

姓名	学号	班级	选题	论述	结论	总分

标题：基于 python 的抛射体运动轨迹分析

作者姓名：谢微 学号：2013301020020 班级：物基一班

摘要：用解析法推导出抛射体在受空气阻力影响下运动的轨道方程，以及射程最大时抛射角所满足的方程，借助 Python 编制程序，模拟出在不同的阻力系数和抛射角度下的轨道曲线。结果发现阻力系数对轨道的对称性影响最大，而射程和射高会随着阻力系数减小以及抛射角度的增大而增大，与不计空气阻力时不同，抛射角在略小于 45° 时射程是最大的。

关键词：抛射体；阻力系数；射程；抛射角；python

I. 介绍

理想抛射体运动的轨道是一条抛物线,这是在忽略空气阻力的条件下。但是在实际中,抛射体的运动绝大多数情况是在介质中进行的,即总是存在有介质对抛射体的阻力,这时,实际抛射体运动与理想抛射体运动会有所区别,比如轨道的形状不再是抛物线、射程会缩短、落地速度会减小和落地角会增大等。对于实际抛射体运动,解析法求解比较复杂,而借助计算机进行数值分析更加容易理解,且可以直观模拟出抛射体运动的轨迹曲线。

II.正文

1 方程的求解

设抛射体质量为 m ,以初速度 v_0 抛射, v_0 与水平方向夹角为 θ ,所受空气阻力 $R = -bv$,式中的比例系数 b 为阻力系数,它和介质本身的性质和物体的形状大小有关。

$$\text{抛射体在水平方向运动微分方程为: } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$\text{竖直方向的运动微分方程为: } \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + g = 0 \quad (2)$$

若 $t=0$ 时, $x = y = 0$, $v_x = v_0 \cos \theta$, $v_y = v_0 \sin \theta$,解方程 (1) (2) 可得:

$$x = \frac{m}{b} v_0 \cos \theta (1 - e^{-\frac{m}{b}t}) \quad (3)$$

$$y = (\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{m v_0 \sin \theta}{b})(1 - e^{-\frac{m}{b}t}) - \frac{m g}{b} t \quad (4)$$

两式消去时间参数 t 得到轨道方程为:

$$y = (\tan \theta + \frac{mg}{bv_0 \cos \theta})x + \frac{m^2 g}{b^2} \ln(1 - \frac{bx}{mv_0 \cos \theta}) \quad (5)$$

从轨道方程可以看出，轨迹的形状与抛射体的质量、空气的阻力系数、抛射的初速度以及抛射角度有都关系。令(4)式中的 $y=0$ ，则得落回初始高度所需要的时间为：

$$t = \frac{2mv_0 \sin \theta}{mg + bv_0 \sin \theta}, \text{ 代入 (3) 式的抛物体的射程为: } x = \frac{m^2 g v_0^2 \sin 2\theta}{(mg + bv_0 \sin \theta)^2}, \text{ 令 } \frac{dx}{d\theta} = 0,$$

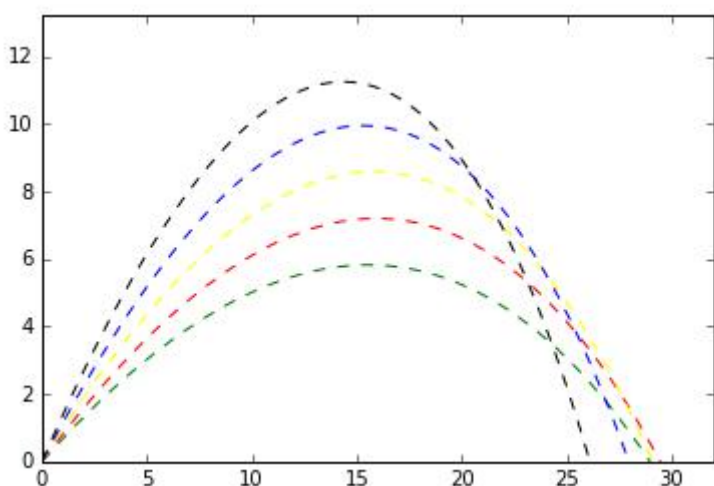
可得： $2mgv_0^2 \cos^2 \theta + b \cos \theta - mgv_0^2 = 0$ (6) 这就是最大射程对应的 θ 满足的方程。

