Equazioni e sistemi lineari #GAL

Definizione: un'equazione lineare nelle variabili x_1, x_2, x_n è un'equazione del seguente tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_nx_n = b$

a_1, a_2, a_n, b = numeri reali fissati $\in R$ (a_1,a_2,a_n coefficienti, b termine noto o costante)

nota: se le variabili sono poche potremmo usare diverse lettere al posto di x_1,x_2,x_n

vengono definite equazioni lineari soltanto le somme algebriche tra x_n moltiplicate per un coefficiente

Studio delle equazioni lineari

N = 1 $a_1x_1 = b$

Insieme di soluzioni: $S \{ x_1 \in R : a_1x_1 = b \} \subseteq R$

se $a_1 \neq 0$ -> $x_1 = b/a_1$ -> $S \{ b/a_1 \}$

se $a_1 = 0$ e $b \neq 0$ -> $S = \varnothing$

se $a_1 = 0$ e $b = 0$ -> $S = R$

N = 2 $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

Insieme di soluzioni: $S \{ (x_1\ x_2) \in R^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b \} \subseteq R^2$

se $a_1 \neq 0$ -> $x_1 = -(a2/a_1)*x_2 + b/a_1$ -> x_2 è una variabile libera -> $x_2 = t \in R$ (parametro arbitrario)

$S \{ (-(a_2/a_1)*t + b/a_1\ \ t) : t \in R \} \subseteq R$ -> $S \{ (b/a_1\ \ 0) + t*(-a_1/a_2\ \ 1) : t \in R \} \subseteq R^2$ -> ∞ soluzioni

se $a_1 = 0$ e $a_2 \neq 0$ -> $x_2 = -b/a_2$ -> x_1 variabile libera -> $x_1 = t \in R$)parametro arbitrario)

$S \{ (t\ \ -b/a_2) : t \in R \} \subseteq R^2$ -> ∞ soluzioni

se $a_1 = a_2 = 0$ e $b \neq 0$ -> $S = \varnothing$ -> impossibile

se $a_1 = a_2 = b = 0$ -> $S = R^2$ -> ∞ soluzioni

N ≥ 2 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_nx_n = b$

se $a_i \neq 0$ per qualche i -> ∞ soluzioni

se $a_1 = a_2 = a_n = 0$ e $b \neq 0$ -> $S = \varnothing$

se $a_1 = a_2 = a_n = b = 0$ -> $S = R^n$

Definizione: un sistema lineare è un sistema di equazioni lineari in un certo numero di variabili

Forma generale: $\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1;\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2;\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m\}$

m = numero di equazioni n = numero variabili

a_{ij} = coefficiente della variabile j-esima nella i-esima equazione

i = equazione / riga nella matrice corrispondente j = variabile / colonna nella matrice corrispondente

b_i = termine noto della i-esima equazione / riga nella matrice corrispondente

Insieme delle soluzioni del sistema lineare: $S\ \{ (x_1\ x_2\ x_n) \in R^n$: soddisfi tutte le equazioni del sistema $\} \subseteq R^n$

Soluzione per sostituzione di un sistema:

- Scegliamo una variabile e un'equazione e risolviamo rispetto alla variabile
- Sostituiamo il risultato nelle equazioni rimanenti
- Ripetiamo i passaggi 1 e 2 fino ad esaurire le equazioni
- Sostituiamo al contrario tutte le soluzioni

Esempio di sistema con $m = 2$ e $n = 3$ -> $S\ \{ \underline{v} + t\underline{w} : t \in R \} \subseteq R^3$