

Cours Scientific Machine Learning

Séance d'exercices du 19 janvier

Exercice 1Soit σ la fonction qui à x réel associe $\tanh(x)$.

1. Soient y et h appartenant à \mathbb{R} , $h \neq 0$, donner à l'aide d'une formule de Taylor une majoration de

$$\left| y - \frac{\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) - \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right)}{h} \right|$$

2. On note pour simplifier "σ NN" un réseau de neurones avec la fonction d'activation σ . Soient $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, montrer que la fonction qui à x associe x peut être approchée à ε près sur tout intervalle $[-M, M]$ à l'aide d'un σ NN.
3. Trouver comme dans la première question une approximation de y^2 .

Exercice 2Soit K appartenant à \mathbb{N} , montrer que

$$\|\tanh^{(K)}\|_{\infty} \leq 2^{K-1}(K+2)!$$

Exercice 3Soit la fonction signe définie pour x appartenant à \mathbb{R} par $1_{\{x>0\}} - 1_{\{x<0\}}$. Soit K appartenant à \mathbb{N} , montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \|\tanh_{\theta} - \text{signe}\|_{C^K(\mathbb{R} \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[)} = 0.$$