Contrôle d’attitude des satellites

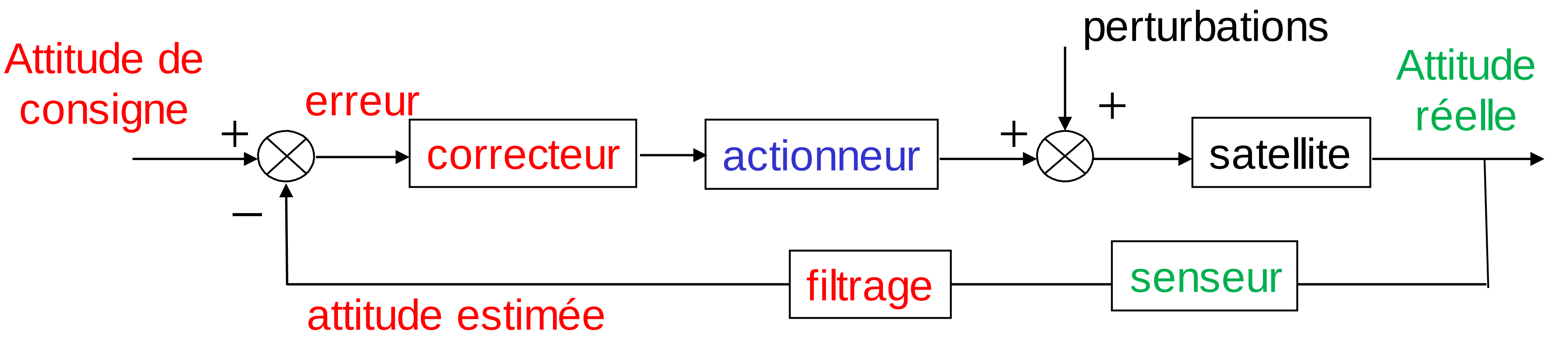
Automne 2025 – Politech’ Sophia – MAM5

Partie 1c – Rappels d’automatique

Damiana Losa – Thales Alenia Space

Structure générale d’un système asservi

- **Régulateur/ correcteur**
  - Comparaison entre consigne et mesure;
  - Elaboration de la commande;
  - Correction pour obtenir les meilleures performances possibles;
- **Actionneur** : il fournit la puissance nécessaire (moteur, roue à réaction, …).
- **Système** : le satellite.
  - Sa sortie est la grandeur à asservir ou réguler ou contrôler;
  - Evolue suivant la commande appliqué grâce à l’actionneur, mais soumis aux perturbations.
- **Senseur ou capteur** : il fournit une mesure (qui peut être imparfaite) de la sortie.



Qualité d’un système asservi

- **Stabilité**
  - La réponse à une variation de signal d’entrée (consigne ou perturbation) doit atteindre une nouvelle valeur et s’y maintenir.
- **Précision**
  - L’écart entre la consigne et la mesure ne doit pas dépasser une valeur tolérable
- **Rapidité**
  - Elle est caractérisée par le temps de réponse du système à une variation de signal d’entrée
- ***L’art de l’automaticien est de satisfaire de son mieux à ces exigences, qui sont souvent contradictoires, au moindre coût.***

Modélisation des systèmes physiques (1/4)

Pour réaliser un système asservi, il faut disposer d'un modèle mathématique du système.

Les approches possibles sont les deux suivantes :

- Détermination à partir des équations physiques (**modélisation**);
- Détermination à partir de relevés expérimentaux (**identification**).

On cherche, lorsque cela est possible, à obtenir **un modèle linéaire invariant**, l'avantage étant qu'il existe de nombreuses méthodes d'étude adaptées à ce cas.

Mais attention : l'hypothèse de linéarité n'est souvent qu'une approximation, justifiée dans un certain domaine de fonctionnement (au voisinage d'un point d'équilibre notamment).

Modélisation des systèmes physiques (2/4)

Point de départ : les lois de la physique (mécanique, électricité, …) conduisent en général à une ou plusieurs équations différentielles, en général non linéaires.

Il y a deux étapes afin d'obtenir un modèle linéaire:

- Recherche d'un **point d'équilibre**;
- **Linéarisation des équations** par développement limité autour de ce point d'équilibre.

