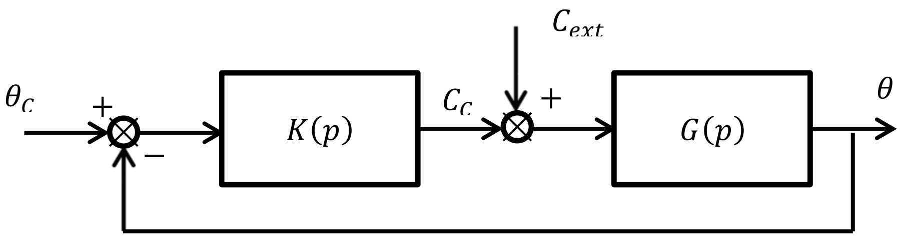
Système en boucle fermée : fonctions de transfert



1. Ecrire la fonction de transfert entre le couple externe C_{ext} de perturbation et l'angle d'attitude θ (sortie du système).

2. Ecrire la fonction de transfert entre le couple de contrôle C_C et l'angle d'attitude θ (sortie du système).

3. Ecrire la fonction de transfert entre la valeur de consigne de l'angle d'attitude θ_C et la valeur réelle de l'angle d'attitude.

4. Ecrire la fonction de transfert d'un contrôleur avec action proportionnelle, intégrale et dérivative (PID).

Solution

Tous les variables marquées sur la boucle de contrôle de la figure en haut ce sont des transformées de Laplace de signaux temporels.

1. La fonction de transfert $L_1(p)$ entre les transformées de Laplace du couple externe C_{ext} de perturbation et de l'angle d'attitude θ est la fonction de transfert qui permet d'obtenir l'influence du couple externe C_{ext} sur l'angle d'attitude θ : $L_1(p) = \theta(p)/C_{ext}(p)$.
   Le signal $-\theta(p)K(p) + C_{ext}(p)$ rentre dans le bloc avec fonction de transfert $G(p)$ pour donner en sortie $\theta(p)$:

$$\big(-\theta(p)K(p) + C_{ext}(p)\big)G(p) = \theta(p)$$

   Ce qui donne :

$$\frac{\theta(p)}{C_{ext}(p)} = L_1(p) = \frac{G(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

2. La fonction de transfert $L_2(p)$ entre les transformées de Laplace du couple de contrôle C_C et de l'angle d'attitude θ est la fonction de transfert qui permet d'obtenir

l'influence du couple de contrôle C_C sur l'angle d'attitude θ : $L_2(p) = \theta(p)/C_C(p)$. Cette fonction de transfert est la même de celle calculée au point 1. :

$$\frac{\theta(p)}{C_C(p)} = L_2(p) = L_1(p) = \frac{G(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

Ceci parce que le signal C_C ce trouve au même endroit que le signal C_{ext} dans la boucle de contrôle.

3. La fonction de transfert $L_3(p)$ entre la transformée de Laplace de la valeur de consigne de l'angle d'attitude $\theta_C(p)$ et la transformée de Laplace de la valeur réelle de l'angle d'attitude $\theta(p)$, est la fonction de transfert qui permet d'obtenir l'influence de θ_C sur θ : $L_3(p) = \theta(p)/\theta_C(p)$.
Le signal qui rentre dans la cascade du bloque $K(p)$ et $G(p)$ pour donner l'angle d'attitude $\theta(p)$ est égale à l'erreur d'attitude $\varepsilon(p) = \theta_C(p) - \theta(p)$:

$$\big(\theta_C(p) - \theta(p)\big)K(p)G(p) = \theta(p)$$

Ce qui donne

$$\frac{\theta(p)}{\theta_C(p)} = L_3(p) = \frac{K(p)G(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

4. La fonction de transfert d'un contrôleur PID a
   a. une partie P proportionnelle via un coefficient K_P à l'erreur d'attitude $\varepsilon(p) = \theta_C(p) - \theta(p)$;
   b. une partie D proportionnelle via un coefficient K_D à la dérivée de l'erreur d'attitude $p\varepsilon(p)$;
   c. une partie I proportionnelle via un coefficient K_I à l'intégrale de l'erreur d'attitude $\varepsilon(p)/p$.

