Solution des 3 exercices masse x accélération = force avec Hamiltonien.

Le modèle est

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & u(t)\end{array}\right. \qquad \begin{array}{rcl} x_1(0) & = & x_{10} \\ x_2(0) & = & x_{20}\end{array}$$

Avec x10 =1 et x20 = 2.

Ex. 1

Le critère est

$$J = c_1 x_1^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} c_2 u^2(t)dt, \qquad c_1, c_2 > 0$$

avec c1 et c2 égales à ½.

1. Ecriture de l'Hamiltonien

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}, t) &= f_0(\mathbf{x}(t), u(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t) \\ &= \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)\end{aligned}$$

2. Minimisation de l'Hamiltonien par rapport à u

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \longrightarrow u(t) + \lambda_2(t) = 0 \longrightarrow u^\star(t) = -\lambda_2(t)$$

3. Remplacement de l'expression du contrôle optimale dans l'Hamiltonien et écriture des équation d'état et d'état adjoint

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), u^\star(t), \boldsymbol{\lambda}, t) &= \frac{1}{2}\lambda_2^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) - \lambda_2^2(t) \\ &= \lambda_1(t)x_2(t) - \frac{1}{2}\lambda_2^2(t)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcrcl}\dot{x}_1(t) & = & +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} & = & -\lambda_2(t) \\ \dot{\lambda}_1(t) & = & -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} & = & 0 \\ \dot{\lambda}_2(t) & = & -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} & = & -\lambda_1(t)\end{array}$$

4. Résolution des équation différentielles et détermination des constantes avec les conditions aux bords

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{C_3}{6}t^3 - \frac{C_4}{2}t^2 + C_2 t + C_1 \\
x_2(t) &= \frac{C_3}{2}t^2 - C_4 t + C_2 \\
\lambda_1(t) &= C_3 \\
\lambda_2(t) &= -C_3 t + C_4
\end{aligned}
$$

Condition aux bords de l'exercice 1. :

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)_{t_f}^T \longrightarrow \begin{aligned} \lambda_1(2) &= \left(\frac{\partial \frac{1}{2}x_1^2}{\partial x_1}\right)_{t=2} = x_1(2) \\ \lambda_2(2) &= \left(\frac{\partial \frac{1}{2}x_1^2}{\partial x_2}\right)_{t=2} = 0 \end{aligned}$$

Solution

$$C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = \frac{15}{11},\ C_4 = \frac{30}{11}$$

5. Expression du contrôle optimale

$$u^\star(t) = -\lambda_2(t) = \frac{15}{11}t - \frac{30}{11}$$

Ex. 2

Le critère est maintenant

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}u^2(t)dt$$

Les étapes de 1 à 3 sont les mêmes de l'exercice précédent.

4. Conditions aux bords différentes

$$x_1(0) = 1,\ x_1(0) = 2,\ x_1(2) = 1,\ x_2(2) = 0$$

Solution

$$C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 3,\ C_4 = 4$$

5. Expression du contrôle optimale

$$u^\star(t) = -\lambda_2(t) = 3t - 4$$

Ex. 3

Le critère est maintenant

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}u^2(t)dt$$

Les étapes de 1 à 3 sont les mêmes de l'exercice précédent.

4. Conditions aux bords différentes

$$x_1(0) = 1,\ x_1(0) = 2,\ x_1(2) = 1$$

$$\lambda_2(2) = \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)_{t=2} = 0$$

Solution

$$C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = \frac{3}{2},\ C_4 = 3$$

5. Expression du contrôle optimale

$$u^\star(t) = -\lambda_2(t) = 3t - \frac{3}{2}$$