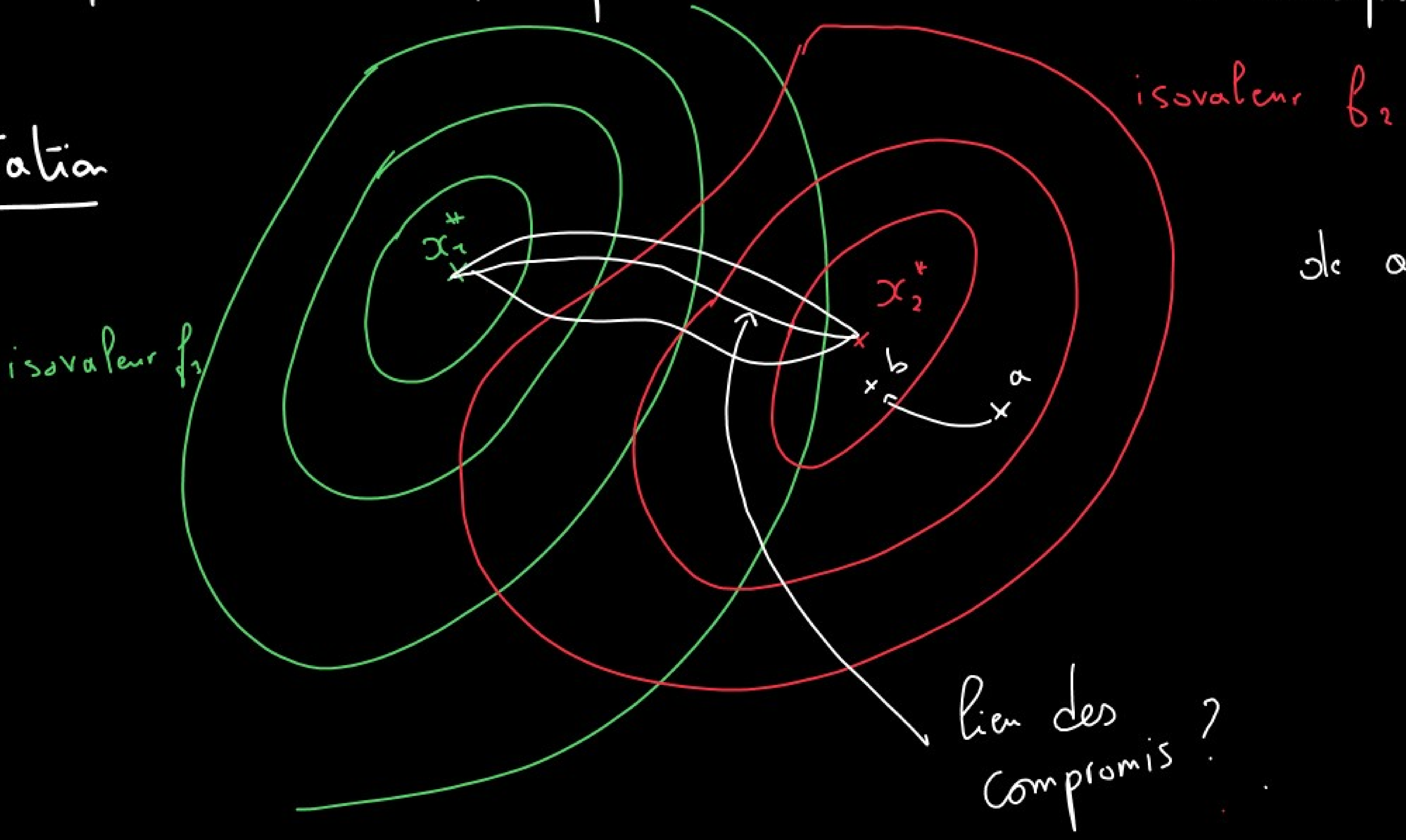
Optimisation Multi-critère

Motivation : prendre en compte plusieurs critères lors de la conception (optimale)

