

Volumes

Finis

I - Discrétisation VF des eqts elliptiques / paraboliques en 1D :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in]0, L[\\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (E)$$

$$\rightarrow H_0^1(0, L) = \left\{ v \in L^2(0, L) \mid \int_0^L |v'(x)|^2 dx < +\infty, v(0) = v(L) = 0 \right\}$$

$$\rightarrow L^2(0, L) = \left\{ v \text{ mesurable}, \int_0^L |v(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

$\rightarrow H_0^1(0, L)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_0^L u'(x) v'(x) dx \quad \& \quad \|v\|_{H_0^1} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H_0^1}} = \sqrt{\int_0^L |v'(x)|^2 dx}$$

la norme associée

$\rightarrow L^2(0, L)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_0^L u(x) v(x) dx \quad \& \quad \|v\|_{L^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{L^2}} = \sqrt{\int_0^L |v(x)|^2 dx}$$

Inégalité de Poincaré :

$$\forall v \in H_0^1(0, L) \text{ on a } \|v\|_{L^2} \leq L \|v\|_{H_0^1}$$

Soit $v \in H_0^1(0, L)$:

$$v(x) = \int_0^x v'(y) dy \quad \text{car } v(0) = 0$$

$$|v(x)| \leq \int_0^x |v'(y)| dy \leq \int_0^L |v'(y)| dy \leq \underbrace{\int_0^L (1)^2 dy}_{\sqrt{L}} \underbrace{\int_0^L |v'(y)|^2 dy}_{\|v\|_{H_0^1}}$$

$$\Rightarrow |v(x)| \leq \sqrt{L} \|v\|_{H_0^1}$$

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_0^L |v(x)|^2 dx \leq L \|v\|_{H_0^1}^2 \int_0^L dy = L^2 \|v\|_{H_0^1}^2 \quad \blacksquare$$

→ Formulation Variationnelle - Continue :

Soit $v \in H_0^1(0, L)$

• Formulation conservative de (E) : $(-u'(v))' = f(v)$

$$\int_0^L (-u'(v))' v(x) dx = \int_0^L f(v) v(x) dx$$

IPP:

$$\begin{aligned} \int_0^L (-u'(v))' v(x) dx + u'(v) v'(x) dx &= \int_0^L f(v) v(x) dx \\ 0 = u'(0) v'(0) + u'(L) v'(L) + \int_0^L u'(v) v'(v) dx &= \int_0^L f(v) v(x) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (EV) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(0, L); \\ \int_0^L u'(v) v'(v) dx = \int_0^L f(v) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(0, L) \end{array} \right.$$

→ proposition :

(EV) admet une solution unique
(LAX-Milgram)

→ proposition :

La solution de (EV) vérifie l'estimation à priori

$$\|u\|_{H_0^1} \leq L \|f\|_{L^2}$$

• On pose $v = u$ dans (EV)

$$\int_0^L u'(u) u'(u) dx = \int_0^L f(u) u(u) dx$$

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \stackrel{\text{P.C.}}{\leq} \|f\|_{L^2} L \|u\|_{H_0^1}$$

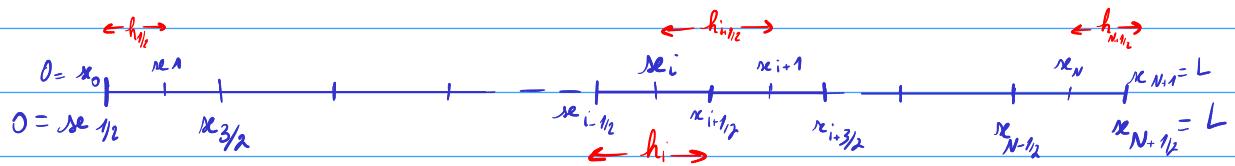
$$\Rightarrow \|u\|_{H_0^1} \leq L \|f\|_{L^2} \quad \blacksquare$$

Rq' Estimation à priori + linéarité de l'éq't \Rightarrow unicité de la solution

$$\begin{aligned} \text{si } u^{(1)} \text{ & } u^{(2)} \text{ sol de (EV)} \Rightarrow \int_0^L ((u^{(1)})' - (u^{(2)})') v(x) dx &= 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, L) \\ \Rightarrow \|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{H_0^1} &= 0 \end{aligned}$$

on applique la formulation variationnelle pour $f = 0$

Discretisation du domaine $(0, L)$: (Maillage)



On partitionne le domaine en N mailles;

$$K_i =]x_{i-1/2}; x_{i+1/2}[; i = 1, \dots, N$$

$$0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = L$$

Centres de mailles

$$x_i = \frac{x_{i+1/2} + x_{i-1/2}}{2} ; i = 1, \dots, N \text{ on pose } x_0 = 0 ; x_{N+1} = L$$

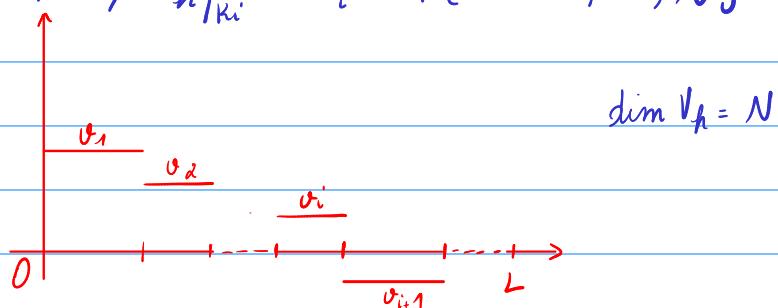
$$h_i = |x_{i+1/2} - x_{i-1/2}| \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$h_{1/2} = |x_{1/2} - x_{-1/2}| \quad \forall i = 0, \dots, N$$

$$h = \max_{i=1, \dots, N} \{h_i\}$$

Discretisation de l'espace des solutions

$$V_h = \left\{ v_h \in L^2(0, L) / v_h|_{K_i} = v_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, N \right\}$$



Si $V_h \not\subset H_0^1(0, L)$; la discréttisation est dite non-conforme

Discretisation de l'équation : 1 est par mailles

Eqt sous forme conservatrice $(-u'(w))' = f$

On intègre l'eqt conservatrice sur chaque maille K_i ; $i = 1, \dots, N$

$$\int_{K_i} (-u'(w))' dx = \int_{K_i} f(w) dx \quad K_i =]x_{i-1/2}; x_{i+1/2}[$$

on passe à l'intégrale de bord

$$-u'(x_{i+1/2}) - (-u'(x_{i-1/2})) = \int_{K_i} f(x) dx$$

Eqt de conservation dans la maille K_i

flux entrant
dans K_i en $x_{i-1/2}$

$$-u'(x_{i-1/2})$$

flux sortant dans
 K_i en $x_{i+1/2}$

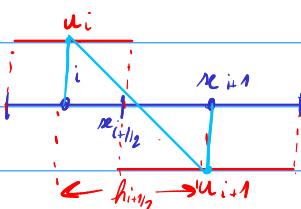
$$-u'(x_{i+1/2})$$

Approximation de flux $-u'(x_{i+1/2}) = \overline{F_{i+1/2}}(u)$ par un flux numérique $F_{i+1/2}(u_h)$

$$\Rightarrow F_{i+1/2}(u_h) - F_{i-1/2}(u_h) = \int_{K_i} f(x) dx \quad \forall i=1, \dots, N$$

Equation de conservation discrète dans
chaque maille K_i

Construction des Flux numériques : pour $u_h \in V_h$



qui approxime $-u'(x_{i+1/2})$

On interprète u_i comme la valeur
de u_h en x_i "

Intérieures $F_{i+1/2}(u_h) = \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+1/2}}$ $\forall i=1, \dots, N-1$

aux Bords $F_{1/2}(u_h) = \frac{u_0 - u_1}{h_{1/2}} = -u_1$

$$F_{N+1/2}(u_h) = \frac{u_N - u_{N+1}}{h_{N+1/2}} = u_N$$

Schéma VF :

$$\left\{ \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+1/2}} - \frac{u_{i-1} - u_i}{h_{i-1/2}} = \int_{K_i} f(x) dx \quad \forall i=1, \dots, N \right.$$

(E_h) avec les CB de Dirichlet
 $u_0 = 0 ; u_{N+1} = 0$

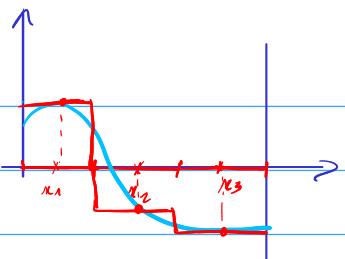
→ Consistance des flux :

