Funzioni, dominio, codominio, grafico, sup, inf, massimo, minimo, monotonia, inversa e funzioni composte #Analisi1

Definizione: dati due insiemi A,B, una funzione ƒ : A->B è una legge che ad ogni elemento di x ∈A fa corrispondere uno ed un solo elemento y ∈B scriveremo y = ƒ(x)

A si dice dominio di ƒ

B si dice codominio di ƒ

se x ∈A, l'elemento y = ƒ(x) = B si dice immagine di x tramite ƒ

Definizione: si chiama immagine di A tramite ƒ (o immagine di ƒ) l'insieme ƒ(A) = Imƒ = {y ∈B : ∃x ∈A : ƒ(x)) y} degli elementi di B che "provengono" da qualche elemento di A tramite ƒ

Osservazione: in generale Imƒ ⊆B, ma può essere Imƒ ⊊B

Osservazione: vengono considerate come funzioni diverse

- ƒ : R->R ƒ(x) = x^2
- ƒ : R->[0,∞) ƒ(x) = x^2
- ƒ : [0,∞)->R ƒ(x) = x^2

Definizione: data un ƒ : A->B, se Imƒ = B allora ƒ suriettiva

Esempio: ƒ : R->R ƒ(x) = x^2 Imƒ = [0, ∞) ⊂Rƒ non è suriettiva

g : R->[0, ∞) g(x) = x^2 Img = [0, ∞) g è suriettiva

Osservazione: una funzione viene assegnata dichiarando dominio, codominio e la legge y = ƒ(x)

Osservazione: a volte indicheremo il dominio di una funzione ƒ : A->B con D(ƒ) = A

Definizione: data ƒ : A->B, C ⊆B, si dice controimmagine di C tramite ƒ l'insieme $ƒ^{-1}$(C) = {x ∈A : ƒ(x) ∈C} ⊆A

Esempio: ƒ : R->R ƒ(x) = x^2 C = {y ∈R : y ≥ 4} => $ƒ^{-1}$(C) = {x ∈A : x^2 ≥ 4} = (-∞,. -2] U [2, +∞)

Definizione: il grafico di una funzione ƒ : A->B è il sottoinsieme di AxB definito da y(ƒ) = {(x,y) ∈AxB : x ∈A, y = ƒ(x)} = {(x,ƒ(x)) ∈AxB}

Osservazione: se ƒ : A->B e A,B ⊆R allora y(f) ⊂R^2

in questo corso ci occupiamo sostanzialmente di ƒ : A ⊆R->R quando non dichiariamo il codominio di una funzione, è sottinteso che esso sia R

Definizione: una funzione $f : N \to R$ prende il nome di successione di numeri reali più in generale, si chiamano successioni le funzioni da $f : A \subseteq N \to R$ con $A = \{n \in N : n \geq n_0\}$ per qualunque $n_0 \in N$

Esempio: $a_n = 1/n \quad \forall x \geq 1$; $g(n) = \log(n - 4) \quad \forall n \geq 5$; $h(n) = 1/(n - 4)^3 \quad \forall n \geq 5$

Osservazione: spesso si usa la notazione a_n, $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ invece di $f(n)$

Esempio: per rappresentare il grafico di una funzione l'asse orizzontale rappresenta il dominio, mentre l'asse verticale il codominio

D(f) è la proiezione del grafico y(f) sull'asse x (in direzione parallela all'asse x)

Imf è la proiezione del grafico y(f) sull'asse y (in direzione parallela dell'asse x)

Possiamo tracciare delle rette sul piano in particolare:

- Le rette verticali che passano da $x \in D(f)$ intersecano la funzione in un punto soltanto $y = f(x)$
- Le rette orizzontali intersecano il grafico se e solo se passa dall'insieme immagine

Definizione: data $f : A \subseteq R \to R$

- f è limitata superiormente o dall'alto se l'insieme immagine $\mathrm{Im}f \subseteq R$ è limitato dall'alto, cioè $\exists M \in R : f(x) \leq M \quad \forall x \in A$
- f è limitata inferiormente o dal basso se l'insieme immagine $\mathrm{Im}f \subseteq R$ è limitato dal basso, cioè $\exists m \in R : m \leq f(x) \quad \forall x \in A$
- f è limitata sia dall'alto che dall'alto se l'insieme immagine $\mathrm{Im}f \subseteq R$ è limitato superiormente che inferiormente, cioè $\exists M, m \in R : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in A$

Definizione: data $f : A \subseteq R \to R$ definiamo:

- Estremo superiore di f: $\sup f(x) = \sup \mathrm{Im}f$
- Estremo inferiore di f: $\inf f(x) = \inf \mathrm{Im}f$
- Massimo (assoluto) di f: $\max f(x) = \max \mathrm{Im}f$ (se esiste)
- Minimo (assoluto) di f: $\min f(x) = \min \mathrm{im}f$ (se esiste)

Osservazione:

- $\sup f(x)$, $\inf f(x)$ esistono sempre in $R \cup \{\pm\infty\}$, eventualmente infiniti
- se esiste $\max f(x)$ e/o $\min f(x)$ allora $\max f(x) = \sup f(x)$ e/o $\min f(x) = \inf f(x)$

Osservazione: in molti casi, una funzione (reale, di variabile reale) viene assegnata solo tramite la sua espressione analitica $f(x) = \sqrt{(1 - x)}$ $g(x) = \log(x + 1)$ $h(x) = e^x$ non dichiarando esplicitamente dominio e codominio in tal caso il codominio è R, il dominio è invece il più grande sottoinsieme $A \subseteq R$ dove la regola analitica assegnata è ben definita. Si parla di Campo di Esistenza

Definizione: dato un $a > 0$, $f : (-a, a) \subseteq R \to R$ (anche $a = \infty$ è ammissibile)

- f si dice pari se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in (-a, a)$
- f si dice dispari se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in (-a, a)$

Osservazione:

- Le funzioni pari hanno grafico simmetrico rispetto all'asse y
- Le funzioni dispari hanno grafico simmetrico rispetto all'origine

Definizione: $f : A \subseteq R \to R$ si dice monotona se soddisfa una di queste proprietà

- Crescente se $\forall x_1, x_2 \in A \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in A \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Strettamente decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Osservazione:

- f crescente preserva le diseguaglianze tra gli argomenti
- f decrescente inverte le diseguaglianze tra gli argomenti
- f crescente $\Leftrightarrow (f(x_2) - f(x_1)) / (x_2 - x_1) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_2 \neq x_1$
- f decrescente $\Leftrightarrow (f(x_2) - f(x_1)) / (x_2 - x_1) \leq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_2 \neq x_1$

Definizione: sia $f : A \subseteq R \to R$, diremo che f è periodica di periodo $T > 0$

se $f(x + t) = f(x) \quad \forall x \in A$

ogni intervallo lungo T contenuto in A si chiama intervallo di periodicità

Osservazione: $f(x) = \sin x$ $\quad g(x) = \cos x$ $\quad$ sono periodiche di periodo 2π, 4π, 6π, ...

$h(x) = \tan x$ è periodica di periodo π, 2π, 3π, ...

Definizione: date due funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$

si chiama g composto f la funzione

$g \circ f : A \to C \qquad g \circ f = g(f(x)) \quad \forall x \in A$

Osservazione: ovviamente si possono comporre anche 3 o più funzioni $h \circ g \circ f = h(g(f(x)))$

vale sempre $\forall f,g,h \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

in generale $f \circ g \neq g \circ f$

Osservazione: non tutte le funzioni possono essere composte

Esempio: $f(x) = -x^2$ $\; g(t) = \log(t)$ $\quad g \circ f$ non esiste $\log(-x^2)$

Osservazione: se $f : A \to B$, $g : E \subseteq B \to C$ può essere definita $g \circ f : E \to C$

$D(g \cdot f) = \{x \in A : f(x) \in E\} = A \quad U \ f^{-1}(E) \subseteq A$
$g \cdot f(x) = g(f(x)) x \in D$

Definizione: data $f : A \to B$
- Se $Imf = B$ f si dice suriettiva
- f si dice iniettiva se (equivalentemente):
  1. $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
  2. $\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
  3. $\forall y \in Imf \quad \exists! x \in A : f(x) = y$

Osservazione: sull'equazione $f(x) = y$ se $y \in Imf \quad \exists x \in D(f) : f(x) = y$ altrimenti $\nexists x$ siffatto
se f suriettiva, $f(x) = y$ ha almeno una soluzione $\forall y \in B$
se f iniettiva, $f(x) = y$ può non avere soluzione per qualche $y \in B$, ma se ne esiste una $x \in A$, essa è unica cioè $f(x) = y$ ha al più una soluzione $x \in A$, $\forall y \in B$
Osservazione: data $f : A \to B$ iniettiva, allora $\forall y \in Imf \quad \exists! x \in A : f(x) = y$

