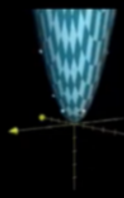
Visualizar funciones con valores escalares

INTRODUCCIÓN A LAS GRÁFICAS EN 3D

- Tenemos la siguiente función

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Graficándola, podemos obtener esta imagen.

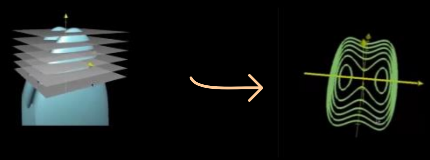


INTERPRETAR GRÁFICAS CON REBANADAS

- Dependiendo del plano que volvamos constante, obtendremos una gráfica en 2D.

TRAZO DE CONTORNOS

Los mapas de curvas de nivel son gráficas en tres dimensiones en las cuales vamos cortando a z en planos al hacerlo constante, es decir, cuando $x = c$.



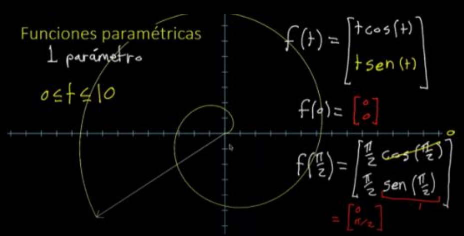
Visualizar funciones con valores vectoriales

CURVAS PARAMÉTRICAS

Una función paramétrica es una función que tiene sólo un input y el output es un vector que depende de la variable t (input).

- Por ejemplo:

$$f(t) = \begin{bmatrix} t \cdot cos(t) \\ t \cdot sen(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Evaluando en algunos puntos}} \begin{cases} f(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$



SUPERFICIES PARAMÉTRICAS

- Supongamos que ahora tenemos una función con dos inputs y tres outputs, por ejemplo:

$$f(t,s) = \begin{bmatrix} 3 \cdot cos(t) + cos(t) \cdot cos(s) \\ 3 \cdot sen(t) + sen(t) \cdot cos(s) \\ sen(s) \end{bmatrix}$$

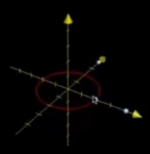
Si evaluamos en el punto $(0,\pi)$ tenemos que:

$$f(0,\pi) = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 0+0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to x \\ \to y \\ \to z \end{matrix}$$

Ahora, si cambiamos el 0 por la variable t obtenemos:

$$f(t,\pi) = \begin{bmatrix} 3 \cdot cos(t) - cos(t) \\ 3 \cdot sen(t) - sen(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(t) \\ sen(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y graficando, obtendremos un círculo de radio 2.



Ahora, si dejamos correr tanto la variable s como la variable t, obtendremos la gráfica del toro.

INTRODUCCIÓN A CAMPOS VECTORIALES

Los campos vectoriales son una forma de visualizar funciones que comparten el mismo número de dimensiones tanto en el input como en el output.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

El visualizar este tipo de funciones es complicado pues tendríamos que visualizar las gráficas en $\mathbb{R}^{n \times n}$. Por lo que sólo analizamos el input.

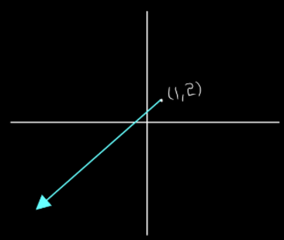
- Por ejemplo, si tenemos la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} y^3 - 9y \\ x^3 - 9x \end{bmatrix}$$

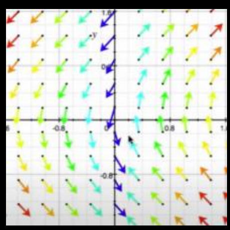
Sólo estaremos analizando en el plano x, y. Ahora, si evaluamos el punto $(1,2)$ tenemos:

$$f(1,2) = \begin{bmatrix} -10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Para graficarlo, vamos a ubicar el punto ya mencionado y de él trazaremos un vector con longitud -10 en el eje x y -8 en el eje y.

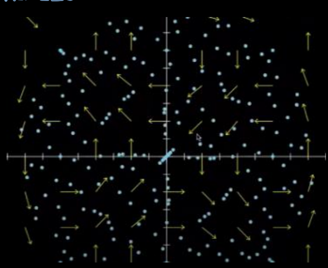


Sin embargo, al graficar los espacios vectoriales, la longitud de los vectores será normalmente más corta. Una forma de preservar la magnitud de cada uno de ellos es a través de colores: mientras más fuerte el color, más grande la magnitud del vector.