• Interpolant: Soit $u \in C^0[0,1]$

$$I_h : C^0[0,1] \rightarrow V_h$$

$$I_h u \in V_h$$

$$(I_h u)_i = u(x_i)$$



Erreurs de consistence de flux :

$$\begin{aligned} e_{i+1/2}(u) &= -u'(x_{i+1/2}) - F_{i+1/2}(I_h u) \\ &= -u'(x_{i+1/2}) - \frac{u(x_i) - u(x_{i+1})}{h_{i+1/2}} \end{aligned}$$

$$u \in C^2[0,1]$$

$$e_{i+1/2}(u) = -u'(x_{i+1/2}) - \frac{u(x_i) - u(x_{i+1})}{h_{i+1/2}}$$

$$= \frac{1}{h_{i+1/2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-u'(x) + u(x)) dx$$

je divise par
 la taille de
 $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$
 je change rien

je divise pour
 la taille de
 $x_{i+1} - x_i$
 j'intègre $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$
 $u'(x)$ qui est
 fixe et ne
 dépend pas
 de x .

$$|u'(x) - u'(x_{i+1/2})| \leq \sup_{y \in [0,1]} |u''(y)| h_{i+1/2}$$

$$|r_{i+1/2}(u)| \leq \sup_{y \in [0,1]} |u''(y)| h_{i+1/2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_{i+1/2}} dx \right)$$

$$|r_{i+1/2}(u)| \leq \sup_{y \in [0,1]} |u''(y)| h_{i+1/2}. \quad \text{Erreur de consistence à l'ordre 1}$$

→ Formulation Variationnelle - Discrète :

$v_h \in V_h$ fonction test.

On pose $v_0 = 0$; $v_{N+1} = 0$

intégation par parties
ensuit c'est un
échange d'indice

$$\sum_{i=1}^N \left(F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - F_{i-\frac{1}{2}}(u_h) \right) = \sum_{i=1}^N v_i \int_{K_i} f(u) dx = \sum_{i=1}^N \int_{K_i} v_h(u) f(u) dx = \int_0^L f(u_h(x)) dx$$

$$\sum_{i=1}^N v_i F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - \sum_{j=0}^N v_{j+1} F_{j+\frac{1}{2}}(u_h) = \sum_{i=0}^N (v_i - v_{i+1}) F_{i+\frac{1}{2}}(u_h)$$

$$= \sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$(EV_N) : \begin{cases} \text{Trouve } u_h \in V_h / \\ \sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \int_0^L f(u_h(u)) du \quad \forall v_h \in V_h \text{ avec } v_0 = v_{N+1} = 0 \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}$$

→ Norme H_0' discrète :

$$\|u_h\|_{1,h} = \left(\sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ici on a posé
 $u_0 = u_{N+1} = 0$

→ proposition : Inégalité de Poincaré Discrète

$$\forall v_h \in V_h ; \text{ on a } \|v_h\|_{L^2} \leq L \|v_h\|_{1,h}$$

- $v_i = \sum_{j=0}^{i-1} v_{j+1} - v_j$ car $v_0 = 0$

$$|v_i| \leq \sum_{j=0}^{i-1} |v_{j+1} - v_j| \leq \sum_{j=0}^N |v_{j+1} - v_j| \sqrt{h_{j+\frac{1}{2}}}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{j=0}^N \frac{(v_{j+1} - v_j)^2}{h_{j+\frac{1}{2}}}} \sqrt{\sum_{j=0}^N h_{j+\frac{1}{2}}}$$

$\underbrace{\|v_h\|_{1,h}}$ $\underbrace{\sqrt{L}}$

$$\forall i=1, \dots, N \quad |v_i| \leq \sum \|v_h\|_{1,h}$$

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{L^2}^2 &= \int_0^L |v_h(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{K_i} |v_h(x)|^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^N h_i v_i^2 \leq \sum_{i=1}^N L \|v_h\|_{1,h}^2 h_i \\ &\leq L^2 \|v_h\|_{1,h}^2 \end{aligned}$$

Estimation à priori :

Soit u_h une solution de E_h
alors on a $\|u_h\|_{1,h} \leq L \|f\|_{L^2}$

On pose $v_h = u_h$ dans E_h

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|u_h\|_{1,h}^2 &= \int_0^L f u_h(x) dx \leq \|f\|_{L^2} \|u_h\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} L \|u_h\|_{1,h} \\ &\stackrel{\text{P.C. discrète}}{\leq} \|f\|_{L^2} L \|u_h\|_{1,h} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u_h\|_{1,h} \leq L \|f\|_{L^2}$$

Rq' L'estimation à priori + linéarité de l'équation E_h
 \Rightarrow unicité de la solution

Par E_h

$$\mathbb{R}^N \ni u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad | \quad A_h u_h = F_h$$

A_h est une matrice carrée de taille N

Unicité de $u_h \Rightarrow A_h$ injective

Comme A_h est carrée $\Rightarrow A$ invertible
 \Rightarrow problème bien posé (existence et unicité)

$$F_h = \begin{pmatrix} \int_{K_1} f dx \\ \vdots \\ \int_{K_N} f dx \end{pmatrix}$$

$$A_h u_h = F_h$$

$$\langle A_h u_h, v_h \rangle_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+1/2}}$$

pour $v_h = u_h$

- $\langle A_h u_h, u_h \rangle = \|u_h\|_{A_h}^2 \geq 0 \quad \forall u_h \in \mathbb{R}^N$

- $\langle A_h u_h, u_h \rangle = 0 \Rightarrow \|u_h\|_{A_h}^2 = 0 \Rightarrow u_h = 0 \Rightarrow u_h = 0$

- $\langle A_h u_h, v_h \rangle = \langle u_h, A_h v_h \rangle$

$\Rightarrow A_h$ est bien SDP (\Rightarrow inversible)

→ Extension au cas parabolique :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{sur } (0, L) \times (0, T) \\ u(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) & \text{et } (0, L) \end{cases}$$

→ Semi-discretisation en espace (continu en temps)

$$u_h(t) \in V_h \quad \forall t \in (0, T)$$

$$u_h(x, t) = u_i(t) \quad \forall x \in K_i, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

Équation dans la maille K_i :

$$\underbrace{\int_{K_i} \partial_t u(x, t) dx}_{\partial_t \int_{K_i} u(x, t) dx} + \underbrace{\int_{K_i} -\Delta u(x, t) dx}_{-\Delta u(x_{i+1/2}, t) - (-\Delta u(x_{i-1/2}, t))} = \int_{K_i} f(x, t) dx.$$

$$\underbrace{\partial_t \int_{K_i} u(x, t) dx}_{h_i u_i(t)} \approx F_{i+1/2}(u_h|_M) - F_{i-1/2}(u_h|_M)$$

⇒ Schéma VF semi-discretisé en espace :

$$\begin{cases} h_i \partial_t u_i(t) + F_{i+1,h}(U_h(t)) - F_{i-1,h}(U_h(t)) = \int_{K_i} f(x,t) dx \\ u_0(t) = 0 \\ u_{N+1}(t) = 0 \\ u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u^0(x) dx \quad \forall i=1, \dots, N \end{cases}$$

On note $U_h^n \approx U_h(t^n)$

$$U_h^n(x) = u_i^n \quad \forall x \in K_i$$

→ Euler implicite :

$$h_i \left(\frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t} \right) + F_{i+1,h}(U_h^n) - F_{i-1,h}(U_h^n) = \int_{K_i} f(x, t^n) dx$$

→ Euler Explicite :

$$h_i \left(\frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t} \right) + F_{i+1,h}(U_h^{n-1}) - F_{i-1,h}(U_h^{n-1}) = \int_{K_i} f(x, t^{n-1}) dx$$

$$U_h^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ U_N^n \end{pmatrix} \quad D_h = \begin{pmatrix} h_1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & h_N \end{pmatrix}$$

$$D_h \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t} + A_h U_h^* = \begin{pmatrix} \int_{K_1} f(x, t^*) \\ \vdots \\ \int_{K_N} f(x, t^*) \end{pmatrix}$$

$*$ = n si implicite
 $n-1$ si explicite

→ Principe du maximum: (pour $f=0$)

Le modèle parabolique vérifie le principe du maximum

$$\min_{t \in (0, L)} (u^*(y), y(0, t), 0, 0) \leq u(t, t) \leq \max_{t \in (0, L)} (u^*(y), y(0, t), 0, 0)$$

$\overline{u_0} \swarrow \quad \searrow \overline{u_L}$

→ Lemme:

$$u_i^n = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^n v_j^{n-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \beta_{ij}^n v_j^n + \gamma_i^n \overline{v}_0 + \delta_i^n \overline{v}_L$$

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ij}^n \geq 0, \beta_{ij}^n \geq 0; \gamma_i^n \geq 0; \delta_i^n \geq 0 \quad \forall i, \forall j \\ \alpha_{ii}^n > 0 \quad \forall i \end{array} \right.$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij}^n + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \beta_{ij}^n + \gamma_i^n + \delta_i^n = 1$$

