Correction détaillée du sujet d'examen CC no. 2
MAM5-INUM – Commande optimale

Rappel : équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

1. Cas homogène à coefficients constants

$$x'(t) = ax(t) \iff x'(t) - ax(t) = 0 \iff [x'(t) - ax(t)]e^{-at} = 0 \iff \frac{d}{dt}\left[x(t)e^{-at}\right] = 0$$
$$\iff x(t)e^{-at} = C \iff x(t) = Ce^{at}.$$

2. Cas affine à coefficients constants

$$x'(t) = ax(t) + b \iff x'(t) - ax(t) = b \iff [x'(t) - ax(t)]e^{-at} = be^{-at}$$
$$\iff \frac{d}{dt}\left[x(t)e^{-at}\right] = be^{-at} \iff x(t)e^{-at} = -\frac{b}{a}e^{-at} + C$$
$$\iff x(t) = \frac{b}{a} + Ce^{at}.$$

3. Cas général : $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$
On pose $A(t)$ une primitive de $a(t)$, donc le facteur intégrant est $e^{-A(t)}$:

$$x'(t) - a(t)x(t) = b(t) \iff [x'(t) - a(t)x(t)]e^{-A(t)} = b(t)e^{-A(t)}$$
$$\iff \frac{d}{dt}\left[x(t)e^{-A(t)}\right] = b(t)e^{-A(t)}.$$

Soit B une fonction telle que $B'(t) = b(t)e^{-A(t)}$. On obtient alors :

$$x(t)e^{-A(t)} = B(t) + C \iff x(t) = [B(t) + C]e^{A(t)}.$$

1 Exercice 1 (12 points)

On considère le problème de Lagrange suivant, à temps final t_f fixé,

$$\dot{x}(t) = ax(t)u(t) - bx(t), \quad t \in [0, t_f],$$

$$\int_0^{t_f} (u(t) - 1)x(t)\, dt \to \min,$$

où a et b sont des réels strictement positifs, avec $a > b$, et où $x(0) = x_0 > 0$ est fixé alors que $x(t_f)$ est laissé libre. On a la contrainte que, presque pour tout t,

$$u(t) \in [0, 1].$$

1.1 1.1 Hamiltonien

Énoncé. Écrire le hamiltonien du problème.

Correction.

1.2 1.1 Hamiltonien

Le problème de Lagrange considéré est un problème de contrôle optimal avec état final libre et temps final fixé. Le Hamiltonien H est défini par la formule générale :

$$H(t, x, u, p, p^0) = p^0 \, f^0(t, x, u) + p \, f(t, x, u),$$

où :

- $f^0(t, x, u) = (u(t) - 1) \, x(t)$ est l'intégrande du coût à minimiser,
- $f(t, x, u) = a \, x(t) \, u(t) - b \, x(t)$ est le second membre de l'équation différentielle d'état,
- $p^0 \leq 0$ est le multiplicateur constant associé au coût (avec $(p^0, p(t)) \neq 0$ pour tout t),
- $p(t)$ est la variable adjointe (ou moment conjugué) associée à l'état $x(t)$.

En substituant les expressions de f^0 et f, on obtient :

$$H(x, p, u) = p^0(u - 1)x + p\big(axu - bx\big).$$

On peut factoriser par x (supposé positif) :

$$H(x, p, u) = x\big[p^0(u - 1) + p(au - b)\big].$$

Ainsi, le Hamiltonien du problème est

$$\boxed{H(x, p, u) = x\big[p^0(u - 1) + p(au - b)\big].}$$

1.3 1.2 Système adjoint

Énoncé. Écrire le système différentiel vérifié par l'état adjoint.