- On obtient une représentation de notre système sous forme d'**équations différentielles linéaires**.

On pourra linéariser tous les systèmes physiques décrits par des équations différentielles où n'interviennent que des fonctions continues et dérivables (produit, puissance, trigonométrie, etc.).

Contre-exemple, non-linéarité intrinsèque au système :

commande bang-bang $s(t) = \begin{cases} +1 \; si \; e(t) > 0 \\ -1 \; si \; e(t) < 0 \end{cases}$

Modélisation des systèmes physiques (3/4)

MAIS

L'équation différentielle, même linéarisée, n'est pas très pratique à exploiter. On en déduit donc d'autres formes de représentation:

- Équations d'états;
- Transmittance ou Fonction de transfert.

On peut aussi choisir de représenter un système par une réponse typique

- Réponse impulsionnelle (réponse à une impulsion de Dirac);
- Réponse indicielle (réponse à un échelon unitaire $\gamma(t)$).

En théorie, toutes ces formes sont équivalentes, mais on choisira l'une ou l'autre en fonction de son aspect pratique pour élaborer la commande :

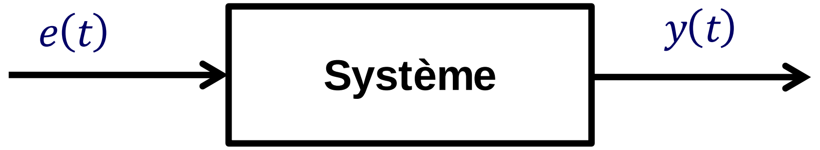
➢ ***Préférence pour la représentation d'état ou la fonction de transfert !***

Modélisation des systèmes physiques (4/4)

Équations d'état

En choisissant de manière appropriée un vecteur (le vecteur d'état), $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$, tout système linéaire invariant peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Be(t) \\ y(t) = Dx(t) + Ce(t) \end{cases}$$



- *Remarque* : Nombre de variables d'état = ordre total des équations différentielles.

- A tout instant, on doit être capable de savoir comment va se comporter le système si on l'excite par une entrée connue. Il suffit d'un certain nombre de variables « bien choisies » pour traduire le futur à partir des données d'entrées.

Fonction de transfert (1/4)

Transformée de Laplace :

$$e(t) \xrightarrow{TL} E(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)\, e^{-pt} dt \quad (cas\ général)$$

$$\underset{(signal\ causal)}{\gamma(t)e(t)} \xrightarrow{TL} E(p) = \int_{0}^{+\infty} e(t)\, e^{-pt} dt \quad (unilatéral)$$

La transformation de Laplace est souvent interprétée comme un passage du domaine temporel (dans lequel les entrées et sorties sont des fonctions de la variable t représentant le temps) au domaine fréquentiel (la variable $p = Ae^{i\theta}$ pouvant s'interpréter comme une « fréquence complexe » d'amplitude $|p| = A$ et de phase $arg(p) = \theta$)

Transformées usuelles

$$\gamma(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

$$t\gamma(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p^2} \qquad \mathrm{Re}(p) > 0$$

$$\delta(t) \xrightarrow{TL} 1 \qquad \forall p$$

$$e^{-at}\gamma(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p+a} \qquad \mathrm{Re}(p) > -a$$

$$TL\big(f'(t)\big) = -f(0) + p\,TL\big(f(t)\big)$$

$$TL\big(f^{n}(t)\big) = -f^{n-1}(0) + p\,TL\big(f^{n-1}(t)\big)$$

Fonction de transfert (2/4)

- Réponse impulsionnelle : $h(t)$ est la réponse à une impulsion de Dirac $\delta(t)$.

  Propriété

  La réponse $s(t)$ du système à une entrée quelconque $e(t)$ nulle pour $t < 0$ s'écrit

$$s(t) = \int_0^t e(\theta)\, h(t-\theta)\, d\theta = e(t) * h(t) \qquad \text{(produit de convolution)}$$

➢ D'un point de vue pratique, le calcul d'un produit de convolution n'est pas simple !

