

## Cours Scientifique Machine Learning

## Séance d'exercices du 19 janvier

**Exercice 1**

Soit  $\sigma$  la fonction qui à  $x$  réel associe  $\tanh(x)$ .

1. Soient  $y$  et  $h$  appartenant à  $\mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , donner à l'aide d'une formule de Taylor une majoration de

$$\left| y - \frac{\sigma\left(\frac{hy}{2}\right) - \sigma\left(\frac{-hy}{2}\right)}{h} \right|$$

2. On note pour simplifier "σ NN" un réseau de neurones avec la fonction d'activation  $\sigma$ . Soient  $\varepsilon > 0$  et  $M > 0$ , montrer que la fonction qui à  $x$  associe  $x$  peut être approchée à  $\varepsilon$  près sur tout intervalle  $[-M, M]$  à l'aide d'un  $\sigma$  NN.
3. Trouver comme dans la première question une approximation de  $y^2$ .

**Exercice 2**

Soit  $K$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , montrer que

$$\|\tanh^{(K)}\|_{\infty} \leq 2^{K-1}(K+2)!$$

**Exercice 3**

Soit la fonction signe définie pour  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$  par  $1_{\{x>0\}} - 1_{\{x<0\}}$ . Soit  $K$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \|\tanh_{\theta} - \text{signe}\|_{C^K(\mathbb{R} \setminus ]-\varepsilon, \varepsilon])} = 0.$$