Capitolo 3: Applicazioni lineari #GAL

Ripasso (generalità sulle funzioni):

Dati due insiemi A, B una funzione ƒ : A->B è una legge ce associa ad ogni elemento a ∈A un elemento ƒ(a) ∈B

A = dominio o insieme di partenza B = codominio o insieme di arrivo

ƒ(A) = immagine della funzione ƒ(A) = { ƒ(a) : a ∈A } ⊆B

ƒ è iniettiva se $a_1 \neq a_2$ => $ƒ(a_1) \neq ƒ(a_2)$

ƒ è suriettiva se ƒ(A) = B cioè ∀b ∈B ∃a ∈A t.c. ƒ(a) = b

ƒ è biettiva (o biunivoca) se ƒ è iniettiva e suriettiva

Definizione:

siano V, W due spazi vettoriali

un'applicazione lineare (o trasformazione lineare o mappa lineare) è una funzione L : V->W t.c.

1. $L(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = L(\underline{v_1}) + L(\underline{v_2})$ $\forall \underline{v_1}, \underline{v_2} \in V$
2. $L(c\underline{v}) = c*L(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in V, c \in R$

Conseguenze:

- $L(\underline{0}_V) = L(0*\underline{0}_V)$ =(2)= $0*L(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$
- $L(c_1\underline{v_1} + ... + c_n\underline{v_n}) = c_1*L(\underline{v_1}) + ... + c_n*L(\underline{v_n})$

Esempio:

- $L_1 : R^2 \text{->} R^2$ definita da $L_1(x_1\ x_2) = (x_1+x_2\ x_1-x_2)$ effettuare identità $L(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = L(\underline{v_1}) + L(\underline{v_2})$ e $L(c\underline{v}) = c*L(\underline{v})$

  1) e 2) verificate —> L_1 è un'applicazione lineare
- $L_2 : R^2 \text{->} R^2$ definita da $L_2(x_1\ x_2) = (x_1+1\ x_1-x_2)$ non è un'applicazione lineare (L_2 non rispetta la proprietà della somma)
- $L_3 : R^2 \text{->} R^2$ definita da $L_3(x_1\ x_2) = (x_1^2\ x_1-x_2)$ non è un'applicazione lineare (L_3 non rispetta la proprietà del prodotto per uno scalare)

Proposizione (applicazioni lineare tra spazi di vettori colonna):

a) sia A ∈Mat(m,n) la funzione $T_a : R^n \text{->} R^m$ definita da $T_a(\underline{v}) = A\underline{v}$ è un'applicazione lineare

b) data un'applicazione lineare $L : R^n \text{->} R^m$ è della forma $L = T_a$ per un'unica A ∈Mat(m,n)

Dimostrazione:

a) verifichiamo che $T_a : R^n \to R^m$ è lineare

1. $T_a(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = A(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = A\underline{v_1} + A\underline{v_2} = T_a(\underline{v_1}) + T_a(\underline{v_2})$
2. $T_a(c\underline{v}) = A(c\underline{v}) = c(A\underline{v}) = cT_a(\underline{v})$

b) Fissiamo un'applicazione lineare $L : R^n \to R^m$ considerando la matrice $A = (L(e_1) \mid L(e_2) \mid \dots \mid L(e_n) \in Mat(m,n)$

verifichiamo che $L = T_a$, dato $\underline{v} \in R^n \Rightarrow \underline{v}(v_1 \dots v_n) = v_1\underline{e_1} + \dots + v_n\underline{e_n}$

calcoliamo $L(\underline{v})$

$L(\underline{v}) = L(v_1\underline{e_1} + \dots + v_n\underline{e_n}) = v_1 * L(\underline{e_1}) + \dots + v_n * L(\underline{e_n}) = A(v_1 \dots v_n)$

moltiplicazione a dx ≈ combinazione lineare delle colonne

Trasformazioni lineari del piano $T_a : R^2 \to R^2$:

- $A \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ (matrice diagonale) $c \in R$

  $T_a(x_1\ x_2)$ (vettore colonna) $= c(x_1\ x_2)$

  T_a è una dilatazione oppure omotetia
- $A \begin{pmatrix} \cos\partial & -\sin\partial \\ \sin\partial & \cos\partial \end{pmatrix}$ T_a è una rotazione antioraria di ∂
- $A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ T_a è la proiezione sull'asse x_2
- $A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ T_a è una riflessione rispetto all'asse x_2
- Una traslazione non è un'applicazione lineare