Alors le principe de maximum discret est vérifié

$$\min_{\substack{i=1, \dots, N \\ t \geq 0}} (u_i^*) \leq u_i^n \leq \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ t \geq 0}} (u_i^*)$$

• Application au cas parabolique avec Euler implicite:

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{h_{i+1/2}} - \frac{u_{i-1}^n - u_i^n}{h_{i-1/2}} = 0$$

$$\left(\frac{h_i}{\Delta t} + \frac{1}{h_{i+1/2}} - \frac{1}{h_{i-1/2}} \right) u_i^n = \frac{h_i}{\Delta t} u_i^{n-1} + \frac{1}{h_{i+1/2}} u_{i+1}^n + \frac{1}{h_{i-1/2}} u_{i-1}^n$$

⇒ On a bien une combinaison convexe
et le Schéma Euler implicite vérifie le principe du maximum $\forall \Delta t > 0$

• Application au cas parabolique avec Euler Explicite

$$h_i \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t} + \frac{U_i^{n-1} - U_{i+1}^{n-1}}{h_{i+1/2}} - \frac{U_{i-1}^{n-1} - U_i^{n-1}}{h_{i-1/2}} = 0$$

$$\frac{h_i}{\Delta t} U_i^n = \left(\frac{h_i}{\Delta t} - \frac{1}{h_{i+1/2}} - \frac{1}{h_{i-1/2}} \right) U_i^{n-1} + \frac{1}{h_{i+1/2}} U_{i+1}^{n-1} + \frac{1}{h_{i-1/2}} U_{i-1}^{n-1}$$

Condition de Stabilité (principe de maximum)

$$\begin{cases} \frac{h_i}{\Delta t} \geq \frac{1}{h_{i+1/2}} + \frac{1}{h_{i-1/2}} \Leftrightarrow \Delta t^n \leq \frac{h_i}{\frac{1}{h_{i+1/2}} + \frac{1}{h_{i-1/2}}} \quad \forall i=1, \dots, N \\ \Delta t^n < \min_{i=1, \dots, N} \frac{h_i}{\left(\frac{1}{h_{i+1/2}} + \frac{1}{h_{i-1/2}} \right)} \end{cases}$$

07/01/2026

II - Discrétilisation VF des équations hyperboliques scalaires 1d

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \partial_x f(u(x, t)) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times [0, T] \\ u(x, 0) = u^*(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

• $u^* \in L^\infty(\mathbb{R})$, $I^* = [\min_{x \in \mathbb{R}} u^*(x), \max_{x \in \mathbb{R}} u^*(x)]$

• f est supposée Lipschitz sur I^* , i.e. $\exists \text{lips} / |f(v_2) - f(v_1)| \leq \text{lips} |v_2 - v_1| \quad \forall (v_1, v_2) \in I_0 \times I_0$

→ N.b.: Si f est continue et C' par morceaux sur I_0
cela se réduit à $\sup_{v \in I_0} |f'(v)| = \text{lips}$

• prop: Il existe une solution faible entropique unique
à (E) dans $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$

De plus elle vérifie le principe du maximum $u(x, t)$
 $\in I^* \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$

• prop: La solution entropique est la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$
de l'eqt parabolique

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(x, t) + \partial_x f(u_\varepsilon(x, t)) - \varepsilon \partial_x^2 u_\varepsilon(x, t) = 0 \\ u_\varepsilon(x, 0) = u^*(x) ; x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

terme diffusif

Exemple: $f(u) = cu$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T] \\ u(x, 0) = u^*(x) ; x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

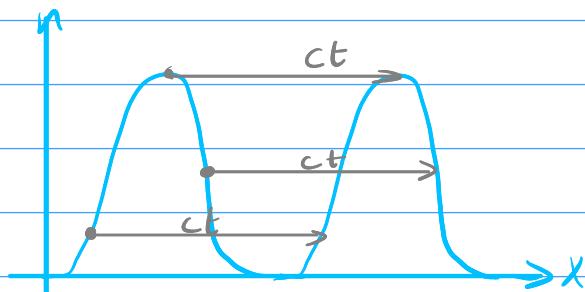
solution $u(x, t) = u^*(x - ct)$

$$\text{Vérifions : } \partial_t u(x,t) = (u^\circ)'(x-ct) \times (-c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = (u^\circ)'(x - ct) \times 1$$

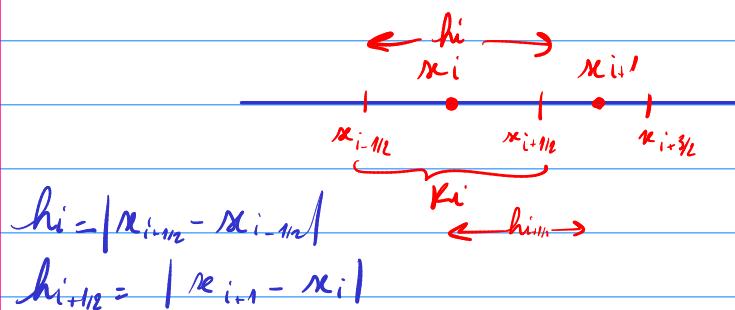
donc on a bien $\partial_t u(x,t) + c \partial_x u(x,t) = 0$

$$\& \quad u(x, 0) = u^*(x)$$



Dicretisation VF

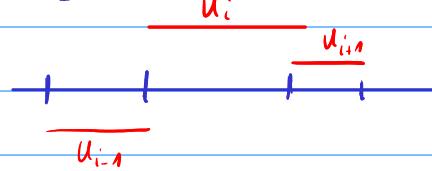
• Discretisation du domaine



$$k_i = \frac{m_{i+1/2} + m_{i-1/2}}{2}$$

• Espace de solution Discretes

$$V_h = \left\{ v_h \in L^\infty(\Omega) : v_h(x_i) = v_i \quad \forall x_i \in K_i, \forall i \in \mathcal{Z} \right\}$$



* Cas semi-discret, V.F en espace - Continue en temps

$$u_k(v) \in V_k$$

$$u_n(x, t) = u_i(t) \quad \forall x \in K_i \quad t_i \in \mathbb{Z}$$

$$\int_{\Omega} \partial_t u(x,t) dx + \int_{\Omega} \partial_x f(u(x,t)) dx = 0$$

$$\hat{h}_i \approx h_i \frac{d}{dt} u_i(t)$$

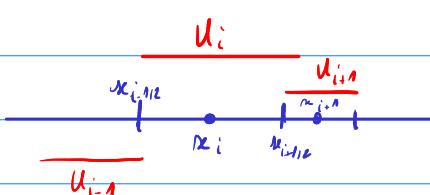
$$\int dx f(u(x,t)) = 0$$

$$x_{i+1/2} \underbrace{f(u(x_{i+1/2}, t))}_{\text{flux en } x_{i+1/2}} - \underbrace{f(u(x_{i-1/2}, t))}_{\text{flux en } x_{i-1/2}}$$

On approche le flux $f(u(x_{i+m}, t))$ par le flux numérique $F_{i+m}(u_h(t))$

⇒ Équation de conservation discrète dans la maille k_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Shi } \frac{d}{dt} u_i(t) + F_{i+1/2}(u_h(t)) - F_{i-1/2}(u_h(t)) = 0 \\ u_i(0) = \frac{1}{h_i} \int_{k_i} u^*(x) dx \end{array} \right. \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$



flux centré : $F_{i+1/2}(u_h) = f\left(\frac{u_i + u_{i+1}}{2}\right)$
!! instable !!

→ Flux monotone deux points

$$F_{i+m}(v, w) = F(v, w) \quad \begin{matrix} \text{valeur à droite} \\ \text{valeur à gauche} \end{matrix}$$

$$v \quad + \quad w$$

$$\text{ex } F_{i-1/2}(u_h) = F(u_{i-1}, u_i) \\ F_{i+1/2}(u_h) = F(u_i, u_{i+1})$$

$F(v, w)$ est un flux monotone deux points si il vérifie les trois propriétés suivantes :

- Consistance : $F(v, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$
"flux exact sur les fonctions constantes"

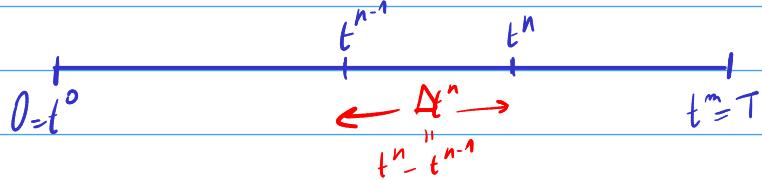
Monotonie : $F(v, w)$

(condition de stabilité au sens du principe du max) $F(v, w)$ croissant ↗ v, décroissant ↘ w.

