Processamento Digital de Sinais

Notas de Aula

Análise Espectral Usando a DFT

Ricardo Tokio Higuti

Departamento de Engenharia Elétrica - FEIS - Unesp

Observação: Estas notas de aula estão baseadas no livro: "Discrete-Time Signal Processing", A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, Prentice Hall, 1989/1999.

Análise Espectral Usando a DFT

Uma das principais aplicações da DFT é a análise do conteúdo de freq. de sinais (análise espectral)

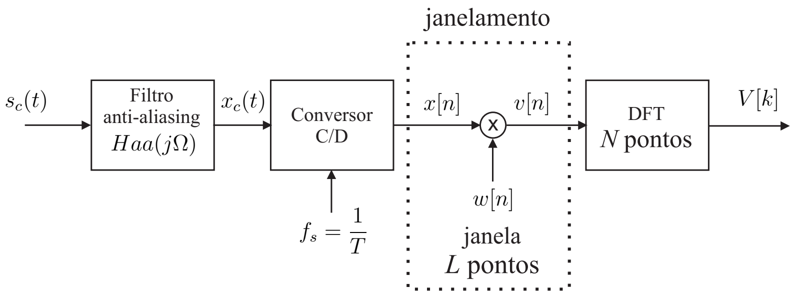
Aplicações:

- Análise e síntese de sinais de voz
- Estudo de harmônicos em redes
- Medição de desvio de frequência (Doppler)

Para o uso da DFT na análise de sinais de tempo contínuo, deve-se considerar:

- Amostragem (qual freq. de amostragem usar?)
- DFT: para sinais de duração finita - truncamento do sinal (quantos pontos usar?)
- Como relacionar as freq. analógicas (Hz) com as amostras ($X[k]$)

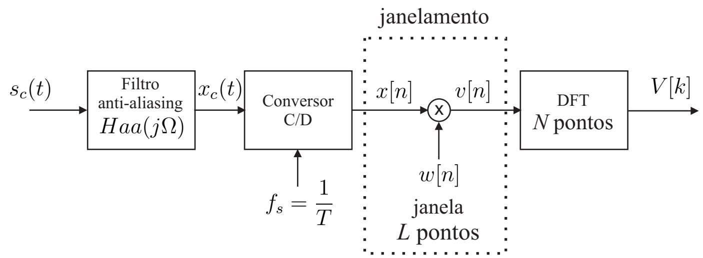
Análise Espectral

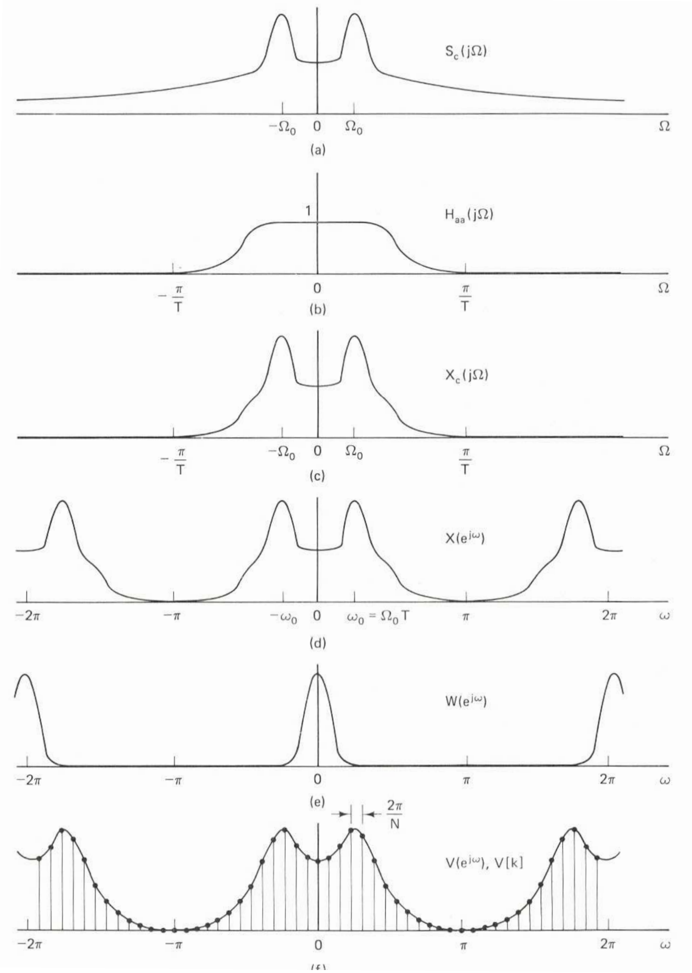


- **Filtro anti-aliasing:** elimina/atenua componentes de freq. acima de $\Omega_s/2$ (ou $f_s/2$), para evitar sobreposição do espectro;
- **Conversor C/D:** é um conversor A/D, que amostra o sinal $x_c(t)$ a uma taxa de f_s amostras por segundo, e no qual devem ser consideradas suas características não-ideais (amostragem com retenção, número finito de bits);
- **Truncamento ou janelamento:** $v[n] = x[n] \cdot w[n]$, em que $w[n]$ é uma função que limita a duração do sinal $x[n]$, chamada de **janela**. Ela determina o comprimento do sinal a ser analisado (L), e pode fazer alguma modificação no formato do sinal original, no tempo e em freqüência.
- **DFT**: Calcula a DFT do sinal $v[n]$, utilizando $N \geq L$ pontos para o cálculo:

$$V[k] = \sum_{n=0}^{L-1} v[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0,\ 1, ...,\ N-1$$

Análise Espectral





Relação Entre as Transformadas

Os vários parâmetros usados na análise espectral determinam a relação entre as freq. analógicas e as amostras da DFT. São eles:

- Freq. amostragem: $f_s = 1/T$
- Número de pontos usado no cálculo da DFT: N

Relembrando alguns pontos importantes:

- Quando um sinal $x_c(t)$ é amostrado, obtendo-se o sinal $x[n]$, tem-se que a DTFT de $x[n]$, $X(e^{j\omega})$, está relacionada com o espectro do sinal de tempo contínuo amostrado, $X_s(j\Omega)$, pela relação de freqüências:

$$\omega = \Omega T = 2\pi f/f_s$$

- Em um sinal de tempo discreto de duração finita $v[n]$, sua DFT, $V[k]$, e sua DTFT, $V(e^{j\omega})$, estão relacionadas por:

$$V[k] = V(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \qquad k = 0..N-1$$

ou seja, a DFT é composta por N amostras da DTFT, equiespaçadas de $\Delta\omega = 2\pi/N$, entre $\omega = 0$ e 2π.

