Cours Scientific Machine Learning

Séance d'exercices du 10 décembre

Exercice 1

On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1, \\ 0 & 2 < |x|, \\ 2 - |x|, & 1 \leq |x| \leq 2. \end{cases}$$

Soient N appartenant à $\mathbb{N}^*$ et les points $x_j = j/N$, $0 \leq j \leq N$, on introduit les fonctions ψ_j, $0 \leq j \leq N$, définie pour x appartenant à $[0,1]$ par

$$\psi_j(x) = \psi(3N(x - x_j)).$$

1. Montrer que pour tout j, $0 \leq j \leq N$, le support de ψ_j est inclus dans $\{x \in [0,1], |x - x_j| < 1/N\}$.
2. En déduire que pour tout x appartenant à $[0,1]$,

$$\sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) = 1.$$

3. Montrer qu'à une constante près, la fonction ψ, et donc toute fonction ψ_j, $0 \leq j \leq N$, peut s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions ReLU.

Exercice 2 (à regarder pour la prochaine séance)

Soit σ la fonction qui à x réel associe $\tanh(x)$.

1. Soient y et h appartenant à $\mathbb{R}$, $h \neq 0$, donner à l'aide d'une formule de Taylor une majoration de

$$\left| y - \frac{\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) - \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right)}{h} \right|$$

2. On note pour simplifier "σ NN" un réseau de neurones avec la fonction d'activation σ. Soient $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, montrer que la fonction qui à x associe x peut être approchée à ε près sur tout intervalle $[-M, M]$ à l'aide d'un σ NN.

Exercice 1

On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1, \\ 0 & 2 < |x|, \\ 2 - |x|, & 1 \leq |x| \leq 2. \end{cases}$$

Soient N appartenant à $\mathbb{N}^*$ et les points $x_j = j/N$, $0 \leq j \leq N$, on introduit les fonctions ψ_j, $0 \leq j \leq N$, définie pour x appartenant à $[0, 1]$ par

$$\psi_j(x) = \psi(3N(x - x_j)).$$

1. Montrer que pour tout j, $0 \leq j \leq N$, le support de ψ_j est inclus dans $\{x \in [0, 1], |x - x_j| < 1/N\}$.
2. En déduire que pour tout x appartenant à $[0, 1]$,

$$\sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) = 1.$$

3. Montrer qu'à une constante près, la fonction ψ, et donc toute fonction ψ_j, $0 \leq j \leq N$, peut s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions ReLU.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & 2 < |x| \\ 2 - |x| & 1 \leqslant |x| \leqslant 2 \end{cases} \qquad \varphi_j(x) = \varphi(3N(x - x_j))$$

1) RTP $\forall j / \; 0 \leqslant j \leqslant N$, $\operatorname{supp}(\varphi_j) \in \{x \in [0,1], |x - x_j| < 1/N\}$

$\operatorname{supp}(\varphi_j) = \{x \in [0,1] \,/\, \varphi_j(x) \neq 0\}$.

$\varphi_j(x) = \varphi(3N(x - x_j)) \neq 0$

donc $|3N(x - x_j)| < 2 \Rightarrow 3N|x - x_j| < 2$

$\Rightarrow |x - x_j| < \frac{2}{3N}$

Donc $\operatorname{supp}(\varphi_j) \in \{x \in [0,1] ; |x - x_j| < 1/N\}$ $\qquad < \frac{1}{N}$

2) Déduire que : $\forall x \in [0,1]$ we have

$$\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(x) = 1.$$

$$\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots \varphi_N(x)$$

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varphi(3N(x-x_1)) + \varphi(3N(x-x_2)).$$

$=$

$x - x_1 =$ $\qquad x_1 = 1/N.$

$0 \le x \le 1.$

$0 \le x - \frac{1}{N} \le 1 - 1/N$

$0 \le 3N(x - \frac{1}{N}) \le 3N - 3$

---

let $x \in [0,1] \Rightarrow \exists j_0 \in \mathbb{N} \mid j_0/N \le x \le \frac{(j_0+1)}{N}.$

$$0 \le x - x_{j_0} \le \frac{j_0+1}{N} - \frac{j_0}{N}$$

$$0 \le x - x_{j_0} < \frac{1}{N} \qquad \frac{j_0-(j_0+1)}{N} \le x - x_{j_0+1} \le \frac{j_0+1}{N} - \frac{j_0+1}{N}.$$

$$\Downarrow$$

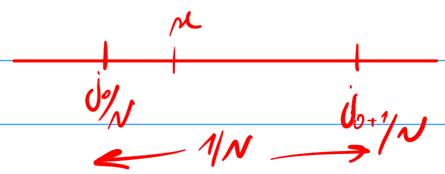
$$|x - x_{j_0}| < \frac{1}{N} \qquad -\frac{1}{N} \le x - x_{j_0+1} \le 0$$

$$\Downarrow$$

$$|x - x_{j_0+1}| < \frac{1}{N}.$$

pour $j \ne j_0$ & j_{0+1}.

soit
à revoir $\begin{cases} j < j_0 \Rightarrow x - x_j > 1/N \\ j > j_{0+1} \Rightarrow x - x_j < -1/N \end{cases}$



$$\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(x) = \varphi_{j_0}(x) + \varphi_{j_0+1}(x).$$

Si $x \in [j_0/N, j_0/N + 1/3N]$. $\quad \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(x) = \overbrace{\varphi_{j_0}(x)}^{=1} + \overbrace{\varphi_{j_0+1}(x)}^{=0}$.

Si $x \in [j_0/N + 2/3N, j_0/N + 1]$ $\quad \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(x) = \underbrace{\varphi_{j_0}(x)}_{=0} + \underbrace{\varphi_{j_0+1}(x)}_{=0}$.

Si $x \in [j_0/N + 1/3N, j_0/N + 2/3N]$

$$\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(x) = \varphi_{j_0}(x) + \varphi_{j_0+1}(x).$$

$$= 2 - 3N(x - x_{j_0}) + 2 + 3N(x - x_{j_0+1})$$

$$= 4 \cancel{-3Nx} \cancel{+3Nx} + \cancel{3N\, j_0/N} - \cancel{\frac{j_0+1}{N} \times 3N}$$

$$= 4 - 3 = 1.$$