- $F(v, w)$ est Lipschitz par rapport à v & w $\forall (v, w) \in I_0 \times I_0$
 $|F(v_2, w) - F(v_1, w)| \leq \text{Lip}_1 F |v_2 - v_1|$
 $|F(v, w_2) - F(v, w_1)| \leq \text{Lip}_2 F |w_2 - w_1|. \quad \forall v, v_1, v_2 \in I_0$

* Discrétilsation en temps

Euler Explicit - Euler Implicit



$$\begin{cases} u_i^n = u_i(t^n) \\ u_i^* = \begin{cases} u_i^n & \text{si implicite} \\ u_i^{n-1} & \text{si explicite} \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(h_i \frac{du_i}{dt}(t) + F(u_i(t), u_{i+1}(t)) - F(u_{i-1}(t), u_i(t)) \right) dt = 0$$

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (F(u_i(t), u_{i+1}(t)) - F(u_{i-1}(t), u_i(t))) dt = 0$$

$$\begin{cases} h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*) = 0 & \forall i \in \mathbb{Z} \\ & \forall n = 1, \dots, m \\ u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u^0(x) dx & \forall i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exemple. Cas linéaire $f(w) = cw$

Family des flux deux points linéaires

$$F(v, w) = \alpha v + \beta w, \forall \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Consistance: $F(v, v) = f(v) = cv \quad \forall v \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)v + \gamma = cv \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = c \end{cases}$$

$$F(v, w) = \alpha v + (c - \alpha)w \quad (\text{flux entre } F(v, w) = \frac{c}{2}(v+w))$$

$$F(v, w) = \frac{c}{2}(v+w) - \frac{c}{2}(v+w) + \alpha v + (c - \alpha)w$$

$$= \frac{c}{2} (v+w) - \frac{c}{2} (v-w) + d (v-w)$$

$$= \frac{c}{2} (v+w) + \underbrace{(d-\frac{c}{2})}_{\text{flux diffusif}} (v-w)$$

\Rightarrow famille à un paramètre de flux linéaires consistant pour $f(u) = cu$:

$$F(v, w) = \frac{c}{2} (v+w) + D (v-w)$$

flux antérieur flux diffusif

On remarque que $D(v-w)$ est la discrétisation du flux diffusif en $x_{i+1/2}$ $D h_{i+1/2} (-u'(x_{i+1/2}))$

• Monotonie de $F(v, w)$.

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} + D &\geq 0 \Leftrightarrow D \geq -\frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} - D &\leq 0 \Leftrightarrow D \geq \frac{c}{2} \end{aligned} \quad \left\{ \Leftrightarrow D \geq \frac{|c|}{2} \right.$$

Le meilleur flux est le moins diffusif qui s'obtient par

$$D = \frac{|c|}{2}$$

$$\Rightarrow F(v, w) = \begin{cases} cv & \text{si } c \geq 0 \\ cw & \text{si } c \leq 0 \end{cases}$$



schéma dicentrique amont
upwind - Godunov

\rightarrow Analyse de stabilité par le principe du maximum:
On va écrire que le schéma est une combinaison convexe

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + c \frac{u_i^* + u_{i+1}^*}{2} + D (u_i^* - u_{i+1}^*)$$

$$- c \frac{u_{i-1}^* + u_i^*}{2} - D (u_{i-1}^* - u_i^*) = 0$$

Cas implicite : $* = n$

$$\left(\frac{hi}{\Delta t^n} + \frac{c}{2} D - \frac{c}{2} D \right) = \frac{hi}{\Delta t^n} U_i^{n-1} + \left(D - \frac{c}{2} \right) U_{i+1}^n + \left(D + \frac{c}{2} \right) U_{i-1}^n$$

$$\begin{cases} D - \frac{c}{2} \geq 0 \\ D + \frac{c}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow D \geq \frac{|c|}{2}$$

Cas du schéma explicite : $* = n-1$

$$\frac{hi}{\Delta t^n} U_i^n = \left(\frac{hi}{\Delta t^n} - \frac{c}{2} - D + \frac{c}{2} - D \right) U_i^{n-1} + \left(D - \frac{c}{2} \right) U_{i+1}^{n-1} + \left(D + \frac{c}{2} \right) U_{i-1}^{n-1}$$

$$\begin{cases} D - \frac{c}{2} \geq 0 \\ D + \frac{c}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow D \geq \frac{|c|}{2} \text{ stabilité en espace.}$$

$$\frac{hi}{\Delta t^n} - 2D \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} \frac{hi}{2D}$$

Condition CFL

Bilan de l'exemple :

→ Le schéma implicite est stable au sens où il vérifie le principe du maximum $\wedge \Delta t^n > 0$ si $D \geq \frac{|c|}{2}$ qui est la condition de monotonie.

$$U_i^n \in I_0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0$$

→ Le schéma explicite est stable au sens où il vérifie le principe de maximum si :

$$\begin{aligned} &\bullet D \geq \frac{|c|}{2} \\ &\bullet \Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} \frac{hi}{2D} \end{aligned}$$

→ Soit $F(u, w)$ un flux monotone deux points.
On va faire l'analyse de stabilité par le principe du max.

$$\frac{hi}{\Delta t^n} \left(u_i^n - u_i^{n-1} + F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*) \right) = 0.$$

$$= F(u_i^*, u_i^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*)$$

$$b_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) + a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*)$$

$$\Rightarrow \frac{hi}{\Delta t^n} \left(u_i^n - u_i^{n-1} + b_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) + a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) \right) = 0$$

monotonie \Rightarrow

$$0 \leq b_i^* = \frac{F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_i^*, u_i^*)}{u_i^* - u_{i+1}^*} \leq \text{Lip}_2 F$$

$$0 \leq a_i^* = \frac{F(u_i^*, u_{i-1}^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*)}{u_i^* - u_{i-1}^*} \leq \text{Lip}_1 F$$

$$\frac{hi}{\Delta t^n} \left(u_i^n - u_i^{n-1} + b_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) + a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) \right) = 0$$

Cas implicite $\left(\frac{hi}{\Delta t^n} + b_i^* + a_i^* \right) U_i^n = \frac{U_i^{n-1}}{\Delta t^n} + b_i^* U_{i+1}^n + a_i^* U_{i-1}^n$

On a bien une combinaison convexe et donc le principe du maximum.

Cas explicite $\frac{hi}{\Delta t^n} U_i^n = \left(\frac{hi}{\Delta t^n} - b_i^* - a_i^* \right) U_i^{n-1} + b_i^* U_{i+1}^{n-1} + a_i^* U_{i-1}^{n-1}$

$$\Delta t^n \leq \frac{hi}{a_i^* + b_i^*}$$

Comme $0 \leq a_i^* + b_i^* \leq \text{Lip}_1 F + \text{Lip}_2 F$ il suffit d'avoir la condition CFL.

$$\Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} \frac{hi}{\text{Lip}_1 F + \text{Lip}_2 F}$$

→ Soit $F(u, w)$ un flux Monotone deux points, alors le schéma VF avec Euler implicite admet une solution unique qui vérifie le principe du maximum $U_i^n \in I_0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$

→ Soit $F(v, w)$ un flux monotone deux points, alors le schéma VF avec Euler explicite admet une solution unique qui vérifie le principe du maximum $U_i^n \in I_0 \forall i \in \mathbb{Z} \quad \forall n \geq 0$

$$\text{Sous la condition CFL } \Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} \frac{h}{\|L_{ip} F + L_{is} F\|} \quad \forall n \geq 1$$

→ Équation équivalente: Elle s'obtient par $f(u) = cu, c > 0$
 $h_i = h \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \Delta t^n = \Delta t \quad \forall n \geq 1$

On injecte $U_i^n = U(x_i, t^n)$ avec u fonction régulière solution de (E) et on fait des développements limités à l'ordre $h^2 + \Delta t^2 + h \Delta t$.

