# Contraintes par pénalisation

Pb : Minimiser $f(x)$ soumis à $c(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ (1)

Soit $x^*$ la solution du pb (1)

## 1) pénalisation quadratique

On remplace le pb (1) par : Minimiser $f_Q(x) = f(x) + \frac{\rho}{2}\left[c(x)\right]^2$ (2)

$\Rightarrow$ on se ramène à un pb sans contrainte !

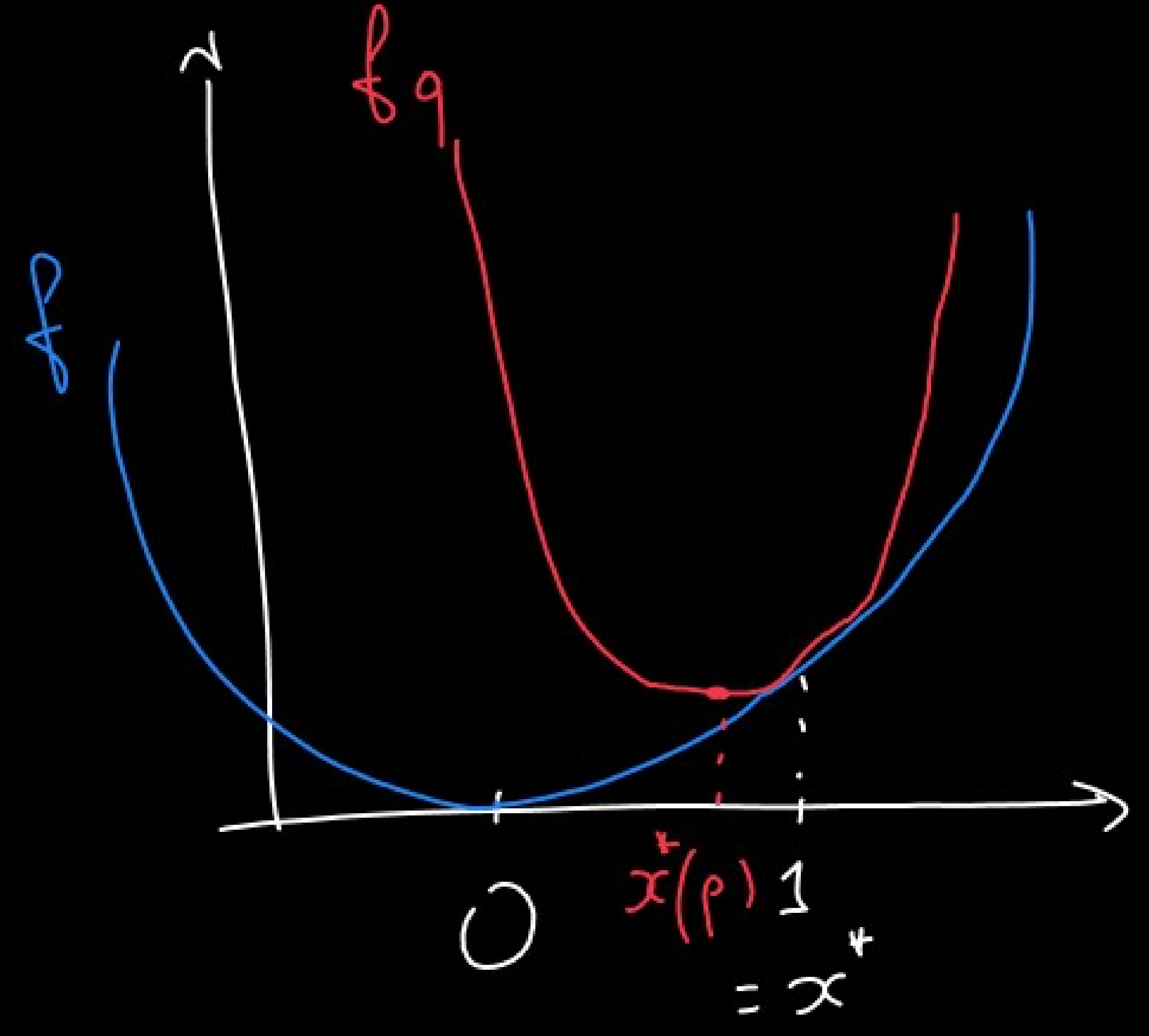
Th : soit $x^*(\rho)$ la solution du pb (2). Alors on peut montrer que $\boxed{\lim_{\rho \to \infty} x^*(\rho) = x^*}$

