Matrix Decomposition

WHAT IS A MATRIX DECOMPOSITION
La descomposición es una forma de reducir una matriz para así simplificar operaciones matriciales complicadas en unas más simples.

LU DECOMPOSITION
La descomposición LU sirve para matrices cuadradas y descompone en una matriz L y una U, donde la matriz L es una matriz triangular inferior y la matriz U es una matriz triangular superior.
Una variación es la descomposición LUP o descomposición LU con pivoteo parcial. Las filas de la matriz inicial son reordenadas para simplificar el proceso de descomposición y la matriz adicional especifica una forma de permutar el resultado para regresar al orden original.
Esta descomposición se puede implementar en Python tal como indica el Ejemplo 1.

QR DECOMPOSITION
La descomposición QR es para matrices de $n \times m$ y se descompone en una matriz Q y una R, donde Q es una matriz de $m \times m$ y R es una matriz triangular superior de $m \times n$.
Esta descomposición se puede implementar en Python tal como indica el Ejemplo 2.

CHOLESKY DECOMPOSITION
Esta descomposición es para matrices cuadradas simétricas donde todos los valores son mayores que cero, llamadas matrices definidas positivas. La descomposición constará del producto de una matriz triangular inferior L con su transpuesta L^T. También puede ser escrita como el producto de la transpuesta de una matriz triangular superior U $(A = U^T \cdot U)$.
Esta descomposición se puede implementar en Python tal como indica el Ejemplo 3.

Eigendecomposition

EIGENDECOMPOSITION OF A MATRIX
La eigendescomposición de una matriz descompone una matriz cuadrada en un conjunto de eigenvectores y eigenvalores.
Un vector es un eigenvector de una matriz si satisface la siguiente ecuación:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Una matriz puede tener un eigenvector y un eigenvalor para cada dimensión de la matriz inicial. La matriz inicial puede ser expresada de la siguiente manera:

$$A = Q \cdot \Lambda \cdot Q^T$$

Donde Q es una matriz compuesta de eigenvectores, Λ es la matriz diagonal compuesta de los eigenvalores y Q^T es la transpuesta de la matriz Q.

EIGENVECTORS AND EIGENVALUES
Los eigenvectores son vectores unitarios y los eigenvalores son coeficientes aplicados a los eigenvectores que dan a los vectores su longitud o magnitud.

CALCULATION OF EIGENDECOMPOSITION
Podemos calcular la eigendescomposición en Python tal como indica el Ejemplo 1

CONFIRM AN EIGENVECTOR AND EIGENVALUE
Para confirmar que un vector es un eigenvector necesitamos multiplicar el eigenvector candidato por el valor del vector y comparar el resultado. Podemos implementarlo en Python como indica el Ejemplo 2.

RECONSTRUCT MATRIX
Podemos reconstruir la matriz en Python como indica el Ejemplo 3.

Singular Value Decomposition

WHAT IS THE SINGULAR-VALUE DECOMPOSITION
Es un método de descomposición matricial para simplificar los cálculos matriciales.

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

Donde U es una matriz de $m \times m$, Σ es una matriz diagonal de $m \times n$ y V es una matriz de $n \times n$.
Los valores de la diagonal de Σ se conocen como valores singulares, las columnas de U son llamadas vectores singulares izquierdos y las columnas de V son llamadas vectores singulares derechos.

CALCULATE SINGULAR-VALUE DECOMPOSITION
Esta descomposición se puede implementar en Python tal como indica el Ejemplo 1.

RECONSTRUCT MATRIX
Podemos reconstruir la matriz original multiplicando U, Σ y V, sin embargo, en algunos casos, al pasar Σ a una matriz diagonal, nos quedará de dimensión $m \times m$ cuando requerimos que sea de $m \times n$ para poder multiplicarlos.

$$U_{m\times m} \cdot \Sigma_{m\times m} \cdot V^T_{n\times n} \to U_{m\times m} \cdot \Sigma_{m\times n} \cdot V^T_{n\times n}$$

Para arreglar este problema, se creará una nueva matriz Σ de $m \times n$ con valores cero y llenar las primeras $n \times n$ con la matriz diagonal original.
Podemos reconstruir la matriz en Python como indica el Ejemplo 2.

PSEUDOINVERSE
Es la generalización de la inversa de una matriz cuadrada a una matriz rectangular, la cual, es conocida también como la Inversa de Moore-Penrose y denotada por A^+.
Podemos calcularla a través de la descomposición de valores singulares:

$$A^+ = V \cdot D^+ \cdot U^T$$

Donde D^+ es la pseudoinversa de la matriz diagonal Σ y podemos obtenerla calculando el reciproco de cada elemento diferente de cero de Σ y tomando su transpuesta si es que la matriz original era rectangular.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & s_{2,2} \end{pmatrix} \to \mathrm{D}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_{1,1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_{2,2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_{3,3}} \end{pmatrix}$$

Podemos calcular la pseudoinversa en Python como indica el Ejemplo 3.

DIMENSIONALITY REDUCTION
Para reducir la dimensión de una matriz tomamos los k valores singulares más grandes de Σ y así obtener la siguiente aproximación.

$$B = U \cdot \Sigma_k \cdot V_k^T$$

Podemos reducir la dimensión en Python como indica el Ejemplo 4.