- On montre que $s(t) \xrightarrow{TL} S(p) = H(p)\, E(p)$

  $H(p)$, transformée de Laplace de $h(t)$ (réponse impulsionnelle) est appelée **fonction de transfert du système linéaire invariant.**

- ***Avantage : on peut manipuler des produits au lieu des produits de convolution !***

Fonction de transfert (3/4)

- Calcul de la fonction de transfert à partir des équations différentielles
  - Après linéarisation éventuelle, on a obtenu une ou plusieurs équations du type :

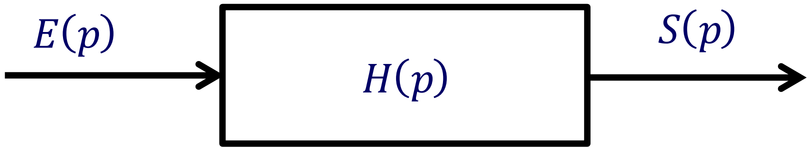
$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

  - Hypothèse : à $t = 0$, le système est sur son point d'équilibre: $e(t)$ et $s(t)$ et toutes leurs dérivées sont nulles.
  - On en déduit, dans le domaine de la transformé de Laplace

$$a_n p^n S(p) + \cdots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \cdots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

  - D'où (pour système linéaire uniquement) (avec $m \leq n$)

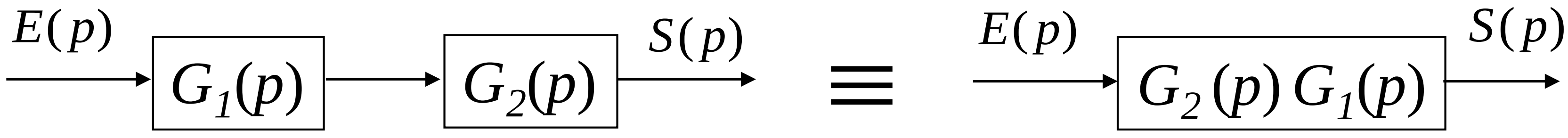
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$



Fonction de transfert (4/4)

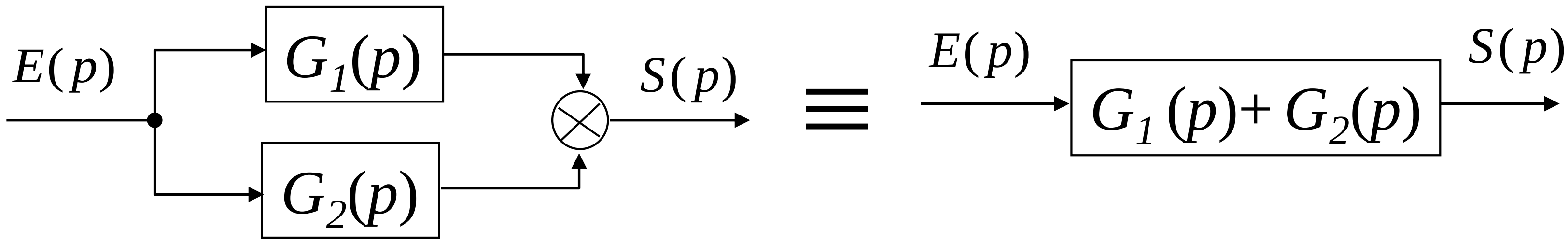
- Règles de manipulation des schémas-blocs

  - Blocs en cascade



$$S(p) = G_2(p)G_1(p)E(p)$$

  - Blocs en parallèles



$$S(p) = \left(G_1(p) + G_1(p)\right)E(p)$$

Stabilité d'un système

■ **Critère de stabilité EBRB (entrée bornée / réponse bornée) d'un système (condition nécessaire et suffisante) :**

Les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

■ **Propriété :**

Un système est stable EBRB si et seulement si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

- « Idée »:

$$S(s) = \frac{A}{s-\alpha} E(s) \xrightarrow[\substack{\text{réponse} \\ \text{impulsionnelle}}]{TL^{-1}} s(t) = A e^{\alpha t} \gamma(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \; si \; \alpha < 0$$

- Toute fonction de transfert $H(s)$ peut se décomposer en éléments simples, et on se ramène au cas ci-dessus.

