Serie di numeri reali, criterio di convergenza assoluta, serie a segno alterno, criterio di Leibniz #Analisi1

Definizione (Serie di numeri reali a termini di segno variabile):

diremo che la serie ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ a_n$ converge assolutamente se la serie ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ |a_n|$

converge (secondo la definizione) $\exists \mathrm{Lim}_{N\to\infty}\ {}^{N}\Sigma_{n=1}\ |a_n| = M \in R$

Osservazione:

per distinguere questa definizione da quella di convergenza già data, chiameremo la prima nozione “convergenza semplice”

e la nuova “convergenza assoluta”. Se non specificato si sottintende di parlare di convergenza semplice

Osservazione:

se una serie è a termini (definitivamente) positivi essa converge se e solo se essa converge assolutamente

Teorema(criterio di convergenza assoluta):

se la serie ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ a_n$ converge assolutamente, essa converge anche semplicemente inoltre in tal caso $|{}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ a_n| \leq {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ |a_n|$

Osservazione:

convergenza assoluta <≠ => convergenza semplice

Esempio:

esiste una serie che converga semplicemente ma non assolutamente

${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ (-1)^n/n^{\partial}$ $\quad \partial \in [0,1]$

- $\partial > 0$ $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\ (-1)^n/n^{\partial} = 0$ $\quad {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ |(-1)^n/n^{\partial}| = {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ 1/n^{\partial}$ diverge per $\partial > 1$, converge per $\partial \leq 1$

Vedremo per il criterio di Leibniz ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ (-1)^n/n^{\partial}$ converge semplicemente $\forall \partial > 0$

=> ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\ (-1)^n/n^{\partial}$ converge assolutamente <=> $\partial > 1$converge semplicemente <=> $\partial > 0$

In particolare $\partial \in [0,1]$ converge semplicemente ma non assolutamente

(per Leibniz, serie che - $1/n^{\partial} > 0$ $\quad$ - $\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\ 1/n^{\partial} = 0$ - $1/n^{\partial}$ sia decrescente in $n \in N$)

Dimostrazione(convergenza assoluta):

$S_N = {}^{N}\Sigma_{n=1}\ a_n$ successione somme parziali

S_N = (somma di tutti gli $a_n \geq 0$, con $n = 1, \dots, N$) + (somma di tutti gli $a_n < 0$, con $n = 1, \dots, N$) =

= (somma di tutti gli $a_n \geq 0$, con $n = 1, \dots, N$) - (somma di tutti gli $|a_n|$

per $a_n < 0$, con $n = 1, \ldots, N$)

S_N^+ = somma di tutti gli $a_n \geq 0$, con $n = 1, \ldots, N = {}^{N}\Sigma_{n=1}\, a_n\ (a_n \geq 0)$

S_N^- = somma di tutti gli $|a_n| < 0$, con $n = 1, \ldots, N = -{}^{N}\Sigma_{n=1}\, a_n\ (a_n < 0) = {}^{N}\Sigma_{n=1}\, |a_n|\ (a_n < 0)$

Osserviamo che $S_N = {}^{N}\Sigma_{n=1}\, a_n = S_N^+ - S_N^-$ $\quad {}^{N}\Sigma_{n=1}\, |a_n| = S_N^+ + S_N^-$

in particolare:

- $S_N^+ \geq 0,\ S_N^- \geq 0$
- S_N^+, S_N^- sono crescenti
- S_N^+, S_N^- sono anche limitate infatti poiché la serie converge assolutamente,

avremmo che ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, |a_n| = M \in (0, \infty)$ è crescente in $N \in N$, avremmo che ${}^{N}\Sigma_{n=1}\, |a_n| \leq M \ \ \forall N \in N$

=> $\forall N \in N \quad 0 \leq S_N^+ \leq {}^{N}\Sigma_{n=1}\, |a_n| \leq M \qquad 0 \leq S_N^- \leq {}^{N}\Sigma_{n=1}\, |a_n| \leq M$

Dato che S_N^+, S_N^- sono crescenti e limitate quindi $\exists S^{\pm} = \mathrm{Lim}_{N\to\infty}\, S_N^{\pm} \in R$

Per algebra dei limiti $\mathrm{Lim}_{N\to\infty}\, S_N = \mathrm{Lim}_{N\to\infty}\, (S_N^+ - S_N^-) = \mathrm{Lim}_{N\to\infty}\, S_N^+ - \mathrm{Lim}_{N\to\infty}\, S_N^- = S^+ - S^- = S \in R$

=> la serie converge semplicemente ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n = S = S^+ - S^- \ \in R$

Per la disuguaglianza triangolare $|{}^{N}\Sigma_{n=1}\, a_n| \leq {}^{N}\Sigma_{n=1}\, |a_n| \ \ \forall N \in N$

poiché i limiti esistono e sono finiti per permanenza del segno $|{}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n| \leq {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, |a_n|$

Esempio:

${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, \sin n/n^2 \qquad a_n = \sin n/n^2 \qquad |a_n| = |\sin n|/n^2 \leq 1/n^2$

poiché ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, 1/n^2$ converge (serie armonica generalizzata $\partial = 2 > 1$), allora ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, |a_n|$ converge per criterio del confronto

=> ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ converge assolutamente => ${}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ converge semplicemente per il criterio di convergenza assoluta

Definizione:

una serie si dice a termini di segno alterno se ha la forma $^{\infty}\Sigma_{n=1} (-1)^{n} * a_n$ con $a_n \geq 0$ (definitivamente)

Teorema(criterio di Leibniz):

data la serie a termini di segno alterno $^{\infty}\Sigma_{n=1} (-1)^{n} * a_n$ con:

- $a_n \geq 0$ (definitivamente)
- a_n decrescente $a_{n+1} \leq a_n \ \ \forall n$ (definitivamente)
- $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0$

Allora $^{\infty}\Sigma_{n=1} (-1)^{n} * a_n$ converge semplicemente

Inoltre se $S = {}^{\infty}\Sigma_{n=0} (-1)^{n} * a_n$

- $S_{2N} = {}^{2N}\Sigma_{n=0} (-1)^{n} * a_n = S$ (dall'alto)
- $S_{2N+1} = {}^{2N+1}\Sigma_{n=0} (-1)^{n} * a_n = S$ (dal basso)
- $|R_N| = |S - S_N| = |{}^{\infty}\Sigma_{n=N+1} (-1)^{n} * a_n| \leq |a_{N+1}|$

Esempio:

$^{\infty}\Sigma_{n=1} (-1)^{n}/n^{\partial}$ converge semplicemente $\forall \partial > 0$ $\qquad a_n = 1/n^{\partial}$

- $a_n \geq 0$
- a_n decrescente, ovvio perché n^{∂} crescente se $\partial > 0$
- $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} a_n = 0$

Per il criterio di Leibniz $^{\infty}\Sigma_{n=1} (-1)^{n} * a_n = {}^{\infty}\Sigma_{n=1} (-1)^{n}/n^{\partial}$ converge semplicemente $\forall \partial > 0$

Inoltre $|R_N| = |S - S_N| \leq a_{N+1} = 1/(N+1)^{\partial}$

Osservazione:

- Non si può rimuovere l'ipotesi a_n decrescente
- $a_n \sim b_n \quad a_n, b_n > 0$

$^{\infty}\Sigma_{n=1} (-1)^{n} * b_n$ convergente in generale NON implica che $^{\infty}\Sigma_{n=1} (-1)^{n} * a_n$ sia convergente

Esempio:

costruiamo a_n, b_n t.c.

- $a_n, b_n > 0$
- $a_n \sim b_n$
- $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} a_n = \mathrm{Lim}_{n\to\infty} b_n = 0$

- a_n non è decrescente, in particolare per il criterio di Leibniz $^{\infty}\Sigma_{n=1}$ $(-1)^n * b_n$ converge semplicemente
- $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, a_n$ diverge

Siano: $a_n = (\sqrt{n} + (-1)^n)/n = 1/\sqrt{n} + (-1)^n/\sqrt{n}$ $\qquad$ $b_n = 1/\sqrt{n}$

- $a_n > 0 \;\; \forall n \geq 2$ $\qquad$ $b_n > 0 \;\; \forall n \geq 1$
- $a_n = 1/\sqrt{n} + (-1)^n/\sqrt{n} \sim 1/\sqrt{n} = b_n$
- $\text{Lim}_{n\to\infty}\, a_n = \text{Lim}_{n\to\infty}\, b_n = 0$
- b_n decrescente
- $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, (-1)^n * b_n$ converge semplicemente per Leibniz
- $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, (-1)^n * a_n$ diverge infatti $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, (-1)^n * (a_n) = {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, (-1)^n/\sqrt{n} + 1/n$ =

  $= {}^{\infty}\Sigma_{n=1}\, (-1)^n/\sqrt{n}$ (converge in R come b_n) + $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, 1/n$ (diverge $+\infty$ come serie armonica) = $+\infty$
- a_n non può essere decrescente, se lo fosse per il criterio di Leibniz dovrebbe essere convergente, mentre tale serie diverge

NON si può combinare il criterio di Leibniz con il criterio del confronto asintotico (valido solo per serie a termini positivi)

Esempio:

$^{\infty}\Sigma_{n=1}\, (-1)^n \log n/n$ $\qquad$ $a_n = \log n/n$

- $a_n \geq 0$
- $\text{Lim}_{n\to\infty}\, a_n = 0$ (gerarchia degli infiniti)
- Monotonia: $a_{n+1} = \log(n+1)/(n+1) \leq \log n/n = a_n$

Complicato: avendo a disposizione derivate e test di monotonia per funzioni derivabili su un intervallo, sarà tutto più semplice

$f(x) = \log x/x$ $\qquad$ $f'(x) = (1 - \log x)/x^2 \leq 0 \quad \forall x \geq e$

=> f è decrescente in $[e, +\infty)$

=> $a_n = f(n)$ è decrescente $\quad \forall n \geq 3 > e$

Per il criterio si Leibniz $^{\infty}\Sigma_{n=1}\, (-1)^n * a_n$ converge semplicemente