

## Cours Scientific Machine Learning

## Séance d'exercices du 1er décembre

**Exercice 1**

Soit  $f$  une fonction appartenant à  $C^2([0, 1])$

1. Soit  $N$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ , soient les points  $x_j = j/N$ ,  $0 \leq j \leq N$ , on introduit  $\hat{f}_N$  l'interpolant linéaire par morceaux de  $f$  aux points précédents. Montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\|f - \hat{f}_N\|_\infty \leq C \frac{\|f''\|_\infty}{N^2}.$$

2. Que donne ce résultat pour la fonction qui à  $x$  associe  $x^2$  sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 2**

Soit  $\sigma$  la fonction qui à  $x$  associe  $\max(x, 0)$ , on considère la fonction  $g$  définie dans le cours que l'on prolonge par 0 en dehors de  $[0, 1]$ .

1. Montrer que pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ ,

$$g(x) = 2\sigma(x) - 4\sigma\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\sigma(x - 1).$$

2. Montrer de manière générale que toute fonction linéaire par morceaux sur  $[0, 1]$  s'écrit à une constante près comme une somme de fonctions  $\sigma$ .

**Exercice 3**

Calculer  $g \circ g$ .