Cours Scientific Machine Learning

Séance d'exercices du 1er décembre

Exercice 1

Soit f une fonction appartenant à $C^2([0,1])$

1. Soit N appartenant à $\mathbb{N}^*$, soient les points $x_j = j/N$, $0 \leq j \leq N$, on introduit $\hat{f}_N$ l'interpolant linéaire par morceaux de f aux points précédents. Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\|f - \hat{f}_N\|_\infty \leq C \frac{\|f"\|_\infty}{N^2}.$$

2. Que donne ce résultat pour la fonction qui à x associe x^2 sur $[0,1]$.

Exercice 2

Soit σ la fonction qui à x associe $\max(x,0)$, on considère la fonction g définie dans le cours que l'on prolonge par 0 en dehors de $[0,1]$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$g(x) = 2\sigma(x) - 4\sigma\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\sigma(x-1).$$

2. Montrer de manière générale que toute fonction linéaire par morceaux sur $[0,1]$ s'écrit à une constante près comme une somme de fonctions σ.

Exercice 3

Calculer $g \circ g$.

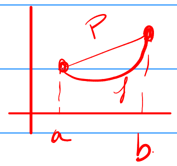
Exercice 1

Soit f une fonction appartenant à $C^2([0,1])$

1. Soit N appartenant à $\mathbb{N}^*$, soient les points $x_j = j/N$, $0 \leq j \leq N$, on introduit $\hat{f}_N$ l'interpolant linéaire par morceaux de f aux points précédents. Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\|f - \hat{f}_N\|_\infty \leq C \frac{\|f"\|_\infty}{N^2}.$$

2. Que donne ce résultat pour la fonction qui à x associe x^2 sur $[0,1]$.

Note: 

$\|f(x) - p(x)\|_\infty$

$x \neq a, b$ $\quad t \longrightarrow W(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)(x-b)}(t-a)(t-b)$

Calculer w'' et utiliser 2 fois le théorème de Rolle

car $w(a) = w(b) = W(x) = 0$

1) $x_j = j/N$; $0 \leq j \leq N$

let $W(t) = f(t) - \hat{f}_N(t) - \frac{f(x) - \hat{f}_N(x)}{x(x-1)} t(t-1)$

$W'(t) = f'(t) - \underbrace{\hat{f}_N'(t)}_{cst} - \frac{f(x) - \hat{f}_N(x)}{x(x-1)}(t-1) - \frac{f(x) - \hat{f}_N(x)}{x(x-1)} t.$

$W''(t) = f''(t) - 2\frac{f(x) - \hat{f}_N(x)}{x(x-1)}$

$W(0) = f(0) - \hat{f}_N(0) - \frac{f(x) - \hat{f}_N(x)}{x(x-1)} \times 0$

$= f(0) - \hat{f}_N(0) = 0$

$W(1) = f(1) - \hat{f}_N(1) = 0.$

$W(x) = f(x) - \hat{f}_N(x) - \frac{f(x) - \hat{f}_N(x)}{\cancel{x(x-1)}} \cancel{x(x-1)}.$

$= 0$

Rolles theorem $[0, x]$ | $[x, 1]$.

$\Rightarrow \exists c_1 \in [0, x] / W'(c_1) = 0$ | $\Rightarrow \exists c_2 \in [x, 1] / W'(c_2) = 0$

$$W''(t) = f''(t) - 2\frac{f(x) - \hat{f}_N}{x(x-1)}$$

→ Correction

On remarque que W est de classe C^2 sur $[a,b]$ et satisfait $W(a) = W(b) = W(x) = 0$
D'après le théorème de Rolle il existe $\xi \in]a,b[$ / $W''(\xi) = 0$, et on a.

