

Mise en œuvre des Eléments finis

B. Nkonga, 2024-2025

On considère la formulation faible suivante :

$$\boxed{\text{Trouver } u \in \mathcal{V}(\Omega) \text{ tel que } a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega)} \quad (1)$$

On considère maintenant la formulation faible approchée associée :

$$\boxed{\text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_h) \text{ tel que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h(\Omega_h)} \quad (\text{Pv})$$

Contexte de ce cours.

1. Le problème variationnel (1) est bien posé au sens d'Hadamard :
(1) admet une solution unique stable.
2. On cherche à construire un espace approché $\mathcal{V}_h(\Omega_h) \subset \mathcal{V}(\Omega)$ pour lequel le problème variationnel (Pv) est bien posé au sens d'Hadamard.
3. L'espace fonctionnel $\mathcal{V}_h(\Omega_h)$ de dimension finie N_v avec $\mathcal{V}_h(\Omega_h) \subset \mathcal{V}(\Omega)$
Pour des exemples d'espaces fonctionnels $\mathcal{V}(\Omega)$ voir chapitre 2 "Espaces fonctionnels" de https://www.academia.edu/36497995/Les_éléments_finis_de_la_théorie_à_la_pratique
4. On construira une base de $\mathcal{V}_h(\Omega_h)$: φ_i pour $i = 1, \dots, N_v$.
5. Toute fonction $u \in \mathcal{V}_h$ s'exprime dans la base précédente par

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N_v} u_j \varphi_j(x)$$

6. Le domaine $\Omega_h \subset \mathbb{R}^d$ est défini par un Maillage Conforme et non singulier. C'est à dire que la mesure de chaque éléments est non nulle ($\neq 0$).

$$\Omega_h = \bigcup_1^{N_e} e \quad \text{avec} \quad \text{Mesure}(e) \neq 0, \quad \text{et} \quad e \cap e' = \emptyset \quad \text{si} \quad e \neq e'$$

7. $a(u_h, v_h)$ forme linéaire en v_h et continue. On a

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \mathcal{A}(u_h, v_h) d\mathbf{x} = \sum_{e=1}^{N_e} \int_e \mathcal{A}(u_h, v_h) d\mathbf{x} = \sum_{e=1}^{N_e} a^e(u_h, v_h)$$

8. $\ell(v_h)$ forme linéaire continue.

$$\begin{aligned}\ell(v_h) &= \int_{\Omega_h} \mathcal{L}(\mathbf{x}, v_h) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, v_h) dS \\ &= \sum_{e=1}^{Ne} \left(\int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, v_h) d\mathbf{x} + \int_{\partial e \cap \partial\Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, v_h) dS \right) = \sum_{e=1}^{Ne} \ell^e(v_h)\end{aligned}$$

9. Galerkin Continue : $\mathcal{V}_h(\Omega_h) \subset C^0(\Omega_h) \cap \mathcal{P}(\Omega_h)$. \mathcal{P} est l'espace des fonctions polynômiales sur chaque élément (e) du maillage..

Objectifs du cours.

Le cours consiste à

- détailler la construction des espaces \mathcal{V}_h ,
- donner une formulation algébrique du problème variationnel,
- proposer des algorithmes de construction et de résolution numérique du problème algébrique.

Chapter 1

Interpolation de Lagrange sur $e \subset \mathbb{R}^d$.

On considère un élément géométrique $e \subset \mathbb{R}^d$ compacte, connexe et d'intérieur non vide. Il est défini par un ensemble \mathcal{G}^e (fini) de points géométriques distincts. Les éléments finis de Lagrange sont eux définis par un ensemble \mathcal{D}^e de points d'interpolation et par un espace de fonctions \mathcal{P}^e de dimension finie.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^e &= \{\mathbf{x}_1^e, \dots, \mathbf{x}_{\text{Npe}}^e\} & \mathbf{x}_g^e \neq \mathbf{x}_{g'}^e, & \mathbf{x}_g \in e \subset \mathbb{R}^d \\ \mathcal{D}^e &= \{\mathbf{x}_1^e, \dots, \mathbf{x}_{\text{Nve}}^e\} & \mathbf{x}_d^e \neq \mathbf{x}_{d'}^e & \mathbf{x}_d \in e \subset \mathbb{R}^d\end{aligned}$$

En toute généralité, le choix de l'espace de fonctions \mathcal{P}^e peut tout à fait être quelconque. En pratique, on se limite très souvent à des espaces de fonctions polynomiales. La formulation générale des espaces de fonctions polynomiales, de dimension finie, peut se mettre sous la forme suivante

$$\mathcal{P}^e = \text{span} \left\{ \mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \prod_{i=1}^d x_i^{m_i}, \quad \mathbf{m} \subset \mathbb{N}^d \quad \text{avec} \quad |\mathbf{m}| = \sum_{i=1}^d m_i < \infty \right\}$$

Quelques exemples :

- Les espaces \mathcal{P}_k^e avec $k \in \mathbb{N}$ et $k < \infty$:

$$\mathcal{P}_k^e \equiv \left\{ \mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \prod_{i=1}^d x_i^{m_i}, \quad \mathbf{m} \subset \mathbb{N}^d \quad \text{avec} \quad 0 \leq |\mathbf{m}| \leq k \right\} \quad \text{Dim}(\mathcal{P}_k^e) = \frac{1}{d!} \prod_{i=1}^d (k + i)$$

- Les espaces \mathcal{Q}_k^e avec $k \in \mathbb{N}$ et $k < \infty$:

$$\mathcal{Q}_k^e \equiv \left\{ \mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \prod_{i=1}^d x_i^{m_i}, \quad \mathbf{m} \subset \mathbb{N}^d, \quad \text{pour } i = 1, \dots, d \quad 0 \leq m_i \leq k \right\} \quad \text{Dim}(\mathcal{Q}_k^e) = (k + 1)^d$$

Remarque 1.0.1. Dans le cadre général, \mathcal{D}^e est un ensemble de Nve formes linéaires $\Psi_d(p)$ indépendantes définies sur l'espace de fonctions \mathcal{P}^e . Dans le contexte des EF de Lagrange, les formes linéaires sont données par

$$\begin{aligned}\Psi_d &: \mathcal{P}^e \longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longrightarrow p(\mathbf{x}_d)\end{aligned}$$

et on peut alors identifier la forme linéaire Ψ_d directement avec le point \mathbf{x}_d . Pour les éléments finis d'Hermite on a deux familles de formes linéaires

$$\begin{aligned}\Psi_d^0 &: \mathcal{P}^e \longrightarrow \mathbb{R} & \Psi_d^1 &: \mathcal{P}^e \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ p &\longrightarrow p(\mathbf{x}_d) & p &\longrightarrow \nabla p(\mathbf{x}_d)\end{aligned}$$

$$\Psi_d^0(p) = p(\mathbf{x}_d) \quad \text{et} \quad \Psi_d^1(p) = \nabla p(\mathbf{x}_d)$$

Propriété 1.0.1 (Unisolvance). On dit que \mathcal{D}^e est \mathcal{P}^e -unisolvant Ssi pour des réels $\alpha_1^e, \dots, \alpha_{\text{Nve}}^e$ donnés, il existe un unique élément $p_\alpha^e \in \mathcal{P}^e$ tel que

$$p_\alpha^e(\mathbf{x}_\ell^e) = \alpha_\ell^e \quad \text{pour} \quad \ell = 1, \dots, \text{Nve}$$

Ce qui est équivalent à dire que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^e : \mathcal{P}^e &\longrightarrow \mathbb{R}^{\text{Nve}} \\ p &\longrightarrow (p(\mathbf{x}_\ell)), \quad \ell = 1, \dots, \text{Nve} \end{aligned}$$

est bijective.

Propriété 1.0.2 (Unisolvance de la trace : Continuité). On décompose le bord de l'élément e en un ensemble de faces ∂e_f . On note $\mathcal{D}_f^e \subset \mathcal{D}^e$ l'ensemble des points $\mathbf{x}_d \in \partial e_f$. Chaque face f est définie par une équation (polynomiale) de la forme $f(\mathbf{x}) = 0$. Enfin, définissons par \mathcal{P}_f^e l'ensemble des fonctions qui sont les traces sur ∂e_f de fonctions de \mathcal{P}^e .

$$\partial e = \bigcup_{f=1}^{N_f} \partial e_f \quad \text{et} \quad f(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial e_f$$

On a l'unisolvance de la trace Ssi $\forall f$, \mathcal{D}_f^e est \mathcal{P}_f^e -unisolvant

Définition 1.0.1 (Base Canonique de \mathcal{P}^e). Les fonctions canoniques $\varphi_\ell^e(\mathbf{x})$ de l'élément fini $(\mathcal{G}^e, \mathcal{D}^e, \mathcal{P}^e)$ sont définies par

$$\varphi_\ell^e(\mathbf{x}_{\ell'}^e) = \delta_{\ell\ell'} \quad 1 \leq \ell, \ell' \leq \text{Nve}$$

Les fonctions $\varphi_\ell^e(\mathbf{x})$ forment la base canonique de \mathcal{P}^e

Définition 1.0.2 (Interpolation). Considérons une fonction $F(\mathbf{x})$ définie sur l'élément e . On note $\Pi_e F(\mathbf{x})$ interpolé de F sur e défini par

$$\Pi_e F(\mathbf{x}) \equiv F^e(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{\text{Nve}} F(\mathbf{x}_\ell^e) \varphi_\ell^e(\mathbf{x})$$

Définition 1.0.3 (Erreur d'interpolation sur \mathcal{P}^e). Considérons une fonction $F(\mathbf{x})$ définie sur l'élément e . On définit l'erreur d'interpolation $\mathcal{E}^e(F)$, pour une norme donnée $\mathcal{H}(e)$, par

$$\mathcal{E}^e(F) = \|F - \Pi_e F\|_{\mathcal{H}(e)}$$

Pour la norme $L^2(e)$ on a

$$\mathcal{E}^e(F) = \|F - \Pi_e F\|_{L^2(e)} = \left(\int_e \left| F(\mathbf{x}) - \Pi_e F(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.0.4 (Espace fonctionnel local $\mathcal{V}_h(e)$). L'espace fonctionnel $\mathcal{V}_h(e)$ est engendré par les fonctions φ_ℓ^e de la base canonique. Pour tout $\mathbf{v}_h^e \in \mathcal{V}_h(e)$ on a

$$\mathbf{v}_h^e(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^{\text{Nve}} \mathbf{v}_\ell^e \varphi_\ell^e(\mathbf{x})$$

Les \mathbf{v}_ℓ^e sont les "coordonnées" de \mathbf{v}_h^e dans la base canonique.

Définition 1.0.5 (Problème Variationnel local). Trouver $u_h^e \in \mathcal{V}_h(e)$ tq

$$\int_e \mathcal{A}(u_h^e, v_h^e) d\mathbf{x} = \int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, v_h^e) d\mathbf{x} + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, v_h^e) dS, \quad \forall v_h^e \in \mathcal{V}_h(e) \quad (1.1)$$

Ce qui est équivalent, lorsque $\mathcal{A}(u, v)$ est linéaire par rapport à v , à trouver $u_h \in \mathcal{V}_h(e)$ tq

$$\int_e \mathcal{A}(u_h, \varphi_\ell^e) d\mathbf{x} = \int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\mathbf{x} + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) dS, \quad \ell = 1, \dots, N_{ve} \quad (1.2)$$

Cette formulation reste valide même lorsque $\mathcal{A}(u, v)$ est nonlinéaire par rapport à u .

Exercice 1.0.1. Montrez que lorsque $\mathcal{A}(u, v)$ est linéaire par rapport à v , la formule (1.1) implique (1.2) et vice versa.

□

En toute généralité, le système local (1.2) est un système algébrique (linéaire ou nonlinéaire) dont le vecteur des variables est

$$\underline{\mathbf{u}}^e = (u_1^e, \dots, u_\ell^e, \dots, u_{N_{ve}}^e)^T \in \mathbb{R}^{N_{ve}}. \quad (1.3)$$

Dans le cas particulier d'une forme linéaire par rapport à u , le système algébrique local est linéaire $N_{ve} \times N_{ve}$ de la forme

$$\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e \underline{\mathbf{u}}^e = \underline{\hat{\mathbf{b}}}^e \quad (1.4)$$

avec comme composantes $\hat{A}_{\ell'\ell}^e$ de la matrice $\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e$

$$\hat{A}_{\ell'\ell}^e = \int_e \mathcal{A}(\varphi_{\ell'}^e(\mathbf{x}), \varphi_\ell^e(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (1.5)$$

et les composantes \hat{b}_ℓ^e du vecteur $\underline{\hat{\mathbf{b}}}^e$

$$\hat{b}_\ell^e = \int_e \mathcal{L}(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) d\mathbf{x} + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) dS \quad (1.6)$$

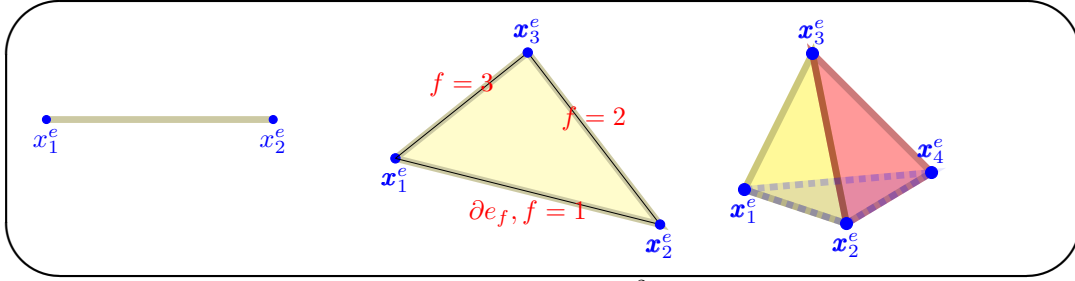
Remarque 1.0.2.

- En général, on réserve le terme "éléments finis (FE)" pour les cas où on vérifie à la fois l'unisolvance et l'unisolvance de la trace.
- Lorsque la propriété d'unisolvance est vérifiée, mais pas celle de l'unisolvance de la trace, on utilise plutôt la terminologie de "Galerkin Discontinue (DG)"

Chapter 2

Eléments finis P_k -Lagrange.

Dans ce contexte, \mathcal{P}^e est l'espace des polynômes de degré $\leq k$. (Base complète) C'est le cadre des éléments géométriques qui sont des d-simplexes : segments en 1D, triangles en 2D, tétraèdres en 3D ... La construction, des différentes bases ca sera faite de manière à satisfaire la contrainte d'Unisolvance dans e et l'Unisolvance de la trace sur chaque élément du bord ∂e_f . Les ∂e_f sont des points en 1D, des segments en 2D, des faces en 3D,...



Dans ce contexte, l'erreur d'Interpolation, en norme $L^2(e)$, est de l'ordre $k + 1$:

$$\mathcal{E}^e(F) = \|F - \Pi_e F\|_{L^2(e)} = \left(\int_e \left(F(\mathbf{x}) - \Pi_e F(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} = O(h_e^{k+1})$$

avec h_e une mesure de élément e . Par exemple h_e peut être le rayon du cercle inscrit dans e .

2.1 Eléments finis P_k -Lagrange en 1D.

$$\begin{array}{c} \bullet \\ x_1^e \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ x_2^e \end{array} \quad d = 1. \quad e \equiv [x_1^e, x_2^e] \quad \text{ou bien} \quad [x_2^e, x_1^e] \longrightarrow \mathcal{G}^e = \{x_1^e, x_2^e\}$$

2.1.1 Eléments finis P_1 -Lagrange 1D

$$\mathcal{P}^e \equiv P_1 = \{1, x\}, \quad \mathcal{D}^e = \{\mathbf{x}_1^e = x_1^e, \mathbf{x}_2^e = x_2^e\}.$$

Avec ce choix des points d'interpolation, on vérifie les propriétés d'unisolvance et d'unisolvance de la trace. On a alors

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \mathbf{x}_1^e \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \mathbf{x}_2^e \end{array} \quad \varphi_1^{p1}(x) = \lambda_1(x) = \frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e} \quad \text{et} \quad \varphi_2^{p1}(x) = \lambda_2(x) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e}$$

Remarque

$$\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1$$

Gradient des fonctions de la base canonique

$$\frac{\partial \varphi_1^{p1}}{\partial x} \equiv \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{1}{x_1^e - x_2^e} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi_2^{p1}}{\partial x} \equiv \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = \frac{1}{x_2^e - x_1^e}$$

Figures/EF_P1Lagrange.pdf

Exercice 2.1.1. On considère le cas particulier où on a

$$\mathcal{A}(u, v) = \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) + u(x)v(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(x, v) = xv(x)$$

Pour les éléments finis P₁-Lagrange 1D, construire analytiquement la matrice et le second membre local pour un élément qui ne touche pas la frontière de Ω_h , défini par

$$x_1^e = 2, \quad x_2^e = 3$$

Faire le même calcul cette fois pour

$$x_1^e = 3, \quad x_2^e = 2$$

Qu'en déduisez-vous?

□

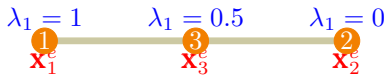
Solution:

à compléter

Fin

2.1.2 Éléments finis P₂-Lagrange 1D

$$\mathcal{P}^e \equiv \mathcal{P}_2 = \{1, x, x^2\}, \quad \mathcal{D}^e = \left\{ \mathbf{x}_1^e = x_1^e, \mathbf{x}_2^e = x_2^e, \mathbf{x}_3^e = \frac{x_1^e + x_2^e}{2} \right\}.$$



On peut vérifier que

$$\varphi_1^{p2}(x) = \lambda_1(x)(2\lambda_1(x) - 1) \equiv \hat{\varphi}_1^{p2}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$$

$$\varphi_2^{p2}(x) = \lambda_1(x)(2\lambda_1(x) - 1) \equiv \hat{\varphi}_2^{p2}(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2(2\lambda_2 - 1)$$

$$\varphi_3^{p2}(x) = 4\lambda_1(x)\lambda_2(x) \equiv \hat{\varphi}_3^{p2}(\lambda_1, \lambda_2) = 4\lambda_1\lambda_2$$

Et les gradients

$$\frac{\partial \varphi_1^{p2}}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}(2\lambda_1 - 1) + \lambda_1 \left(2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}(4\lambda_1 - 1) = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}(4\lambda_2 - 3)$$

$$\frac{\partial \varphi_2^{p2}}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}(2\lambda_2 - 1) + \lambda_2 \left(2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}(4\lambda_1 - 3) = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}(4\lambda_2 - 1)$$

$$\frac{\partial \varphi_3^{p2}}{\partial x} = 4 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \lambda_2 + 4\lambda_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} = -4 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}(2\lambda_1 - 1) = -4 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}(2\lambda_2 - 1)$$

Dans la dernière relation on utilise le fait que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et $\frac{d\lambda_1}{dx} = -\frac{d\lambda_2}{dx}$.

Figures/EF_P2Lagrange.pdf

Exercice 2.1.2. On considère le cas particulier où on a

$$\mathcal{A}(u, v) = \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(v) = (x-1)v(x)$$

Pour les éléments finis P₂-Lagrange 1D, construire analytiquement la matrice et le second membre local pour un élément qui ne touche pas la frontière de Ω_h , défini par

$$x_1^e = 2, \quad x_2^e = 3$$

Faire le même calcul cette fois pour

$$x_1^e = 3, \quad x_2^e = 2$$

Qu'en déduisez-vous?