Daí, pode-se relacionar a amostra k da DFT com a freq. f, em Hertz:

$$\Delta\omega = 2\pi/N = \Delta\Omega T = 2\pi\Delta f/f_s$$

e portanto,

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

é o espaçamento equivalente entre as amostras do espectro do sinal de tempo contínuo, que é amostrado nas freqüências

$$f_k = \frac{f_s}{N}k$$

Problemas e Limitações

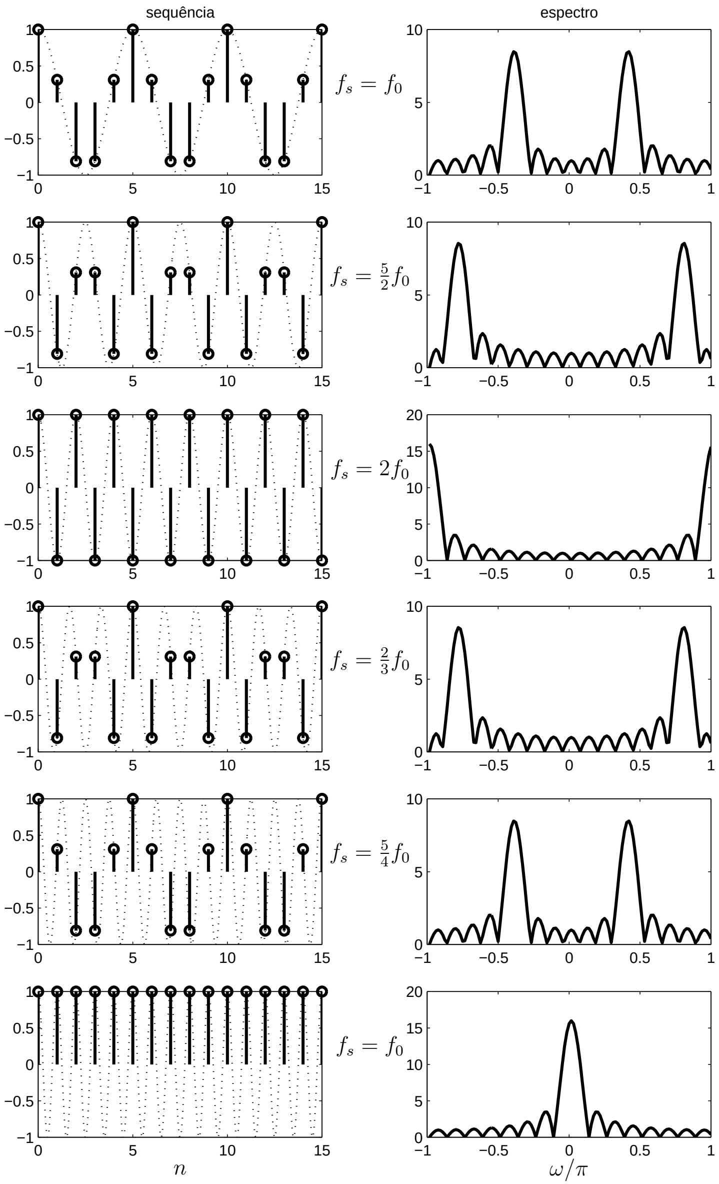
Devido às operações realizadas sobre o sinal de tempo contínuo, os dados resultantes do cálculo da DFT podem não representar exatamente o espectro original. Esses efeitos devem ser levados em conta, para que não haja interpretações errôneas sobre o conteúdo de freq. do sinal sendo analisado.

Deve-se considerar:

- *Aliasing* (freq. amostragem)
- Efeito do janelamento (formato e comprimento da janela)
  - Vazamento espectral (*Spectral Leakage*)
- Número de pontos da DFT
  - Amostragem espectral

Amostragem do sinal

O sinal deve ser amostrado a uma taxa maior que duas vezes sua máxima freqüência. Por exemplo, para uma senóide com frequência f_0 amostrada a uma taxa f_s:



Efeito do Janelamento

O sinal $x[n]$ sofre um truncamento, que é representado matematicamente por uma multiplicação por uma função $w[n]$, chamada de **janela**:

$$v[n] = x[n] \cdot w[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

O efeito na freqüência é uma convolução periódica do espectro original com o espectro da janela. Há, portanto, mudanças no espectro original, e este efeito é chamado de **vazamento espectral** (*spectral leakage*), e depende do tipo de truncamento utilizado (formato e comprimento da janela $w[n]$).. Analisando o caso de uma senóide:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta_0) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 n+\theta_0)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 n+\theta_0)}$$

O espectro de $x[n]$ é:

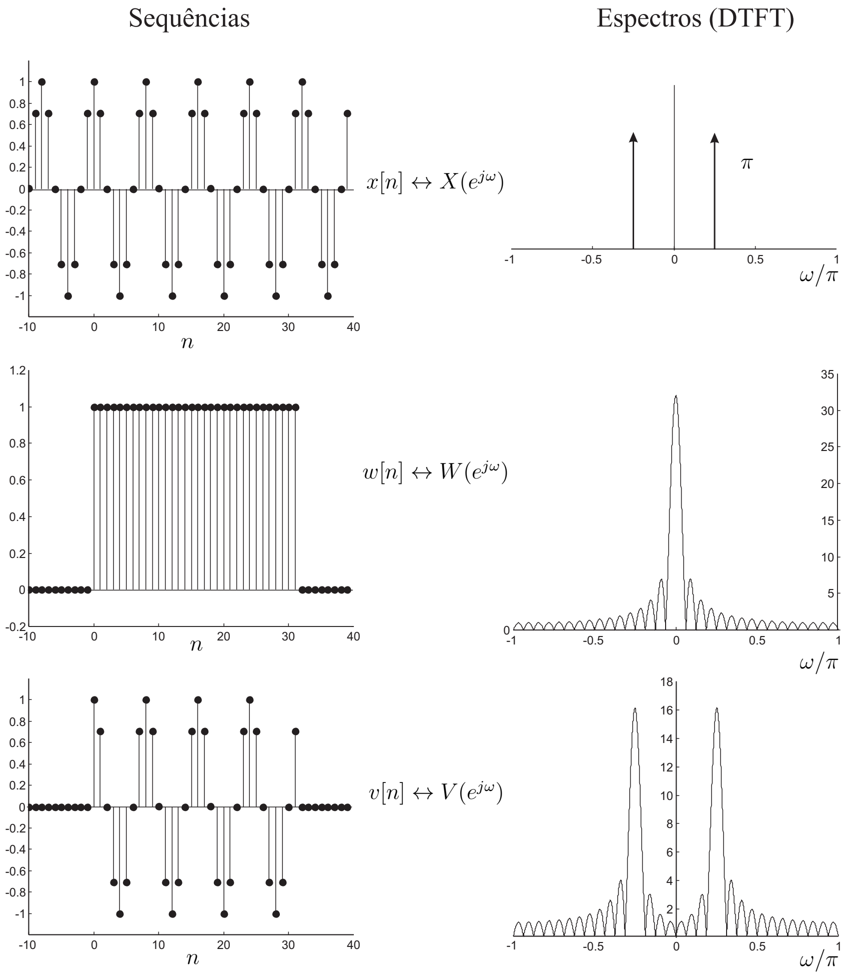
$$X(e^{j\omega}) = A\pi e^{j\theta_0}\delta(\omega-\omega_0) + A\pi e^{-j\theta_0}\delta(\omega+\omega_0), \quad |\omega| < \pi$$

O sinal truncado fica com o espectro:

$$V(e^{j\omega}) = \frac{A}{2}e^{j\theta_0}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A}{2}e^{-j\theta_0}W(e^{j(\omega+\omega_0)})$$

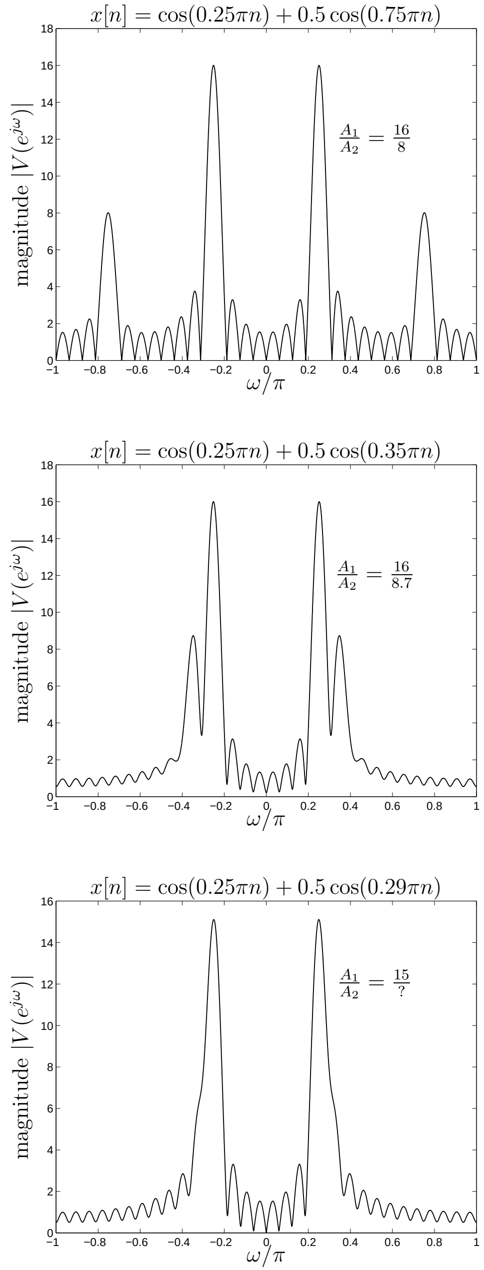
Utilizando $A = 1$, $\omega_0 = \pi/4$, $\theta_0 = 0$ e uma janela retangular com comprimento L igual a 32 amostras, fica-se com as seguintes sequências e espectros de magnitude.

Vazamento Espectral



- Observando o espectro de $V(e^{j\omega})$, e comparando-o com o do sinal original $X(e^{j\omega})$, percebe-se que apareceram outras frequências devido ao truncamento, quando deveria ser observada apenas a frequência $\omega_0 = \pi/4$.
- Se o sinal tiver frequências próximas entre si, o efeito do vazamento espectral pode dificultar a identificação das mesmas.

Vazamento Espectral

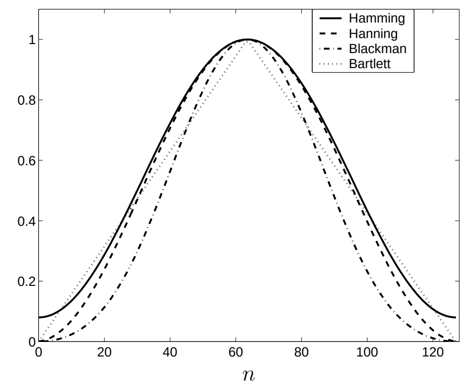


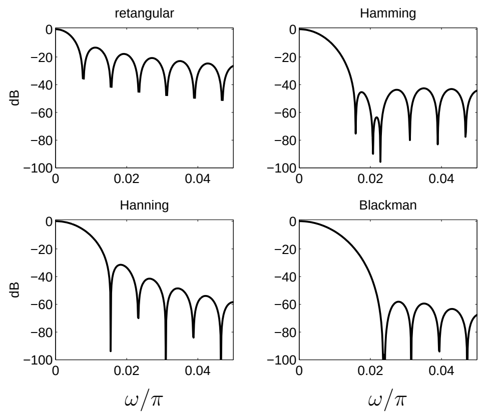
Janelas

Existem diversas janelas, com diferentes características de formato, que acaba por influenciar no seu espectro. Os parâmetros principais são relacionados, no espectro da janela, a:

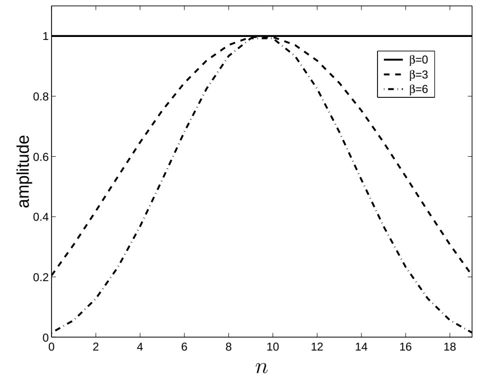
- Largura do lóbulo principal
- Nível de lóbulo lateral

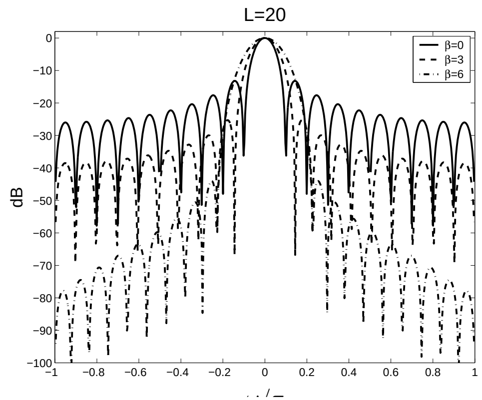
O formato da janela modifica tanto a largura do lóbulo principal como o nível de lóbulo lateral, enquanto que o comprimento da janela altera somente a largura do lóbulo principal.

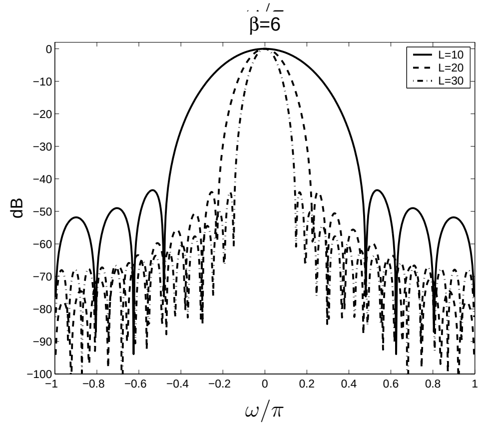




Janela de Kaiser



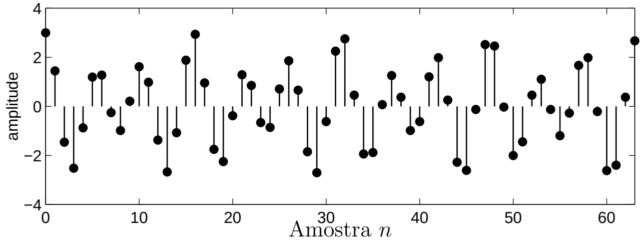


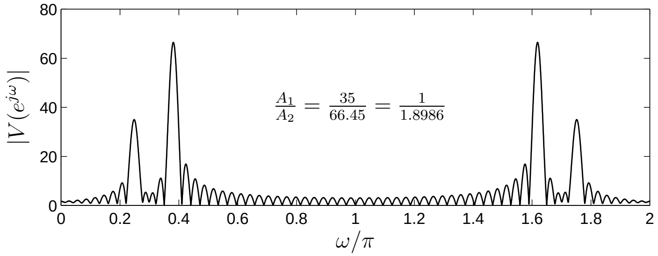


Vazamento Espectral - Efeito do Formato da Janela

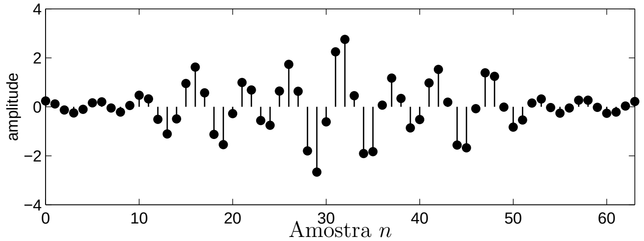
Seja o sinal: $x[n] = \cos(0.25\pi n) + 2\cos(0.38\pi n)$. Utilizando janelas retangular e de Hamming, com $L = 64$ amostras, fica-se com:

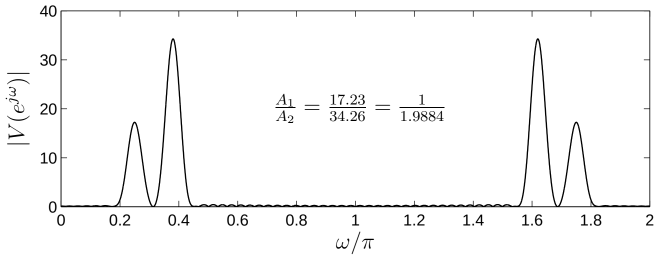
$v[n]$, Janela retangular $L = 64$





$v[n]$, Janela de Hamming $L = 64$

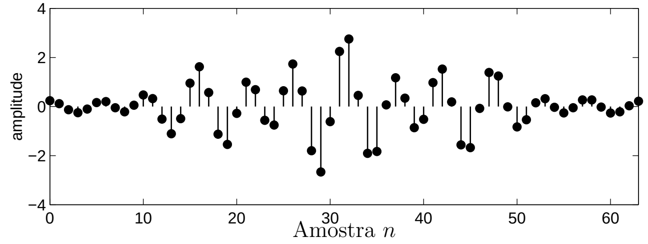


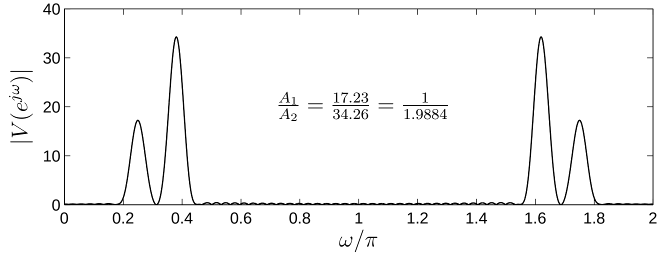


Vazamento Espectral - Comprimento da Janela

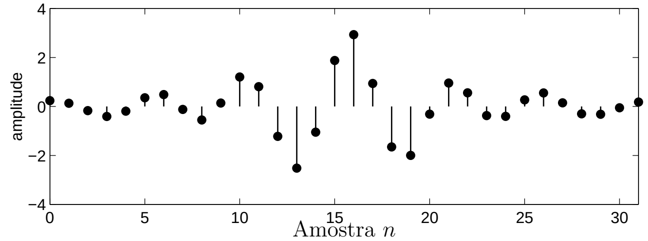
Variando-se o comprimento da janela de Hamming ($L = 64$ e $L = 32$):

