<u>Contrôle d'attitude des satellites</u>

Définition de <u>contrôlabilité</u> et <u>stabilisabilité</u> d'un système temps continu en forme d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Un système est dit commandable si pour tout intervalle de temps $[t_i, t_f]$ et tous points $x_i,\ x_f\ \in \mathcal{X}$ avec $x_i = x(t_i)$, il existe une commande u appliquée sur $[t_i, t_f]$ tel que $x_f = x(t_f)$.

La condition nécessaire et suffisante de commandabilité ci-après est appelée **Critère de Kalman pour la commandabilité**. Le système considéré est **commandable** si et seulement si

$$rang\{\mathbb{C}\} = rang\{[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]\} = n$$

(n est la taille du vecteur d'état x).

Si le système n'est pas commandable ($rang\{\mathbb{C}\} < n$) il sera possible d'écrire les matrice A et B en mettant en évidence la partie commandable A_c et B_c

$$A = \begin{bmatrix} A_c & * \\ 0 & \overline{A_c} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système est dit **stabilisable** si ses pôles non commandables (de la matrice $\overline{A_c}$) appartiennent tous au demi-plan gauche ouvert. Un système non commandable est donc stabilisable.

Définition d'observabilité et détectabilité d'un système d'un système temps continu en forme d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Un système est dit **observable** si l'observation de ses entrées et sorties pendant un intervalle de temps fini $[t_i, t_f]$ permet de déterminer l'état initial $x_i = x(t_i)$, et donc, par intégration de l'équation d'état, de connaître $x(t)$ à tout instant appartenant à l'intervalle $[t_i, t_f]$.

La condition nécessaire et suffisante d'observabilité ci-après est appelé le **Critère de Kalman pour l'observabilité**. Le système considéré est **observable** si et seulement si

$$rang\{\mathbb{O}\} = rang\left\{\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right)\right\} = n$$

Si le système n'est pas observable ($rang\{\mathbb{O}\} < n$) il sera possible d'écrire les matrice C et A en mettant en évidence la partie observable C_o et A_o

$$C = [C_o \quad 0] \text{ et } A = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ * & \overline{A_o} \end{bmatrix}$$

Le système est dit **détectable** si ses pôles non observable (de la matrice $\overline{A_o}$) appartiennent tous au demi-plan gauche ouvert. Un système non observable est donc détectable.

Exemple 1

Le couple de matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

est-il contrôlable ?

Matrice de contrôlabilité :

$$rang\{\mathbb{C}\} = rang\{[B \quad AB \quad A^2B]\} = rang\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = 1 \neq 3$$

Non, le système n'est pas contrôlable.

La partie non contrôlable est caractérisée par la matrice

$$\overline{A_c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Qui a des pôles de son polynôme caractéristique égaux à 1 et 1. Les deux sont positifs. La partie non contrôlable n'est pas stabilisable.

Si le couple de départ était

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alors encore le système n'était pas contrôlable (car encore $rang\{\mathbb{C}\} = 1$) mais stabilisable cas les valeurs propre de la partie non contrôlable

$$\overline{A_c} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

étaient -1 et -1. Les deux réels négatifs.

<u>Exemple 2</u>

Le couple de matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

est-il contrôlable ?

Matrice de contrôlabilité :

$$rang\{\mathbb{C}\} = rang\{[B \quad AB \quad A^2B]\} = rang\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} = 3$$

Oui le système est complétement contrôlable.

Commandes MATBLAB :

Calcul du rang d'une matrice A : `rank(A)`

Calcul de la matrice de contrôlabilité pour les matrice A et B : `ctrb(A,B)`

Exemple 3

Le couple de matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est-il observable ?

Matrice de observabilité :

$$rang\{\mathbb{O}\} = rang\left\{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right\} rang\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} = 2 \neq 3$$

Non, le système n'est pas observable.

La partie non observable est caractérisé par la matrice

$$\overline{A_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Qui a des pôles de son polynôme caractéristique égaux à 1 et 1. Les deux sont positifs. La partie non contrôlable n'est pas détectable.

Exemple 4

Le couple de matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

est-il observable ?

Matrice de observabilité :

$$rang\{\mathbb{O}\} = rang\left\{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right\} rang\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right\} = 3$$

Oui, le système est observable.

Exercice sur le contrôle d'attitude d'un satellite (cas mono dimensionnel)

Un système de contrôle d'attitude d'un satellite utilise le principe de la conservation du moment angulaire pour fournir un couple de contrôle qui induit un mouvement angulaire.

