Mini-Curso: Introdução ao Matlab como Ferramenta para Uso de Engenheiros - Parte II 2012.1

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Parte 2: Operação com Matrizes e Vetores

- **Ao final desse módulo estaremos preparados a:**
  - Declarar e manipular vetores (calcular módulo, exponenciação, divisão e manipulação de elementos)
  - Declarar e manipular matrizes (adição, subtração, multiplicação, divisão pela direta, divisão pela esquerda, exponenciação, transposta, inversa).

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Operações com Vetores

Adição e Subtração:

```
% Sejam os vetores X = [2 3]; e Y = [4 2];
% Definindo o vetor X
X = [2   3]

%Definindo o vetor Y
Y = [4   2]

% Adição
Z = X + Y

% Subtração
W = X - Y
```

```
%Resultado
      Z = 6    5
      W = -2    1
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Operações com Vetores

Multiplicação e Divisão

```
% Multiplicação
Z = X.*Y

% Divisão
W = X./Y

% Produto vetorial
P = X*Y'

% Observação:
% O operador "'" aplicado
% a um vetor calcula a
% transposta conjugada
% do mesmo.
```

```
% Definindo o vetor X
X = [2   3]

%Definindo o vetor Y
Y = [4   2]

%Resultado
Z =   8        6
W =   0.5000   1.5000
P =   14
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

vetor_exec1.m

- Calcule o vetor y para as operações abaixo:

$$a)\ y1 = [3 \quad 1 \quad 3 \quad 9]\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

b) Multiplicar elemento a elemento dos vetores:

a = [0.5   2   3+2j   13   5   10]

b = [1   2   3   4   5   6]

c) Dividir elemento a elemento dos vetores:

c = [0.5   2   3+2j   13   5   10]

d = [1   2   3   4   5   6]

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Operações com Vetores

Exponenciação:

```
% O operador utilizado é ".^".
% Exemplo de exponenciação direta:
% Seja x = [2 3].
S  =  x.^3
```

```
%Resultado
S = 8   27
```

```
% Exemplo de exponenciação de vetores
% por vetores.

S  =  [5 6].^[2 3]

% Esta operação é equivalente à
% S = [5^2  6^3]
```

```
%Resultado
S = 25   216
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Operações com Vetores

Tamanho e dimensão de um vetor:

```
% Definido um vetor
S = [ 1 2 3 4 5];

% Resolvendo o tamanho de S
x = length(S)
```

```
%Resultado
x = 5
```

```
% Resolvendo a dimensão de S
x  =  size(S)
```

```
%Resultado
x = 1   5

% 1 linha
% 5 colunas
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Construção Rápida de Vetores

Vetor de uns

```
% Definindo o vetor S
S  =  ones([1 4])
```

```
%Resultado
S =  1   1   1   1
```

Vetor de zeros

```
% Definindo o vetor S
S  = zeros([1 4])
```

```
%Resultado
S =  0   0   0   0
```

Vetor crescente

```
% Definindo o vetor S
S  =  [1:2:10]
```

```
%Resultado
S = 1   3   5   7   9
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vetores

Vetor com número determinado de elementos

```
% Definindo o vetor S
S= linspace(1, 10, 4)
B= linspace(10, 1, 5)
```

```
%Resultado
S = 1    4    7    10
B = 10    7.75 5.5 3.25 1
```

Vetor decrescente

```
% Definindo o vetor S
S=[10:-2:1]
```

```
%Resultado
S = 10    8    6    4    2
```

Vetor crescente com razão unitária

```
% Definindo o vetor S
S  = [1:6]
```

```
%Resultado
S = 1    2    3    4    5    6
```

Vetor decrescente com razão unitária

```
% Definindo o vetor S
S  =  [6:-1:1]
```

```
%Resultado
S =  6    5    4    3    2    1
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vetores

Listando intervalos de um vetor e atribuindo valores

```
% Definindo o vetor S
>> S = [1 2 2 5 5 6];

% Listando um intervalo do vetor S
>> S(3:5)

% Atribuindo valores
>> S(1) = 20
S =
    20     2     2     5     5     6
>> S(3:5) = [1 1 1]
S =

    20     2     1     1     1     6
% apagar elemento
S(3) = [];
S =

    20     2     1     1     6
```

```
%Resultado
ans =  2    5    5
```

