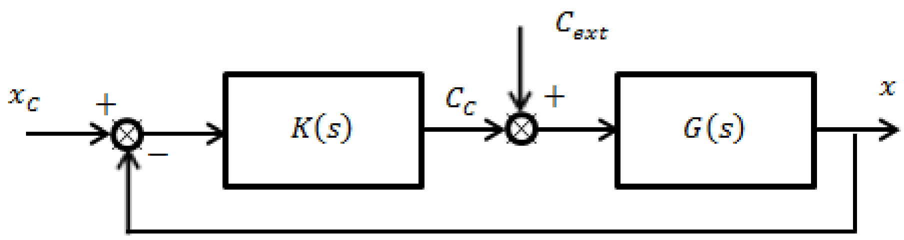
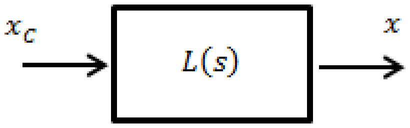
Exercice 1)

Considérer la boucle de contrôle décrite dans le dessin juste en bas en fonction des fonctions de transfert $K(s)$ et $G(s)$



Pour ce qui concerne l'entrée x_C et la sortie x, réduire cette boucle de contrôle à celle plus simplifiée donnée par :



1. Ecrire la fonction de transfert $L(s)$ en fonction des fonctions de transfert $K(s)$ et $G(s)$:

$$L(s) = \frac{x(s)}{x_C(s)} = ?$$

2. Ecrire maintenant la fonction de transfert entre la variable externe C_{ext} et la sortie x :

$$\frac{x(s)}{C_{ext}(s)} = ?$$

Exercice 2)

Le système en forme d'état

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

à les matrices définies comme

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculer les matrices de contrôlabilité et d'observabilité du système. Est-ce que le système est contrôlable et observable ?

Exercice 3)

Ecrire en forme d'état

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

la dynamique rotationnelle monodimensionnel d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre

- le long de l'axe Y (en fonction de son orientation θ et de sa vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$) ;
- en fonction de son inertie $J_y = 2000$ kg·m^2 et
- du couple de contrôle T_c.

La variable à observer est la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$.

1. Définir le vecteur x, u et y. Définir les trois matrices A, B et C.

2. Est-ce que le système est contrôlable ? Etudier la matrice de contrôlabilité.

3. Ecrire l'expression du contrôleur par retour d'état de type LQ qui minimise un critère

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt$$

avec

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } R = 1.$$

en fonction de la solution P de l'ARE (équation algébrique de Riccati) associé au système.
NB : écrire seulement l'ARE sans la résoudre et l'expression du contrôleur en retour d'état.

4. Calculer un gain matriciel de retour d'état K tel que, avec le contrôle

$$u = -Kx = -[K_1 \quad K_2]x,$$

les pôles su système en boucle fermée soient égaux à -1 et -3. Déterminer K_1 et K_2. Bien vérifier que les valeurs propre du système en boucle fermée sont ceux désirés.

5. Tracer le diagramme à blocs du système en boucle fermée qui va de $\mathcal{L}(\theta_{ref})$ avec $\theta_{ref} = 0$ à $\mathcal{L}(\theta)$ avec le type de contrôleur en retour d'état déterminé en écrivant aussi la fonction de transfert entre $\mathcal{L}(\theta)$ et $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(T_c)$.
$\mathcal{L}(\quad)$ indique la transformée de Laplace de ( ).

6. Rajouter un capteur en cascade du modèle du satellite avec fonction de transfert à déduire de la suivante équation de mesure de l'angle d'attitude θ :

$$\frac{dZ}{dt} = \theta - 3Z$$

où Z est la mesure de θ. Quelle est la fonction de transfert entre la transformée de Laplace de θ et la transformée de Laplace de Z ?

7. Ecrire la représentation d'état

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Dx + Eu \\ y = Fx \end{cases}$$

où cette fois ci la variable d'état inclus aussi la mesure de θ :

$$x = [\theta \quad \dot{\theta} \quad Z]^T$$

8. Calculer un gain matriciel de retour d'état W tel que, avec le contrôle

$$u = -Wx = -[W_1 \quad W_2 \quad W_3]x,$$

les pôles su système en boucle fermée soient égaux à -1, -3 et -2. Déterminer les valeurs de W_1, W_2 et W_3. Bien vérifier que les valeurs propre du système en boucle fermée sont ceux désirés.

9. Retracer le diagramme à blocs du système en boucle fermée qui va de $\mathcal{L}(Z_{ref})$ avec $Z_{ref} = 0$ à $\mathcal{L}(Z)$ avec le type de contrôleur en retour d'état déterminé au point 7. en écrivant aussi la fonction de transfert entre $\mathcal{L}(Z)$ et $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(T_c)$.
$\mathcal{L}(\quad)$ indique la transformée de Laplace de ( ).
Suggestion : écrire de façon étendue $u = -Wx$ (en mettant en évidence toutes les variables d'état) et utiliser après la fonction de transfert entre $\mathcal{L}(Z)$ et $\mathcal{L}(\theta)$ pour éliminer θ de l'expression de u.

NB : choisir de résoudre le point 3. et 7. avec une ou plusieurs des trois méthodes illustrées dans la solution du dernier TD.