   La fonction de transfert du contrôleur PID $K(p)$ est donc :

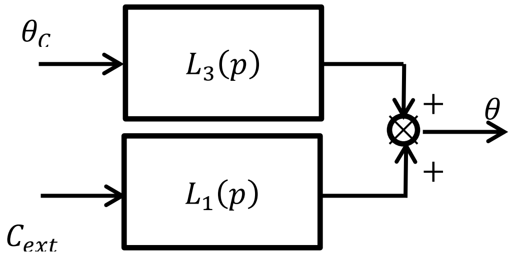
$$\frac{C_C(p)}{\varepsilon(p)} = K(p) = K_P + pK_D + \frac{K_I}{p}$$

NB : à la génération du signal de sortie $\theta(p)$ de la boucle de contrôle dessinée en haut, deux signaux d'entrée vont contribuer :
- le signal de consigne $\theta_C(p)$;
- le couple de perturbation externe C_{ext}.

En terme de fonction de transfert nous pouvons donc écrire :

$$\theta(p) = L_3(p)\theta_C(p) + L_1(p)C_{ext}(p)$$

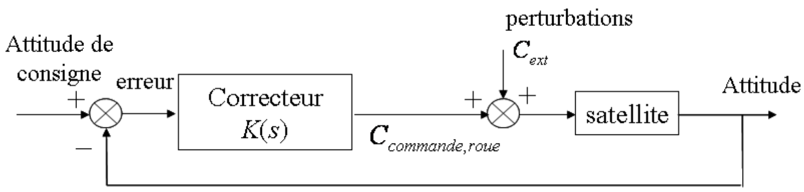
comme si le système pouvait être décomposé en deux blocs en parallèles :


θ_C
$L_3(p)$
+
θ
$L_1(p)$
+
C_{ext}

Loi de contrôle de l'attitude : le PID

On considère un satellite placé sur une orbite circulaire à 800km d'altitude, et dont les inerties principales sont $I_X = 420\text{kg.m}^2$, $I_Y = 200\text{kg.m}^2$, $I_Z = 615\text{kg.m}^2$. Le contrôle d'attitude est de type stabilisé trois axes. On suppose que les hypothèses permettant de découpler la dynamique du satellite axe par axe sont satisfaites. On étudie la stabilisation de l'axe Y du satellite.

On considère la boucle de contrôle représentée sur la figure ci-dessous.



1. Ecrire la fonction de transfert de la dynamique de l'axe Y du satellite (entrée couple, sortie position angulaire) sous les deux hypothèses suivantes

- la fonction de transfert du senseur égale à 1 ;
- la fonction de transfert du senseur à un pôle en $-a=-1$ rad/sec (a = constante de temps du senseur).

2. La dynamique du satellite est-elle stable si elle n'est pas contrôlée ? Que se passe-t-il si elle est soumise à une perturbation constante selon l'axe Y d'amplitude 1Nm ?

3. **Correcteur Proportionnel** :
On suppose que le contrôleur est un simple gain constant $K(s)=K_1>0$.
3.a. Ecrire la fonction de transfert de la boucle fermée entre l'entrée « consigne » et la sortie « attitude mesurée» (attitude en sortie du senseur).
3.b. Le système bouclé est-il stable ? Quelle est l'allure de l'attitude en réponse à une consigne impulsionnelle ?