Interprétation



de a vers b : on améliore f_1 et f_2

① Optimalité au sens de Pareto

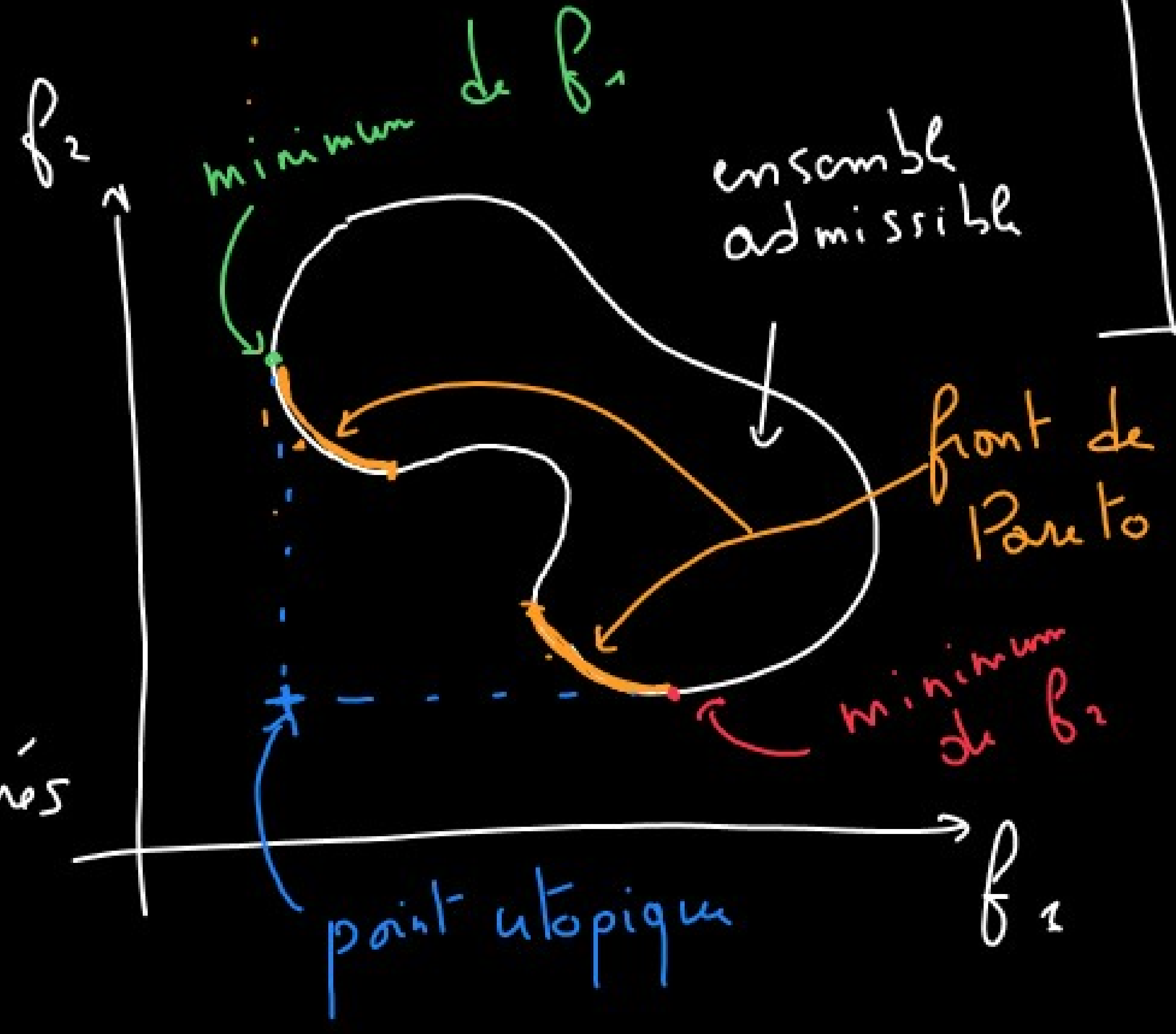
Définition : dominance

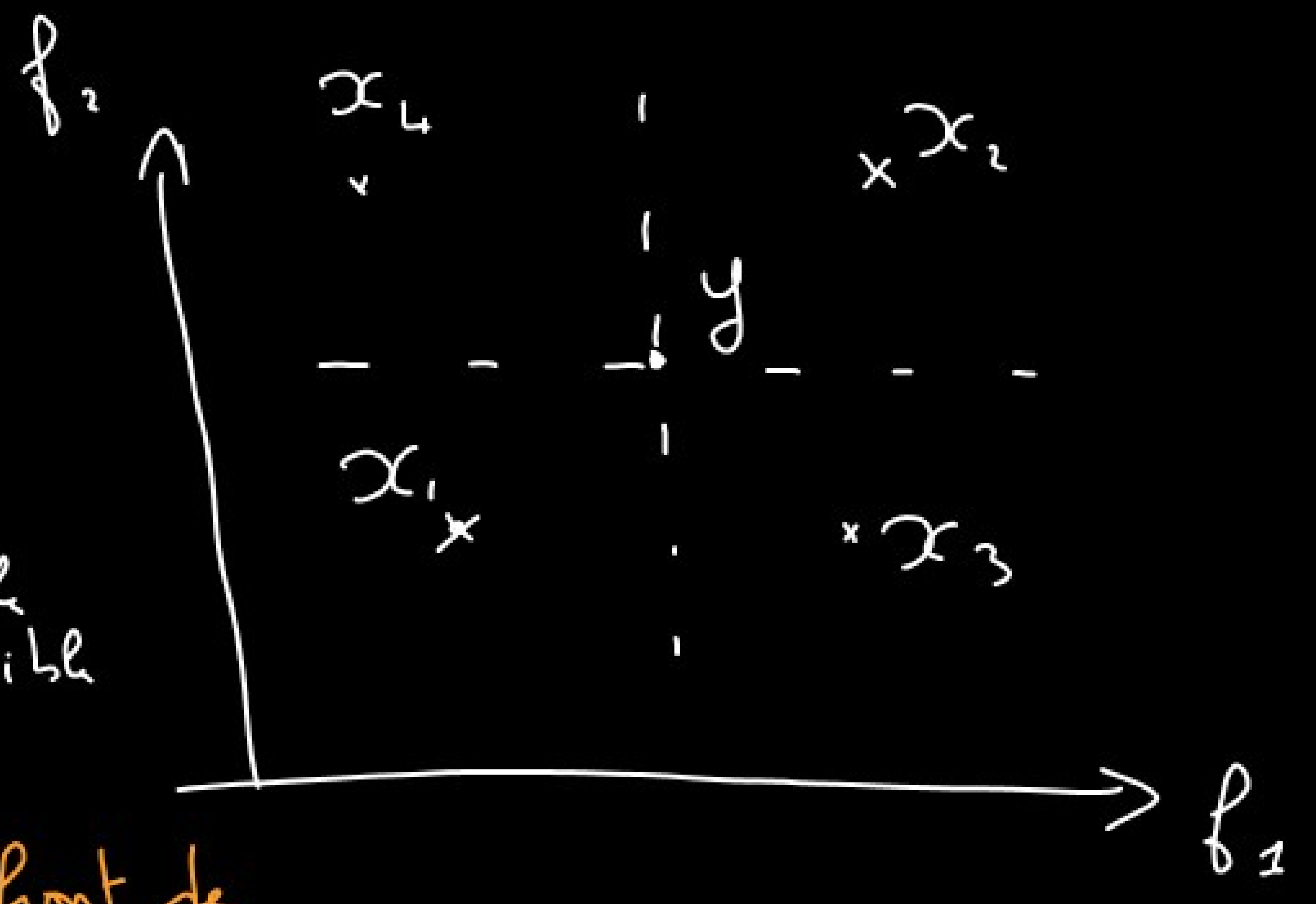
$x \in \mathbb{R}^n$ domine $y \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \cdot \ f_i(x) \leqslant f_i(y) \quad \forall i \\ \cdot \ \exists j \ / \ f_i(x) < f_j(y) \end{cases}$$