□

Solution:

à compléter

Fin

2.1.3 Éléments finis P_k-Lagrange 1D

$$\mathcal{P}^e \equiv P_k = \{1, x, x^2, \dots, x^k\},$$

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \mathbf{x}_1^e = x_1^e, \quad \mathbf{x}_2^e = x_2^e, \quad \mathbf{x}_\ell^e = x_1^e + (\ell-2) \frac{x_2^e - x_1^e}{k} \text{ pour } 3 \leq \ell \leq k+1 \right\}.$$

Ce qui se met aussi sous la forme

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \lambda_{1,1} = 1, \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{1,\ell} = 1 - \frac{(\ell-2)}{k} \text{ pour } 3 \leq \ell \leq k+1 \right\}. \text{ Au final}$$

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \lambda_{1,1} = 1, \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{1,\ell} = \frac{m(\ell)}{k} \text{ pour } 1 \leq m(\ell) \leq k-1 \right\}. \text{ Avec } m(\ell) = k - \ell + 2.$$

De même

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \lambda_{2,1} = 0, \quad \lambda_{2,2} = 1, \quad \lambda_{2,\ell} = \frac{n(\ell)}{k} \text{ pour } 1 \leq n(\ell) \leq k-1 \right\}. \text{ Avec } n(\ell) = \ell - 2.$$

Exemple pour $k = 4$:

On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_1^{pk}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_1^{pk}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \prod_{m=1}^{k-1} \left(\lambda_1 - \frac{m}{k}\right)}{\lambda_{1,1} \prod_{m=1}^{k-1} \left(\lambda_{1,1} - \frac{m}{k}\right)} = \beta_1 \lambda_1 \prod_{m=1}^{k-1} (k\lambda_1 - m) \\ \varphi_2^{pk}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_2^{pk}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2 \prod_{n=1}^{k-1} \left(\lambda_2 - \frac{n}{k}\right)}{\lambda_{2,2} \prod_{n=1}^{k-1} \left(\lambda_{2,2} - \frac{n}{k}\right)} = \beta_2 \lambda_2 \prod_{n=1}^{k-1} (k\lambda_2 - n)\end{aligned}$$

et pour $3 \leq \ell \leq k+1$ on a

$$\varphi_\ell^{pk}(x) \equiv \widehat{\varphi}_\ell^{pk}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} \left(\lambda_1 - \frac{m}{k}\right)}{\lambda_{1,\ell} \lambda_{2,\ell} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} \left(\lambda_{1,\ell} - \frac{m}{k}\right)} = \beta_\ell \lambda_1 \lambda_2 \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} (k\lambda_1 - m)$$

avec

$$\beta_1 = \frac{1}{(k-1)!}, \quad \beta_2 = \frac{1}{(k-1)!}, \quad \beta_\ell = \frac{k^2}{m(\ell) n(\ell) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} (m(\ell) - m)}$$

En effet $\lambda_1(x_\ell) = \frac{k-\ell+2}{k} = \frac{m(\ell)}{k}$ et $\lambda_2(x_\ell) = \frac{\ell-2}{k} = \frac{n(\ell)}{k}$

Exercice 2.1.3. Faire le calcul explicite des $\varphi_\ell^{p3}(x)$ en fonction de $\lambda_1 \equiv \lambda_1(x)$ et $\lambda_2 \equiv \lambda_2(x)$.

Calculer les gradients $\frac{\partial \varphi_\ell^{p3}}{\partial x}(x)$ en fonction de x_1^e, x_2^e $\lambda_1 \equiv \lambda_1(x)$ et $\lambda_2 \equiv \lambda_2(x)$.

□

Réponse 1.

$$\begin{aligned}\varphi_1^{p3}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_1^{p3}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1}{2} (3\lambda_1 - 1) (3\lambda_1 - 2) \\ \varphi_2^{p3}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_2^{p3}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{2} (3\lambda_2 - 2) (3\lambda_2 - 1) \\ \varphi_3^{p3}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_3^{p3}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{9}{2} \lambda_1 \lambda_2 (3\lambda_1 - 1) \\ \varphi_4^{p3}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_4^{p3}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{9}{2} \lambda_1 \lambda_2 (3\lambda_2 - 1)\end{aligned}$$

Figures/EF_P3Lagrange.pdf

2.1.4 Intégration numérique.

Changement de variable :

$$\begin{aligned} \lambda_1 : e &\longrightarrow \widehat{e} = [0, 1] & x : \widehat{e} &\longrightarrow e \\ x &\longrightarrow \lambda_1(x) & \text{et} & \lambda_1 \longrightarrow x(\lambda_1) = \lambda_1 x_1^e + (1 - \lambda_1)x_2^e \\ & & & = \lambda_1 x_1^e + \lambda_2 x_2^e \end{aligned}$$

En utilisant ce changement de variable, pour toute fonction intégrable $F(x)$ sur e , on a

$$\int_e F(x) d\mathbf{x} = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}| F(x(\lambda_1)) d\lambda_1 = \int_0^1 \left| \frac{dx}{d\lambda_1} \right| F(x(\lambda_1)) d\lambda_1$$

Ce changement de variable restera valide pour tous les éléments donnés par $\mathcal{G}^e = \{x_1^e, x_2^e\}$. On considère N_g points de quadratures $\lambda_{1,g}$ avec les poids ω_g sur l'élément de référence \widehat{e} . Alors

$$\int_e F(x) d\mathbf{x} = |x_1^e - x_2^e| \int_0^1 F(x(\lambda_1)) d\lambda_1 \simeq |x_1^e - x_2^e| \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g F(x(\lambda_{1,g})) \quad (2.1)$$

Pour des fonctions $F(x(\lambda_1))$ polynomiales (en λ_1), on peut choisir les points de quadratures pour lesquels l'intégration numérique est exacte. En pratique, il suffit d'utiliser des points de quadrature pour lesquels l'erreur d'intégration numérique est plus petite que l'erreur d'interpolation.

Formules de quadrature 1D sur $[0,1]$

$\int_0^1 F(\xi) d\xi \simeq \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g F(\xi_g)$	$\xi = 0$ ● ————— ● $\xi = 1$
$N_g = 1, \quad \xi_1 = 0.5, \quad \omega_1 = 1$	$\xi = 0$ ● —● 1● ————— ● $\xi = 1$
$N_g = 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}, \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \\ \xi_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$	$\xi = 0$ ● —● 1● —● 2● ————— ● $\xi = 1$
$N_g = 3, \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \quad \omega_1 = \frac{5}{18} \\ \xi_2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{8}{18} \\ \xi_3 = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \quad \omega_3 = \frac{5}{18} \end{array} \right.$	$\xi = 0$ ● —● 1● —● 2● —● 3● ————— ● $\xi = 1$

Exercice 2.1.4. On considère le cas particulier où on a

$$\mathcal{A}(u, v) = \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(x, v) = (x - 1)v(x)$$

- Pour les éléments finis P_2 -Lagrange 1D, écrire un programme *scilab* pour construire la matrice et le second membre local pour un élément (qui ne touche pas la frontière de Ω_h), défini par des valeurs données x_1^e et x_2^e . On utilisera différentes formules de quadrature pour évaluer les intégrales. Valider votre programme en utilisant les données suivantes

$$x_1^e = 2, \quad x_2^e = 3$$

$N_g=1$

$$\underline{\underline{\widehat{\mathbf{A}}}}^e = \begin{pmatrix} 1. & -1. & 0. \\ -1. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\widehat{\mathbf{b}}}}^e = \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Ng=2 et Ng=3

$$\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e = \begin{pmatrix} 2.3333333 & 0.3333333 & -2.6666667 \\ 0.3333333 & 2.3333333 & -2.6666667 \\ -2.6666667 & -2.6666667 & 5.3333333 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.1666667 \\ 0.3333333 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$$

Faire le même calcul cette fois pour

$$x_1^e = 3, \quad x_2^e = 2$$

Ng=2 et Ng=3

$$\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e = \begin{pmatrix} 2.3333333 & 0.3333333 & -2.6666667 \\ 0.3333333 & 2.3333333 & -2.6666667 \\ -2.6666667 & -2.6666667 & 5.3333333 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.3333333 \\ 0.1666667 \\ 1.0000000 \end{pmatrix}$$

Qu'en déduisez-vous?

- Faire le même travail pour les éléments finis P₁-Lagrange 1D.
Ng=2 et Ng=3

$$\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e = \begin{pmatrix} 1. & -1. \\ -1. & 1. \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.6666667 \\ 0.8333333 \end{pmatrix}$$

- Faire le même travail dans le cadre général des éléments finis P₃-Lagrange 1D, (P_k-Lagrange 1D avec k comme paramètre de votre programme).
Ng = 2

$$\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e = \begin{pmatrix} 2.6875 & 0.6875 & -1.6875 & -1.6875 \\ 0.6875 & 2.6875 & -1.6875 & -1.6875 \\ -1.6875 & -1.6875 & 1.6875 & 1.6875 \\ -1.6875 & -1.6875 & 1.6875 & 1.6875 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.1666667 \\ 0.2083333 \\ 0.7500000 \\ 0.3750000 \end{pmatrix}$$

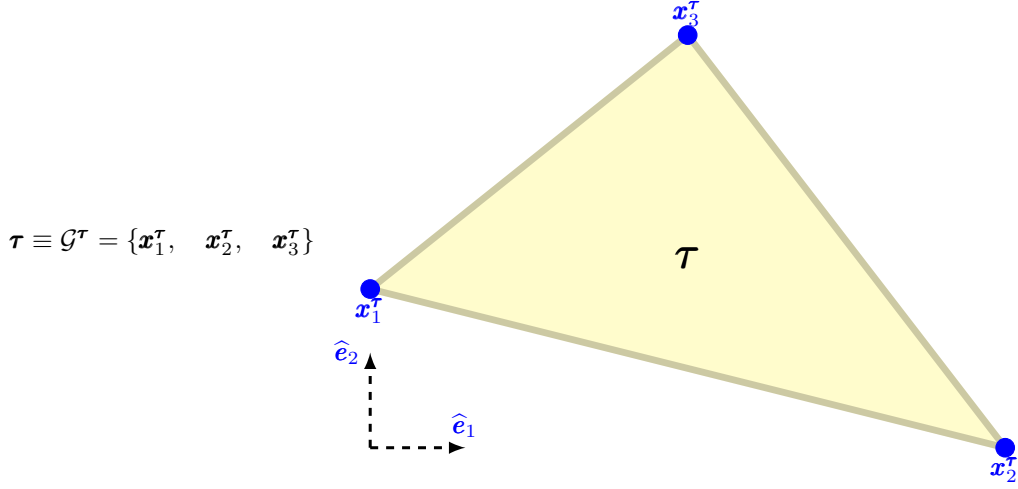
Ng = 3

$$\underline{\hat{\mathbf{A}}}^e = \begin{pmatrix} 3.7 & -0.325 & 1.35 & -4.725 \\ -0.325 & 3.7 & -4.725 & 1.35 \\ 1.35 & -4.725 & 10.8 & -7.425 \\ -4.725 & 1.35 & -7.425 & 10.8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\hat{\mathbf{b}}}^e = \begin{pmatrix} 0.1416667 \\ 0.2333333 \\ 0.6750000 \\ 0.4500000 \end{pmatrix}$$

- En comparant vos résultats avec les formules analytiques, que remarquez-vous quand vous utilisez une formule de quadrature à un point avec $k \geq 2$? Qu'en concluez-vous?

□

2.2 Eléments finis P_k -Lagrange 2D-triangle : $\tau \in \mathbb{R}^2$



$$\tau \equiv \mathcal{G}^\tau = \{x_1^\tau, x_2^\tau, x_3^\tau\}$$

Pour tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2$$

(\hat{e}_1, \hat{e}_2) est une base orthonormée de l'espace physique.

Les coordonnées Barycentriques : $\lambda_1(\mathbf{x})$, $\lambda_2(\mathbf{x})$ et $\lambda_3(\mathbf{x})$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^\tau) \times (\mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau) \cdot \hat{e}_3}{(\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_2^\tau) \times (\mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau) \cdot \hat{e}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^\tau; \mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau)}{\det(\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_2^\tau; \mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau)} \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3^\tau) \times (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) \cdot \hat{e}_3}{(\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) \times (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) \cdot \hat{e}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3^\tau; \mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau)}{\det(\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau; \mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau)} \\ \lambda_3(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^\tau) \times (\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau) \cdot \hat{e}_3}{(\mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_1^\tau) \times (\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau) \cdot \hat{e}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^\tau; \mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau)}{\det(\mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_1^\tau; \mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau)} \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs $\mathbf{p} = p_1 \hat{e}_1 + p_2 \hat{e}_2$ et $\mathbf{q} = q_1 \hat{e}_1 + q_2 \hat{e}_2$ la fonction $\det(\mathbf{p}; \mathbf{q})$ est définie par

$$\det(\mathbf{p}; \mathbf{q}) = p_1 q_2 - p_2 q_1$$

On vérifie alors que

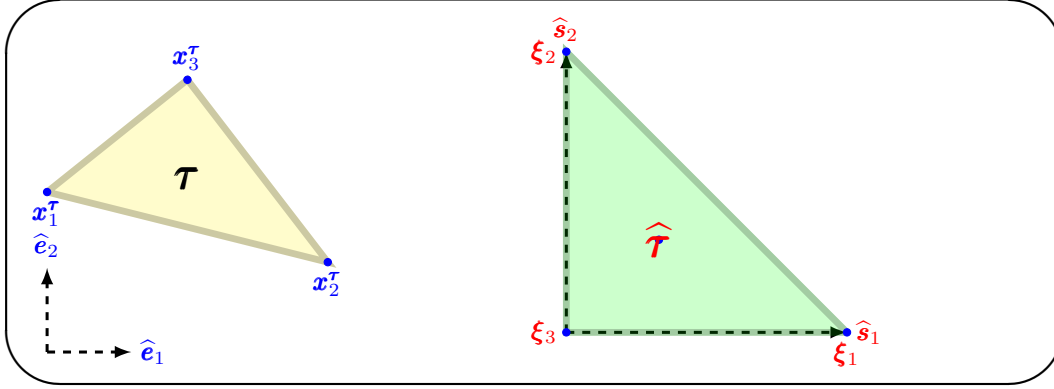
1. les $\lambda_k(\mathbf{x})$ sont des fonctions linéaires de \mathbf{x} .
2. $\lambda_k(\mathbf{x}_\ell) = \delta_{k\ell}$.
3. $\forall \mathbf{x} \in \tau, \lambda_k(\mathbf{x}) \geq 0$ et $\lambda_1(\mathbf{x}) + \lambda_2(\mathbf{x}) + \lambda_3(\mathbf{x}) = 1$

2.2.1 Intégration Numérique.

Le passage d'un élément τ vers l'élément de référence $\hat{\tau}$ s'exprime par le changement de variable :

$$\begin{aligned} \xi &: \tau \longrightarrow \hat{\tau} \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{s}}_1 + \lambda_2(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{s}}_2 \end{aligned}$$

avec $(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2)$, une base orthonormée de l'espace de référence.



La transformation inverse $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ s'exprime par

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &: \hat{\boldsymbol{\tau}} \longrightarrow \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\xi} &\longrightarrow \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_1 \mathbf{x}_1^\tau + \lambda_2 \mathbf{x}_2^\tau + \lambda_3 \mathbf{x}_3^\tau = \lambda_1 (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) + \lambda_2 (\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau) + \mathbf{x}_3^\tau \end{aligned}$$

avec $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$. On peut vérifier que le jacobien \mathcal{J} est une constante.

$$\mathcal{J} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda_1}; \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda_2} \right) = \det (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau; \mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau)$$

Ce changement de variable permet d'évaluer les intégrales sur chaque élément $\boldsymbol{\tau}$ avec des points d'intégration sur l'élément de référence $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. En effet, pour toute fonction $F(\mathbf{x})$ on a

$$\int_{\boldsymbol{\tau}} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\hat{\boldsymbol{\tau}}} |\mathcal{J}| F(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi} = |\mathcal{J}| \int_0^1 \int_0^{1-\lambda_1} F(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (2.2)$$

Exercice 2.2.1. L'aire $a_{\boldsymbol{\tau}}$ d'un triangle $\boldsymbol{\tau}$ est donnée par

$$a_{\boldsymbol{\tau}} = \int_{\boldsymbol{\tau}} 1 d\mathbf{x} \equiv \int_{\boldsymbol{\tau}} d\mathbf{x}$$

- Montrez que $|\mathcal{J}| = 2a_{\boldsymbol{\tau}}$ et en déduire que

$$a_{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{2} |\det (\mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_1^\tau; \mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_1^\tau)| = \frac{1}{2} |\det (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_2^\tau; \mathbf{x}_3^\tau - \mathbf{x}_2^\tau)| = \frac{1}{2} |\det (\mathbf{x}_1^\tau - \mathbf{x}_3^\tau; \mathbf{x}_2^\tau - \mathbf{x}_3^\tau)|$$

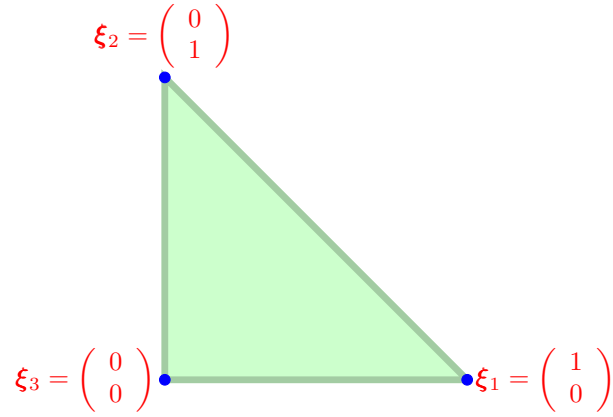
□

Formules de quadrature : 2D Triangles.

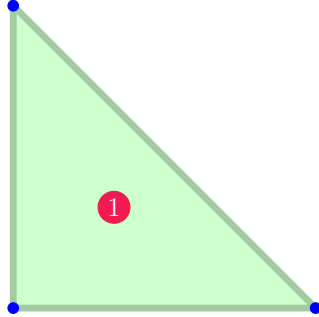
En général on utilise une quadrature pour évaluer les intégrales sur l'élément de référence :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\boldsymbol{\xi}) d\xi d\eta \simeq \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g f(\boldsymbol{\xi}_g), \quad \boldsymbol{\xi} = \xi \hat{\mathbf{e}}_1 + \eta \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Les poids ω_g et les points ξ_g de quadrature sur l'élément de référence.