Ex Minimiser $f(x) = x^2$ soumis à $x = 1$

APas $f_q(x) = x^2 + \frac{\rho}{2}(x-1)^2$

$f_q'(x) = 2x + \rho(x-1)$

→ Minimum $x^*(\rho) = \frac{\rho}{\rho+2} \xrightarrow[\rho \to +\infty]{} x^*$




## Algorithme par continuation

1. initialisation $x_0, \rho_0, k = 0$
2. Minimiser $f_q(x) \longrightarrow x_k$ (quelques itérations)
3. Augmenter la pénalisation : $\rho_{k+1} = \alpha \rho_k \quad \alpha > 1$
4. Critère d'arrêt et retour à 2

Inconvénients : - $x^*(\rho)$ ne respecte pas la contrainte

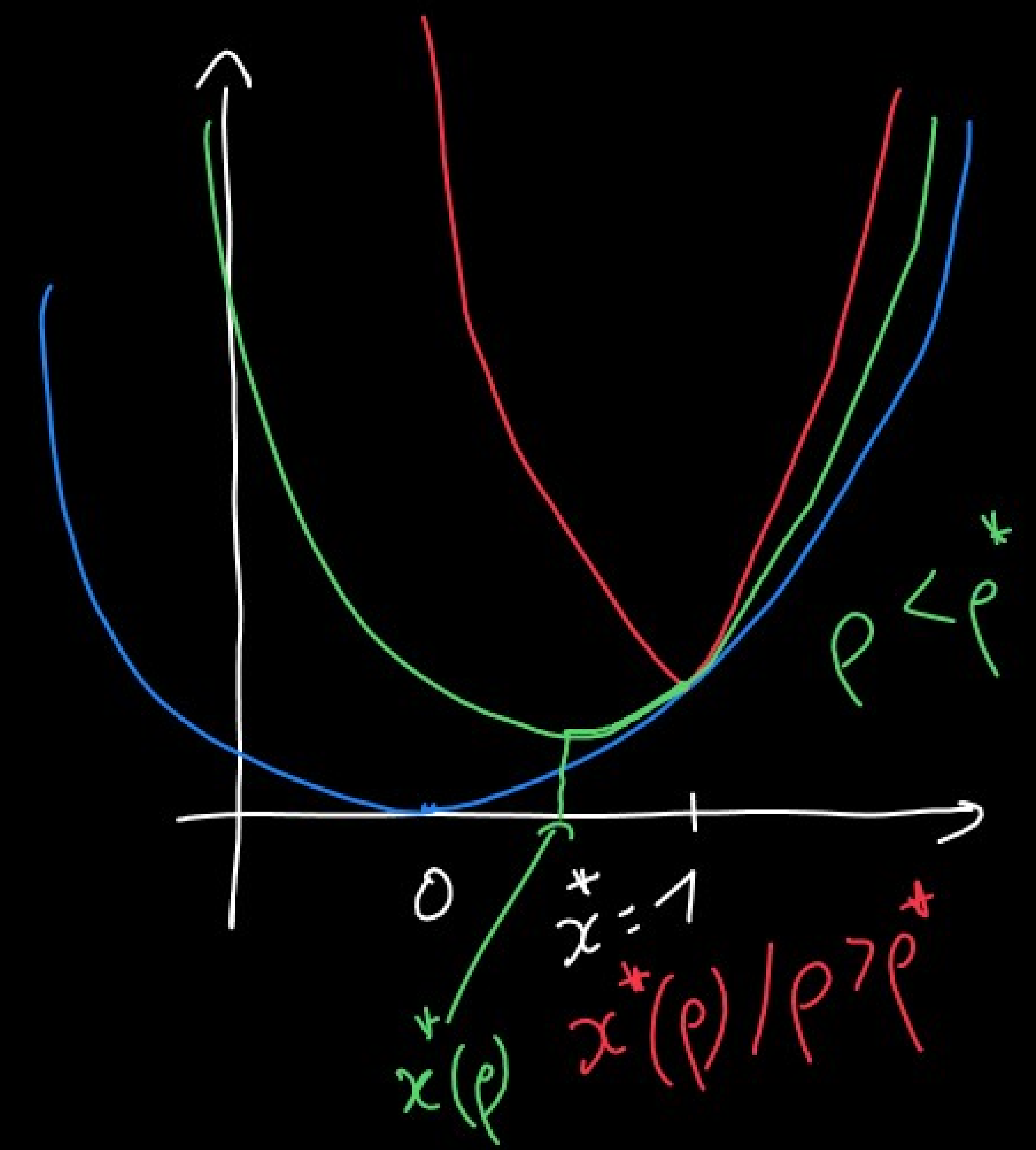
- pour $\rho \to +\infty$, pb mal conditionné

