Massimo e Minimo, Valore assoluto o Modulo #Analisi1

Sia $x = Q$ $\quad$ $x = R$

Definizione:
- Dato un sottoinsieme $E \subseteq X$, E si dice limitato superiormente sull'alto se esiste qualche elemento di X tale che $k \geq x \quad \forall x \in E$
- Dato un sottoinsieme $E \subseteq X$, E si dice limitato inferiormente o dal basso se $\exists$ $h \in X$ tale che $h \leq x \quad \forall x \in E$
- Dato un sottoinsieme $E \subseteq X$, E si dice limitato sia dall'alto che dal basso se $\exists$ $h,k \in X$ tale che $h \leq x \leq k \quad \forall x \in E$

Definizione:
- Dato $E \subseteq X$, $x_0 \in X$ si dice massimo per E, e scrivimi $x_0 = \max E$, se
  - $x_0 \in E$
  - $x \leq x_0 \qquad \forall x \in E$
- Dato $E \subseteq X$, $x1 \in X$ si dice massimo per E, e scrivimi $x_1 = \min E$, se
  - $x_1 \in E$
  - $x \geq x_1 \qquad \forall x \in E$

Osservazione:
- Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché esista massimo o minimo è che l'insieme sia limitato dall'alto o dal basso. L'insieme potrebbe essere limitato ma non ammettere massimo e minimo
- Non sempre esistono massimo e minimo

Definizione:
- Ogni numero maggiore del massimo dell'insieme si dice maggiorante. $E \subseteq X$, $k \in X$ (non necessariamente $k \in E$) si dice maggiorante di E se $k \geq x \quad \forall x \in E$
- Ogni numero minore del minimo dell'insieme si dice minorante. $E \subseteq X$, $h \in X$ (non necessariamente $h \in E$) si dice minorante di E se $h \leq x \quad \forall x \in E$

Osservazione:
- Se k maggiorante di $E \subseteq X$ e $k \in E$ allora $k = \max E$
- Se h minorante di $E \subseteq X$ e $h \in E$ allora $h = \min E$
- Se k maggiorante di $E \subseteq X$ e $y \geq k$ allora y maggiorante di E
- Se h minorante di $E \subseteq X$ e $y \leq h$ allora y = minorante di E
- $E \subseteq X$ ammette maggioranti se e solo se è limitato dall'alto
- $E \subseteq X$ ammette minoranti se e solo se è limitato dal basso

Definizione: sia $E \subseteq X$
- (Se esistono maggioranti cioè se E è limitato dall'alto) chiamiamo l'estremo superiore di E, e indichiamo $\sup E$, il minimo dei maggioranti
- (Se esistono minoranti cioè se E è limitato dal basso) chiamiamo l'estremo

inferiore di E, e indichiamo infE, il massimo dei minoranti

Osservazione:
- SupE è il migliore dei maggioranti
- Info è il migliore dei minoranti

Proprietà dell'estremo superiore (inferiore):
x soddisfa la proprietà dell'estremo superiore (o inferiore) se ogni sottoinsieme $E \subseteq X$ limitato dall'alto (o dal basso) possiede estremo superiore (o inferiore) $supE \in X$ ($infE \in X$)

Definizione assiomatica di R:
L'insieme R è l'unico campo ordinato che soddisfa la proprietà dell'estremo superiore (inferiore)

Osservazione:
- La proprietà dell'estremo superiore è equivalente alla proprietà dell'estremo inferiore (vale una se e solo se vado l'altra)
- Q non soddisfa le proprietà dell'estremo superiore: $E = \{r \in Q : r \geq 0, r_2 \leq 2\} \subset Q \quad \nexists \text{ supE in } Q$
- Dato $E \subseteq R$, se esiste maxE/minE allora:
  - maxE = supE
  - minE = infE
- Dato $E \subseteq R$ limitato dall'alto/basso supE/infE esiste in R
  - Se $supE \in E$, allora maxE = supE
  - Se $infE \in E$, allora minE = infE

La proprietà dell'estremo superiore/inferiore di R nella definizione assiomatica di R prende il nome di assioma di continuità di R

Definizione:
- Dato $E \subseteq R$ se E è illimitato dall'alto diremo che supE = +∞
- Dato $E \subseteq R$ se E è illimitato dal basso diremo che infE = -∞

Osservazione:
- Se $E \subseteq R$ (con $E \neq \emptyset$) infE e super sono ben definiti ed esistono sempre in $R \cup \{\pm\infty\}$
- supE e $infE \in R$ se e solo se E è limitato dall'alto o dal basso

Osservazione:
- Estremo superiore (x1 migliore dei maggioranti):
  $E \subseteq R$ limitato dall'alto
  1) $x \leq x_1 \quad \forall x \in E$ -> x_1 è un maggiorante di E
  2) $\forall k<x_1 \quad \exists x \in E : k<x \leq x_1$
  ogni $k<x_1$ non è maggiorante di E, cioè x1 è il più piccolo dei maggioranti di E
- Estremo inferiore (x2 migliore dei minoranti):
  $E \subseteq R$ limitato dal basso

1) $x \geq x^2$ $\forall x \in E$ -> x^2 è un minorante di E

2) $\forall h > x^2$ $\exists x \in E : x^2 \leq x < h$

ogni $h > x^2$ non è minorante di E, cioèx^2 è il più grande dei minoranti di E

Definizione:

- Si dice valore assoluto o modulo di $a \in R$ il numero ≥ 0 definito da:
  $|a| = \{a$ se $a \geq 0$; $-a$ se $a < 0\}$

Osservazione:

- $\forall a \in R$ $|a| \geq 0$
- $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$
- $\forall r > 0$, $\forall a \in R$ $|a| \leq r$ se e solo se $-r \leq a \leq r$

Teorema della disuguaglianza triangolare:

- $\forall x,y \in R$ $|x+y| \leq |x| + |y|$

Osservazione:

- Spesso compare nella forma: $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$ $\forall a,b,c \in R$
- Segue scegliendo $x=a-c$ e $y=c-b$

R può essere rappresentato geometricamente mettendolo in corrispondenza con i punti di una retta (orientata)
Contrariamente a quanto avviene per Q, la corrispondenza tra R e i punti di una retta è biunivoca, cioè ad ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto sulla retta e viceversa (per Q il viceversa non è vero)

- Si fissa arbitrariamente un punto nella retta a cui si associa 0
- Si fissa arbitrariamente un punto nella retta diverso dal primo e si associa 1
- 01 è l'unità di misura
- $\forall a \in R$ si associa il punto sulla retta che è secondo estremo di un segmento avente primo estremo in 0 e lunghezza $|a|$. Il punto è dallo stesso lato di 1 rispetto a 0 se $a > 0$, dal lato opposto se $a < 0$

Geometricamente $|a|$ è la lunghezza del segmento di estremi 0a, oppure è la distanza di a da 0
Più in generale, $|a-b|$ è la lunghezza del segmento di estremi ab, cioè la distanza tra a e b