Operazioni tra sottospazi, formula di Grassman #GAL

Proposizione (intersezione):

$H_1, H_2 \in V$ sottospazi => $H_1 \cap H_2 = \{\underline{v} \in V : \underline{v} \in H_1, \underline{v} \in H_2\} \subseteq V$ è un sottospazio

per calcolare $H_1 \cap H_2$, usare le forme parametriche (se H_1, H_2 sono in forma cartesiana, trovare prima le loro forme parametriche)

Dimostrazione:

1. $\underline{0} \in H_1$, $\underline{0} \in H_2$ => $\underline{0} \in H_1 \cap H_2$
2. Dati $\underline{v},\underline{w} \in H_1, H_2$ =>
   $\underline{v},\underline{w} \in H_1 \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in H_1$
   $\underline{v},\underline{w} \in H_2 \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in H_2$ => $\underline{v} + \underline{w}$ chiuso rispetto alla somma
3. Come 2)

Proposizione (unione):

l'unione di sottospazi in generale NON è un sottospazio

Proposizione (somma):

$H_1, H_2 \in V$ sottospazi

la somma di H_1 e H_2 è l'insieme $H_1 + H_2 = \{c_1\underline{v} + c_2\underline{u} : \underline{v} \in H_1, \underline{u} \in H_2\} \subseteq V = \{\underline{v} + \underline{u} : \underline{v} \in H_1, \underline{u} \in H_2\} \subseteq V$

se $H_1 = \mathrm{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n})$ e $H_2 = \mathrm{Span}(\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_m})$ => $H_1 + H_2 = \mathrm{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}, \underline{w_1}, \ldots, \underline{w_m})$

per calcolare $H_1 + H_2$, usare le forme parametriche (se H_1, H_2 sono in forma cartesiana, trovare prima le loro forme parametriche)

Proposizione: la somma di sottospazi è un sottospazio

Osservazione:

$H_1 \cap H_2$ il più grande sotto spazio contenuto sia in H_1 e H_2

$H_1 + H_2 = R^n$ tutti i vettori di R^n si possono scrivere come somma di due sottospazi

Teorema (Formula di Grassman):

$\dim(H_1 + H_2) + \dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2$

più precisamente: sia $\{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_p}\}$ una base di $H_1 \cap H_2$ $\quad H_1 \cap H_2 \subseteq H_1 \mid H_1 \cap H_2 \subseteq H_2$ completiamo a

$H_1 = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_p}, \underline{w_1}, \ldots, \underline{w_q}\}$ e $H_2 = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_p}, \underline{u_1}, \ldots, \underline{u_r}\}$ allora $H_1 + H_2 = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_p}, \underline{w_1}, \ldots, \underline{w_q}, \underline{u_1}, \ldots, \underline{u_r}\}$ è una base della somma

$\dim(H_1 + H_2) = p + q + r = (p + q) + (p + r) - p = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$

$\dim(H_1 \cap H_2) = p$

$\dim H_1 = p + q$

$\dim H_2 = p + r$