Interpolation et Réduction de modèle

Adrien Boudin

Dorea Technology

adrien.boudin@dorea.eu

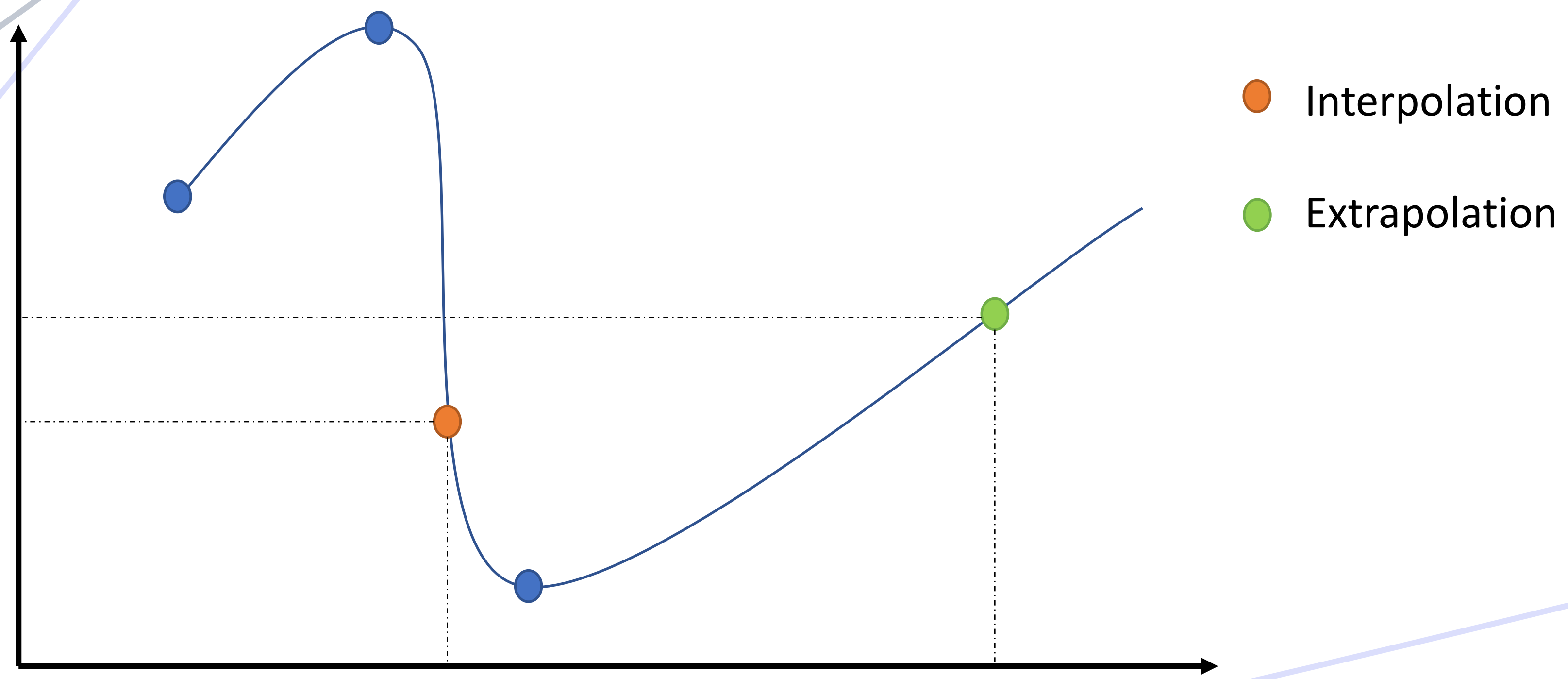
Quelle difference entre interpolation et extrapolation ?

Interpolation : “Opération qui consiste à **construire ou estimer** la valeur d’une fonction pour une valeur de la variable **prise entre deux données discrètes** de l’intervalle dans lequel la relation a été établie”

Extrapolation : “En statistique, procédé qui consiste à **prolonger une série statistique** en introduisant à la suite des termes connus **un terme nouveau qui obéit à la règle de la série**.”

D’après https://lexique.netmath.ca

Quelle difference entre interpolation et extrapolation ?



