Serie numeriche, limiti di serie numeriche #Analisi1

Definizione:

Data una successione a_n (di numeri reali) costruiamo la SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

$S_N = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, a_n \quad = a_0 + a_1 + \dots + a_N \qquad \forall N \in \mathbb{N}$

Chiamiamo serie degli a_n la scrittura formale ${}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n$ che si legge serie di a_n e indica formalmente la somma degli infiniti termini a_n

Diremo che la serie degli a_n converge ad S $\in$R se $\exists \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N = S \in R$ e scriveremo ${}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n = S \in R$

S si dice somma della serie degli a_n

Diremo che la serie degli a_n diverge a $\pm\infty$ se $\exists \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N = \pm\infty$ e $\pm\infty$ si dirà somma della serie

Se la serie degli a_n, ${}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n$, converge o diverge, diremo che essa è regolare

Se $\nexists \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N$ in R* diremo che la serie ${}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n$ è irregolare o indeterminata

Osservazione:

- La somma della serie è $S = {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n = \mathrm{Lim}_{N\to\infty} S_N$ in R* (se esiste)
- $S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \qquad \forall N \in \mathbb{N} \qquad S_0 = a_0$
- Studiare il carattere di una serie significa stabilire se essa sia convergente, divergente a $\pm\infty$ o irregolare, se la serie è convergente calcolare esplicitamente il valore $S = {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n \in R$ è in generale un problema molto difficile
- Studiare una serie coinvolge due successioni, a_n e S_N
- In una serie, termini vanno sommati nel giusto ordine, senza alterarlo

  $S_0 = a_0;\ S_1 = a_0 + a_1;\ S_2 = a_0 + a_1 + a_2;\ \dots$
- Calcolare la somma S di una serie ${}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n$ convergente è in generale molto difficile, il problema è che spesso non si riesce a determinare una formula "esplicita" per $S_N = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, a_n$ diventa essenziale determinare condizioni necessarie/sufficienti affinché una serie converga o diverga, successivamente se la serie converge si può provare a calcolare un valore approssimato della sua somma
- I primi $n_0 \in \mathbb{N}$ termini della successione a_n sono ininfluenti per determinare il carattere della serie ${}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n$ cioè essi sono ininfluenti

per determinare se la serie converga, diverga a $\pm\infty$ o sia irregolare. Se la serie converge, allora ovviamente ogni termine della successione a_n è rilevante per stabilire il valore di $S = {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n \in R$

Esempio:

- $a_n = 0 \quad \forall n \in N \qquad S_N = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, a_n = 0 \quad \forall N \in N \qquad \Rightarrow \quad {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, 0 = \lim_{N\to\infty} S_N = 0$
- $a_n = 1 \quad \forall n \in N \qquad S_N = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, a_n = N+1 \quad \forall N \in N \qquad \Rightarrow \quad {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, 1 = \lim_{N\to\infty} S_N = \pm\infty$
- $a_n = (-1)^n \quad \forall n \in N \qquad S_N = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, a_n = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, (-1)^n$ {se N pari $= 1$; se N dispari $= -1$} $\Rightarrow \nexists \lim_{N\to\infty} S_N \Rightarrow {}^{\infty}\Sigma_0\, (-1)^n$ indeterminata

Esempio:

Serie geometrica di ragione q $a_n = q^n \qquad {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n = {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, q^n$

$S_N = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^N$

Osserviamo che $q^*S_N = q + q^2 + \dots + q^N + q^{N+1} \Rightarrow S_N - q^*S_N = 1 - q^{n+1}$

$\Rightarrow (1 - q)^*S_N = 1 - q^{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se $q \neq 1 \quad S_N = (1 - q^{n+1}) / (1 - q) = {}^{N}\Sigma_{n=0}\, q^n \Rightarrow$

$\Rightarrow S_N = (1 - q^{n+1}) / (1 - q) =$ {se $|q| < 1 \quad 1/(1-q)$; se $q > 1 \quad +\infty$; se $q \leq -1 \quad \nexists$}

$\Rightarrow {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, q^n = \lim_{N\to\infty} S_N =$ {$1/(1-q)$ se $|q| < 1$; $+\infty$ se $q \geq 1$; $\nexists$ se $q \leq -1$}

Esempio:

$y = 1/2$ serie geometrica $\quad {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, 1/2^n = 1 + 1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n + \dots$

Esempio:

$r \in Q \quad r = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \qquad r = \pm a_0 + 0{,}a_1 + 0{,}0a_2 = \pm(a_0 + a_1/10 + a_2/100 + \dots) \qquad r = \pm\, {}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n/10^n$

Esempio:

$r \in [0,1] \quad r = {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n/10^n \qquad 0{,}\underline{9} = 1$

$0{,}\underline{9} = {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, 9/10^n = 9 * {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, 1/10^n = 9^*(({}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, 1/10^n) - 1) =$ serie geometrica $= 9^*(1 / (1 - 1/10) - 1) = 1$

Osservazione:

dal teorema sull'algebra dei limiti e sull'aritmetica parziale di ∞, segue che: date due serie ${}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, a_n$ e ${}^{\infty}\Sigma_{n=0}\, b_n$ e $\partial, \beta \in R$ vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\partial * a_n + ß * b_n) = \partial * \sum_{n=0}^{\infty} a_n + ß * \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (*)$$

se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono convergenti o divergenti e se l’espressione a destra dell’uguale in (*) non è forma di indeterminazione