Definizione e cardinalità di N, Z, Q, R e C #Analisi1

Contare = mappare oggetti in N; creare un sottoinsieme di N con corrispondenza biunivoca con esso

Numeri N > numeri pari => entrambi infiniti dello stesso ordine perché i pari hanno una corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme proprio di N -> cardinalità numerabile (perché può avere una corrispondenza biunivoca)

N = Z = Q => cardinalità numerabile (stessi ordini di infinito)
R "più infinito" di Q => R non numerabile

Preso un punto qualsiasi di un segmento:
- La probabilità di estrarre un valore di Q è pari a 0
- La probabilità di estrarre un valore di R è pari a 1

Insiemi infiniti

Definizione: A,B si dicono di uguale cardinalità se possono essere messi in corrispondenza biunivoca, cioè se è possibile scrivere una legge che associa ad ogni elemento a ∈A uno e un solo elemento b ∈B e viceversa => ∃ƒ : A->B che sia invertibile cioè iniettiva e suriettiva

Funzione iniettiva: diversi elementi di A corrispondono a diversi elementi di B
Funzione suriettiva: ogni elemento di B è raggiunto da almeno un elemento di A
Funzione iniettiva e suriettiva (biunivoca): ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B

Definizione: la cardinalità di N e ogni insieme che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con esso si dice numerabile

Teorema: Z è numerabile
Dimostrazione: una corrispondenza biunivoca tra Z e N è data da (ai negativi corrisponde |2a|):

Z: 0 1 -1 2 -2 … n -n
N: 0 1 2 3 4 … 2n-1 2n

Corrispondenza: ƒ : Z->N ƒ(n) = { 2n-1 se n > 0; 2|n| se n ≤ 0 } quindi Z è numerabile

Corrispondenza inversa: $ƒ^{-1}$: N->Z $ƒ^{-1}$(n) = { -n/2 se n pari; (n+1)/2 se n dispari }
Osservazione: l'insieme degli interi pari e l'insieme degli interi dispari sono numerabili

Teorema: Q è numerabile

Dimostrazione:

1. Dimostrare che $Q^+ = \{ r \in Q : r > 0 \}$ è numerabile

Per enumerare gli elementi di Q^+ disponiamo di una tabella con infinite righe, dove nella riga k-esima ($k \in N$) disponiamo tutte le frazioni m/n tali che $m + n = k$ ($m,n \in N$)

1	/			
2	1/1			
3	1/2	2/1		
4	1/3	2/2	3/1	
5	1/4	2/3	3/2	4/1

La k-esima riga contiene k-1 elementi, disponiamo tutte le frazioni, anche se equivalenti a frazioni già scritte

Tutti i numeri $r \in Q^+$ compaiono (infinite volte) nella tabella infatti m/n compare nella riga k-esima con $k = m + n$

Costruiamo la corrispondenza biunivoca tra Q^+ ed N contando gli elementi di Q^+, percorrendo la tabella lungo le "diagonali inverse" (da alto/destra a basso/sinistra) passando alla diagonale sottostante quando abbiamo esaurito gli elementi della diagonale corrente saltando le frazioni equivalenti a frazioni già enumerate.

$N \to Q^+$

N	1	2	3	4	5	6	…
Q^+	1/1	1/2	2/1	1/3	1/4	3/1	…

Ciò mostra che Q^+ è numerabile

2. Dimostrare che $Q^- = \{ r \in Q : r < 0 \}$ è numerabile

Infatti Q^+ e Q^- possono essere messi in corrispondenza biunivoca tramite la funzione $f : Q^+ \to Q^-$ $\quad f(r) = -r$

Poiché Q^+ è numerabile anche Q^- è numerabile

3. La corrispondenza biunivoca tra N e Q si costruisce in modo simile per quanto fatto per Z

$Q^+ = \{ q_1, q_2, \dots, q_n, \dots \}$

$Q^- = \{ -q_1, -q_2, \dots, -q_n, \dots \}$

La corrispondenza biunivoca con N è la seguente:

N	0	1	2	3	4	5	6	….	2n-1	2n
Q	0	q_1	$-q_1$	q_2	$-q_2$	q_3	$-q_3$	….	q_n	$-q_n$

Poiché $Q = Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$ quindi Q è numerabile

Teorema: R non è numerabile
Secondo Georg Cantor (1845-1918) i numeri reali non sono numerabili.
Detto altrimenti: nell'insieme dei numeri naturali diciamo che la serie dei numeri è discreta, ossia a 1 segue un 2, a 2 segue subito 3, a 3 segue subito 4 e così via.
Nell'insieme dei reali, invece, la serie dei numeri è continua: fra 1 e 2 ci sono infiniti numeri! Cioè: 1, 00000 < 1, 00001 < 1, 00002 < … < 2.