Plan du cours

I. Lien entre Interpolation et réduction de modèle

II. Différents types d'interpolations

   1. Interpolation par analyse numérique
   2. Interpolation géométrique
   3. Interpolation statistique

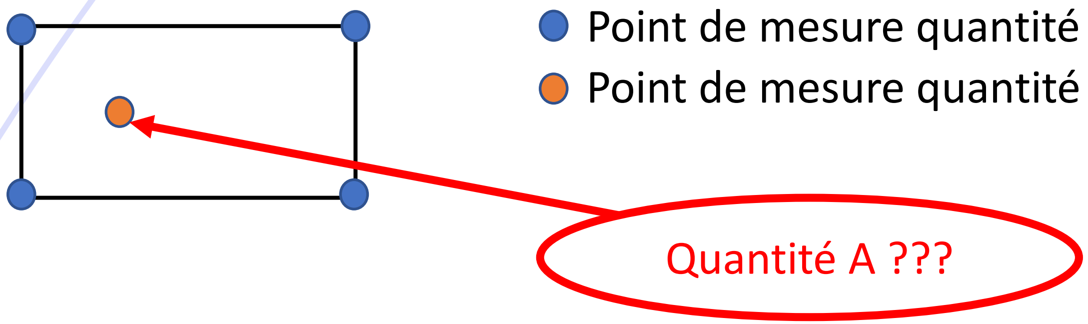
III. TP/TD

I. Lien entre Interpolation et réduction de modèle

Quel lien existe-t-il entre l’interpolation et la réduction de modèle ?

I. Lien entre Interpolation et réduction de modèle

1. Permet d'évaluer une quantité en un point où cette quantité n'est pas mesurée



I. Lien entre Interpolation et réduction de modèle

Exemple pour un satellite :
1 modèle mécanique
1 modèle thermique

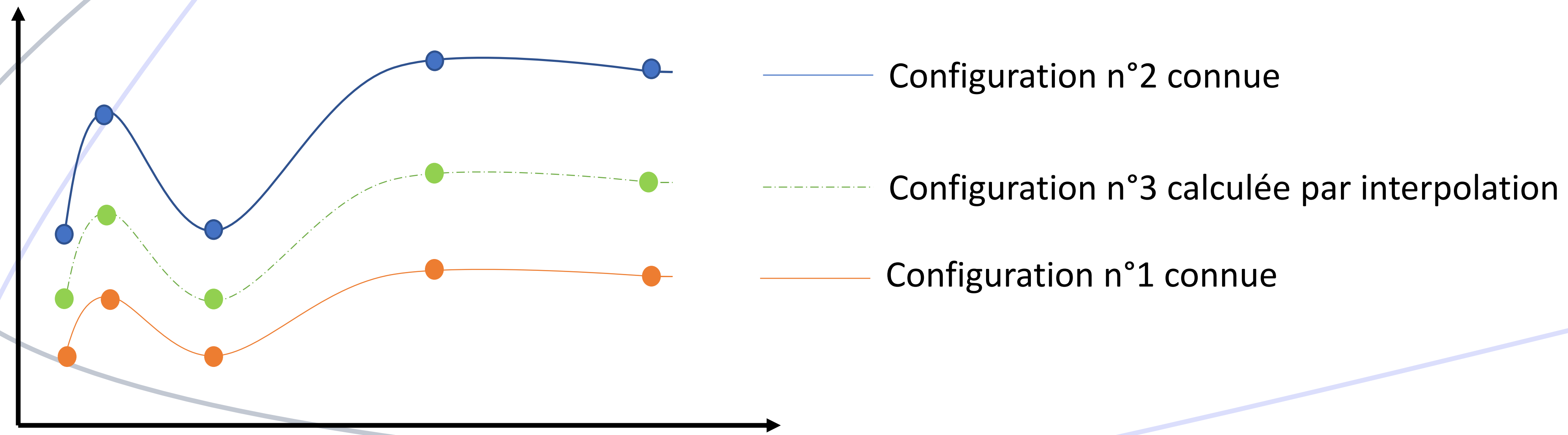
Les points d'intérêts ne sont pas les mêmes (peu de thermostats sur la structure alors que beaucoup plus important pour la mécanique).

Connaitre la température sur un nœud mécanique ?

- Soit placer 1 thermostat sur ce nœud (trop peu de thermostats)
- Interpoler avec les nœuds thermiques les plus proches si c'est **cohérent**

I. Lien entre Interpolation et réduction de modèle

2. Permet d'évaluer une quantité en un point pour une configuration non connue à partir de configurations connues



Et donc par extension toute une configuration

I. Lien entre Interpolation et réduction de modèle

Exemple du satellite :
durée de vie 15-17 ans
revêtement extérieur qui change de propriétés au cours du temps ($\alpha(t)+\rho(t)+\tau(t)=1$)

Comment connaitre les propriétés à une date donnée pour lancer un calcul thermique à cette date-là?