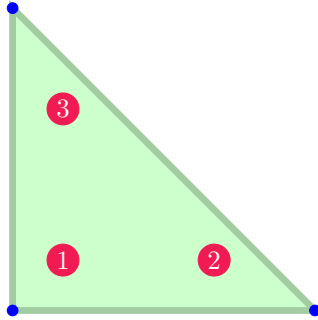


Formule de quadrature à un point, d'ordre deux $O(2)$: $Ng = 1$



$$\textcircled{1} \quad \omega_g = \frac{1}{2}, \quad \xi_g = \frac{1}{3} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

Formule de quadrature à trois points, d'ordre deux $O(2)$: $Ng = 3$

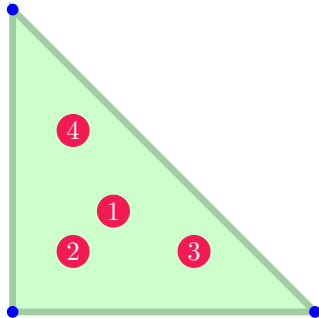


$$\textcircled{1} \quad \omega_g = \frac{1}{6}, \quad \xi_g = \frac{1}{6} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

$$\textcircled{2} \quad \omega_g = \frac{1}{6}, \quad \xi_g = \frac{1}{6} (4\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

$$\textcircled{3} \quad \omega_g = \frac{1}{6}, \quad \xi_g = \frac{1}{6} (\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2)$$

Formule de quadrature à quatre points, d'ordre trois $O(3)$: $Ng = 3$



$$\textcircled{1} \quad \omega_g = \frac{-27}{96}, \quad \xi_g = \frac{1}{3} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

$$\textcircled{2} \quad \omega_g = \frac{25}{96}, \quad \xi_g = \frac{1}{5} (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

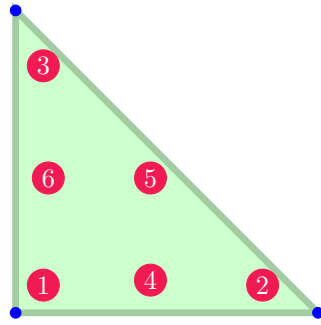
$$\textcircled{3} \quad \omega_g = \frac{25}{96}, \quad \xi_g = \frac{1}{5} (3\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$$

$$\textcircled{4} \quad \omega_g = \frac{25}{96}, \quad \xi_g = \frac{1}{5} (\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2)$$

Formule de quadrature à six points, d'ordre quatre $O(4)$: $N_g = 6$

$$\mu_1 = 0.11169079483905, \quad \mu_2 = 0.0549758718227661,$$

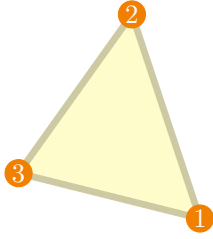
$$\alpha = 0.445948490915965, \quad \beta = 0.091576213509771.$$



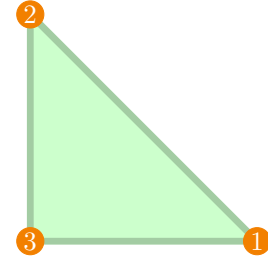
①	$\omega_g = \mu_1, \quad \xi_g = \beta \hat{\mathbf{e}}_1 + \beta \hat{\mathbf{e}}_2$
②	$\omega_g = \mu_1, \quad \xi_g = (1 - 2\beta) \hat{\mathbf{e}}_1 + \beta \hat{\mathbf{e}}_2$
③	$\omega_g = \mu_1, \quad \xi_g = \beta \hat{\mathbf{e}}_1 + (1 - 2\beta) \hat{\mathbf{e}}_2$
④	$\omega_g = \mu_2, \quad \xi_g = \alpha \hat{\mathbf{e}}_1 + (1 - 2\alpha) \hat{\mathbf{e}}_2$
⑤	$\omega_g = \mu_2, \quad \xi_g = \alpha \hat{\mathbf{e}}_1 + \alpha \hat{\mathbf{e}}_2$
⑥	$\omega_g = \mu_2, \quad \xi_g = (1 - 2\alpha) \hat{\mathbf{e}}_1 + \alpha \hat{\mathbf{e}}_2$

2.2.2 Éléments finis P_1 -Lagrange Triangles.

$$\mathcal{P}^e \equiv P_1 = \{1, x, y\}, \quad \mathcal{D}^e = \{\mathbf{x}_1^e = \mathbf{x}_1^e, \quad \mathbf{x}_2^e = \mathbf{x}_2^e, \quad \mathbf{x}_3^e = \mathbf{x}_3^e\}.$$



Nve = 3 et



$$\hat{\varphi}_1^{p1}(\xi(\mathbf{x})) = \lambda_1(\mathbf{x}(\xi)), \quad \hat{\varphi}_2^{p1}(\xi(\mathbf{x})) = \lambda_2(\mathbf{x}(\xi)), \quad \hat{\varphi}_3^{p1}(\xi(\mathbf{x})) = \lambda_3(\mathbf{x}(\xi)).$$

Exercice 2.2.2. On considère le cas particulier où on a

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{u} \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \sin(x) \cos(y) \mathbf{v}$$

- Pour les éléments finis P_1 -Lagrange, écrire programme *scilab* pour construire la matrice et le second membre local pour un élément (qui ne touche pas la frontière de Ω_h), défini par des valeurs données \mathbf{x}_1^e , \mathbf{x}_2^e et \mathbf{x}_3^e . On utilisera différentes formules de quadrature pour évaluer les intégrales. Valider votre programme en utilisant les données suivantes

$$\mathbf{x}_1^e = (0, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2^e = (2, 0)^T, \quad \mathbf{x}_3^e = (0, 2)^T$$

$$\hat{\mathbf{A}}^e = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8. & -2. & -2. \\ -2. & 5. & 1. \\ -2. & 1. & 5. \end{pmatrix}$$

- Faire le même travail pour les éléments finis P_2 -Lagrange 2D.

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 96. & 14. & 14. & -60. & -4. & -60. \\ 14. & 51. & -1. & -60. & 4.213D-10 & -4. \\ 14. & -1. & 51. & -4. & 4.213D-10 & -60. \\ -60. & -60. & -4. & 272. & -104. & 16. \\ -4. & 4.213D-10 & 4.213D-10 & -104. & 272. & -104. \\ -60. & -4. & -60. & 16. & -104. & 272. \end{pmatrix}$$

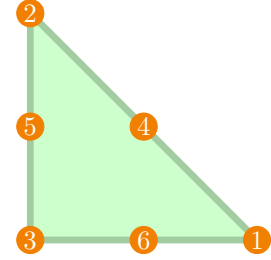
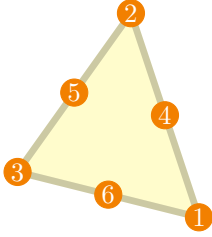
- En comparant vos résultats avec les formules analytiques de la matrice locale $\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e$, que remarquez-vous? Qu'en concluez-vous?

□

2.2.3 Éléments finis P_2 -Lagrange Triangles.

$$\mathcal{P}^e \setminus P_2 = \{1, \quad x, \quad y, \quad x^2, \quad xy, \quad y^2\},$$

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \mathbf{x}_1^e = \mathbf{x}_1^e, \quad \mathbf{x}_2^e = \mathbf{x}_2^e, \quad \mathbf{x}_3^e = \mathbf{x}_3^e, \quad \mathbf{x}_4^e = \frac{\mathbf{x}_1^e + \mathbf{x}_2^e}{2}, \quad \mathbf{x}_5^e = \frac{\mathbf{x}_2^e + \mathbf{x}_3^e}{2}, \quad \mathbf{x}_6^e = \frac{\mathbf{x}_3^e + \mathbf{x}_1^e}{2} \right\}.$$



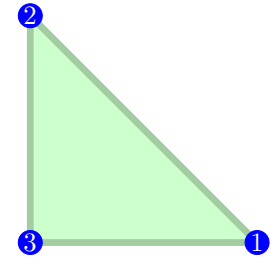
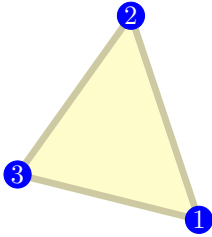
Nve = 6 et

$$\hat{\varphi}_1^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1), \quad \hat{\varphi}_2^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = \lambda_2(2\lambda_2 - 1), \quad \hat{\varphi}_3^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = \lambda_3(2\lambda_3 - 1).$$

$$\hat{\varphi}_4^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = 4\lambda_1\lambda_2, \quad \hat{\varphi}_5^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = 4\lambda_2\lambda_3, \quad \hat{\varphi}_6^{p_2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) = 4\lambda_3\lambda_1.$$

2.2.4 Éléments finis P_K -Lagrange Triangles.

Les éléments triangles linéaires sont définis avec une numérotation locale des points géométriques



Les coordonnées barycentriques $\lambda_1(\mathbf{x})$, $\lambda_2(\mathbf{x})$, $\lambda_3(\mathbf{x})$ sont associées à cette numérotation locale des points géométriques.

Dans le contexte des éléments finis P_K -Lagrange sur des triangles linéaires on a $Nve = \frac{(K+1)(K+2)}{2}$. Sur l'élément de référence, les points d'interpolation sont

$$\boldsymbol{\xi}_{\ell_1, \ell_2} = \frac{\ell_1}{K} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\ell_2}{K} \hat{\mathbf{e}}_2, \quad 0 \leq \ell_2 \leq K, \quad 0 \leq \ell_1 \leq K - \ell_2$$

Les fonctions de base PK-Lagrange $\widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi})$ sont des polynômes de degré κ telsque

$$\widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi}_{\ell'_1, \ell'_2}) = \delta_{\ell_1, \ell'_1} \delta_{\ell_2, \ell'_2}$$

Ce qui revient à dire que la fonction $\widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi})$ prend la valeur 1 au point d'interpolation $\boldsymbol{\xi}_{\ell_1, \ell_2}$ et zéro sur tous les autres points d'interpolation. Comme les points d'interpolations sont tous différents, la fonction $\widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi})$ ainsi définie est unique et l'ensemble de ces fonctions forment une base complète des polynômes de degré κ sur l'élément de référence.

On a plusieurs bijections entre l'ensemble des couples (ℓ_1, ℓ_2) et l'ensemble des entiers $\{1, \dots, Nve\}$.

$$\vartheta(\ell_1, \ell_2) = k \in \{1, \dots, Nve\}$$

Pour une bijection donnée, il est plus pratique d'utiliser l'équivalence

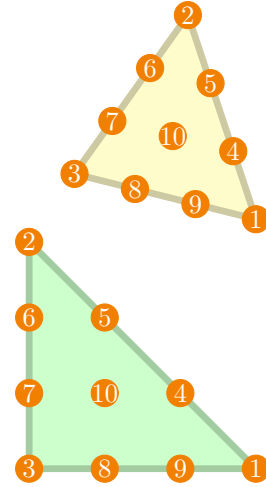
$$0 \leq \ell_2 \leq \kappa, \quad 0 \leq \ell_1 \leq \kappa - \ell_2, \quad \widehat{\varphi}_{\ell_1, \ell_2}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}) \quad k \equiv \vartheta(\ell_1, \ell_2) \in \{1, \dots, Nve\}$$

Les bijections choisies dans ce cours, pour définir les numérotations locales des points d'interpolations sont telles qu'il y a coïncidence avec la numérotation locale des points géométriques :

$$\vartheta(\kappa, 0) = 1, \quad \vartheta(0, \kappa) = 2, \quad \vartheta(0, 0) = 3$$

- Pour $\kappa = 3$ (Eléments finis P3-Lagrange), les couples sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ et $(0, 3)$ et la bijection choisie ici est

$$\begin{aligned} (0, 0) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{0,0} = \frac{1}{3}(0\widehat{\mathbf{e}}_1 + 0\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(0, 0) = 3 \\ (1, 0) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{1,0} = \frac{1}{3}(1\widehat{\mathbf{e}}_1 + 0\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(1, 0) = 8 \\ (2, 0) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{2,0} = \frac{1}{3}(2\widehat{\mathbf{e}}_1 + 0\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(2, 0) = 9 \\ (3, 0) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{3,0} = \frac{1}{3}(3\widehat{\mathbf{e}}_1 + 0\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(3, 0) = 1 \\ (0, 1) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{0,1} = \frac{1}{3}(0\widehat{\mathbf{e}}_1 + 1\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(0, 1) = 7 \\ (1, 1) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{1,1} = \frac{1}{3}(1\widehat{\mathbf{e}}_1 + 1\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(1, 1) = 10 \\ (2, 1) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{2,1} = \frac{1}{3}(2\widehat{\mathbf{e}}_1 + 1\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(2, 1) = 4 \\ (0, 2) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{0,2} = \frac{1}{3}(0\widehat{\mathbf{e}}_1 + 2\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(0, 2) = 6 \\ (1, 2) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{1,2} = \frac{1}{3}(1\widehat{\mathbf{e}}_1 + 2\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(1, 2) = 5 \\ (0, 3) &\equiv \boldsymbol{\xi}_{0,3} = \frac{1}{3}(0\widehat{\mathbf{e}}_1 + 3\widehat{\mathbf{e}}_2) \iff \vartheta(0, 3) = 2 \end{aligned}$$

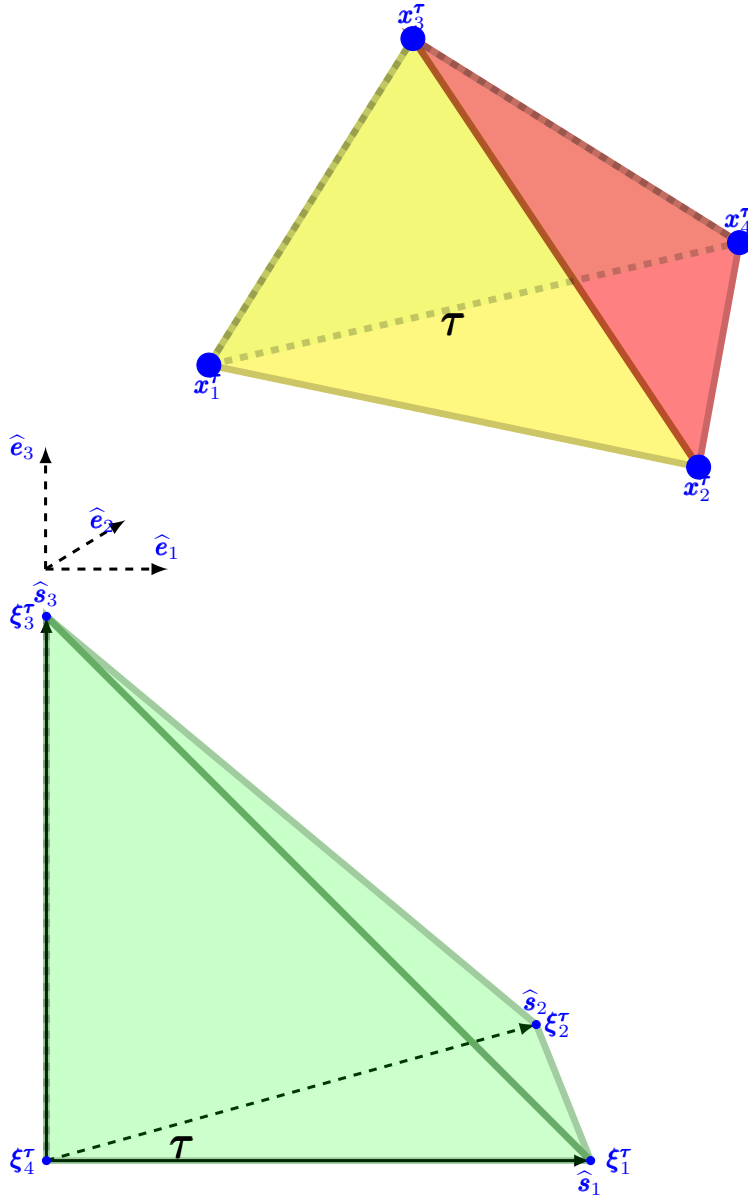


Nve = 10 et

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_1^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{\lambda_1(3\lambda_1 - 2)(3\lambda_1 - 1)}{2}, \\
\hat{\varphi}_4^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{9\lambda_1\lambda_2(3\lambda_1 - 1)}{2}, \\
\hat{\varphi}_5^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{9\lambda_1\lambda_2(3\lambda_2 - 1)}{2}, \\
\hat{\varphi}_2^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{\lambda_2(3\lambda_2 - 2)(3\lambda_2 - 1)}{2}, \\
\hat{\varphi}_6^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= . \\
\hat{\varphi}_7^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= , \\
\hat{\varphi}_3^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \frac{\lambda_3(3\lambda_3 - 2)(3\lambda_3 - 1)}{2}, \\
\hat{\varphi}_8^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= , \\
\hat{\varphi}_9^{p3}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= , \\
\hat{\varphi}_{10}^{p3}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) &= .
\end{aligned}$$

2.2.5 Éléments finis P_1 -Lagrange 3D : $\tau \in \mathbb{R}^3$

$$\tau \equiv \mathcal{G}^\tau = \{x_1^\tau, \quad x_2^\tau, \quad x_3^\tau, \quad x_4^\tau\}$$



Pour tout point $\mathbf{x} \in \tau \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{e}}_3$$

$(\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2, \widehat{\mathbf{e}}_3)$ est une base orthonormée de l'espace physique.

Les coordonnées Barycentriques : $\lambda_1(\mathbf{x})$, $\lambda_2(\mathbf{x})$, $\lambda_3(\mathbf{x})$ et $\lambda_4(\mathbf{x})$ sont définies par :

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^T) \times (\mathbf{x}_3^T - \mathbf{x}_2^T) \cdot (\mathbf{x}_4^T - \mathbf{x}_2^T)}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2^T) \times (\mathbf{x}_3^T - \mathbf{x}_2^T) \cdot (\mathbf{x}_4^T - \mathbf{x}_2^T)} \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_3^T) \times (\mathbf{x}_4^T - \mathbf{x}_3^T) \cdot (\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_3^T)}{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3^T) \times (\mathbf{x}_4^T - \mathbf{x}_3^T) \cdot (\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_3^T)} \\ \lambda_3(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_4^T) \times (\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_4^T) \cdot (\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_4^T)}{(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4^T) \times (\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_4^T) \cdot (\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_4^T)} \\ \lambda_4(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^T) \times (\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_1^T) \cdot (\mathbf{x}_3^T - \mathbf{x}_1^T)}{(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1^T) \times (\mathbf{x}_2^T - \mathbf{x}_1^T) \cdot (\mathbf{x}_3^T - \mathbf{x}_1^T)}\end{aligned}$$

Les fonctions λ_k sont linéaires et vérifient les relations suivantes :

$$\lambda_1(\mathbf{x}) + \lambda_2(\mathbf{x}) + \lambda_3(\mathbf{x}) + \lambda_4(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_k(\mathbf{x}_p) = \delta_{kp}$$

Pour tout point $\mathbf{x} \in \widehat{\tau} \subset \mathbb{R}^3$, le changement de variable permettant de passer d'un élément donné à l'élément de référence est donnée par

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x})\widehat{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2(\mathbf{x})\widehat{\mathbf{e}}_2 + \lambda_3(\mathbf{x})\widehat{\mathbf{e}}_3$$

De même, la transformation inverse s'écrit

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 + \lambda_4\mathbf{x}_4$$

Exercice 2.2.3. Montez que, pour un élément tétraédrique τ , $(\lambda_1(\mathbf{x}), \lambda_2(\mathbf{x}), \lambda_3(\mathbf{x}), \lambda_4(\mathbf{x}))$ est la base canonique de $P_1(\tau)$. On montrera que les fonctions $\lambda_k(\mathbf{x})$ sont linéaires, sont linéairement indépendants, vérifient $\lambda_k(\mathbf{x}_p) = \delta_{kp}$ avant de conclure

□

Exercice 2.2.4. On considère les fonctions de Base suivantes :

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}_1^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \lambda_1(\mathbf{x})(2\lambda_1(\mathbf{x}) - 1) \\ \widehat{\varphi}_2^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \lambda_2(\mathbf{x})(2\lambda_2(\mathbf{x}) - 1) \\ \widehat{\varphi}_3^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \lambda_3(\mathbf{x})(2\lambda_3(\mathbf{x}) - 1) \\ \widehat{\varphi}_4^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= \lambda_4(\mathbf{x})(2\lambda_4(\mathbf{x}) - 1) \\ \widehat{\varphi}_5^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_2(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_6^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_7^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_3(\mathbf{x})\lambda_4(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_8^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_4(\mathbf{x})\lambda_1(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_9^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_1(\mathbf{x})\lambda_3(\mathbf{x}) \\ \widehat{\varphi}_{10}^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) &= 4\lambda_2(\mathbf{x})\lambda_4(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Trouvez les points d'interpolation \mathbf{x}_ℓ pour lesquels les fonctions de base $\widehat{\varphi}_1, \dots, \widehat{\varphi}_{10}$ définissent la base canonique de $P_2(\tau)$.

□

Chapter 3

Eléments finis : Assemblage par éléments.