Le mouvement rotationnel d'un satellite le long d'un axe est modélisé par la suivante équation du deuxième ordre :

$$I\ddot{\phi} = T_c + T_{ext}$$

où

- ϕ est l'angle d'orientation du satellite par rapport à l'axe de rotation en examen ;
- $I = 1000$ kg/m2 est l'inertie du satellite le long de l'axe en examen ;
- T_c est le couple de contrôle ;
- T_{ext} le couple des perturbations extérieures.

Le modèle de la roue qui est l'actionneur capable de fournir le couple de contrôle T_c peux s'exprimer comme

$$J\dot{r} = -T_c$$

où

- r est la vitesse de rotation angulaire ;
- J est l'inertie de la roue ;
- T_c est le couple de contrôle.

L'équation qui modélise la mesure Z de l'angle d'attitude ϕ est la suivante

$$\dot{Z} = \phi - aZ$$

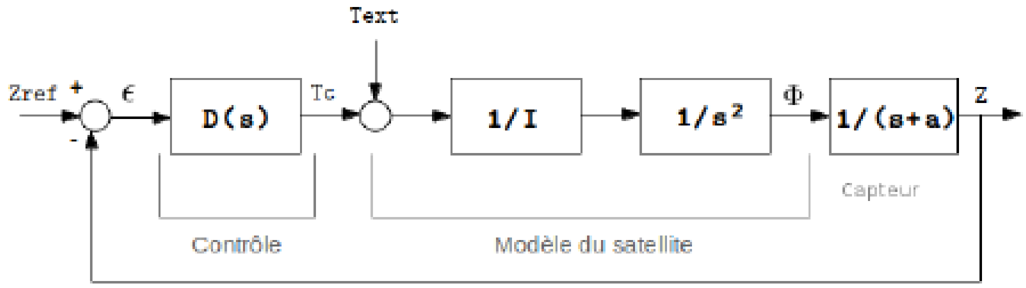
où

- Z est la mesure de ϕ;
- a est la constante de temps du capteur égale à 1 rad/s.

L'expression du couple de contrôle en terme de transformée de Laplace soit la suivante

$$\boldsymbol{T_c} = -D(s)(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z_{ref}})$$

$\boldsymbol{T_c}$, $\boldsymbol{Z}$ et $\boldsymbol{Z_{ref}}$ sont les transformées de Laplace de T_c, Z et Z_{ref} ; $D(s)$ est la compensation à sintériser dans l'exercice suivant différentes hypothèses.



Question 1 : considérer un contrôleur purement proportionnel constant

$$D(s) = K_0$$

et écrire la fonction de transfert $W(s)$ du système en boucle fermé entre Z_{ref} et Z.

Réponse à la question 1 :

$$\frac{Z}{Z_{ref}} = W(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

où $L(s)$ est la fonction du système en boucle ouverte

$$L(s) = D(s)G(s)H(s)$$

avec $D(s)$ la fonction de transfert du contrôleur

$$D(s) = K_0$$

$G(s)$ la fonction de transfert de la dynamique du satellite

$$G(s) = \frac{1}{I}\frac{1}{s^2}$$

$H(s)$ la fonction de transfert du capteur

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Donc

$$L(s) = D(s)G(s)H(s) = \frac{K_0/I}{s^2(s+1)}$$

et

$$\frac{Z}{Z_{ref}} = W(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_0/I}{s^2(s+1)+K_0/I}$$

Question 2 : Écrire les équations du système en boucle ouverte en utilisant comme variables d'état l'angle ϕ, la vitesse $\dot{\phi}$ et la mesure Z.

Réponse à la question 2 : les équations en forme matricielle du système en boucle ouverte sont

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu + Ew \\ y = Hx \end{cases}$$

avec

$$x = [\phi \quad \dot{\phi} \quad Z]^T$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G = E = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.001 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u = T_c$$

$$w = T_{ext}$$

$$y = \phi$$

$$H = [1 \quad 0 \quad 0]$$

On a donc

$$\dot{x} = Fx + Gu + Ew \Longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix} T_c + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{bmatrix} T_{ext}$$

Question 3 : Calculer ensuite le gain matriciel

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad 0]$$

du contrôleur à retour d'état pour placer les pôles du système en boucle fermée à $\lambda_{1,2} = -0.02 \pm j0.02\sqrt{3}$. Le troisième pôle est à $\lambda_3 = -1$.