FLUJO DE FLUIDOS Y CAMPOS VECTORIALES

Los espacios vectoriales nos pueden servir para graficar el comportamiento de los fluidos, es decir, cómo es que las partículas de diferentes fluidos se mueven dentro del plano a analizar y, con ayuda de los vectores, se pueden representar dichos movimientos.



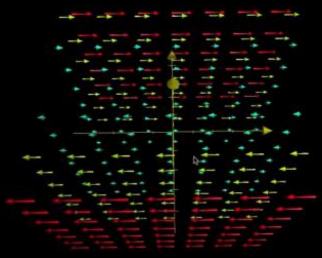
INTRODUCCIÓN A CAMPOS VECTORIALES EN 3D

Un campo vectorial tridimensional está dado por una función multivariable que tiene tres variables como input (x, y, z) y que tiene como output funciones que dependen de estas variables.

- Tomamos, por ejemplo, la siguiente función:

$$f(x,y,z)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Al graficar todos los posibles vectores que cumplan con la función anterior, obtendremos entonces el siguiente campo vectorial.

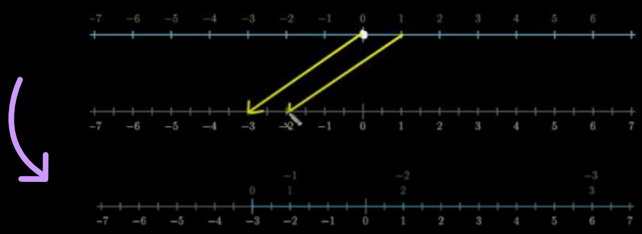


Considerando la función $f(x,y,z)=\begin{bmatrix}y\\0\\0\end{bmatrix}$ obtendremos la siguiente gráfica. (Los colores indican la magnitud de cada vector.)

Transformaciones

Pensemos que tenemos cierto input, output y una función que nos ayude a ir del input al output y, para poder visualizar dicha función, siempre buscamos asociar pares de inputs y outputs. Esta misma idea la encontramos en las transformaciones, en donde analizamos cómo los puntos que se encuentran en el espacio de inputs se mueven al espacio de outputs.

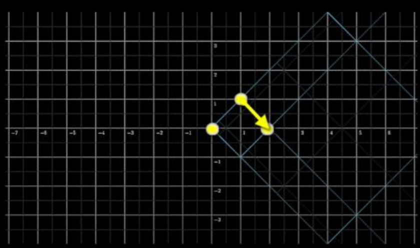
- Por ejemplo, si tomamos la función $f(x)=x^2-3$ podemos ver a qué outpus se mueven los inputs.



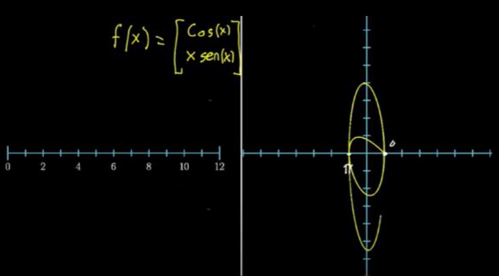
- Sin embargo, nos interesa más analizar una función multivariable. Tomemos entonces la siguiente función:

$$f(x)=\begin{bmatrix}cos(x)\\x\cdot sen(x)\end{bmatrix}$$

Lo que, al analizar la transformación, nos hace obtener la siguiente gráfica:



Si ahora consideramos la función $f(x,y)=\begin{bmatrix}x^2+y^2\\x^2-y^2\end{bmatrix}$, la gráfica que obtenemos es la siguiente:



Visualizando funciones multivariables

¿QUÉ SON LAS FUNCIONES MULTIVARIABLES?

Una función es llamada multivariable si su input consta de varios números.

$$f(x,y)=x^2y$$

Si el output de una función consta de varios números, también puede llamarse multivariable, sin embargo, éstas son conocidas comúnmente como funciones con valores vectoriales.

$$f(x)=\begin{bmatrix}cos(x)\\sen(x)\end{bmatrix}$$

Las funciones multivariables asocian los puntos en un espacio con puntos de otro espacio. Por ejemplo, una función como $f(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ asocia puntos en el espacio tridimensional con otros puntos en el espacio tridimensional.