3.1 Données Géométriques de Ω_h .

On considère un domaine Ω_h défini par un ensemble de points géométriques \mathcal{G}_h et un ensemble d'éléments \mathcal{T}_h constitué de formes géométriques équivalentes au même élément de référence $\hat{\tau}$ défini par N_s points.

$$\mathcal{G}_h = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_s}\} \equiv \text{CoorS}(1 : d, 1 : N_s)$$

$$\mathcal{T}_h = \left\{ (\mathbf{x}_{\text{NuS}(1,e)}, \dots, \mathbf{x}_{\text{NuS}(N_{se},e)}) \text{ pour } e = 1, \dots, N_e \text{ / } \mathbf{x}_{\text{NuS}(k,e)} \in \mathcal{G}_h \right\}$$

$$\mathcal{T}_h \equiv \begin{cases} \text{CoorS}(1 : d, 1 : N_s) \\ \text{NuS}(1 : N_{se}, 1 : N_e) \end{cases}$$

Exemples 3.1. *Contexte 1D avec deux éléments : $d = 1$, $N_s = 3$ et $N_e = 1$*

$$\mathcal{T}_h \equiv \begin{cases} \text{CoorS}(1 : d, 1 : N_s) = [2, 2.5, 3] \\ \text{NuS}(1 : N_{se}, 1 : N_e) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

On admet que les données $\text{CoorS}(1 : d, 1 : N_s)$ et $\text{NuS}(1 : N_{se}, 1 : N_e)$ définissent un maillage conforme et non singulier de Ω_h . C'est-à-dire que la mesure de chaque élément est non nulle ($\neq 0$) et

$$\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{N_e} e \quad \text{avec} \quad \text{Mesure}(e) \neq 0, \quad \text{et} \quad e \cap e' = \emptyset \quad \text{si} \quad e \neq e'$$

3.2 Données Géométriques de $\partial\Omega_h$.

$$\partial\Omega_h = \bigcup_{f=1}^{N_f} \partial\Omega_f$$

$$\partial\mathcal{T}_h = \left\{ (\mathbf{x}_{\text{NuB}(1,e)}, \dots, \mathbf{x}_{\text{NuB}(N_{bf},f)}) \text{ pour } f = 1, \dots, N_f \text{ / } \mathbf{x}_{\text{NuB}(k,f)} \in \mathcal{G}_h \right\}$$

Pour toute surface de bord f , $\text{NubS}(1 : \text{Nbl}, f)$ donne les numéros globaux des points constituant f et $\text{LogF}(f)$ donne un nombre caractérisant le type de condition aux limites à appliquer à la frontière f .

$$\partial\mathcal{T}_h \equiv \begin{cases} \text{NubS}(1 : \text{Nbl}, 1 : \text{Nf}) \\ \text{LogF}(1 : \text{Nf}) \end{cases}$$

Exemples 3.2. *Contexte 1D avec deux éléments : $d = 1$, $\text{Nbl} = 1$ et $\text{Nf} = 2$*

$$\partial\mathcal{T}_h \equiv \begin{cases} \text{NubS}(1 : \text{Nbl}, 1 : \text{Nf}) = [1, 3] \\ \text{LogF}(1 : \text{Nf}) = [20, 50] \end{cases}$$

3.3 Données d'interpolation sur Ω_h .

On considère aussi un ensemble \mathcal{D}_h de points d'interpolation

$$\mathcal{D}_h = \left\{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\text{Nv}} \right\} \equiv \left\{ (\mathbf{x}_{\text{NuV}(1,e)}, \dots, \mathbf{x}_{\text{NuV}(\text{Ns},e)}) \text{ pour } e = 1, \dots, \text{Ne} \right\}$$

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{CoorV}(1 : d, 1 : \text{Nv}) \\ \text{NuV}(1 : \text{Nve}, 1 : \text{Ne}) \end{cases}$$

On suppose que les points d'interpolation sont définis de manière à assurer la continuité de l'interpolation entre des éléments voisins. Les fonctions de base, sur le domaine dans son entier, coïncide sur chaque élément, soit avec la fonction nulle, soit avec une fonction de la base canonique locale à l'élément.

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in e \notin \vartheta(i) \\ \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x})) & \text{si } \mathbf{x} \in e \in \vartheta(i) \end{cases} \quad \text{avec } i = \text{NuV}(k, e) \equiv \text{D}(k, e) \quad (3.1)$$

On note ici $\vartheta(i)$ l'ensemble des éléments sur lesquels la fonction de base $\varphi_i(\mathbf{x})$ est non nulle. De même, $\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x})$ est la transformation de l'élément e (du maillage) vers l'élément de référence \widehat{e} . Pour simplifier la présentation on utilisera parfois des notations moins explicites : $\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \equiv \boldsymbol{\xi}$. En définitive

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \varphi_i^e(\mathbf{x}) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \varphi_{\text{D}(k,e)}^e(\mathbf{x}) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x})) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.2)$$

$k \equiv k(i, e)$ est la numérotation locale sur l'élément e associée à la numérotation globale i . Par construction de la base canonique, on a

$$\varphi_i^e(\mathbf{x}_\ell) = \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi}^e(\mathbf{x}_\ell)) = \delta_{k\ell}, \quad \forall \ell = 1, \dots, \text{Nve}$$

L'interpolation globale de toute fonction $v(\mathbf{x})$ (sans la prise en compte des conditions aux limites) prend la forme suivante

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\text{Nv}} v_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

Les v_i sont des réels qui constituent les "coordonnées" de la projection (interpolation) de la fonction $v(\mathbf{x})$ dans la base $\varphi_i(\mathbf{x})$.

Exemples 3.3. *Contexte 1D avec deux éléments pour les éléments finis P1 : $d = 1$, $k = 1$, $\text{Nv} = \text{Ns}$ et $\text{Nve} = k + 1$*

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{CoorV}(1 : d, 1 : \text{Nv}) = [2, 2.5, 3] \\ \text{NuV}(1 : \text{Nve}, 1 : \text{Ne}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemples 3.4. Contexte 1D avec deux éléments pour les éléments finis P2 : $d = 1$, et $k = 2$

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{Coor}V(1 : d, 1 : Nv) = [2, 2.5, 3, 2.5 - \frac{0.5}{2}, 3 - \frac{0.5}{2}] \\ \text{Nu}V(1 : Nve, 1 : Ne) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemples 3.5. Contexte 1D avec deux éléments pour les éléments finis P3 : $d = 1$, et $k = 3$

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{Coor}V(1 : d, 1 : Nv) = [2, 2.5, 3, 2.5 - \frac{0.5}{3}, 2.5 - \frac{1}{3}, 3.0 - \frac{0.5}{3}, 3.0 - \frac{1}{3}] \\ \text{Nu}V(1 : Nve, 1 : Ne) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemples 3.6. Contexte 1D avec deux éléments pour les éléments finis Pk : $d = 1$

$$\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{Coor}V(1 : d, 1 : Nv) = [2, 2.5, 3, 2.5 - \frac{0.5}{k} \dots, 2.5 - \frac{0.5(k-1)}{k}, 3.0 - \frac{0.5}{k} \dots, 3.0 - \frac{0.5(k-1)}{k}] \\ \text{Nu}V(1 : Nve, 1 : Ne) = \text{à Compléter} \end{cases}$$

3.4 Données d'interpolation sur $\partial\Omega_h$.

$$\partial\mathcal{D}_h = \left\{ (\mathbf{x}_{\text{NuF}(1,f)}, \dots, \mathbf{x}_{\text{NuF}(\text{Ndf},f)}) \text{ pour } f = 1, \dots, \text{Nf} \mid \mathbf{x}_{\text{NuF}(k,f)} \in \mathcal{D}_h \right\}$$

$$\partial\mathcal{D}_h \equiv \begin{cases} \text{NuF}(1 : \text{Ndf}, 1 : \text{Nf}) \\ \text{LogF}(1 : \text{Nf}) \end{cases}$$

Pour toute surface de bord f , $\text{NuF}(1 : \text{Ndf}, f)$ donne les numéros globaux des variables locales à f et $\text{LogF}(f)$ donne un nombre caractérisant le type de condition aux limites à appliquer à la frontière f .

3.5 Formulation Algébrique du problème variationnel.

On pose $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_{Nv})^T$. Lorsque $a(u_h, v_h)$ est linéaire en v_h et $\ell(v_h)$ une forme linéaire, Le problème variationnel approché revient à résoudre le problème algébrique suivant.

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{Nv} \text{ tel que} \\ & \bullet \quad u_h(x) = \sum_{j=1}^{Nv} u_j \varphi_j(x) \\ & \bullet \quad a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i), \quad \text{pour tous les } i = 1, \dots, Nv. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.5.1 Contexte avec $a(u_h, v_h)$ forme bilinéaire.

Lorsque $a(u_h, v_h)$ est une forme bilinéaire (pas forcément symétrique) sur $\mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$ et que $\ell(v_h)$ est une forme linéaire sur \mathcal{V}_h . Le problème variationnel approché se met sous la forme d'un système algébrique linéaire :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

avec

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_e a^e(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{ij}^e = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\text{D}(k,e)\text{D}(k',e)}^e = \sum_e \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{kk'}^e$$

et

$$\underline{\mathbf{b}}_i = \ell(\varphi_i) = \sum_e \ell^e(\varphi_i) = \sum_e \underline{\mathbf{b}}_i^e = \sum_e \underline{\mathbf{b}}_{\text{D}(k,e)}^e = \sum_e \widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e$$

La matrices $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est de dimension $\text{Nv} \times \text{Nv}$. Les vecteurs $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ sont de dimlension Nv .

Algorithme d'assemblage par éléments

$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$ et $\underline{\mathbf{b}} = 0$.

★ Pour chaque élément $e : 1, \dots, \text{Ne}$

- Pour $k = 1, \dots, \text{Nve}$

$$i \equiv \text{NuV}(k, e)$$

$$\widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{L}^e(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}$$

$$\underline{\mathbf{b}}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + \widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e$$
- Pour $k' = 1, \dots, \text{Nve}$

$$j \equiv \text{NuV}(k', e)$$

$$\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e = a^e(\widehat{\varphi}_{k'}, \widehat{\varphi}_k) = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{A}^e(\widehat{\varphi}_{k'}(\boldsymbol{\xi}), \widehat{\varphi}_k(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} + \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e$$
- Fin (k')
- Fin (k)

★ Fin (e)

Algorithme d'assemblage par éléments : PK-Lagrange

$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$ et $\underline{\mathbf{b}} = 0$.

★ Pour chaque élément $e : 1, \dots, \text{Ne}$

Extraire les $\mathbf{x}_\ell^e \equiv \text{CoorS}(1 : \text{d}, \text{NuS}(\ell, e))$ pour $\ell = 1, \dots, \text{Nse}$

Calculer les gradients $\nabla \lambda_s$, pour $s = 1, \dots, \text{Nse}$, en fonction des \mathbf{x}_ℓ^e

- Pour $k = 1, \dots, \text{Nve}$

$$i \equiv \text{NuV}(k, e)$$

$$\widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{L}_k^e(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \lambda_s(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}$$

$$\underline{\mathbf{b}}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + \widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e$$
- Pour $k' = 1, \dots, \text{Nve}$

$$j \equiv \text{NuV}(k', e)$$

$$\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e = a^e(\widehat{\varphi}_{k'}, \widehat{\varphi}_k) = \int_{\widehat{e}} |\mathcal{J}^e| \mathcal{A}_{kk'}^e(\lambda_s(\boldsymbol{\xi}), \nabla \lambda_s) d\boldsymbol{\xi}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} + \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e$$
- Fin (k')
- Fin (k)

★ Fin (e)

Algorithme d'assemblage avec intégration numérique.

On se donne les points et les poids de Gauss dans l'élément de référence \hat{e} .
 $\Rightarrow \text{Ng}, \omega_g$ et $\lambda_{s,g}$ pour $g = 1, \dots, \text{Ng}$ et $s = 1, \dots, \text{Nse}$

On obtient les ξ_g comme fonction des $\lambda_{s,g}$ pour $g = 1, \dots, \text{Ng}$.

Pour les P_k -Lagrange on a $\xi = \sum_{\ell=1}^d \lambda_{\ell} \hat{e}_{\ell}$ et $\sum_{\ell=1}^d \lambda_{\ell} = 1$.

Initialisations : matrice et second membre globaux : $\underline{\mathbf{A}} = 0$ et $\underline{\mathbf{b}} = 0$.

★ Pour chaque élément $e : 1, \dots, \text{Ne}$

Extraire les $\mathbf{x}_{\ell}^e \equiv \text{CoorS}(1 : d, \text{NuS}(\ell, e))$ pour $\ell = 1, \dots, \text{Nse}$

Pour des transformations linéaires \mathcal{J}^e est constant sur e :

Calculer $|\mathcal{J}^e|$ en fonction des \mathbf{x}_s^e

Calculer les gradients $\nabla \lambda_s$, pour $s = 1, \dots, \text{Nse}$, en fonction des \mathbf{x}_{ℓ}^e

● Pour chaque point de gauss : $g=1, \dots, \text{Ng}$

Calculer $\mathbf{x}_g = \mathbf{x}(\xi_g) = \sum_{s=1}^{\text{Nse}} \lambda_{s,g} \mathbf{x}_s^{\tau}$

● Pour $k = 1, \dots, \text{Nve}$

$i \equiv \text{NuV}(k, e)$

$\hat{\mathbf{b}}_k^e = |\mathcal{J}^e| \mathcal{L}_k^e(\mathbf{x}_g, \lambda_{s,g})$

$\mathbf{b}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + \omega_g \hat{\mathbf{b}}_k^e$

● Pour $k' = 1, \dots, \text{Nve}$

$j \equiv \text{NuV}(k', e)$

$\hat{\underline{\mathbf{A}}}_{k,k'}^e = |\mathcal{J}^e| \mathcal{A}_{kk'}^e(\lambda_{s,g}, \nabla \lambda_s)$

$\underline{\mathbf{A}}_{i,j} = \underline{\mathbf{A}}_{i,j} + \omega_g \hat{\underline{\mathbf{A}}}_{k,k'}^e$

● Fin (k')

● Fin (k)

● Fin de la boucle sur les points de Gauss(g)

★ Fin de la boucle sur les éléments (e)

3.6 Prise en compte des conditions aux limites.

3.6.1 Conditions de Dirichlet.

Les conditions aux limites, de type Dirichlet (), sont prises en compte en modifiant le système linéaire de manière à prendre en compte la contrainte sur les différents "degrés de liberté" du bord. La ligne associée à la variable du bord à zéro partout sauf sur la diagonale qui est mise à la valeur "1". À la même ligne, le second membre est remplacé par la valeur à imposer (qu'elle soit nulle ou pas). On effectue alors une boucle sur les éléments frontières (∂e_f , $f = 1, \dots, \text{Ndf}$) et on applique la condition aux limites, en fonction de la caractérisation $\text{LogF}(f)$, sur les "degrés de liberté" $\text{NuF}(\ell, f)$ pour $\ell = 1, \dots, \text{Ndf}$.

Imposition des conditions aux limites de Dirichlet.

- ★ Pour chaque élément $\partial e_f : f = 1, \dots, \text{Ndf}$
 - Si $(\text{LogF}(f) == \text{Dirichlet})$ alors
 - Pour $\ell = 1, \dots, \text{Ndf}$
 - $i = \text{NuF}(\ell, f)$
 - $\mathbf{x}_i \equiv \text{CoorS}(1 : d, i)$
 - $\underline{\mathbf{A}}_{ij} = 0.0$ pour $j = 1, \dots, \text{Nv}$
 - $\underline{\mathbf{A}}_{ii} = 1.0$ et $\underline{\mathbf{b}}_i = D_f(\mathbf{x}_i)$
 - Fin de la boucle sur les ddl de la face (f)
 - Fin de la condition (Si)
- ★ Fin de la boucle sur les faces (f)

3.6.2 Conditions de Neumann homogènes.

Rien à faire

3.6.3 Conditions de Neumann non homogènes.

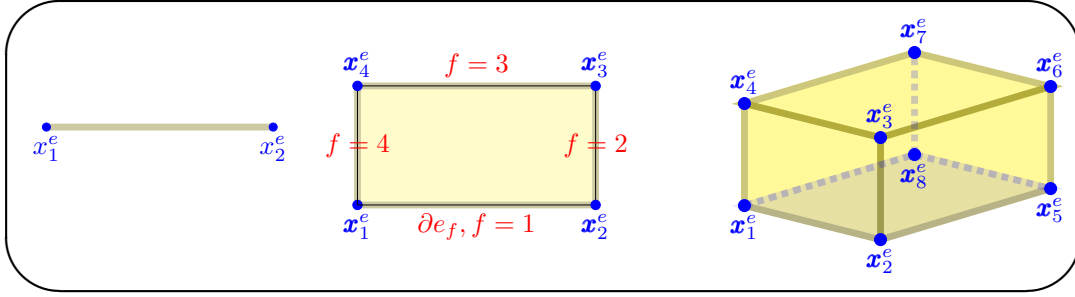
Modifier le second membre en ajoutant une intégrale de bord.

- ★ Pour chaque élément $\partial e_f : f = 1, \dots, \text{Ndf}$
 - Si $(\text{LogF}(f) == \text{Neumann})$ alors
 - Pour $\ell = 1, \dots, \text{Ndf}$
 - $i = \text{NuF}(\ell, f)$
 - $\underline{\mathbf{b}}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_h} \mathcal{L}_N(\mathbf{x}, \varphi_\ell^e) dS$
 - Fin de la boucle sur les ddl de la face (f)
 - Fin de la condition (Si)
- ★ Fin de la boucle sur les faces (f)

Chapter 4

Eléments finis Q_k -Lagrange.

Dans ce contexte, \mathcal{P}^e est l'espace des polynômes obtenus par produit tensoriel des espaces de polynômes 1D de degré $\leq k$. Les éléments géométriques sont des segments en 1D, des quadrangles (rectangles) en 2D et en 3D des hexaèdres (parallélépipèdes rectangles). La construction, des différentes bases canoniques, sera faite de manière à satisfaire la contrainte d'Unisolvance dans e et l'Unisolvance de la trace sur chaque élément du bord ∂e_f . Les ∂e_f sont des points en 1D, des segments en 2D, des faces (planes) en 3D,...



4.1 Eléments finis Q_1 -Lagrange 1D.

$$\mathcal{P}^e \equiv Q_k = P_k = \{1, x, x^2, \dots, x^k\},$$

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \mathbf{x}_1^e = x_1^e, \quad \mathbf{x}_2^e = x_2^e, \quad \mathbf{x}_\ell^e = x_1^e + (\ell - 2) \frac{x_2^e - x_1^e}{k} \text{ pour } 3 \leq \ell \leq k + 1 \right\}.$$

Ce qui se met aussi sous la forme

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \lambda_{1,1} = 1, \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{1,\ell} = 1 - \frac{(\ell-2)}{k} \text{ pour } 3 \leq \ell \leq k + 1 \right\}. \text{ Au final}$$

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \lambda_{1,1} = 1, \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{1,\ell} = \frac{m(\ell)}{k} \text{ pour } 1 \leq m(\ell) \leq k - 1 \right\}. \text{ Avec } m(\ell) = k - \ell + 2.$$

De même

$$\mathcal{D}^e = \left\{ \lambda_{2,1} = 0, \quad \lambda_{2,2} = 1, \quad \lambda_{2,\ell} = \frac{n(\ell)}{k} \text{ pour } 1 \leq n(\ell) \leq k - 1 \right\}. \text{ Avec } n(\ell) = \ell - 2.$$

Exemple pour $k = 4$:

$$\begin{array}{cccccc} \lambda_1 = 1 & \lambda_1 = \frac{3}{4} & \lambda_1 = \frac{2}{4} & \lambda_1 = \frac{1}{4} & \lambda_1 = 0 \\ \textcircled{1} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{2} \\ \mathbf{x}_1^e & \mathbf{x}_3^e & \mathbf{x}_4^e & \mathbf{x}_5^e & \mathbf{x}_2^e \end{array}$$

Les fonctions de la base canonique sont ici identiques à celles des éléments finis P_k -Lagrange 1D. Nous utilisons ici une notation spécifique qui facilitera la définition des éléments fins Q_k pour $k > 1$:

$$\psi_\ell^k(x) \equiv \widehat{\psi}_\ell^k(\lambda_1, \lambda_2) = \widehat{\varphi}_\ell^{qk}(\lambda_1, \lambda_2) \equiv \varphi_\ell^{qk}(x) \quad (4.1)$$

avec

$$\begin{aligned}\varphi_1^{qk}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_1^{qk}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \prod_{m=1}^{k-1} \left(\lambda_1 - \frac{m}{k}\right)}{\lambda_{1,1} \prod_{m=1}^{k-1} \left(\lambda_{1,1} - \frac{m}{k}\right)} = \beta_1 \lambda_1 \prod_{m=1}^{k-1} (k\lambda_1 - m) \\ \varphi_2^{qk}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_2^{qk}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2 \prod_{n=1}^{k-1} \left(\lambda_2 - \frac{n}{k}\right)}{\lambda_{2,2} \prod_{n=1}^{k-1} \left(\lambda_{2,2} - \frac{n}{k}\right)} = \beta_2 \lambda_2 \prod_{n=1}^{k-1} (k\lambda_2 - n)\end{aligned}$$

et pour $3 \leq \ell \leq k+1$ on a


$$\varphi_\ell^{qk}(x) \equiv \widehat{\varphi}_\ell^{qk}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} \left(\lambda_1 - \frac{m}{k}\right)}{\lambda_{1,\ell} \lambda_{2,\ell} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} \left(\lambda_{1,\ell} - \frac{m}{k}\right)} = \beta_\ell \lambda_1 \lambda_2 \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} (k\lambda_1 - m)$$

avec

$$\beta_1 = \frac{1}{(k-1)!}, \quad \beta_2 = \frac{1}{(k-1)!}, \quad \beta_\ell = \frac{k^2}{m(\ell) n(\ell) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m(\ell)}}^{k-1} (m(\ell) - m)}$$

4.2 Éléments finis Q_k -Lagrange : Rectangles.

