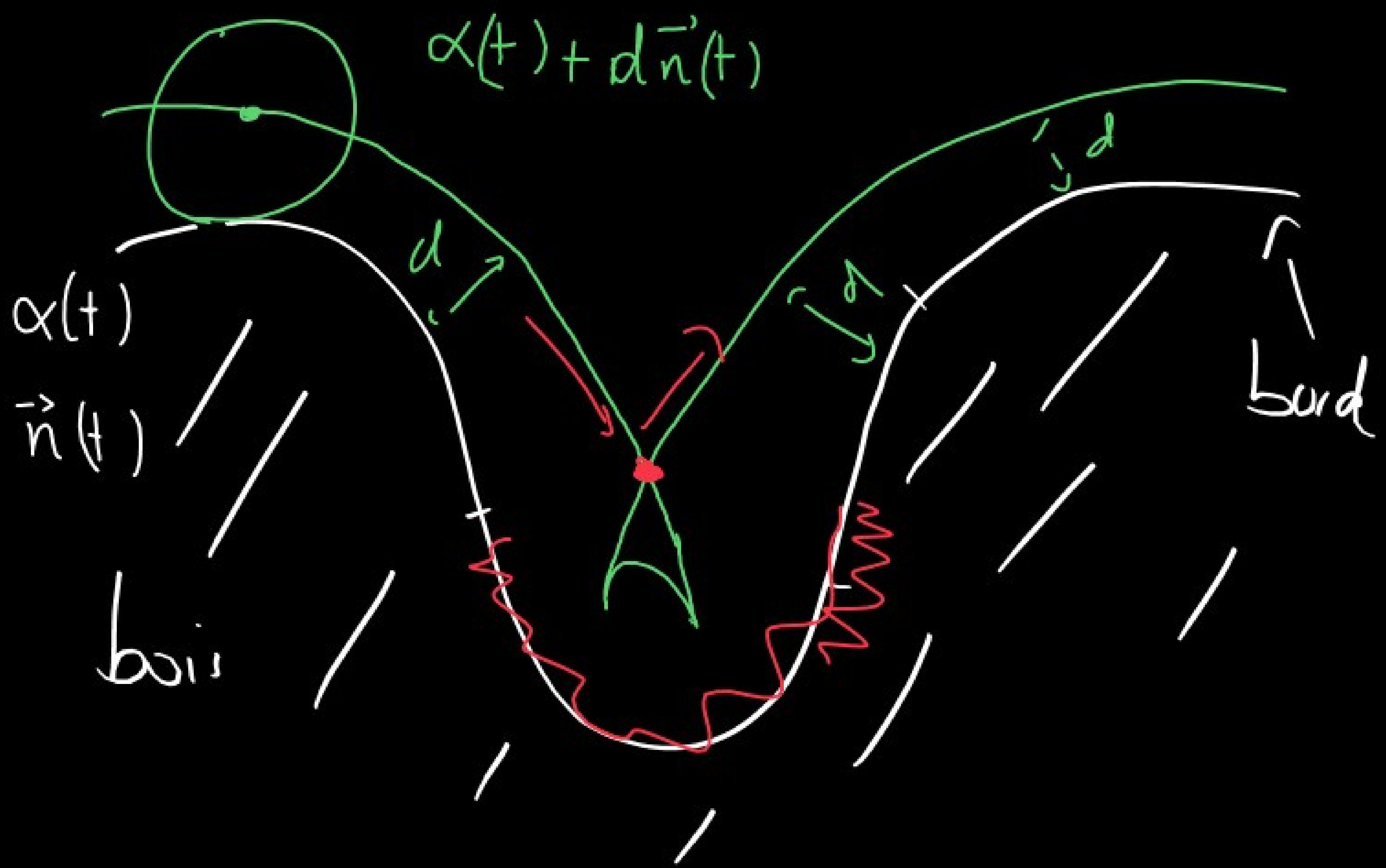
Problèmes d'intersection 2D

0) Motivation

Usinage - courbes "offset"



Ex 2 : lancer de rayons pour rendu visuel.