FUNCIONES CON VALORES VECTORIALES

Cuando se trata sobre funciones multivariables, es común pensar en el output como un vector, mientras que el input, como un punto. Las funciones que tienen un output en forma de vector son llamadas como funciones con valores vectoriales.

EJEMPLOS DE FUNCIONES MULTIVARIABLES

1. DE LA POSICIÓN A LA TEMPERATURA: Para modelar la variación de la temperatura en una región grande, se puede usar una función que conste de dos variables -latitud y longitud- y dé como resultado una variable, la temperatura. Escribiéndola, tendríamos lo siguiente:

$$T=f(L_1,L_2)$$

   - T es la temperatura.
   - L_1 es la longitud.
   - L_2 es la latitud.
   - f es la función que determina qué temperatura corresponde a cada par de latitud y longitud.

2. DEL TIEMPO A LA POSICIÓN: Para modelar cómo una partícula se mueve en el espacio a través del tiempo, se puede usar una función que tome un número, -el tiempo- y dé como resultado las coordenadas de la partícula. Esta función se puede escribir como:

$$\vec{s}=f(t)$$

   - $\vec{s}$ es vector de desplazamiento bidimensional o tridimensional, el cual indica la posición de la partícula.
   - t es el tiempo.
   - f es una función con valores vectoriales.

3. DE DATOS DEL USUARIO A PREDICCIONES: Cuando una página web intenta predecir el comportamiento de un usuario, ella puede crear una función que toma cientos de variables acerca de éste. El output puede estar constituido de varias variables, como la probabilidad de que dé clic en un link diferente o la probabilidad de que compren un producto diferente.
4. DE LA POSICIÓN AL VECTOR DE VELOCIDAD: Si se está modelando el movimiento de un fluido, un enfoque es expresar la velocidad de cada partícula en él. Es posible realizarlo considerando una función que considere como input las coordenadas de la partícula y que dé como output el vector de velocidad de dicha partícula.

Reducir la dependencia en las gráficas

Para el caso de las funciones multivariables, es usual usar diferentes formas de visualizarlas en vez de enfocarnos sólo en las gráficas. Entre las más comunes podemos encontrar las siguientes.

- **GRÁFICAS:** Son útiles para funciones de una variable y funciones multivariables con un input bidimensional y un output unidimensional.
- **MAPAS DE CURVAS DE NIVEL:** Muestran únicamente el espacio del input y son de utilidad para funciones con un input bidimensional y un output unidimensional.
- **CURVAS O SUPERFICIES PARAMÉTRICAS:** Muestran únicamente el espacio del output y son usadas para funciones cuyo espacio de output tiene más dimensiones que el espacio del input.
- **CAMPOS VECTORIALES:** Aplica a funciones cuyo espacio de input y output son de la misma dimensión.
- **TRANSFORMACIONES:** Puede ser aplicada a cualquier función, la única desventaja es que puedes ser representadas únicamente usando una animación o dibujo esquemático.

Gráficas Multidimencionales

Cuando queremos gráficar funciones con un input bidimensional debemos considerar que para asociar los inputs con los outputs se requieren tres números -dos para los inputs y uno para el output. Para representar estas asociaciones usando una gráfica, debemos dibujar estos puntos en un espacio tridimensional.

En general, buscamos representar estos puntos de la forma $(x, y, f(x, y))$ para algún par de números x y y. Esto es, por cada punto (x, y) dado en el plano, la distancia vertical entre ese punto y la gráfica representa el valor de $f(x, y)$.

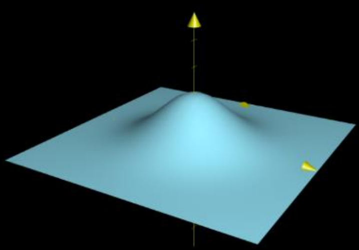
La dirección vertical es conocida como la dirección z, y el eje perpedicular al plano xy es llamado eje z.