Performance: relation entre position des pôles et allure des réponses temporelles (1/4)

- La position des pôles influence l'allure des réponses

  - Pour simplifier, on suppose des pôles simples et distincts.

$$S(s) = H(s)E(s) = \underbrace{\frac{A_1}{s-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n}{s-\alpha_n}}_{\textit{pôles de } H(s)} + \underbrace{\frac{B_1}{s-\beta_1} + \cdots + \frac{B_m}{s-\beta_m}}_{\textit{pôles de } E(s)}$$

$$\Rightarrow s(t) = \left(\underline{\underline{A_1 e^{\alpha_1 t} + \cdots + A_n e^{\alpha_n t}}} + B_1 e^{\beta_1 t} + \cdots + B_m e^{\beta_m t}\right)\gamma(t)$$

➢ Quelle que soit l'entrée, la réponse du système fait apparaître des termes liés aux pôles de sa transmittance.

Performance: relation entre position des pôles et allure des réponses temporelles (2/4)

- La position des pôles influence l'allure des réponses
  - Pôles réels: $\alpha_i = \sigma_i$

$$\begin{aligned} e^{\sigma_i t} &\to \infty \quad si \quad \sigma_i > 0 \\ e^{\sigma_i t} &= 1 \quad si \quad \sigma_i = 0 \\ e^{\sigma_i t} &\to 0 \quad si \quad \sigma_i < 0 \end{aligned}$$

d'autant plus vite que $|\sigma_i|$ est grand

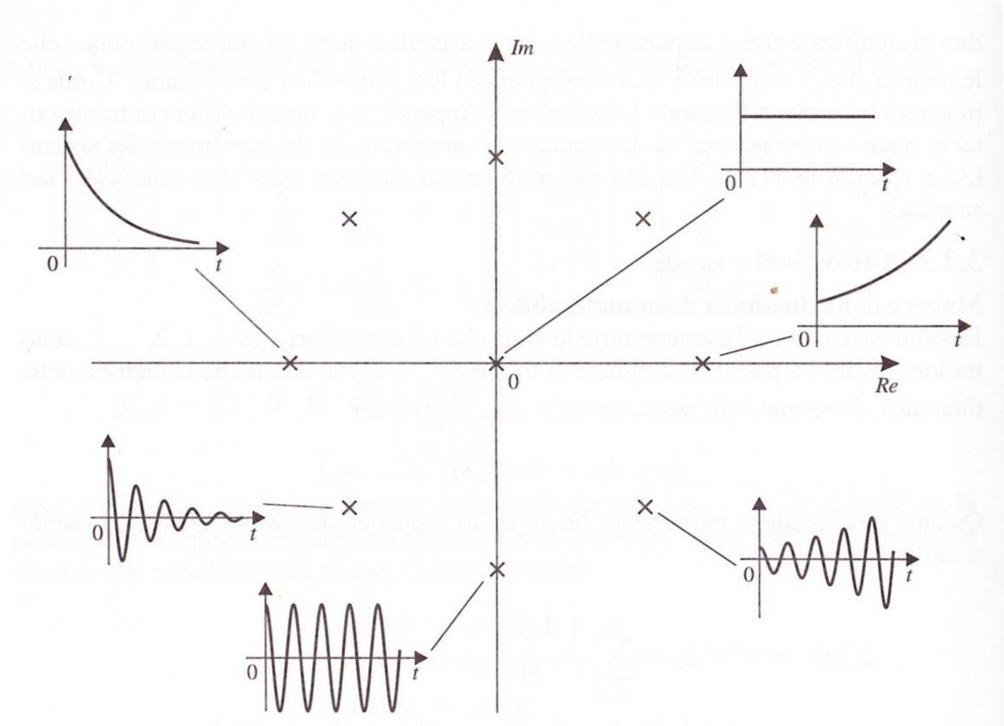
  - Pôles complexes : $\alpha_i = \sigma_i + j\,\omega_i$ et $\bar{\alpha}_i = \sigma_i - j\,\omega_i$