Definizione: data $f : A \to B$ iniettiva, allora esiste una funzione che $\forall y \in Imf$ associa l'unico elemento $x \in A : f(x) = y$ si chiama funzione inversa di f e si indica con $f^{-1} : Imf \subseteq B \to A \ x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$
Osservazione: se $f : A \to B$ iniettiva
- $Imf = D(f^{-1}) \quad Imf^{-1} = D(f)$
- $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D(f)$
- $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Imf$

Osservazione:
- f iniettiva se trovo al più di un'intersezione con una retta orizzontale
- f suriettiva su trovo almeno un'intersezione con una retta orizzontale

Definizione: se $f : A \to B$ è iniettiva diremo che f è invertibile (sulla sua immagine) cioè $\exists f^{-1} : Imf \subseteq B \to A$
Osservazione: anche $u : (-\infty, 0] \to R \quad u(x) = x^2$ è iniettiva, quindi è invertibile sulla sua immagine $Imu = [0, +\infty)$ l'inversa è $u^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0] \quad u^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

Teorema: $f : A \subseteq R \to R$ strettamente monotona in A, allora f è iniettiva, inoltre l'inversa $f^{-1} : Imf \subseteq R \to R$ è strettamente monotona (come f)
Dimostrazione: per fissare le idee supponiamo f strettamente crescente $\forall x_1, x_2$

$\in A$, $x_1 \neq x_2$ vogliamo mostrare che $f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè f è iniettiva avremmo:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Perché f strettamente crescente in ogni caso $f(x_1) \neq f(x_2)$ => f iniettiva => $\exists f^{-1} : Imf \subseteq R \to R$

Mostriamo che f^{-1} è strettamente crescente per assurdo: siano $y_1, y_2 \in D(f^{-1}) = Imf$ e siano $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$

supponiamo (per assurdo) che $y_1 < y_2$ e $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ cioè $x_1 \geq x_2$

essendo f strettamente crescente $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ma $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$

quindi $y_1 \geq y_2$ assurdo => abbiamo detto che $y_1 < y_2$ allora f^{-1} è monotona pertanto $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Osservazione: esistono funzioni invertibili ma non monotone (definite su un intervallo)

Esempio: $f(x) = \{x \text{ se } x \in [0, 1);\ 3-x \text{ se } x \in [1, 2]\}$ $f : [0, 2] \to R$, $Imf = [0, 2]$

$f^{-1} : [0, 2] \to R$ $f^{-1}(y) = \{y \text{ se } y \in [0, 1);\ 3-y \text{ se } y \in [1, 2]\}$

Osservazione: calcolare analiticamente $f^{-1}(y)$ $\forall y \in Imf$ vuol dire risolvere l'equazione $f(x) = y$ per $y \in Imf$, $x \in D(f)$

Osservazione: data $f : A \subseteq R \to R$ iniettiva, $\exists f^{-1} : Imf \subseteq R \to R$

il grafico di f^{-1} si deduce dal grafico di f per simmetria rispetto alla retta $y = x$

$(a, b) \in \gamma(f) \iff f(a) = b,\ a \in D(f) \iff a = f^{-1}(b),\ b \in Imf \iff (b, a) \in \gamma(f^{-1}),\ b \in D(f^{-1}) = Imf$

Osservazione: $f(x) = x^n$ $f : R \to R$ non è iniettiva (se n pari)

$g(x) = x^n$ $g : [0, +\infty) \to R$ è iniettiva, $Img = [0, +\infty)$ la sua inversa è $g^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}$ $y \geq 0$

Esempio: $f : R \to R$ $f(x) = \sin x$ né iniettiva né suriettiva $Imf = [0,1]$

$x = \arcsin y$ è per definizione l'unica soluzione di $\sin x = y$ in $[-\pi/2; \pi/2]$, $\forall y \in [-1,1]$

le altre soluzioni sono date $\arcsin y + 2k\pi$ e $(\pi - \arcsin y) + 2k\pi$ $\forall k \in Z$

$h(y) = \arcsin y$ $D(h) = [-1,1]$, $Imo = [-\pi/2, \pi/2]$

Esempio: $f : R \to R$ $f(x) = \cos x$ né iniettiva né suriettiva $Imf = [0,1]$

$x = \arccos y$ è per definizione l'unica soluzione di $\cos x = y$ in $[0; \pi]$, $\forall y \in [-1,1]$

le altre soluzioni sono date $\arccos y + 2k\pi$ e $(-\arccos y) + 2k\pi \quad \forall k \in Z$

$h(y) = \arcsin y$ $D(h) = [-1,1]$, $Imo = [-\pi/2, \pi/2]$