# Applicazione lineare $Q_B$ dei coefficienti di una base, interpolazione #GAL

Proposizione:

sia $B = \{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ una base di V

dato $\underline{v} \in V$, esiste un'unica scelta di coefficienti $c_1, \dots, c_n \in R$ t.c. $\underline{v} = {}^n\Sigma_{i=1}\, c_i\underline{b_i}$

Dimostrazione:

dimostriamo la loro esistenza:

per ipotesi $\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}$ che generano V => esistono $c_1, \dots, c_n \in R$ t.c. $\underline{v} = {}^n\Sigma_{i=1}\, c_i\underline{b_i}$

dimostriamo la loro unicità:

supponiamo esistano altri $c'_1, \dots, c'_n$ t.c. ${}^n\Sigma_{i=1}\, c'_i\underline{b_i}$ => ${}^n\Sigma_{i=1}\, c_i\underline{b_i} = {}^n\Sigma_{i=1}\, c'_i\underline{b_i}$ => ${}^n\Sigma_{i=1}\, c_i\underline{b_i} - {}^n\Sigma_{i=1}\, c'_i\underline{b_i} = \underline{0}$

=> ${}^n\Sigma_{i=1}\, (c_i - c'_i)\underline{b_i}$ =(per LI)=> $c_i - c'_i = 0\ \forall i$ => $c_i = c'_i$

Definizione:

il vettore $[\underline{v}]_B = (c_1 \dots c_n) \in R^n$ (vettore dei coefficienti)(vettore delle coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base B)

Esempio:

$V = R[t]_{\leq 2}$ fissiamo base $B = \{t^2, t^2 + t, t^2 + t + 1\}$

$\underline{v} = t - 1$ dobbiamo scrivere $\underline{v}$ come combinazione lineare di B

$t - 1 = -t^2 + 2(t^2 + t) - (t^2 + t + 1)$ => $[t-1]_B = (-1\ \ 2\ \ -1) \in R^3$

Proposizione:

sia V uno spazio vettoriale, fissiamo una sua base $B = \{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$, la funzione $Q_B : V \to R^n$

definita da $Q_B(\underline{v}) = [\underline{v}]_B\ \ \forall \underline{v} \in V$ è un isomorfismo, detto isomorfismo delle coordinate

Dimostrazione:

- $Q_B$ è un'applicazione lineare:
  - dati $\underline{v}, \underline{w} \in V$ dobbiamo verificare che $Q_B(\underline{v} + \underline{w}) = Q_B(\underline{v}) + Q_B(\underline{w})$

    $Q_B(\underline{v}) = [\underline{v}]_B = (c_1 \dots c_n)$ => $\underline{v} = {}^n\Sigma_{i=1}\, c_i\underline{b_i}$

    $Q_B(\underline{w}) = [\underline{w}]_B = (d_1 \dots d_n)$ => $\underline{w} = {}^n\Sigma_{i=1}\, d_i\underline{b_i}$

$\underline{v} + \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} c_i\underline{b_i} + \sum_{i=1}^{n} d_i\underline{b_i} = \sum_{i=1}^{n} (c_i + d_i)\underline{b_i}$ => $Q_B(\underline{v} + \underline{w}) = [\underline{v} + \underline{w}]_B = (c_1+d_1 \dots c_n+d_n) = (c_1 \dots c_n) + (d_1 \dots d_n)$

=> $[\underline{v}]_B + [\underline{w}]_B = Q_B(\underline{v}) + Q_B(\underline{w})$

- Analogamente, $Q_B(a\underline{v}) = a*Q_B(\underline{v})$ $\forall a \in R$

=> $Q_B$ è un'applicazione lineare

- $Q_B$ è un isomorfismo:
  - $Q_B$ è suriettiva: dato $(c_1 \dots c_n) \in R^n$, scegliamo $\underline{v} = c_1\underline{b_1}, \dots, c_n\underline{b_n} \in V$ => $Q_B(\underline{v}) = [\underline{v}]_B = (c_1 \dots c_n)$
  - $Q_B$ è iniettiva: se $\underline{v},\underline{w} \in V$ t.c. $Q_B(\underline{v}) = Q_B(\underline{w}) \in R^n$ => $\underline{v} = \underline{w} = c_1\underline{b_1}, \dots, c_n\underline{b_n}$ => $\underline{v} = \underline{w}$ => $Q_B$ è iniettiva

Morale:

ogni spazio vettoriale V con dimV = n è isomorfo a $R^n$: fissiamo una base B di V e otteniamo un isomorfismo $Q_B : V \to R^n$

possiamo usare $Q_B$ per tradurre problemi in V in problemi in $R^n$

Esempio:

in $V = R[t]_{\leq 3}$ calcolare $\mathrm{Span}(t^2 + t, t - 1) \cap \mathrm{Span}(t^3 - t + 1, t^2 - t + 1)$

fissiamo $B = \{t^3, t^2, t, 1\}$ e applichiamo l'isomorfismo $Q_B$

$\mathrm{Span}((0\ 1\ 1\ 0), (0\ 0\ 1\ 1)) \cap \mathrm{Span}((1\ 0\ -1\ 1), (0\ 1\ -1\ 1))$