- Cas explicite:

$$\partial_t u + \partial_x(cu) - \frac{hc}{2} (1 + \text{CFL}) \partial_{x^2} u = O(h^2 + \Delta t^2 + h \Delta t)$$

nb CFL : $\frac{c \Delta t}{h}$ (cst CFL) $(\Delta t \leq \frac{h}{c})$

- Cas Implique:

$$\partial_t u + \partial_x(cu) - \frac{hc}{2} (1 - \text{CFL}) \partial_{x^2} u = O(h^2 + \Delta t^2 + h \Delta t)$$

21/01/2026

→ Extension à la dimension 2,3 des schémas VF pour les équations elliptiques du second ordre :

* problème modélisé : $\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$ (E)

$$\Omega \begin{cases} \text{segment} & d=1 \\ \text{polygone} & d=2 \\ \text{polycide} & d=3 \end{cases}$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq +\infty ; v=0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

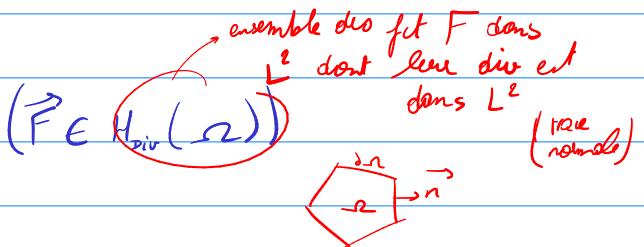
$$\|u\|_{H_0^1} = \|\nabla u\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}$$

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

→ Formule de Stokes :

$$\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (\vec{F} \in H_{\text{div}}^1(\Omega))$$

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma(x)$$



→ Formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

$$\text{ou } -\Delta u v = \text{div}(-v \nabla u) + \nabla u \cdot \nabla v$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \text{div}(-v \nabla u) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

$$\xrightarrow{\text{stokes}} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} -v \nabla u \cdot \vec{n} d\sigma(x) = \int_{\Omega} f v dx$$

Comme $v \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$(EV) \begin{cases} \text{Trouve } u \in H_0^1(\Omega) / \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \end{cases}$$

• prop: D'après LAX-Milgram (EV) a une solution unique
De plus elle vérifie l'estimation à priori :

$$\|u\|_{H_0^1} \leq (\text{diam } \Omega) \|f\|_{L^2} \quad (*)$$

$\text{diam } \Omega = \max_{(x,y) \in \Omega \times \Omega} |y-x|$

• Inégalité de Poincaré: $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2} \leq (\text{diam } \Omega) \|v\|_{H_0^1}$$

Preuve de la prop:

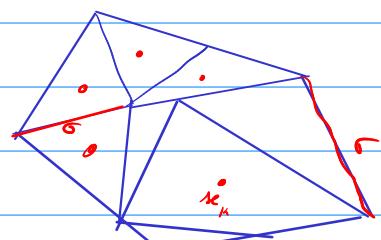
On pose $v = u$ dans (EV)

$$\Rightarrow \|u\|_{H_0^1}^2 = \int_{\Omega} f u \, dx \stackrel{\text{CS}}{\leq} \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$$

$$\stackrel{\text{P.C.}}{\leq} (\text{diam } \Omega) \|u\|_{H_0^1} \|f\|_{L^2} \Rightarrow (*) \checkmark$$

→ Discretisation du domaine - maillage:

- On partitionne le domaine en mailles $K \in \mathcal{M}_h$

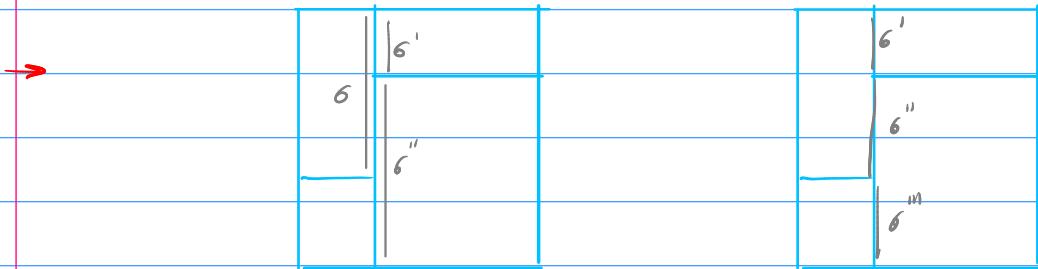


- x_K est le centre de la maille $x_K \in K$

- On définit l'ensemble des faces du maillage ; $\sigma \in F_h$
qui sont les intersections $\partial K \cap \partial L$ des mailles voisines contrainte
à être planes + les intersections $\partial K \cap \partial \Omega$ au bord

- On distingue les faces intérieures partagées par deux mailles. On note F_h^{int} l'ensemble des faces intérieures et $\sigma = h/L$

- On note F_h^{ext} l'ensemble des faces de bord & $\sigma = h/L$. indique que $\sigma \in \partial K \cap \partial L$.



maillage non conforme
Non compatible avec la
définition précédente

maillage conforme

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vec{n}_{K,\sigma} \\ \vec{n}_{L,\sigma} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{n}: \text{normale unitaire à } \sigma \text{ orientée sortante} \\ \text{de } K \\ \vec{n}_{L,\sigma}: \text{normale unitaire à } \sigma \text{ orientée sortante} \\ \text{de } L \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{n}_{K,\sigma} + \vec{n}_{L,\sigma} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\sigma = h/L \in F_h^{\text{int}}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vec{n}_{K,\sigma} \\ \vec{n}_{L,\sigma} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{n}_{K,\sigma}: \text{normale unitaire à } \sigma \text{ orientée sortante de} \\ K; \text{ c.à.d. de } \sigma \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vec{n}_{K,\sigma} \\ \vec{n}_{L,\sigma} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sigma = h/L \in F_h^{\text{ext}} \\ \text{On définit le "centre de la face" } x_\sigma \in \sigma \end{array}$$

$$\bullet |K| = \text{"volume" de la maille} \quad \xrightarrow{\text{mesure d'un pt}}$$

$$\bullet |\sigma| = \text{"surface" de la face.} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\sigma| = 1 \quad d=1 \quad \text{en dim 0} \\ \text{longueur} \quad d=2 \\ \text{surface} \quad d=3 \end{array} \right.$$

en dim 0
c'est un pt
mesure
comptage

- $h = \max_{K \in \mathcal{M}_h} (\text{diam } K)$

→ Discretisation de l'espace des solutions

$$\mathbb{V}_h = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \mid v_h|_K = v_K \in \mathbb{R} \quad \forall K \in \mathcal{M}_h \right\}$$

\mathbb{V}_h n'est pas un sous espace de $H_0^1(\Omega)$; on dit que la discréétisation est non conforme.

→ Discréétisation de l'équation (E)

- On écrit l'eqt (E) en forme conservatrice

$$-\nabla u = \operatorname{div}(-\nabla u) = f$$

- On intègre sur chaque maille $K \in \mathcal{M}_h$

- On applique la formule de Stokes pour se ramener à une intégrale de bord.

→ On fait apparaître le flux sur les faces

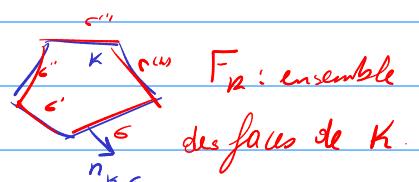
→ On discréétise les flux

$$\int_K \operatorname{div}(-\nabla u) dx = \int_K f ds$$

$$\int_{\partial K} -\nabla u \cdot n_K ds(u) = \int_K f dx$$

$$\sum_{e \in F_K} \int_e -\nabla u \cdot n_{K,e} ds(u) = \int_K f dx$$

flux sur la face $\rightarrow \bar{F}_{K,e}(u)$ flux exacte (norme)

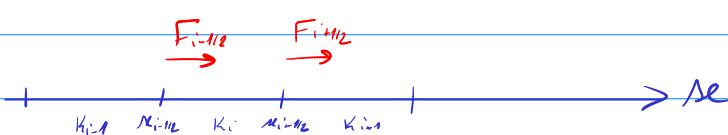


On va noter $F_{K\sigma}(u_h)$ le flux numérique qui discrétise $\bar{F}_{K\sigma}(u)$

• Le schéma VF:

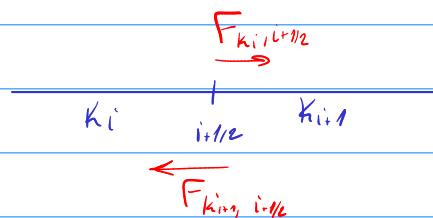
$$\sum_{\substack{\sigma \in F_K \\ \forall K \in \mathcal{T}_h}} F_{K\sigma}(u_h) = \int_K f \, dx \quad (\text{VF})$$

→ parallèle la dimension $d=1$



$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = \int_{K_i} f \, dx$$

Donc on obtient : $\underbrace{F_{K_{i-1/2}, i+1/2}}_{F_{i+1/2}} + \underbrace{F_{K_{i+1/2}, i-1/2}}_{-F_{i-1/2}} = \int_{K_i} f \, dx$



On doit imposer $F_{K_{i-1/2}, i+1/2} + F_{K_{i+1/2}, i-1/2} = 0$
C'est la conservativité du flux

Rq' le flux continu vérifie :

$$\bar{F}_{K\sigma}(u) + \bar{F}_{L\sigma}(u) = 0 \quad \forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}$$



$$\bullet \int_{\sigma} -\nabla u \cdot n_{K\sigma} d\sigma + \int_{\sigma} -\nabla u \cdot n_{L\sigma} d\sigma$$

$$= \int_{\sigma} -\nabla u \cdot \underbrace{(n_{K\sigma} + n_{L\sigma})}_{0} d\sigma = 0$$

→ propriétés des flux numériques : $F_{K\sigma}(u_h)$

① flux linéaires par rapport à u_h et à u_σ , $\sigma \in \mathcal{F}_h^{\text{ext}}$

② conservativité des flux : $F_{K\sigma}(u_h) + F_{L\sigma}(u_h) = 0$
 $\forall \sigma = K|L \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}$

③ Consistance des flux :

Interpolant $I_h : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$

$$u \mapsto (I_h u)_k = u(x_k) \quad \forall k \in M_h$$

Erreur de consistence des flux :

$$R_{K\sigma}(u) = \int_{\sigma} -\nabla u \cdot n_{K\sigma} ds - F_{K\sigma}(I_h u)$$

On dit que le flux est consistant

$$|R_{K\sigma}(u)| \leq C(u) \lvert \sigma \rvert h \quad \forall u \in C^2(\bar{\Omega})$$

④ Conservativité des flux (global à tous les flux $F_{K\sigma}(u_K), K \in M_h$)

$$\sigma \in F_K$$

On définit :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in M_h} \sum_{\sigma \in F_K} F_{K\sigma}(u_h) v_K$$

norme H^1
discrete

Le schéma est dit conservatif si il existe une norme $\|\cdot\|_{1,h}$ sur V_h et deux constantes α et C_p /

$$(\text{coercivité de } a_h) \quad a_h(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|_{1,h}^2 \quad \forall u_h \in V_h$$

Inégalité de Point-carré $\|v_h\|_{L^2} \leq C_p \|v_h\|_{1,h} \quad \forall v_h \in V_h$

avec α & C_p ne dépend pas de h sur une famille de maillages.

