Lemma di scarto, di somma e di Steinitz, esistenza di una base, dimensione di uno spazio vettoriale #GAL

Lemma (lemma di scarto): dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ LD allora possiamo scartarne uno mantenendo lo stesso Span

Dimostrazione: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ LD =(lemma precedente)=> $\underline{v}_n = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i\underline{v}_i)$ (senza perdita di generalità)

Tesi: $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1})$

$\supseteq$) $\underline{u} = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \Rightarrow \underline{u} = c_1\underline{v}_1 + \dots + c_{n-1}\underline{v}_{n-1} = c_1\underline{v}_1 + \dots + c_{n-1}\underline{v}_{n-1} + 0\underline{v}_n \in \mathrm{Span}$

$\subseteq$) $\underline{w} \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \Rightarrow \underline{w} = d_1\underline{v}_1 + \dots + d_{n-1}\underline{v}_{n-1} + d_n(a_1\underline{v}_1 + \dots + a_{n-1}\underline{v}_{n-1}) \Rightarrow$ si sommano

$\underline{w} = (d_na_1 + d_1)\underline{v}_1 + \dots + (d_na_{n-1} + d_{n-1})\underline{v}_{n-1} \in \mathrm{Span}$

Lemma (di aggiunta):

supponiamo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ sono LI ma non generatori di V

allora $\exists \underline{v}_{n+1} \in V$ t.c. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}$ sono LI

Osservazione: enunciati speculari

- Scarto: generatori ma non LI => possiamo eliminare un vettore e preservare i "generatori" (lo Span)
- Aggiunta: LI ma non generatori => possiamo aggiungere un vettore e preservare LI

Dimostrazione: per ipotesi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ non generano V

$\Rightarrow \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \neq V$

$\Rightarrow \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \subsetneq V$

$\Rightarrow \exists \underline{v}_{n+1} \in V, \underline{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

Dimostriamo che: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}$ sono LI supponiamo $c_1\underline{v}_1, \dots, c_n\underline{v}_n, c_{n+1}\underline{v}_{n+1} = \underline{0}$ dobbiamo dimostrare che $c_1 = \dots = c_{n+1} = 0$

$c_1\underline{v}_1 + \dots + c_n\underline{v}_n = -c_{n+1}\underline{v}_{n+1}$ dobbiamo avere $c_{n+1} = 0$ altrimenti se $c_{n+1} \neq 0$ => dividendo per $-c_{n+1}$

$\Rightarrow (-c_{n+1})^{-1}c_1\underline{v}_1 - \dots - (-c_{n+1})^{-1}c_n\underline{v}_n = \underline{v}_{n+1} \Rightarrow v_{n+1} \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$, assurdo

allora $c_1\underline{v}_1, \dots, c_n\underline{v}_n, c_{n+1}\underline{v}_{n+1} = \underline{0}$ perché $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono LI per ipotesi => $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}$ sono LI

Definizione: sia V uno spazio vettoriale

una base di V è un insieme di vettori $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$ t.c.

1. $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ sono generatori di V
2. $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ sono LI

Esempio: $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ è una base di R^2

$(\underline{e_1})$ $(\underline{e_2})$

1. $\underline{e_1}, \underline{e_2}$ generano R^2 dato $\underline{v} = (a\ b) \in R^2$ qualsiasi $\underline{v} = \text{Span}(\underline{e_1}, \underline{e_2})$
2. $\underline{e_1}, \underline{e_2}$ sono LI

Definizione:

L'insieme $E = \{\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}\}$ è una base di R^n (stessa verifica di R^2) Questo tipo di base è detta base canonica

Proposizione (esistenza di una base):

sia V uno spazio vettoriale con generatori $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ allora esiste un sottoinsieme $\{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$ cioè è una base di V

Dimostrazione:

per ipotesi $V = \text{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ (generatori)