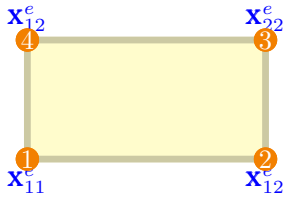
$\mathcal{G}^e = \{\mathbf{x}_1^e, \mathbf{x}_2^e, \mathbf{x}_3^e, \mathbf{x}_4^e\},$



4.2.1 Éléments finis Q_1 -Lagrange Rectangles.

$\mathcal{P}^e \equiv Q_1 = \{1, x, y, xy\},$

$\mathcal{D}^e = \{\mathbf{x}_{11}^e = \mathbf{x}_1^e, \mathbf{x}_{12}^e = \mathbf{x}_2^e, \mathbf{x}_{22}^e = \mathbf{x}_3^e, \mathbf{x}_{12}^e = \mathbf{x}_4^e\}$



$$\varphi_{\ell\ell'}^{qk}(\mathbf{x}) = \psi_\ell^k(x) \psi_{\ell'}^k(y) \quad (4.2)$$

Chapter 5

Applications.

5.1 Solutions manufacturées : Exemples 2D

La mise en œuvre passe par la validation des algorithmes. On dispose pour cela des résultats mathématiques d'analyse de convergence. En particulier, la convergence d'ordre $k + 1$ quand on utilise des éléments finis PK-Lagrange. La validation numérique de cette propriété passe par la construction d'une solution exacte analytique. On se donne d'abord un profil analytique de la solution exacte et on cherche le second membre qui permet de satisfaire une équation donnée.

Diffusion isotrope Le problème ici est de trouver la fonction $u(\mathbf{x})$ solution de l'équation

$$-\nabla \cdot (\beta \nabla u) = f(\mathbf{x})$$

avec $\beta > 0$ et des conditions aux limites données par la solution exacte $u(\mathbf{x})$ qui est encore à construire. On se donne le profil de solution exacte suivant

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

avec γ_x et γ_y des paramètres constants donnés. On peut choisir des profils variés selon la validation visée. Le profil choisi définira une solution exacte du problème de diffusion isotrope, pour un second membre adéquat. Dans le cas présent, on trouve

$$f(\mathbf{x}) = \beta (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

Par conséquent, la forme faible associée est définie avec

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\hat{\varphi}_l, \hat{\varphi}_{l'}) \equiv \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) &= \beta \nabla \hat{\varphi}_{l'} \cdot \nabla \hat{\varphi}_l \\ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\varphi}_l) \equiv \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_l}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) &= \beta (\gamma_x^2 + \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \hat{\varphi}_l(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \end{cases}$$

Pour plus de clarté, on a utilisé $x \equiv x(\boldsymbol{\xi})$ et $y \equiv y(\boldsymbol{\xi})$. C'est cette forme qui est utilisée pour construire une solution approchée $u_h(\mathbf{x})$ par éléments finis.

Diffusion anisotrope Problème de diffusion anisotrope utilise une matrice de diffusion $\underline{\beta}$ symétrique défini positive. Nous considérons ici une matrice de diffusion diagonale donnée par

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \beta_x > 0 \quad \text{et} \quad \beta_y > 0$$

Le problème ici est de trouver $u(\mathbf{x})$ solution de l'équation

$$-\nabla \cdot (\underline{\beta} \nabla u) = f(\mathbf{x})$$

avec les conditions aux limites données par la solution exacte qui est encore à construire. On se donne un profil de $u(\mathbf{x})$ de la forme

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

avec γ_x et γ_y des paramètres constants donnés. Le profil choisi définira une solution exacte du problème de diffusion anisotrope, pour le second membre

$$f(\mathbf{x}) = (\beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

La forme faible associée au problème de diffusion anisotropique est définie avec

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\widehat{\varphi}_l, \widehat{\varphi}_{l'}) \equiv \mathcal{A}_{\widehat{\varphi}_l \widehat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\xi)) &= (\underline{\beta} \nabla \widehat{\varphi}_{l'}) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_l \\ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \widehat{\varphi}_l) \equiv \mathcal{L}_{\widehat{\varphi}_l}(\mathbf{x}(\xi)) &= (\beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \widehat{\varphi}_l(\mathbf{x}(\xi)) \end{cases}$$

C'est cette forme qui est utilisée pour construire une solution approchée $u_h(x, y)$ du problème de diffusion anisotrope, par éléments finis.

Convection-réaction-diffusion On se donne un vecteur de convection $\mathbf{C} = c_x \widehat{\mathbf{e}}_x + c_y \widehat{\mathbf{e}}_y$, un coefficient de réaction α et une matrice de diffusion $\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{pmatrix}$. Le problème ici est de trouver une fonction scalaire $u(\mathbf{x})$ solution de l'équation

$$\nabla \cdot (u \mathbf{C}) + \alpha u - \nabla \cdot (\underline{\beta} \nabla u) = f(\mathbf{x})$$

avec les conditions aux limites données par la solution exacte qui est encore à construire. On se donne un profil de $u(\mathbf{x})$ de la forme

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

avec γ_x et γ_y des paramètres constants donnés. Le profil choisi définira une solution exacte du problème Convection-réaction-diffusion, pour le second membre donné par

$$f(\mathbf{x}) = (\alpha + \beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) + c_x \gamma_x \cos(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) - c_y \gamma_y \sin(\gamma_x x) \sin(\gamma_y y)$$

La forme faible associée au problème de Convection-réaction-diffusion est définie avec

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\widehat{\varphi}_l \widehat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\xi)) &= (\underline{\beta} \nabla \widehat{\varphi}_{l'}) \cdot \nabla \widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi}_{l'} \mathbf{C} \cdot \nabla \widehat{\varphi}_l + \alpha \widehat{\varphi}_{l'} \widehat{\varphi}_l \\ \mathcal{L}_{\widehat{\varphi}_l}(\mathbf{x}(\xi)) &= (\alpha + \beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \widehat{\varphi}_l(\xi) \\ &\quad + (c_x \gamma_x \cos(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) - c_y \gamma_y \sin(\gamma_x x) \sin(\gamma_y y)) \widehat{\varphi}_l(\xi) \end{cases}$$

C'est cette forme qui est utilisée pour construire une solution approchée $u_h(x, y)$ du problème de diffusion anisotrope, par éléments finis.

5.2 Analyse de la convergence numérique (pratique).

L'analyse de convergence se fait à partir de l'erreur (en norme p)

$$\mathcal{E}_p(h) = \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_p = \left(\int_{\Omega_h} |\mathbf{u}_h(x, y) - \mathbf{u}(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec h le pas du maillage. Les éléments finis PK, dans le contexte du problème de diffusion isotrope, on a l'estimation suivante :

$$\mathcal{E}_p(h) = Ch^{k+1}$$

Pour des maillages de pas h_ℓ , $\ell = 1, \dots, N_\ell$ avec par exemple $h_{\ell+1} > h_\ell$, on a un ordre de convergence numérique $k + 1$

$$\log \left(\frac{\mathcal{E}_p(h_{\ell+1})}{\mathcal{E}_p(h_\ell)} \right) = (k + 1) \log \left(\frac{h_{\ell+1}}{h_\ell} \right)$$

On obtient alors l'ordre de convergence pratique (de la mise en œuvre) par

$$(k + 1) = \log \left(\frac{\mathcal{E}_p(h_{\ell+1})}{\mathcal{E}_p(h_\ell)} \right) / \log \left(\frac{h_{\ell+1}}{h_\ell} \right)$$

On a validé la stratégie numérique lorsque l'ordre de convergence pratique est proche de l'ordre de convergence analytique:

$$k + 1 \simeq k + 1$$

L'évaluation de l'erreur $\mathcal{E}_p(h)$ se fait en utilisant les points de quadrature :

$$\mathcal{E}_p(h) = \left(\int_{\Omega_h} |\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_e |\mathcal{J}^e| \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g |\mathbf{u}_h(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g)) - \mathbf{u}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g))|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Exercice 5.2.1. Eléments droits 2D Triangles : $d = 2$ et $N_{pl} = 3$. On considère un élément triangle droit (e) défini par ($N_{pl}=3$) points **non alignés et orientés dans le sens trigonométrique par rapport à la numérotation locale**:

$$\mathbf{x}_i \equiv \mathbf{x}_{G(1,e)} \equiv \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_j \equiv \mathbf{x}_{G(2,e)} \equiv \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}_{G(3,e)} \equiv \mathbf{x}_3.$$

avec, pour tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \equiv x \hat{\mathbf{e}}_1 + y \hat{\mathbf{e}}_2 \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2)$ est une base orthonormée de l'espace physique.

Les coordonnées Barycentriques : $\lambda_1(\mathbf{x})$, $\lambda_2(\mathbf{x})$ et $\lambda_3(\mathbf{x})$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \times (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)}{\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)} \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)}{\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)} \\ \lambda_3(\mathbf{x}) &= \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3} = \frac{\det(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i ; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\det(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i ; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)} \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs $\mathbf{p} = p_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + p_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ et $\mathbf{q} = q_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + q_2 \hat{\mathbf{e}}_2$ la fonction $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{q})$ est définie par

$$\det(\mathbf{p} ; \mathbf{q}) = p_1 q_2 - p_2 q_1$$

- Montrez que $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{q})$ est une forme bilinéaire antisymétrique avec $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{p}) = 0$, $\forall \mathbf{p}$.

Solution:

à compléter

Fin

- Vérifiez que les fonctions $\lambda_\ell(\mathbf{x})$, pour $\ell = 1, 2, 3$, sont affines et que

$$\lambda_\ell(\mathbf{x}_{G(\ell',e)}) = \delta_{\ell\ell'}.$$

Solution:

à compléter

Fin

- Montrez que pour tout $\mathbf{x} \in e$ on a $0 \leq \lambda_\ell \leq 1$; *Il faudra montrer que les relations sont vraies sur le bord de (e), puis conclure.* **Solution:**

à compléter

Fin

- Vérifiez que les gradients (par rapport à \mathbf{x} , des coordonnées barycentriques sont données par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1 &= \frac{\det(\hat{\mathbf{e}}_1 ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \hat{\mathbf{e}}_1 + \det(\hat{\mathbf{e}}_2 ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) \hat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)} = \frac{(y_k - y_j) \hat{\mathbf{e}}_1 - (x_k - x_j) \hat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)} \\ \nabla \lambda_2 &= \frac{\det(\hat{\mathbf{e}}_1 ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \hat{\mathbf{e}}_1 + \det(\hat{\mathbf{e}}_2 ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \hat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)} = \frac{(y_i - y_k) \hat{\mathbf{e}}_1 - (x_i - x_k) \hat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)} \\ \nabla \lambda_3 &= \frac{\det(\hat{\mathbf{e}}_1 ; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \hat{\mathbf{e}}_1 + \det(\hat{\mathbf{e}}_2 ; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \hat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i ; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)} = \frac{(y_j - y_i) \hat{\mathbf{e}}_1 - (x_j - x_i) \hat{\mathbf{e}}_2}{\det(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i ; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)} \end{aligned}$$

avec

$$\nabla \lambda_l = \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2 \equiv \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_2 \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Solution:

à compléter

Fin

- En utilisant la propriété $\det(\mathbf{p} ; \mathbf{p}) = 0$ pour $\mathbf{p} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j$, Montrez que

$$\det(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j ; \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) = \det(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k ; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)$$

Solution:

à compléter

Fin

- On défini maintenant la transformation

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \xi \hat{\mathbf{s}}_1 + \eta \hat{\mathbf{s}}_2, \quad \forall \mathbf{x} \in e$$

$(\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2)$ est une base orthonormée de l'espace de référence,

$$\xi \equiv \lambda_1(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \eta \equiv \lambda_2(\mathbf{x})$$

Calculez la valeur absolue du déterminant du Jacobien (de la transformation)

$$|\mathcal{J}^e| = \frac{1}{|\det(\nabla \xi ; \nabla \eta)|}.$$

En déduire que la transformation $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ est inversible. **Solution:**

à compléter

Fin

- On a

$$\frac{a^e(\varphi_{D(l',e)}, \varphi_{D(l,e)})}{\ell^e(\varphi_{D(k,e)})} = \frac{a^e(\hat{\varphi}_{l'}, \hat{\varphi}_l)}{\ell^e(\hat{\varphi}_k)} = \frac{\int_e \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_e \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}$$

Pour des triangles droits (e), la transformation est affine et $|\mathcal{J}^e|$ est une constante. Vérifiez que

$$\frac{a^e(\varphi_{D(l',e)}, \varphi_{D(l,e)})}{\ell^e(\varphi_{D(k,e)})} = \frac{|\mathcal{J}^e| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) d\xi d\eta}{|\mathcal{J}^e| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) d\xi d\eta}$$

Solution:

à compléter

Fin

□

Devoir Maison: mise en œuvre des éléments finis

A rendre le 21 Février 2026 avant 12:00 par e-mail à l'adresse nkongga@unice.fr

Mise en œuvre et validation des éléments finis P3-Lagrange sur des triangles.

Définition du problème Convection-réaction-diffusion 2D.

On se donne un coefficient de réaction α , un vecteur de convection $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$ et une matrice de diffusion $\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{pmatrix}$. Le problème ici est de trouver une fonction scalaire $u(\mathbf{x})$ solution de l'équation

$$-\nabla \cdot (\underline{\beta} \nabla u) + \alpha u + \nabla \cdot (u \mathbf{C}) = f(\mathbf{x})$$

Avec les conditions aux limites données par la solution exacte qui est encore à établir. On se donne un profil de $u(\mathbf{x})$ de la forme

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y)$$

Avec γ_x et γ_y des paramètres constants donnés. Le profil choisi définira une solution exacte du problème de convection-réaction-diffusion, pour le second membre donné par

$$f(\mathbf{x}) = \left(\alpha + \beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2 \right) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) + c_x \gamma_x \cos(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) - c_y \gamma_y \sin(\gamma_x x) \sin(\gamma_y y)$$

La forme faible associée au problème de convection-réaction-diffusion est définie avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{A}(\hat{\varphi}_l, \hat{\varphi}_{l'}) \equiv \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_l \hat{\varphi}_{l'}}(\mathbf{x}(\xi)) & = & (\underline{\beta} \nabla \hat{\varphi}_{l'}) \cdot \nabla \hat{\varphi}_l + \alpha \hat{\varphi}_{l'} \hat{\varphi}_l - \hat{\varphi}_{l'} \mathbf{C} \cdot \nabla \hat{\varphi}_l \\ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\varphi}_l) \equiv \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_l}(\mathbf{x}(\xi)) & = & \left(\alpha + \beta_x \gamma_x^2 + \beta_y \gamma_y^2 \right) \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \hat{\varphi}_l(\xi) \\ & & + \left(c_x \gamma_x \cos(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) - c_y \gamma_y \sin(\gamma_x x) \sin(\gamma_y y) \right) \hat{\varphi}_l(\xi) \end{array} \right.$$

C'est cette forme qui est utilisée pour construire une solution approchée $u_h(x, y)$ du problème de convection-réaction-diffusion anisotrope, par éléments finis.

Travail à faire.

L'objectif est de modifier (compléter) le programme scilab qui vous a été transmis, de manière à :

- Ajouter les éléments finis P3-Lagrange : en complétant les fonctions `Phi_Pk` et `GradPhi_Pk` pour le cas `pk=3`.
- Résoudre le problème de convection-réaction-diffusion anisotrope 2D. Il faudra

- ★ Modifier la fonction `f(X, kx, ky, Mu, Cm)` en une fonction `f(X, gamx, gamy, betx, bety, cx, cy, alpha)` pour que la solution exacte du problème de Convection-réaction-diffusion anisotrope 2D soit :

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\gamma_x x) \cos(\gamma_y y) \equiv \text{Exact}(\mathbf{x}, y, \text{gamx}, \text{gamy})$$

avec $\gamma_x \equiv \text{gamx}$ et $\gamma_y \equiv \text{gamy}$.

- ★ Modifier la sortie de la fonction `Composite_Mat(Xg)` pour avoir en sortie les valeurs de `betax`, `betay`, `cx`, `cy` et `alpha`.
- ★ Modifier la définition des variables `Be_k` et `Ae_k_kp` pour prendre en compte la physique du problème de convection-réaction-diffusion anisotrope 2D.

Validations avec à chaque fois : $Lx=1$, $Ly=1$, $gamx = \pi/Lx$, $gamy = 2*\pi/Ly$

- **Problème de réaction:** Pour un problème de réaction on a :

$$\text{betx} = 0, \quad \text{bety} = 0, \quad \text{cx} = 0, \quad \text{cy} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha \neq 0.$$

La convergence optimale est-elle obtenue ? (c.ad. Avoir l'ordre $k+1$ avec les éléments finis Pk-Lagrange : pour $k=1, 2$ et 3 , soit $(EF_Pk = 1, EF_Pk= 2$ et $EF_Pk= 3)$).

- **Problème de diffusion isotrope:** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\text{betx} = \text{bety} > 0, \quad \text{cx} = 0, \quad \text{cy} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0.$$

La convergence optimale est-elle obtenue ?

- **Problème de diffusion anisotrope:** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\text{betx} > 0, \quad \text{betx} \neq \text{bety} > 0, \quad \text{cx} = 0, \quad \text{cy} = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0.$$

La convergence optimale est-elle obtenue ? Qu'observez-vous quand $\text{betx} > 0$ et $\text{bety} = 0$? Qu'observez vous quand soit $\text{betx} = 10^{-8}$ et $\text{bety} = 1$. Qu'en concluez-vous ?

- **Problème de convection:** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\text{betx} = 0, \quad \text{bety} = 0, \quad \text{cx} \neq 0, \quad \text{cy} \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0.$$

La convergence optimale est-elle toujours obtenue? Comment évolue la convergence quand on utilise $\text{betx} = \text{bety} = dh^m$ avec $dh = \sqrt{Lx * Ly/Ne}$ et pour $m = 1, 2, 3$?

- pour un problème de diffusion anisotrope ($\text{cx} = \text{cy} = 0$, $\alpha = 0$, ($\text{betx} = 0$ et $\text{bety} > 0$ ou bien ($\text{betx} > 0$ et $\text{bety} = 0$)), on n'a pas la convergence à l'ordre $k+1$ avec les éléments finis Pk-Lagrange : pour $k=1, 2$ et 3 .
- **Convection-réaction-diffusion anisotrope 2D.** Pour ce problème, on a les données suivantes :

$$\text{betx} = 1, \quad \text{bety} = 2, \quad \text{cx} = 1, \quad \text{cy} = 0.5 \quad \text{et} \quad \alpha = -5.$$

La convergence optimale est-elle obtenue?

Analyse de la convergence numérique (pratique).

