Numeri complessi #Analisi1

(p = rho)

Numeri complessi:

$x^2+1 = 0$ non ha soluzioni in R e in nessun campo X, infatti su un campo X ordinato vale $x^2 > 0 \quad \forall x \in X$

$1 > 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 > 0 \quad \forall x \in X$

Introduciamo l'unità immaginaria: i, definita dalla seguente proprietà: $i^2 = -1$

$C = \{ z = a + ib : a,b \in R, i^2 = -1 \}$

$z = a + ib$ prende il nome di forma algebrica del numero complesso $z \in C$

$a = Re\text{-}z$ parte reale di $z \in C$

$b = Im\text{-}z$ parte immaginaria di $z \in C$

Osservazione: $Re\text{-}z, Im\text{-}z \in R, \forall z \in C$

Esempio: $z = 3 - 2i$ $Re\text{-}z = 3$ $Im\text{-}z = -2$

Per definizione, $\forall z=a+ib \in C, \forall w=x+iy \in C, \quad a,b,x,y \in R$:

- $z+w = (a+x) + i(b+y)$
- $z*w = (ax-by) + i(ay+bx)$

Osservazione: le operazioni +,* in C vengono formalmente definite come somme e prodotti di polinomi a coefficienti reali (di grado al più 1) in i, con più la regola aggiuntiva $i^2 = -1$

Teorema: C con +,* è un campo, cioè soddisfa le proprietà (S_1)-(S_4), (P_1)-(P_4), (SP)

- In C l'elemento neutro di * è $I = 1 + i0$ infatti $\forall a,b \in R$ $(a + ib)(1 + i0) = a + ib$
- In C se $z = a + ib$, $z \neq 0$, $z^{-1} = 1/z = x/(x^2+y^2) - i*[y/(x^2+y^2)]$ è il reciproco di z

Osservazione: $R \subset C$ è sottocampo, cioè C estende R $\quad x \in R \Longleftrightarrow x + i0 \in C$

inoltre $(a + i0) + (x + i0) = (a + x) + i0 = a + x \quad (a + i0)(x + i0) = ax + i0 = ax$

Osservazione: R può essere identificato coi punti di una retta - C può essere identificato coi punti di un piano

$z = x + iy \in C$, con $x,y \in R$

x rappresenta lo spostamento dall'origine in ascissa

y rappresenta lo spostamento dall'origine in ordinata

In questa identificazione, R corrisponde all'asse delle ascisse

Il piano prende il nome di piano complesso o di Gauss in C

Il piano di prende il nome di piano cartesiano in R^2

In particolare, inoltre, ogni numero complesso può anche essere pensato come vettore nel piano applicato in 0 e avente l'altro estremo in (x,y) rappresentato da 0 a (x,y)

Somma in C:

La somma di due numeri complessi è la somma di due vettori perché $\forall z=x+iy \in C$ $\forall w=a+ib \in C$

$z+w = (x + a) + i(y + b)$

Sommare due numeri complessi z e w corrisponde a sommare i corrispondenti vettori che li rappresentano, tramite la regola del parallelogramma

Il significato geometrico della somma nel piano complesso è una traslazione

Somme: traslazioni   Prodotti: rotazioni e dilatazioni

Definizione: dato $\forall z=x+iy \in C$ chiamiamo

- $\underline{z} = x - iy$ complesso coniugato di z
- $|z| = \sqrt{(x^2+y^2)}$ modulo di z

Osservazione:

- $|z| \geq 0 \quad \forall z \in C$
- $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$
- |z| è la lunghezza del segmento di estremi 0,z nel piano cioè la distanza di 0 da z (teorema di Pitagora)
- $\underline{z}$ è il simmetrico di z rispetto all'asse reale $z = \underline{z}$ se e solo se Im-z = 0 cioè se e solo se $z \in R$

Osservazione:

se Im-z = costante   retta orizzontale // Re (x)

se Re-z = costante   retta verticale // Im (y)

se |z| = costante = p   circonferenza in 0 con raggio p

Osservazione:

- $z*z = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad \forall z=x+iy \in C$
- $|z| = |\underline{z}| \quad \forall z \in C$
- $1/z = \underline{z} / (z*\underline{z}) = \underline{z} / |z|^2 \quad \forall z \in C\backslash\{0\}$
- $\underline{(z + w)} = \underline{z} + \underline{w} \quad \forall z,w \in C$
- $\underline{(z*w)} = \underline{z} * \underline{w} \quad \forall z,w \in C$
- $z / w = (z * \underline{w}) / (w * \underline{w}) = (z * \underline{w}) / |w|^2 \quad \forall z \in C, \forall w \in C\backslash\{0\}$

Equazioni in C:

$z^2 + 2Re\text{-}z - i*Im\text{-}z + \underline{z} = 0$

sostituire $z = x + iy$ $Re\text{-}z = x$ $Im\text{-}z = y$

creare un si sistema associato a due equazioni, una con le parti reali e una con quelle immaginarie

risolvere il sistema e considerare tutte le soluzioni $x,y \in R$

Forma trigonometrica e forma esponenziale:

Per individuare $z \in C$ possiamo assegnare Re-z,Im-z $\in R$ e scrivere $z = x + iy$

Alternativamente possiamo individuare z assegnando $p = \sqrt{(x^2+y^2)} = |z|$, la distanza di z da 0 e $\partial = \arg z$ (argomento di z), l'angolo orientato formato dal semiasse delle $x > 0$ e dalla semiretta uscente da 0 e passante per z (+ in senso antiorario, - in senso orario andando dal semiasse alla semiretta)

$|z| = p$ $\arg z = \partial$

Osservazione:

- $p = |z| =$ costante > 0 => circonferenza centrale in 0 con raggio p
- Arg $z = \partial =$ costante => semiretta (senza l'origine) uscente da 0

Osservazione:

- $|0| = 0$
- Arg $z = 0$ non è ben definito
- L'argomento di un numero $z \in C\backslash\{0\}$ è definito a meno di multipli interi di 2π, cioè se $\partial = \arg z$ anche $\partial + 2k\pi$ lo è $\forall k \in R$

Osservazione:

- $p = |x| = \sqrt{(x^2+y^2)}$
  per $z = x + iy \neq 0$ ->
- $x = p*\cos \partial$ => $\cos \partial = x/p = x/(x^2+y^2)$
- $y = p*\sin \partial$ => $\sin \partial = y/p = y/(x^2+y^2)$
- In particolare se $x \neq 0$ => $\tan \partial = y/x$

ATTENZIONE quadrante dell'angolo:

in generale:

- Può non essere $\partial = \arccos [x/(x^2+y^2)]$
- Può non essere $\partial = \arcsin [y/(x^2+y^2)]$
- Può non essere $\partial = \arctan (y/x)$

$\partial = \arctan (y/x)$ se $z \in$ I,IV quadrante

$\partial = \arctan (y/x) + \pi$ se $z \in$ II,III quadrante

Osservazione: si chiama argomento principale di z l'unico argomento di z in $[0,2\pi)$ o in $[-\pi,\pi)$ a seconda delle convenzioni

Definizione: dato $z \in C$, $z = x + iy$

$z = x + iy$ forma algebrica

$p(\cos \partial + i*\sin \partial)$ forma trigonometrica

$p*e^{i\partial}$ forma esponenziale

Osservazione: $\forall \partial \in R$ vale $e^{i\partial} = \cos \partial + i*\sin \partial$ formula di Eulero

Teorema (Formula di De Moivre):

dati $z,w \in C$, se:

$z = r(\cos \partial + i*\sin \partial) = r*e^{i\partial}$

$w = R(\cos ß + i*\sin ß) = R*e^{iß}$

$z*w = r*R[\cos(\partial+ß) + i*\sin(\partial+ß)] = rR*e^{i(\partial+ß)}$

inoltre se $w \neq 0$

$z/w = r/R[\cos(\partial-ß) + i*\sin(\partial-ß)] = r/R*e^{i(\partial-ß)}$

Osservazione:

- $|z*w| = |z|*|w|$ $\arg(z*w) = \arg z + \arg w$
- $|z/w| = |z| / |w|$ $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$

  scegliendo $z = 1$ troviamo che se $w = R(\cos ß + i*\sin ß)$

  $1/w = 1/R (\cos ß - i*\sin ß) = 1/R*e^{-iß}$
- Formule coerenti con l'algebra degli esponenziali anche se coinvolgono numeri complessi

Osservazione: se $z \in C$, $n \in N$ -> $z = r(\cos \partial + i*\sin \partial) = r*e^{i\partial}$

Per De Moivre se $n \in N$

$z^n = r^n(\cos n*\partial + i*\sin n*\partial) = r^n*e^{in\partial}$

$z^{-n} = r^{-n}(\cos n*\partial - i*\sin n*\partial) = r^{-n}*e^{-in\partial}$ se $z \neq 0$

Formule di De Moivre:

$z*w = r*R[\cos(\partial+ß) + i*\sin(\partial+ß)] = rR*e^{i(\partial+ß)}$

Dimostrazione:

$z*w = r(\cos \partial + i*\sin \partial) * R(\cos ß + i*\sin ß) = rR[(\cos \partial * \cos ß - \sin \partial * \sin ß) + i*(\sin \partial * \cos ß + \sin ß * \cos \partial)] =$

= identità trigonometrica (coseno e seno della somma) $= rR[\cos(\partial+ß) + i*\sin(\partial+ß)] = rR*e^{i(\partial+ß)}$

Osservazione: la dimostrazione della formula di De Moivre per il quoziente è analoga