• proposition : Si les flux satisfont les propriétés 1 à 4 ; alors (VF) admet une solution unique.

Elle vérifie l'estimation à priori

$$\|u_h\|_{1,h} \leq \frac{C_p}{\alpha} \|f\|_2$$

et l'estimation d'erreur $\|I_h u - u_h\|_{1,h} \leq \frac{1}{\alpha} C(u) h$
si $u \in C^2(\bar{\Omega})$

preuve de l'estimation à priori:

$$\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \sum_{\sigma \in F_K} F_{K\sigma}(u_h)(u_h) = \sum_{K \in \mathcal{M}_h} (\int_K f) u_h$$

$\alpha_h(u_h, u_h)$

fonction
fonction jointe
valeur dans la maille

④ coercivité $\Rightarrow \alpha \|u_h\|_{1,h}^2 \leq \alpha_h(u_h, u_h) = \sum_{K \in \mathcal{M}_h} (\int_K f) u_h$

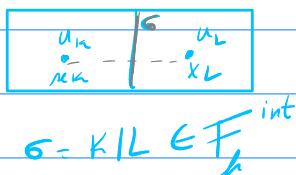
$$= \int_{\Omega} f u_h \, dx$$

\Rightarrow C.S. $\alpha \|u_h\|_{1,h}^2 \leq \|f\|_L \|u_h\|_2$
 $\leq \|f\|_L \|C_p\| \|u_h\|_{1,h}$

$$\Rightarrow \|u_h\|_{1,h} \leq \frac{C_p}{\alpha} \|f\|_L$$

Exemple de construction de flux: flux TPFA.

"Two-Point flux Approximation"



$$F_{K\sigma}(u_h) = \frac{u_R - u_L}{|x_K - x_L|} T \sigma$$

surface de la face

$\forall \sigma = K \setminus L \in \mathcal{F}_h^{\text{ext}}$

$$F_{K\sigma}(u_h) = \frac{u_R - u_L}{|x_K - x_L|} |\sigma|$$

→ vérifions les 4 propriétés valeur sur les bords.

① linéarité w.r.t. u_h et u_L ✓

② conservativité

$$F_{K\sigma}(u_h) + F_{L\sigma}(u_h) = |\sigma| \frac{u_R - u_L}{|x_K - x_L|} + |\sigma| \frac{u_L - u_R}{|x_L - x_K|} = 0$$

(4) Continuité ($u_\sigma = 0 \quad \forall \sigma \in F_h^{\text{ext}}, \text{ pb homogène}$)

$$\begin{aligned}
 a_h(u_h, v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{M}_h} \sum_{\sigma \in F_h} F_{K\sigma}(u_h) v_K \\
 &= \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in F_h^{\text{int}}}} F_{K\sigma}(u_h) v_K + F_{L\sigma}(u_h) v_L + \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in F_h^{\text{ext}}}} F_{K\sigma}(u_h) v_K \\
 \text{conservativité} \quad F_{K\sigma}(u_h) + F_{L\sigma}(u_h) &= 0 \quad = \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in F_h^{\text{int}}}} F_{K\sigma}(u_h) (v_K - v_L) \\
 &\quad + \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in F_h^{\text{ext}}}} F_{K\sigma}(u_h) (v_K - 0) \\
 \Rightarrow a_h(u_h, v_h) &= \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in F_h^{\text{int}}}} |\sigma| \frac{(u_h - u_L)(v_h - v_L)}{|n_K n_L|} \\
 &\quad + \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \in F_h^{\text{ext}}}} |\sigma| \frac{(u_h - 0)(v_h - 0)}{|n_K n_\sigma|}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_h(u_h, v_h)$ est symétrique, positive et définie

Le schéma TPFA définit la norme H_0^1 discrète

$$\|u_h\|_{H_0^1} = \left(\sum_{\sigma = K|L} |\sigma| \frac{(u_h - u_L)^2}{|n_K n_L|} + \sum_{\sigma = K|L} |\sigma| \frac{(u_h - 0)^2}{|n_K n_\sigma|} \right)^{1/2}$$

& on peut montrer l'inégalité de Poincaré discrète pour cette norme.

Donc par définition $\alpha = 1$

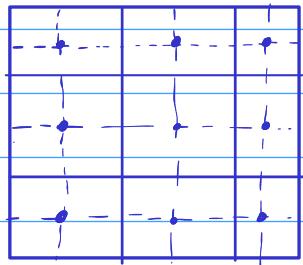
(3) Consistance: elle suppose que le maillage est orthogonal.

$$\begin{cases} n_K n_L \perp \sigma \quad \forall \sigma = K|L \in F_h^{\text{int}} \\ n_K n_\sigma \perp \sigma \quad \forall \sigma = K|L \in F_h^{\text{ext}}. \end{cases}$$

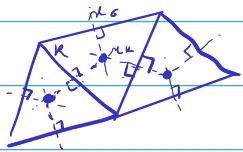
$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_K n_L \parallel n_K \sigma \\ n_K n_\sigma \parallel n_K \sigma. \end{cases}$$



→ très contraignant sur le maillage

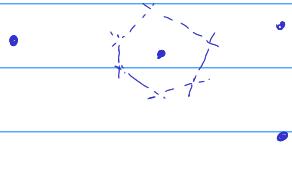


→ Maillage Cartésien en dimension 1, 2, 3:
 x_K = centre de gravité des mailles
 x_σ = centre de gravité de la face.

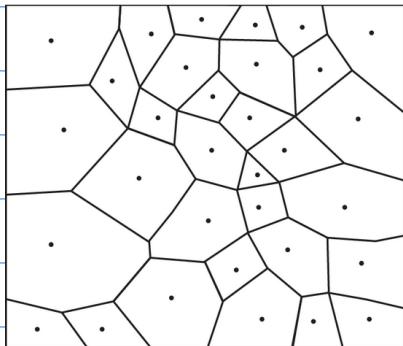


→ Maillage triangulaire
 x_K : intersection des médianes.

! Il faut des angles aigus ! cor



→ Maillage Voronoi : 2D, 3D



A partir d'un nuage de points
 Maille =

→ prof.

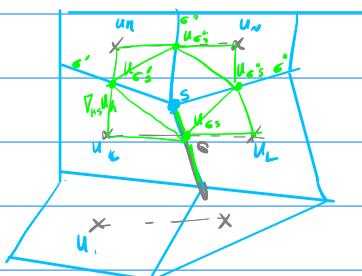


Schéma MPFA

"Multipoint Flux Approximation"

Construction des $\frac{1}{2}$ flux autour des noeuds:

- 4 inconnues intermédiaires

$U_{6s}, U_{6's}, U_{6''s}, U_{6'''s}$

- 4 éqts de conservativité du flux

⇒ $\frac{1}{2}$ flux qui dépendent que de U_n, U_e, U_w, U_s

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \operatorname{Div}(-\nabla u(x,t)) = f(x,t) & \text{sur } \Omega \times [0,T] \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = u^0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

① Écrire la semi-discretisation VF en espace, (continue en temps) en utilisant le flux TPFA.

② Rajouter l'intégration en temps par un schéma Euler implicite.

① $U_h(t) \in V_h \quad \forall t \in [0,T]$

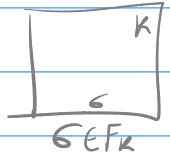
$U_h(x,t) = U_k(t)$ dans chaque maille $K \in M_h$.

F_K = ensemble des faces de K .