Proposizione(interpolazione):

V,W spazi vettoriali, $B=\{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ base di V

Siano $w_1, \dots, w_n \in W$ vettori qualsiasi allora esiste un'applicazione lineare $L : V \to W$ t.c. $L(\underline{b_1}) = \underline{w_1}, \dots, L(\underline{b_n}) = \underline{w_n}$

cioè un'applicazione lineare unicamente determinata dai valori assunti dai vettori di una base di V

infatti $v = c_1\underline{b_1}, \dots, c_n\underline{b_n} \in V$ => $c_1*L(\underline{b_1}), \dots, c_n*L(\underline{b_n}) \in W = c_1\underline{w_1}, \dots, c_n\underline{w_n}$

Caso particolare:

def. sia $C = \{\underline{w_1}, \dots, \underline{w_n}\} \subseteq W$ un insieme (punto) di vettori

L'applicazione lineare $P_c : R^n \to W$ t.c. $P_c(\underline{x_i}) = \underline{w_i}$ cioè $P_c\ (x_1 \dots x_n) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$

è detta mappa di parametrizzazione associata a C (parametrizza i vettori di $\mathrm{Span}(\underline{w_1}, \dots, \underline{w_n})$)

Proposizione:

$P_c : R^n \to W$

1. $P_c$ è suriettiva <=> $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ generano W
2. $P_c$ è iniettiva <=> $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ sono LI
3. $P_c$ è un isomorfismo <=> $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ sono una base di W
4. Ogni applicazione lineare $L : R^n \to W$ è detta forma $L = P_c$ dove $C = \{L(c_1), \dots, L(c_n)\}$

Definizione:

sia V uno spazio vettoriale l'identità di V è la funzione $Id_V : V \to V$ definita da $Id_V(\underline{v}) = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V$

Osservazione:

$Id_V$ è un isomorfismo

Osservazione:

$T_{I_n} = Id_{R^n}$ infatti $\underline{v} \in R^n$ $T_{I_n}(\underline{v}) = I_n(\underline{v}) = \underline{v} = Id_{R^n}(\underline{v})$

Definizione:

$L : V \to W$ si dice invertibile se $\exists M : W \to V$

$M \bullet L = Id_V : V \to V$ $L \bullet M = Id_W : W \to W$

M si chiama inversa di L e si denota $L^{-1}$

Osservazione:

$A \in Mat(m,n)$ è una matrice invertibile <=> $T_a : R^n \to R^n$ è un'applicazione lineare invertibile e $(T_a)^{-1} = T_{a^{-1}}$

Osservazione:

se $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ base di V

$Q_B : V \to R^n$ $P_B : R^n \to V$

$Q_B(c_1\underline{b}_1 \dots c_n\underline{b}_n) = (c_1 \dots c_n)$ $P_B(c_1 \dots c_n) = (c_1\underline{b}_1 \dots c_n\underline{b}_n)$

sono l'una l'inversa dell'altra

Definizione:

$L : V \to W$ applicazione lineare $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ base di V $C = \{\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n\}$ base di W

La matrice associata a L rispetto alle basi B,C

$M_L^{B,C} = ( [L(\underline{b_1})]_C \mid \dots \mid [L(\underline{b_n})]_C ) \subseteq Mat(m,n)$ cioè:

la i-esima colonna è il vettore delle coordinate di $L(\underline{b_i})$ rispetto alla base

Esempio:

$L : R[t]_{\leq 2} \to R^2$ definita da $L(p(t)) = (p(1)\ \ p(-1))$

$B = \{2t^2+1, t-1, t\}$ base di $R[t]_{\leq 2}$ $\qquad$ $C = \{(1\ 1), (1\ 0)\}$ base di $R^2$

1. Trovare le immagini di $L(b_i)$ $\qquad$ $L(2t^2+1) = (2(1)^2+1$

   $2(-1)^2+1) = (3\ 3)$ $\qquad$ $L(t-1) = (0\ 2)$ $\qquad$ $L(t) = (1\ -1)$
2. Trovare le coordinate rispetto a C $\qquad$ $(3\ 3) = 3(1\ 1) + 0(1\ 0) = [(3\ 3)]_C$

   $= (3\ 0)$ $\quad$ $(0\ -2) = (-2\ 2)$ $(1\ -1) = (-1\ 2)$

$\Rightarrow M_L^{B,C} = (3\ -2\ -1;\ 0\ 2\ 1) \in Mat(3,2)$

Osservazione:

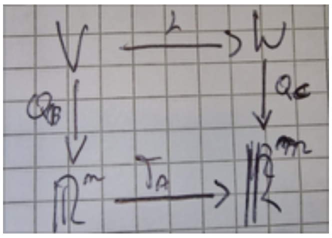
$A \in Mat(m,n)$ $\qquad$ $T_A : R^m \to R^n$

$\varepsilon_n, \varepsilon_m$ basi canoniche di $R^n$ e $R^m \Rightarrow M_{T_A}^{\varepsilon_n,\varepsilon_m} = A \in Mat(m,n)$