L'analyse de convergence se fait à partir de l'erreur (en norme p)

$$\mathcal{E}_p(h) = \|u_h - u\|_p = \left(\int_{\Omega_h} |u_h(x, y) - u(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec h le pas du maillage. Les éléments finis PK, dans le contexte du problème de diffusion isotrope, on a l'estimation suivante :

$$\mathcal{E}_p(h) = Ch^{k+1}$$

Pour des maillages de pas h_ℓ , $\ell = 1, \dots, N_\ell$ avec par exemple $h_{\ell+1} > h_\ell$, on a un ordre de convergence numérique $K + 1$

$$\log \left(\frac{\mathcal{E}_p(h_{\ell+1})}{\mathcal{E}_p(h_\ell)} \right) = (K + 1) \log \left(\frac{h_{\ell+1}}{h_\ell} \right)$$

On obtient alors l'ordre de convergence pratique (de la mise en œuvre) par

$$(\mathbf{K} + 1) = \log \left(\frac{\mathcal{E}_p(h_{\ell+1})}{\mathcal{E}_p(h_\ell)} \right) \bigg/ \log \left(\frac{h_{\ell+1}}{h_\ell} \right)$$

On a validé la stratégie numérique lorsque l'ordre de convergence pratique est proche de l'ordre de convergence analytique:

$$\mathbf{K} + 1 \simeq k + 1$$

L'évaluation de l'erreur $\mathcal{E}_p(h)$ se fait en utilisant les points de quadrature :

$$\mathcal{E}_p(h) = \left(\int_{\Omega_h} |\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_e |\mathcal{J}^e| \sum_{g=1}^{\text{Ng}} \omega_g |\mathbf{u}_h(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g)) - \mathbf{u}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_g))|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Problème 1D : 10pts

On considère un maillage $\Omega_h \subset \mathbb{R}$ donné par $N_p = 5$ points géométriques, $N_e = 3$ éléments géométriques et les correspondances numérotation locale numérotation globale géométriques suivantes: x_j coordonnée du point dont la numérotation globale est j

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.0, \quad x_3 = 2.0, \quad x_4 = 3.0, \quad x_5 = 4.0,$$

$G(k, e)$ numérotation globale géométrique associée au numéro géométrique local k sur l'élément (e)

$G(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$
$k = 1$	2	1	5
$k = 2$	3	2	4

Soit \mathcal{V}_h l'espace éléments finis P2-Lagrange sur ce maillage. L'interpolation du P2-Lagrange ajoute les points

$$x_6 = 0.5, \quad x_7 = 1.5, \quad x_8 = 3.5,$$

et

$D(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$
$k = 1$	2	1	5
$k = 2$	3	2	4
$k = 3$	7	6	8

$$\mathcal{V}_h(\Omega_h) = \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{N_v})$$

Question 1) Tracez le maillage Ω_h en positionnant tous les points géométriques avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 2) Positionnez tous les degrés de libertés P2-Lagrange avec les numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 3) Quels sont les degrés de libertés (m) pour lesquels on a

$$\int_{\Omega_h} \varphi_1(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_h} \varphi_4(x) \varphi_m(x) dx = 0$$

Justifiez votre réponse.

Question 4) Tracez les fonctions $\varphi_2(x)$ et $\varphi_8(x)$

Problème 2D : 10 pts

On considère un maillage $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ donné par $N_p = 6$ points géométriques, $N_e = 5$ éléments géométriques et les correspondances numérotation locale numérotation globale géométriques suivantes: \mathbf{x}_j coordonnée du point dont la numérotation globale est j

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$G(k, e)$ numérotation globale géométrique associée au numéro géométrique local k sur l'élément (e)

$G(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$
$k = 1$	5	4	4	5	
$k = 2$	2	5	1	1	1
$k = 5$	3	3	5	2	4

Question 1) Tracez le maillage Ω_h en positionnant tous les points géométriques avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 2) Dans le contexte des éléments finis P2-Lagrange il n'y a pas équivalence entre les numérotations géométriques et degrés de libertés : $D(k, e) \neq G(k, e)$ et $N_v \neq N_p$. La construction de l'espace \mathcal{V}_h se fait alors à partir des fonctions de bases dans l'éléments de référence \hat{e} . Sur \hat{e} , $N_{ve} = 6$ Par définition des EF-Lagrange, on a donc sur chaque élément (e) du maillage

$$\varphi_{G(1,e)}^e(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_1(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})), \quad \varphi_{G(2,e)}^e(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_2(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \quad \text{et} \quad \varphi_{G(3,e)}^e(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_3(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))$$

soient $D(1, e) = G(1, e)$ et $D(2, e) = G(2, e)$. Il nous faut maintenant introduire les derniers degrés de liberté associés aux points d'interpolations localisés aux centres de chaque segment du maillage. Plusieurs options cohérentes sont possibles pour construire une correspondance entre la numérotation globale et locale ($D(k, e)$). Nous adopterons simplement le choix suivant:

$D(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$
$k = 1$	5	4	4	5	6
$k = 2$	2	5	1	1	1
$k = 3$	3	3	5	2	4
$k = 4$	11	14	9	8	15
$k = 6$	10	13	8	7	9
$k = 7$	13	12	14	11	16

$$\mathcal{V}_h(\Omega_h) = \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{N_v})$$

En utilisant cette définition positionnez tous les degrés de libertés P2-Lagrange avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

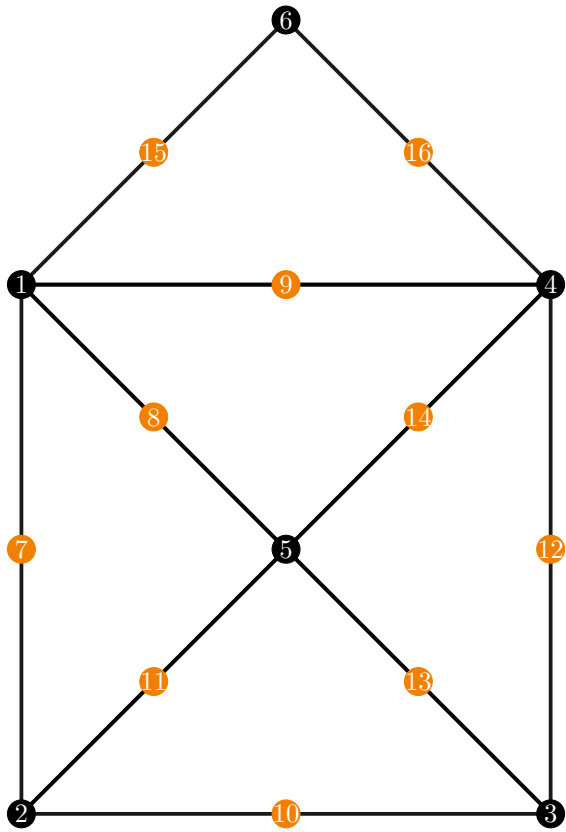
Question 3) Quels sont les degrés de libertés (m) pour lesquels on a

$$\int_{\Omega_h} \varphi_6(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_h} \varphi_{12}(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

Justifiez votre réponse.

Question 4) Calculez explicitement (valeurs numériques) sur $e = 6$ les gradients dans l'espace physique des coordonnées barycentriques : $\nabla \lambda_1(\mathbf{x})$, $\nabla \lambda_2(\mathbf{x})$ et $\nabla \lambda_3(\mathbf{x})$. **Solution:** à compléter

Fin



Problème 1D : 10pts

On considère un maillage $\Omega_h \subset \mathbb{R}$ donné par $N_s = 5$ points géométriques, $N_e = 3$ éléments géométriques et les correspondances numérotation locale numérotation globale géométriques suivantes: x_j coordonnée du point dont la numérotation globale est j

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.0, \quad x_3 = 2.0, \quad x_4 = 3.0, \quad x_5 = 4.0,$$

NuS(k, e) numérotation globale géométrique associée au numéro géométrique local k sur l'élément (e)

NuS(k, e)	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$
$k = 1$	2	1	5
$k = 2$	3	2	4

Soit \mathcal{V}_h l'espace des éléments finis P2-Lagrange sur ce maillage. L'interpolation du P2-Lagrange ajoute les points

$$x_6 = 0.5, \quad x_7 = 1.5, \quad x_8 = 3.5,$$

et

NuV(k, e)	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$
$k = 1$	2	1	5
$k = 2$	3	2	4
$k = 3$	7	6	8

$$\mathcal{V}_h^{p2}(\Omega_h) = \text{span}(\varphi_1^{p2}, \dots, \varphi_i^{p2}, \dots, \varphi_{N_v}^{p2})$$

Question 1) Tracez le maillage Ω_h en positionnant tous les points géométriques avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 2) Positionnez tous les degrés de liberté P2-Lagrange avec les numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 3) Quels sont les degrés de libertés (m) pour lesquels on a

$$\int_{\Omega_h} \varphi_1^{p2}(x) \varphi_m^{p2}(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_h} \varphi_4^{p2}(x) \varphi_m^{p2}(x) dx = 0$$

Justifiez votre réponse.

Question 4) Tracez les fonctions $\varphi_2^{p2}(x)$ et $\varphi_8^{p2}(x)$

Problème 2D : 10 pts

On considère un maillage $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ donné par $N_s = 6$ points géométriques, $N_e = 5$ éléments géométriques et les correspondances numérotation locale numérotation globale géométriques suivantes: \mathbf{x}_j coordonnée du point dont la numérotation globale est j

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\text{NuV}(k, e)$ numérotation globale géométrique associée au numéro géométrique local k sur l'élément (e)

$\text{NuS}(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$
$k = 1$	5	4	4	5	6
$k = 2$	2	5	1	1	1
$k = 3$	3	3	5	2	4

Question 1) Tracez le maillage Ω_h en positionnant tous les points géométriques avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 2) Dans le contexte des éléments finis P2-Lagrange il n'y a pas d'équivalence entre les numérotations géométriques et les degrés de liberté : $\text{NuV}(k, e) \neq \text{NuS}(k, e)$ et $N_v \neq N_s$. La construction de l'espace \mathcal{V}_h se fait alors à partir des fonctions de base dans l'élément de référence \hat{e} . Sur \hat{e} on a $N_{ve} = 6$. Par définition des EF-Lagrange, on a donc sur chaque élément (e) du maillage

$$\varphi_{\text{NuV}(k, e)}^{p2, e}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_k^{p2}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \quad \text{pour } k = 1, \dots, N_{ve}$$

et

$$\mathcal{V}_h^{p2}(\Omega_h) = \text{span} \left(\varphi_1^{p2}, \dots, \varphi_i^{p2}, \dots, \varphi_{N_v}^{p2} \right)$$

avec (dans ce contexte)

$\text{NuV}(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$
$k = 1$	5	4	4	5	6
$k = 2$	2	5	1	1	1
$k = 3$	3	3	5	2	4
$k = 4$	7	12	13	11	14
$k = 5$	10	8	11	9	13
$k = 6$	8	16	12	7	15

En utilisant cette définition, positionnez tous les degrés de liberté P2-Lagrange (du cours) avec leurs numérotations globales et locales (sur chacun des éléments du maillage).

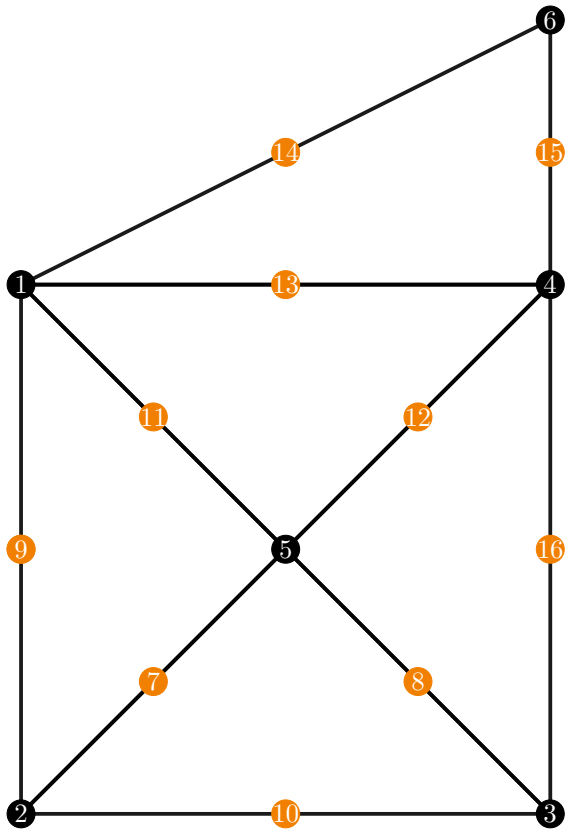
Question 3) Quels sont les degrés de libertés (m) pour lesquels on a

$$\int_{\Omega_h} \varphi_6(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_h} \varphi_{12}(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

Justifiez votre réponse.

Question 4) Calculez explicitement (valeurs numériques) sur $e = 5$ les gradients dans l'espace physique des coordonnées barycentriques : $\nabla \lambda_1(\mathbf{x})$, $\nabla \lambda_2(\mathbf{x})$ et $\nabla \lambda_3(\mathbf{x})$. **Solution:**
à compléter

Fin



Exo

On considère un maillage Ω_h donné par $N_p = 5$ points géométriques, $N_e = 4$ éléments géométriques et les correspondances numérotation locale numérotation globale géométriques suivantes: \mathbf{x}_j abscisse du point dont la numérotation globale est j

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$G(k, e)$ numérotation globale géométrique associée au numéro géométrique local k sur l'élément (e)

$G(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$
$k = 1$	5	4	4	5
$k = 2$	2	5	1	1
$k = 3$	3	3	5	2

Soit \mathcal{V}_h l'espace éléments finis P2-Lagrange sur ce maillage.

Question 1) Tracez le maillage Ω_h en positionnant tous les points géométriques avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 2) Dans le contexte des éléments finis P2-Lagrange il n'y a pas équivalence entre les numérotations géométriques et degrés de libertés : $D(k, e) \neq G(k, e)$ et $N_v \neq N_p$. La construction de l'espace \mathcal{V}_h se fait alors à partir des fonctions de bases dans l'éléments de référence \hat{e} . Sur \hat{e} , $N_{ve} = 6$ Par définition des EF-Lagrange, on a donc sur chaque élément (e) du maillage

$$\varphi_{G(1,e)}^e(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_1(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})), \quad \varphi_{G(2,e)}^e(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_2(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \quad \text{et} \quad \varphi_{G(3,e)}^e(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_3(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))$$

soient $D(1, e) = G(1, e)$ et $D(2, e) = G(2, e)$. Il nous faut maintenant introduire les derniers degrés de liberté associés aux points d'interpolations localisés aux centres de chaque segment du maillage. Plusieurs options cohérentes sont possibles pour construire une correspondance entre la numérotation globale et locale ($D(k, e)$). Nous adopterons simplement le choix suivant:

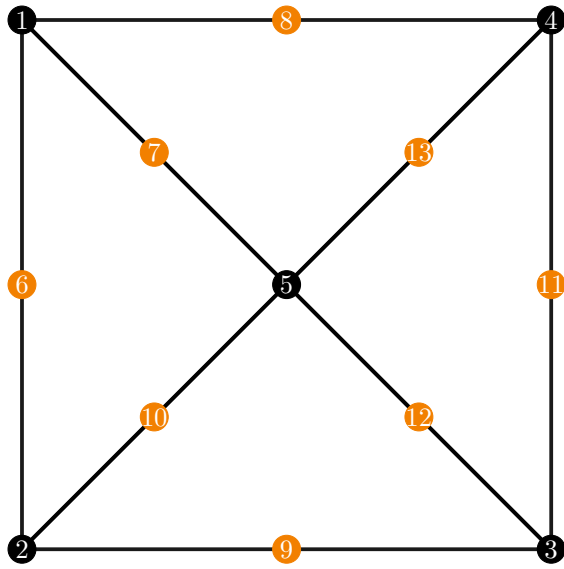
$D(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$
$k = 1$	5	4	4	5
$k = 2$	2	5	1	1
$k = 3$	3	3	5	2
$k = 4$	10	13	8	7
$k = 5$	9	12	7	6
$k = 6$	12	11	13	10

$$\mathcal{V}_h(\Omega_h) = \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{N_v})$$

En utilisant cette définition positionnez tous les degrés de libertés P2-Lagrange avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 3) Quels sont les degrés de libertés (m) pour lesquels on

$$\int_{\Omega_h} \varphi_{11} \varphi_m d\mathbf{x} = 0$$



Examen Final : mise en œuvre des éléments finis
Février 2024

Problème 1D : 10pts

On considère un maillage $\Omega_h \subset \mathbb{R}$ donné par $N_p = 5$ points géométriques, $N_e = 3$ éléments géométriques et les correspondances numérotation locale numérotation globale géométriques suivantes: x_j coordonnée du point dont la numérotation globale est j

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.0, \quad x_3 = 2.0, \quad x_4 = 3.0, \quad x_5 = 4.0,$$

$G(k, e)$ numérotation globale géométrique associée au numéro géométrique local k sur l'élément (e)

$G(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$
$k = 1$	2	1	5
$k = 2$	3	2	4

Soit \mathcal{V}_h l'espace éléments finis P2-Lagrange sur ce maillage. L'interpolation du P2-Lagrange ajoute les points

$$x_6 = 0.5, \quad x_7 = 1.5, \quad x_8 = 3.5,$$

et

$D(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$
$k = 1$	2	1	5
$k = 2$	3	2	4
$k = 3$	7	6	8

$$\mathcal{V}_h(\Omega_h) = \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{N_v})$$

Question 1) Tracez le maillage Ω_h en positionnant tous les points géométriques avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 2) Positionnez tous les degrés de libertés P2-Lagrange avec les numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 3) Quels sont les degrés de libertés (m) pour lesquels on a

$$\int_{\Omega_h} \varphi_1(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_h} \varphi_4(x) \varphi_m(x) dx = 0$$

Justifiez votre réponse.

Question 4) Tracez les fonctions $\varphi_2(x)$ et $\varphi_8(x)$

Problème 2D : 10 pts

On considère un maillage $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ donné par $N_p = 6$ points géométriques, $N_e = 5$ éléments géométriques et les correspondances numérotation locale numérotation globale géométriques suivantes: \mathbf{x}_j coordonnée du point dont la numérotation globale est j

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$G(k, e)$ numérotation globale géométrique associée au numéro géométrique local k sur l'élément (e)

$G(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$
$k = 1$	5	4	4	5	
$k = 2$	2	5	1	1	1
$k = 5$	3	3	5	2	4

Question 1) Tracez le maillage Ω_h en positionnant tous les points géométriques avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 2) Dans le contexte des éléments finis P2-Lagrange il n'y a pas équivalence entre les numérotations géométriques et degrés de libertés : $D(k, e) \neq G(k, e)$ et $N_v \neq N_p$. La construction de l'espace \mathcal{V}_h se fait alors à partir des fonctions de bases dans l'éléments de référence \hat{e} . Sur \hat{e} , $N_{ve} = 6$ Par définition des EF-Lagrange, on a donc sur chaque élément (e) du maillage

$$\varphi_{G(1,e)}^e(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_1(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})), \quad \varphi_{G(2,e)}^e(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_2(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})) \quad \text{et} \quad \varphi_{G(3,e)}^e(\mathbf{x}) \equiv \hat{\varphi}_3(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))$$

soient $D(1, e) = G(1, e)$ et $D(2, e) = G(2, e)$. Il nous faut maintenant introduire les derniers degrés de liberté associés aux points d'interpolations localisés aux centres de chaque segment du maillage. Plusieurs options cohérentes sont possibles pour construire une correspondance entre la numérotation globale et locale ($D(k, e)$). Nous adopterons simplement le choix suivant:

$D(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$
$k = 1$	5	4	4	5	6
$k = 2$	2	5	1	1	1
$k = 3$	3	3	5	2	4
$k = 4$	11	14	9	8	15
$k = 6$	10	13	8	7	9
$k = 7$	13	12	14	11	16

$$\mathcal{V}_h(\Omega_h) = \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{N_v})$$

En utilisant cette définition positionnez tous les degrés de libertés P2-Lagrange avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

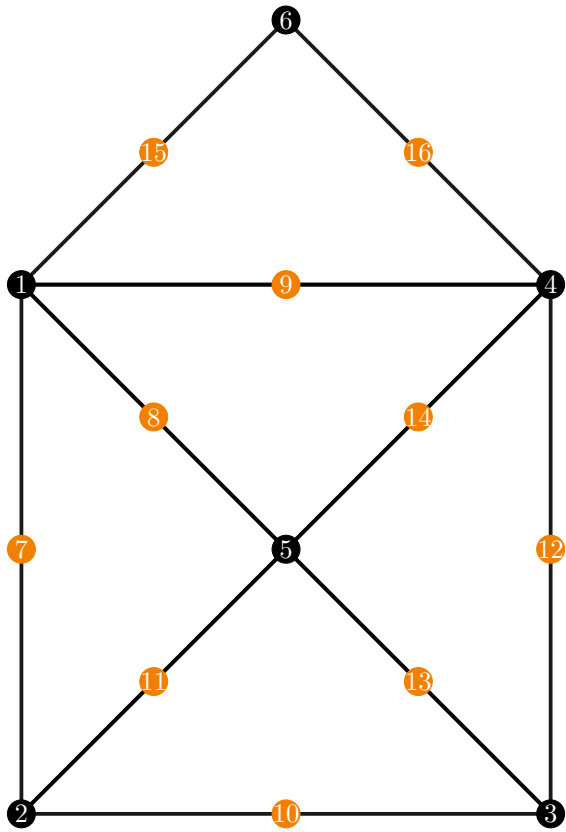
Question 3) Quels sont les degrés de libertés (m) pour lesquels on a

$$\int_{\Omega_h} \varphi_6(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_h} \varphi_{12}(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

Justifiez votre réponse.

