Numero di Nepero e, criterio del rapporto per successioni, confronti e stime asintotiche, algebra di o-piccolo #Analisi1

Teorema (numero di Nepero e):

la successione $a_n = (a + 1/n)^n \in Q, \forall n \in N$ è monotona, crescente e limitata

in particolare ammette limite in R

Definizione:

$e = \text{Lim}_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = 2,71828...$

Osservazione:

$e = \sup (1 + 1/n)^n \quad n \in N, \qquad e > (1 + 1/n)^n \quad \forall n \in N$

Dimostrazione (cenno):

a_n crescente, cioè $\forall n \in N \quad a_n / a_{n-1} \geq 1 \quad a_n/a_{n-1} = (1 + 1/n)^n / (1 + 1/n-1)^{n-1} \geq$ ...(diseguaglianza di Bernoulli)... ≥ 1

- a_n è limitata, introduciamo una successione b_n decrescente t.c. $a_n \leq b_n \; \forall n \in N, n \neq 0$ allora $a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \geq 1$

e a_n sarà limitata; scegliamo $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$; $a_n = (1 + 1/n)$ allora $a_n \leq b_n$ inoltre b_n decrescente, cioè $b_{n-1}/b_n \geq 1 \;\; \forall n \geq 2$

$b_{n-1}/b_n = (1 + 1/n)^n / (1 + 1/n-1)^{n+1} \geq$ ...(diseguaglianza di Bernoulli)... $\geq 1 \;\Rightarrow\; a_n$ limitata, crescente

Teorema: sia c_n una successione t.c. $\text{Lim}_{n\to\infty} c_n = \pm\infty$ allora $\text{Lim}_{n\to\infty} (a + 1/c_n)^{c_n} = e$

Corollario: $\forall a \in R \; \text{Lim}_{n\to\infty} (1 + a/n)^n = e^a$

Teorema (criterio del rapporto per successione):

se a_n successione t.c. $a_n > 0$ definitivamente ed $\exists \text{Lim}_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ allora

- Se $l > 1$, $\quad \text{Lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- Se $0 \leq l < 1$, $\quad \text{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0$

Osservazione: se $l = 1$ non si può concludere nulla

—Dimostrazione contenuta nella dimostrazione del criterio del rapporto per serie che tratteremo più avanti—

Esempio: $\text{Lim}_{n\to\infty} a^n/n! = 0 \qquad \forall a > 0 \qquad$ ovvio se $a \in [0,1]$

Dimostrazione:

$a_{n+1}/a_n = a^{n+1}/(n+1)! * n!/a^n = (a^n * a)/((n+1)n!) * n!/a^n = a/n+1 \to 0$

$\Rightarrow \text{Lim}_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 0 \Rightarrow \text{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0$ per criterio del rapporto

Osservazione: $\text{Lim}_{n\to\infty} n!/n^n = 0$

Gerarchia degli infiniti:

$(\text{Log}_a n)^ß << n^∂ << a^n << n! << n^n$ $\forall a > 1, \forall ß > 0, \forall ∂ > 0$

Esempio:

$\text{Lim}_{n\to\infty} n^{1/2}$ $a_n^{b_n} = e^{\text{Log}_{an}(bn)} = e^{bn*\text{Log } an}$

$\text{Lim}_{n\to\infty} n^{1/2} = e^{1/n \text{ Log } n}$; $1/n * \text{Log } n = 0 \Rightarrow \text{Lim}_{n\to\infty} e^0 = 1 \Rightarrow \text{Lim}_{n\to\infty} n^{1/2} = 1$

Definizione (confronti e stime asintotiche):

a_n, b_n successioni infinite cioè $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ e $\text{Lim}_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, se $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n/b_n =$

- 0 — a_n infinito di ordine inferiore rispetto b_n
- $l \in R\backslash\{0\}$ — a_n, b_n infiniti dello stesso ordine
- $\pm\infty$ — a_n infinito di ordine maggiore rispetto b_n
- $\nexists$ — a_n, b_n non confrontabili

Esempio:

n! Infinito di ordine superiore a $n^∂$ $\forall ∂ > 0$ $(\log n)^ß$ infinito di ordine inferiore rispetto a^n $\forall a > 1, \forall ß > 0$

Esempio:

$\log n$ e $\log n^2 = 2\log n$ infiniti dello stesso ordine

$\log n$ è infinito di ordine inferiore rispetto $(\log n)^2$

Definizione:

date a_n, b_n successioni infinitesime, $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = \text{Lim}_{n\to\infty} b_n = 0$ ($b_n \neq 0$ definitivamente), $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n/b_n =$

- 0 — a_n infinitesimo di ordine superiore rispetto b_n
- $l \in R\backslash\{0\}$ — a_n, b_n infinitesimi dello stesso ordine
- $\pm\infty$ — a_n infinitesimo di ordine inferiore rispetto b_n

- $\nexists$ a_n, b_n non confrontabili

Esempio: $1/n!$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $1/n^{\partial}$
Esempio: $a_n = \sin n / n$ $b_n = 1/n$ non confrontabili

Definizione:

date a_n, b_n successioni (con $b_n \neq 0$ definitivamente) diremo che:

- a_n è o-piccolo di b_n e scriveremo $a_n = o(b_n)$ se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$
- a_n è asintotico a b_n e scriveremo $a_n \sim b_n$ se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = +1$

Osservazione:

- se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \pm\infty$ allora $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 0 \Rightarrow b_n = o(a_n)$
- se $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ allora $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = +1 \Rightarrow b_n \sim a_n$

Osservazione (gerarchia degli infiniti):

$(\log_a n)^{\beta} = o(n^{\partial})$ $\forall a > 1, \forall \beta > 0, \forall \partial > 0$