· Représentation des courbes

1) paramétrisations

$$\mathcal{C} : \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum P_i B_i^n(t)$$

(ou rationnelle).

2) Implicite : $\mathcal{C} : \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0 \}$

pol.

Exemple : le cercle :

1) $t \longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$

2) $x^2+y^2-1=0$

$\leadsto$ premier problème : compter le nombre d'intersection entre deux courbes.

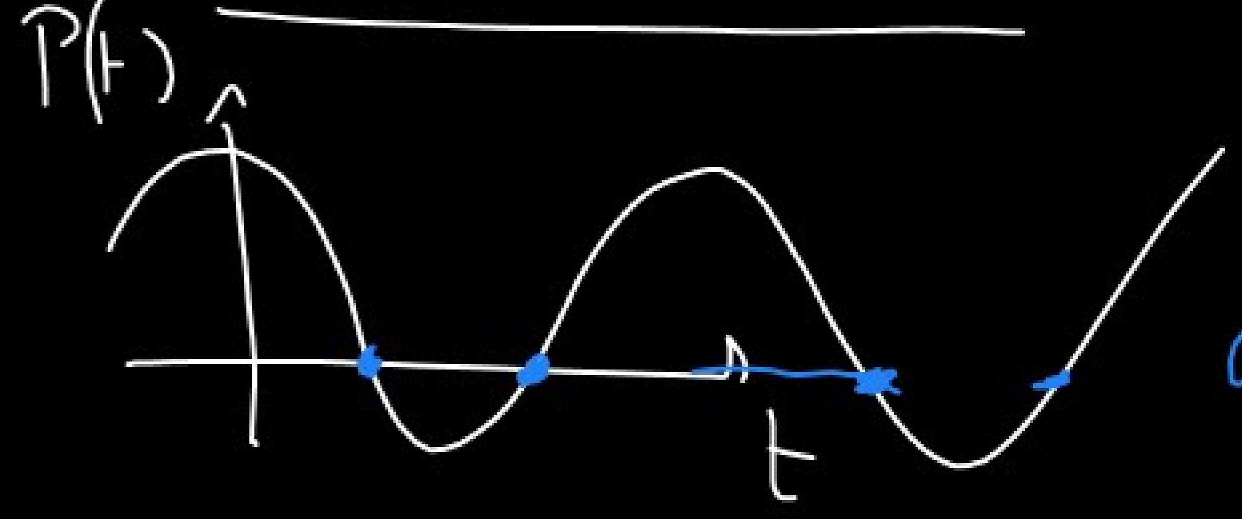
I Coordonnées homogènes (bien compter les nombre d'$\cap$).

1) THM : Soit $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ de degré n, alors $P(t)$ possède n racines, comptées avec multiplicité :

$$P(t) = \underbrace{c}_{\substack{\text{constante} \\ \neq 0}} \cdot \prod_{i=1}^{r} (t-\alpha_i)^{e_i} \qquad \sum e_i = n$$