## ② Pénalisation absolue

On remplace le pb (1) par : Minimiser $f_a(x) = f(x) + \rho \, |c(x)|$ (3)

Th : Si $x^*(\rho)$ est la solution du pb (3), Alors on peut montrer que :

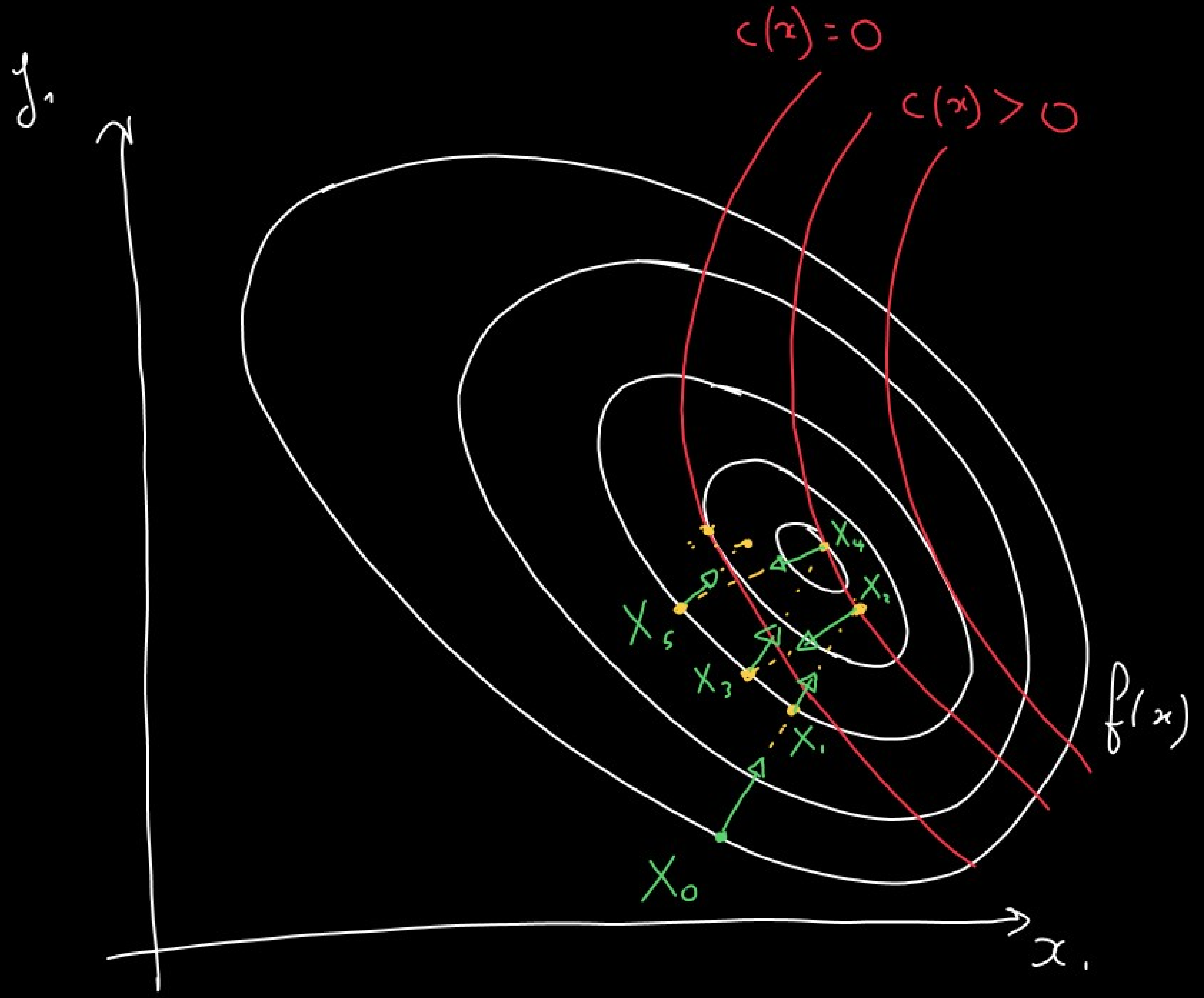
$$\boxed{\exists \rho^* : \forall \rho > \rho^* \quad x^*(\rho) = x^*}$$




Avantages : - pour $\rho > \rho^*$ contrainte respectée à convergence

- pb mieux conditionné

Inconvénient : - non différenciable en $c(x) = 0$



c(x) = 0
c(x) > 0
f(x)
X0
X1
X2
X3
X4
X5

## Reference

Numerical Optimization, Jorge Nocedal & Stephen Wright