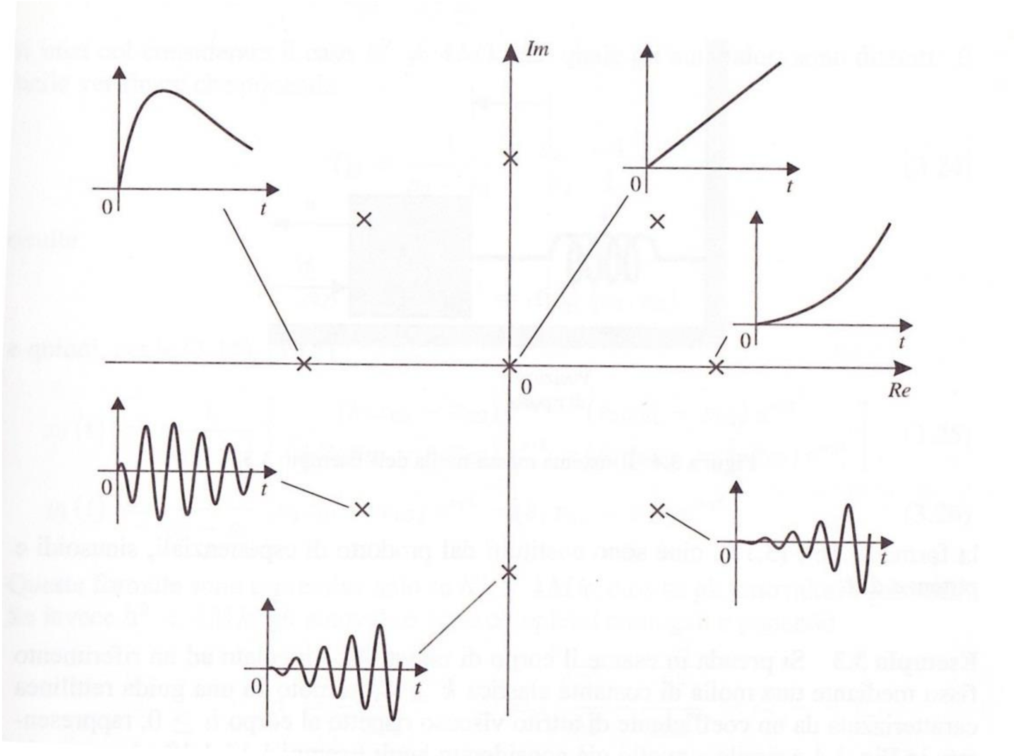
Comme $s(t) \in \Re$, ces pôles donnent comme contribution

$$A_i e^{\alpha_i t} + \overline{A_i} e^{\overline{\alpha_i} t} = \cdots = 2\,|A_i|\, e^{\sigma_i t} \cos\left(\omega_i t + \mathrm{Arg}\left(A_i\right)\right)$$

i.e., des oscillations de pulsation ω_i, contenues dans l'enveloppe de type $e^{\sigma_i t}$

Performance: relation entre position des pôles et allure des réponses temporelles (3/4)





- Réponses temporelles

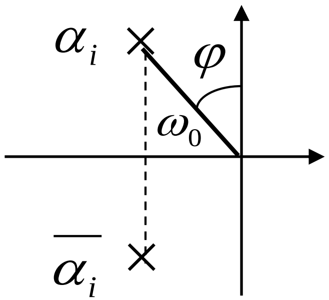
avec valeurs propres distincts

- Réponses temporelles

avec valeurs propres coïncidents

Performance: relation entre position des pôles et allure des réponses temporelles (4/4)

- Une paire de pôles complexes $\left\{ \alpha_i \, , \overline{\alpha_i} \right\}$ est parfois représentée par :
  - Pulsation propre $\omega_0 = |\alpha_i|$
  - Amortissement $\xi = \sin\varphi \quad (0 < \xi < 1)$



  - D'où

$$\alpha_i = \omega_0(-\sin\varphi + j\cos\varphi) = -\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

Au dénominateur de S(s) apparaît le polynôme du 2nd degré

$$(s-\alpha_i)(s-\overline{\alpha_i}) = s^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha_i)s + |\alpha_i|^2$$
$$= s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$