:

- $a_n = 1/n$ $b_n = n$ => $Lim_{n\to\infty} a_nb_n = 1$ $[0*\infty]$
- $a_n = 1/n$ $b_n = n^2$ => $Lim_{n\to\infty} a_nb_n = +\infty$ $[0*\infty]$
- $a_n = 5/n$ $b_n = n$ => $Lim_{n\to\infty} a_nb_n = 5$ $[0*\infty]$
- $a_n = (1)^{-1}/n$ $b_n = n$ => $Lim_{n\to\infty} a_nb_n = \nexists$ $[0*\infty]$

Osservazione:

$a_n = P(n)/Q(n)$ P, Q sono somme di potenze di n e di funzioni limitate in n, dove la potenza massima di n in P (positiva) sia più grande della potenza massima di n in Q(positiva), possiamo ragionare e concludere che $Lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Teorema:

se a_n e b_n successioni $Lim_{n\to\infty} a_n = a \in R^*$, $a \geq 0$ $[a_n > 0$ definitivamente$]$ e $Lim_{n\to\infty} b_n = b \in R^*$

$Lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$ tranne nei casi $(\infty^0, 0^0, 1^{\pm\infty})$

Osservazione:

- $a^{+\infty} = +\infty$ $\forall a > 1$
- $a^{-\infty} = 0$ $\forall a > 1$
- $a^{+\infty} = 0$ $0 \leq a < 1$
- $a^{-\infty} = +\infty$ $0 \leq a < 1$
- $\infty^b = \infty$ se $b > 0$
- $\infty^b = 0$ se $b < 0$

Osservazione:

$a_n^{b_n} = e^{\log_{a_n} b_n} = e^{b_n \log a_n}$

Osservazione:

$a_n = 1^n = 1$ $\forall n \in N$ $Lim_{n->\infty}\ a_n = 1$

$a_n = 0/n * n = 0$ $\forall n \in N$ $Lim_{n->\infty}\ a_n = 0$