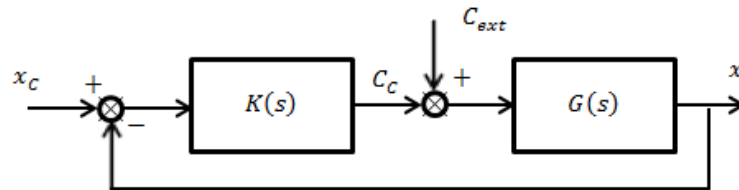


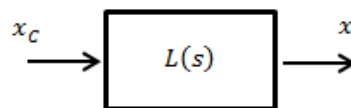
**Examen MAM5 2022, partie « Contrôle d'Attitude des Satellites » (D. Losa)**

**Exercice 1)**

Considérer la boucle de contrôle décrite dans le dessin juste en bas en fonction des fonctions de transfert  $K(s)$  et  $G(s)$



Pour ce qui concerne l'entrée  $x_c$  et la sortie  $x$ , réduire cette boucle de contrôle à celle simplifiée donnée par :



1. Écrire la fonction de transfert  $L(s)$  en fonction des fonctions de transfert  $K(s)$  et  $G(s)$  :

$$L(s) = \frac{x(s)}{x_c(s)} = ?$$

2. Sous quelle condition la fonction de transfert  $L(s)$  garantit la stabilité du système avec  $x_c$  en entrée et  $x$  en sortie ?
3. Écrire maintenant la fonction de transfert entre que la variable externe  $c_{ext}$  et la sortie  $x$  :

$$\frac{x(s)}{c_{ext}(s)} = ?$$

4. Si la fonction de transfert  $G(s)$  est la suivante

$$G(s) = 100 \frac{(s + 34)}{s(s - 10)(s - 5)}$$

si la fonction de transfert de  $K(s)$  est la suivante

$$K(s) = \frac{10}{s} + 5s + 4$$

et si le couple  $c_{ext}$  est un signal à échelon dont la transformée de Laplace est

$$C_{ext}(s) = \frac{7}{s}$$

en appliquant le théorème de la valeur finale, évaluer l'impact de  $C_{ext}$  sur la sortie  $x$ .

Rappel : théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot F(s)]$$

avec  $F(s)$  transformée de Laplace de  $f(t)$

5. Répondre à la question 4. mais en supposant que la fonction de transfert  $K(s)$  est la suivante

$$K(s) = 4$$

et que  $G(s)$  et  $C_{ext}(s)$  sont les mêmes du point 4..

6. Supposons que la fonction de transfert du contrôleur  $K(s)$  est celle d'un contrôleur PID. Écrire la fonction de transfert de ce contrôleur en fonction des trois gains génériques  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  (proportionnel, intégral, dérivé).

## Exercice 2)

Écrire la fonction de transfert entre  $X$  et  $U$  à partir de l'équation temporelle suivante

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) - 10 \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$$

Calculer les pôles et les zéros du système.

Est-ce que le système avec  $u$  comme entrée et  $x$  comme sortie est stable ?

Notation :  $X$  est la transformée de Laplace de  $x(t)$  et  $U$  la transformée de Laplace de  $u(t)$ .

### Exercice 3)

Considérer le système en forme d'état

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 3 \quad 0]$$

Calculer les matrices de contrôlabilité et d'observabilité du système.

Est-ce que le système est contrôlable ?

Est-ce que le système est observable ?

### Exercice 4)

Pour le système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 5x_2 + u \end{cases}$$

avec le suivant critère à minimiser

$$J = x_1(t_f)^2 + x_2(t_f)^2 + u(t_f)^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{1}{2} \cdot x_1(t)^2 + \frac{1}{2} \cdot u(t)^2 \right] dt$$

écrire les étapes 1., 2., 3. de l'algorithme pour déterminer le contrôle optimale, jusqu'à l'écriture des équations d'état et d'états adjoint, sans résolution de ces dernières.

Rappel :

## Processus pour résoudre un problème de contrôle optimal

8

On considère un système dynamique non linéaire et non-stationnaire (qui dépend explicitement du temps)

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

On considère un critère de performance de la forme

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt$$

- 1) Définir la fonction Hamiltonienne :  $\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda, t) = f_0(x(t), u(t), t) + \lambda^T f(x(t), u(t), t)$ ;
- 2) Minimiser  $\mathcal{H}$  par rapport à  $u$  en résolvant  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$  pour obtenir  $u^*(t) = h(x(t), \lambda, t)$ ;
- 3) En utilisant les résultats des points 1) et 2) calculer la valeur optimale de fonction Hamiltonienne  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}(x(t), u^*(t), \lambda, t)$  et construire les équations d'état et état adjoint  $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda}$  et  $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x}$ ;
- 4) Résoudre le système d'équations différentielles avec condition initiale  $x(t_0) = x_0$  et condition finales  $\left[ \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[ \frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^T(t) \right]_{t_f} \delta x_f = 0$ ;
- 5) Remplacer la solution des équation différentielles  $x^*(t)$  et  $\lambda^*(t)$  dans l'expression du contrôle optimale trouvée au pas 2).