Successioni monotone, limiti di successioni monotone
#Analisi1

Definizione: una successione a_n si dice monotona

- Crescente se $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in N$ (equivalentemente $a_n \le a_m$ se $n \le m$)
- Strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in N$ (equivalentemente $a_n < a_m$ se $n < m$)
- Decrescente se $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall n \in N$ (equivalentemente $a_n \ge a_m$ se $n \ge m$)
- Strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in N$ (equivalentemente $a_n > a_m$ se $n > m$)

Teorema (sul limite delle successioni monotone):

sia a_n una successione monotona e limitata, allora esiste $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l \in R$

Inoltre se a_n crescente allora $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l^-$, $l^- = \sup a_n$

Inoltre se a_n decrescente allora $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l^+$, $l^+ = \inf a_n$

Osservazione:

- se a_n cresce, basta a_n limitata dal basso
- se a_n decresce, basta a_n limitata dall'alto

Osservazione: è sufficiente che a_n sia definitivamente monotona e limitata affinché a_n ammetta limite $l \in R$

Dimostrazione:

a_n crescente e superiormente limitata $\exists l = \sup a_n \in R^*$

Poiché a_n limitata dall'alto, $l \in R$

per definizione di estremo superiore, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in N$ t.c. $l - \varepsilon < a_{n0} \le l$

Essendo a_n crescente, $a_{n0} \le a_n \Rightarrow l - \varepsilon < a_{n0} \le a_n$ $\forall n \ge n_0$

Essendo $l = \sup a_n$, $l - \varepsilon < a_n \le l$ $\forall n \ge n_0$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in N$ t.c. se $n \ge n_0$ $l - \varepsilon < a_n \le l$ per definizione $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = l^-$, $l = \sup a_n$ $a_n \le l$

La dimostrazione per a_n decrescente e inferiormente limitata è analoga

Osservazione: questo teorema si poggia sull'assioma dell'estremo superiore che R soddisfa e Q no

Corollario (sul limite di successione monotone, limitate o illimitate):

sia a_n successione monotona, allora a_n ammette limite in $l \in R^*$

se a_n monotona crescente allora $\exists Lim_{n->\infty} a_n \in R \cup \{+\infty\}$ $l = \sup a_n$

se a_n monotona decrescente allora $\exists Lim_{n->\infty} a_n \in R \cup \{-\infty\}$ $l = \inf a_n$

Osservazione: ogni successione monotona è regolare $\exists Lim_{n->\infty} a_n \in R^*$

Dimostrazione: solo per il caso crescente

$\exists l = \sup a_n \in R \cup \{+\infty\}$ ci sono due casi $l \in R$ o $l = \{+\infty\}$

se $l \in R$, $a_n \leq l$ $\forall n \in N$ e quindi limitata dall'alto, siamo nel caso del teorema precedente, quindi $\exists Lim_{n->\infty} a_n = l^-$, $l = \sup a_n \in R$

la dimostrazione è conclusa se $l \in R$

se $l = \sup a_n = +\infty$ la successione non è limitata dall'alto e quindi $\forall M > 0$ $\exists n_0 \in N$ t.c. $a_{n0} > M$

Essendo a_n crescente $\forall n \geq n_0$ $a_n \geq a_{n0} > M$ per la definizione di limite $Lim_{n->\infty} a_n = +\infty$

Poiché siamo nel caso $l = \sup a_n = +\infty$ abbiamo la tesi, $\exists Lim_{n->\infty} a_n = +\infty = \sup a_n$

Osservazione: a_n monotona => $\exists Lim_{n->\infty} a_n \in R^*$ (non è verificato il contrario)

Esempio: $a_n = (-1)^n/n$ $Lim_{n->\infty} a_n = 0$ a_n non monotona

Teorema: data una successione a_n, se $\exists Lim_{n->\infty} a_n = l \in R$, allora a_n limitato

Osservazione: $\exists Lim_{n->\infty} a_n = l \in R$ => a_n limitata (non è verificato il contrario, a_n potrebbe essere irregolare e limitata)

Dimostrazione: fissiamo $\varepsilon = 1$ (per convenzione) per la definizione di limite

$\exists n_1$ $\forall n \geq n_1$ $l - 1 < a_n < l + 1$

chiamiamo $M = \max(l-1, a_0, \dots, a_{n+1}, l+1) \in R$ $m = \min(l-1, a_0, \dots, a_{n+1}, l+1) \in R$

allora $\forall n \in N$ $m \leq a_n \leq M$

Esempio: $q \in R$, $a_n = q^n$ $n \in N$

$Lim_{n->\infty} a_n =$
- se $q > 1$ (crescente) $+\infty$
- se $q = 1$ 1
- se $0 < q < 1$ 0
- se $q = 0$ 0
- se $-1 < q < 0$ (non monotona) 0
- se $q = -1$ (limitata) $\nexists$
- se $q < -1$ (illimitata) $\nexists$

Progressione geometrica di ragione q

Osservazione: $Lim_{n->\infty} a_n = l \in R \iff Lim_{n->\infty} |a_n - l| = 0$

se l = 0 $Lim_{n->\infty}\ a_n = 0 \Leftrightarrow Lim_{n->\infty}\ |a_n| = 0$