Matrici, mosse di Gauss, algoritmo di Gauss, pivot e algoritmo di Gauss-Jordan #GAL

Definizione: una matrice è un oggetto (m*n) rappresentato come una tabella rettangolare di numeri con m righe e n colonne

Casi speciali:

- Matrici m*1: vettori colonna
- Matrici 1*n: vettori riga

Definizione: dato un sistema lineare possiamo definire la sua matrice completa m*(n+1)

a_{11} a_{12} a_{1n} b_1

a_{21} a_{22} a_{2n} b_2

a_{m1} a_{m2} a_{mn} b_m

Definizione: due sistemi lineari sono equivalenti se hanno gli stessi insiemi di soluzioni

Mosse di Gauss (operazioni elementari sulle righe): operazioni su un sistema lineare che lo trasformano in un altro ad esso equivalente

1. Scambiare 2 equazioni / righe: EQi <-> EQj
2. Moltiplicare un'equazione / una riga per un numero non nullo: c*EQi : c ≠ 0
3. Scegliere 2 equazioni / righe e aggiungere ad una il multiplo dell'altra: EQi + c*EQj : i ≠ j

Esempio: per rendere ricavare il sistema / matrice equivalente: EQ1 -> -EQ1
EQ2 -> EQ1+EQ2

Definizione: una matrice è a scala se ogni riga NON nulla inizia con più zeri della precedente e le righe nulle sono più in basso delle righe non nulle

Algoritmo di Gauss: usando le mosse di Gauss 1,2,3 è sempre possibile ridurre una matrice qualsiasi a una matrice a scala ripulendo una colonna alla volta

Definizione: un sistema lineare è in scala se la sua matrice corrispondente completa è in scala

Metodo di Gauss per risolvere i sistemi lineari:

- Usare le mosse di Gauss per ridurre il sistema / matrice a scala
- Trovare l'insieme delle soluzioni sostituendo a ritroso

Definizione: data una matrice a scala il primo elemento non nullo di una riga non nulla è detto pivot

Algoritmo di Gauss-Jordan:

Data una matrice qualsiasi, dopo averla ridotta a scala, continuiamo a usare le mosse di Gauss fino a che:

- La matrice è ancora a scala
- Tutti i pivot sono uguali a 1
- Ogni pivot è l'unico elemento non nullo della colonna

Definizione: dato un sistema lineare o matrice a scala

- Le variabili corrispondenti alle colonne con pivot si chiamano variabili pivot
- Le rimanenti sono dette variabili libere

Equazione degenere: equazione lineare dove tutti i coefficienti sono uguali a 0

- Se $b \neq 0$ -> $S = \varnothing$ -> impossibile
- Se $b = 0$ -> $S = R^n$

L'algoritmo di Gauss-Jordan risolve completamente un sistema lineare esprimendo le variabili pivot in funzione delle variabili libere

Teorema: sia dato un sistema lineare a scala. Sia n = variabili / colonne-1, r = variabili pivot

1. Ha soluzioni se e soltanto se non ci sono equazioni del tipo 0 = 1 e non ci sono pivot nella colonna dei termini noti
2. In questo caso, l'insieme delle soluzioni dipende da n-r -> i parametri liberi
3. In particolare se n = r esiste un'unica soluzione