$P(t) \leadsto$ graphe de $P(t)$

$t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ P(t) \end{pmatrix}$



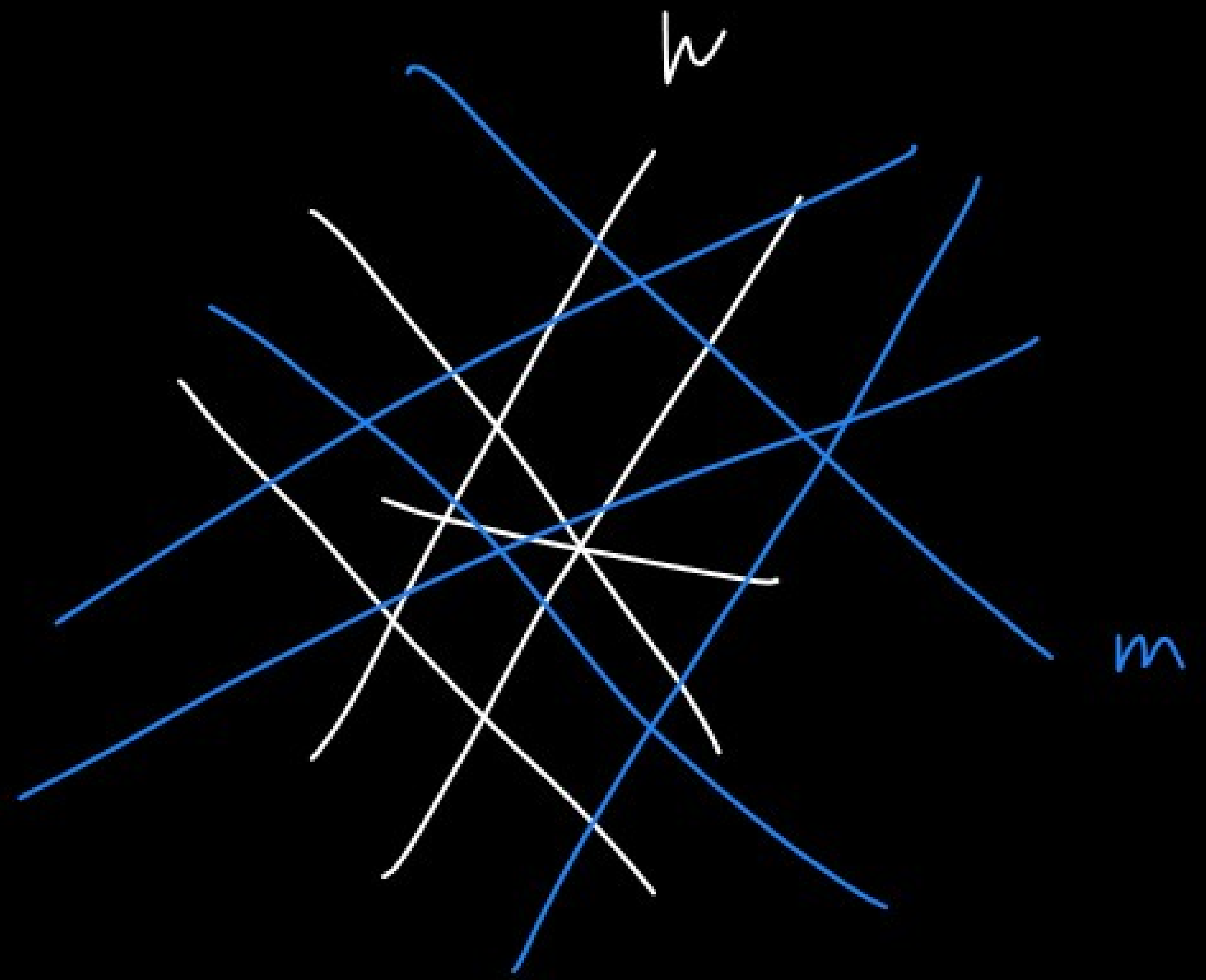
$\cap$ courbe avec une droite.