$n^{\partial} = o(a^n)$ $\forall a > 1, \forall \partial > 0$

$a^n = o(n!)$ $\forall a > 1$

$n! = o(n^n)$

Osservazione:

- $a_n \sim a_n$
- Se $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$ infatti $a_n / c_n = a_n / b_n * b_n / c_n$
- Se $a_n \sim b_n$ allora $b_n \sim a_n$ infatti $b_n / a_n = (a_n / b_n)^{-1} \to 1^{-1} = 1$

Asintotico ($\sim$) è una relazione di equivalenza tra le successioni

Osservazione:

$a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n = b_n + o(b_n) \Rightarrow (a_n - b_n = o(b_n))$

Dimostrazione:

$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n/b_n - 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)/b_n \Leftrightarrow a_n - b_n = o(b_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n = (a_n\ b_n) + b_n \Leftrightarrow a_n = b_n + o(b_n)$

Proposizione:

1. Se $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n \Rightarrow a_n b_n \sim a'_n b'_n$
2. Se $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n \Rightarrow a_n/b_n \sim a'_n/b'_n$
3. Se $a_n \sim a'_n$ e $\partial \in \mathbb{R} \Rightarrow (a_n)^{\partial} \sim (a'_n)^{\partial}$
4. Se $a_n \sim a'_n$ allora le due successioni hanno lo stesso comportamento al limite, cioè o convergono entrambe allo stesso limite $l \in \mathbb{R}$ o divergono entrambe a $\pm\infty$ o sono entrambe irregolari

Osservazione:

in generale $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n$

$\not\Rightarrow$ $a_n \pm b_n \sim a'_n \pm b'_n$

$e^{a_n} \sim e^{a'_n}$

$a_n^{b_n} \sim a'^{b'_n}_n$

$\log a_n \sim \log a'_n$

Osservazione:

$a_n \sim b_n \not\Rightarrow a_n - b_n \to 0$

$a_n - b_n \to 0 \not\Rightarrow a_n \sim b_n$

Dimostriamo la proposizione:

1. $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n \Rightarrow a_nb_n \sim a'_nb'_n$

   infatti $a_nb_n / a'_n b'_n = (a_n/a'_n \to 1) * (b_n/b'_n \to 1) \to 1$

2. $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n \Rightarrow a_n/b_n \sim a'_n/b'_n$

   infatti $(a_n/b_n) / (a'_n b'_n) = a_n/b_n * b'_n/a'_n = (a_n/a'_n \to 1) * (b_n/b'_n \to 1) \to 1$

3. Se $a_n \sim a'_n$ e $\partial \in R \Rightarrow (a_n)^\partial \sim (a'_n)^\partial$

   infatti $(a_n)^\partial / (a'_n)^\partial = (a_n/a'_n \to 1)^\partial = 1^\partial = 1$

4. Se $a_n \sim a'_n$ allora le due successioni hanno lo stesso limite
   - Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in R$ (o $\pm\infty$) allora $a'_n = (a'_n / a_n \to 1) * (a_n \to l \in R$ o $\pm\infty) \to l \in R$ (o $\pm\infty$)
   - Se a_n è irregolare, anche a'_n deve esserlo, se per assurdo così non fosse $\exists \lim_{n\to\infty} a'_n \in R^*$

     allora per quanto dimostrato sopra essendo $a'_n \sim a_n$ anche per a_n $\exists l = \lim_{n\to\infty} a_n \in R^*$

     assurdo perché a_n è irregolare $\Rightarrow a'_n$ è irregolare

Osservazione: $o(1) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n / 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Osservazione (algebra degli o-piccoli):

- $o(a_n) = o(-a_n) = -o(a_n)$
- $c*o(a_n) = o(a_n) = o(c*a_n)$ $\quad \forall c \in R$
- $a_n*o(b_n) = o(a_nb_n)$ infatti $a_n*o(b_n) / a_n*b_n = o(b_n) / b_n \to 0$ in particolare $a_n*o(1) = o(a_n)$
- $o(1/n) + o(1/n^2) = o(1/n^2)$
- Se $a_n \sim b_n$ allora $o(a_n) = o(b_n)$ infatti $(o(a_n) / b_n) * (a_n/a_n) = (o(a_n) / a_n \to 0) * (a_n / b_n \to 1) \to 0$ in particolare $o(\sin 1/n) = o(1/n)$

Osservazione: è possibile usare la relazione di asintotico con funzioni composte $h(g(f(n)))$, partendo dalla funzione più esterna quando si fa lo sviluppo (h)

Esempio: $\exp(x) = e^x$ $\forall x \in R$

$a_n = \exp(\sin(\log(1 + 1/n))) -1 \sim ?$ se $\varepsilon_n \to 0$

$\exp(\varepsilon_n) -1 \sim \varepsilon_n$ $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$

a_n va pensata come $\exp(\varepsilon_n) -1$ con $\varepsilon_n = \sin(\log(1 + 1/n)) \to 0 \Rightarrow a_n = \exp(\sin(\log(1 + 1/n))) -1 \sim \varepsilon_n = \sin(\log(1 + 1/n))$

a_n va pensata come $\sin(\varepsilon'_n)$ con $\varepsilon'_n = \log(1 + 1/n) \to 0 \Rightarrow a_n = \sin(\log(1 + 1/n)) \sim \varepsilon'_n = \log(1 + 1/n)$

a_n va pensata come $\log(1 + \varepsilon''_n)$ con $\varepsilon''_n = 1/n \to 0 \Rightarrow a_n = \log(1 + 1/n) \sim \varepsilon''_n = 1/n$

Osservazione: se $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in R \setminus \{0\}$ allora $a_n \sim l$