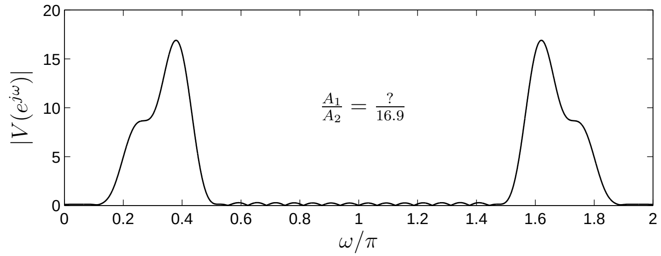
$v[n]$, Janela de Hamming $L = 64$





$v[n]$, Janela de Hamming $L = 32$



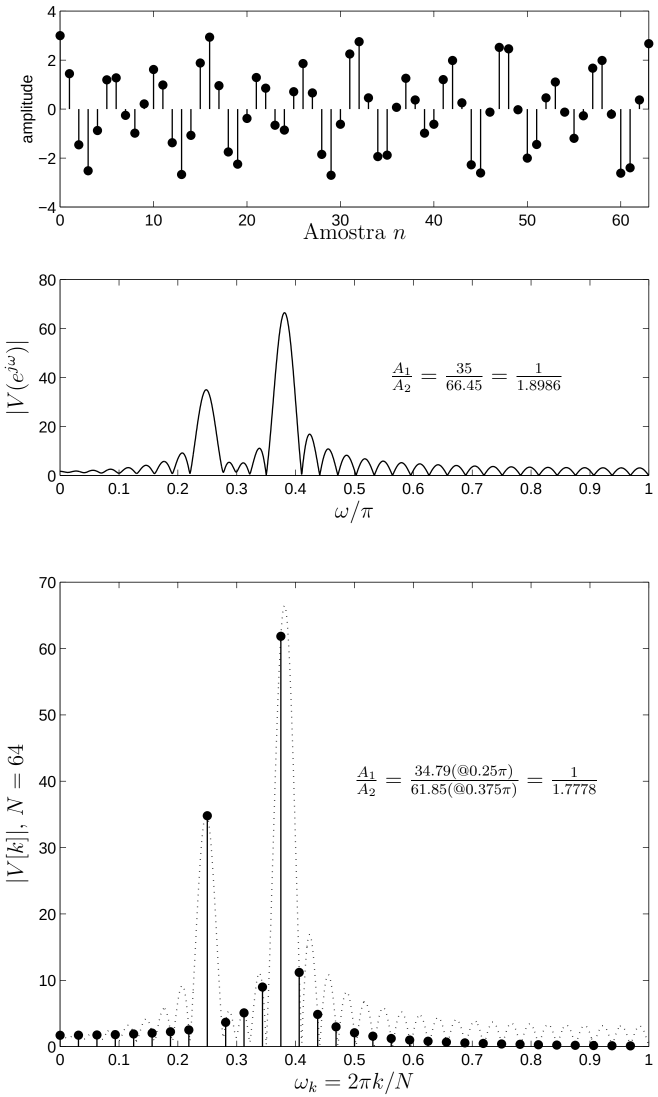


Amostragem Espectral

Deve-se lembrar que a DFT corresponde a amostras da DTFT:

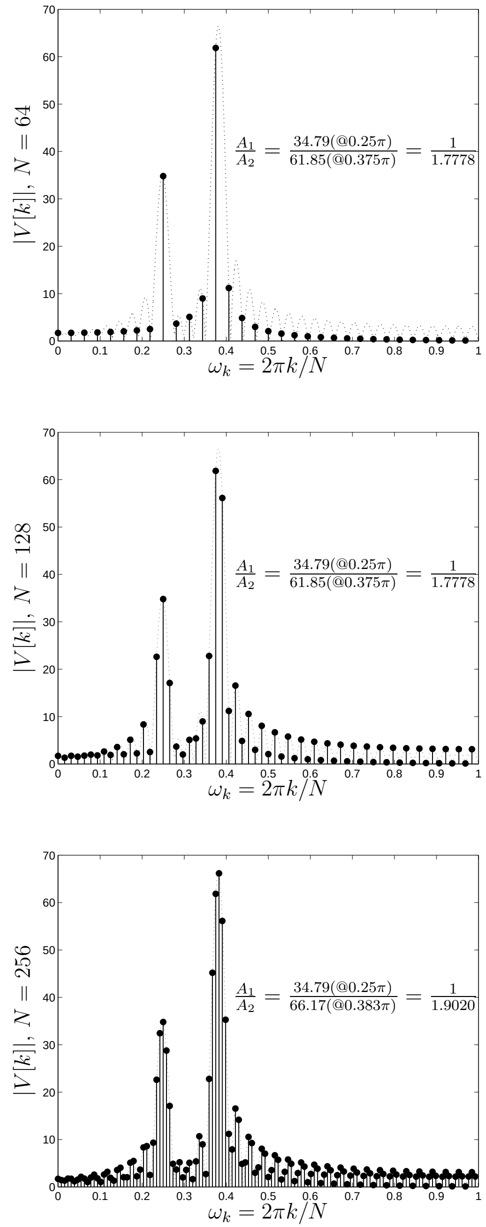
$$V[k] = V(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \qquad k = 0..N-1$$