De cette sorte

$$T_c = -K_1\phi - K_2\dot{\phi}$$

Réponse à la question 3 : la matrice d'état du système en boucle fermée avec

$$u = -Kx = -[K_1 \quad K_2 \quad 0]\begin{bmatrix}\phi \\ \dot{\phi} \\ Z\end{bmatrix}$$

est

$$A = F - GK = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 \\ \frac{1}{I} \\ 0\end{bmatrix}[K_1 \quad K_2 \quad 0] = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{I}K_1 & -\frac{1}{I}K_2 & 0 \\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

On peut placer les pôles du système parce que le système est complétement contrôlable (la matrice de contrôlabilité du système a rang égal à 3).

Option de solution 1) qui utilise la définition des valeurs propres directement :

On peut imposer directement les expressions des pôles du système en boucle fermée égaux à $\lambda_{1,2} = -0.02 \pm j0.02\sqrt{3}$.

Les pôles en questions sont les valeurs propres de la matrice A :

$$det[\lambda I_{3\times 3} - A] = det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ \frac{1}{I}K_1 & \lambda + \frac{1}{I}K_2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)\left(\lambda^2 + \lambda \frac{1}{I}K_2 + \frac{1}{I}K_1\right) = 0$$

Les racines de l'équation

$$\lambda^2 + \lambda \frac{1}{I}K_2 + \frac{1}{I}K_1 = 0$$

doivent être

$$\lambda_{1,2} = -0.02 \pm j0.02\sqrt{3}$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = \lambda^2 + \lambda \frac{1}{I}K_2 + \frac{1}{I}K_1 = \lambda^2 + 0.04\lambda + 0.0016$$

On déduit :

$$\begin{cases} \frac{1}{I}K_2 = 0.04 \\ \frac{1}{I}K_1 = 0.0016 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K_2 = 40 \\ K_1 = 1.6 \end{cases}$$

Exercice sur le placement des pôles résolu avec une méthode différente de celle exposée en haut (sans regarder directement les valeurs propres). Cette méthode n'a pas été prestée en cours. Elle ne sera pas présente dans le thème d'examen, mais elle constitue une méthode utile pour vérifier éventuellement une solution obtenue avec la méthode précédente.

Calculer la matrice des gains de retour d'état

$$u = -Kx = -[K_1 \quad K_2 \quad K_3]x$$

pour le système

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tels que les valeurs propres du système en boucle fermée soient égaux à -1, -2, -2.

Le système est complètement contrôlable car

$$rang\{\mathbb{C}\} = rang\{[B \quad AB \quad A^2B]\} = rang\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} = 3$$

On suit les étapes de la méthode de placement des pôles numéro 2).

1) On calcule le polynôme caractéristique du système en boucle fermée avec les pôles de valeurs désirées

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 2) =$$
$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) =$$

$$= \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4$$

On définit les coefficients de ce polynôme comme

$$d_0 = 4$$
$$d_1 = 8$$
$$d_2 = 5$$

2) On calcule le polynôme caractéristique de la matrice d'état du système en boucle ouverte

$$p_A(\lambda) = det[\lambda I_{3\times 3} - A] = det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$$

On définit les coefficients de ce polynôme comme

$$\alpha_0 = 1$$
$$\alpha_1 = -1$$
$$\alpha_2 = -1$$

3) On calcule le gain intermédiaire

$$\widetilde{K} = [\alpha_0 - d_0 \quad \alpha_1 - d_1 \quad \alpha_2 - d_2] = [-3 \quad -9 \quad -6]$$

4) Calculer la matrice de contrôlabilité du système. Dans ce cas

$$\mathbb{C} = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Calculer le vecteur

$$L = [0 \quad 0 \quad 1] * inv(\mathbb{C}) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = [0.5 \quad -0.5 \quad -0.5]$$

6) Calculer la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} L \\ LA \\ LA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

NB : cette dernière est la matrice d'observabilité du système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Lx \end{cases}$$

7) Déterminer le gain désiré comme

$$K = -\widetilde{K}Q = [-3 \quad -9 \quad -6] \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = [9 \quad 6 \quad -3]$$

Donc l'expression du contrôle en fonction de l'état est

$$u = -Kx = -[9 \quad 6 \quad -3]x$$

8) Pour vérifier que le gain déterminé au point 7) est le bon, le replacer dans le système d'origine et vérifier que les valeurs propres de la matrice

$$A_c = A - BK$$

sont bien les valeurs -1, -2 et -2.