Analyses statistiques des expériences numériques

Cours 3 : Planification d'expériences numériques

Bertrand Iooss

Polytech Nice Sophia

Décembre 2025

EDF
CHANGER L'ÉNERGIE ENSEMBLE

ENJEUX DE LA PLANIFICATION D'EXPERIENCES

Objectifs d'une planification d'expériences réfléchie

- **Définir un plan d'expériences =** placer les points d'expérimentation ou de simulation dans le domaine de variation des entrées

  $\Rightarrow$ **Minimiser le nb de points (experiences chères)**

  $\Rightarrow$ **Maximiser l'information collectée pour un nb de points donné**

- **Etablir les liens entre :**

– **Réponse / sortie du code :** grandeur physique étudiée

– **Facteurs / entrées du code :** grandeurs physiques modifiables par l'expérimentateur ou le simulateur sensées influer sur les variations de la réponse

  - *Différente nature* : continus, discrets ou qualitatifs
  - *Domaine de variation* : [borne inf ; borne sup] $\Rightarrow$ discrétisation en niveaux

Exercice

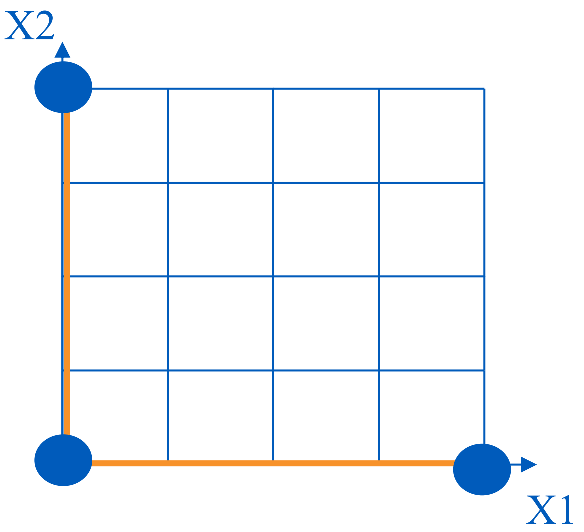
INTRODUCTION

Un plan maladroit : le plan « One-At-A-time » (OAT)

Idée naturelle, mais maladroite :

pour analyser les causes d'un phénomène, faire des expériences en **ne bougeant qu'un seule entrée à la fois.**

OAT apporte des informations, mais l'**exploration est pauvre : pourquoi ?**

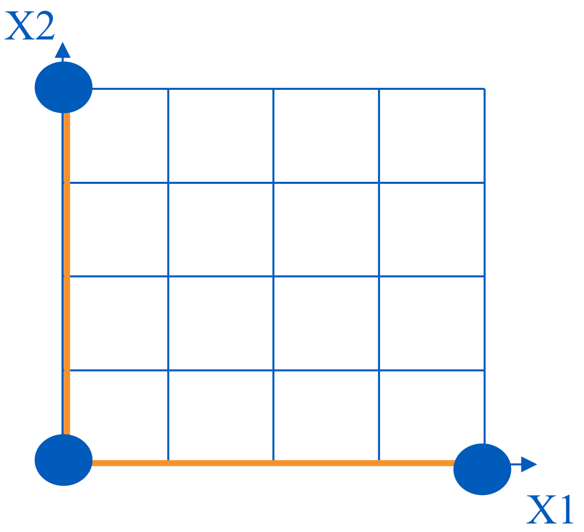


INTRODUCTION

Un plan maladroit : le plan « One-At-A-time » (OAT)

Idée naturelle, mais maladroite :

pour analyser les causes d'un phénomène, faire des expériences en **ne bougeant qu'un seule entrée à la fois.**



OAT apporte des informations, mais l'**exploration est pauvre :**

- ne détecte pas les non monotonies, discontinuités, interactions
- laisse de grandes zones inexplorées dans l'espace des paramètres d'entrée : fléau de la dimension

