Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto Politécnico do Rio de Janeiro
Nova Friburgo - RJ

MODELAGEM COMPUTACIONAL - PROJETO 1:CIRCUITO RLC

Gabriel Calheias Alves
Lizandra Moraes de Oliveira Jardim
Moises Rangel Alves Filho
Rayssa Montecchiari
Vitor Saraiva de Lima

Resumo. *Neste projeto utilizamos a segunda lei de Kirchhoff, ou lei das malhas, para o desenvolvimento do circuito RLC proposto. Através dela, pudemos analisar nossa malha e chegar até a equação diferencial de segunda ordem do nosso problema, organizando os termos em função de resistência, capacitância, indutância e tempo, e de acordo com a condição proposta para as cargas inicial e total. Passada a parte analítica, utilizamos o método numérico da Bisseção, que é simples e de convergência absoluta, para aproximação de valores. Para facilitar a aplicação do método, fizemos um programa em C++, para uma abordagem numérica, haja vista que seria impossível resolvê-la por um método analítico, devido a sua complexidade.*

Palavras Chave: *Circuito RLC, equação de segunda ordem, bisseção, sistema oscilatório*

1. INTRODUÇÃO

O circuito apresentado na Fig. 1 é um circuito RLC, esse tipo de circuito apresenta uma carga cujo valor oscila com o tempo por existir uma resistência no circuito.

Para estudá-lo, utilizamos a segunda lei de Kirchhoff, lei das malhas que é utilizada para encontrar as intensidades das correntes em circuitos elétricos, sendo aplicada aos caminhos fechados de um circuito, os quais são chamados de malhas. Os engenheiros elétricos geralmente a usam para estudar o comportamento estacionário de circuitos elétricos ou problemas que envolvem os circuitos que são transientes por natureza e em que ocorrem variações temporais súbitas, como o proposto no projeto.

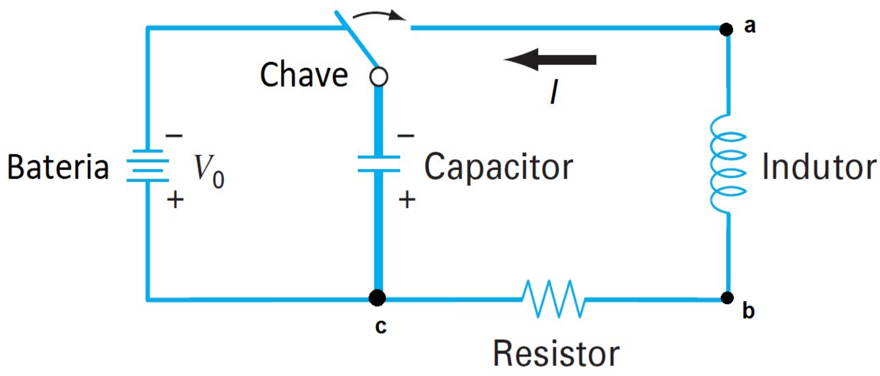

Figura 1- Circuito RLC série a ser utilizado nas atividades do projeto

O que transcorre, é que quando a chave está aberta a bateria transfere a carga para o capacitor. Com o capacitor carregado, a chave seria fechada, com isso, cria uma corrente no circuito da parte direita, até a carga do capacitor se esgotar, pois a resistência age como um dissipador de energia e depois de um certo tempo de ajuste alcança um novo estado estacionário.

O objetivo desenvolvido no trabalho e que será apresentado no decorrer desse artigo, é encontrar qual o valor de resistência e indutância para cada uma das condições dadas. Para isso, a priori, aplicamos a segunda lei de Kirchhoff e chegamos a uma equação de segunda ordem, etapa que será mostrada no tópico 2. Com a EDO encontrada, foi preciso resolvê-la por meio de equação característica para chegar nas funções de resistência e indutância, essa resolução será mostrada no tópico 3. Para finalmente, no tópico 4, chegarmos às raizes das funções, que são as respostas que procuramos, empregamos o método numérico da Bisseção através de um programa computacional na linguagem C++.