Teorema(rappresentazione di un'applicazione lineare):

$L : V \to W$ applicazione lineare $B = \{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ base di V $\qquad$ $C = \{\underline{c_1}, \dots, \underline{c_m}\}$ base di W

Sia $A = M_L^{B,C} \in Mat(m,n)$ allora $T_A \circ Q_B = Q_C \circ L$ cioè:



il diagramma "commuta" nel senso che entrambe le composizioni da V a $R^m$ danno lo stesso risultato

Dimostrazione:

dato $\underline{v} \in V \Rightarrow v = c_1\underline{b_1} + \dots + c_n\underline{b_n}$ $\qquad$ dove $(c_1 \dots c_n) = [\underline{v}]_B = Q_B(\underline{v})$

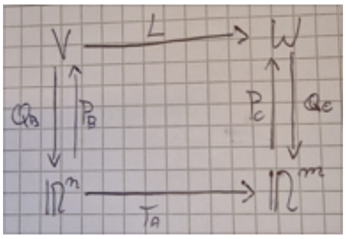
$\Rightarrow L(\underline{v}) = c_1L(\underline{b_1}) + \dots + c_nL(\underline{b_n}) \in W \Rightarrow Q_C(L(v)) = c_1 * Q_C(L(\underline{b_1})) + \dots + c_n * Q_C(L(\underline{b_n})) \in R^m =$

$= c_1[L(\underline{b_1})]_C + \dots + c_1[L(\underline{b_n})]_C \in R^m$

colonne della matrice $M_L^{B,C} = A$, combinazione lineare delle colonne di A

$= A(c_1 \dots c_n) = T_A(c_1 \dots c_n) = T_A(Q_B(\underline{v}))$

Corollario(teorema di rappresentazione di un'applicazione lineare):




Il diagramma commuta. Tutte le composizioni da uno spazio ad un altro danno lo stesso risultato

Esempio:

da V->W $\quad L = P_C \cdot T_A \cdot Q_B$

da $R^n$->W $\quad P_C \cdot T_A = L \cdot P_B \quad$ ecc.

Dimostrazione:

segue al teorema e dal fatto che $P_B$, $Q_B$ e $P_C$, $Q_C$ sono l'una l'inversa dell'altra

Esempio: $T_A \cdot Q_B = Q_C \cdot L$ applica ad entrambe $P_C$ => $P_C \cdot T_A \cdot Q_B = P_C \cdot Q_C \cdot L = L$

Morale:

ogni applicazione lineare L : V->W si può "tradurre" in una $T_A : R^n \text{->} R^m$ fissando due basi B e C

=> possiamo estendere L a tutto quello che conosciamo su $T_A$

Corollario(applicazione lineari e matrici):

1. $\ker(L) = P_B(\ker(A))$
2. $\text{Im}(L) = P_C(\text{col}(A))$
3. dimKer(L) = dimKer(A) = n - rk(A)
4. dimIm(L) = dimCol(A) = rk(A)
5. Teorema di nullità+rango per applicazioni lineari dimV = dimIm(L) + dimKer(L)
6. L iniettiva <=> rk(A) = n
7. L suriettiva <=> rk(A) = m
8. L isomorfismo <=> rk(A) = n = m
9. dimV < dimW => L non suriettiva
10. dimV > dimW => L non iniettiva

Dimostrazione:

1. $\underline{v} \in \ker(L) \Leftrightarrow L(\underline{v}) = \underline{0}_W \Leftrightarrow Q_C(L(\underline{v})) = \underline{0}_{R^m} \Leftrightarrow T_A(Q_B(\underline{v})) = \underline{0}_{R^m} \Leftrightarrow$

   $Q_B(\underline{v}) \in \ker(T_A) = \ker(A) \subseteq R^n \Leftrightarrow$

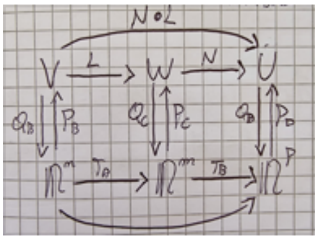
   $\Leftrightarrow v = P_B(Q_B(\underline{v})) \in P_B(\ker(A)) \subseteq V \Rightarrow \ker(L) = P_B(\ker(A))$
2. Analoga

3. $P_B$ isomorfismo => dimKer(L) = dimKer(A) = n - rk(A)
4. $P_C$ isomorfismo => dimIm(L) = dimCol(A) = rk(A)
5. Segue da 3) e 4)
6. L iniettiva <=> dimKer(L) = 0 <=> n = rk(A)
7. Analoga
8. Analoga

**Proposizione(rappresentazione e composizione):**

V, W, U spazi vettoriali non basi B, C, D

L : V->W, N : W->U applicazioni lineari, $A = M_L^{B,C}$ , $B = M_N^{C,D}$




Allora $M_{N \cdot L}^{B,D} = BA = M_L^{B,C} \; M_N^{C,D}$ cioè il diagramma commuta