PLANS D'EXPÉRIENCES

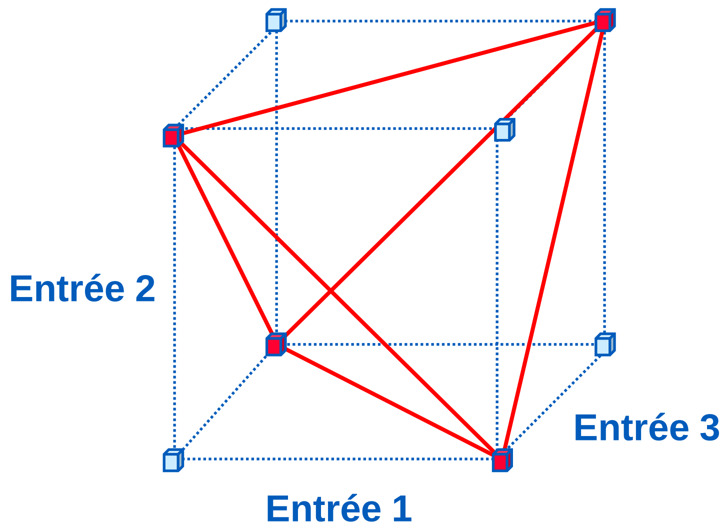
"La planification d'expériences peut être définie comme la stratégie pour configurer les expériences [réaliser des simulations] de telle manière que l'information requise soit obtenue aussi efficacement et aussi précisément que possible." (Lewis & Phan-Tan-Luu, 2000)

Plans classiques (entrées discrétisées suivant des niveaux)

Exemples :

Plan factoriel complet 2^3

Plan factoriel fractionnaire 2^{3-1}



Plans classiques (entrées continues)
Plans optimaux consistant à minimiser une variance ou le déterminant d'une matrice de covariance par rapport à un modèle spécifié (linéaire, polynôme d'ordre deux, …)

Plans pour simulations numériques : space filling designs

Spécificités

- expériences déterministes (erreur=0),
- grand nombre d'entrées (continues, catégorielles),
- larges domaines de variation,
- variables d'intérêt multiples,
- modèles fortement non linéaires, …

Biblio : Kleijnen (1970), McKay (1979), Morris(1995), …

Biblio : Fisher (1917), Box et Wilson (1954), Taguchi (1960), Mitchell (1958), …

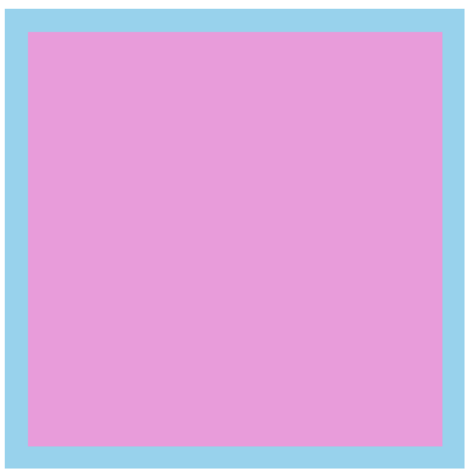
CURIOSITÉS DE LA MONTÉE EN DIMENSION

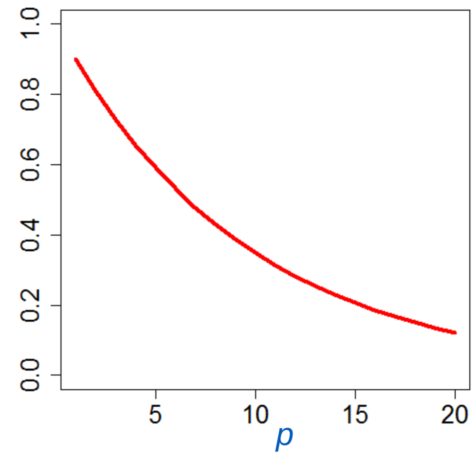
Illustration du fléau de la dimension
(curse of dimensionality)

Volume du cube de côté *c* en dimension *p* : c^p
Volume du cube de côté $c-\varepsilon$ en dimension *p* : $(c-\varepsilon)^p$