$v[n]$, Janela retangular $L = 64$



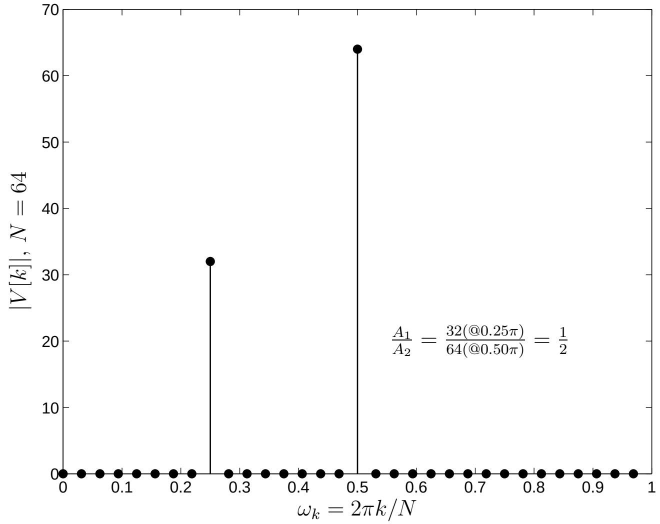
Amostragem Espectral

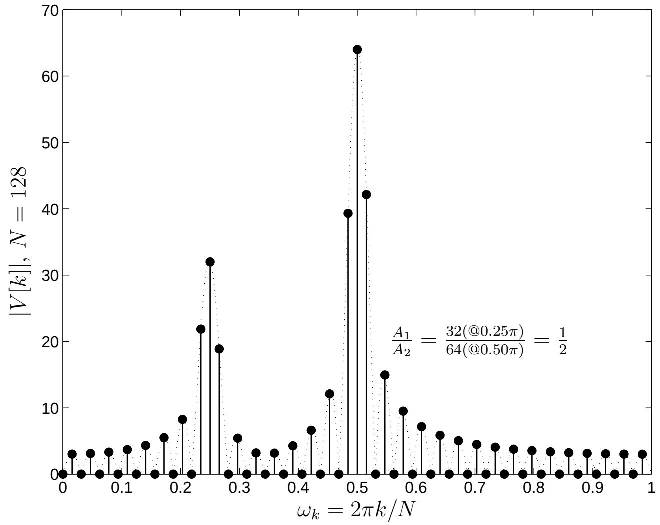
Variando o número de pontos da DFT (N), modifica-se o espaçamento entre amostras do espectro de $V(e^{j\omega})$.



Amostragem Espectral

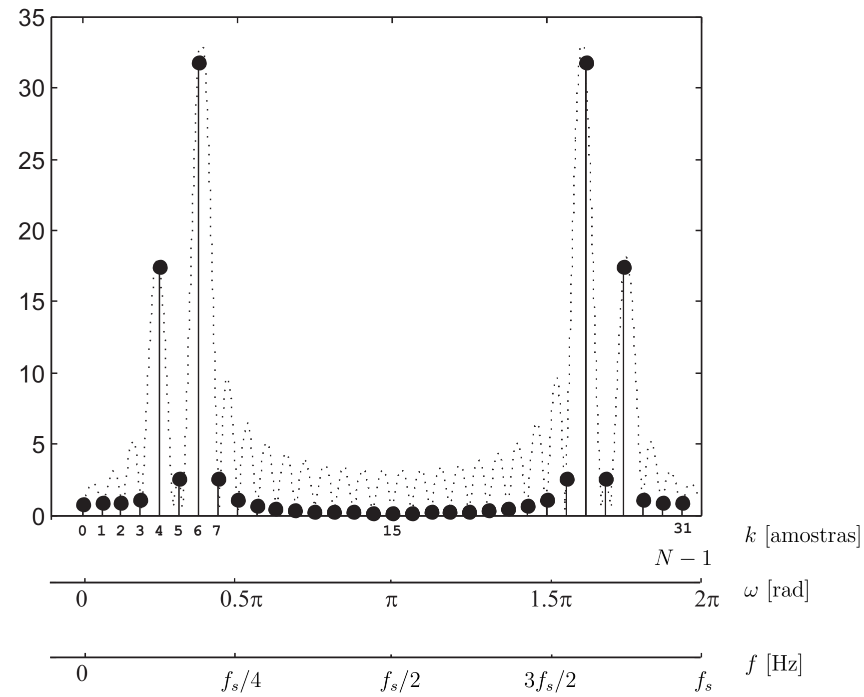
Seja o sinal: $x[n] = \cos(0.25\pi n) + 2\cos(0.50\pi n)$. Utilizando janela retangular com comprimento $L = 64$ e variando-se o comprimento da DFT, fica-se com:





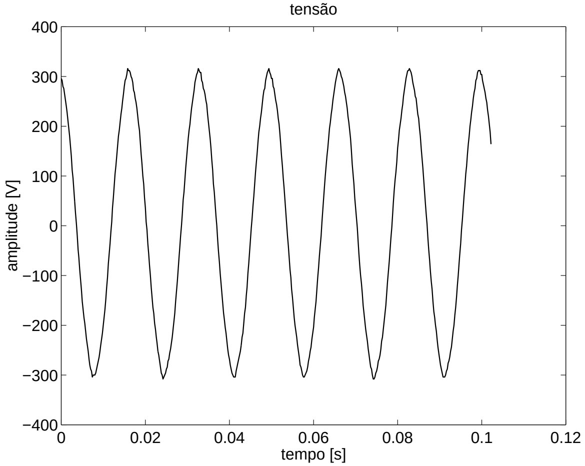
Relação entre as frequências

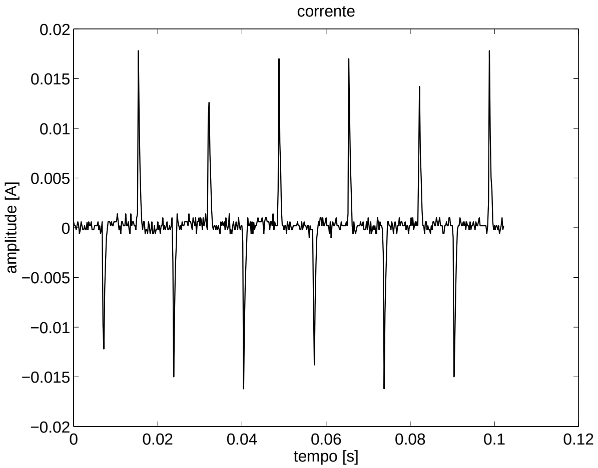
- Amostragem da DTFT: $\omega_k = \dfrac{2\pi}{N}k, \quad 0 \le k \le N-1$
- Amostragem do sinal: $\omega = \Omega T = \dfrac{2\pi f}{f_s}$
- Resolução na frequência: $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{N} = \Delta\Omega T = 2\pi\dfrac{\Delta f}{f_s}$
- Resolução na frequência f: $\Delta f = \dfrac{f_s}{N}$
- Relação entre frequências analógicas e as amostras k: $f_k = \dfrac{f_s}{N}k$



