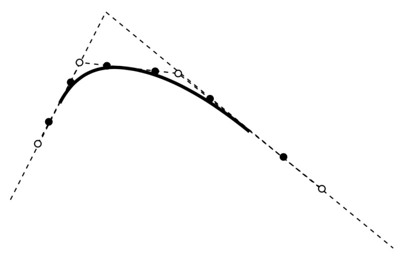
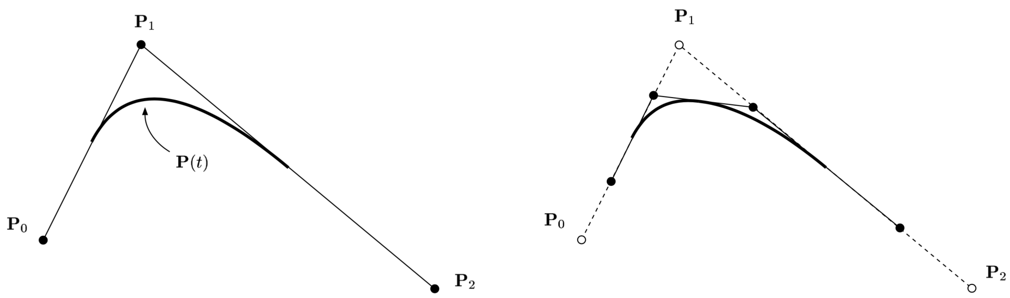
TP - Modélisation Géométrique
Courbes de subdivision

Exercice 1 (Méthode de Chaikin)**.**
Étant donnée une suite de points ordonnés $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$, qui définit donc un polygone, la méthode de Chaikin consiste à raffiner itérativement ce polygone en substituant deux points consécutifs par leurs deux barycentres à distance 1/4 et 3/4. Ce processus converge vers une courbe spline quadratique uniforme définie par les P_j, ce que l'on se propose d'expérimenter et démontrer dans cet exercice.

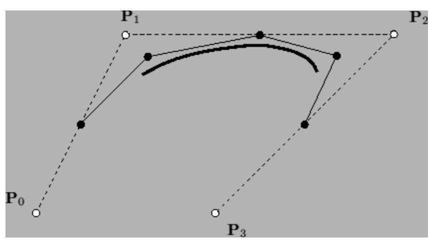


1. Implémenter cette méthode.
2. Soit une courbe B-spline quadratic uniforme définie par les trois points de contrôle P_0, P_1, P_2 sur l'intervalle $t \in [0, 1]$. Quel est son vecteur de noeuds ?
3. Donner les points de contrôle de la courbe précédente restreinte à l'intervalle $[0, 1/2]$, toujours comme courbe B-spline quadratique uniforme (cf. illutration ci-dessous).
4. Déduire de la question précédente le polygône de contrôle de la courbe de départ après subdivision en $t = 1/2$, toujours comme courbe B-Spline uniforme (cf. illutration ci-dessous).
5. Conclure que la méthode de Chaikin converge vers une courbe quadratique B-spline uniforme. Quelle est sa régularité ?
6. Que faut-il imposer à la liste de points $P_0, P_1, \ldots, P_n$ afin d'obtenir une courbe de Chaikin fermée ?



Exercice 2. On considère une courbe cubique spline uniforme définie par 4 points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 dans le plan (cf. illustration ci-contre).

1. Rappeler ce que signifie le terme *uniforme* pour une courbe spline.
2. Le tracé de cette courbe spline correspond à l'intervalle $t = [4, 6]$. Quel est son vecteur de noeuds ?
3. A quelles valeurs polaires correspondent les points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 ?



4. On considère à présent la portion de courbe correspondant à l'intervalle $t = [4, 5]$. Calculer ses points de contrôle comme courbe spline cubique uniforme ; on les exprimera en fonction des P_i.
5. Même question que la précédente pour la portion de courbe correspondant à l'intervalle $t = [5, 6]$.
6. Déduire qu'il suffit de cinq points de contrôle pour décrire les deux portions de courbes, comme illustré ci-dessus.

7. En vous inspirant des questions précédentes, décrire un schéma de subdivision qui permet de raffiner une ligne brisée et qui converge vers une cubique spline unforme. Pour cela, partant d'une ligne brisée donnée par la liste de points $[P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots]$, on décrira une étape de subdivision qui fournit une nouvelle ligne brisée $[E_0, V_1, E_1, V_2, E_2, V_3, E_3, V_4, E_4, \ldots]$ (voir l'illustration ci-contre). On donnera l'expression des points E_i en fonction des points P_j, puis l'expression des points V_k en fonction des points E_i et P_j.