Serie notevoli, convergenza di una serie, serie a termini positivi, criterio del confronto per serie #Analisi1

Esempio (Serie telescopiche):

$^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n$ con $a_n = b_n - b_{n+1}$ dove b_n è una qualsiasi successione

$S_N = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, a_n = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, b_n - b_{n+1} = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \dots + (b_{N-1} - b_N) + (b_N - b_{N+1}) = b_0 - b_{N+1}$

$\Rightarrow\ \exists S = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} (b_0 - b_{N+1}) \iff \exists \mathrm{Lim}_{n\to\infty} b_n = b^* \in R^*$

In particolare, se $\exists \mathrm{Lim}_{n\to\infty} b_n = b^* \in R^*$ allora $^{\infty}\Sigma_{n=0} = b_0 - b^* \in R^*$

Esempio (Serie di Mengoli):

$^{\infty}\Sigma_{n=1}\, (1 / n(n+1)) = 1$ $\quad a_n = 1 / n(n+1) = 1/n - 1/n+1$ $\quad$ serie telescopica con $b_n = 1/n$

$S_N = {}^{N}\Sigma_{n=1}\, a_n = {}^{N}\Sigma_{n=1}\, (1/n - 1/n+1) = 1 - 1/N+1 \Rightarrow \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N = 1 \Rightarrow {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, (1 / n(n+1)) = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N = 1$

Teorema(condizione necessaria per la convergenza di una serie):

se $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ converge, allora $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0$

Corollario:

se $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} a_n$ non esiste, oppure se $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} a_n \neq 0$, allora $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ non converge

Dimostrazione:

$S_N = {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ successione delle somme parziali, $\quad$ per ipotesi $\exists S = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N \in R$

osserviamo che $S_N = {}^{N}\Sigma_{n=1}\, a_n = a_N + {}^{N-1}\Sigma_{n=1}\, a_n = a_N + S_{N-1} \Rightarrow a_N = S_N - S_{N-1}$ $\quad \forall N \in N$

poiché $\mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_{N-1} = S \in R$ per algebra dei limiti $\mathrm{Lim}_{N\to\infty} a_N = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N - \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_{N-1} = 0$

Osservazione:

se $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} a_n$ non necessariamente $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ risulta convergente

Esempio:

$^{\infty}\Sigma_{n=1}\, 1/n$ serie armonica; affermiamo che $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} 1/n = 0$ ma che $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, 1/n = +\infty$

osserviamo che $1/n \geq \log(1 + 1/n)$ $\quad \forall n \in N$

- $y = \log(1+x)$, $y = x$ $\quad$ retta tangente in 0 al grafico della funzione che è concava

$\Rightarrow \log(1+x) \le x \quad \forall x > -1 \Rightarrow \log(1+1/n) \le 1/n \quad \forall n \ge 1$

- $e = \sup(1+1/n)^n = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n \Rightarrow e \ge (1+1/n)^n \Rightarrow 1 \ge \log(1+1/n)^n = n\cdot\log(1+1/n) \Rightarrow 1/n \ge \log(1+1/n)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} 1/n \ge \sum_{n=1}^{N} \log(1+1/n) = \sum_{n=1}^{N} \log(n+1/n) = \sum_{n=1}^{N} \log(n+1) - \log n = \log(N+1) - \log 1 = \log(N+1) \Rightarrow S_N \ge \log(N+1) \quad \forall N \in \mathbb{N}$

per il teorema del confronto per successioni divergenti:

$\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$ perché $\lim_{N\to\infty} \log(N+1) = +\infty \Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$

Teorema:

data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se converge/diverge allora $\forall N \in \mathbb{N}$ anche $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge/diverge

se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$

Osservazione:

se la serie converge a S R allora $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = S - S_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$

Definizione:

$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ si chiama resto n-esimo della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Definizione (Serie a termini positivi (definitivamente)):

data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice a termini (definitivamente) positivi (o non negativi) se $a_n \ge 0$ (definitivamente) in $n \in \mathbb{N}$

Teorema:

Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è a termini (definitivamente) positivi essa converge o diverge a $+\infty$

Dimostrazione:

L'idea è dimostrare che $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ è (definitivamente) crescente, quindi regolare per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone, infatti $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \ge 0 \quad \forall n \ge n_0$ per ipotesi

$\forall N \ge n_0 \; S_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} a_n = a_{N+1} + S_N \ge S_N$

=> S_N è definitivamente crescente per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone

$\exists \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ => $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N = S$

Se $S = +\infty$ la serie diverge, se $S \in \mathbb{R}$ la serie converge

Osservazione:

se $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N = \sup S_N$

Teorema (criterio del confronto per serie a termini positivi):

date due successioni a_n, b_n t.c. $0 \leq a_n \leq b_n$ (definitivamente) $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

Inoltre se $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Dimostrazione:

per semplicità supponiamo $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e le somme parziali delle due serie $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ e $\partial_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$

S_N e ∂_N sono monotone crescenti, quindi $\exists \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N = S \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ e $\exists \mathrm{Lim}_{N\to\infty} \partial_N = \partial \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ con $S = \sup S_N$, $\partial = \sup \partial_N$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, $S = +\infty$ e S_N successione divergente, per confronto di successioni $\mathrm{Lim}_{N\to\infty} \partial_N = +\infty$ quindi

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, $\partial \in \mathbb{R}$ e ∂_N è successione convergente (limitato dall'alto da ∂) segue $0 \leq S_N \leq \partial_N \leq \partial$

quindi anche S_N è limitata pertanto $S = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N \in \mathbb{R}$ cioè $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente

Poiché esistono $S = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N$ e $\partial = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} \partial_N$, passando al limite per permanenza del segno $0 \leq S \leq \partial$

cioè $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Esempio:

confronto con una serie geometrica

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \{1/1\text{-}q \text{ se } |q| < 1;\ +\infty \text{ se } q \geq 1\}$

Esempio:

confronto con serie armonica generalizzata

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\partial} = \{\text{converge } \partial > 1;\ \text{diverge } \partial \leq 1\}$

Esempio:

confronto con serie armonica generalizzata II

$^{\infty}\Sigma_{n=2}$ $1/n^{\partial}*\log(n)^{\text{ß}}$ = {converge $\partial > 1$ ∀ß ∈R oppure $\partial = 1$, ß > 1; diverge $\partial < 1$ ∀ß ∈R oppure $\partial = 1$, ß ≤ 1}

Teorema (criterio del confronto asintotico per serie):

siano a_n, b_n due successioni a termini (definitivamente) positivi, supponiamo $a_n \sim b_n$ ($\text{Lim}_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$)

allora $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ e $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, b_n$ o convergono entrambe o divergono entrambe a $+\infty$

Osservazione:

se le serie convergono, il risultato delle rispettive somme sarà in generale diverso

Dimostrazione:

dato che $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n/b_n \approx 1$ $\varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ t.c. $1 - \varepsilon < a_n/b_n < 1 + \varepsilon$

$\varepsilon = 1/2$ => $1/2 = 1 - 1/2 <(1)< a_n/b_n <(2)< 1 + 1/2 = 3/2$ $\forall n > N_1$

Inoltre $\exists N_2$ t.c. $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n \geq N_2$ allora $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$

da (2) segue che $0 < a_n < 3/2 * b_n$ da (1) segue che $0 < b_n < 2*a_n$

Per il teorema del confronto per serie, se $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, b_n$ converge da $0 < b_n < 2*a_n$ segue che converge anche $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$

viceversa, se $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ converge da $0 < a_n < 3/2 * b_n$ segue che converge anche $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, b_n$

Quindi $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ converge <=> $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, b_n$ converge

Poiché le due serie o convergono o divergono, segue allora anche che $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ diverge <=> $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, b_n$ diverge

Teorema(criterio del rapporto per serie):

sia a_n successione a termini (definitivamente) strettamente positivi e $\exists \text{Lim}_{N\to\infty}\, a_{n+1}/a_n \in R^*$ allora

1. Se $l > 1$ (incluso $l = +\infty$) allora $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ diverge ($\text{Lim}_{\to\infty}\, a_n = +\infty$)
2. Se $0 \leq l < 1$ allora $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ converge

