Identità, trasposta e proprietà #GAL

Definizione: la matrice identità n*n è $I_n \in Mat(n,n)$ t.c. $(I_n)_{ij}$ = {1 se i = j; 0 se I ≠ j} ->
-> matrice a scala senza righe nulle con tutti i pivot = 1 e tutti i non pivot = 0

Definizione: una matrice quadrata è una matrice con numero n di colonne e n di righe $\in Mat(n,n)$

Preposizione: sia $A \in Mat(m,n)$. Allora $I_mA = AI_n = A$

Dimostrazione: verifichiamo $I_mA = A$ (simile a AI_n)

$(I_mA)_{ij} = {}^m\Sigma_{k=1}[(I_m)_{ik} * (A)_{kj}] = [(I_m)_{ik} = 0 \text{ se } k\neq 1] = (I_m)_{ii} * (A)_{ij} = 1*(A)_{ij} = (A)_{ij} \Rightarrow (I_mA)_{ij} = (A)_{ij} \Rightarrow \forall ij$

Trasposta di una matrice

data $A = (a_{ij}) \in Mat(m,n)$, definiamo:

$A^t = (a_{ji})$ cioè $(A^t)_{ij} = a_{ji}$ oppure $(A)_{ji}$

$A^t \in Mat(n,m)$

Proprietà: date due matrici della stessa dimensione $A,B \in Mat(m,n)$, $c \in R$

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(c*A)^t = c*A^t$

Preposizione: $(AB)^t = B^tA^t$

Dimostrazione: $A \in Mat(m,p)$, $B \in Mat(p,n)$ fissiamo i,j

$((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = {}^p\Sigma_{k=1} [(A)_{jk}*(B)_{ki}]$ = (riga j di A)*(colonna i di B) =>

$(B^tA^t)_{ij}$ = (riga i di B^t)*(colonna j di A^t) $= {}^p\Sigma_{k=1} [(A^t)_{ik}*(B^t)_{kj}] = {}^p\Sigma_{k=1} [(B)_{ki}*(A)_{jk}] = {}^p\Sigma_{k=1} [(A)_{jk}*(B)_{ki}]$