Altri esempi:

- $L : Mat(m,n) \to Mat(n,m)$ definita da $L(M) = M^t$ la trasposizione è un'applicazione lineare
- $L : R[t] \to R[t]$ definita da $L(p(t)) = p'(t)$ la derivata prima è un'applicazione lineare
- $L : R[t] \to R[t]$ definita da $L(p(t)) = {}_0\int^t p(x)\,dx$ l'integrale è un'applicazione lineare
- $L : R[t] \to R$ definita da $L(p(t)) = p(t)$ la valutazione di p al punto t è un'applicazione lineare

Proposizione (applicazioni lineari e sottospazi):

$L : V \to W$ applicazione lineare

1. Se $H \subseteq V$ è un sottospazio, l'immagine di H: $L(H) = \{L(\underline{v}) : \underline{v} \in H\} \subseteq W$ è un sottospazio
2. Se $J \subseteq W$ è un sottospazio, la sua controimmagine $L^{-1}(J) = \{\underline{v} \in V : L(\underline{v})$

$\in J\} \subseteq V$ è un sottospazio

Dimostrazione:

1. Verifichiamo che l'immagine di $H \subseteq W$ è un sottospazio
   - $\underline{0}_V \in L(H)$ perché $L(\underline{0}_V) = \underline{0}_W \in W$ perché H è un sottospazio
   - $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in L(H) \Rightarrow \underline{v}_1 = L(\underline{w}_1), \underline{v}_2 = L(\underline{w}_2) \in W$ per qualche $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in H$ $\Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = L(\underline{w}_1) + L(\underline{w}_2) = L(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) \in L(H)$ perché L è un'applicazione lineare e H è sottospazio
   - $\underline{v} \in L(H), c \in R \Rightarrow \underline{v} = L(\underline{w})$ per qualche $\underline{w} \in H \Rightarrow L(c\underline{w}) = cL(\underline{w}) = c\underline{v}$ perché H è un sottospazio e L è un'applicazione lineare
2. Verifichiamo che $L^{-1}(J) \subseteq V$ è un sottospazio
   - $\underline{0}_V \in L^{-1}(J)$ perché $L(\underline{0}_V) = \underline{0}_W \in J$ perché J è un sottospazio
   - $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in L^{-1}(J) \Rightarrow L(\underline{v}_1), L(\underline{v}_2) \in J \Rightarrow L(\underline{v}_1) + L(\underline{v}_2) \in J$ perché J è un sottospazio
     $\Rightarrow L(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \in J$ perché L è un'applicazione lineare
   - $\underline{v} \in L^{-1}(J), c \in R \Rightarrow cL(\underline{v}) = L(c\underline{v}) \in J \Rightarrow c\underline{v} \in L^{-1}(J)$ perché J è un sottospazio e L è un'applicazione lineare

Definizione:

sia $L : V \to W$

1. L'immagine di L è l'immagine di tutto V $Im(L) = L(V) = \{L(\underline{v}) : \underline{v} \in V\} \subseteq W$
2. Il kernel di L è la controimmagine di $\{\underline{0}_W\} \subseteq W$: $L^{-1}(\{\underline{0}_W\}) = \{\underline{v} \in V : L(\underline{v}) = \underline{0}_W\} \subseteq V$

Osservazione:

Se $H = Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \subseteq V$

$\Rightarrow L(H) = \{L(c_1\underline{v}_1 + \dots + c_n\underline{v}_n) : c_i \in R\} = \{c_1L(\underline{v}_1) + \dots + c_nL(\underline{v}_n) : c_i \in R\} \Rightarrow$
$L(H) = Span\{L(\underline{v}_1), \dots, L(\underline{v}_n)\} \subseteq W$

Esempio (T_a):

$A \in Mat(m,n)$, $T_a : R^n \to R^m$

- $ker(T_a) = \{\underline{v} \in R^n : T_a(\underline{v}) = \underline{0}\} = \{\underline{v} \in R^n : A\underline{v} = \underline{0}\} = ker(A) \subseteq R^m$
- $Im(T_a) \subseteq R^m = T_a(R^n) = T_a(Span(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)) = Span(T_a(\underline{e}_1), \dots, T_a(\underline{e}_n)\} = Span(A\underline{e}_1, \dots, A\underline{e}_n\} = col(A)$

  ($A\underline{e}_i$ = colonna i-esima di A) $\Rightarrow$ (moltiplicare a dx per la base canonica = combinazione lineare delle colonne)