3. Se l = 1 non si può concludere, esistono serie convergenti e serie divergenti t.c. $\text{Lim}_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$

- Se $0 \le l < 1$ allora $\text{Lim}_{\to\infty} a_n = 0$
- Se $l > 1$ allora $\text{Lim}_{\to\infty} a_n = +\infty$

(criterio del rapporto per successioni)

Teorema(criterio della radice per serie):

sia a_n successione a termini (definitivamente) positivi e $\exists \text{Lim}_{N\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \in R^*$ allora

1. Se $l > 1$ (incluso $l = +\infty$) allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge ($\text{Lim}_{\to\infty} a_n = +\infty$)
2. Se $0 \le l < 1$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
3. Se l = 1 non si può concludere, esistono serie convergenti e serie divergenti t.c. $\text{Lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

Osservazione:

se l = 1 non si può concludere nulla in entrambi i criteri

Esempio:

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\partial}$ $\partial \in R$ $a_n = 1/n^{\partial}$ (serie armonica generalizzata)

la serie converge per $\partial > 1$, diverge per $\partial \le 1$

$a_{n+1}/a_n = 1/(n+1)^{\partial} * n^{\partial} = (n/n+1)^{\partial} \longrightarrow 1^{\partial} = 1 \Rightarrow \text{Lim}_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ $\forall \partial \in R$

$\sqrt[n]{a_n} = (1/n^{\partial})^{1/n} = e^{\log(1/n^{\partial/n})} = e^{\partial/n \log(1/n)}$ $\log(1/n) / n = -\log n / n \longrightarrow 0$ (gerarchia degli infiniti) $\text{Lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^0 = 1$

Dimostrazione (criterio del rapporto):

per semplicità assumiamo $a_n > 0$ $\forall n \in N$ $l = \text{Lim}_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$

1. $l > 1$ se $l \in R$ scelgo ε

$\varepsilon = l-1/2$ allora $\exists N \in N$ t.c. $\forall n \ge N$

$l - \varepsilon < a_{n+1}/a_n$ $(< l + \varepsilon)$ cioè $a_{n+1}/a_n > l - \varepsilon = l - (l-1)/2 = (l+1)/2 > 1$

chiamiamo $q = (l+1)/2$ quindi $a_{n+1}/a_n > q > 1$ $\forall n \ge N$

$\Rightarrow a_{n+1} > q*a_n > q^2*a_{n-1} > \dots > q^{(n+1)-N}*a_N$ $\forall n \ge N \Rightarrow a_n \ge (a_N/q^N) * q^n$

per il criterio del confronto (per successioni e serie) $\text{Lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

- Se $l = +\infty$, per M=2 esiste (vedi definizione di limite) $N \in N$ t.c. $\forall n \ge N$ $a_{n+1}/a_n > 2 > 1$

quindi come già visto $\forall n \ge N$ $a_{n+1} > 2a_n > 2^2 a_{n-1} > \dots > 2^{(n+1)-N}*a_N$

=> $\forall n \geq N$ $a_n > 2^n a_n/2^N$ per confronto (successioni e serie) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

2. Se $0 \leq l < 1$ se $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq N$ $(l - \varepsilon <)$ $a_{n+1}/a_n < l + \varepsilon$, $\varepsilon = (1-l)/2$

=> $\forall n \geq N$ $a_{n+1}/a_n < l + \varepsilon = l + (1-l)/2 = (1+l)/2 < 1$ definiamo $q = (1+l)/2 < 1$ allora $\forall n \geq N$ $0 < a_{n+1}/a_n < q < 1$

=> $\forall n \geq N$ $a_{n+1} < q*a_n < q^2*a_{n-1} < \dots < q^{(n+1)-N}*a_N$

=> $\forall n \geq N$ $0 < a_n < q^n a_N/q^N$ poiché $q \in (0,1)$ per il criterio del confronto delle serie (con serie geometrica)

segue che $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$ convergente, anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Esempio:

$\sum_{n=1}^{\infty} a^n/n^n$ $a > 0$ $a_n = a^n/n^n > 0$ $\sqrt[n]{a_n} = a/n \longrightarrow 0$ $l \in [0,1)$ => la serie converge $\forall a > 0$ per criterio della radice