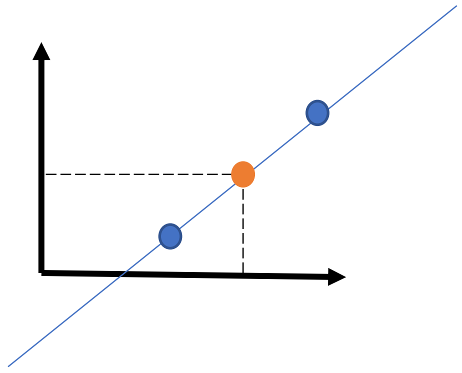
- Simuler les cas aux limites pour en déduire des bornes min max
- En connaissant de manière empirique le comportement de chacune des propriétés, interpoler pour la date donnée.

II. Différents types d'interpolations

1. Interpolation par **analyse numérique**

1. Interpolation linéaire

2 points P_1 P_2 reliées par une droite



Remarque : Interpolation utile <u>uniquement</u> dans le cas de <u>comportements linéaires</u>

II. Différents types d'interpolations

1. Interpolation par **analyse numérique**

2. Interpolation polynomiale

n points $P_0 \cdots P_{n-1}$ représentées par une fonction polynomiale de degrés n-1 $P(x)$ tq $P(x_i) = y_i \;\; \forall i \in [|0; n-1|]$ avec $P_i = (x_i, y_i)$

Formule la plus commune $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

II. Différents types d’interpolations

1. Interpolation par **analyse numérique**

2. Interpolation polynomiale

Cela revient à résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Remarque : L’inversion de ce système peut être long et nécessite une nouvelle résolution en cas d’ajout ou de suppression de points

II. Différents types d'interpolations

1. Interpolation par **analyse numérique**

2. Interpolation polynomiale

Méthode de **Lagrange** : $L(x) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j * \left(\prod_{i=0, i\neq j}^{n-1} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)$

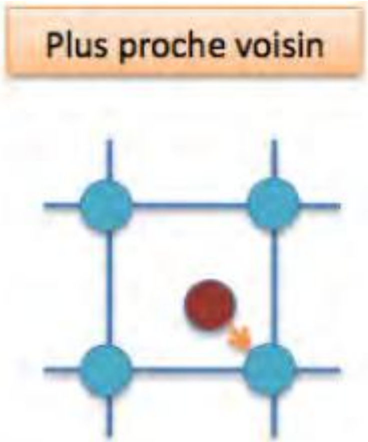
Remarque : Cette expression est plus « facile » à calculer à la main ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel de type MAPPLE mais complexe à coder

II. Différents types d'interpolations

2. Interpolation **géométrique**

1. Interpolation par le voisin le plus proche

Pour un jeu de données, il s'agit d'affecter à un point que l'on souhaite interpoler, la valeur de la donnée la plus proche.



Généralement on utilise la distance pour déterminer quelle donnée est la plus proche

II. Différents types d'interpolations

2. Interpolation **géométrique**

2. Interpolation par voisins naturels

Pour un jeu de données, il s'agit d'affecter à un point que l'on souhaite interpoler, la valeur des données, pondérées d'un poids :

$G(x) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x) * y_i$ avec $w_i(x)$ le poids de y_i dans le calcul de l'interpolation

II. Différents types d'interpolations

2. Interpolation **géométrique**

2. Interpolation par voisins naturels

Différents poids existent : Poids de Sibson, Poids de Laplace

Pour le poids de Sibson, il s'agit de construire un diagramme de Voronoi avec les données, de rajouter le point à interpoler et voir l'aire qui a été concédé par les plus proches voisins à ce nouveau point.

