TD Modélisation Géométrique
Surfaces

Exercice 1. On considère une surface produit-tensorielle de Bézier de bi-degré $(2,2)$ définie par

$$b(u,v) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} b_{i,j} B_i^2(u) B_j^2(v)$$

où les points de contrôle sont donnés par

$$b_{0,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_{2,0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$b_{0,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_{2,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Esquisser une ébauche du polygone de contrôle de cette surface.
2. Donner les points de contrôle des quatre courbes qui définissent le bord de cette surface.
3. Calculer le point de cette surface correspondant aux paramètres $(u,v) = (1/3, 1/2)$. Expliquer.

Exercice 2. On considère 4 points dans l'espace que l'on note A, B, C, D et on se donne 4 courbes de Bézier P_1, P_2, Q_1, Q_2 telles que
- P_1 a pour extrémités A et B, i.e. $P_1(0) = A$ et $P_1(1) = B$,
- P_2 a pour extrémités D et C,
- Q_1 a pour extrémités A et D,
- Q_2 a pour extrémités B et C.

1. Faire un croquis des conditions ci-dessus pour illustrer comment ces 4 courbes représentent les bords d'une surface produit tensoriel.
2. On définit à présent les trois surfaces produit tensoriel suivantes :
   - $S_1(u,v) = (1-v)P_1(u) + vP_2(u)$,
   - $S_2(u,v) = (1-u)Q_1(v) + uQ_2(v)$,
   - $S_3(u,v) = (1-u)(1-v)A + u(1-v)B + v(1-u)D + uvC$.

   Montrer que la surface $S(u,v) = S_1(u,v) + S_2(u,v) - S_3(u,v)$ est une surface produit-tensorielle qui interpole les 4 courbes de Béziers P_1, P_2, Q_1, Q_2.
3. On suppose à présent que les courbes P_1, P_2, Q_1 et Q_2 sont des cubiques de Bézier :

$$P_1(u) := \sum_{i=0}^{3} p_{1,i} B_i^3(u),\ P_2(u) := \sum_{i=0}^{3} p_{2,i} B_i^3(u),\ Q_1(v) := \sum_{i=0}^{3} q_{1,i} B_i^3(v),\ Q_2(v) := \sum_{i=0}^{3} q_{2,i} B_i^3(v).$$

   Donner les points de contrôle de la surface $S(u,v)$ vue comme surface de Bézier produit tensoriel bi-cubique (degré (3,3)). Pour cela, on pourra commencer par exprimer u et $1-u$ dans la base des polynômes de Bernstein de degré 3, i.e. $\{B_i^3(u)\}_{i=0,\ldots,3}$.