Définition : front de Pareto

c'est l'ensemble des points non dominés





x_1 domine y

x_2 est dominé par y

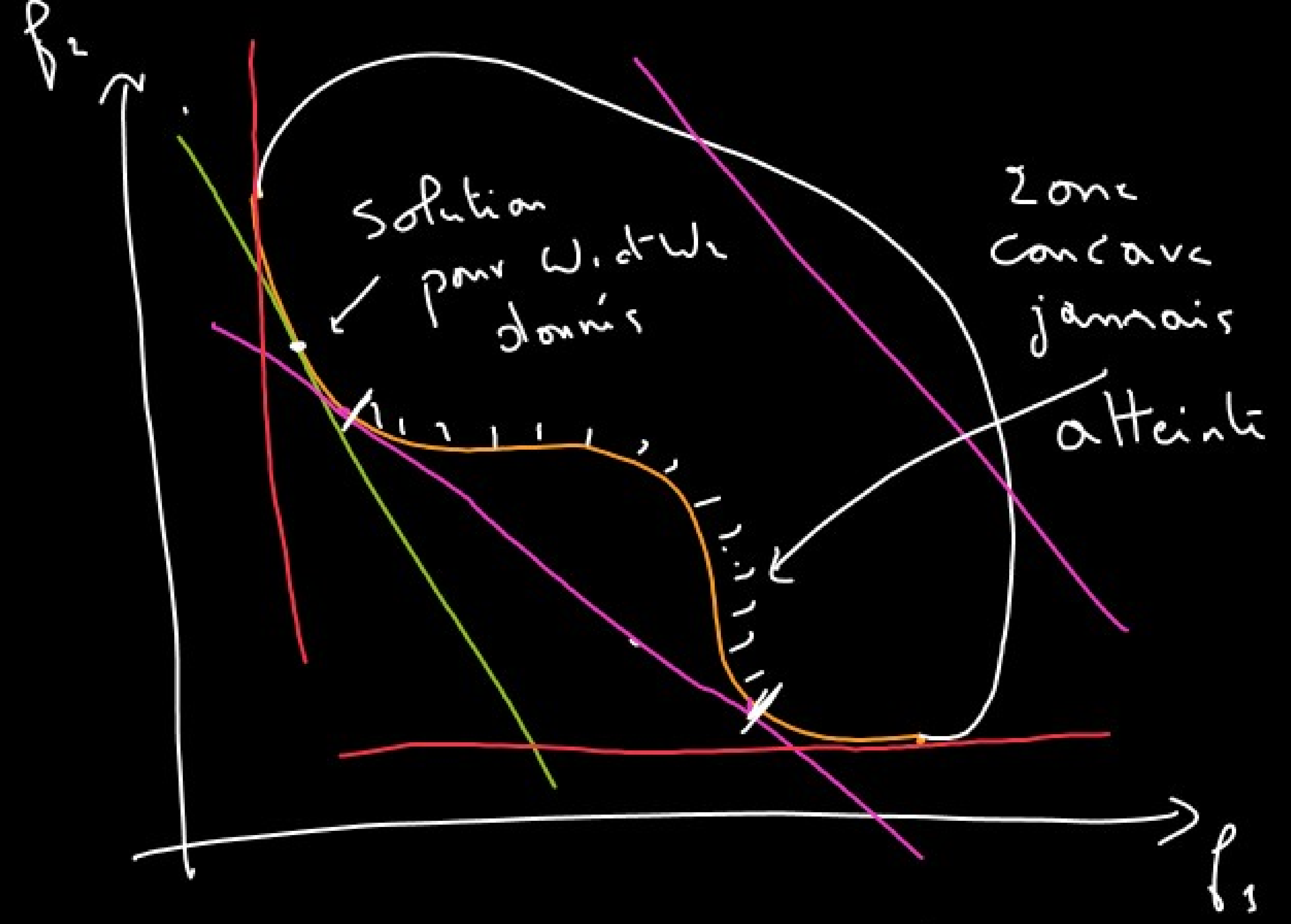
y, x_3 et x_4 sont non comparables

② Méthode de Pondération

On minimise une pondération des fonctions

$$\text{Min} \quad f_p(x) = \omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x) \quad (\omega_1 + \omega_2 = 1)$$

→ Approche simple à utiliser mais sans assurance d'obtenir l'ensemble du front de Pareto