ALGUNOS EJEMPLOS

1. LA CAMPANA

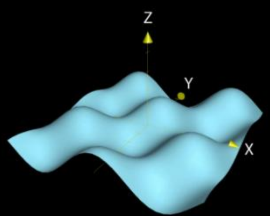
- Función: $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Analizando esta función, encontramos que cuando el punto (x, y) está lejos del origen, la función $e^{-(x^2+y^2)}$ se ve como $e^{(\text{algún número muy negativo})}$, que es casi 0. Esto es, la distancia entre la gráfica y el plano xy en esos puntos será muy pequeña. Por otro lado, cuando $x = 0$ y $y = 0$, esta función valdrá 1, dando así la protuberancia en el centro.



2. ONDAS

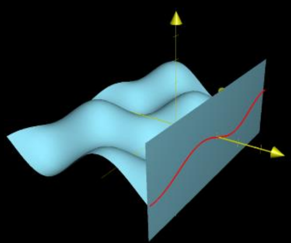
- Función: $f(x, y) = cos(x) \cdot sen(y)$



Para obtener una intuición sobre la función, veremos qué pasa cuando volvemos una de sus entradas constante.

Supongamos entonces que fijamos el valor de x a 2. Generalmente, estamos graficando todos los puntos que se ven de la forma $(x, y, cos(x), sen(y))$. Al mantener constante el valor de x en 2, los puntos se verán como $(2, y, cos(2), sen(y)) = (2, y, z)$.

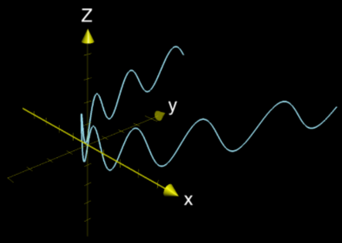
De esta manera, al hacer $x = 2$, los puntos antes mencionados conformaran un plano y al cortar la gráfica con éste, podremos obtener todos los puntos de la gráfica donde $x = 2$



Al hacer constante una de las entradas, básicamente volvemos la función multivariable en una función de solo una variable y sólo nos basta analizar la gráfica bidimensional restante.

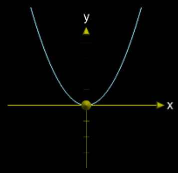
3. UN VALOR DE ENTRADA, DOS DE SALIDA

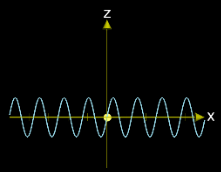
- Función: $f(x) = (x^2, sen(x))$
- Puntos graficados: $(x, x^2, sen(x))$



En este caso, la única variable libre es x puesto que tanto y como z dependen de x.

Si rotáramos la imagen de tal forma que sólo tuviéramos vista del plano xy, la gráfica que estaríamos viendo sería de $f(x) = x^2$.





De igual manera, si rotamos la gráfica de manera que pudiéramos ver el plano xz, la gráfica sería de $f(x) = sen(x)$.

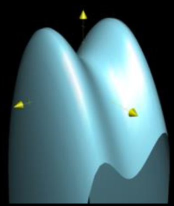
En pocas palabras, la función $f(x) = (x^2, sen(x))$ es combinar las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = sen(x)$ en una sola, y su gráfica captura la información de ambas.

Mapas de curvas de nivel

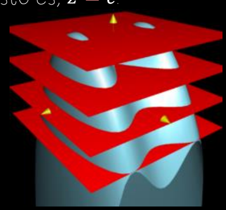
Las curvas de nivel ayudan a representar funciones con un input bidimensional y un output unidimensional.

Cuando usamos las gráficas, la manera de representar esta gráfica es dibujar los puntos de la manera $(x, y, f(x, y))$ en un espacio tridimensional. Sin embargo, graficar una imagen tridimensional suele ser complicado de hacer a mano. Las curvas de nivel nos ayudan a representar la función al dibujarlas en el espacio del input bidimensional.

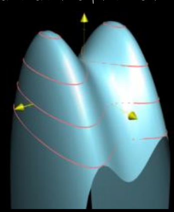
- Por ejemplo, consideremos la función $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$. Para graficarla debemos seguir los siguientes pasos:
  1. Comenzamos con la gráfica de la función.



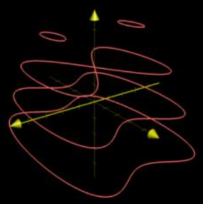
  2. Cortamos la gráfica en varios planos paralelos al eje xy, separados por la misma distancia. Esto es, $z = c$.