Eqt de la maille K :

$$\int_K \partial_t U_h(x,t) dx + \int_K \operatorname{Div}(-\nabla u(x,t)) = \int_K f(x,t) dx$$

$$|K| \frac{d}{dt} U_h(t) + \sum_{\sigma \in K} \int_{\sigma} \nabla u \cdot n_{\sigma} d\sigma = \int_K f(x,t) dx$$



flux intérieur discretisé par $\bar{F}_{K\sigma}(U_h)$

$$|K| \frac{d}{dt} U_h(t) + \sum_{\sigma \in K} \int_{\sigma} \nabla u \cdot n_{\sigma} d\sigma = \int_K f(x,t) dx$$

$$|K| \frac{d}{dt} U_h(t) + \sum_{\sigma \in K} \bar{F}_{K\sigma}(U_h(t)) = \int_K f(x,t) dx \quad \forall K \in M_h$$

$$U_h(0) = \frac{1}{|K|} \int_K u^0(x) dx \quad \forall K \in M_h$$

flux TPFA: $\bar{F}_{K\sigma}(U_h) = \begin{cases} \frac{U_K - U_L}{|x_K - x_L|} |\sigma| & \text{si } \sigma = K|L \\ 0 & \text{si } \sigma \in F_h^{\text{int}} \\ \frac{U_K - 0}{|x_K - x_L|} |\sigma| & \text{si } \sigma = K|L \\ 0 & \text{si } \sigma \in F_h^{\text{ext}} \end{cases}$

* $|K| \frac{d}{dt} U_h(t) + \sum_{\substack{\sigma = K|L \\ \sigma \in F_h^{\text{int}}} \frac{U_K(t) - U_L(t)}{|x_K - x_L|} |\sigma| + \sum_{\substack{\sigma \in F_h^{\text{int}} \\ \sigma \in F_h^{\text{ext}}} \frac{U_K(t) - 0}{|x_K - x_L|} |\sigma| = \int_K f(x,t) dx$

② On intègre $\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} (\star)$

$$\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} |k| \frac{d}{dt} U_k(t) dt + \frac{1}{\Delta t^n} \sum_{\substack{\sigma = kL \\ \sigma \in F_k \cap F_L^{\text{int}}} \atop |x_k - x_L|} \frac{U_k(t) - U_L(t)}{|x_k - x_L|} |\sigma| + \sum_{\substack{\sigma \in F_k \cap F_L^{\text{ext}} \\ F_k \cap F_L^{\text{ext}} \neq \emptyset}} \frac{U_k(t) - 0}{|x_k - \sigma|} |\sigma|$$

$$= \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\mathbb{R}} f(x,t) dx dt$$

$$|k| \frac{U_k^n - U_k^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\substack{\sigma = kL \\ \sigma \in F_k \cap F_L^{\text{int}}} \atop |x_k - x_L|} |\sigma| \frac{U_k^n - U_L^n}{|x_k - x_L|} + \sum_{\substack{\sigma \in F_k \cap F_L^{\text{ext}} \\ F_k \cap F_L^{\text{ext}} \neq \emptyset}} |\sigma| \frac{U_k^n - 0}{|x_k - \sigma|} = \int_{\mathbb{R}} f(x, t^n) dx$$

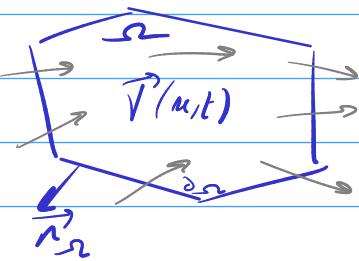
$$U_k^n = \frac{1}{|k|} \int_k U_k^0(x) dx .$$

$$\forall k \in M_h$$

$$\forall n = 1, \dots, m.$$

28/01/2026.

Discretisation VF des équations hyperboliques scalaires en dimension $d = 1, 2, 3$



$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{V}(x, t)) &= 0 \\ \vec{V} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ \vec{V} &\in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

→ Équation hyperbolique scalaire

$$\partial_t u(x, t) + \operatorname{Div}(f(u(x, t)) \vec{V}(x, t)) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T]$$

$$u(x, 0) = u^\circ(x) \quad x \in \Omega$$

$$u(x, t) = u^\delta(x, t) \quad (x, t) \in \Sigma(T) \subset \partial\Omega \times [0, T]$$

$$\Sigma(T) = \left\{ (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] / f'(u(x, t)) \cdot \vec{V}(x, t) \cdot \vec{n}_\Omega(u) < 0 \right\}$$

→ proposition: Soit $u^\circ \in L^\infty(\Omega)$, $u^\delta \in L^\infty(\partial\Omega \times [0, T])$, $\vec{V} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d)$
& $f \in C^1(\mathbb{R})$ (ou Lipschitz)

Alors il existe une solution faible entropique unique $u \in L^\infty(\Omega \times [0, T])$
De plus elle vérifie le principe du maximum:

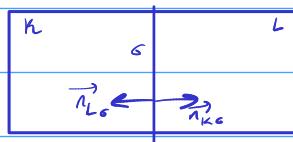
$$\min_{y \in \Omega} (\min_{(y, s) \in \Sigma(t)} u^\circ(y), \min_{(y, s) \in \Sigma(t)} u^\delta(y, s)) \leq u(x, t) \leq \max_{y \in \Omega} (\max_{(y, s) \in \Sigma(t)} u^\circ(y), \max_{(y, s) \in \Sigma(t)} u^\delta(y, s))$$

$$I_0 = [\min_{y \in \Omega} (\min_{(y, s) \in \Sigma(t)} u^\circ(y), \min_{(y, s) \in \Sigma(t)} u^\delta(y, s)), \max_{y \in \Omega} (\max_{(y, s) \in \Sigma(t)} u^\circ(y), \max_{(y, s) \in \Sigma(t)} u^\delta(y, s))]$$

Rq: En dimension 1, on avait $\vec{V} = \vec{e}_x$

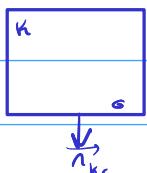
$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0$$

→ Discretisation: mailles $K \in M_h$



$$\sigma = K|L \in F_h^{\text{int}}$$

$$\vec{n}_{K\bar{\sigma}} + \vec{n}_{\bar{L}\sigma} = 0$$



$$\sigma = K|I \in F_h^{\text{ext}}$$

$$V_h = \{v_h \in L^\infty(\Omega) / v_h|_{K\bar{\sigma}} = u_K \quad \forall \bar{\sigma} \in \bar{L}, \forall K \in M_h\}$$

$$t^* = \begin{cases} t^n & \text{si Euler implicite} \\ t^{n-1} & \text{si Euler explicite} \end{cases} \quad \Delta t^n = t^n - t^{n-1}$$

$$u_k^* = \begin{cases} u_k^n & \text{si Euler implicite} \\ u_k^{n-1} & \text{si Euler explicite} \end{cases}$$

$$u_\sigma = \frac{1}{|L\bar{\sigma}|} \int_{\bar{\sigma}} u^*(x, t^*) \, ds$$

$$V_{K\bar{\sigma}}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\bar{\sigma}} \vec{J}(x, t) \cdot \vec{n}_{K\bar{\sigma}} \, ds(x) \, dt$$

$$V_{L\bar{\sigma}}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\bar{\sigma}} \vec{r}(x, t) \cdot \vec{n}_{L\bar{\sigma}} \, ds(x) \, dt$$

$$\forall \sigma = K|L \quad V_{K\bar{\sigma}}^n + V_{L\bar{\sigma}}^n = 0$$

• Discretisation VF de l'équation :

$$\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_K \partial_t u(x,t) dx dt + \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_K \text{Div}(\vec{f}(u(x,t)) \vec{V}(x,t)) dx dt = 0$$

*a t réelle
une dépendance
en temps dans
le flux*

$\int_K \frac{u(x,t^n) - u(x,t^{n-1})}{\Delta t^n} dx + \sum_{\sigma \in F_K} \boxed{\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\sigma} \vec{f}(u(x,t)) \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{K\sigma} dx dt = 0}$

flux exacte

discretisé par

 $|K| \frac{(u_K^n - u_K^{n-1})}{\Delta t^n}$

*Discretisé par un flux numérique
noté $\bar{F}_{K\sigma}^n(u_h^*)$*

⇒ Equation dans la maille K et sur l'intervalle de temps (t^{n-1}, t^n) :

$$|K| \frac{u_K^n - u_K^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma \in F_K} \bar{F}_{K\sigma}^n(u_h^*) = 0 \quad \forall K \in \mathcal{M}_h$$

$\forall n = 1, \dots, m$.