2 轨道的模拟

2.1 不同抛射角度下的轨道比较

由从式(6)可以计算出，若阻力系数 $b=0$ （即没有空气阻力），则当 $\theta = 45^\circ$ 时射程最大。

但如果考虑空气阻力，取 $b = 0.2, v_0 = 20\text{m/s}, m = 1\text{kg}$ ，通过 Python 运行得到运动轨迹为：



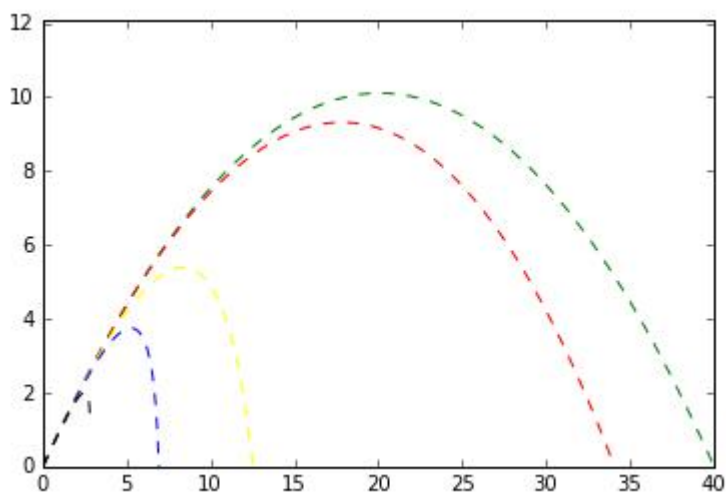
图中从上到下颜色黑蓝黄红绿分别代表角度为 35 度，40 度，45 度，50 度，55 度。

图一：不同抛射角的运动轨迹

由图可知，在抛射体质量、抛射初速度以及阻力系数相同时，随着抛射角度的增大，抛射体的射高越来越大，但是以不同角度抛射时，抛射体的轨迹发生了明显的变化，并且抛射体的水平射程不是在抛射角 45° 时最大，而是略小于 45° ，同时也发现，射程越远的飞行路径却并不是最长

2.1 不同阻力系数下的轨道比较

仍然设抛射体的质量为 1 kg, 抛射时初速度大小为 20 m/s, 以抛射角为 45 度，空气的阻力系数分别等于 0.01 kg/s、0.1 kg/s、1.00 kg/s、2.00 kg/s、5.00kg/s, 通过 Python 运行得到运动轨迹为：



图二：不同阻力系数下的运动轨迹

图中从右到左颜色为绿红黄蓝黑分别代表阻力系数分别等于 0.01 kg/s、0.1 kg/s、1.00 kg/s、2.00 kg/s、5.00kg/s。

从图可知，在抛射体质量、抛射初速度以及抛射角度相同的情况下，随着阻力系数的不断减小，抛射体的射高越来越大，射程也越来越大，轨迹的形状越来越对称，即越接近抛物线（以最高点为水平对称点观察抛射体两侧的轨迹），阻力系数越大，下落的过程的轨迹越接近竖直线。

III. 总结

实际抛射体运动和理想抛射体运动是有区别的，它不是一条抛物线。在实际抛射体运动中，阻力系数减小以及抛射角度的增大都会使射高和射程增大，但在其他条件不变的情况下，最大射程对应的抛射角为略小于 45 度角。这就给实际的抛射体运动，要想获得最大射程指出了选择抛射角的方向。

如在投掷铅球和投掷链球（一般投铅球的初速率要小于链球的）时，要使投掷的距离最远，首先抛射角要小于，并且投掷链球的抛射角要小于投掷铅球的（假设空气对它们的阻尼系数相同），具体的最佳抛射角可由铅球和链球的质量、空气对它们的阻尼系数以及出手高度来确定；又如，投掷一小石子和投掷一棉花团（空气对小石子的阻尼小于对棉花团的）时，假设它们的初速率相同，则要想使投掷的距离最远，就应使投掷棉花团的抛射角小于小石子的。

当然，实际存在的空气阻力比较复杂，它和空气的密度、抛射体的速度、抛射体本身的大小都有关系，而且实际的抛射体有大小和形状，它的运动除了平动还要旋转。。例如要想射程最大，投掷链球时的抛射角要小于投掷铅球的，投掷棉花团的抛射角小于石子的，所以这里也只是进行近似分析。

IV. 论文引用

[1] 高彩云. 基于 Matlab 的抛射体运动轨迹分析. 山西大同大学学报(自然科学版), 第 31 卷第 5 期

- [2]鞠衍清. 抛射体运动的飞行路径与抛射角的关系. 物理与工程, Vol. 15 No. 6 2005
- [3]药树栋, 宫建平. 阻力对抛射体运动射程的影响. 山西师范大学学报(自然科学版), 第 20 卷第 3 期
- [4]周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986:34 - 35.