Radici, esponenziali e logaritmi #Analisi1

Radici (reali) = "inversa della potenza"

Teorema: sia $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Allora $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $x \geq 0$ e $x^n = y$

(Segue dal fatto che la funzione $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^n$ è monotona, strettamente crescente, continua,

con $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$)

Definizione: per definizione il numero reale x siffatto si chiama radice n-esima (reale) di y, $x = y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$

Osservazione: $\sqrt[2]{4} = 2$ giusto $\sqrt[2]{4}\ \pm 2$ sbagliato!

Osservazione: $\sqrt[2]{a^2} = |a| \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{y} \geq 0 \qquad \forall y \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

$\sqrt[n]{a^n} \qquad \forall a \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

Esponenziali:

Definizione: $\forall a > 0$, $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

$a^m = a*\ldots*a$ } m-volte $m \neq 0$

$a^0 = 1$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

$a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$

Questo definisce a^r, $\forall a > 0$, $\forall r \in \mathbb{R}$ con $r \geq 0$

Definizione: $\forall a > 0$

$a^{-1} = 1/a \quad m,n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$

$a^{-m} = 1/a*\ldots*1/a$ } m-volte $m \neq 0$

$a^{-1/n} = 1/a^{1/n} = 1/\sqrt[n]{a}$

$a^{-m/n} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{1/a^m}$

Questo definisce a^r, $\forall a > 0$, $\forall r \in \mathbb{Q}$

Come definire a^b, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

$b \in \mathbb{R} \Rightarrow b = \pm b_0,b_1b_2\ldots b_k \qquad b_0 \in \mathbb{N},\ b_k \in \{0\ldots 9\},\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$

Costruiamo una sequenza di numeri (successione): $a^{\pm b_0}$; $a^{\pm b_0,b_1}$; $a^{\pm b_0,b_1\ldots b_k}$

Poiché $\forall k \in \mathbb{N}$ il numero $\pm b_0,b_1b_2\ldots b_k$ è razionale, tutti i numeri della successione sono potenze con esponente in Q con a > 0, che possiamo calcolare con la definizione precedente

Idea: $a^b = \lim_{k->\infty} a^{\pm b_0,b_1...b_k}$ più precisamente:

- $a > 1$, $b \geq 0$ oppure $0 < a < 1$, $b \leq 0$ allora:

  la successione è crescente: $a^{\pm b_0,b_1...b_k}$ diventa sempre più grande all'aumentare di k ed è limitato superiormente.

  definiamo $a^b = \sup \{ a^{\pm b_0}; a^{\pm b_0,b_1}; a^{\pm b_0,b_1...b_k} \} -> a^b \in R$
- $a > 1$, $b \leq 0$ oppure $0 < a < 1$, $b \geq 0$ allora:

  la successione è decrescente: $a^{\pm b_0,b_1...b_k}$ diventa sempre più piccolo all'aumentare di k ed è limitato inferiormente.

  definiamo $a^b = \inf \{ a^{\pm b_0}; a^{\pm b_0,b_1}; a^{\pm b_0,b_1...b_k} \} -> a^b \in R$
- $A = 1$, $b \in R$ allora $a^{\pm b_0,b_1...b_k} = 1$ $\forall k \in N$

  quindi $a^b = 1$ se $a = 1$, $\forall b \in R$

Osservazione: a^b definito $\forall a > 0$, $\forall b \in R$ e $a^b > 0$

Osservazione: a^b può essere definito per $a \leq 0$ solo per alcuni valori di $b \in R$

- Per $a = 0$, $0^b = 0$, $\forall b > 0$
- Per $a < 0$, $b = m/n \in Q$ con m,n relativamente primi (MCD = 1), ed n dispari

  $a^{1/n} = -|a|^{1/n} = -\sqrt[n]{|a|}$

  $a^{-1/n} = -1/(|a|^{1/n}) = -1/(\sqrt[n]{|a|})$

  $a^{\pm m/n} = (a^m)^{\pm 1/n}$

Proprietà delle potenze: siano $a,b,c,d \in R$ e $a,b > 0$

- E_1 $a^0 = 1$ $\forall a \neq 0$; $1^c = 1$ $\forall c$
- E_2 $a^c > 0$ $\forall c$; $a^c \leq 1$ se $a \leq 1$ e $c > 0$
- E_3 $a^{c+d} = a^c * a^d$
- E_4 $(ab)^c = a^c * b^c$
- E_5 $(a^b)^c = a^{bc}$
- E_6 $c < d \Rightarrow a^c \leq a^d$ se $a \leq 1$
- E_7 $0 < a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c$ $\forall c > 0$

Logaritmi:

Teorema: dati $y,a \in R$, con $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

allora $\exists!\ x \in R$ t.c. $a^x = y$

Definizione: dati $y,a \in R$, con $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

definiamo $x = \log_a y$ l'unica soluzione

Osservazione: $a^{\log_a y} = y$

Proprietà dei logaritmi: siano $x,y,a \in R$, con $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

- L_1 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- L_2 $\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$
- L_3 $\log_a x^\beta = \beta * \log_a x \quad \forall \beta \in R$
- L_4 $\log_a x = 1/(\log_x a) = -\log_{1/a} x \quad (x \neq 1)$
- L_5 $\log_b x = (\log_a x)/(\log_a b) \quad \forall b > 0,\ b \neq 1$