Cours Scientific Machine Learning

Séance d'exercices du 26 janvier

Exercice 1

Soit K appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que

$$\| \tanh^{(K)} \|_\infty \leq 2^{K-1}(K+2)!$$

Exercice 2 (issu de l'examen en 2024-2025)

Soit σ la fonction qui à x appartenant à $\mathbb{R}$ associe $\sigma(x) = \tanh(x)$. Dans le cours nous avons vu l'importance de savoir estimer les dérivées successives de cette fonction et cet exercice propose une estimation de la dérivée k-ième de σ.

1. Soit $k \geq 1$, montrer que si on introduit la suite de polynômes définie par $p_1 = 1$ et pour $j > 1$ et x appartenant à $\mathbb{R}$ par

$$p_j(x) = xp_{j-1}(x) - \frac{1-x^2}{2}p'_{j-1}(x),$$

alors pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\sigma^{(k)}(x) = (-2)^{k-1}\sigma'(x)p_k(\sigma(x)).$$

2. En déduire que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$|\sigma^{(k)}(x)| \leq 2^{k+1}\min(e^{-2x}, e^{2x}) \max_{y\in[-1,1]} |p_k(y)|.$$

Exercice 3

Soit la fonction sign définie pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $1_{\{x>0\}} - 1_{\{x<0\}}$. Soit K appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\theta\to+\infty} \| \tanh_\theta - sign\|_{C^K(\mathbb{R}\setminus]-\varepsilon,\varepsilon[)} = 0.$$

Exercice 1

Soit K appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que

$$\| \tanh^{(K)} \|_\infty \leq 2^{K-1}(K+2)!$$

$\tanh^{(k)} = P_k(\tanh)$ $\qquad$ $P_{k+1}(x) = (1-x^2)P_k'(x)$ $\qquad$ P_k polynôm de deg $k+1$

pour $k=0$

$\tanh = P_0(\tanh) \Rightarrow P_0(x) = x$.

suppose true for k

$\Rightarrow \tanh^{(k)} = P_k(\tanh)$ ①.

RTP $\tanh^{(k+1)} = P_{k+1}(\tanh)$

$\tanh^{(k+1)} = (\tanh^{(k)})' = P_k'(\tanh)\,(\tanh)'$

$= (1-\tanh^2)^2 P_{k-1}'(\tanh)$

$= (1-\tanh^2)^3 P_{k-2}'(\tanh)$

$= (1-\tanh^2)^{k+1} P_0'(\tanh) = (1-\tanh^2)^{k+1}$

En posant $P_k(X) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)}X + \cdots + a_{k+1}^{(k)}X^{k+1}$

donc $P_{k+1}(X) = (1-X^2)P_k'(X) = (1+X^2)\{a_1^{(k)} + 2a_2^{(k)}X + \cdots + (k+1)a_{k+1}^{(k)}X^k\}$

En identifiant les coefficients on en déduit la relation suivante :

$a_i^{(k+1)} = (i+1)\,a_{i+1}^{(k)} - (i-1)\,a_{i-1}^{(k)}$ avec la convention $a_{-1}^{(k)} = a_{k+2}^{(k)} = 0$

$M(P_{k+1}) = \max_{0 \leq i \leq k+2} |a_i^{(k+1)}| \leq 2(k+1)M(P_k)$ donc par récurrence

$\|\tanh^{(k)}\|_\infty = \|P_k(\tanh)\|_\infty \leq 2^{k-1}(k+2)!$

Exercice 2 (issu de l'examen en 2024-2025)

Soit σ la fonction qui à x appartenant à $\mathbb{R}$ associe $\sigma(x) = \tanh(x)$. Dans le cours nous avons vu l'importance de savoir estimer les dérivées successives de cette fonction et cet exercice propose une estimation de la dérivée k-ième de σ.

1. Soit $k \geq 1$, montrer que si on introduit la suite de polynômes définie par $p_1 = 1$ et pour $j > 1$ et x appartenant à $\mathbb{R}$ par
$$p_j(x) = xp_{j-1}(x) - \frac{1-x^2}{2}p'_{j-1}(x),$$
alors pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$$\sigma^{(k)}(x) = (-2)^{k-1}\sigma'(x)p_k(\sigma(x)).$$

2. En déduire que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$$|\sigma^{(k)}(x)| \leq 2^{k+1}\min(e^{-2x}, e^{2x}) \max_{y\in[-1,1]} |p_k(y)|.$$

RTP: $\sigma^{(k)}(x) = (-2)^{k-1}\sigma'(x) p_k(\sigma(x))$

we have $\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_j(x) = x\, p_{j-1}(x) - \dfrac{1-x^2}{2} p'_{j-1}(x) \end{cases}$

pour $k=1$

$\sigma'(x) = \tanh'(x)$

$= (1 - \tanh^2)$

$= (-2)^0 \sigma'(x)\, p_1(\sigma(x))$

spz true for $k \Rightarrow \sigma^{(k)}(x) = (-2)^{k-1}\sigma'(x) P_k(\sigma(x))$

RTP: $\sigma^{(k+1)}(x) = (-2)^k \sigma'(x)\, P_{k+1}(\sigma(x))$

$\sigma^{(k+1)}(x) = (\sigma^{(k)}(x))' = ((-2)^{k-1}\sigma'(x) P_k(\sigma(x)))'$

$= (-2)^{k-1}\left[(\sigma'(x))' P_k(\sigma(x)) + \sigma'(x) P'_k(\sigma(x))\sigma'(x)\right]$

$= (-2)^{k-1}\left[(-2)\sigma'(x) p_2(\sigma(x)) P_k(\sigma(x)) + (\sigma'(x))^2\right.$

$= (-2)^{k-1}\sigma'(x)\left[-2 \underbrace{p_2(\sigma(x))}_{\sigma(x)} P_k(\sigma(x)) + \sigma'(x) P'_k(\sigma(x))\right].$

RTP $(-2)^k \sigma'(x) \underline{P_{k+1}(\sigma(x))} \to x P_k(x) - \frac{(1-x^2)}{2} P_k'(x)$.