II. Différents types d’interpolations

2. Interpolation **géométrique**

2. Interpolation par voisins naturels

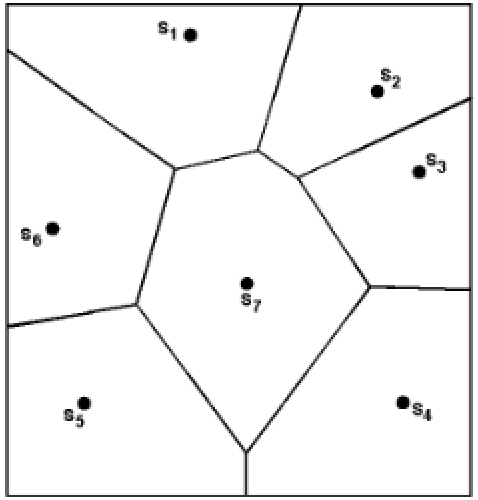


Diagramme de Voronoi sur les points connus

II. Différents types d'interpolations

2. Interpolation **géométrique**

2. Interpolation par voisins naturels

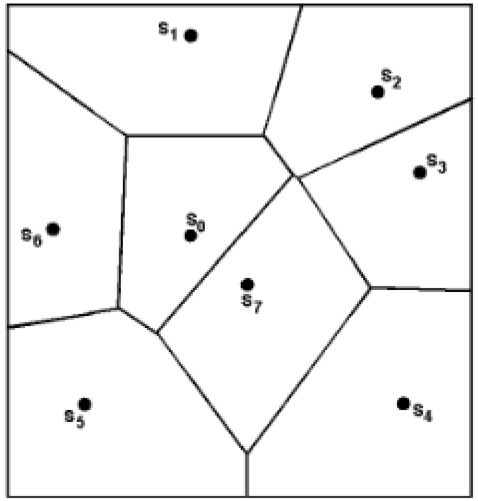
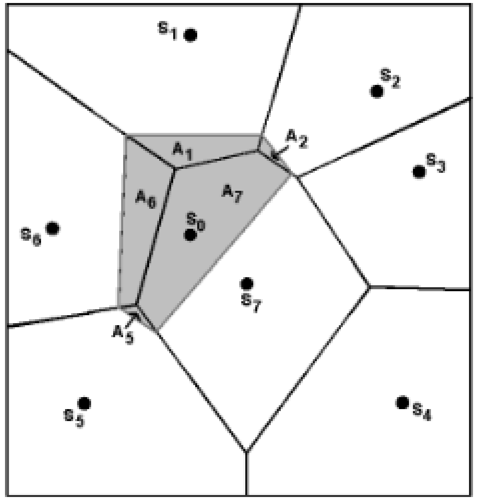


Diagramme de Voronoi avec ajout du point à interpoler

II. Différents types d'interpolations

2. Interpolation **géométrique**

2. Interpolation par voisins naturels



Calculs des aires concédées par les points connus

Poids de Sibson :

$$w_i(x) = \frac{Aire\ de\ x_i\ perdu}{Aire\ de\ x\ dans\ le\ diagramme}$$

II. Différents types d'interpolations

2. Interpolation **géométrique**

3. Interpolation par triangulation

Il s'agit de déterminer <u>le triangle contenant</u> le point à interpoler avec ses sommets les plus proches.

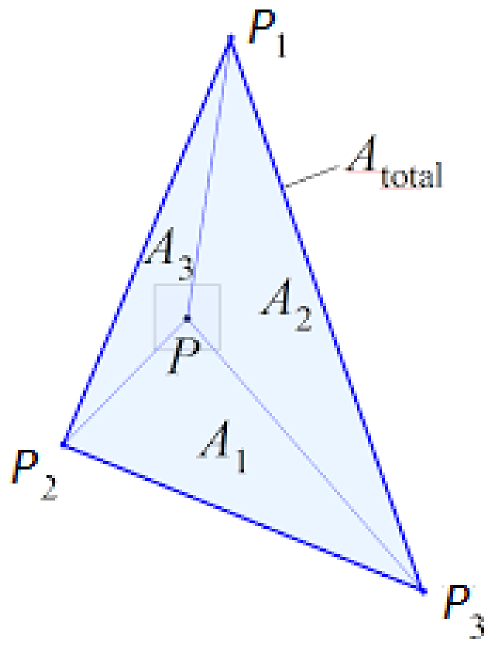
Avec ce triangle, <u>calculer les aires</u> opposées aux sommets et considérer que c'est le poids du sommet dans le calcul du point à interpoler.