© Prof. Dr.
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

vetor_exec2.m

- Construa um vetor com elementos crescentes que começa em 10 e termina em 20, com passo de 5.
- Construa um vetor com elementos crescentes que começa em 10 e termina em 20, com 7 elementos.
- Gere uma seqüência de números pares começando em 4 e não ultrapassando 15.

vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vetores

***Vetor aleatório* (com distribuição uniforme)**

```
% Definindo o vetor randômico S
S=rand([1 4])
```

```
%Resultado
S = 0.2311   0.6068   0.4860   0.8913
```

União de vetores

```
% Definindo o vetor S
S = [[1 2] [3 4 5]]

% Definindo o vetor Z
Z =[[1:2] zeros([1 2])]
```

```
%Resultado
S = 1    2    3    4    5
Z = 1    2    0    0
```


vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vetores

Encontrando elementos em um vetor

```
% Definindo o vetor S
S =[1  2  0  3];

% Procurando pelo valor S=3
find(S==3)
% Procurando pelo valor S>1 (índices)
indices = find(S>1)
% valores
v = S(indices)
```

```
%Resultado
ans = 4
```

```
%Resultado
indices = 2   4
V = 2   3
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

vetor_exec3.m

Crie um vetor A *de 10 elementos aleatórios e* a partir deste *crie outros vetores* obedecendo aos seguintes critérios:

a. **B1 = Conter somente os elementos de A maiores que 0.5. Calcule quantos elementos são.**
b. **B2 = Conter somente os elementos de A menores que 0.2. Calcule quantos elementos são.**
c. **B3 = Conter os elementos de A em ordem crescente**
d. **B4 = Conter os elementos de A em ordem decrescente**

Dica: use o comando **lookfor** para encontrar o comando que ordena elementos em um vetor

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

vetor_exec4.m

1. Extraia os 4 últimos elementos do vetor **a** e armazene na variável **c:**

   a = [1 30 100 3 10 30 90 1 2 3 4 50 90 0.9]

Use operador **end** e também o comando **length**

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

vetor_exec5.m

Seja x=[5 2] e y=[2 3 4].

a) A expressão S=x+y será processada corretamente? Justifique.

b) Faça uma expressão que divida x pelos 2 primeiros elementos de y.

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

vetor_exec6.m

Crie uma expressão que calcule o valor de y para as equações abaixo.

Definia **x** variando de 2 a 19 espaçados de 5 em 5 unidades.

$a)\ y = x^2$

$b)\ y = (x-1)^3$

$c)\ y = (x^2-1)^3$

$d)\ y = \dfrac{\log(3x)}{2} + x^2$

$e)\ y = \dfrac{\ln(3x)}{\sqrt{2}} - \sum x$

$f)\ y = e^{-4x}$

$g)\ y = sen(x^2)$

$h)\ y = \tan^3(100\pi x)$

$i)\ y = \dfrac{sen(x)}{x}$

$j)\ y = \dfrac{\log[sen(x)]}{2} + \cot(x-1)$

$l)\ y = \left[\sum_{i=0}^{n} sen(x_i)\right] \cdot \left[\sum_{i=0}^{n} \cos^3(x_i)\right]$

$m)\ y = \dfrac{\mathrm{Re}[\log(-x)]}{\mathrm{Im}[\log(-x^2)]}$

- Armazene os comandos em um arquivo chamado: exercicio4.m e use o comando **disp** para mostrar os resultados no formato **y (para os valores de x iguais a <valores de x>) = resultado**

Polinômios

Calcular as raízes a partir de um polinômio

```
% Objetivo: Calcular as raízes do polinômio
% f(x) = x^4-10x^3+35x^2-50x+24

%Construindo o vetor com com os coeficientes de f(x)
coeficientes = [1 -10 35 -50 24];

%Gerando as raízes
raizes = roots(coeficientes)
```

```
%Resultado
raizes =
     4.0000
     3.0000
     2.0000
     1.0000
```

Polinômios

Calcular o polinômio a partir das raízes.