Atividades de desenvolvimento:
a)Determine uma expressão analítica para a variação da carga elétrica no circuito ao longo do tempo.
b)Determine o valor de R necessário para que o circuito dissipe a carga até atingir 1% do seu valor original em t = 0,05 s, dado que L = 5 H e C = 0,0001F.
c)Determine o valor de L necessário para que o circuito dissipe a carga até atingir 1% do seu valor original em t = 0,05 s, dado que R = 280 Ohms e C = 0,0001 F.

2. MODELAGEM FíSICA

Como dito, o circuito a ser abordado no projeto é o mostrado na Fig. 1 no qual pode ser utilizado a segunda Lei de Kirchhoff [4]. A segunda lei é a Lei de Kirchhoff para tensão nas malhas, que afirma que a soma das tensões ao longo de um percurso fechado qualquer (malha) é igual à tensão total que está sendo fornecida a esse percurso. [3].

2.1 Aplicação da Segunda Lei de Kirchoff

Após serem analisadas a malha, podemos ver que temos uma tensão no resistor, uma no indutor e outra no capacitor, isto é:

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0. \tag{1}$$

Podemos escrever a Eq. (1) em termos das correntes e cargas em cada um dos elementos do circuito, como a seguir:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0, \tag{2a}$$

sendo $i = dq/dt$, por definição de corrente elétrica, teremos:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{2b}$$

A Eq. (2b) é uma equação diferencial de segunda ordem, completa e homogênea, que é resposta ao item a.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA

A equação diferencial de segunda ordem [1] Eq. (2b) foi resolvida utilizando a equação característica a seguir:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0.$$

Essa equação foi usada pois o circuito analisado é subcrítico, visto que o valor da carga tem um comportameto oscilatório e isso nos diz que a EDO encontrada tem raizes imáginárias como resposta.

Após ser aplicada a fórmula de Bháskara e terminando a resolução da equação diferencial de segunda ordem temos:

$$q(t) = C_1e^{at}cos(bt) + C_2e^{at}sen(bt), \tag{3}$$

.

Utilizando a Eq. (3) e aplicando as condições iniciais, lembrando que no instante anterior ao fechamento da chave, a corrente no circuito é nula, $C_1 = q(0)$, $C_2 = q'(0)$ e $q'(0) = i = 0$, obtemos que $C_1 = q_0$ e $C_2 = \frac{-aq_0}{b}$, tendo assim que:

$$q(t) = q_0e^{at}cos(bt) - \frac{aq_0}{b}e^{at}sen(bt). \tag{4}$$

recorrendo a um dos dados para a resolução do problema, 1% do valor original da carga, temos que $q(t) = 0.01q_0$ e utilizando essa informação na Eq. (4) temos as novas funções:

$$f(R) = e^{at}cos(bt) - \frac{a}{b}e^{at}sen(bt) - 0.01 \text{ onde: } a = -\frac{R}{2L} \text{ e } b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (5)$$

e

$$f(L) = e^{at}cos(bt) - \frac{a}{b}e^{at}sen(bt) - 0.01 \text{ onde: } a = -\frac{R}{2L} \text{ e } b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (6)$$

4. MODELAGEM COMPUTACIONAL

Utilizando Eq. (5) e Eq. (6) podemos então começar a resolver o problema aplicando um método númerico [2]. Tendo em mente que a função, dependendo dos valores dados será uma $f(R)$ ou uma $f(L)$, será utilizado o método da bisseção, que consiste em escolher um intervalo [a,b] que tenha a raiz da função nele e acharmos um valor aproximado da raiz.

Para sabermos em qual intervalo há uma raiz será analisado o gráfico das funções e escolhido o melhor intervalo. Após serem plotados os gráficos de $f(R)$ e $f(L)$ foi notado que o gráfico de $f(L)$ (Fig.2) não passava pelo eixo x logo, não seria possível achar o valor da raiz aproximada, mas o gráfico de $f(R)$ (Fig. 3) passava pelo eixo x então foi utilizado o método da bisseção na função $f(R)$ e o valor obtido foi aproximado para o inteiro mais próximo e utilizado no valor de R da função $f(L)$ chegando ao gráfico da Fig. 4.

Com os gráficos em mãos foi então utilizado o fluxograma da Fig. 5 para programar o método da bisseção na linguagem C++.