4. **Correcteur Proportionnel/Dérivée :**
On suppose que le contrôleur a la fonction de transfert suivante : $K(s) = K_1 + K_2.s$ ($K_2>0$)
4.a. Ecrire la fonction de transfert de la boucle fermée entre l'entrée « consigne » et la sortie « attitude ».
4.b. Le système bouclé est-il stable ?
4.c. On souhaite que le système bouclé réponde comme une fonction de transfert du second ordre de pulsation ω et d'amortissement ξ. Comment les gains du contrôleur K_1 et K_2 doivent-ils être choisis pour placer les pôles du système en boucle fermée?
4.d. Quelle est l'allure de l'attitude en réponse à une consigne impulsionnelle ?
4.e. A l'aide du théorème de la valeur finale, calculer l'erreur d'attitude vis-à-vis d'un échelon de consigne.
4.f. A l'aide du théorème de la valeur finale, calculer l'erreur d'attitude vis-à-vis d'un échelon de perturbation. Proposer une solution permettant d'annuler cette erreur.

Note : *Théorème de la valeur finale.* La limite pour t qui tends vers l'infini d'un signal temporelle est égale à la limite dans le domaine des fréquence pour s qui tends vers zéro de la transformé de Laplace de la dérivé du signal : $\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \to 0} s\varepsilon(s)$

Solution

Avec un correcteur PID, la variable de contrôle est générée comme la somme de 3 contributions :

- une contribution proportionnelle à l'erreur de la variable sous contrôle ;
- une contribution proportionnelle à l'intégral de cette erreur (à sa valeur moyenne) et nécessaire pour imposer que l'allure de cette erreur dans le temps tend vers zéro face à des signales de référence et de bruits additifs constants;
- une contribution proportionnelle à la dérivé de l'erreur pour anticiper l'allure de l'erreur dans les instants futurs.

Dans le domaine temporel nous avons :

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t0}^{t} e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

Si on passe à la fonction de transfert entre le signal de contrôle $U(s)$ et l'erreur de la variable sous contrôle $E(s)$ (différence entre valeur de consigne et valeur mesurée de la variable qu'on veut contrôler) :

$$\frac{U(s)}{E(s)} = R_{PID}(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} = K_P \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s}$$

avec $T_I = K_P / K_I$ (temps intégral) et $T_D = K_D / K_P$ (temps dérivatif).
Dans le cas spécifique du contrôle de l'angle d'attitude θ, nous avons :

$$U(s) = C_C(s) \text{ et } E(s) = \theta_C(s) - \theta(s)$$

Dans la réalité (pour la réalisation pratique de ce contrôleur) l'action dérivative ne peut pas être pure. La fonction de transfert de la partie dérivative est

$$R_D(s) = \frac{K_P T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s}$$

avec des valeurs typiques de N égaux à $5 \div 20$, pour que le pole à $s = -N/T_D$ soit au dehors de la bande de fréquence du contrôleur.

Solution du point 1.a (capteur avec fonction de transfert 1) :

$$G(s) = \frac{1}{J_y s^2}$$

Solution du point 1.b (capteur avec fonction de transfert $1/(s+a)$) :

$$G(s) = \frac{1}{J_y (s + a) s^2}$$

Réponse à la question 2 : regarder la réponse temporelle d'un système avec deux pôles coïncidents en zéro (planche 17 de la Partie 1c du cour).

Solution du point 3.a :

$$L(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

Avec $K(s) = K_1$ et $G(s) = 1/(J_y s^2)$ on obtient

$$L(s) = \frac{K_1/(J_y s^2)}{1 + K_1/(J_y s^2)} = \frac{1}{1 + J_y/K_1 s^2}$$

Réponse à la question 3.b : avec $K_1 > 0$ et $J_y > 0$ le système à deux pôles imaginaires pures. Voir la planche 17 de la Partie 1c du cour. La réponse présente une réponse oscillatoire permanente.
En général : la réponse impulsionnelle d'un système (quand l'entrée du système est un delta de Dirac dans le temps et donc une constante dans le domaine des fréquences) avec seulement un couple de pôles complexes et conjugués écrits dans la forme

$$-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

est la suivante

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n t\sqrt{1 - \xi^2}\right)$$

Dans le point 3.a, nous sommes bien évidemment dans le cas $\xi = 0$ et $\omega_n = \sqrt{K_1/J_y}$.