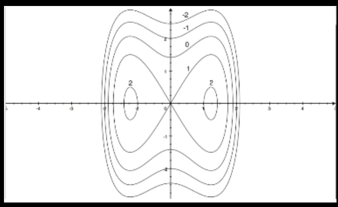


  3. Marcamos la gráfica en donde los planos la cortan.



4. Proyectamos esas líneas sobre el plano xy.



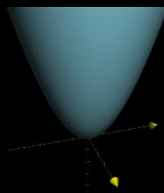


En otras palabras, escogemos un conjunto de valores del output y, para cada uno de ellos, dibujamos una curva que pase por todos los valores del input (x, y) para los cuales $f(x, y)$ sea igual a ese valor.

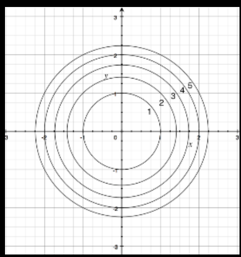
ALGUNOS EJEMPLOS

- PARABOLOIDE

  Consideremos la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. Su gráfica es la siguiente:



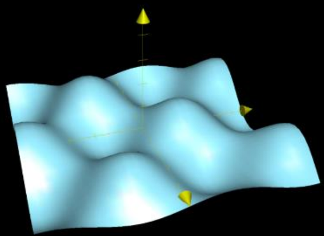
Y su mapa de curvas de nivel es el siguiente:

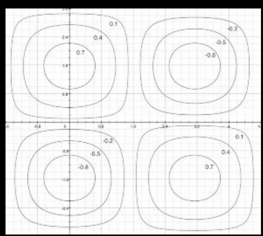


Notemos que los círculos no están igualmente espaciados. Esto se debe a que la altura de la gráfica incremente más rápido conforme nos alejamos del origen.

- ONDAS

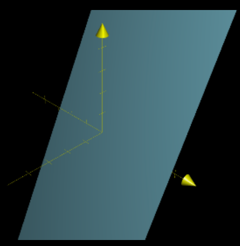
  Si tenemos la función $f(x,y) = cos(x) \cdot sen(y)$, su gráfica y mapa de curvas de nivel son los siguientes:

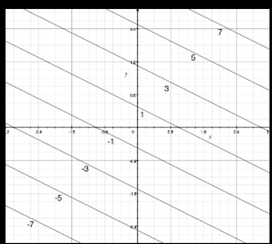




- FUNCIÓN LINEAL

  Ahora, consideremos la función $f(x,y) = x + 2y$. Su gráfica y mapa de curvas de nivel son:





Funciones paramétricas

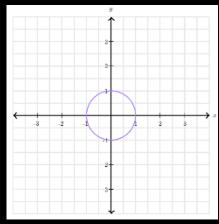
UN PARÁMETRO

Una función con un input unidimensional y un output multidimensional puede pensarse como una que dibuja una curva en el espacio. A este tipo de funciones se les conoce como funciones paramétricas y su input se llama parámetro.

Para visualizar todos los valores del output de una función así podemos imaginar la curva que se trazará conforme el parámetro va tomando distintos valores. A este tipo de gráfica se le conoce como curva paramétrica.

Es importante mencionar que al interpretar este tipo de funciones sólo observamos el espacio del output, sin embargo, el espacio del input se pierde.

- Por ejemplo, si consideramos las siguientes dos funciones:



$$f(t) = \begin{bmatrix} cos(t) \\ sen(t) \end{bmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} cos(t+\pi) \\ sen(t+\pi) \end{bmatrix}$$

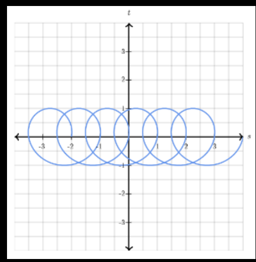
Si las graficamos como funciones paramétricas, con $t \in [0, 2\pi]$, cada una dibuja un círculo de radio 1 con centro en el origen.

Sin embargo, las funciones son diferentes.

PARAMETRIZACIÓN

En cálculo multivariable es común comenzar con una curva y buscar una función paramétrica que la dibuje. Encontrar una función paramétrica que describa dicha curva se llama parametrizar esa curva.