$$f_2 = \frac{1}{\omega_2}\left(f_p - \omega_1 f_1\right)$$

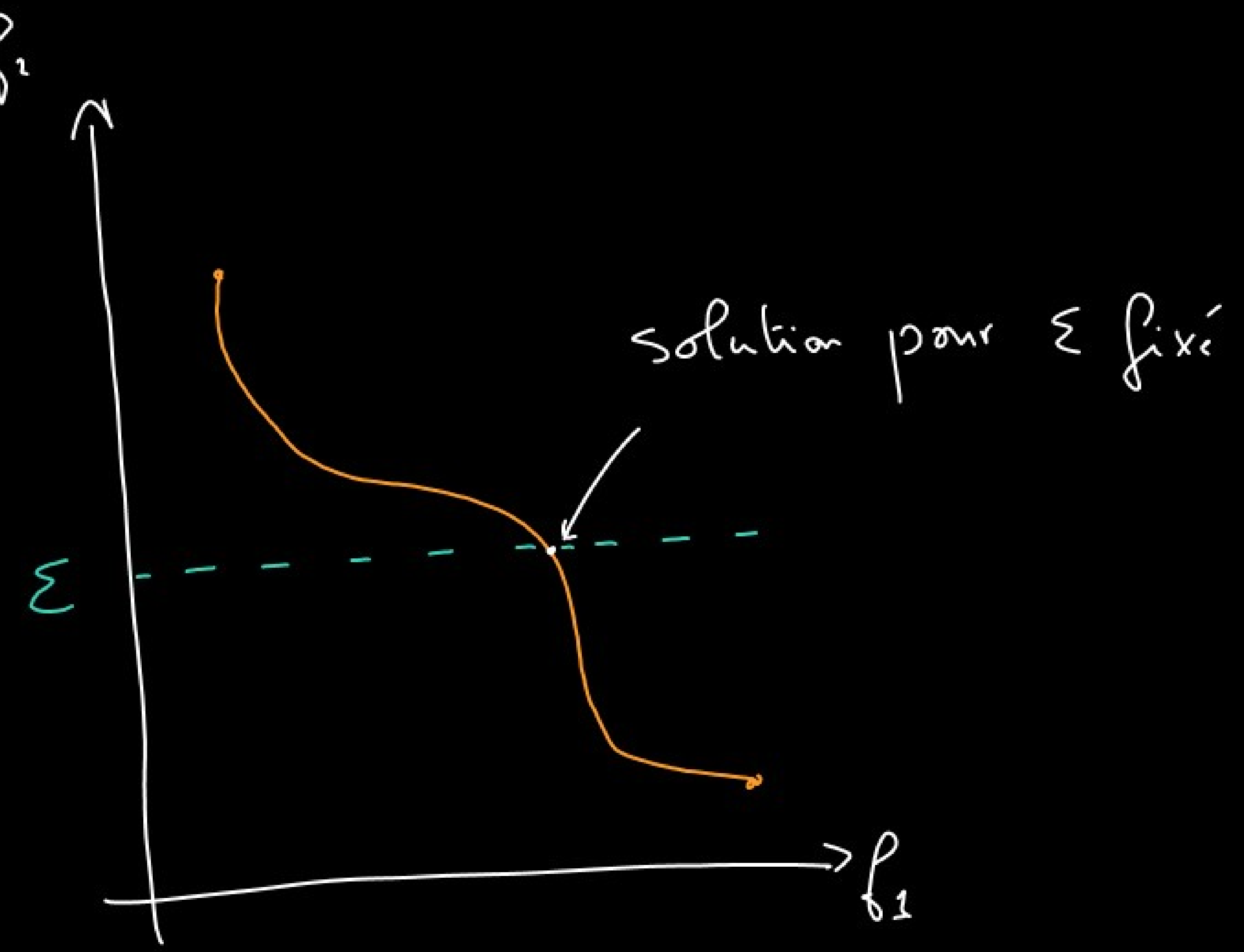
→ droite de pente $-\frac{\omega_1}{\omega_2}$ et valeur à l'origine $\frac{1}{\omega_2} f_p$

③ Méthode des contraintes

On considère un problème avec 1 critère comme fonction coût et les autres critères comme contraintes

$$\text{Min } f_c(x) = f_1(x)$$
$$\text{soumis à } f_2(x) = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ on résout p problèmes avec des valeurs différentes de ε pour déterminer p point du front de Pareto



