Sottospazi affini #GAL

Definizione:

sia V uno spazio vettoriale

un sottoinsieme $S \in V$ è detto sottospazio affine se esistono un sottospazio vettoriale $H \subseteq V$ e un vettore $\underline{v}_0 \in V$ t.c.

$S = \underline{v}_0 + H \ \underline{def} \ \{\underline{v}_0 + \underline{w} : \underline{w} \in H\} \subseteq V$

Intuitivamente: sottospazio affine = traslazione di un sottospazio vettoriale

Proposizione:

supponiamo $\underline{v}_1 + H_1 = \underline{v}_2 + H_2$ per qualche $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ e sottospazi $H_1, H_2 \subseteq V \Rightarrow H_1 = H_2$

Dimostrazione:

$H_1 \subseteq H_2 \quad \forall \underline{w} \in H_1 \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{w} \in \underline{v}_1 + H_1 = \underline{v}_2 + H_2$

$\Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{w} = \underline{v}_2 + \underline{u}$ per qualche $\underline{u} \in H_2 \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{w} - \underline{v}_2 = u \in H_2$

Scelgo $\underline{w} = \underline{0} \in H_1 \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{0} - \underline{v}_2 \in H_2 \Rightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in H_2$ =(H_2 chiuso rispetto all'opposto o al prodotto per -1)> $\underline{v}_2 - \underline{v}_1 \in H_2$

Prendo $\underline{w} \in H_1$ qualsiasi $\Rightarrow \underline{w} + \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in H_2$ e $\underline{v}_2 - \underline{v}_1 \in H_2 \Rightarrow \underline{w} = (\underline{w} + \underline{v}_1 - \underline{v}_2) + (\underline{v}_2 - \underline{v}_1) \Rightarrow H_1 \subseteq H_2$ e $H_2 \subseteq H_1$

Definizione:

sia $S = v_0 + H \subseteq V$ con H sottospazio (H è unicamente determinato da S, per proposizione)

H si chiama giacitura di S

La dimensione di S è dimv = dimH

in pratica: giaciture = traslazione di S in modo che passi per $\underline{0}$

Osservazione:

v_0 è un punto particolare di S, non è unicamente determinato

Definizione:

un sottospazio affine di dimensione 1 si chiama retta

un sottospazio affine di dimensione 2 si chiama piano

Proposizione:

un sistema lineare $A \in Mat(m,n)$, $\underline{b} \in R^n$

allora $S = \{\underline{x} \in R^n : A\underline{x} = \underline{b}\} \subseteq R^n$ è vuoto oppure è un sottospazio affine

Dimostrazione:

segue dal teorema di struttura dei sistemi lineari

Descrizioni di un sottospazio affine $S \subseteq V$:

- Parametrica (forma esplicita): $S = v_0 + Span(v_1, \dots, v_p) = \{v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_i v_p : t_i \in R\}$

  v_0 = punto particolare $Span(v_1, \dots, v_p)$ = generatori della giacitura ("direzione") t_i = parametri liberi

- Cartesiana (forma implicita): $S = \{\underline{x} \in R^n : A\underline{x} = \underline{b}\}$ equazioni lineari

  Passaggio cartesiana —> parametrica: risolvendo $A\underline{x} = \underline{b}$

  Passaggio parametrica —> cartesiana: $S = \underline{v_0} + H$ -> trovo forma cartesiana $H = \ker(A)$ (caso sottospazi vettoriali)

  trovo $\underline{b} = A\underline{v_0}$ -> $S = \{\underline{x} \in R^n : A\underline{x} = \underline{b}\}$

Osservazione:

dati S_1, S_2 sottospazi affini => $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ oppure $S_1 \cap S_2$ è un sottospazio affine

$S_1 = \underline{v_1} + H_1$ $S_2 = \underline{v_2} + H_2$ => $S_1 \cap S_2 = \underline{v_3} + (H_1 \cap H_2)$ dove $v_3 \in (S_1 \cap S_2)$

Per calcolare $S_1 \cap S_2$, usare le forme cartesiane:

$S_1 : A\underline{x} = \underline{b_1}$ $S_2 : A_2\underline{x} = \underline{b_2}$ $S_1 \cap S_2 : (A_1\ A_2)$(in colonna)$\underline{x} = (\underline{b_1}\ \underline{b_2})$(in colonna)

Definizione:

due sottospazi affini $S_1 = \underline{v_1} + H_1$ $S_2 = \underline{v_2} + H_2$ si dicono paralleli se

- $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- $H_1 \subseteq H_2$ oppure $H_2 \subseteq H_1$

Posizione reciproca tra spazi affini:

Posizione	$S_1 \cap S_2$	H_1, H_2	$\dim(H_1 \cap H_2)$
Coincidenti: $S_1 = S_2$	$\neq \emptyset$	$H_1 = H_2$	$\dim H_1 = \dim H_2$
Coincidenti: $S_1 \subseteq S_2$	$\neq \emptyset$	$H_1 \subseteq H_2$	$< \min(\dim H_1, \dim H_2)$

Incidenti	$\neq \emptyset$	$H_1 \not\subseteq H_2$ e $H_2 \not\subseteq H_1$	$\min(\dim H_1, \dim H_2)$
Paralleli	$= \emptyset$	$H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$	$< \min(\dim H_1, \dim H_2)$
Sghembi	$= \emptyset$	$H_1 \not\subseteq H_2$ e $H_2 \not\subseteq H_1$	$\min(\dim H_1, \dim H_2)$

Teorema (Algoritmo di estrazione di una base):

Sia $A \in Mat(m,n)$ e A' una riduzione a scala

le colonne di A corrispondenti ai pivot di A' formano una base di col(A)

Corollario (Algoritmo di completamento a una base):

dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in R^m$ LI

Applicando l'algoritmo di estrazione di una base a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$

otteniamo una base di R^m contenente $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$