- Por ejemplo, supongamos que queremos parametrizar esta curva.



Para este caso, podemos imaginar bosquejarla al tratar de dibujar un círculo en sentido contrario a las manecillas del reloj. De esta forma, comenzamos con la función paramétrica de un círculo.

$$f(t) = \begin{bmatrix} cos(t) \\ sen(t) \end{bmatrix}$$

Esto hace que empecemos en el punto $(1,0)$ y tracemos un círculo de radio 1 en sentido contrario a las manecillas del reloj. Pero como la curva que queremos parametrizar empieza en el punto $(-2,0)$, desplazamos el valor de x tres unidades a los negativos.

$$f(t) = \begin{bmatrix} cos(t) - 3 \\ sen(t) \end{bmatrix}$$

Para poder empujar la gráfica hacia la derecha a medida que pasa el tiempo corresponde a un incremento constante en el valor de x

$$f(t) = \begin{bmatrix} cos(t) - 3 + ct \\ sen(t) \end{bmatrix}$$

Ahora, para determinar el valor de la constante, necesitamos ver cuánto se ha movido a la derecha después de completar una vuelta. La función anterior completa una vuelta cuando t va de 0 a 2π. Al observar la curva, parece ser que se desplaza una unidad. Por lo tanto $2\pi c = 1$ y $c = \frac{1}{2\pi}$

$$f(t) = \begin{bmatrix} cos(t) - 3 + \frac{1}{2\pi}t \\ sen(t) \end{bmatrix}$$

Por último, debemos acotar al parámetro. Vemos en el primer dibujo que las vueltas que debe dar la curva son 6. Dado que t da una vuelta completa cada 2π periodos, debemos hacer que t varíe de 0 a $6(2\pi) = 12\pi$.

DOS PARÁMETROS

Es posible realizar la misma visualización para funciones que tienen un input de dos dimensiones y un output de tres dimensiones que el que se realizó con funciones que tienen un input de una dimensión y un output de dos dimensiones. A esta visualización se le conoce como superficie paramétrica.

- Tomemos la siguiente función para ejemplificar los pasos a seguir con funciones de este estilo:

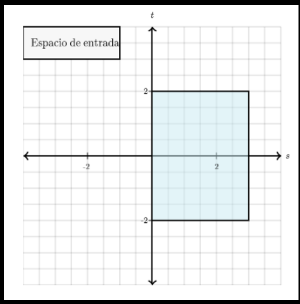
$$f(s,t) = \begin{bmatrix} t^3 - st \\ s - t \\ s + t \end{bmatrix}$$

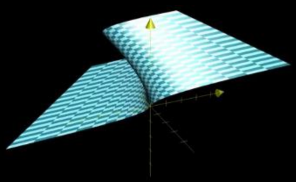
Las dos coordenadas de entrada s y t serán conocidas como los parámetros.

El primer paso es especificar el rango de valores que tomarán los parámetros:

$$0 < s < 3$$
$$-2 < t < 2$$

Y de esta manera, obtenemos la región que marcan los rangos de valores.

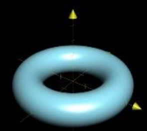


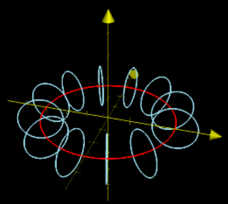


A medida que los puntos (s, t) se mueven a sus valores del output correspondientes $(t^3 - st, s - t, s + t)$ obtenemos la siguiente superficie paramétrica.

PARAMETRIZAR UN TORO (DONA)

El objetivo es encontrar una función con un input de dos dimensiones y un output de tres dimensiones tales que el resultado sea una dona.

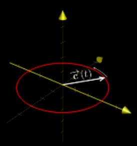




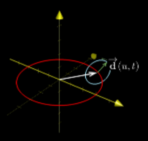
Lo primero que se realizará es dibujar cada rebanada circular del toro, además, se incluye un círculo en el plano xy que pasa por el centro de cada rebanada.

La idea central es describir cada punto sobre el toro como la suma de dos vectores.

Un vector $\vec{c}$ que va del origen a un punto del círculo rojo y haremos que dependa de un parámetro t. De esta manera, conforme el valor de t cambie, el punto en el círculo rojo indicado por $\vec{c}(t)$ cambiará.