THM (Bézout 18??) . Soient

$\mathcal{C}$: $f(x,y)=0$, f de degré n et

$\mathcal{D}$: $g(x,y)=0$, g de degré m

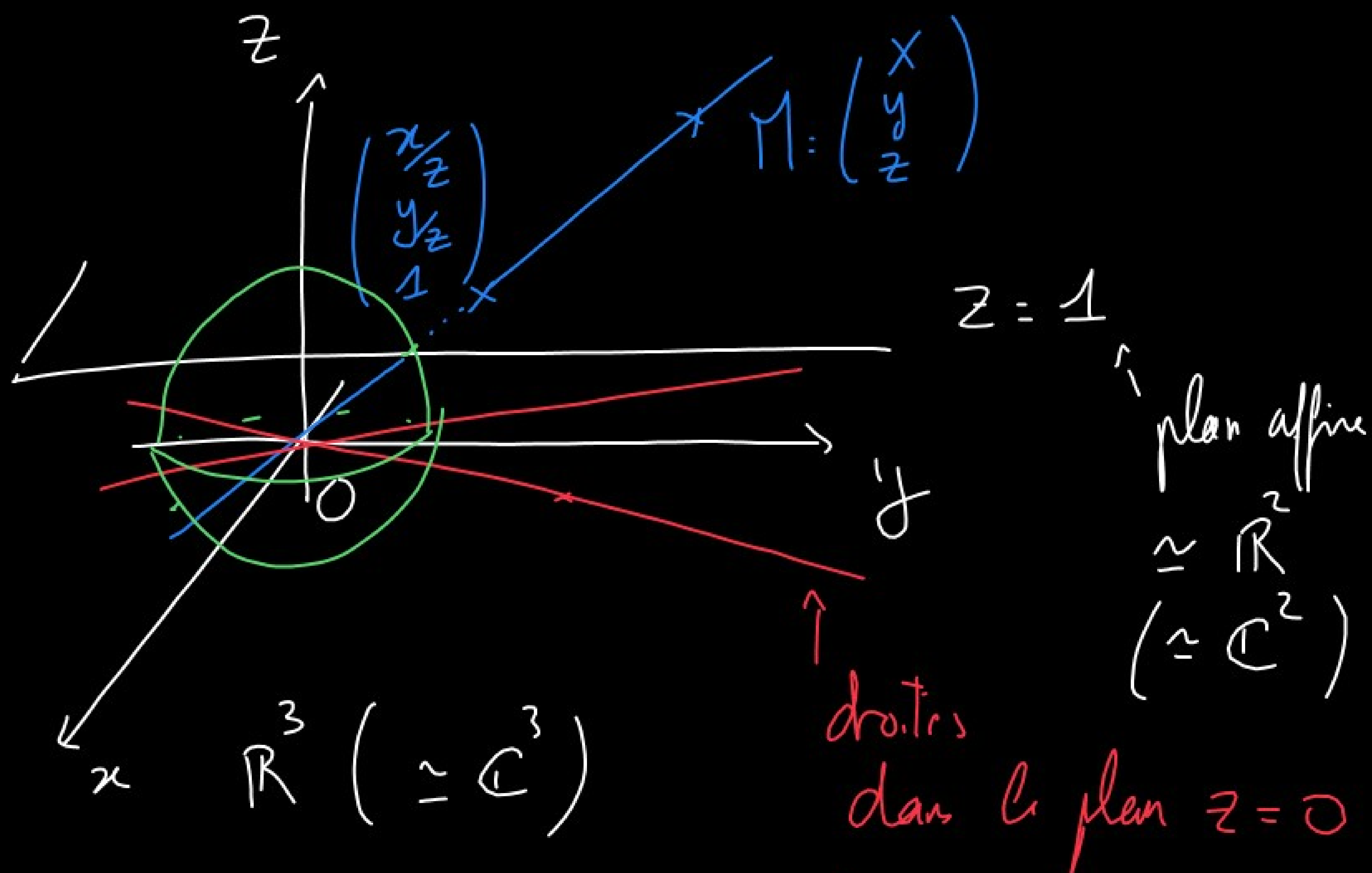
deux courbes dans le plan qui s'intersectent en un nombre fini de pts. Alors elles possèdent $m.n$ pts d'$\cap$, comptés avec multiplicité, et dans le plan projectif.

