Master Option Inum *Année 2025/2026*

Cours Scientific Machine Learning

Séance d'exercices du 10 décembre

Exercice 1

On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1, \\ 0 & 2 < |x|, \\ 2 - |x|, & 1 \leq |x| \leq 2. \end{cases}$$

Soient N appartenant à $\mathbb{N}^*$ et les points $x_j = j/N$, $0 \leq j \leq N$, on introduit les fonctions ψ_j, $0 \leq j \leq N$, définie pour x appartenant à $[0, 1]$ par

$$\psi_j(x) = \psi(3N(x - x_j)).$$

1. Montrer que pour tout j, $0 \leq j \leq N$, le support de ψ_j est inclus dans $\{x \in [0, 1], |x - x_j| < 1/N\}$.
2. En déduire que pour tout x appartenant à $[0, 1]$,
$$\sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) = 1.$$
3. Montrer qu'à une constante près, la fonction ψ, et donc toute fonction ψ_j, $0 \leq j \leq N$, peut s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions ReLU.

Exercice 2 (à regarder pour la prochaine séance)

Soit σ la fonction qui à x réel associe $\tanh(x)$.

1. Soient y et h appartenant à $\mathbb{R}$, $h \neq 0$, donner à l'aide d'une formule de Taylor une majoration de
$$\left| y - \frac{\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) - \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right)}{h} \right|$$

2. On note pour simplifier "σ NN" un réseau de neurones avec la fonction d'activation σ. Soient $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, montrer que la fonction qui à x associe x peut être approchée à ε près sur tout intervalle $[-M, M]$ à l'aide d'un σ NN.