Dimostrazione per assurdo: (metodo diagonale (o diagonalizzazione) inventato dallo stesso Cantor)

Supponiamo che l'insieme dei reali sia numerabile e scriviamo:

$Num(\Re)$

Se questo insieme è numerabile, allora lo sarà anche l'intervallo fra 0 e 1 appartenente ai numeri reali, cioè la serie: 0, 00000 < 0, 000001 < … < 1.

Scriviamo quindi:

$Num([0, 1])$

Se questo intervallo è numerabile, allora possiamo indicare *tutti* i numeri decimali all'interno di questo intervallo disponendoli in una matrice (tabella).

Chiamiamo questi numeri compresi fra 0 e 1 con la lettera greca α, allora:

$\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \alpha 4 \in \Re$
$\alpha 1 = 0,\ \mathbf{3}\ 8\ 2\ 1$
$\alpha 2 = 0,\ 3\ \mathbf{8}\ 3\ 2$
$\alpha 3 = 0,\ 4\ 3\ \mathbf{4}\ 8$
$\alpha 4 = 0,\ 4\ 5\ 8\ \mathbf{1}$

Per semplicità fermiamoci al quarto numero compreso fra 0 e 1, supponendo di averli enumerati tutti. Adesso, però, possiamo usare il metodo della diagonale di Cantor e prendere le cifre che ho evidenziato in grassetto per costruire un nuovo numero che chiamiamo β, che avrà la forma:

$\beta = 0,\ 3\ 8\ 4\ 1$

Questo numero, appartiene ancora all'insieme dei numeri compresi fra 0 e 1 e sarà uno dei numeri che, presumibilmente, viene dopo α4. Tuttavia possiamo definire adesso un nuovo tipo di numero, β*, tale che questo β* differisca per costruzione da ogni altro numero appartenente all'intervallo fra 0 e 1:

$\beta^* = \forall n \in \beta \rightarrow n + 1.$

Ossia, possiamo costruire questo numero β* non compreso nella precedente tabella aggiungendo un +1 ad ogni numero decimale di β.

$\beta^* = 0,\ 4\ 9\ 5\ 2$

Questo nuovo numero, per come lo abbiamo costruito, differisce al più per una cifra da ogni altro numero che esiste nella tabella. Questo numero appartiene all'intervallo [0, 1]. Noi avevamo supposto che quell'intervallo fosse già stato enumerato completamente! Ergo: siamo caduti in un assurdo: pur supponendo di aver un intervallo completamente enumerato, esiste un numero non elencato nell'enumerazione di quell'intervallo.

Quindi: l'intervallo fra 0 e 1 non è numerabile!

$\neg Num([0, 1])$

E a maggior ragione se una sua parte non è numerabile, allora non sarà numerabile neanche l'intero insieme dei numeri reali. Quindi:

$\neg Num(\Re)$.

Poiché R non è numerabile e R $\supset$N come sottoinsieme proprio, diremo che R ha cardinalità maggiore di N

Definizione: la cardinalità di R si chiama potenza del continuo

Osservazione: R = Q U R\Q => R non è numerabile, è più che numerabile

Osservazione: R\Q ha potenza del continuo (come sottoinsieme di R)

Teorema: R ha la stessa cardinalità di ogni intervallo [a,b] (a,b) [a,b) (a,b] [a, +∞) (a,+∞) (-∞,b] (-∞,b) con a,b $\in$R, a < b

Esempio: R ha la stessa cardinalità di (0, +∞) => una possibile corrispondenza è $f(x) = 2^x$ $\forall x \in$R

Esempio: R ha la stessa cardinalità di (-π/2, +π/2) => una possibile corrispondenza è $f(x) = \arctan x$ $\forall x \in$R

Osservazione: R e C hanno la stessa cardinalità

Definizione assiomatica di C: C estende R senza perdere le sue proprietà tranne l'ordinamento

Introduciamo l'unità immaginaria: i, definita dalla seguente proprietà: $i^2 = -1$