```
% Objetivo: Calcular o polinômio a partir da
raízes
% r0=4, r1=3, r2=2 e r3=1;

%Construindo o vetor com as raízes "r"s
raizes = [4 3 2 1];

%Gerando o polinômio
polinomio = poly(raizes)
```

```
%Resultado
polinomio =

 1   -10    35   -50    24
```


Vamos praticar

polinomios_exe1.m

Exercício: Calcular as raízes dos seguintes polinômios.

a) $p(x) = -\frac{7}{3}x^4 - \frac{16}{3}x^2 + 25x$

b) $p(x) = x^7 - 9x^6 + 2$

Exercício: Calcular os polinômios a partir das seguintes raízes.

a) $r_1 = 3,\ r_2 = 2,\ r_3 = 0$

b) $r_1 = 3,\ r_2 = 1 + j,\ r_3 = r_2^*$

Polinômios

Produto de polinômios e valor determinado:

```
% Objetivo: Calcular o produto de dois
polinômios
% p1 = [1 -2 4 ]; p2 = [1 0 3 5];

%Calculando o produto de p1 e p2
p3 = conv(p1, p2);

%Calulando o valor de p3
p4 = polyval(p3,2)
```

```
%Resultado
p3 =

     1    -2     7    -1     2    20
```

```
%Resultado
p4 =

     76
```


vicente.sousa@ct.ufrn.br

Polinômios

Divisão de polinômios e valor determinado:

% Objetivo: Calcular **a divisão entre polinômios, (fornecendo quociente e resto).** *l(x) e n(x) tais que p(x) = l(x) × q(x) + n(x) , onde o grau de n(x) é inferior ao de q(x)* ,obtêm-se fazendo:

>> [l,n]=deconv(p,q)

```
p = [1 3 1]; q = [1 1];

%Calculando a divisão
[l,n] = deconv(p1, p2);
```

```
%Resultado
l =

     1     2
n =

     0     0    -1
```


vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

polinomios_exe2.m

- Calcule o valor de y para as operações abaixo.

$$a)\ y1 = (x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 1)/(x+1)$$

$$b)\ y2 = (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 1).(x+1)$$

$$c)\ y3 = (x^2 + 2x + 2).(x^7 + 1)$$

$$d)\ y4 = (x^2 + 2x + 1)/(x+1)$$

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Polinômios

Derivada de polinômios:

```
% Objetivo: calcular a derivada do polinômio
p(x) = x^5 + 2x^3 + x^2 + 10

%Construindo p(x):
p = [1 0 2 1 0 10];

%Calculando a derivada
pd = polyder( p );
```

```
%Resultado
pd =

     5     0     6     2     0
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Polinômios

Integral de polinômios:

```
% Objetivo: calcular a integral do polinômio
p(x) = x^5 + 2x^3 + x^2 + 10

%Construindo p(x):
p = [1 0 2 1 0 10];

%Calculando a integral
pi = polyint( p );
```

```
%Resultado
pi =

    0.1667 0 0.5 0.333 0 10 0
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

polinomios_exe3.m

- Calcule o valor de y para as operações abaixo.

$$a)\ y1 = \frac{d(x^5 + x + 2)}{dx}$$

$$b)\ y2 = \frac{d\left[x^6 + x^4 + x\right]}{dx}$$

$$c)\ y3 = \int (x^7 + x^2 + 2x + 2)\ dx$$

$$d)\ y4 = \int (x^8 + x^5 + 2x)\ dx$$

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Derivada

a) Derivada de ordem n

```
% Objetivo: Realizar a deriva de primeira e segunda
%             ordem da função f(t) = sen(a.t)


%Construindo os objetos simbólicos "a" e "t"
syms a t;

%Criando a função e atribuindo para f
f = sin(a*t);

%Realizando a derivada de primeira ordem
f1 = diff(f)

%Realizando a derivada de segunda ordem
f2 = diff(f,2)
```

```
%Resultado
f1 = cos(a*t)*a
f2 = -sin(a*t)*a^2
```


vicente.sousa@ct.ufrn.br

Exercício

- Calcule o valor de y para as derivadas abaixo.

$$a)\ y = \frac{d(x^5 + x + 2)}{dx}$$

$$b)\ y = \frac{d\left[\cos(x) + 2x\right]}{dx}$$

$$c)\ y = \frac{d\left(\frac{1}{2} e^{-j3t}\right)}{dt}$$

$$d)\ y = \frac{d\left(\frac{3}{\sqrt{2}} t^2 - |1 + 4j|^2\right)}{dt}$$

vicente.sousa@ct.ufrn.br

Integral

a) Integral Indefinida

