Teorema di Rouché-Capelli #GAL

Teorema di Rouché-Capelli:

sia A$\underline{x}$ = $\underline{b}$ un sistema lineare con A ∈Mat(m,n) => m = equazioni, n = variabili

1. Il sistema ha soluzioni se e soltanto se il rango rk(A) = rk(A|$\underline{b}$)
2. In questo caso esistono dei vettori w, v_1, v_2, …, v_s ∈R^n tali che l'insieme delle soluzioni è:

   S = {w + t_1v_1 + t_2v_2 + … + t_sv_s : t_1,t_2,…,t_s ∈R} ⊆R^n inoltre s = n - rk(A) (rango maggiore -> meno soluzioni)
3. Il sistema ha un'unica soluzione se e soltanto se rk(A) = rk(A|$\underline{b}$) = n

Osservazione: $\underline{w}$ è una soluzione particolare del sistema cioè $\underline{w}$ = S ottenuto da t_1=t_2=…=t_s=0

Dimostrazione: usando l'algoritmo di Gauss-Jordan

- Trasforma A$\underline{x}$ = $\underline{b}$ in un sistema equivalente A'$\underline{x}$ = $\underline{b}$' dove (A'|$\underline{b}$') è la riduzione a scala di (A|$\underline{b}$)
- Tutti i pivot sono uguali a 1 e sono gli unici elementi non nulli della propria colonna
- rk(A|$\underline{b}$) = rk(A'|$\underline{b}$') dato che una matrice è la riduzione a scala dell'altra
- Inoltre restringendo l'algoritmo di Gauss-Jordan alle prime n colonne segue che A' è una riduzione a scala di A rk(A) = rk(A')

1. A$\underline{x}$ = $\underline{b}$ ha soluzioni se e soltanto se A'$\underline{x}$ = $\underline{b}$' ha soluzioni quindi se e soltanto se non ci sono pivot nella colonna b' (teorema sui sistemi a scala) <=> tutti i pivot della matrice completa di (A'|$\underline{b}$') sono nella stessa matrice A' <=> rk(A'|$\underline{b}$') = rk(A') <=> rk(A|$\underline{b}$) = rk(A)
2. Il sistema A'$\underline{x}$ = $\underline{b}$' ha rk(A) equazioni non nulle, che risolvono le variabili pivot in funzione elle variabili libere -> numero variabili libere = (numero variabili) - (variabili pivot) = n - rk(A)
3. Segue immediatamente da 1) e 2): ∃ unica soluzione <=> rk(A) = rk(A|$\underline{b}$) = n

Esempi di corollari del Teorema Rouché-Capelli:

Se A ∈Mat(m,n) con m < n (numero equazioni < numero variabili)

Ax = b non può avere un'unica soluzione => rk(A) ≤ m -> s = n - rk(A) sempre >0 => esclusa unica soluzione

Corollario: sia A ∈Mat(m,n), b ∈R^n

il sistema A$\underline{x}$ = $\underline{b}$ ha un'unica soluzione se e solo se rk(A) = n ->

-> l'unicità della soluzione non dipende dal vettore dei termini noti

Dimostrazione:

=> caso particolare del teorema di Rouché-Capelli

<= supponiamo rk(A) = n allora n = rk(A) ≤ rk(A|$\underline{b}$) ≤ min(n, n+1) = n =>

$rk(A) = rk(A|\underline{b}) = n$

la conclusione segue dal Teorema di Rouché-Capelli 3)