$\vec{c}(t)$ recorre todo el círculo rojo cuando t va de 0 a 2π



$\vec{d}(u,t)$ recorre la rebanada del toro cuando u va de 0 a 2π

Un vector $\vec{d}$ que va del punto en el círculo rojo a un punto en las rebanadas circulares del toro. La dirección hacia donde apunta este vector dependerá del punto del círculo rojo. Así, el vector $\vec{d}$ dependerá de t y agregaremos un parámetro u para determinar hacia qué parte de la rebanada apuntará.

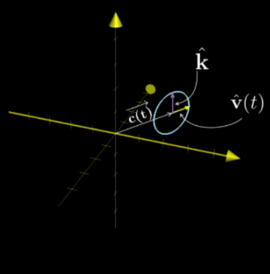
De esta manera, cada punto en el toro se representará como la suma de estos dos vectores: $\vec{c}(t) + \vec{d}(u,t)$.

Si consideramos que el radio del círculo rojo es de 3 podemos parametrizarlo como sigue:

$$\vec{c}(t) = 3\begin{bmatrix} cos(t) \\ sen(t) \\ 0 \end{bmatrix} = 3\,cos(t)\hat{\imath} + 3\,sen(t)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

Para $\vec{d}(u,t)$ debemos considerar que la rebanada circular que queremos dibujar está en un ángulo, por lo que hay que hacer lo siguiente:

- Sabemos que un círculo unitario centrado en el origen tiene la función paramétrica $\cos(u)\,\hat{\imath} + sen(u)\hat{\jmath}$. Para la rebanada circular cambiaremos a $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ por vectores unitarios distintos.
- El vector unitario en la dirección de x lo pensaremos como un vector unitario que apunta fuera del origen y le llamaremos $\hat{v}$. Éste dependerá de un parámetro t pues la dirección es dependiente de donde comencemos. De la misma manera, el vector unitario en la dirección de z se llamará $\hat{k}$.



Para un círculo dado, los vectores unitarios $\hat{\mathbf{v}}(t)$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son análogos a los vectores x y y en el plano xy

Por lo tanto, la parametrización será

$$\vec{d}(u,t) = cos(u)\,\hat{v}(t) + sen(u)\hat{k} = cos(u)\begin{bmatrix} cos(t) \\ sen(t) \\ 0 \end{bmatrix} + sen(u)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} cos(u)\,cos(t) \\ cos(u)\,sen(t) \\ sen(u) \end{bmatrix}$$

Por último, la suma de estos vectores es:

$$\vec{f}(u,t) = \begin{bmatrix} 3\,cos(t) + cos(u)\,cos(t) \\ 3\,sen(t) + cos(u)\,sen(t) \\ sen(u) \end{bmatrix}$$

Campos Vectoriales

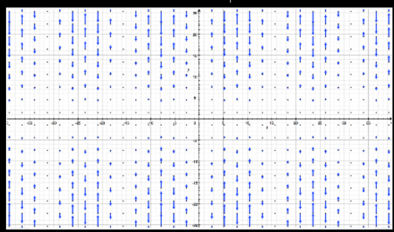
Un campo vectorial es un diagrama en el cual se representa, a través de vectores, el movimiento que tiene un fluido en un espacio dado.

Normalmente, los vectores casi nunca se dibujan a escala pues si tuviéramos vectores con escalas grandes apuntando en todos los sentidos, el diagrama sería difícil de entender. Lo importante no es la escala del vector, sino cómo se comparan las longitudes de distintos vectores entre sí. Otra forma de representar la longitud de los vectores es coloreándolos.

EJEMPLO: NINGUNA COMPONENTE HORIZONTAL

Consideremos la función $f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ y\,sen(x) \end{bmatrix}$

Como el valor del output de la componente x siempre será 0, entonces los vectores de nuestro campo vectorial sólo apuntarán arriba y abajo.



Para la componente y tenemos que, mientras más grande sea el valor que toma y, más largos serán los vectores, y más pequeños mientras nos acercamos al eje x. También, al tener el factor $sen(x)$, el sentido de los vectores oscilará hacia arriba o hacia abajo.

Transformaciones

El objetivo de las transformaciones es ver la conexión entre los inputs y outputs de una función imaginando cómo cada input se mueve a su output correspondiente.