```
% Objetivo: Realizar a integral
%           das seguintes funções:

%Construindo o objeto simbólico x
syms x;

%Criando as funções
f = x^2+2
g = 1/x;
h = sin(2*x)

%Realizando a integral
F = int(f)
G = int(g)
H = int(h)
```

$$f(x)=\int x^2+2\,dx,\quad g(x)=\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$h(x)=\int sen(2x)\,dx$$

```
%Resultado
F = 1/3*x^3+2*x
G = log(x)
H = -1/2*cos(2*x)
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Integral

b) Integral Definida

```
% Objetivo: Realizar a integral
%           das seguintes funções:

%Construindo o objeto simbólico x
syms x;

%Criando as funções
f = x^2+2
g = 1/x;
h = sin(2*x)

%Realizando a integral
F = int(f,-1,1)
G = int(g,1,10)
H = int(h,-pi/4,pi/4)
```

$$f(x)=\int_{-1}^{1} x^2+2dx,\quad g(x)=\int_{1}^{10} \frac{1}{x}dx$$

$$h(x)=\int_{-\pi/4}^{\pi/4} sen(2x)dx$$

```
%Resultado
F = 14/3
G =log(2)+log(5)
H = 0
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Integral

d) Integral dupla

```
% Objetivo: Realizar a integral da função f(x,y) = x^2+y^2
% para a componente x e y

%Definindo os símbolos
syms x y;

%Criando a equação;
f = x^2 + y^2;

%Integrando em função de x
fx = int(f, x);

%O resultado anterior será
%integrado em função de y
resultado = int(fx, y)
```

resultado =
*1/3*x^3*y+1/3*y^3*x*

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Exercício

- Calcule o valor de y para as integrais abaixo.

$$a)\; y = \int x^5 + x + 2dx$$

$$b)\; y = \int sen(x) + 1dx$$

$$c)\; y = \int \frac{1}{2} e^{-j3t} dt$$

$$d)\; y = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{-j3t} + t\, dt$$

$$e)\; y = \int_{-1}^{1} \frac{3}{\sqrt{2}} t^2 - |1 + 4j|^2\, dt$$

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Matrizes

Operações com matrizes:

a) Adição

b) Subtração

c) Multiplicação

d) Divisão pela direta

e) Divisão pela esquerda

f) Exponenciação

g) Transposta

h) Inversa

Declaração de Matrizes

- Para o Matlab, qualquer valor numérico é interpretado como uma matriz. Uma matriz é definida da seguinte forma:
  - valores numéricos são definidos entre colchetes ("[...]");
  - elementos de uma linha são separados por "," ou por espaço em branco;
  - final de uma linha é informado por ";".

escalar	>> 2 ans = 2
vetor linha ($1 \times n$)	>> [1 2 3] ans = 1 2 3
vetor coluna ($n \times 1$)	>> [1;2;3] ans = 1 2 3

matriz bidimensional ($m \times n$)	>> [1 2 3;4 5 6;7 8 9] ans = 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Matrizes

```
% a) Adição:
C=A+B

% b) Subtração:
C=A-B
```

Atenção: As regras matemáticas devem ser respeitadas. As matrizes A e B devem ser de mesma dimensão.

vicente.sousa@ct.ufrn.br

Matrizes

```
% Sejam as matrizes:
% A = [2 3 4;5 6 7]; e B = [9 8;7 6; 5 4];

% c) Multiplicação:
>> X = A*B;

% Sejam A=[1 2; 3 4];  B=[2 7; 6 3];

% d) Divisão pela direita:
>> X = B/A
% Equivalente à X*A = B

% e) Divisão pela esquerda:
>> X = A\B
% Equivalente à A*X = B
```

Atenção: As matrizes A e B devem ser quadradas.

vicente.sousa@ct.ufrn.br

Manipulação de Matrizes

```
% Seja a matriz A = [1 2;3 4];
% c) Listar somente alguns elementos
%    da matriz