Question 4) Calculez explicitement (valeurs numériques) sur $e = 6$ les gradients dans l'espace physique des coordonnées barycentriques : $\nabla \lambda_1(\mathbf{x})$, $\nabla \lambda_2(\mathbf{x})$ et $\nabla \lambda_3(\mathbf{x})$. **Solution:** à compléter

Fin



Mise en œuvre des Eléments finis

On considère la formulation faible approchée suivante :

$$\boxed{\text{Trouver } u_h \in \mathcal{V}_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h} \quad (\text{P})$$

Généralités

- $\Omega_h = \bigcup_1^{\text{Ne}} e$ avec $e \cap e' = \emptyset$ si $e \neq e'$: Maillage Conforme non singulier.
- $a(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \mathcal{A}_{vu}(x) dx = \sum_{e=1}^{\text{Ne}} \int_e \mathcal{A}_{vu}(x) dx = \sum_{e=1}^{\text{Ne}} a^e(u_h, v_h)$
- $\ell(v_h) = \int_{\Omega_h} \mathcal{L}_v(x) dx = \sum_{e=1}^{\text{Ne}} \int_e \mathcal{L}_v(x) dx = \sum_{e=1}^{\text{Ne}} \ell^e(v_h)$
- L'espace de fonction \mathcal{V}_h est de dimension finie N_v et décrite par une base φ_i pour $i = 1, \dots, N_v$.
Toute fonction $u \in \mathcal{V}_h$ s'exprime dans cette base par

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N_v} u_j \varphi_j(x)$$

- On pose $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_{N_v})^T$. Le problème (P) revient à

Trouver $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_v}$ tel que

$$\star u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_v} u_j \varphi_j(x)$$

$$\star a(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i), \quad \text{pour tous les } i = 1, \dots, N_v.$$

- On note N_{ve} le nombre de fonctions de base qui ne s'annule pas sur l'élément e . On considèrera les cas où $N_{ve} \equiv N_{ve}$, $\forall e$.
- Sur un élément donné (e) on numérote localement les fonctions de bases non nulles sur (e) de 1 à N_{ve} . Si k (k') est la numérotation locale de la fonction de base i (j) sur l'élément e (e'), on a la correspondance suivante

$$i \equiv D(k, e), \quad j \equiv D(k', e')$$

- On note $\vartheta(i)$ l'ensemble des éléments sur lesquels la fonction de base $\varphi_i(x) \neq 0$ (non nulle). Alors $\varphi_i(x) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \varphi_i^e(x) = \sum_{e \in \vartheta(i)} \varphi_{D(k,e)}^e(x)$ et $\varphi_j(x) = \sum_{e \in \vartheta(j)} \varphi_j^e(x) = \sum_{e \in \vartheta(j)} \varphi_{D(k',e')}^e(x)$
- Par construction on a $\varphi_{D(k,e)}^e(x) = \widehat{\varphi}_k(\xi^e(x))$ pour tous les e et pour $k = 1, \dots, N_{ve}$.
- Contexte 1D EF P1-Lagrange : un élément (e) est défini par deux points $x_i = x_{D(1,e)}$ et $x_j = x_{D(2,e)}$.

$$\text{Sur chaque élément } (e), \text{ on a : } \boxed{\widehat{\varphi}_1(\xi^e(x)) \equiv \lambda_1(x) \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}_2(\xi^e(x)) \equiv \lambda_2(x) = 1 - \lambda_1(x)}$$

\widehat{e} est l'élément de référence.

$$\boxed{\lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \in \widehat{e} \equiv [0, 1]. \quad \lambda_1(x) = \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \lambda_2(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad \nabla \lambda_1 = \frac{1}{x_i - x_j}, \quad \nabla \lambda_2 = -\frac{1}{x_i - x_j}}$$

Hypothèse: On suppose que $a(u_h, v_h)$ est une forme bilinéaire (pas forcément symétrique) sur $\mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h$ et que $\ell(v_h)$ est une forme linéaire sur \mathcal{V}_h .

Question 1.1) Vérifiez que le problème (P) se met sous la forme d'un système algébrique :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{A}}}^e, \quad \mathbf{b} = \sum_e \mathbf{b}^e$$

les matrices $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^e$ sont de dimension $N_v \times N_v$. Les vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{b} et \mathbf{b}^e sont de dimension N_v . On vérifiera que

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_e a^e(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_e \underline{\underline{\mathbf{A}}}^e_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_i = \ell(\varphi_i) = \sum_e \ell^e(\varphi_i) = \sum_e \mathbf{b}^e_i$$

- $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est la matrice globale et \mathbf{b} le second membre global.
- $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^e$ est la matrice locale et \mathbf{b}^e le second membre local.

Question 1.2) Vérifiez que, si la fonction $u_h \in \mathcal{V}_h$ alors, pour chaque fonction de base φ_i on obtient

$$a(u_h, \varphi_i) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{k'=1}^{N_{ve}} u_{D(k',e)} a^e(\varphi_{D(k',e)}, \varphi_{D(k,e)}) = \sum_{e \in \mathcal{D}(i)} \sum_{k'=1}^{N_{ve}} u_{D(k',e)} a^e(\widehat{\varphi}_{k'}, \widehat{\varphi}_k)$$

et

$$\ell(\varphi_i) = \sum_{e=1}^{N_e} \ell^e(\varphi_{D(k,e)}) = \sum_{e \in \mathcal{D}(i)} \ell^e(\widehat{\varphi}_k)$$

avec

$$i = D(k, e) \quad \forall e \in \mathcal{D}(i), \quad \varphi_{D(k,e)}^e(x) \equiv \widehat{\varphi}_k(\xi(x)), \quad a^e, \quad \varphi^e \text{ les restrictions à l'élément } (e).$$

Vérifiez que, pour chaque élément (e) , les seuls coefficients non nuls de la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^e$ et du vecteur \mathbf{b}^e sont

$$a^e(\widehat{\varphi}_{k'}, \widehat{\varphi}_k) \quad \text{et} \quad \ell^e(\widehat{\varphi}_k) \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, N_{ve} \\ k' = 1, \dots, N_{ve} \end{matrix}$$

$$a^e(\widehat{\varphi}_{k'}, \widehat{\varphi}_k) \equiv a^e(\varphi_{D(k',e)}, \varphi_{D(k,e)})$$

$$\ell^e(\widehat{\varphi}_k) \equiv \ell^e(\varphi_{D(k,e)})$$

Algorithme d'assemblage

$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$ et $\mathbf{b} = 0$.

★ Pour chaque élément $e : 1, \dots, N_e$

- Pour $k = 1, \dots, N_{ve}$

$$i \equiv D(k, e)$$

$$\text{Calculer} : \widehat{\mathbf{b}}_k^e = \ell^e(\widehat{\varphi}_k)$$

$$\text{Assembler} : \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i + \widehat{\mathbf{b}}_k^e$$

- Pour $k' = 1, \dots, N_{ve}$

$$j \equiv D(k', e)$$

$$\text{Calculer} : \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e = a^e(\widehat{\varphi}_{k'}, \widehat{\varphi}_k)$$

$$\text{Assembler} : \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} + \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e$$

- Fin (k')

- Fin (k)

★ Fin (e)

Application 1D : éléments finis P1-Lagrange.

On considère un maillage $\Omega_h = (0, 1)$ donné par les points géométriques, les éléments géométriques et les correspondances numérotation locale numérotation globale géométriques suivantes: x_j abscisse du point dont la numérotation globale est j

$$x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 0.4, \quad x_4 = 0.0, \quad x_5 = 0.8, \quad x_6 = 1.0 \quad \text{soit} \quad N_p = 6$$

$G(k, e)$ numérotation globale géométrique associée au numéro géométrique local k sur l'élément (e)

$G(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$
$k = 1$	4	2	6	2	3
$k = 2$	1	3	5	5	1

soit $N_e = 5$

Soit \mathcal{V}_h l'espace éléments finis P1-Lagrange sur ce maillage. Dans ce contexte il y a équivalence entre les numérotations géométriques et degrés de libertés : $D(k, e) \equiv G(k, e)$ et $N_v = N_p$.

Question 2.1) Tracez le maillage Ω_h en positionnant tous les points géométriques avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

$$V_h(\Omega_h) = \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{N_v})$$

Pour le maillage Ω_h et l'espace P1-Lagrange associé (\mathcal{V}_h) , précisez les valeurs de N_v et N_e .

Question 2.2) Soit $i = 3$ montrez que, dans ce contexte P1-Lagrange, la troisième ligne de la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est de la forme

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}(3, :) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & a^{e_2}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) & a^{e_2}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_2) & 0 & 0 & 0 \\ +a^{e_5}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_1) & +a^{e_5}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) & +a^{e_5}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) & & & \end{array} \right]$$

En déduire que $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est une matrice creuse donnée par

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} a^{e_1}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_2) & 0 & 0 & a^{e_1}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) & 0 & 0 \\ +a^{e_5}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_2) & & +a^{e_5}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) & & & \\ 0 & a^{e_2}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) & a^{e_2}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_1) & 0 & 0 & 0 \\ & +a^{e_4}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) & & & +a^{e_4}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_1) & \\ 0 & a^{e_2}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) & a^{e_2}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_2) & 0 & 0 & 0 \\ +a^{e_5}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_1) & & +a^{e_5}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) & & & \\ a^{e_1}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_1) & 0 & 0 & a^{e_1}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{e_3}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_2) & a^{e_3}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) \\ & +a^{e_4}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) & & & +a^{e_4}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_2) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{e_3}(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_1) & a^{e_3}(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) \end{bmatrix}$$

Question 2.3) Soit $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^e$ la restriction de $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ à l'élément (e) . Vérifiez que

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \sum_{e=1}^{N_e} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^e = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{e_1} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{e_2} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{e_3} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{e_4} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{e_5}$$

Soit une matrice locale $\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e$ sur un élément (e) :

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{k,k'}^e = a^e(\hat{\varphi}_{k'}, \hat{\varphi}_k), \quad \hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e = \begin{pmatrix} a^e(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_1) & a^e(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_1) \\ a^e(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) & a^e(\hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_2) \end{pmatrix}$$

Vérifiez que les seuls termes non nuls de chaque matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^e$ sont les coefficients de la matrice locale $\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e$ et que l'on a les relations suivantes

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^e_{i(k,e),D(k',e)} = \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e_{k,k'} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} k = 1, \dots, N_k \\ k' = 1, \dots, N_k \end{cases}$$

Question 2.4) Vérifiez aussi que

$$\underline{\mathbf{b}} = \sum_{e=1}^{N_e} \underline{\mathbf{b}}^e = \underline{\mathbf{b}}^{e_1} + \underline{\mathbf{b}}^{e_2} + \underline{\mathbf{b}}^{e_3} + \underline{\mathbf{b}}^{e_4} + \underline{\mathbf{b}}^{e_5}$$

$$\underline{\mathbf{b}}^e_{i(k,e)} = \widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, N_k \quad \text{avec} \quad \widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e = \ell^e(\widehat{\varphi}_k)$$

Question 2.5) Vérifiez que l'algorithme d'assemblage suivant permet de construire la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

1. $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$ et $\underline{\mathbf{b}} = 0$.
 2. Pour chaque élément $e : 1, \dots, N_e$
 - Pour $k = 1, \dots, N_k$
 - $i \equiv D(k, e)$
 - Calculer : $\widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e = \ell^e(\widehat{\varphi}_k)$
 - Assembler : $\underline{\mathbf{b}}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + \widehat{\underline{\mathbf{b}}}_k^e$
 - ★ Pour $k' = 1, \dots, N_k$
 - $j \equiv D(k', e)$
 - Calculer : $\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e_{k,k'} = a^e(\widehat{\varphi}_{k'}, \widehat{\varphi}_k)$
 - Assembler : $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} + \widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^e_{k,k'}$
- Fin (k')
- Fin (k)
- Fin (e)

Application 1D : éléments finis P2-Lagrange.

On considère un maillage $\Omega_h = (0, 1)$ donné par les points géométriques, les éléments géométriques et les correspondances numérotation locale numérotation globale géométriques suivantes: x_j abscisse du point dont la numérotation globale est j

$$x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 0.4, \quad x_4 = 0.0, \quad x_5 = 0.8, \quad x_6 = 1.0 \quad \text{soit} \quad N_p = 6$$

$G(k, e)$ numérotation globale géométrique associée au numéro géométrique local k sur l'élément (e)

$G(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$
$k = 1$	4	2	6	2	3
$k = 2$	1	3	5	5	1

soit $N_e = 5$

Soit \mathcal{V}_h l'espace éléments finis P2-Lagrange sur ce maillage.

Question 2.1) Tracez le maillage Ω_h en positionnant tous les points géométriques avec leurs numérotations globales et locales sur chacun des éléments du maillage.

Question 2.2) Dans le contexte des éléments finis P2-Lagrange il n'y a pas équivalence entre les numérotations géométriques et degrés de libertés : $D(k, e) \neq G(k, e)$ et $N_v \neq N_p$. La construction de l'espace \mathcal{V}_h se fait alors à partir des fonctions de bases dans l'éléments de référence \hat{e} . Sur \hat{e} , $N_{ve} = 3$ et

$$\hat{\varphi}_1(\xi(x)) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1), \quad \hat{\varphi}_2(\xi(x)) = \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}_3(\xi(x)) = 4\lambda_1\lambda_2.$$

Sachant que $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ et que $\lambda_1 \equiv \lambda_1(\xi) = \xi$ est une fonction linéaire dans l'intervalle $[0, 1]$ ($\xi \in [0, 1]$).

Tracez $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ et $\hat{\varphi}_3$ en fonction de λ_1 .

Vérifier que $\hat{\varphi}_1$ prend la valeur 1 en $\lambda_1 = 1$ et prend la valeur zéro en $\lambda_1 = 1/2$ et $\lambda_1 = 0$

Vérifier que $\hat{\varphi}_2$ prend la valeur 1 en $\lambda_1 = 0$ et prend la valeur zéro en $\lambda_1 = 1/2$ et $\lambda_1 = 1$

Vérifier que $\hat{\varphi}_3$ prend la valeur 1 en $\lambda_1 = 1/2$ et prend la valeur zéro en $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$

Par définition des EF-Lagrange, on a donc sur chaque élément (e) du maillage

$$\varphi_{G(1,e)}^e(x) \equiv \hat{\varphi}_1(\xi(x)) \quad \text{et} \quad \varphi_{G(2,e)}^e(x) \equiv \hat{\varphi}_2(\xi(x))$$

soient $D(1, e) = G(1, e)$ et $D(2, e) = G(2, e)$. Il nous faut maintenant introduire les derniers degrés de liberté associés aux points géométriques localisés aux centres de chaque élément. Au final on obtiendra $N_v = N_p + N_e$. Plusieurs options cohérentes sont possibles pour construire une correspondance entre la numérotation globale et locale ($D(k, e)$). Nous adopterons simplement le choix suivant:

$D(k, e)$	$e = 1$	$e = 2$	$e = 3$	$e = 4$	$e = 5$
$k = 1$	4	2	6	2	3
$k = 2$	1	3	5	5	1
$k = 3$	7	8	9	10	11

$\mathcal{V}_h(\Omega_h) = \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{N_v})$

En utilisant cette définition par transformation linéaire des fonctions sur l'élément de référence, tracez les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_6(x)$, $\varphi_8(x)$, $\varphi_{11}(x)$

Mise en œuvre des Eléments finis : TD/TP No 2

Formules de quadrature.

En général on utilise une quadrature pour évaluer les intégrales sur l'élément de référence :

$$\int_0^1 f(\xi) d\xi \simeq \sum_{g=1}^{Ng} \omega_g f(\xi_g)$$

Les poids ω_g et les points ξ_g de quadrature sur l'intervalle (0,1) sont donnés. En particulier, on a

G-Legendre(2)	$g = 1$	$g = 2$
$\omega_g =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\xi_g =$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Simpson	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$
$\omega_g =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\xi_g =$	0	$\frac{1}{2}$	1

G-Legendre(3)	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$
$\omega_g =$	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{5}{18}$
$\xi_g =$	$\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

G-Legendre(4)	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$	$g = 4$
$\omega_g =$	$\frac{0.34785485}{2}$	$\frac{0.65214515}{2}$	$\frac{0.65214515}{2}$	$\frac{0.34785485}{2}$
$\xi_g =$	$0.5 - \frac{0.86113631}{2}$	$0.5 - \frac{0.33998104}{2}$	$0.5 + \frac{0.33998104}{2}$	$0.5 + \frac{0.86113631}{2}$

Question 3.1) On considère maintenant deux fonctions $\hat{\varphi}_1(\xi) = \xi$ et $\hat{\varphi}_2(\xi) = 1 - \xi$.

Soit $\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$ une matrice 2x2 tq

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{kk'} = \int_0^1 \hat{\varphi}_k(\xi) \hat{\varphi}_{k'}(\xi) d\xi$$

Vérifiez analytiquement que

$$\hat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrez que l'on retrouve exactement le résultat analytique en utilisant chacune des formules de quadratures suivante : G-Legendre(2), Simpson, G-Legendre(3). Quand est-il si on utilise les valeurs approchées de G-Legendre(4)?