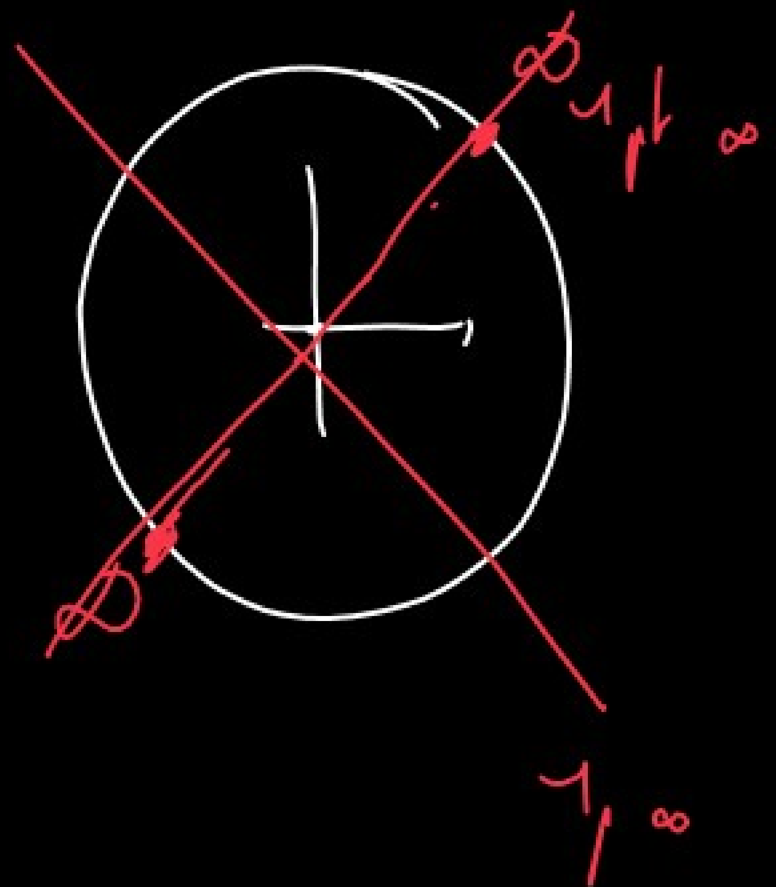


$(x-y)(x+y)$

$m.n$ pts d'$\cap$

Le plan projectif





projection centrale :

$$\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

Déf : $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \Big/ \boxed{(x,y,z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \lambda \neq 0}$

espace projectif

- Les droites bleues sont en correspondance avec $\mathbb{R}^2$
- Les droites rouges donnent des pts supplémentaires "pts à l'∞"

