# Algebra delle matrici #GAL

Denotiamo:

Mat(m,n) = { Insieme delle matrici m*n }

Mat(m,1) = { Insieme dei vettori colonna } ($\sim R^m$)

Mat(1,n) = { Insieme dei vettori riga } ($\sim R^n$)C

Spesso denotiamo:

A = Mat(m,n) con A = $(a_{ij})$

e inoltre $(A)_{ij}$ -> sto considerando l'elemento ij

1. Somma
   date due matrici A = $(a_{ij})$, B = $(b_{ij})$ $\in$Mat(m,n)
   definiamo A+B = $(a_{ij} + b_{ij})$ $\in$Mat(m,n)
   somma componente per componente
2. Prodotto per uno scalare
   A = $(a_{ij})$ $\in$Mat(m,n), c $\in$R
   cA = $(c*a_{ij})$ $\in$Mat(m,n)

Proprietà di somma e prodotto per uno scalare stesse 8 delle operazioni in $R^n$:

Proprietà della somma:

1. Associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
2. Commutativa: A + B = B + A
3. Elemento neutro: $\exists$ O : A + O = A   $(O)_{ij} = 0$ $\forall$ij
4. Elemento opposto: $\forall$A $\exists$B : A + B = 0

Proprietà del prodotto:

5. Associativa: c(d*A) = (cd)*A
6. Elemento neutro: 1*A = A
7. Distributiva scalare: c(A+ B) = c*A + c*B
8. Distributiva vettore: (c + d)A = c*A + d*A

3. Trasposta di una matrice
   data A = (aij) $\in$Mat(m,n), definiamo:
   $A^t = (a_{ji})$ cioè $(A^t)_{ij} = a_{ji}$ oppure $(A)_{ji}$
   $A^t$ $\in$Mat(n,m)
   Proprietà: date due matrici della stessa dimensione A,B $\in$Mat(m,n), c $\in$R
   - $(A^t)^t = A$
   - $(A + B)^t = A^t + B^t$
   - $(c*A)^t = c*A^t$

4. Prodotto tra matrici
   - Caso speciale: vettore riga x vettore colonna (1,n)*(n,1)

Dati A $\in$Mat(1,n) e B $\in$Mat(n,1)

definiamo AB = $(a_1*b_1, a_2*b_2, a_n*b_n)$ -> $^n\Sigma_{k=1}(a_k + b_k)$

- Caso generale:

Dati m,n,p $\in$R, A = $(a_{ij})$ $\in$Mat(m,p), B = $(b_{ij})$ $\in$Mat(p,n)

Definiamo AB ponendo $(AB)_{ij} = a_{i1}*b_{1j} + a_{i2}*b_{2j} + a_{ip}*b_{pj}$ ->

$^p\Sigma_{k=1}(a_{ik} + b_{kj})$

cioè = elemento di AB sulla riga i, colonna j = (riga i-esima di A)*(colonna j-esima di B)

AB $\in$Mat(m,n)

IMPORTANTE: il prodotto AB è definito se (numero di colonne A)=(numero di righe B)

Proprietà del prodotto tra matrici:

dove A,B,C matrici t.c. i prodotti/somme sono definiti e d $\in$R

- Associativa:
  - (AB)C = A(BC)
  - d*(AB) = (dA)*B = A*(dB)
  - (A+B)C = AC + BC
  - A(B+C) = AB + AC

IMPORTANTE: non vale la proprietà commutativa AB ≠ BA:

- a volte AB è definita e BA no
- a volte AB,BA sono definite, ma hanno forma diversa:
  A $\in$Mat(2,3) e B $\in$Mat(3,2) -> AB $\in$Mat(2,2) mentre BA $\in$Mat(3,3)
- A volte AB,BA sono definite, hanno la stessa taglia ma AB ≠ BA

Può accadere che AB = 0 con A,B ≠ 0