Exemplo: análise espectral

Os sinais a seguir representam a tensão e a corrente numa lâmpada fluorescente compacta. Os sinais foram amostrados por um osciloscópio digital com resolução vertical de 8 bits e frequência de amostragem igual a 5 kHz.

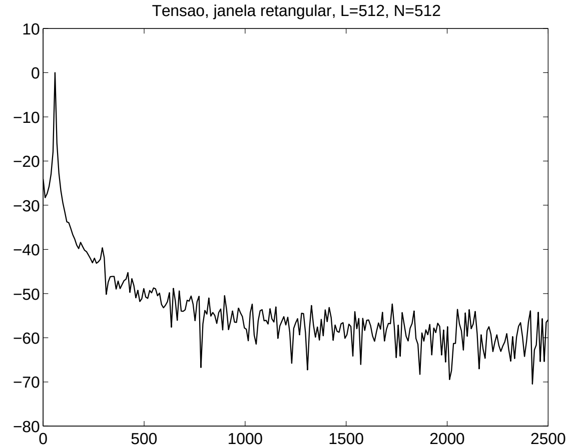


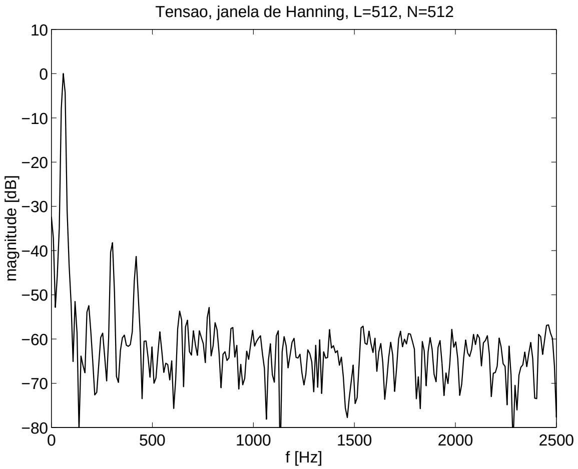


A idéia é analisar o sinal com diversos comprimentos L, janela retangular e de Hamming, e diferentes valores de N para o cálculo da DFT.

Exemplo: análise espectral (cont.)

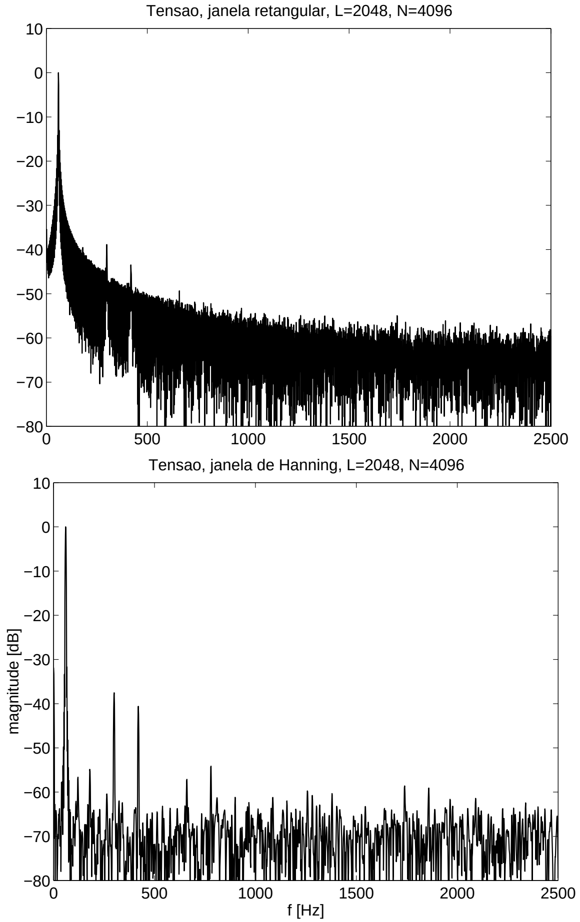
Utilizando uma porção de sinal com $L = 512$ amostras, e aplicando a DFT com $N = 512$ pontos, e janelas retangular e de Hamming, têm-se os seguintes sinais no domínio da frequência:





Exemplo: análise espectral (cont.)

Utilizando uma porção de sinal com $L = 2048$ amostras, e aplicando a DFT com $N = 4096$ pontos, e janelas retangular e de Hamming, têm-se os seguintes sinais no domínio da frequência:



Exemplo: análise espectral (cont.)

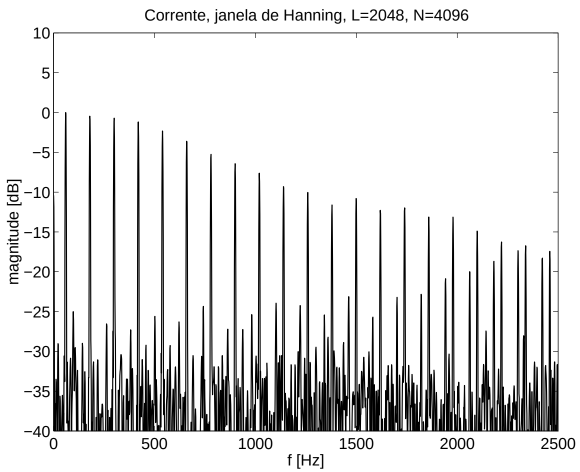
Para ilustrar os efeitos do vazamento espectral e da amostragem espectral, as tabelas a seguir mostram as frequências e magnitudes das harmônicas em 60, 300 e 420 Hz, para os vários casos estudados.