- un pt de l'espace projectif $\mathbb{P}^2$

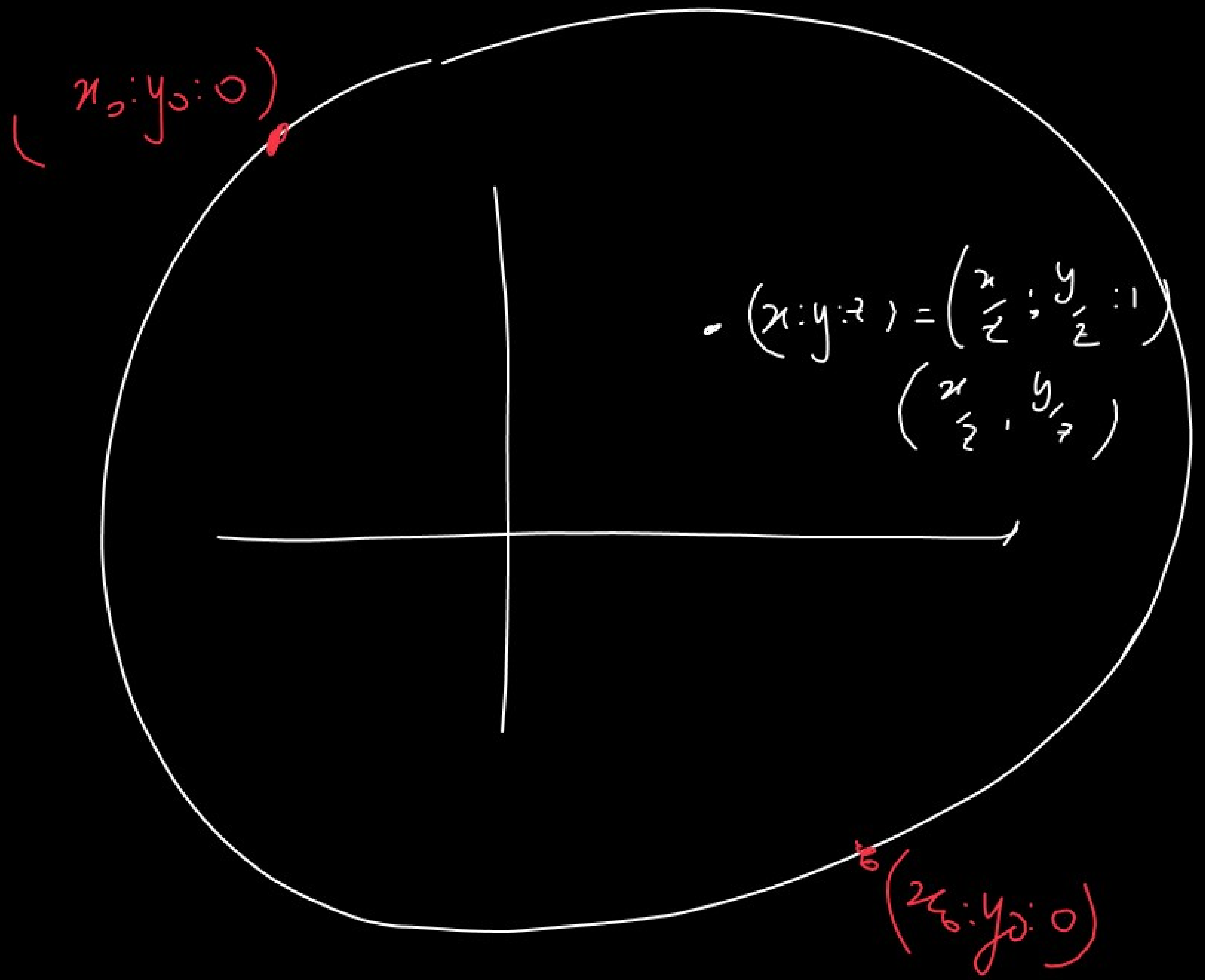
est noté $(x:y:z)$

- On a tjs $(x:y:z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z)$
- Attention $(0:0:0)$ n'existe pas.
- Si $z \neq 0$, alors

$$(x:y:z) = \left(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1\right)$$

↳ correspond au pt usuel $\left(x/z, y/z\right)$

- Si $z = 0$, alors le pt $(x:y:0)$ est un pt à l'∞.



- Fcts pol. qui s'annulent dans $\mathbb{P}^2$

Contrainte forte :

si $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ pour $(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{P}^2$

alors on doit avoir

$$F(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) = 0 \ \forall \lambda \neq 0$$

$$F(x, y, z) = \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k \leq d}} c_{i,j,k} \, x^i y^j z^k$$

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \sum c_{i,j,k} \lambda^{i+j+k} x^i y^j z^k$$

$\lambda \neq 0$

$\rightsquigarrow$ polynômes homogènes : Polynômes $F(x,y,z)$ tq les monômes avec coef. non nul ont tous le même degré :

$$F(x, y, z) = \sum_{\substack{i+j+k = d \\ i,j,k \geq 0}} c_{i,j,k} \, x^i y^j z^k$$

- Si $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, alors

$$F(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) = \lambda^d \cdot F(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$\lambda \neq 0$

Question: comment passer de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{P}^2$?

- $pt \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow (x:y:1) \in \mathbb{P}^2$
  $= (\lambda x : \lambda y : \lambda)_{\lambda \neq 0}$

- $f(x,y) = \sum_{i+j \leq d} c_{i,j} x^i y^j$

  $\wr$ homogénéisation

$$z^d f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = z^d \sum_{i+j \leq d} c_{i,j} \frac{x^i y^j}{z^{i+j}}$$

$$= \sum_{i+j \leq d} c_{ij} x^i y^j z^{d-i-j}$$

Déf: Le polynôme homogène associé à $f(x,y) = \sum_{i+j \leq d} c_{i,j} x^i y^j$ est le polynôme homogène