$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_j(x) = x P_{j-1}(x) - \frac{1-x^2}{2} P_{j-1}'(x) \end{cases}$

$P_2(\sigma(x)) = \underbrace{x P_1(x)}_{x} - \cancel{\frac{(1-x^2)}{2} P_1'(x)} \to 0$

$$= (-2)^{k-1} \sigma'(x) \left[(-2) \sigma(x) P_k(\sigma(x)) \frac{(-2)}{2} (1 - \tanh^2) P_k'(\sigma(x)) \right]$$

$$= (-2)^k \sigma'(x) \left[\sigma(x) P_k(\sigma(x)) - \frac{(1-\sigma(x))}{2} P_k'(\sigma(x)) \right]$$

$$= (-2)^k \sigma'(x) \; P_{k+1}(\sigma(x))$$

2) $|\sigma^{(k)}(x)| \leq 2^{k-1} |\sigma'(x)| |P_k(\sigma(x))|$

$$\leq \boxed{2^{k-1} |\sigma'(x)|} \max_{-1 \leq y \leq 1} |P_k(y)|$$

RTP

$\leq 2^{k+1} \min(e^{-2x}, e^{2x})$

Il reste à démontrer que $|\sigma'(x)| \leq 4 \min(e^{-2x}, e^{2x})$ pour $x \in [0, +\infty[$ car la fonction σ' est paire. $\sigma'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

$$|\sigma'(x)| = \frac{|4|}{|e^x + e^{-x}|^2} = 4 \cdot \frac{1}{|e^x + e^{-x}|^2} = \frac{4}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$$

$$\leq \frac{4}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

$$\leq 4(e^{-2x} + e^{2x})$$

$$\leq 4 \min(e^{-2x}, e^{2x})$$

<u>correction</u>: pour $x \geq 0$ on a $e^x + e^{-x} \geq e^x$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^x + e^{-x}} \leq e^{-x}.$$

$$\left(\frac{1}{e^x + e^{-x}} \right)^2 \leq e^{-2x} = \min(e^{-2x}, e^{2x})$$

d'où $\sigma'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \leq 4 \min(e^{-2x}, e^{2x})$

Exercice 3

Soit la fonction sign définie pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $1_{\{x>0\}} - 1_{\{x<0\}}$. Soit K appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\theta \to +\infty} \| \tanh_\theta - sign \|_{C^K(\mathbb{R} \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[)} = 0.$$

$\tanh_\theta(x) = \tanh(\theta x)$

RTP $\lim_{\theta \to +\infty} \| \tanh_\theta - sign \|_{C^K(\mathbb{R} \setminus]\varepsilon, \varepsilon[)} = 0$ → on a enlevé le voisinage de 0

1) On se limite par imparité à l'intervalle $[\varepsilon, +\infty[= I$

On va commencer par estimer $\tanh_\theta - 1$ sur I

$$|\tanh(\theta x) - 1| \leqslant \max_{x \in [\varepsilon, +\infty[} |\tanh(\theta x) - 1| = \|\tanh_\theta - 1\|$$

$$\tanh(\theta x) = \frac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}$$

$$\tanh(\theta x) - 1 = \frac{\cancel{e^{\theta x}} - e^{-\theta x} - \cancel{e^{\theta x}} - e^{-\theta x}}{e^{\theta x} + e^{-\theta x}} = \frac{-2e^{-\theta x}}{e^{\theta x} + e^{-\theta x}} = -\frac{2e^{-\theta x}}{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}$$

$$= -2 \frac{\cancel{e^{-\theta x}}}{\cancel{e^{-\theta x}}(1 + e^{2\theta x})} = \frac{-2}{1 + e^{2\theta x}}$$

$$|\tanh_\theta(x) - 1| \leqslant \frac{2}{1 + e^{2\theta x}} \leqslant 2e^{-2\theta x} \leqslant 2e^{-2\theta \varepsilon}$$

$$\sup_{x \in I} |\tan_\theta(x) - 1| \leqslant 2e^{-2\theta\varepsilon} \xrightarrow[\theta \to +\infty]{} 0$$

$$\lim_{\theta \to +\infty} \sup_{x \in I} |\tanh_\theta(x) - 1| = 0$$

Pour la dérivée k-ième on utilise l'exercice 1 car on a

$$\tanh^{(k)} = P_k(\tanh)$$
$$= (1 - \tanh^2) P'_{(k-1)}(\tanh)$$

$$\|\tanh_\theta^{(K)}\|_{[\varepsilon, +\infty[} \leqslant \overbrace{\theta^K \, \|1 - \tanh_\theta\|_I}^{2\theta^K e^{-2\theta\varepsilon}} \, \underbrace{\|1 + \tanh_\theta\|_I}_{\leqslant 2} \, \underbrace{\|P'_{K-1}(\tanh_\theta)\|_I}_{\text{majoration indep de } \theta \text{ d'après l'exo 1}}$$

attention on dérive $\tanh_\theta$ → le θ sort en facteur