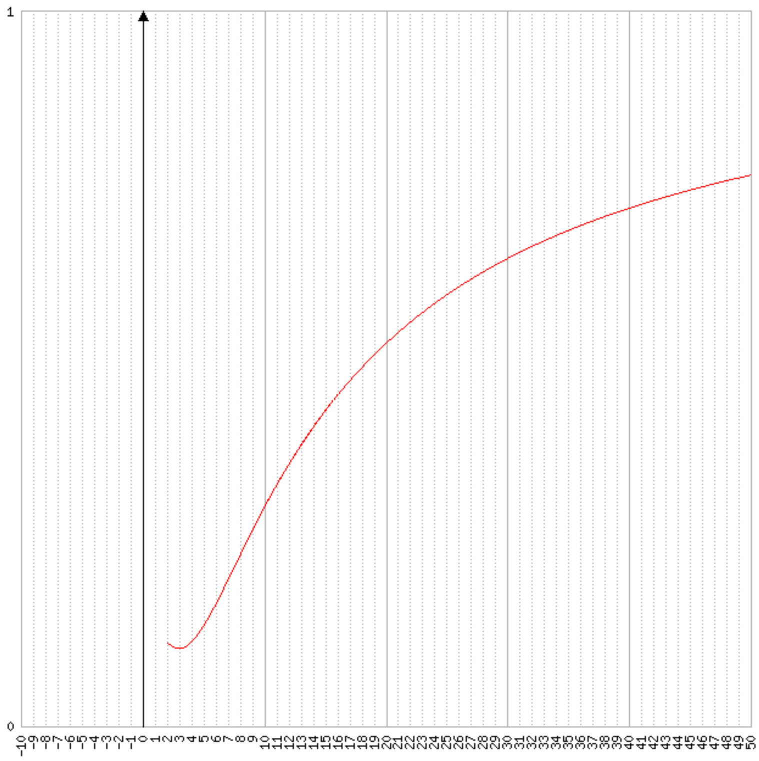

Figura 2- Gráfico $f(R)$

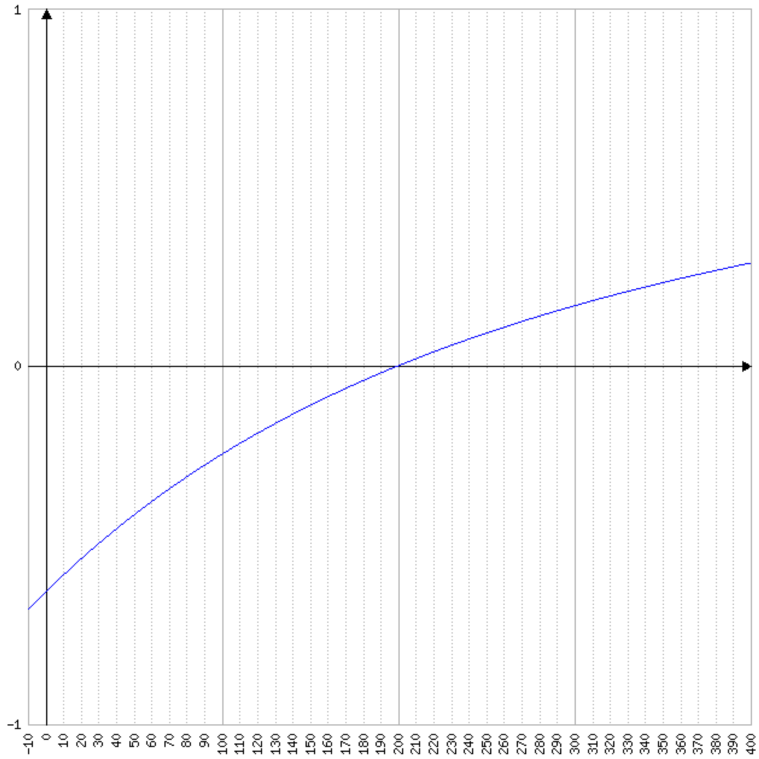

Figura 3- Gráfico $f(L)$ com R=280

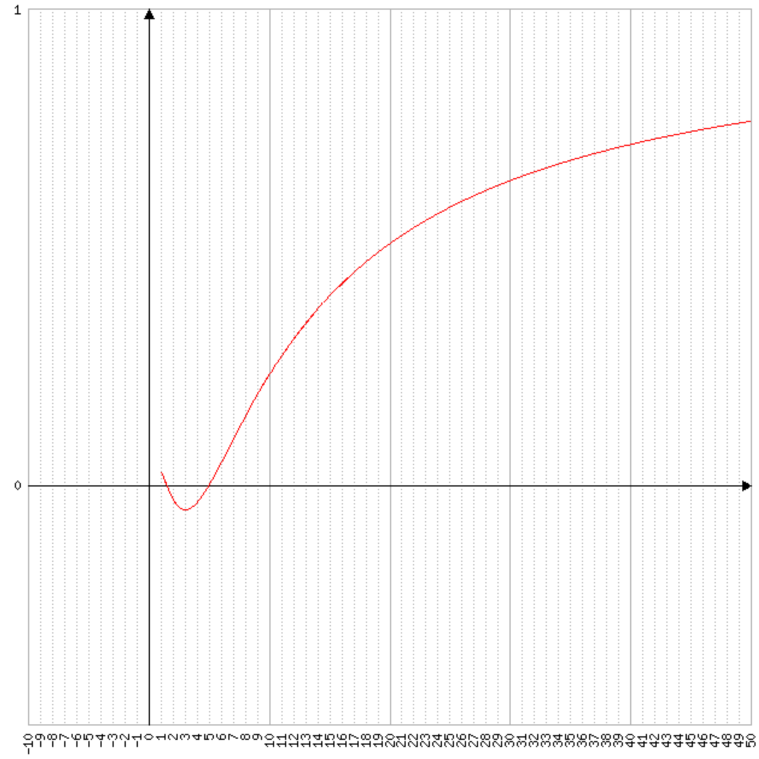

Figura 4- Gráfico $f(L)$ com R=200

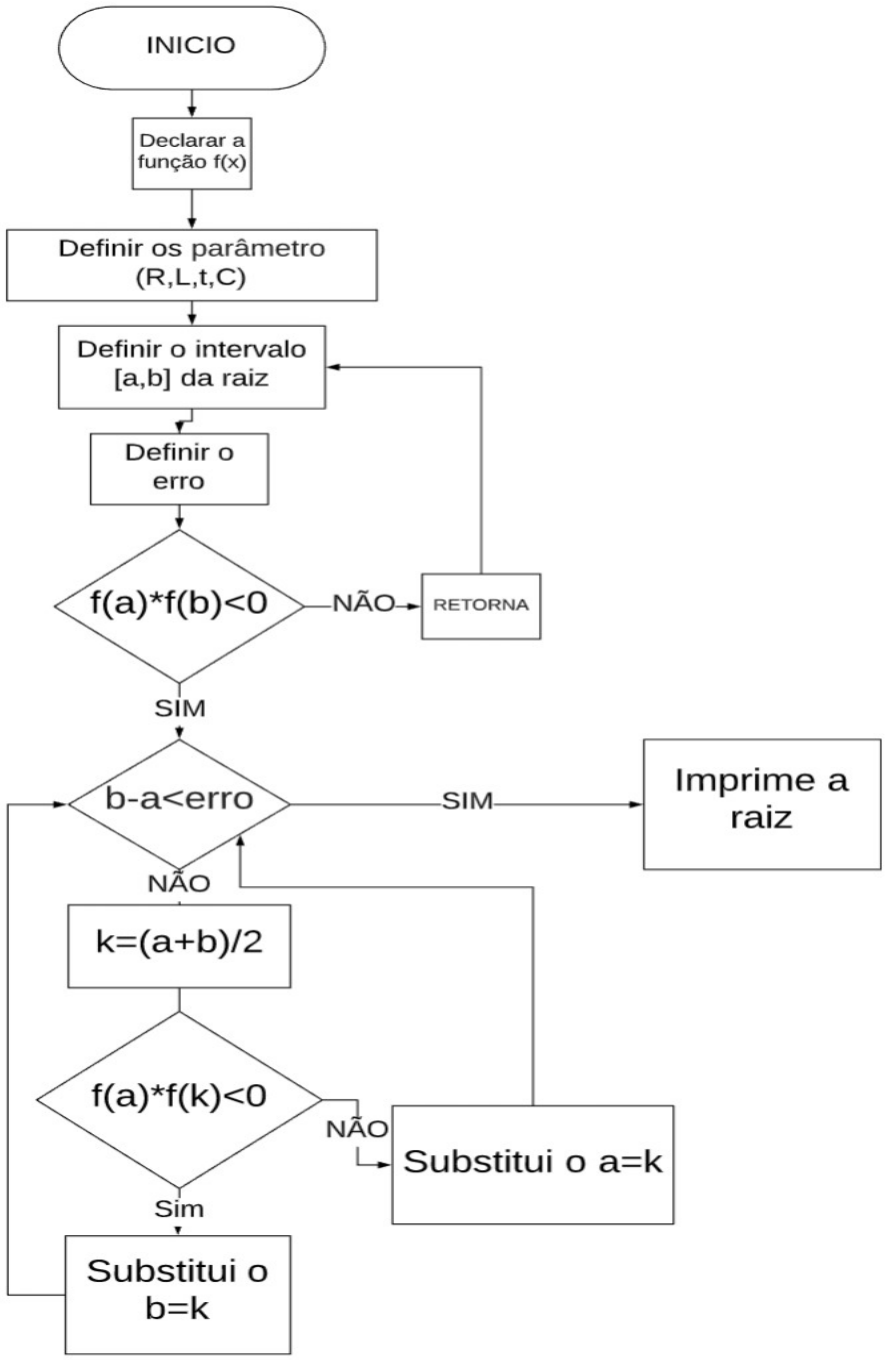

Figura 5- Fluxograma para o programa em C++ que implementa o método da bisseção no problema

5. RESULTADOS

Após a aplicação do método da bisseção foram calculados os valores aproximados de R para o item b e de L para o item c, os valores aproximados calculados pelo programa foram:

b) R= 197,93 Ohms, com o intervalo [0,400].
c) L = 1,50 H, com o intervalo [1,4] e L = 4,9 H, com o intervalo [2,6].

6. DISCUSSÕES

No projeto realizado, tivemos por objetivo estudar um circuito RLC e foi apresentado o passo a passo da modelagem completa deste. Aqui, visamos encontrar valores para o resistor e indutor em determinadas condições, passo que foi concluido no tópico anterior.

