Interpretazione di un sistema lineare, ker e invertibilità #GAL

Notazione: data $A \in Mat(m,n)$

denotiamo $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ (vettore riga delle colonne) = $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ (vettore colonna delle righe)

dove C_i = colonna i-esima di $A \in Mat(m,1)$

dove R_i = riga i-esima di $A \in Mat(1,n)$

Es: $A = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} = (C_1, C_2) \Rightarrow C_1 = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \quad C_2 = \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}$

Proposizione: sia $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \in Mat(m,n)$, $\underline{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in Mat(n,1)$

allora $A*\underline{w} = (C_1*w_1, C_2*w_2, \ldots, C_n*w_n) \in Mat(n,1)$ $\quad C_n$ = colonna w_1 = numero

moltiplicazione a destra per un vettore colonna <-> combinazione lineare delle colonne della matrice

Sia $A = (C_1, C_2, \ldots, C_n) \in Mat(m,n)$, $\quad \underline{b} \in R^m$, $\quad \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (vettore colonna delle incognite)

Allora $A\underline{x} = \underline{b} \iff x_1C_1, x_2C_2, \ldots, x_nC_n = \underline{b}$ $\quad$ cioè

soluzioni di un sistema lineare <-> scrivere il vettore di $\underline{b}$ dei termini noti come combinazione lineare della matrice dei coefficienti

Definizione: sia $A \in Mat(m,n)$

Il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$ è detto il sistema omogeneo associato ad A

il suo insieme delle soluzioni si chiama nucleo (o kernel) di A

$ker(A) = \{\underline{x} \in R^n : A\underline{x} = \underline{0}\} \subseteq R^n$

Osservazione: un sistema omogeneo ha sempre soluzioni (no pivot nei termini noti): abbiamo sempre $\underline{0} \in ker(A)$

alternativamente: $rk(A) = rk(A|\underline{0})$ => sempre vera, il rango non aumenta

Teorema: sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare con insieme delle soluzioni S

supponiamo che $S \neq \varnothing$ e sia $v \in S$ (una soluzione particolare)

allora: l'insieme delle soluzioni S è strettamente legato al nucleo di A

$S = \underline{v} + ker(A)$

Definizione: $\{\underline{v} + \underline{w} : \underline{w} \in ker(A)\}$ $\quad$ cioè $\{$soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}\}$ = una traslazione di $\{$soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}\}$

Generalizzazione: un oggetto qualsiasi $\in R^n$ => una traslazione dell'oggetto passante per l'origine del spazio R^n

Dimostrazione: dimostrare che, dato un vettore $\underline{u} \in R^n$, abbiamo

$\underline{u} \in S \iff \underline{u} \in [\underline{v}$ è $\ker(A)]$

Osservazione: $\underline{u} \in S \Rightarrow A\underline{v} = \underline{b}$

$\underline{u} \in S \iff A\underline{u} = \underline{b} \iff A\underline{u} = A\underline{v} \iff A\underline{u} - A\underline{v} = \underline{0} \iff A(\underline{u} - \underline{v}) = \underline{0} \iff \underline{u} - \underline{v} \in \ker(A)$

ker(A) insieme dei vettori che moltiplicati a destra per A da $\underline{0}$

Denomino $\underline{w} = \underline{u} - \underline{v} \in \ker(A) \iff \underline{u} = \underline{v} + (\underline{u} - \underline{v}) \Rightarrow \underline{u} = \underline{v} + \underline{w}$ **dove** $\underline{\mathbf{w}}$ $\mathbf{\in ker(A)}$ $\iff \underline{u} \in \ker(A)$

Teorema: sia $A \in Mat(n,n)$

seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $rk(A) = n$
2. $A\underline{x} = \underline{b}$ (ha un'unica soluzione)
3. $\exists S \in Mat(n,n)$ t.c. $SA = I_n$
4. $\exists D \in Mat(n,n)$ t.c. $AD = I_n$

Osservazione: in questo caso segue che S = D

infatti: $S = SI_n = S(AD) = (SA)D = I_nD = D$

la matrice A è detta invertibile, e $A^{-1} = S = D$ è detta la matrice inversa di A ed è unica

Se la matrice è invertibile $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Metodo di Gauss-Jordan per calcolare l'inversa: $(A \mid I_n) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (I_n \mid A^{-1})$

Proposizione: siano $A,B \in Mat(n,n)$ invertibili

1. AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ se $rk(A) = n$, $rk(B) = rk(A) = n$
2. A^t è invertibile e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Dimostrazione:

1. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \Rightarrow B^{-1}A^{-1}$ è l'inversa di AB
2. $AA^{-1} = I_n \Rightarrow (AA^{-1})^t = (I_n)^t \Rightarrow (A^{-1})^t(A^t) = I_n \Rightarrow A^t$ è invertibile $(A^{-1})^t$ è l'inversa cioè $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$