Rapport volume des 2 cubes
(c=1 et ε=0,1) :

p	1	2	4	8	16	20	30	40
Vcε/VC (%)	90	81	66	43	18	12	4	1,5



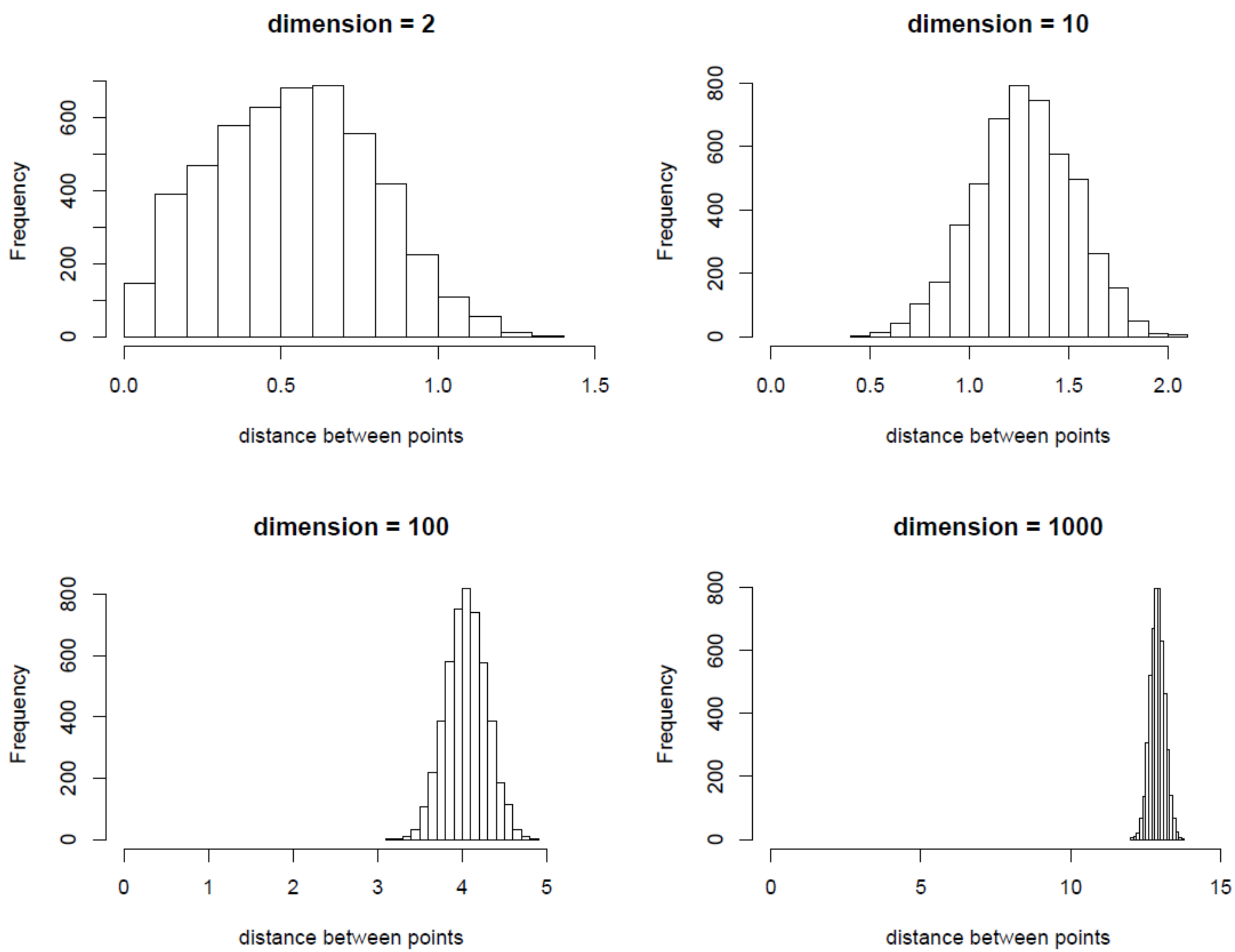


Vol(cube côté 0,9) / Vol(cube côté 1)

En grande dimension, tout le volume est dans l' « écorce »

=> Warning : la réduction du domaine de variations des paramètres a posteriori peut rendre les calculs déjà réalisés inutilisables

CONCENTRATION DES DISTANCES

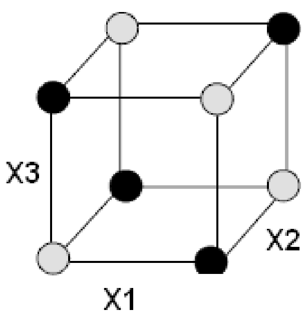


Histogrammes des distances 2 à 2 pour 100 points uniformément répartis dans $[0,1]^p$

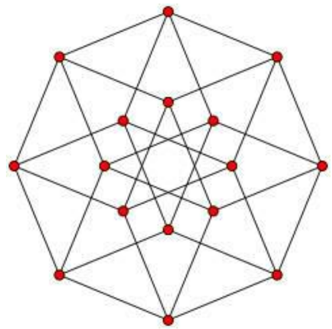
CURIOSITÉS DE LA MONTÉE EN DIMENSION

À quoi pourrait ressembler un hypercube en grande dimension ?