% Elemento linha=1 e coluna=2
>> A(1,2)
ans =
   2

% Elementos da linha=1 e linha=2
% e somente coluna=2
>> A(1:2,2)
ans =
     2
     4
% extrair uma linha 1: A(1,:) ou A(1,1:end)
% extrair a coluna: A(:,1) ou A(1:end,1)
```

© Prof.
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

matriz_exec1.m

- Sendo A = [1 2;3 4] e B = [10 20; 30 40], calcule

1. A + B
2. A – B
3. A * B
4. Multiplique cada elemento de A por cada elemento de B

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Vamos praticar

matriz_exec2.m

Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial.
A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela tabela:

	Ferro	Madeira	Vidro	Tinta	Tijolo
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

Faça um programa que armazene os valores da tabela acima em uma matriz chamada **material** e que seja capaz de:

- Perguntar quantas casas e de qual tipo se deseja construir (usar comando **input** e armazenar no vetor **quantcasas**);
- Mostre a quantidade de material de cada tipo a ser usado no projeto total;
- O preço total do projeto de construção das casas, supondo que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 (armazenar esses preços no vetor **preco)**
- Mostre também o preço unitário de cada casa.

Matrizes

f) Exponenciação:

```
>> A = [1 2;3 4];
>> A^3

ans =

    37    54
    81   118
```

Atenção: ***A*** deve ser quadrada.

Atenção: ***A^3 é diferente de A.^3***

g) Determinante

```
>> det(A)
ans =

  -2
```

Matrizes

```
% Sejam as matrizes
% A = [1 2;3 4]; e B = [1 2;3 4; 5 6];
% h) Transposta:
>> X=B'
X =
    1     3     5
    2     4     6

% i) Inversa:
>> X=inv(A)
X =
   -2.0000    1.0000
    1.5000   -0.5000
```

Atenção: *A* deve ser quadrada.

vicente.sousa@ct.ufrn.br

Matrizes

```
% Seja a matriz A = [1 2;3 4];
% j) Autovalores e Autovetores:
>> [V,D] = eig(A)
V =   -0.8246    -0.4160
       0.5658    -0.9094

D =   -0.3723         0
            0    5.3723
```

$T(v) = \lambda v$

Autovetores

Autovalores

vicente.sousa@ct.ufrn.br

Matrizes especiais

```
% a) Matriz de uns.
% Criar uma matriz quadrada de uns:
>> X=ones(2)

X =

     1     1
     1     1

% Criar uma matriz de ordem 2 x 3 de uns:
>> X=ones(2,3)

X =

     1     1     1
     1     1     1
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Matrizes especiais

```
% b) Matriz de zeros.
% Criar uma matriz quadrada de zeros:
>> X=zeros(2)

X =

     0     0
     0     0

% Criar uma matriz de ordem 2 x 3 de zeros:
>> X=zeros(2,3)

X =

     0     0     0
     0     0     0
```

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Associação de Matrizes

```
% Sejam as matrizes
% A = [1 2;3 4]; B=[5 6;7 8];
c) Associação de matrizes
>> X=[A B]
X =

     1     2     5     6
     3     4     7     8

>> X=[A; B]
X =

     1     2
     3     4
     5     6
     7     8
```


vicente.sousa@ct.ufrn.br

Exercícios sobre Matrizes

Exercícios:
1) Determine a ordem das seguintes matrizes:
 a) X = [5 0 0 0 0 1];
 b) Y = [2; 4; 6; 10];
 c) Z = [5 3 5; 6 2 –3];
 d) K = [3 4 5 7 9 10];
 e) P = [X ; K ; X]

2) Determine a transposta de P.
3) Crie uma matriz Q quadrada de ordem 5 onde os elementos são todos iguais a um.
4) Crie uma matriz W quadrada de ordem 5 com elementos randômicos
5) Determine a inversa de W.

matriz_exec3.m

vicente.sousa@ct.ufrn.br

Exercícios sobre Matrizes

6) Determine W^4.

7) Determine $Z = W^4 . W^{-1}$

8) Liste somente a primeira linha de Z.

9) Liste a última coluna de Z.

10) Substitua todos os elementos da última coluna por 3 para a matriz Z.

11) Qual o maior e menor elemento da matriz Z. (Dica: comandos *max* e *min*)

12) Qual a razão entre o maior e menor elemento de Z.

matriz_exec3.m

vicente.sousa@ct.ufrn.br