Correction. Le système adjoint est déterminé par l'équation d'évolution de la variable adjointe $p(t)$, donnée par

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}\big(x(t), p(t), u(t)\big),$$

où

$$H(x, p, u) = x\big[p^0(u - 1) + p(au - b)\big].$$

Calculons la dérivée partielle de H par rapport à x :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = p^0(u - 1) + p(au - b).$$

Ainsi, l'équation différentielle pour la variable adjointe est

$$\dot{p}(t) = -p^0\big(u(t) - 1\big) - p(t)\,\big(a\,u(t) - b\big).$$

De plus, comme l'état final $x(t_f)$ est libre, la condition de transversalité donne

$$p(t_f) = 0.$$

Système adjoint complet :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{p}(t) = -p^0\big(u(t) - 1\big) - p(t)\,\big(a\,u(t) - b\big), \\ p(t_f) = 0. \end{array}}$$

Remarque. Le paramètre p^0 est une constante non positive ($p^0 \leq 0$) qui ne peut pas être simultanément nulle avec $p(t)$. Dans le cas normal (non dégénéré), on peut prendre $p^0 = -1$.

1.4 1.3 Conditions de transversalité

Énoncé. Écrire les conditions de transversalité.

Correction. Dans le cadre du principe du maximum de Pontryagin, lorsque l'état final $x(t_f)$ est libre (sans contrainte), la condition de transversalité impose que la variable adjointe vérifie :

$$p(t_f) = 0.$$

Explication. Lorsque l'état final est libre, l'adjoint final est nul.

1.5 1.4 Cas normal

Énoncé. Montrer qu'on est dans le cas normal.

Correction. Pour montrer que nous sommes dans le cas normal, nous devons vérifier que le multiplicateur p^0 associé au coût est non nul. Par définition, le cas anormal correspond à $p^0 = 0$. Nous allons montrer par l'absurde que ce cas est impossible.
Supposons que $p^0 = 0$. Alors le Hamiltonien devient

$$H(x, p, u) = p \cdot (axu - bx) = x\, p\, (au - b).$$

et le système adjoint s'écrit

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -p(t)\, \big(a\, u(t) - b\big),$$

avec la condition finale $p(t_f) = 0$ (puisque $x(t_f)$ est libre).

On considère l'équation différentielle linéaire homogène

$$p'(t) = \alpha(t)\, p(t), \qquad \alpha(t) = -(a\, u(t) - b).$$

On note

$$A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds, \quad A'(t) = \alpha(s).$$

Alors on a

$$\begin{aligned} p'(t) &= \alpha(t)p(t) \\ &\iff p'(t) - \alpha(t)p(t) = 0 \\ &\iff [p'(t) - \alpha(t)p(t)]e^{-A(t)} = 0 \\ &\iff \frac{d}{dt}\big[p(t)e^{-A(t)}\big] = 0 \\ &\iff p(t)e^{-A(t)} = C \\ &\iff p(t) = Ce^{A(t)}. \end{aligned}$$

Comme

$$A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds = -\int_0^t (a\, u(s) - b)\, ds,$$

on obtient

$$p(t) = C \exp\left(-\int_0^t (a\, u(s) - b)\, ds\right).$$

On applique la condition finale $p(t_f) = 0$:

$$p(t_f) = C \exp\left(-\int_0^{t_f} (a\, u(s) - b)\, ds\right) = 0.$$

Or l'exponentielle est strictement positive, donc

$$C = 0.$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, t_f]$,

$$p(t) = 0.$$

Ainsi, la seule solution possible est bien

$$p(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, t_f].$$

Mais alors, le couple $(p^0, p(t)) = (0, 0)$ est identiquement nul, ce qui contredit la condition de non-trivialité du principe du maximum de Pontryagin, qui exige que $(p^0, p(t)) \neq (0, 0)$ pour tout t.
Ainsi, l'hypothèse $p^0 = 0$ mène à une contradiction. Nous sommes donc dans le cas normal, et l'on peut normaliser $p^0 = -1$ (puisque $p^0 \leq 0$).

$$\boxed{\text{Le cas normal est vérifié : on peut prendre } p^0 = -1.}$$

Explication. Le cas anormal mène à une contradiction, donc on peut prendre $p^0 = -1$.

1.6 1.5 Condition de maximisation

Énoncé. Appliquer la condition de maximisation du Hamiltonien.