Solution du point 4a. :

$$L(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

Avec $K(s) = K_1 + K_2 s$ et $G(s) = 1/(J_y s^2)$ on obtient

$$L(s) = \frac{K_1 + K_2 s}{J_y s^2 + K_2 s + K_1}$$

Réponse à la question 4.b, 4.c, 4.d : calculer et analyser les pôles du systèmes en boucle fermée qu'on vient d'écrire pour déterminer la stabilité du système sur la base du signe de la partie réelle des pôles. Les pôles sont :

$$s_{1,2} = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4J_y K_1}}{2J_y}$$

Réfléchir aux signes et aux valeurs des constantes K_2, K_1 et J_y pour placer les pôles dans le plans des nombre complexes et s'inspirer de la planche 17 de la Partie 1c du cour pour déterminer la forme des réponses impulsionnelles du système.

La forme canonique d'un dénominateur de fonction de transfert avec deux pôles complexes et conjugués de pulsation naturelle ω_n et amortissement ξ est la suivante

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

en sorte à donner un couple de pôles complexes et conjugués écrits dans la forme

$$-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Ce qui donne, dans notre cas

$$\omega_n^2 = \frac{K_1}{J_y}$$

et

$$2\xi\omega_n = \frac{K_2}{J_y}$$

Solution point 4.e : la fonction de transfert d'un échelon est $1/s$; la fonction de transfert entre attitude de consigne θ_C et attitude θ est

$$\frac{\theta(s)}{\theta_C(s)} = L(s) = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)}$$

La fonction de transfert entre attitude de consigne θ_C et erreur d'attitude $\theta_C - \theta$ est

$$\frac{\theta_C(s) - \theta(s)}{\theta_C(s)} = 1 - L(s)$$

Vérifier !
Appliquer en suite le théorème de la valeur finale en sachant que la transformée de Laplace d'un échelon est égale à $1/s$:

$$\theta_C - \theta|_{\text{à } l'infini} = \lim_{s\to 0} s\left(1 - \frac{K_1 + K_2 s}{J_y s^2 + K_2 s + K_1}\right)\frac{1}{s} = 1 - 1 = 0$$

Solution point 4.f : la fonction de transfert d'un échelon est $1/s$; la fonction de transfert entre le couple de perturbation C_{ext} et l'attitude θ est

$$\frac{\theta(s)}{C_{ext}(s)} = \frac{G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{L(s)}{K(s)}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale avec un échelon de perturbation on a

$$\theta|_{\text{à } l'infini} = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{\frac{1}{J_y s^2}}{1 + \frac{K_2 s + K_1}{J_y s^2}}\right)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{J_y s^2 + K_2 s + K_1}\right) = \frac{1}{K_1}$$

Ce qui veut dire que l'angle d'attitude « sens » la perturbation, même si atténuée par le gain du contrôleur K_1.

Essayer avec une action intégrale dans le contrôleur :

$$K(s) = \frac{K_3}{s} + K_2 s + K_1$$

Le théorème de la valeur finale donne alors

$$\theta|_{\text{à } l'infini} = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{\frac{1}{J_y s^2}}{1 + \frac{\frac{K_3}{s} + K_2 s + K_1}{J_y s^2}}\right)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s}{J_y s^3 + K_3 + K_2 s^2 + K_1 s}\right) = 0$$

La valeur finie de perturbation n'impacte pas la valeur de sortie de l'angle d'attitude. Il a été nécessaire introduire une action intégrale dans le contrôleur.

Si on veut réfléchir en terme d'erreur d'attitude, comme demande la question 4.f, la fonction de transfert entre C_{ext} et l'erreur d'attitude $E = \theta_C - \theta$ est la suivante

$$\frac{E(s)}{C_{ext}(s)} = \frac{-G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

car

$$E(s) = -\big(E(s)K(s) + C_{ext}(s)\big)G(s)$$

(regarder la figure de la boucle de contrôle). A part le signe, l'analyse via le théorème de la valeur finale est la même di celle qu'on vient d'exposer.