$$W'(t) = f'(t) - p'(t) - \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)(x-b)}(2t - (a+b)).$$

$$W''(t) = f''(t) - \cancel{p''(t)} - 2\frac{f(x) - p(x)}{(x-a)(x-b)}$$

On a $W''(\xi) = f''(\xi) - 2\dfrac{f(x) - p(x)}{(x-a)(x-b)} = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{f''(\xi)}{2}$$

$$W(t) = f(t) - p(t) - \frac{f''(\xi)}{2}(t-a)(t-b)$$

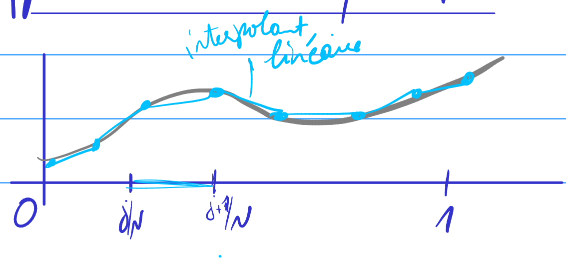
we have $W(x) = f(x) - p(x) - \dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) = 0$

$$\Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{|f''(\xi)|}{2}|x-a||x-b| \leq \sup_{[a,b]} \frac{|f''(y)|}{2}|x-a||x-b|$$

def C^2

Application numérique pour l'exo:



$$\|f - \hat{f}_N\|_\infty \leq \sup_{y \in [0,1]} \frac{|f''(y)|}{2} |i/N - i+1/N|^2$$

$$= \frac{1}{2N^2} \sup_{y \in [0,1]} |f''(y)|.$$

2) pour $x \longmapsto x^2$ $\underline{\|f - \hat{f}_N\|_\infty \leq \frac{1}{2N^2}} \times 2 = \frac{1}{N^2}$

Exercice 2

Soit σ la fonction qui à x associe $\max(x, 0)$, on considère la fonction g définie dans le cours que l'on prolonge par 0 en dehors de $[0, 1]$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$g(x) = 2\sigma(x) - 4\sigma\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\sigma(x - 1).$$

2. Montrer de manière générale que toute fonction linéaire par morceaux sur $[0, 1]$ s'écrit à une constante près comme une somme de fonctions σ.

$\sigma : x \longmapsto \max(x, 0)$ $\quad g(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$

1) RTP $g(x) = 2\sigma(x) - 4\sigma\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\sigma(x-1)$.

correcte

pour $x < 0 \in \mathbb{R}$.

$g(x) = 2 \times 0 - 4 \times 0 + 2 \times 0$

pour $0 < x \leq 1/2$.

$g(x) = 2x - 4 \times 0 + 2 \times 0$

pour $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

$g(x) = 2x - 4(x - 1/2)$

$= 2x - 4x + 2$.

$= 2(1-x)$.

pour $x > 1$.

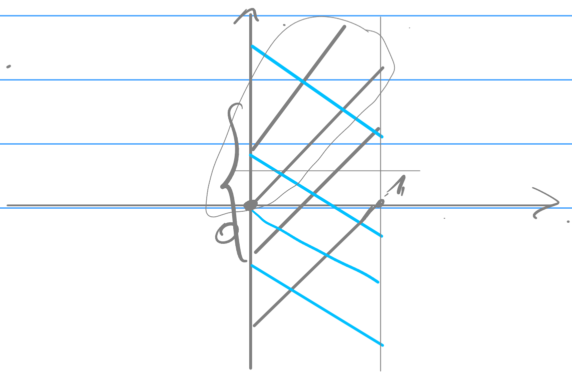
$g(x) = \cancel{2x} - \cancel{4x} + \cancel{2} + \cancel{2x} - \cancel{2}$

$= 0$

$\Rightarrow$ ✓

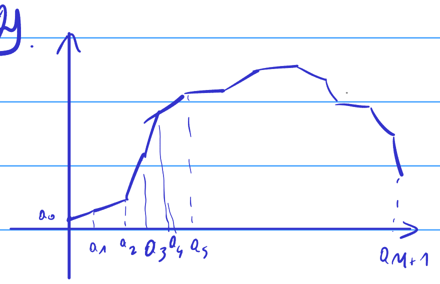
2) RTP if f piecewise lineare over $[0,1] \Rightarrow f(x) = \sum \sigma(x) + C$

$f(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1 & 0 \leq x < \beta_1 \\ a_2 x + b_2 & \beta_1 \leq x \leq \beta_2 \\ a_N x + b_N & \beta_{N-1} < x \leq 1 \end{cases}$



$\sigma(ax + b) = \begin{cases} ax + b & \text{if } [0,1] \\ 0 & \end{cases}$

2).



