Sottospazi vettoriali #GAL

Definizione: dato uno spazio vettoriale V, un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme W $\subseteq$V t.c. che W è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse due operazioni di V

1. $\underline{0} \in W$
2. $\forall \underline{v},\underline{w} \in W \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in W$ "chiuso rispetto alla somma"
3. $\underline{v} \in W$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\underline{v} \in W$ "chiuso rispetto al prodotto scalare"

Infatti, se valgono 1,2,3 allora le rimanenti proprietà valgono in W perché valgono in V

Importante: "sottospazio" è un concetto più forte di "sottoinsieme" (tutti i sottospazi sono sottoinsiemi, ma non tutti i sottoinsiemi sono sottospazi)

Intuitivamente: il concetto di sottospazio vettoriale è una generalizzazione di rette, piani, etc. passanti per l'origine

Sottospazi banali: dato un qualsiasi spazio vettoriale V i sottoinsiemi: $\{0\} \subseteq V$, $V \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali (rispettivamente il più piccolo e il più grande)

Definizione: dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$, il loro span lineare è l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari:

$\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) = \{\underline{u} \in V : \underline{u} = c_1\underline{v}_1, c_2\underline{v}_2, \ldots, c_n\underline{v}_n, \text{ per qualche } c_i \in \mathbb{R}\} = \{{}^{n}\Sigma_{i=1}(c_i\underline{v}_i) : c_i \in \mathbb{R}\}$

Proposizione: dati $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$, il sottoinsieme $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale

Dimostrazione:

1. $\underline{0} = 0\underline{v}_1, \ldots, 0\underline{v}_n = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$
2. Dati $\underline{w} = {}^{n}\Sigma_{i=1}(c_i\underline{v}_i) \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$, $\underline{u} = {}^{n}\Sigma_{i=1}(d_i\underline{v}_i) \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ allora

   $\underline{w} + \underline{u} = {}^{n}\Sigma_{i=1}(c_i + d_i)\ \underline{v}_i \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$
3. Dati $\underline{w} = {}^{n}\Sigma_{i=1}(c_i\underline{v}_i) \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$, $d \in \mathbb{R}$ allora

   $d\underline{w} = {}^{n}\Sigma_{i=1}(d*c_i)\ \underline{v}_i \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$

Definizione: se un sottospazio $H \subseteq V$ è $H = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ per qualche $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ diciamo che H è generato da $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ o che i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ generano il sottospazio H

Osservazione: uno spazio/sottospazio vettoriale ammette diversi insiemi di generatori

Definizione: sia $A = (R_1\ R_2 \ldots R_m)$ (vettore colonna) $= (C_1\ C_2 \ldots C_n)$ (vettore riga) $\in \mathrm{Mat}(m,n)$

Lo spazio delle righe di A è row(A) = Span(R_1, ..., R_m) $\subseteq$Mat(1,n)

Lo spazio delle colonne di A è col(A) = Span(C_1, ..., C_n) $\subseteq$Mat(m,1)

nota: entrambi sono sottospazi vettoriali

Proposizione: le operazioni elementari (mosse di Gauss) sulle righe preservano lo spazio delle righe

Osservazione: le operazioni elementari (mosse di Gauss) sulle righe non preservano lo spazio delle colonne

Proposizione: sia A $\in$Mat(m,n), $\underline{b} \in R^n$ sia

$S = \{\underline{x} \in R^n : A\underline{x} = \underline{b}\} \subseteq R^n$ allora

S è un sottospazio vettoriale <=> $\underline{b} = \underline{0}$ (in questo caso, il sistema è omogeneo, S = ker(A))

Dimostrazione: => S sottospazio => $\underline{0} \in S$ => $A\underline{0} = \underline{b} = \underline{0}$

<= supponiamo $\underline{b} = \underline{0}$

1. $A\underline{0} = \underline{0}$ => $\underline{0} \in S$
2. Se $\underline{x},\underline{y} \in S$ => $A\underline{x} = A\underline{y} = \underline{0}$ => $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$
3. Se $x \in S$, $c \in R$ => $A\underline{x} = \underline{0}$ => $cA\underline{x} = \underline{0}$ => $A(c\underline{x}) = 0$ => $c\underline{x} \in S$

Due modi di rappresentare un sottospazio vettoriale $H \subseteq R^2$:

