Cours Scientific Machine Learning

Séance d'exercices du 19 janvier

Exercice 1

Soit σ la fonction qui à x réel associe $\tanh(x)$.

1. Soient y et h appartenant à $\mathbb{R}$, $h \neq 0$, donner à l'aide d'une formule de Taylor une majoration de
$$\left| y - \frac{\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) - \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right)}{h} \right|$$
2. On note pour simplifier "σ NN" un réseau de neurones avec la fonction d'activation σ. Soient $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, montrer que la fonction qui à x associe x peut être approchée à ε près sur tout intervalle $[-M, M]$ à l'aide d'un σ NN.
3. Trouver comme dans la première question une approximation de y^2.

Exercice 2

Soit K appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que

$$\| \tanh^{(K)} \|_\infty \leq 2^{K-1}(K+2)!$$

Exercice 3

Soit la fonction signe définie pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $1_{\{x>0\}} - 1_{\{x<0\}}$. Soit K appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\theta \to +\infty} \| \tanh_\theta - signe \|_{C^K(\mathbb{R} \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[)} = 0.$$

Exercice 1

Soit σ la fonction qui à x réel associe $\tanh(x)$.

1. Soient y et h appartenant à $\mathbb{R}$, $h \neq 0$, donner à l'aide d'une formule de Taylor une majoration de

$$\left| y - \frac{\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) - \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right)}{h} \right|$$

2. On note pour simplifier "σ NN" un réseau de neurones avec la fonction d'activation σ. Soient $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, montrer que la fonction qui à x associe x peut être approchée à ε près sur tout intervalle $[-M, M]$ à l'aide d'un σ NN.

3. Trouver comme dans la première question une approximation de y^2.

1) $\left| y - \dfrac{\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) - \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right)}{h} \right|$

$$\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) = \cancelto{0}{\sigma(0)} + \frac{hy}{2}\cancelto{1}{\sigma'(0)} + \frac{h^2y^2}{2\times 4}\cancelto{0}{\sigma''(0)} + \frac{h^3y^3}{6\times 2^3}\sigma'''(c_1)$$

$$\sigma\left(-\frac{hy}{2}\right) = \cancelto{0}{\sigma(0)} - \frac{hy}{2}\cancelto{1}{\sigma'(0)} + \frac{h^2y^2}{2\times 4}\cancelto{0}{\sigma''(0)} - \frac{h^3y^3}{6\times 2^3}\sigma'''(c_2)$$

$$\frac{\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) - \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right)}{h} = y + \frac{h^2y^3}{6\times 8}\left(\sigma'''(c_1) + \sigma'''(c_2)\right)$$

$$\Rightarrow \left| y - \frac{\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) - \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right)}{h} \right| \leqslant C h^2 |y^3|$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme on a $Ch^2|y^3| \leq Ch^2M^3$
il suffit de choisir h / $Ch^2M^3 \leqslant \varepsilon$ d'où $h = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{CM^3}}$

$$\sigma\left(\frac{nhy}{2}\right) = \cancelto{0}{\sigma(0)} + \frac{nhy}{2}\cancelto{1}{\sigma'(0)} + \frac{n^2h^2y^2}{4\times 2!}\cancelto{0}{\sigma''(0)} + \frac{n^3h^3y^3}{3!\times 2^3}\sigma'''(0) + \frac{n^4h^4y^4}{2^4\times 4!}\cancelto{0}{\sigma^{(4)}(0)} + \frac{n^5h^5y^5}{2^5\times 5!}\sigma^{(5)}(c_1)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
1 \times & \sigma\left(\frac{3hy}{2}\right) = \frac{3yh}{2} + \frac{3^3h^3y^3}{2^3\times 6}\sigma'''(0) + \frac{3^5h^5y^5}{2^5\times 5!}\sigma^{(5)}(c_1) \\
-3 \times & \sigma\left(\frac{hy}{2}\right) = \frac{yh}{2} + \frac{h^3y^3}{2^3\times 6}\sigma'''(0) + \frac{h^5y^5}{2^5\times 5!}\sigma^{(5)}(c_2) \\
+3 \times & \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right) = -\frac{yh}{2} - \frac{h^3y^3}{2^3\times 6}\sigma'''(0) - \frac{h^5y^5}{2^5\times 5!}\sigma^{(5)}(c_3) \\
-1 \times & \sigma\left(\frac{-3hy}{2}\right) = -\frac{3yh}{2} - \frac{3^3h^3y^3}{2^3\times 6}\sigma'''(0) - \frac{3^5h^5y^5}{2^5\times 5!}\sigma^{(5)}(c_4)
\end{array}\right\} (*)$$

$\to \varepsilon(\kappa)$ $\underline{0}$ $\underline{\neq 0}$ reste

$(y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$
$(y-1)^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$
$(y+1)^3 - (y-1)^3 = 6y^2 + 2$.
$y^2 = \underbrace{\frac{(y+1)^3 - (y-1)^3}{6} - \frac{1}{3}}_{\text{approximation}}$.

Exercice 2

Soit K appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que

$$\| \tanh^{(K)} \|_\infty \leq 2^{K-1}(K+2)!$$

RTP
1 → $\|\tanh^{(K)}\|_\infty = P_K(\tanh)$ + degré de P_K ? $(K+1)$
2 → $P_K(x) = a_0^{(K)} + a_1^{(K)} x + \_\_\_ + a_{K+1}^{(K)} x^{K+1}$
3 → Montrer que $a_i^{(K+1)} = (i+1) a_{i+1}^{(K)} - (i-1) a_{i-1}^{(K)}$ $\quad (a_{-1}^{(K)} = a_{K+1}^{(K)} = 0)$

1 se fait par récurrence
$K=0$ $\tanh = P_0(\tanh)$ $P_0(x) = x$
hypothèse $\tanh^{(K)} = P_K(\tanh)$

$$\tanh^{(K+1)} = P_K'(\tanh)(\tanh)'$$
$$= \underbrace{P_K'(\tanh)(1-\tanh^2)}_{P_{K+1}(x) = P_K'(x)(1-x^2)}$$