• Discretisation du flux: flux monotone deux points

$$\bar{F}_{K\sigma}^n(u_h) = \begin{cases} \bar{F}_{K\sigma}^n(u_K, u_L) & \forall \sigma = K|L \in F_h^{\text{int}} \\ \bar{F}_{K\sigma}^n(u_K, u_\sigma) & \forall \sigma = K|L \in F_h^{\text{ext}} \end{cases}$$

• propriétés: Conservativité $\bar{F}_{K\sigma}^n(v, w) + \bar{F}_{L\sigma}^n(w, v) = 0$

v	σ	w
-----	----------	-----

$$\forall \sigma = K|L \quad \forall (v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

• Consistance: On impose que le flux numérique est exacte sur les "u constants"

$$\bar{F}_{K\sigma}^n(v, v) = f(v) \quad \forall v \in V_h; \forall \sigma \in F_K, \forall v \in \mathbb{R}.$$

- monotonie : $\bar{F}_{k\sigma}^n(u, w)$ est croissant % u, décroissant % w.

→ Schéma VF :

$$\left\{ \begin{array}{l} |K| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t} + \sum_{\substack{\sigma = kL \\ \in F_K \cap F_\sigma^\text{int}}} \bar{F}_{k\sigma}^n(u_k^+, u_L^+) + \sum_{\substack{\sigma = kL \\ \in F_L \cap F_\sigma^\text{int}}} \bar{F}_{k\sigma}^n(u_k^-, u_L^-) = 0 \\ u_k^n = \frac{1}{|K|} \int_K u^n(x) dx \quad \forall x \in K_n \\ \forall n = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

• Rappel 1D :

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0$$

- le flux exact $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}(u) = f(u(x_{i+\frac{1}{2}}))$

- le flux numérique $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}(u_i, u_{i+1})$

avec \bar{F} flux monotone deux points vérifiant :

consistance : $\bar{F}(v, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$

monotone $\bar{F}(v, w) \nearrow \% v \& \searrow \% w$.

Lipschitz par rapport aux deux variables avec $\text{Lip}_{f_1} \& \text{Lip}_{f_2}$
sur $I_0 \times I_0$

• Exemples :

pour f croissante : $\bar{F}(v, w) = f(w)$ } schéma décentré
pour f décroissante : $\bar{F}(v, w) = f(w)$ } amont

• Exemple pour f Lipschitz :

$$\bar{F}(v, w) = f(v) + f(w) + \frac{D}{2}(v-w)$$

$$D \geq \text{Lip}_f = \max_{s \in I_0} |f'(s)|$$

proposition: Soit $F(v, w)$ un flux monotone deux points pour $f(v)$, alors

$$\bar{F}_{K\sigma}^n(v, w) = \begin{cases} F(v, w) V_{K\sigma}^n & \text{si } V_{K\sigma}^n \geq 0 \\ F(w, v) V_{K\sigma}^n & \text{si } V_{K\sigma}^n \leq 0 \end{cases}$$

est un flux monotone deux points pour le modèle multidi

On note $a^+ = \max(0, a)$, $a^- = \min(0, a)$
avec $a = a^+ + a^-$

$$\bar{F}_{K\sigma}^n(v, w) = \bar{F}(v, w)(V_{K\sigma}^n)^+ + \bar{F}(w, v)(V_{K\sigma}^n)^-$$

preuve: conservativité

$$\bar{F}_{K\sigma}^n(v, w) + \bar{F}_{L\sigma}^n(w, v) = \begin{cases} \bar{F}(v, w) V_{K\sigma}^n \\ \quad + \bar{F}(v, w) V_{L\sigma}^n = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } \begin{cases} V_{K\sigma}^n \geq 0 \\ V_{L\sigma}^n \leq 0 \end{cases} \\ \text{car } V_{K\sigma}^n + V_{L\sigma}^n = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} \bar{F}(w, v) V_{K\sigma}^n \\ \quad + \bar{F}(w, v) V_{L\sigma}^n = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } \begin{cases} V_{K\sigma}^n \geq 0 \\ V_{L\sigma}^n \leq 0 \end{cases} \\ \text{car } V_{K\sigma}^n + V_{L\sigma}^n = 0 \end{array}$$

consistance:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{K\sigma}^n(v, v) &= \bar{F}(v, v)(V_{K\sigma}^n)^+ + \bar{F}(v, v)(V_{K\sigma}^n)^- \\ &= f(v) \underbrace{\left((V_{K\sigma}^n)^+ + (V_{K\sigma}^n)^- \right)}_{V_{K\sigma}^n} = f(v) V_{K\sigma}^n \end{aligned}$$

Monotonicité: Oui grâce à la monotonie de $\bar{F}(v, w)$ et à la permutation de v et w selon le signe de $V_{K\sigma}^n$

→ Principe du maximum discret :

$$\textcircled{1} \quad |k| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma=KL} F_{k\sigma}^n(u_k^*, u_\sigma^*) + \sum_{\sigma=KL} F_{k\sigma}^n(u_k^*, u_\sigma^*) = 0$$

$$\frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{V_K} d\omega \vec{V} \partial_K = 0 \Leftrightarrow \sum_{\sigma \in F_K} \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{V_K} \vec{V}(x,t) \cdot \vec{n}_{k\sigma} d\omega dt = 0$$

$\checkmark_{k\sigma}$

$$\boxed{\sum_{\sigma \in F_K} V_{k\sigma}^n = 0}$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} \sum_{\sigma \in F_K} F(u_k^*, u_\sigma^*) \underbrace{V_{k\sigma}^n}_{(V_{k\sigma}^n)^+ + (V_{k\sigma}^n)^-} = 0$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$

$$|k| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma=KL} \left(\underbrace{F(u_k^*, u_L^*) (V_{k\sigma}^n)^+}_{-F(u_k^*, u_L^*) (V_{k\sigma}^n)^+} + \underbrace{F(u_L^*, u_k^*) (V_{k\sigma}^n)^-}_{-F(u_L^*, u_k^*) (V_{k\sigma}^n)^-} \right. \\ \left. + \sum_{\sigma=KL} \left(\underbrace{F(u_k^*, u_\sigma^*) (V_{k\sigma}^n)^+}_{-F(u_k^*, u_\sigma^*) (V_{k\sigma}^n)^+} + \underbrace{F(u_\sigma^*, u_k^*) (V_{k\sigma}^n)^-}_{-F(u_\sigma^*, u_k^*) (V_{k\sigma}^n)^-} \right) \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a_{k\sigma} \leq \text{Lip}_{F_2} \\ 0 \leq b_{k\sigma} \leq \text{Lip}_{F_1} \end{array} \right.$$

$a_{k\sigma}$ & $b_{k\sigma}$ sont des quotients

$$|k| \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma=KL} a_{k\sigma} (u_k^* - u_L^*) (V_{k\sigma}^n)^+ + b_{k\sigma} (u_k^* - u_L^*) (-V_{k\sigma}^n)^-$$

$$+ \sum_{\sigma=KL} a_{k\sigma} (u_k^* - u_\sigma^*) (V_{k\sigma}^n)^+ + b_{k\sigma} (u_k^* - u_\sigma^*) (-V_{k\sigma}^n)^- = 0$$

• Cas implicite : $* = n$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|K|}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma \in F_K} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma} (- (V_{K\sigma}^n)^-) \right) U_K^n \\ &= \frac{|K|}{\Delta t^n} U_K^{n-1} + \left(\sum_{\sigma \in KIL} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + \sum_{\sigma \in KIL} b_{K\sigma} (- (V_{K\sigma}^n)^-) \right) U_L^n \\ &+ \left(\sum_{\sigma \in KLO} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + \sum_{\sigma \in KLO} b_{K\sigma} (- (V_{K\sigma}^n)^-) \right) U_G^n \end{aligned}$$

↳ Combinaison convexe donne le principe du maximum si $\Delta t^n \geq 0$

• Cas explicite : $* = n-1$

$$\begin{aligned} \frac{|K|}{\Delta t^n} U_K^n &= \left(\frac{|K|}{\Delta t^n} + \sum_{\sigma \in F_K} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma} (- (V_{K\sigma}^n)^-) \right) U_K^{n-1} \\ &+ \left(\sum_{\sigma \in KIL} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + \sum_{\sigma \in KIL} b_{K\sigma} (- (V_{K\sigma}^n)^-) \right) U_L^{n-1} \\ &+ \left(\sum_{\sigma \in KLO} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + \sum_{\sigma \in KLO} b_{K\sigma} (- (V_{K\sigma}^n)^-) \right) U_G^{n-1} \end{aligned}$$

↳ Combinaison convexe donne principe du maximum si :

$$\Delta t^n \leq \min \frac{|K|}{\sum_{\sigma \in F_K} a_{K\sigma} (V_{K\sigma}^n)^+ + b_{K\sigma} (- (V_{K\sigma}^n)^-)}$$

Condition suffisante CFL :

$$\Delta t^n \leq \min_{K \in \mathcal{K}_h} \frac{|K|}{\text{Lip}_{F_2} \sum_{\sigma \in F_K} (V_{K\sigma}^n)^+ + \text{Lip}_{F_1} \sum_{\sigma \in F_K} (- (V_{K\sigma}^n)^-)}$$

04/02/2026