$$F(x,y,z) = \sum_{i+j} c_{i,j} x^i y^j z^{d-i-j}$$

Rq: $F(x,y,1) = f(x,y)$

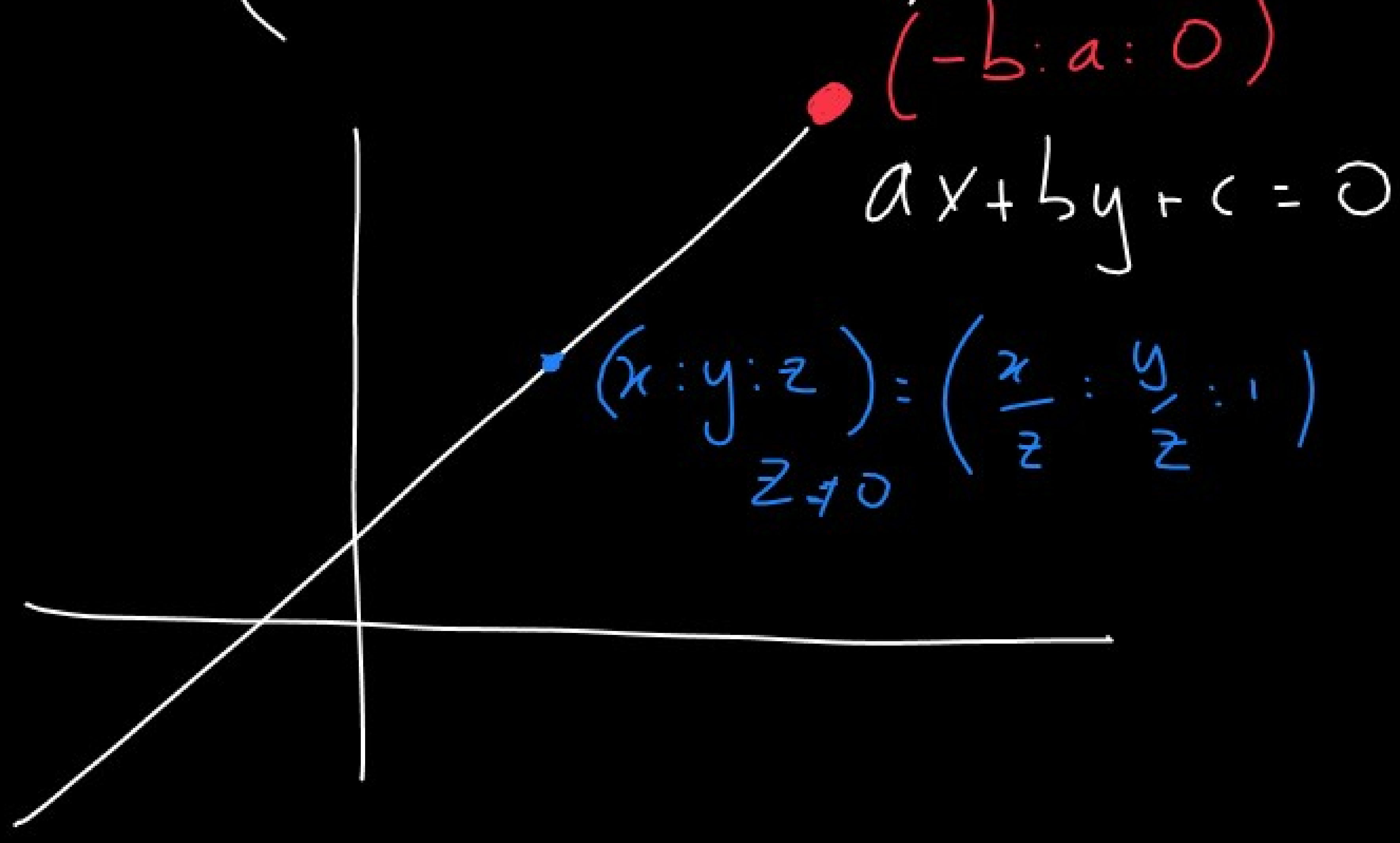
Exemples :

. Droites.

ds $\mathbb{R}^2$: $ax + by + c = 0$

ds $\mathbb{P}^2$: $ax + by + cz = 0$

$$= z\left(a \cdot \frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c\right)$$



