



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA

CURSO DE GRADUAÇÃO BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Cleillyson Osmar Souza Diniz de Almeida

Sarah Evelyn do Vale da Silva

Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming – Análise Crítica

Boa Vista - RR

Julho/2025

## Aplicação de Técnicas de Coloração Aproximada de Grafos na Geração de Cronogramas Acadêmicos

O artigo "*Approximate Graph Coloring by Semidefinite Programming*", de autoria de David Karger, Rajeev Motwani e Madhu Sudan, representa um avanço significativo na área de otimização combinatória e teoria dos grafos, ao propor soluções inovadoras para o clássico problema da coloração de grafos. O trabalho tem foco especificamente em grafos que são  $k$ -coloríveis, ou seja, grafos que podem ser coloridos com  $k$  cores de forma que nenhum par de vértices adjacentes compartilhe a mesma cor. O desafio está em realizar essa coloração com o menor número possível de cores, principalmente quando  $k = 3$ , considerando que o problema de determinar o número cromático exato de um grafo é NP-difícil.

O objetivo principal da obra é desenvolver algoritmos eficientes, isto é, com tempo de execução polinomial, que produzam colorações aproximadas com garantias sobre a qualidade da solução. Para isso, os autores aplicam técnicas de programação semidefinida (SDP), uma poderosa extensão da programação linear que permite trabalhar com restrições envolvendo matrizes positivas semidefinidas. Junto com estratégias probabilísticas e heurísticas geométricas, eles conseguem elaborar colorações que, embora não sejam ótimas, se aproximam consideravelmente do ideal, sobretudo para grafos 3-coloríveis.

O conceito fundamental que sustenta a abordagem da proposta é o próprio conceito de coloração de grafos, que consiste na atribuição de cores aos vértices de um grafo de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas. O menor número de cores necessário para a coloração define o número cromático do grafo, denotado por  $\chi(G)$ . Como mencionado, encontrar esse número com exatidão é computacionalmente inviável para instâncias grandes. É por isso que a programação semidefinida se mostra útil por permitir a relaxação do problema original, substituindo a atribuição de cores por vetores unitários associados a cada vértice, respeitando certas restrições de produto interno entre vértices adjacentes.

Entre os principais resultados alcançados pelos autores, destaca-se o algoritmo randômico que, para grafos 3-coloríveis com  $n$  vértices e grau máximo  $D$ , colore o grafo com no máximo

$$\min\{O(D^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{2}} D \log n), O(n^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{2}} n)\}$$

cores — o melhor resultado conhecido na literatura até o momento, tanto em termos do número de vértices quanto do grau máximo. Para grafos  $k$ -coloríveis de modo geral, obtêm-se colorações com

$$O(D^{\frac{1-2}{K}} \log^{\frac{1}{2}} \sqrt{\log D n}, \text{ ou } O(n^{\frac{3}{K+1}} \sqrt{\log n})$$

cores, o que representa uma generalização eficiente.

## Algoritmo Coloracao Aproximada (Grafo $G = (V, E)$ )

Entrada:

- $G = (V, E)$ : grafo 3-colorível com  $n$  vértices e grau máximo  $D$

Saída:

- Um mapeamento  $\text{color}[v]$  para cada vértice  $v \in V$  com  $O(D^{\{1/3\}} \log^{\{1/2\}} D \log n)$  cores

1. // Etapa 1: Resolver a relaxação vetorial por Programação Semidefinida

2. Para cada vértice  $v \in V$ :

Atribuir um vetor unitário  $v_v \in \mathbb{R}^d$

Sujeito à restrição: para toda aresta  $(u, v) \in E$ ,

$$\text{produto\_interno}(v_u, v_v) \leq -1/2$$

// Esta etapa é resolvida por SDP (programação semidefinida)

3. // Etapa 2: Definir número de hiperplanos aleatórios

4.  $r \leftarrow C * (D^{\{1/3\}} * \sqrt{\log D} * \log n)$  //  $C$  é uma constante adequada

5. Para  $i$  de 1 até  $r$ :

Gerar vetor aleatório  $a_i \in \mathbb{R}^d$

Cada coordenada de  $a_i$  é amostrada de uma distribuição normal  $N(0,1)$

6. // Etapa 3: Atribuir "assinaturas binárias" como cores

7. Para cada vértice  $v \in V$ :

Para  $i$  de 1 até  $r$ :