II. Différents types d'interpolations

2. Interpolation **géométrique**

3. Interpolation par triangulation

$$Q(P) = \frac{Q(P_1) * A_1 + Q(P_2) * A_2 + Q(P_3) * A_3}{A_1 + A_2 + A_2}$$



Avec Q la quantité à interpoler

II. Différents types d'interpolations

2. Interpolation **géométrique**

4. Interpolation par inverse à la distance

Au contraire des plus proches voisins, il s'agit d'utiliser tous les points pondérés d'un poids.
Le poids correspond à l'inverse de la distance.

$$Q(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} w_k(x)^p * Q(x_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} w_k(x)^p} \text{ avec } w_k(x) = \frac{1}{d(x,x_k)}$$

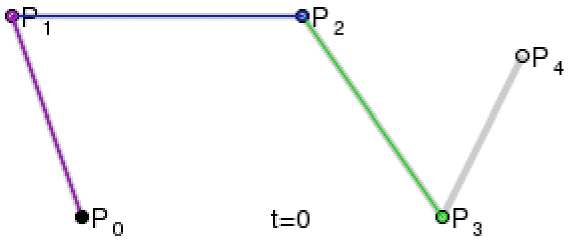
p est un coefficient qui permet de moduler l'effet de l'inverse de la distance

II. Différents types d'interpolations

2. Interpolation **géométrique**

5. Courbes de Bézier

Quelques points (points de contrôle) permettent de modéliser des courbes complexes (2D comme 3D)



Animation Wikipédia

II. Différents types d'interpolations

3. Interpolation **statistique – Krigeage**

C'est une <u>interpolation spatiale</u> utilisant l'interprétation et la modélisation d'un **variogramme** expérimental.

Il faut regarder à la fois les données par rapport au point d'intérêt mais aussi les données 2 à 2.

Cela permet d'exclure les données aberrantes.

(Variogramme: fonction mathématique)

II. Différents types d'interpolations

3. Interpolation **statistique – Krigeage**

La formule :

$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x) * Q(x_i)$ avec Q la quantité d'intérêt et x_i les données.

$\lambda_i(x)$ est un poids qui va être déterminé par les **variogrammes expérimental et théorique**. Il sera le résultat de l'inversion d'un produit matriciel.

II. Différents types d’interpolations

3. Interpolation **statistique – Krigeage**

Étapes du Krigeage :

- Calcul du **variogramme expérimental** $\boldsymbol{\gamma}$ et tracé de ce variogramme
- Estimation d’un **variogramme théorique** $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}$ « à vue »
- Calcul des $\lambda_i(x)$ et utilisation dans la formule définie plus haut

II. Différents types d'interpolations

3. Interpolation **statistique – Krigeage**

Détail du variogramme expérimental:

$\gamma(h) = \frac{1}{2N} \sum \left(Q(x_i) - Q(x_j) \right)^2$ avec le nombre de couple tq $h - \delta h < |x_i - x_j| < h + \delta h$

ou « x_i et x_j sont à une inter distance de h »

Remarque : on estime la quantité entre x_i et x_j , élevée au carré ce qui rappelle la variance