- Forma cartesiana: tramite equazioni H = ker(A) per qualche A $\in$Mat(m,n)
- Forma parametrica: tramite parametri liberi H = Span($\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_p}$) = $\{t_1\underline{v_1}, t_2\underline{v_2}, ..., t_p\underline{v_p} : t_i \in R\}$

Forma cartesiana -> Forma parametrica

risolviamo il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$ -> H = Span($\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_p}$) (mediante la procedura con i parametri liberi)

[Rouché-Capelli => ci sono n-rk(A) (= p) parametri liberi]

Forma parametrica -> Forma cartesiana

H = Span($\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_p}$) $\subseteq R^n$ = Mat(n,1) [vettori colonna]

Obbiettivo: trovare A t.c. ker(A) = H

Osservazione: $S = H = \ker(A) = \{\underline{x} \in R^n : A\underline{x} = \underline{0}\}$ allora A $\in$Mat(m,n) scriviamo A = (—a_1—; —a_n—) * $\underline{x} = \underline{0}$

$\underline{0} = A\ \underline{v_j} = [\underline{a_1}*\underline{v_j}\ \ \underline{a_n}*\underline{v_j}]$ => $\underline{a_i} * \underline{v_j} = \underline{0}$ $\forall$i,j

Obbiettivo: trovare delle righe a = (a_1, ..., a_n) $\in$Mat(1,n) t.c. $\underline{a_i} * \underline{v_j} = \underline{0}\forall$i,j

Per concludere che $H = \ker(A) = \{\underline{x} \in R^n : A\underline{x} = \underline{0}\}$ ci serve un modo di dire quanto sia grande un sottospazio

Dipendenza e Indipendenza lineare

Osservazione: a volte un insieme di generatori è ridondante

Esempio: $H = Span((1\ 2\ 1), (-1\ 0\ 1), (0\ 1\ 1)) = \{c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3 : c_i \in R\}$

Osservazione: $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (0\ 2\ 2) = 2\underline{v}_3 \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = 2\underline{v}_3 \Rightarrow \underline{v}_2 = -\underline{v}_1 + 2\underline{v}_3$

Dato $\underline{u} \in Span(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ si ha che $\underline{u} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + c_3\underline{v}_3$ per qualche $c_i \in R$ e quindi $\underline{u} = c_1\underline{v}_1 + c_2(-\underline{v}_1 + 2\underline{v}_3) + c_3\underline{v}_3$

ovvero $\underline{u} = (c_1 - c_2)\underline{v}_1 + (2c_2 + c_3)\underline{v}_3$, da cui $\underline{u} \in Span(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$

Definizione (indipendenza lineare): dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n \in V$ si dicono Linearmente Dipendenti (LI) se

$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + ... + c_3\underline{v}_3 = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$

Verificare che $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono LI: risolviamo il sistema lineare $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n = \underline{0}$ e troviamo che i vettori sono LI se nessuno di essi è esprimibile come combinazione di altri vettori

Proposizione (ridondanza dei vettori linearmente dipendenti):

siano $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n \in V$ $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ sono LD $\Leftrightarrow$ uno di essi è combinazione lineare degli altri

Dimostrazione: $\Rightarrow$ $\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$ LD -> esistono $c_1, c_2, ..., c_n \in R$ non tutti nulli t.c. $c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + ... + c_n\underline{v}_n = \underline{0}$ allora $\exists j \in \{1, 2, ..., n\}$ t.c. $c_j \neq 0$

$c_j\underline{v}_j = -c_1\underline{v}_1 - ... - c_n\underline{v}_n \Rightarrow$ dividendo per $c_j \neq 0$ $\underline{v}_j = -c_1/c_j * \underline{v}_1 - ... - c_n/c_j * \underline{v}_n$

$\Leftarrow$ supponiamo che $\underline{v}_i$ sia combinazione lineare degli altri vettori $\underline{v}_i = d_1\underline{v}_1 + ... + d_n\underline{v}_n \Rightarrow 0 = d_1\underline{v}_1 + ... + d_n\underline{v}_n - 1\underline{v}_i$

Caso particolare: $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono LD se e solo se sono proporzionali, ossia $\underline{v}_1 = c\underline{v}_2$ oppure $\underline{v}_2 = c\underline{v}_1$