Se  $\text{produto\_interno}(v_v, a_i) \geq 0$  então:

$\sigma_i \leftarrow 1$

Senão:

$\sigma_i \leftarrow -1$

Definir  $\text{color}[v] \leftarrow \text{vetor}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$

// Essa assinatura será tratada como uma cor

8. // Etapa 4: Ajuste opcional para eliminar colisões

9. Para cada aresta  $(u, v) \in E$ :

Se  $\text{color}[u] == \text{color}[v]$ :

// Conflito! Opcionalmente, reiniciar com novo conjunto de hiperplanos

Reiniciar algoritmo com novo  $r$  ou refinar particionamento

10. Retornar mapeamento  $\text{color}[v]$  como coloração do grafo

A técnica adotada consiste em quatro etapas principais. Primeiramente, é feita a relaxação vetorial, em que cada vértice do grafo recebe um vetor unitário no lugar de uma cor. Para que a coloração seja válida, os vetores associados a vértices adjacentes devem ter produto interno menor ou igual a  $-1/(K-1)$ . Em seguida, a programação semidefinida é aplicada para resolver essa versão relaxada do problema, resultando em uma solução intermediária que ainda não é uma coloração real, mas possui estrutura útil para gerar uma coloração final.

Na terceira etapa, ocorre o arredondamento probabilístico. Os autores utilizam estratégias como hiperplanos aleatórios ou projeções vetoriais para realizar o mapeamento dos vetores da solução relaxada em cores reais. Por fim, a técnica pode ser aprimorada com a aplicação do algoritmo de Wigderson, que trata vértices de alto grau separadamente, reduzindo ainda mais o número de cores necessárias ao colorir primeiro seus vizinhos com apenas duas cores.

Apesar da eficácia da técnica, o artigo também reconhece algumas limitações. Podem existir grafos com número vetorial cromático fixo (como 3) e ainda assim com número cromático real proporcional a  $n^{0,01}$ , o que mostra uma lacuna inevitável entre a solução da relaxação e o problema original, como por exemplo os grafos de Kneser, que demonstram como colorações vetoriais podem subestimar o número cromático real de um grafo.

Outro destaque do trabalho é a conexão teórica estabelecida com a função  $\theta$  de Lovász, uma função semidefinida que serve como limite superior para o número de clique e inferior para o número cromático em certos grafos. O artigo mostra que a coloração vetorial estrita é dual semidefinida da função  $\theta$ , aprofundando as conexões entre programação contínua e problemas clássicos de teoria dos grafos.

Essas técnicas têm aplicações práticas importantes no problema da geração de cronogramas acadêmicos. Essa tarefa consiste em alocar disciplinas, professores, salas e horários, respeitando uma série de restrições, como evitar conflitos entre disciplinas que compartilham o mesmo professor ou turma. O problema pode ser modelado naturalmente como um grafo, em que cada vértice representa uma disciplina, e uma aresta entre dois vértices indica um conflito de agendamento.

A geração ideal de cronogramas envolve o uso do menor número possível de horários (cores) para acomodar todas as disciplinas sem conflitos. Contudo, como já discutido, essa é uma tarefa NP-difícil, tornando as técnicas de coloração aproximada extremamente úteis.

Essa abordagem permite construir cronogramas que evitam conflitos e fazem uso eficiente dos horários disponíveis. Além disso, ao utilizar o refinamento de Wigderson para tratar disciplinas com muitos conflitos, é possível reduzir ainda mais o número total de horários necessários, melhorando a distribuição da carga horária de professores e a organização da grade dos alunos.

Portanto, a coloração aproximada de grafos com técnicas baseadas em programação semidefinida, como descritas por Karger, Motwani e Sudan, oferece uma solução teórica sólida e uma aplicação prática extremamente útil para problemas reais como a geração de cronogramas acadêmicos. Ao unir conceitos matemáticos avançados com desafios organizacionais do mundo real, o trabalho representa uma contribuição notável à área de algoritmos e otimização.

## **Referências**

KARGER, David; MOTWANI, Rajeev; SUDAN, Madhu. *Approximate graph coloring by semidefinite programming*. Journal of the ACM, New York, v. 45, n. 2, p. 246–265, Mar. 1998. Disponível em: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/274787.274791>. Acesso em: 5 ago. 2025.