1. Se sono $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ LI => è una base
2. Se $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ sono LD => per il lemma di scarto posso scartare un vettore v_i senza cambiare $\text{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_{i-1}}, \underline{v_{i+1}}, \dots, \underline{v_n}) = V$

=> ottengo un insieme di n-1 generatori di V

Ripetiamo il passaggio 2) (non si può andare avanti all'infinito)

=> ad un certo punto sono costretto a fermarmi => ottengo il caso 1)

Lemma di Steinitz:

Sia $V = \text{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m})$, siano $\underline{w_1}, \dots, \underline{w_n} \in V$

Se $n > m$ allora $\underline{w_1}, \dots, \underline{w_n}$ sono LD

Dimostrazione:

per ipotesi $\underline{w_j} \in V = \text{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_m})$ $\forall j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \underline{w_j} = \sum_{i=1}^{m} (\underline{v_i} * a_{ij})$ per qualche $a_{ij} \in R$

Considerando la matrice $A = (a_{ij}) \in Mat(m,n)$ per ipotesi $m < n \Rightarrow rk(A) \le m < n$

$\Rightarrow$ il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$ ha infinite soluzioni perché $rk(A) \neq n$ (Rouché-Capelli)

In particolare, ha una soluzione non nulla

$\exists \underline{c} = (c_1 \dots c_n) \in R^n$ t.c. $\underline{c} \neq \underline{0}$ e $A\underline{c} = \underline{0}$ cioè ${}^n\Sigma_{j=1} (a_{ij}*c_j)$ $\forall i = 1, \dots, m$

Consideriamo la combinazione lineare ${}^n\Sigma_{j=1} (c_j*\underline{w_j}) = {}^n\Sigma_{j=1} (c_j*({}^m\Sigma_{i=1} (\underline{v_i}*a_{ij}))) = \Sigma_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n} (c_j a_{ij} \underline{v_i}) = \Sigma_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n} (c_j a_{ij})*\underline{v_i} =$

$= {}^m\Sigma_{i=1} (\underline{v_i}*({}^n\Sigma_{j=1} (c_j*a_{ij}))) = {}^m\Sigma_{i=1} (\underline{v_i}*(0)) = \underline{0}$

Esempio:

$R^3 = Span(\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3})$ $(n = 3)$ 4 vettori qualsiasi saranno sempre LD

Proposizione:

sia V uno spazio vettoriale con base $\{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$ e siano $\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m} \in V$

1. Se $\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m}$ generano $\Rightarrow m \ge n$
2. Se $\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m}$ sono LI $\Rightarrow m \le n$
3. Se $\{\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m}\}$ è una base di V $\Rightarrow m = n$

Dimostrazione:

1. Per ipotesi $V = Span(\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m})$ supponiamo per assurdo $m < n$

   Applichiamo Steinitz a $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V = Span(\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m})$ numero vettori = n > m = numero generatori

   $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ sono LD $\Rightarrow$ assurdo (perché sono una base di V)
2. Per ipotesi $\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m}$ sono LI supponiamo per assurdo $m > n$

   Applichiamo Steinitz a $\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m} \in V = Span(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ numero vettori = m > n = numero generatori

   $\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m}$ sono LD $\Rightarrow$ assurdo
1. Segue da 1) e 2)

Corollario/Definizione: tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi. La dimensione di V è dimV = numero elementi di una base di V

Corollario: dimV = numero elementi di una base di V = max(numero vettori LI di V) = min(numero generatori di V)

Esempi:

1. $dimR^n = n$ perché esiste una base con n elementi
2. $dimMat(m,n) = m*n$ perché esiste una base è $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}\}$ E_{ij} = matrice mxn con 1 in posizione (ij) e 0 altrove

3. $\dim R[t]_{\leq n}$ = n+1 perché esiste una base con n+1 elementi $\{1, t, t_1^2, t_2^3, \ldots\}$

4. $\dim R[t] = \infty$ poiché $1, t, t^2, t^3 \ldots$ sono LI

Nota: in questo caso lavoriamo solo con $V = \infty$