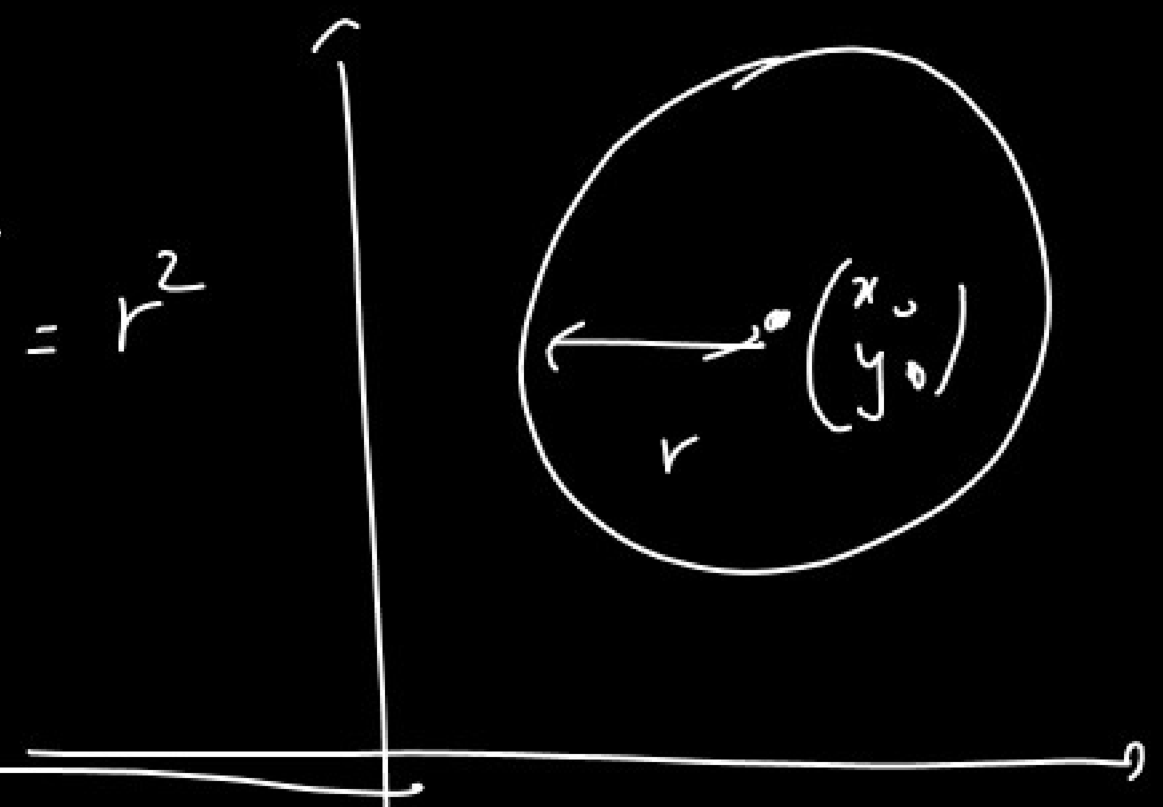
$z = 0$: $ax + by = 0$ $\quad ax = -by \quad \frac{y}{x} = \frac{a}{-b}$

$(x:y) = (-b:a)$

$(i:1:0)$ $\quad (-i:1:0)$

. Le cercle :

. ds $\mathbb{R}^2$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



. ds $\mathbb{P}^2$: $\boxed{(x - x_0 z)^2 + (y - y_0 z)^2 = r^2 z^2}$

$$z^2\left[\left(\frac{x}{z} - x_0\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - y_0\right)^2 - r^2\right]$$

$z = 0$

$\Updownarrow$

$x^2 + y^2 = 0$

$\Updownarrow$

$(\pm i : 1 : 0)$

pts cycliques

2) Intersection de 2 droites dans le plan

- Donnés : un point $P = (x : y : z)$

et une droite $\angle$: $ax + by + cz = 0$

(cas usuel : $z = 1$)

Q : $P \in \angle$? "vectoriel"

Representation :

$$P := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \angle := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$P \in \angle \iff P \cdot \angle = 0$$

- Soient $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $P_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Quelle est la droite qui passe par P_1 et P_2 ?

$$\angle = P_1 \wedge P_2$$

- Soient $L_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $L_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ deux droites.

Quel est leur pt d'intersection?

$$P := L_1 \wedge L_2$$

<u>Ex</u>: $L_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c' \end{pmatrix}$

$$L_1 \wedge L_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$