Correction. Avec $p^0 = -1$, le Hamiltonien devient :

$$H = x\left[-(u - 1) + p(au - b)\right] = x\left[u(ap - 1) + (1 - bp)\right].$$

Dans un premier temps, on considère

$$\dot{x}(t) = ax(t)u(t) - bx(t) \iff \dot{x}(t) = (au(t) - b)\, x(t).$$

On pose

$$A(t) = \int_0^t \big(au(s) - b\big)\, ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (au(t) - b)\, x(t) \\
&\iff \dot{x}(t) - (au(t) - b)\, x(t) = 0 \\
&\iff \left[\dot{x}(t) - (au(t) - b)\, x(t)\right] e^{-A(t)} = 0 \\
&\iff \frac{d}{dt}\left[x(t)e^{-A(t)}\right] = 0 \\
&\iff x(t)e^{-A(t)} = C.
\end{aligned}$$

On utilise la condition initiale $x(0) = x_0 > 0$:

$$x(0)e^{-A(0)} = x_0 \cdot 1 = C \iff C = x_0.$$

Ainsi,

$$x(t) = x_0 e^{A(t)} = x_0 \exp\left(\int_0^t \big(au(s) - b\big)\, ds\right).$$

En résumé,

$$\boxed{x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t \big(au(s) - b\big)\, ds\right), \quad x_0 > 0.}$$

Nous avons alors que puisque $x(t) > 0$ pour tout t, maximiser H par rapport à $u \in [0,1]$ revient à maximiser la fonction linéaire :

$$\varphi(u) = u(ap-1) - (bp-1).$$

Ainsi, la commande optimale est :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } ap(t) - 1 > 0, \\ 0 & \text{si } ap(t) - 1 < 0. \end{cases}$$

Lorsque $ap(t) - 1 = 0$, le Hamiltonien est indépendant de u et on est dans un cas singulier.

Explication. La commande optimale est bang-bang, sauf éventuellement lorsque $ap(t) = 1$.

1.7 1.6 Contrôle nul sur un intervalle final

Énoncé. Montrer qu'un contrôle optimal est nécessairement nul sur un intervalle $]\tau, t_f]$, avec $\tau < t_f$.

Correction. On a $p(t_f) = 0$, donc $ap(t_f) - 1 = -1 < 0$. Par continuité de p, il existe un intervalle $]\tau, t_f]$ sur lequel $ap(t) - 1 < 0$, et donc $u(t) = 0$ sur cet intervalle.

Explication. Près du temps final, la commande optimale est nulle.

1.8 1.7 Valeur de l'état adjoint sur l'intervalle final

Énoncé. Déterminer la valeur de l'état adjoint sur cet intervalle.

Correction. Pour déterminer la valeur de l'état adjoint sur l'intervalle $]\tau, t_f]$, où le contrôle optimal est nul ($u(t) = 0$), on utilise l'équation adjointe dans le cas normal ($p^0 = -1$).
L'équation adjointe est donnée par

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

avec

$$H(x,p,u) = x\bigl[1 - bp + (ap-1)u\bigr].$$

On calcule

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1 - bp + (ap-1)u,$$

d'où

$$\dot{p}(t) = -\bigl[1 - bp + (ap-1)u\bigr].$$

Sur l'intervalle $]\tau, t_f]$, on a $u(t) = 0$, donc

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\bigl[1 - bp(t)\bigr] \\ &= -1 + b\,p(t), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\dot{p}(t) = b\,p(t) - 1.$$

On a

$$\begin{aligned}
p'(t) &= b\,p(t) - 1 \\
&\iff p'(t) - b\,p(t) = -1 \\
&\iff [p'(t) - b\,p(t)]e^{-bt} = -e^{-bt} \\
&\iff \frac{d}{dt}\left[p(t)e^{-bt}\right] = -e^{-bt} \\
&\iff p(t)e^{-bt} = \int -e^{-bt}\,dt + C \\
&\iff p(t)e^{-bt} = \frac{1}{b}e^{-bt} + C \\
&\iff p(t) = \frac{1}{b} + Ce^{bt}.
\end{aligned}$$

On détermine C à l'aide de la condition finale $p(t_f) = 0$:

$$p(t_f) = \frac{1}{b} + Ce^{bt_f} = 0 \iff C = -\frac{1}{b}e^{-bt_f}.$$

Ainsi, sur l'intervalle $]\tau, t_f]$,

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{1}{b} - \frac{1}{b}e^{-bt_f}e^{bt} \\
&= \frac{1}{b}\big(1 - e^{b(t-t_f)}\big).
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{b}\left(1 - e^{b(t-t_f)}\right).}$$

1.9 1.8 Expression du temps τ

Énoncé. En déduire l'expression du temps τ.

