Deuxième exemple de divergence de PINNs

Considérons la fonction définie pour $(t,x) \in \overline{\Omega}$ par

$$u_\theta(t,x) = \tanh^{oH}(x+0{,}5+\theta t) - \tanh^{oH}(x-0{,}5+\theta t) + \tanh^{oH}(0{,}5+\theta t) - \tanh^{oH}(1{,}5+\theta t)$$

On a $u_\theta(0,x) = \tanh^{oH}(x+0{,}5) - \tanh^{oH}(x-0{,}5) + \tanh^{oH}(0{,}5) - \tanh^{oH}(1{,}5)$ qui correspond à la condition initiale

De plus $u_\theta(t,1) = \cancel{\tanh^{oH}(1{,}5+\theta t)} - \cancel{\tanh^{oH}(0{,}5+\theta t)} + \cancel{\tanh^{oH}(0{,}5+\theta t)} - \cancel{\tanh^{oH}(1{,}5+\theta t)} = 0$

$$u_\theta(0,-1) = \tanh^{oH}(-0{,}5) - \tanh^{oH}(-1{,}5) + \tanh^{oH}(0{,}5) - \tanh^{oH}(1{,}5) = 0$$

Rappelons que pour $t \geqslant \varepsilon$ $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \tanh(\theta t) = 1$, on a donc

$$\lim_{\theta \to +\infty} \tanh(x+0{,}5+\theta t) = \lim_{\theta \to +\infty} \frac{\tanh(x+0{,}5) + \tanh(\theta t)}{1 + \tanh(x+0{,}5)\tanh(\theta t)}$$

$$= \frac{1 + \tanh(x+0{,}5)}{1 + \tanh(x+0{,}5)} = 1$$

De même $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \tanh(x-0{,}5+\theta t) = 1$

$$\lim_{\theta \to +\infty} \tanh(0{,}5+\theta t) = 1$$

$$\lim_{\theta \to +\infty} \tanh(1{,}5+\theta t) = 1$$

D'où $\lim\limits_{\theta \to +\infty} u_\theta(t,x) = 0$

Comme pour x, y appartenant à $\mathbb{R}$
$|\tanh(x) - \tanh(y)| \leqslant |x-y|$, on a par exemple

$$|\tanh(\tanh(x+0{,}5+\theta t)) - \tanh(\tanh(x-0{,}5+\theta t))| \leqslant |\tanh(x+0{,}5+\theta t) - \tanh(x-0{,}5+\theta t)|$$

$\downarrow \theta \to +\infty$
0

Par récurrence sur H, on peut donc montrer que

$$\underline{\lim_{\theta \to +\infty} u_\theta(t,x) = 0 \text{ pour } t \geqslant \varepsilon \text{ et } x \in [-1,1]}$$

On en déduit donc que

- $\underline{\lim_{\theta \to +\infty} |u_\theta(x_i^{(e)})| = 0}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n_e$ tels que $x_i^{(e)} \in \{-1,1\} \times [0,T]$

On a de plus

- $\lim_{\theta \to +\infty} \left| \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(x_j^{(r)}) \right| = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n_r$ $(x_j^{(r)} \notin \partial\Omega)$

En effet par exemple

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} \tanh(x+0{,}5+\theta t)\right| = \theta \left|(1-\tanh(x+0{,}5+\theta t))(1+\tanh(x+0{,}5+\theta t))\right|$$

$$\leqslant 2\theta \times \frac{2}{1+e^{x+0{,}5+\theta t}} \xrightarrow[\theta \to +\infty]{} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tanh(\tanh(x+0{,}5+\theta t)) = \left(1-\tanh^2(\tanh(x+0{,}5+\theta t))\right) \times \frac{\partial}{\partial t}\tanh(x+0{,}5+\theta t) \xrightarrow[\theta \to +\infty]{} 0$$

donc le résultat s'obtient par récurrence

Enfin on a

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$ qui permet d'obtenir que

- $$\lim_{\theta \to +\infty} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}\left(x_j^{(r)}\right) = 0$$ pour $1 \leq j \leq n_r$ $\left(x_j^{(r)} \notin \partial\Omega\right)$

On en déduit que

$$\lim_{\theta \to +\infty} R_{n_e, n_r}(u_\theta) = 0$$ ce qui implique que l'on a bien une suite minimisante

Il reste à étudier $\displaystyle \lim_{\theta \to +\infty} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}(t,x)\right)^2 dt\, dx$

A nouveau avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $\delta > 0$

$$I_\theta = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}(t,x)\right)^2 dt\, dx \geq \frac{1}{\delta} \int_{-1}^{1} \left(\int_0^\delta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}\right)(t,x)\, dt\right)^2 dx$$

$$\geq \delta^{-1} \int_{-1}^{1} \left(u_\theta(\delta, x) - u_\theta(0, x) - \int_0^\delta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}(t,x)\, dt\right)^2 dx$$

On a $\displaystyle \lim_{\theta \to +\infty} \| u_\theta(\delta, .)\|_{[-1,1],\infty} = 0$, et pour $t > 0$, $-1 \leq x \leq 1$

$\displaystyle \lim_{\theta \to +\infty} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}(t,x) = 0$. De plus $\displaystyle \left\|\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2}\right\|_{[0,T]\times[-1,1]} \leq C$ donc

par convergence dominée

$$\lim_{\theta \to +\infty} I_\theta \geq \delta^{-1} \int_{-1}^{1} \left(\tanh^{04}(x+0,5) - \tanh^{04}(x-0,5) + \tanh^{04}(0,5) - \tanh^{04}(1,5)\right)^2 dx$$

donc $\displaystyle \lim_{\theta \to +\infty} I_\theta = +\infty$