d'où VARiogramme

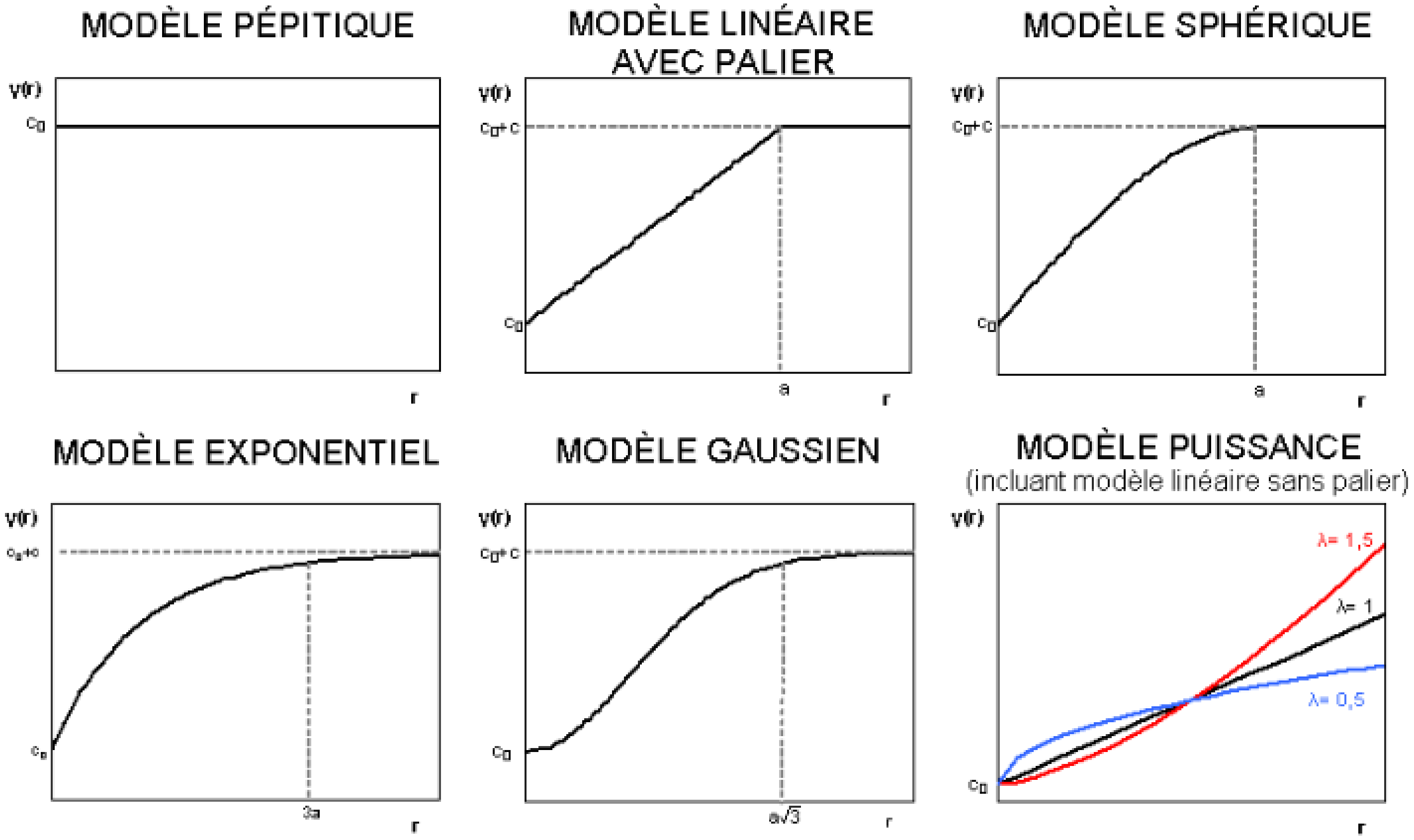
II. Différents types d'interpolations

3. Interpolation **statistique – Krigeage**

Après avoir **tracé le variogramme expérimental**, il faut trouver une courbe de tendance **d'après des cas de variogrammes théoriques connus** afin de trouver le variogramme théorique qui **se rapproche** des données expérimentales. On en déduit l'expression de la fonction $\hat{\gamma}(h)$

II. Différents types d'interpolations

3. Interpolation **statistique – Krigeage**



II. Différents types d'interpolations

3. Interpolation **statistique – Krigeage**

Comme nous sommes dans un modèle discret de moyenne inconnue la résolution des $\lambda_i(x)$ se fait par résolution de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \gamma(h_{0,0}) & \cdots & \gamma(h_{0,n-1}) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(h_{n-1,0}) & \cdots & \gamma(h_{n-1,n-1}) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_0(x) \\ \vdots \\ \lambda_{n-1}(x) \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}(h_{0,x}) \\ \vdots \\ \hat{\gamma}(h_{n-1,x}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec $\gamma(h_{i,j})$ variogramme **expérimental** pour l'inter-distance entre x_i et x_j

Avec $\hat{\gamma}(h_{i,x})$ variogramme **théorique** pour l'inter-distance entre x_i et x

µ est un coefficient multiplicateur qui permet de réduire l'erreur.

II. Différents types d'interpolations

3. Interpolation **statistique – Krigeage**

En inversant le système car la matrice est symétrique définie positive* alors on peut calculer la quantité d'intérêt au point x

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x) * Q(x_i)$$

*en y ajoutant un nuggets sur la diagonale 10E-6

III. TP/TD

1. Application :

- Interpolation par méthode des triangles
- Interpolation par méthode de Krigeage

IV. Corrélation

Modèle intégrant des calculs thermiques, mécaniques, fluidiques, acoustiques…

Résolution du calcul :

- Soit lancer la boucle de calcul
- Soit découper en sous modèles et lancer un calcul sur chaque type (utilisant plusieurs logiciels ou scripts adaptés à chaque type de calcul)