Dimensioni di sottospazi, teorema riassuntivo su dimensione di basi #GAL

Proposizione: sia $H \subseteq V$ sottospazio

1. $\dim H \leq \dim V$
2. $\dim H = \dim V \iff H = V$

Dimostrazione:

fissiamo una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di H quindi $\dim H = n$

1. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \subseteq V$ sono LI => $n \leq \max\{$numero vettori LI in V$\}$ $\dim H \leq \dim V$
2. <= ovvio

   => supponiamo $\dim V = \dim H = n$

   supponiamo per assurdo $H \neq V$, cioè $H = \mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \subsetneq V$

   per il lemma di aggiunta $\exists \underline{v}_{n+1} \in V$ t.c. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}$ sono LI

   => $n+1 \leq \max\{$numero vettori LI in V$\} = \dim V = n$ ASSURDO

(max{vettori LI in V} = n, non viene rispettato il lemma)

Teorema (riassuntivo su dimensione di base):

sia V uno spazio vettoriale con $\dim V = n$

sia $C = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\} \subseteq V$ un insieme di vettori

1. Supponiamo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p$ LI allora
   a) $p \leq n$
   b) $p = n \iff C$ è una base di V
   c) se $p < n \Rightarrow C$ può essere completato a una base di V $\exists C' = \{\underline{v}_{p+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ t.c. $C \cup C'$ è una base
1. Supponiamo $C = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_p\} \subseteq V$ un insieme di generatori di V allora
   a) $p \geq n$
   b) $p = n \iff C$ è una base di V
   c) $p > n \Rightarrow$ applico lemma di scarto estraendo da C una base di V $\exists C'' \leq C$ t.c. C'' è una base di V

Proposizione:

sia A una matrice a scala, le righe non nulle di A formano una base di row(A)

Esempio:

$A \in \mathrm{Mat}(5,6)$ con ultime due righe nulle $= (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$

$\mathrm{row}(A) = \mathrm{Span}(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) \subseteq \mathbb{R}^6$ =lemma di scarto= (R_1, R_2, R_3)

- Le tre righe non nulle R_1, R_2, R_3 generano row(A)
- Sono anche LI supponiamo $c_1R_1 + c_2R_2 + c_3R_3 = \underline{0}$ facendo i calcoli si dimostra che sono LI

$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow R_1, R_2, R_3$ LI => base

Corollario:

A matrice qualsiasi dimRow(A) = rk(A)

Dimostrazione:

sia A -> A′ riduzione a scala rk(A) = rk(A′) ma anche => row(A) = row(A′) => dimRow(A) = dimRow(A′)

dalla proposizione segue dimRow(A′) = numero righe non nulle di A′ = rk(A′) => dimRow(A) = rk(A)

Concretamente:

dato $H \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio in forma parametrica possiamo scrivere come H = row(A) (se necessario, trasponendo colonne->righe)

ridurre A a scala => troviamo una base di H, dimH

Corollario:

dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in \mathbb{R}^n$ vettori riga $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ sono LI <=> $rk(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m) = m$

Dimostrazione:

sicuramente $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ generano row(A)

Quindi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ LI <=> $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ base di row(A)

(Teorema riassuntivo) 2.b <=> $\dim Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m) = m$ <=> rk(A) = m

Nota: trasponendo, possiamo applicare il risultato a vettori colonna)

Teorema:

dimCol(A) = rk(A)

Corollario:

$rk(A) = rk(A^t)$

Teorema (nullità + rango):

$A \in Mat(m,n) \Rightarrow \dim Ker(A) + rk(A) = n$

Dimostrazione:

metodo di Gauss-Jordan: l'insieme delle soluzioni di $A\underline{x} = \underline{0}$ è ker(A) = $Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s)$ dove s = n - rk(A) = numero variabili libere

Siano $x_{i1}, \dots, x_{ii}$ le variabili libere => ogni v_j è ottenuto ponendo $x_j = 1$, le altre variabili libere a 0

Analizzando le posizioni 1 e 0 nelle variabili libere segue che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s$ sono LI => $\dim Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s) = s$