Parâmetros		60 Hz		300 Hz		420 Hz	
		f [Hz]	A [dB]	f [Hz]	A [dB]	f [Hz]	A [dB]
$L = 512$	Hamming	58,6	0	302,7	-38,2	419,9	-41,3
$N = 512$	Retangular	58,6	0	293,0	-39,6	419,9	-45,3
$L = 1024$	Hamming	61,0	0	300,3	-37,5	419,9	-40,5
$N = 2048$	Retangular	61,0	0	297,9	-38,7	417,5	-42,9
$L = 1024$	Hamming	59,8	0	300,3	-37,7	419,9	-40,7
$N = 4096$	Retangular	59,8	0	299,7	-39,3	416,3	-43,5
$L = 4096$	Hamming	59,8	0	299,7	-37,3	419,9	-40,8
$N = 8192$	Retangular	59,8	0	299,7	-38,9	419,9	-41,2

Percebe-se que, dependendo do processamento, chega-se a diferentes valores de frequências e níveis de distorção devido às harmônicas de ordem superior.

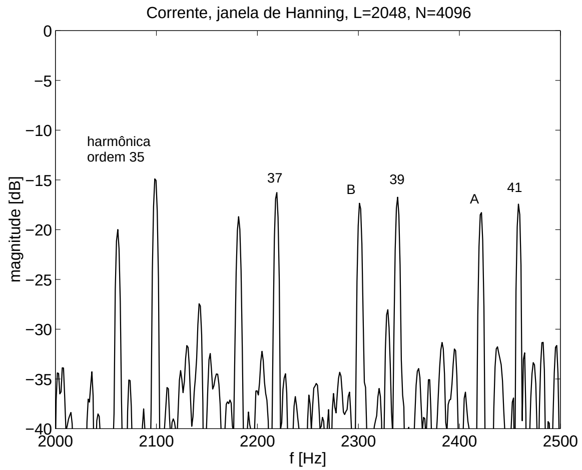
Exemplo: análise espectral (cont.)

Analisando a forma de onda de corrente, chega-se ao seguinte espectro de magnitude.



- Observando o espectro, nota-se que há harmônicas de múltiplos ímpares da fundamental.
- Como o sinal é de alta frequência (pulsos rápidos), o espectro se estende a frequências superiores a 2500 Hz, causando *aliasing*.

Exemplo: análise espectral (cont.)



- Componente em A: aliasing da componente em $43 \times 60 = 2580$ Hz, que aparece em (5000-2580) $= 2420$ Hz.
- Componente em B: aliasing da componente em $45 \times 60 = 2700$ Hz, que aparece em (5000-2700) $= 2300$ Hz.
- As magnitudes podem ter erros, caso ocorra sobreposição de uma raia em outra.

Espectrograma

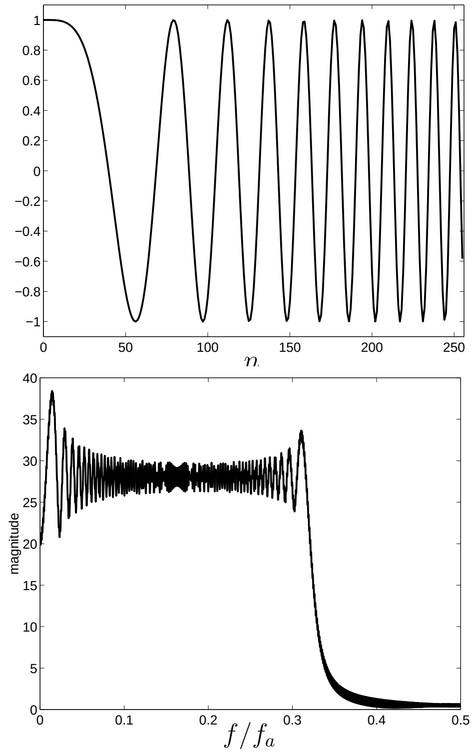
- **Análise Espectral com DFT:** adequada para sinais cujo conteúdo de freqüência não varia com o tempo.
- **Na prática:** o conteúdo de freqüência do sinal pode variar com o tempo (voz).
- A análise espectral realizada sobre todo o sinal de uma só vez pode ocultar informações importantes da variação do conteúdo de freqüência ao longo do tempo.
- *Time-dependent Fourier transform, Short-time Fourier transform.*

Chirp

Seja um sinal cuja freq. varia com o tempo:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n^2)$$

A freq. instantânea do sinal é $2\omega_0 n$. O sinal e a magnitude de sua DFT são:



Não se pode determinar como **variou** o conteúdo de freq. do sinal ao longo do tempo. Uma alternativa é fracionar o sinal e calcular várias DFTs para diferentes intevalos de tempo.

Espectrograma

Multiplica-se o sinal $x[n]$ por uma janela $w[n]$ e calcula-se a DTFT:

$$X[n,\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n+m]\ w[m]\ e^{-j\lambda m}$$

Outra forma:

$$X[n,\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\ w[n-m]\ e^{-j\lambda m}$$

Amostrando o espectro em N pontos equiespaçados e uma janela de comprimento L:

$$X[n,k] = X[n, 2\pi k/N] = \sum_{m=0}^{L-1} x[n+m]\ w[m]\ e^{-j(2\pi/N)km}, \quad k = 0..N-1$$

ou

$$X[n,k] = X[n, 2\pi k/N] = \sum_{m=n-L+1}^{n} x[m]\ w[n-m]\ e^{-j(2\pi/N)km}, \quad k = 0..N-1$$

- A duração da janela é muito menor que a duração total do sinal
- A janela toma trechos do sinal ao longo do tempo
- Quanto mais estreita a janela, maior a resolução no tempo e menor em freq.
- n é o deslocamento da janela em relação ao sinal
- Para cada n tem-se uma DFT
- Não se pode ter uma boa resolução no tempo e em freq. ao mesmo tempo usando a DFT

Espectrograma