Definizione: se $w \in C$, $n \in N$, $n \geq 1$ allora

ogni numero complesso $z \in C$ t.c. $z^n = w$ si chiama radice n-esima (complessa) di w

Teorema: se $w \in C$, $n \in N$, $n \geq 1$ allora

esistono esattamente n radici complesse n-esime distinte di w

Inoltre se $w = r*e^{iß} = r(\cos ß + i*\sin ß)$ allora le n radici complesse n-esime $z_0, z_1, \ldots, z_n$ hanno la forma seguente:

$z_k = r^{1/n}(\cos \partial_k + i*\sin \partial_k) = r^{1/n} * e^{i\partial_k}$ con $\partial_k = ß/n + (2k\pi)/n$ $k = 0,\ldots,n-1$

Tutte le radici n-esime si sparpagliano nel piano in maniera ordinata, rappresentando i vertici di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di raggio p

Dimostrazione: Dati $w = Re^{ie}$, $R \neq 0$, cerchiamo $z = pe^{i\partial}$ t.c. $z^n = w$ => (De Moivre) $z^n = p^n e^{i\partial n} = w = Re^{iß}$ =>

=> $\{p^n = R; \quad n\partial = ß + 2h\pi \quad h \in Z\}$ => $\{p = R^{1/2}$ (radice reale); $\partial = ß/n + (2h\pi)/n \;\; h \in Z\}$

Sono radici n-esime complesse di w, non distinte, dividiamo h per n

$h = q*n + k$ q = quoziente, k = resto => $q \in Z$, $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ => $(2\pi R)/n = 2q\pi + (2k\pi)/2$

Se h_1, $h_2 \in Z$ hanno lo stesso k, quando si divide per n, essi individuano lo stesso numero complesso z_k, perché danno luogo ad argomenti sfasati di un multiplo intero di 2π. Quindi le radici complesse n-esime distinte si n sono tante quanti i possibili resti della divisione di un intero per n, cioè n, esse sono:

$z_k = R^{1/n}(\cos \partial_k + i*\sin \partial_k)$

$\partial_k = ß/n + (2k\pi)/n \quad k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

Osservazione: tutte le radici n-esime complesse di w hanno lo stesso modulo $|z_0| = |z_1| = \dots = |z_{n-1}| = |w|^{1/n}$

Nel piano complesso giacciono nella circonferenza centrata in 0 e con raggio $|w|^{1/n}$

Due radici successive, inoltre, hanno argomento che differisce di $(2\pi)/n$, angolo fisso (cioè l'angolo al centro è lo stesso per ogni coppia di radici successive)

Quindi le n radici n-esime distinte si dispongono a formare un poligono regolare di n lati, inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $R^{1/n}$

Osservazione: le radici n.esime complesse di un numero $w \in C$ formano un insieme di n numeri complessi, in particolare la radice n-esima complessa non è una funzione da C in C

Osservazione: De Moivre

$z = r*e^{i\partial}$, $w = R*e^{iß}$ =>

$z*w = rR*e^{i(\partial+ß)}$ $\qquad z/w = r/R*e^{i(\partial-ß)}$ con $w \neq 0$

$|z*w| = |z| * |w| \qquad |z/w| = |z| / |w|$

$\arg(z*w) = \arg z + \arg w \; \arg(z/w) = \arg - \arg w$

Moltiplicare z*w da come risultato nel piano complesso una rotazione di z par all'angolo ß = arg w (+ in senso antiorario, - in senso orario) e una dilatazione o omotetia di un fattore pari a R = |w|

Equazioni di secondo grado in C:

se $a,b,c \in R$, $a \neq 0$

$az^2 + bz + c = 0$ ha due soluzioni con molteplicità:

con $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$z_0, z_1 = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / 2a$ reali distinte

con $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$z_0, z_1 = (-b \pm 0) / 2a$reali coincidenti

con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$z_0, z_1 = (-b \pm I^* \sqrt{\Delta}) / 2a$ complesse coniugate

Più in generale se se $a,b,c \in C$, $a \neq 0$, allora

$az^2 + bz + c = 0$ ammette due soluzioni in C (con molteplicità) che si scrivono:

$z_0, z_1 = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / 2a$ con $az^2 + bz + c = 0 \in C$

qui la radice è intesa in senso complesso, restituisce 2 valori opposti in segno, cioè della forma z^* e $-z^*$ con $z^* \in C$

vale: $az^2 + bz + c = a(z - z_0)(z - z_1)$

Teorema fondamentale dell'algebra:

un'equazione polinomiale $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

con $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in C$, $a_n \neq 0$, $n \in N$, $n \geq 1$

ha esattamente n soluzioni in C, se ciascuna di esse è contata con la dovuta molteplicità (cioè possono non essere distinte) dette $z_0, z_1, \dots, z_n$ tali soluzioni vale $\forall z \in C$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_0)(z - z_1)\dots(z - z_{n-1})$$