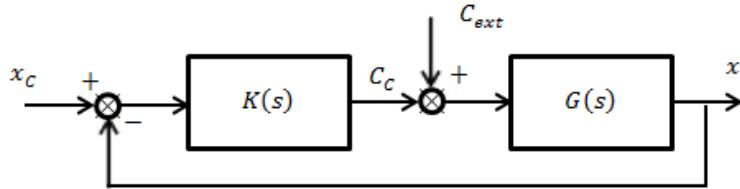


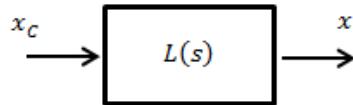
Examen MAM5 2022, partie « Contrôle d'Attitude des Satellites » (D. Losa)

Exercice 1)

Considérer la boucle de contrôle décrite dans le dessin juste en bas en fonction des fonctions de transfert $K(s)$ et $G(s)$



Pour ce qui concerne l'entrée x_C et la sortie x , réduire cette boucle de contrôle à celle simplifiée donnée par :



- Écrire la fonction de transfert $L(s)$ en fonction des fonctions de transfert $K(s)$ et $G(s)$:

$$L(s) = \frac{x(s)}{x_C(s)} = ?$$

- Sous quelle condition la fonction de transfert $L(s)$ garantie la stabilité du système avec x_C en entrée et x en sortie ?

- Écrire maintenant la fonction de transfert entre que la variable externe C_{ext} et la sortie x :

$$\frac{x(s)}{C_{ext}(s)} = ?$$

- Si la fonction de transfert $G(s)$ est la suivante

$$G(s) = 100 \frac{(s + 34)}{s(s - 10)(s - 5)}$$

si la fonction de transfert de $K(s)$ est la suivante

$$K(s) = \frac{10}{s} + 5s + 4$$

et si le couple C_{ext} est un signal à échelon dont la transformée de Laplace est

$$C_{ext}(s) = \frac{7}{s}$$

en appliquant le théorème de la valeur finale, évaluer l'impact de C_{ext} sur la sortie x .

Rappel : théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot F(s)]$$

avec $F(s)$ transformée de Laplace de $f(t)$)

5. Répondre à la question 4. mais en supposant que la fonction de transfert $K(s)$ est la suivante

$$K(s) = 4$$

et que $G(s)$ et $C_{ext}(s)$ sont les mêmes du point 4..

6. Supposons que la fonction de transfert du contrôleur $K(s)$ est celle d'un contrôleur PID. Écrire la fonction de transfert de ce contrôleur en fonction des trois gains génériques K_p , K_i , K_d (proportionnel, intégral, dérivé).

Exercice 2)

Écrire la fonction de transfert entre X et U à partir de l'équation temporelle suivante

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t) - 10\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$$

Calculer les pôles et les zéros du système.

Est-ce que le système avec u comme entrée et x comme sortie est stable ?

Notation : X est la transformée de Laplace de $x(t)$ et U la transformée de Laplace de $u(t)$.

Exercice 3)

Considérer le système en forme d'état

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 3 \quad 0]$$

Calculer les matrices de contrôlabilité et d'observabilité du système.

Est-ce que le système est contrôlable ?

Est-ce que le système est observable ?

Exercice 4)

Pour le système

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 5x_2 + u \end{cases}$$

avec le suivant critère à minimiser

$$J = x_1(t_f)^2 + x_2(t_f)^2 + u(t_f)^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{1}{2} \cdot x_1(t)^2 + \frac{1}{2} \cdot u(t)^2 \right] dt$$

écrire les étapes 1., 2., 3. de l'algorithme pour déterminer le contrôle optimale, jusqu'à l'écriture des équations d'état et d'états adjoint, sans résolution de ces dernières.

Rappel :



Processus pour résoudre un problème de contrôle optimal

8

On considère un système dynamique non linéaire et non-stationnaire (qui dépend explicitement du temps)

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

On considère un critère de performance de la forme

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt$$

- 1) Définir la fonction Hamiltonienne : $\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda, t) = f_0(x(t), u(t), t) + \lambda^T f(x(t), u(t), t)$;
- 2) Minimiser \mathcal{H} par rapport à u en résolvant $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$ pour obtenir $u^*(t) = h(x(t), \lambda, t)$;
- 3) En utilisant les résultats des points 1) et 2) calculer la valeur optimale de fonction Hamiltonienne $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}(x(t), u^*(t), \lambda, t)$ et construire les équations d'état et état adjoint $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda}$ et $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x}$;
- 4) Résoudre le système d'équations différentielles avec condition initiale $x(t_0) = x_0$ et condition finales $\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^T(t) \right]_{t_f} \delta x_f = 0$;
- 5) Remplacer la solution des équation différentielles $x^*(t)$ et $\lambda^*(t)$ dans l'expression du contrôle optimale trouvée au pas 2).