Ao procurar a EDO, usar a Lei de Kirchhoff foi fundamental e nâo encontramos problemas relevantes, fora o fato de nâo a conhecermos anteriormente e não ter contato com esse tipo de equação matemática.

Ao resolver da equação diferencial de segunda ordem, a principío encontramos uma função que não tinha o segundo termo como nas funções 5 e 6 apresentadas no tóico 3. Inclusive, achamos essa primeira função em uma bibliografia, porém, em discussão com o professor e colegas na sala de aula percebemos que nâo estava certo o que estávamos pensando, porém não conseguimos entender como o livro teria feito, visto que esse passo é ocultado pelo mesmo. Por isso, utilizamos as funções mostradas.

Para o método da bisseção, também não tivemos grandes complicações, pois como foi falado no tópico 4, é um método sem passos muito complexos. Contudo, no mesmo mesmo tópico foi dito que fizemos um programa em C++, e essa foi uma tarefa muito complicada, visto que é uma linguagem difícil. Para realizá-la recorremos à ajuda de muitos, mas ainda assim encontramos dificuldades.

Referências

[1] William E Boyce, Richard C DiPrima, and Douglas B Meade. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Loose-Leaf Print Companion*. John Wiley & Sons, 2017.

[2] Steven C Chapra and Raymond P Canale. *Métodos numéricos para engenharia*. McGraw-Hill, 2008.

[3] Kelly Vinente dos Santos. *Caderno Didático de Fundamentos de Eletricidade (CE-TAM/UFSC)*. Cadernos Pronatec Goiás, 2018.

[4] Milton Gussow. *Eletricidade básica*. Bookman Editora, 2009.