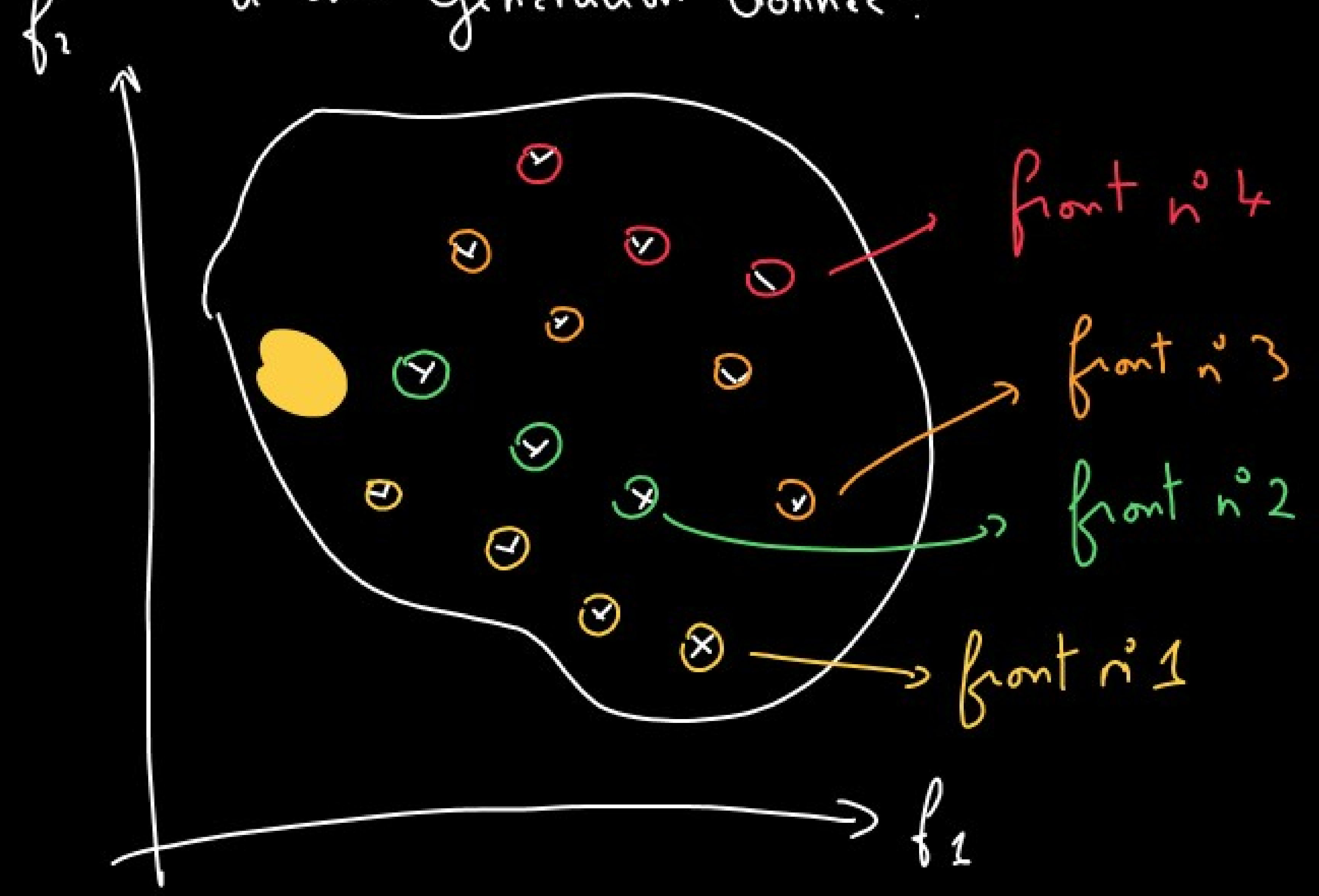
④ Méthodes évolutionnaires

idée : introduire dans l'algorithme évolutionnaire le critère de dominance (durant l'étape de sélection)

Approche : classement par front de non-dominance

- on classe les points par fronts de non dominance
- on attribue aux points une performance égale à $1/N$ (maximisation) où N est le numéro du front
- on réalise l'opération de sélection avec cette performance

à une génération donnée :



Exemple : algorithme NSGA
"Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm"

(5) Jeux de Nash

Alternative à l'approche de Pareto : partager les variables selon les critères et chercher un équilibre

Partage de territoire : Pour $x \in \mathbb{R}^n$, soit $p < n$, $u_1 \in \mathbb{R}^p$ et $u_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$ tel que

$$\begin{array}{r} p \text{ composantes} \\ n-p \text{ composantes} \end{array} \begin{bmatrix} u_1 \\ \hline u_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$$

P : matrice de partage $\in \mathbb{R}^{n \times n}$

ex :

$$P = \left[\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & I_{n-p} \end{array}\right] \implies u_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} x_{p+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Jeux de Nash

idée : chercher u_1 pour minimiser f_1 (à u_2 fixé)
chercher u_2 pour minimiser f_2 (à u_1 fixé)

$\longrightarrow$ équilibre de Nash : (u_1^*, u_2^*) est dit équilibre de Nash si et seulement si

$$\begin{cases} u_1^* = \arg\min\limits_{u_1} f_1(u_1, u_2^*) \\ u_2^* = \arg\min\limits_{u_2} f_2(u_1^*, u_2) \end{cases}$$

Remarques :
- on peut trouver 1 solution unique ($\neq$ Pareto)
- le jeu peut diverger, selon les propriétés de f_1, f_2 et le partage choisi
- A priori l'équilibre n'est pas sur le front de Pareto