Soit $M > 1$ et $a_1, \dots, a_M$ les points pour lesquels $f'(a_i^+) = f'(a_i^-)$

Indication ; chercher des coefficients tel que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \sigma(x - a_i) + h + \alpha_0 \sigma(\boxed{a_1 - x})$$

$$f(a_1) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \sigma(a_1 - a_i) + h + \alpha_0 \sigma(a_1 - a_1) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i (0) + h + \alpha_0 \, 0$$
$$= h = f(a_1)$$

$$f(a_2) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \sigma(a_2 - a_i) + h + \alpha_0 \sigma(a_1 - a_2)$$
$$= \alpha_1 \sigma(a_2 - a_1) + h \implies \alpha_1 = \frac{f(a_2) - h}{\alpha_0 \sigma(a_2 - a_1)}$$

continuer ; il reste à trouver le α_0

??

$$f(a_3) = \alpha_1 \sigma(a_3 - a_1) + \alpha_2 \sigma(a_3 - a_2) + h + \cancel{\alpha_0 \sigma(a_1 - a_3)}^{0}$$

$$f(a_3) - h - \alpha_1 \sigma(a_3 - a_1) = \alpha_2 \sigma(a_3 - a_2)$$

$$\frac{f(a_3) - h - \alpha_1 \sigma(a_3 - a_1)}{\sigma(a_3 - a_2)} = \alpha_2$$

$$f(a_4) = \alpha_1 \sigma(a_4 - a_1) + \alpha_2 \sigma(a_4 - a_2) + \alpha_3 \sigma(a_4 - a_3) + h + \cancel{\alpha_0 \sigma(a_1 - a_4)}^{0}$$

$$\frac{f(a_4) - h - \alpha_1 \sigma(a_4 - a_1) - \alpha_2 \sigma(a_4 - a_2)}{\sigma(a_4 - a_3)} = \alpha_3.$$

$$\implies \boxed{\alpha_N = \frac{f(a_N) - h - \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i \sigma(a_N - a_i)}{\sigma(a_N - a_{N-1})}}$$

α_0??

Ex 03. $g(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$

Calculer $g \circ g$.

$g(g(x))$

pour $x < 0$ $g(x) = 0 \Rightarrow g(g(x)) = g(0) = 0$

pour $0 \leq x \leq 1/2$ $g(x) = 2x \rightarrow 0 \leq 2x \leq 1$

donc pour $0 \leq x \leq 1/4 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 1/2$

$g(g(x)) = g(2x) = \boxed{4x}$

pour $1/4 < x \leq 1/2 \Rightarrow 1/2 < 2x \leq 1$

$\Rightarrow \boxed{g(2x) = 2(1-2x)}$

pour $1/2 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) = 2(1-x)$

$\longrightarrow 0 \leq 2(1-x) < 1.$

pour $1/2 < x \leq 3/4 \rightarrow 1 - 3/4 \leq 1 - x < 1 - 1/2$

$1/2 \leq 2(1-x) < 1.$

$\Rightarrow g(g(x)) = g(2(1-x))$

$= 2[1 - (2(1-x))]$

$= 2(1 - 2 + 2x).$

$= \boxed{2(-1 + 2x)}$

pour $3/4 < x \leq 1. \longrightarrow 0 \leq 1-x < 1/4.$

$0 \leq 2(1-x) < 1/2$

$\Rightarrow \boxed{g(2(1-x)) = 4(1-x)}$

Théorèmes:

Rolle's theorem:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont func over $[a,b]$, differentiable over $]a,b[$ / $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in]a,b[$ /
$$f'(c) = 0$$