5.3 Eléments droits (linéaires).

On appelle élément droit (e) un élément défini par un nombre (Npl) de points locaux \mathbf{x}_ℓ^e . Les points (\mathbf{x}_ℓ^e , $\ell = 1, \dots, \text{Npl}$) sont définis par une correspondance numérotation locale (ℓ) numérotation globale (G):

$$G(\ell, e) \equiv G(\ell, e) \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_\ell^e = \mathbf{x}_{G(\ell, e)} = \text{CoorS}(1 : d, G(\ell, e))$$

En dimension un (1D), les $\mathbf{x}_{G(\ell, e)}$ sont des scalaires. Pour $d > 1$, les $\mathbf{x}_{G(\ell, e)}$ sont des vecteurs. Soient $\lambda_\ell(\mathbf{x})$ des fonctions de forme (scalaires) linéaires sur l'élément (e) telles que

$$\lambda_\ell(\mathbf{x}_{\ell'}^e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = \ell' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un élément droit (e), tout point $\mathbf{x} \in e$ est paramétré par

$$\mathbf{x} = \sum_{\ell} \lambda_\ell(\mathbf{x}) \mathbf{x}_{G(\ell, e)}, \quad \forall \mathbf{x} \in e$$

5.3.1 Eléments droits 1D

$d = 1$ et $\text{Npl} = 2 = d + 1$ (P1) : $x_i = x_{G(1, e)}$, $x_j = x_{G(2, e)}$

$$\lambda_1(x) = \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{et} \quad \lambda_2(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad \text{avec} \quad \lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1.$$

Deux changement de variables sont possibles entre l'espace physique (x ; $e \equiv (x_i, x_j)$) et un espace de référence (ξ ; $\hat{e} \equiv [0, 1]$):

- $\lambda_1(x(\xi)) = \xi$ et $\lambda_2(x(\xi)) = 1 - \xi$
- $\lambda_2(x(\xi)) = \xi$ et $\lambda_1(x(\xi)) = 1 - \xi$

Dans les deux cas on a

$$\begin{aligned} a^e(\varphi_{D(k', e)}, \varphi_{D(k, e)}) &= a^e(\hat{\varphi}_{k'}, \hat{\varphi}_k) = \int_e \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_{k'}}(x) dx \\ &= \int_{\hat{e}} \mathcal{J}^e \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_{k'}}(x(\xi)) d\xi = |x_j - x_i| \int_0^1 \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_{k'}}(x(\xi)) d\xi \\ &= |x_j - x_i| \sum_{g=1}^{\text{Ng}} \omega_g \mathcal{A}_{\hat{\varphi}_k \hat{\varphi}_{k'}}(x(\xi_g)) \\ \hline \ell^e(\varphi_{D(k, e)}) &= \ell^e(\hat{\varphi}_k) = \int_e \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(x) dx \\ &= \int_{\hat{e}} \mathcal{J}^e \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(x(\xi)) d\xi = |x_j - x_i| \int_0^1 \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(x(\xi)) d\xi \\ &= |x_j - x_i| \sum_{g=1}^{\text{Ng}} \omega_g \mathcal{L}_{\hat{\varphi}_k}(x(\xi_g)) \end{aligned}$$

1. $\xi_g \equiv \xi_{1,g} = \lambda_1(x(\xi_g))$ et ω_g donnés pour $g=1,..,Ng$. $\xi_{2,g} = 1 - \xi_{1,g}$
 2. $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0$ et $\underline{\mathbf{b}} = 0$.
 3. Pour chaque élément $e = 1, \dots, Ne$
 - Calculer : $x_i^e = \mathbf{x}_{G(1,e)}$, $x_j^e = \mathbf{x}_{G(2,e)}$, $|\mathcal{J}^e| = |x_j^e - x_i^e|$
 - Calculer : $\nabla \lambda_p^e$, pour $p = 1, \dots, Npl$
 - pour $g = 1, \dots, Ng$
 - Calculer : $\widehat{\varphi}_{\mu,g} = \widehat{\varphi}_{\mu}(\xi_g)$ et $\nabla \widehat{\varphi}_{\mu,g} = \nabla \widehat{\varphi}_{\mu}(\xi_g)$ pour $\mu = 1, \dots, Nve$
 - $$x_g = x(\xi_g) = \sum_{p=1}^{Npl} \xi_{p,g} x_{G(p,e)}$$
 - ★ Pour $k = 1, \dots, Nve$
 - $i \equiv D(k, e)$
 - Calculer : $\mathcal{L}_{k,g}^e = \mathcal{L}_{\widehat{\varphi}_k}(x(\xi_g))$
 - Assembler : $\underline{\mathbf{b}}_i = \underline{\mathbf{b}}_i + |\mathcal{J}^e| \omega_g \mathcal{L}_{k,g}^e$
 - * Pour $k' = 1, \dots, Nve$
 - $j \equiv D(k', e)$
 - Calculer : $\mathcal{A}_{k,k',g}^e = \mathcal{A}_{\widehat{\varphi}_k \widehat{\varphi}_{k'}}(x(\xi_g))$
 - Assembler : $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{i,j} + |\mathcal{J}^e| \omega_g \mathcal{A}_{k,k',g}^e$
- Fin (k')
- Fin (k)
- Fin (g)
- Fin (e)

Applications

- Problème de diffusion avec un coefficient de diffusion $\beta > 0$.

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\widehat{\varphi}_k \widehat{\varphi}_{k'}}(x(\xi)) &= \beta \frac{d\widehat{\varphi}_{k'}}{dx}(\xi) \frac{d\widehat{\varphi}_k}{dx}(\xi) \\ \mathcal{L}_{\widehat{\varphi}_k}(x(\xi)) &= \beta \sin(x(\xi)) \widehat{\varphi}_k(\xi) \end{cases}$$

- Problème de réaction avec des constantes α et γ .

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\widehat{\varphi}_k \widehat{\varphi}_{k'}}(x(\xi)) &= \alpha \widehat{\varphi}_{k'}(\xi) \widehat{\varphi}_k(\xi) \\ \mathcal{L}_{\widehat{\varphi}_k}(x(\xi)) &= \alpha \sin(\gamma x(\xi)) \widehat{\varphi}_k(\xi) \end{cases}$$

- Problème de réaction-diffusion avec des constantes $\alpha, \beta \geq 0$ et γ .

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\widehat{\varphi}_k \widehat{\varphi}_{k'}}(x(\xi)) &= \beta \frac{d\widehat{\varphi}_{k'}}{dx}(\xi) \frac{d\widehat{\varphi}_k}{dx}(\xi) + \alpha \widehat{\varphi}_{k'}(\xi) \widehat{\varphi}_k(\xi) \\ \mathcal{L}_{\widehat{\varphi}_k}(x(\xi)) &= (\alpha + \beta \gamma^2) \sin(\gamma x(\xi)) \widehat{\varphi}_k(\xi) \end{cases}$$

Pour $\alpha = 0$ et $\beta > 0$ c'est uniquement de la diffusion, et pour $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$ et c'est uniquement de la réaction.

Mise en œuvre des Eléments finis : TD/TP No 3

Formules de quadrature : 2D Triangles.

En général on utilise une quadrature pour évaluer les intégrales sur l'élément de référence :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\boldsymbol{\xi}) d\xi d\eta \simeq \sum_{g=1}^{Ng} \omega_g f(\boldsymbol{\xi}_g) \quad \boldsymbol{\xi} = \xi \widehat{\mathbf{e}}_1 + \eta \widehat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Les poids ω_g et les points $\boldsymbol{\xi}_g$ de quadrature sur l'élément de référence.

Ng = 1		g = 1	
$\omega_g =$		$\frac{1}{2}$	
$\boldsymbol{\xi}_g =$		$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	

Ng = 3		g = 1		g = 2		g = 3	
$\omega_g =$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	
$\boldsymbol{\xi}_g =$		$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	

Ng = 4		g = 1		g = 2		g = 3		g = 4	
$\omega_g =$		$\frac{27}{96}$		$\frac{25}{96}$		$\frac{25}{96}$		$\frac{25}{96}$	
$\boldsymbol{\xi}_g =$		$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$		$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$	

Ng = 6		g = 1		g = 2		g = 3		g = 4		g = 5		g = 6	
		$\mu_1 = 0.11169079483905$		$\mu_2 = 0.0549758718227661$									
		$\alpha = 0.445948490915965$		$\beta = 0.091576213509771$									
$\omega_g =$		μ_1		μ_1		μ_1		μ_2		μ_2		μ_2	
$\boldsymbol{\xi}_g =$		$\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1-2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \beta \\ 1-2\beta \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1-2\alpha \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1-2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$	

Question 3.1) On considère maintenant les fonctions

$$\widehat{\varphi}_1(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_1(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \equiv \lambda_1, \quad \widehat{\varphi}_2(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_2(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \equiv \lambda_3 \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}_3(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_3(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \equiv 1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

Soit $\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$ une matrice 3x3 tq

$$\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{ll'} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \widehat{\varphi}_l(\boldsymbol{\xi}) \widehat{\varphi}_{l'}(\boldsymbol{\xi}) d\xi d\eta$$

Calculez analytiquement $\widehat{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}$.

Montrez que l'on retrouve (numériquement) exactement le résultat analytique en utilisant des formules de quadratures pour $Ng \geq 4$.

Solution:

à compléter

Fin


```

clear
clf

function [out] = Exact(x,y,kx,ky)
    out = sin(x*kx).*cos(y*ky)
endfunction

function [out] = f(X,kx,ky)
    x = X(1)
    y = X(2)
    out = ( kx*kx + ky*ky )*Exact(x,y,kx,ky)
    //out = ( kx*kx )*Exact(x,y,kx,ky)
endfunction

//-----
function [Mu, Cm] = Composite_Mat(Xg)
    Mu      = 1.0
    Cm      = 1.0
endfunction
//-----
// Construction d'un maillage P1 de triangles.
//-----
function [N_vertives, N_elements, Coor, Nu, LogP, LogE] ...
    = Struct_P1_Mesh(Nx, Ny, Lx, Ly)

    N_vertives = Nx*Ny
    N_elements = 2*(Nx-1)*(Ny-1)

    dx= Lx/(Nx -1)
    dy= Ly/(Ny -1)

    is = 0
    for i=1:Nx
        xi = (i-1)*dx
        for j=1:Ny
            yj = (j-1)*dy
            is = is +1
            Coor(1:2, is)=[xi,yj]'

            LogP(is) = 0

            if i==1 then
                LogP(is) = -1
            elseif i==Nx then
                LogP(is) = -2
            elseif j==1 then
                LogP(is) = -10
            elseif j==Ny then
                LogP(is) = -20
            end
        end
    end

end

```

```

end

ie = 0
for i=1:Nx-1
    for j=1:Ny-1
        is = j + (i-1)*Ny

        ie = ie +1

        is1 = is ; is2=is+Ny ; is3 = is+Ny+1

        Nu(1:3, ie)=[is1, is2, is3]'
        LogE(ie) = 0

        ie = ie +1

        is1 = is ; is2=is+Ny +1 ; is3 = is+ 1

        Nu(1:3, ie)=[is1, is2, is3]'
        LogE(ie) = 0
    end
end

endfunction
//-----
//-----
// déterminant de deux vecteurs 2D
//-----
function out = Determinant(p,q)
    out = p(1)*q(2) - p(2)*q(1)
endfunction

//-----
// Coordonnées barycentriques
// au point Xc dans le triangle ( Xi, Xj, Xk )
// -----
function Lambda=Lambda_of_P1(Xc, Xi, Xj, Xk)
    Lambda(1) = Determinant(Xc-Xj,Xk-Xj)/Determinant(Xi-Xj,Xk-Xj);
    Lambda(2) = Determinant(Xc-Xk,Xi-Xk)/Determinant(Xj-Xk,Xi-Xk);
    Lambda(3) = Determinant(Xc-Xi,Xj-Xi)/Determinant(Xk-Xi,Xj-Xi);
endfunction
//-----
// Gradient des Coordonnées barycentriques
//-----
function [Grad]=MGrad_Lambda_of_P1(Xi, Xj, Xk)

    e1=[1,0] ; e2 =[0,1]

    Grad(1,1) = Determinant(e1,Xk-Xj)/Determinant(Xi-Xj,Xk-Xj);
    Grad(1,2) = Determinant(e2,Xk-Xj)/Determinant(Xi-Xj,Xk-Xj);

    Grad(2,1) = Determinant(e1,Xi-Xk)/Determinant(Xj-Xk,Xi-Xk);

```

```

Grad(2,2) = Determinant(e2,Xi-Xk)/Determinant(Xj-Xk,Xi-Xk);

Grad(3,1) = Determinant(e1,Xj-Xi)/Determinant(Xk-Xi,Xj-Xi);
Grad(3,2) = Determinant(e2,Xj-Xi)/Determinant(Xk-Xi,Xj-Xi);

endfunction
//-----
//-----
//-----
// points de Gauss et poids de Gauss
//   dans l'élément de référence
//-----
//-----
//-----
// six points de Gauss
// -----
// Nombre de points de Gauss
// -----
Ngp                = 6;

s1 = 0.11169079483905;
s2 = 0.0549758718227661;
aa = 0.445948490915965;
bb = 0.091576213509771;
// poids de Gauss
// -----
W_g(1:3)          = s2;
W_g(4:6)          = s1;

// Points de Gauss xi_1 == Lambda_1
// -----
Lambda_g(1,1:Ngp)  = [bb, 1-2*bb, bb, aa, aa, 1-2*aa];
// Points de Gauss xi_1 == Lambda_2
// -----
Lambda_g(2,1:Ngp)  = [bb, bb, 1-2*bb, 1-2*aa, aa, aa];

// Lambda_3 = 1 - Lambda_1 -Lambda_2
// -----
Lambda_g(3,1:Ngp)= 1.0 - Lambda_g(1,1:Ngp) - Lambda_g(2,1:Ngp)

// définition des paramètres du maillage.
// -----

Lx  =1   ; Ly=1
Nx0 =10  ; Ny0=10

kx = %pi/Lx      ;
ky = 2*%pi/Ly    ; //ky = 0.00*%pi/Ly

// Analyse de convergence

```

```

// -----
Nconv = 3
Vconv  = [11,21,41,81,101, 151]

for rf = 1:Nconv
Nx = Vconv(rf)
Ny = Nx

// -----
//   Construction du Maillage P-1
//   en utilisant la fonction Struct_P1_Mesh
// -----
[P1_Np, P1_Ne, P1_Coor, P1_Nu, P1_LogP, P1_LogE] ...
                                = Struct_P1_Mesh(Nx, Ny, Lx, Ly)
P1_Npl      = 3

Ne          = P1_Ne
Npl         = P1_Npl

//=====
//   Choix de la méthode Eléments finis : 2D, Pk-Lagrange
//-----
//   Pk   avec k = EF_Pk
// -----
//   EF_Pk = 1 <==> P1-Lagrange
//   EF_Pk = 2 <==> P2-Lagrange
//   EF_Pk = 3 <==> P3-Lagrange
//=====
EF_Pk      = 1 ;

// nombre global de degré de liberté
Nddl = P1_Np ;

// nombre local (sur chaque éléments) de degré de liberté
Ndl = P1_Npl;

Nu   = P1_Nu

// -----

// Initialisation de la matrice globale
MatA_G(1:Nddl,1:Nddl) = 0.0;

// Initialisation du second membre global
VecB_G(1:Nddl)        = 0.0;

//=====
// Assemblage
//=====

// boucle sur les éléments

```

```

// -----
for e =1:Ne

    Xi = P1_Coor(:, P1_Nu(1,e));
    Xj = P1_Coor(:, P1_Nu(2,e));
    Xk = P1_Coor(:, P1_Nu(3,e));

    DetE = abs(Determinant(Xj-Xi,Xk-Xi));

    // Boucle sur les points de Gauss
    // -----
    for gp = 1:Ngp

        // Point physique associé au point de Gauss
        // -----
        Xg = Lambda_g(1,gp)*Xi + Lambda_g(2,gp)*Xj + Lambda_g(3,gp)*Xk ;
        wg = W_g(gp);

        [Coef_Mu, Coef_Lm] = Composite_Mat(Xg)

        Phi = Lambda_g(:, gp)
        [GradPhi] = MGrad_Lambda_of_P1(Xi, Xj, Xk);

        // -----
        // Second membre local, Matrice Locale
        // et assemblage
        // -----
        // Boucle sur la numérotation locale (lignes)
        for k=1:Ndl
            // numérotation globale (is) associée à l'indice local (k)
            is = Nu(k,e) ;
            Phi_is_g = Phi(k) ;
            GradPhi_is_g = GradPhi(k, :) ;
            Be_k_g = f(Xg, kx, ky)*Phi_is_g ;

            VecB_G(is) = VecB_G(is) + wg*DetE*Be_k_g ;

            // Boucle sur la numérotation locale (colonnes)
            for kp = 1:Ndl
                // numérotation globale (js) associée à l'indice local (kp)
                js = Nu(kp,e) ;
                GradPhi_js_g = GradPhi(kp,:) ;
                Ae_k_kp_g = Coef_Mu*sum(GradPhi_is_g.*GradPhi_js_g);

                MatA_G(is,js) = MatA_G(is,js) + wg*DetE*Ae_k_kp_g ;
            end // sur (kp)
        end // sur (k)
    end // sur (g)
end // sur (e)
// disp( "Determinant de la matrice globale",det(MatA_G))

// Conditions aux limites (peut être optimisées)

```

```

// Dirichlet homogène sur le bord gauche
// Neumann sur tous les autres bords
// -----
for is=1:Nddl
    Xg = P1_Coor(:, is);

    if P1_LogP(is) == -1 then
        MatA_G(is, :) = 0.0
        MatA_G(is, is) = 1.0
        VecB_G(is) = Exact(Xg(1), Xg(2), kx, ky)
    end
    if P1_LogP(is) == -2 then
        MatA_G(is, :) = 0.0
        MatA_G(is, is) = 1.0
        VecB_G(is) = Exact(Xg(1), Xg(2), kx, ky)
    end
    if P1_LogP(is) < -2 then
        MatA_G(is, :) = 0.0
        MatA_G(is, is) = 1.0
        VecB_G(is) = Exact(Xg(1), Xg(2), kx, ky)
    end
end
end
// disp( "Determinant de la matrice globale",det(MatA_G))
//
// Version de résolution du système en
// utilisant une matrice creuse et umfpack
// -----
P1_Sparse_Mat = sparse(MatA_G);
VecSol = umfpack(P1_Sparse_Mat, "\", VecB_G)
//VecSol = MatA_G\VecB_G;
//
// Visualisation
// -----
for e=1:P1_Ne
    P1_T(1:5,e) = [e, P1_Nu(1,e), P1_Nu(2,e), P1_Nu(3,e), e];
end
P1_x=P1_Coor(1,:);
P1_y=P1_Coor(2,:);
P1_z=VecSol ;
P1_exact=Exact(P1_x,P1_y,kx,ky);

//gcf().color_map = jetcolormap(64);
fec(P1_x, P1_y, P1_T',P1_z,mesh=%t)

// Calcul de l'erreur
// -----
h = Lx*Ly/Ne;
H(rf)= sqrt(Lx*Ly/Ne)
ErrL1(rf) = 0; ErrL2(rf) = 0; ErrLinf(rf) = 0.0 ;

// boucle sur les éléments
// -----

```

```

for e = 1:Ne
// Boucle sur les points de Gauss
Xi = P1_Coor(:, P1_Nu(1,e));
Xj = P1_Coor(:, P1_Nu(2,e));
Xk = P1_Coor(:, P1_Nu(3,e));

DetE      = abs(Determinant(Xi-Xj,Xk-Xj))      ;
// Boucle sur les points de Gauss
// -----
for gp = 1:Ngp

    Phi     = Lambda_g(:, gp)
    wg      = W_g(gp);

    // Point physique associé au point de Gauss
    // -----
    Xg(1:2) = 0 ;
    for k=1:Npl
        is      = Nu(k,e)      ;
        Xg      = Xg + P1_Coor(:, is)*Lambda_g(k,gp);
    end

    // Solution approchée au point de Gauss
    // -----
    Ug = 0
    for k=1:Ndl
        is      = Nu(k,e)      ;
        Ug      = Ug + VecSol(is)*Phi(k)      ;
    end

    // Solution exacte au point de Gauss
    // -----
    Uex = Exact(Xg(1), Xg(2), kx, ky )      ;

    // Les Erreurs L1, L2 et Linf
    // -----
    ErrL1(rf)   = ErrL1(rf) + wg*DetE*abs(Ug -Uex) ;
    ErrL2(rf)   = ErrL2(rf) + wg*DetE*(Ug -Uex)^2 ;
    ErrLinf(rf) = max( ErrLinf(rf), abs(Ug -Uex) ) ;

end
end
ErrL2(rf) = sqrt(ErrL2(rf))
end

Dh=H(1:Nconv-1)./H(2:Nconv)
Ordre_de_Conv(1,:) = log(ErrL1(1:Nconv-1)./ErrL1(2:Nconv))./log(Dh)
Ordre_de_Conv(2,:) = log(ErrL2(1:Nconv-1)./ErrL2(2:Nconv))./log(Dh)
Ordre_de_Conv(3,:) = log(ErrLinf(1:Nconv-1)./ErrLinf(2:Nconv))./log(Dh)

disp(["Norme L1","Norme L2","Norme Linf"] )
disp(Ordre_de_Conv')

```