Correction. Le temps τ est défini par la condition $ap(\tau) - 1 = 0$, soit $p(\tau) = \frac{1}{a}$. En utilisant l'expression de $p(t)$ sur $]\tau, t_f]$, on a :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}\left(1 - e^{b(\tau-t_f)}\right).$$

En résolvant pour τ, on obtient :

$$1 - e^{b(\tau-t_f)} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad e^{b(\tau-t_f)} = 1 - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a}.$$

Ainsi,

$$\tau = t_f + \frac{1}{b}\ln\left(\frac{a-b}{a}\right).$$

Puisque $a > b > 0$, on a $\frac{a-b}{a} < 1$ et donc $\ln\left(\frac{a-b}{a}\right) < 0$, ce qui assure $\tau < t_f$.

Explication. Le temps de commutation τ est déterminé par la condition $p(\tau) = 1/a$.

1.10 1.9 Contrôle égal à 1 sur l'intervalle initial

Énoncé. Montrer finalement que $u = 1$ sur $[0, \tau[$.

Correction. Nous avions

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } ap(t) - 1 > 0, \\ 0 & \text{si } ap(t) - 1 < 0. \end{cases}$$

Si $u = 1$ sur $[0, \tau]$, montrons que $ap(t) - 1 > 0$ pour $t < \tau$.

Avec $u = 1$, l'équation adjointe est $\dot{p}(t) = -p^0\big(u(t) - 1\big) - p(t)\,\big(a\,u(t) - b\big)$ et devient :

$$\dot{p} = -(1 - 1) - p(a - b) = -p(a - b).$$

La solution de cette équation est $p(t) = p(0)e^{-(a-b)t}$, $p(t)$ est donc décroissant.

On sait qu'à $t = \tau$, $p(\tau) = 1/a$. Donc pour $t < \tau$, on a $p(t) > p(\tau) = 1/a$, et ainsi $ap(t) - 1 > 0$. Par conséquent, $u(t) = 1$ sur $[0, \tau[$.

Explication. Sur l'intervalle initial, la commande optimale est égale à 1.

2 Exercice 2 (8 points)

2.1 2.1 Condition de transversalité

Énoncé. On considère un problème de commande optimale à temps final fixé dont les conditions terminales sont (état de dimension 2)

$$x_1^2(t_f) + x_2(t_f) = 1.$$

Donner la condition de transversalité correspondante.

Correction. La contrainte finale s'écrit $h(x) = 0$ avec $h(x) = x_1^2 + x_2 - 1$. Le gradient de h est :

$$\nabla h(x) = (2x_1, 1).$$

La condition de transversalité impose que le vecteur adjoint final $p(t_f)$ soit colinéaire à $\nabla h(x(t_f))$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$p(t_f) = \lambda \nabla h(x(t_f)) = \lambda(2x_1(t_f), 1).$$

En éliminant λ, on obtient :

$$p_1(t_f) = 2x_1(t_f)p_2(t_f).$$

Explication. La condition de transversalité exprime l'orthogonalité de l'adjoint final au noyau de la différentielle de la contrainte.

2.2 2.2 Code de tir

Énoncé. En déduire comment compléter le code de tir ci-dessous :

```
function shoot(p0)
    xf, pf = f(t0, x0, p0, tf)
    s = [xf[1] * xf[2] - 1, pf[1] * xf[1] - pf[2] * xf[2]] # À COMPLÉTER
    return s
end
```

Correction. Pour la contrainte $x_1^2(t_f) + x_2(t_f) = 1$, le code doit être modifié comme suit :

```
function shoot(p0)
    xf, pf = f(t0, x0, p0, tf)
    s = [xf[1]^2 + xf[2] - 1, pf[1] - 2*xf[1]*pf[2]]
    return s
end
```

Explication. La première condition correspond à la contrainte sur l'état final, la seconde à la condition de transversalité.