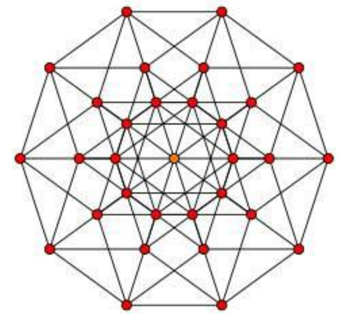
Dimension 3 :
8 sommets



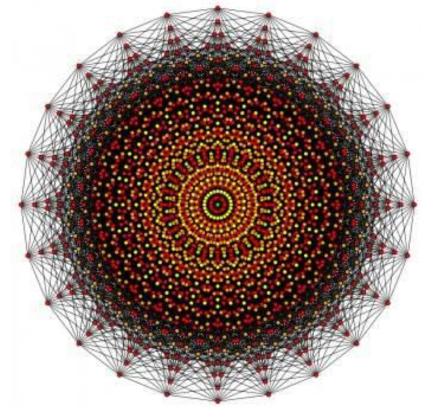
Dimension 4 :
16 sommets



Dimension 5 :
32 sommets



Dimension 12 :
4096 sommets



Ces espaces sont « étranges », peu intuitifs et essentiellement vides !

⇒ Ne pas espérer capturer des phénomènes locaux

⇒ Tout le volume est dans les piques

Exploration « optimale » d'un domaine hypercubique

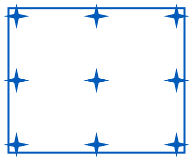
Placer des points dans le domaine des entrées **X** є R^p dans le but de « maximiser » la quantité d'information sur la sortie du modèle $Y = G$ (**X**)

La précision (et donc le coût) de l'exploration dépend de *p*

(contrairement à la prop. d'incert.)

Grille régulière à *n* niveaux → $N = n^p$ simulations

Ex: $p = 2$, $n = 3$
→ $N = 9$
$p = 10$, $n = 3$
→ $N = 59049$

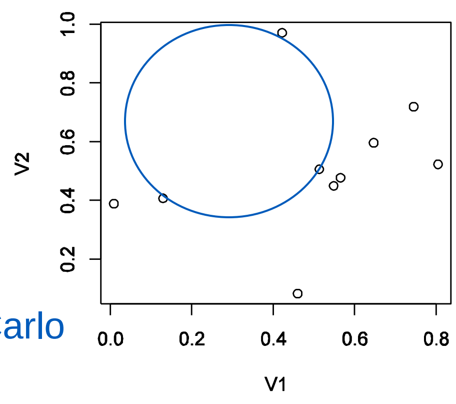


fléau de la dimension

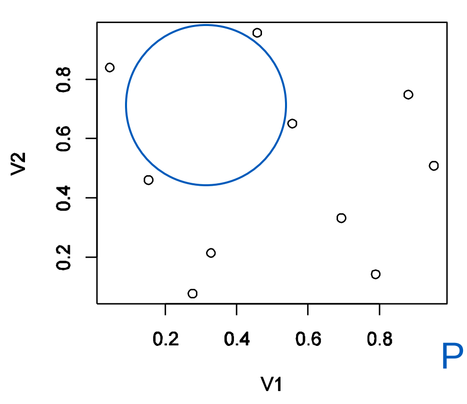
Pour minimiser *N*, on a besoin d'échantillons assurant une bonne couverture de l'espace des entrées

Un échantillon purement aléatoire (Monte Carlo) ne le permet pas

Ex: $p = 2$
$N = 10$



Monte Carlo



Plan optimisé

PLAN

- Propriétés attendues

- Suite à discrépance faible

- Plan hypercube latin (LHS)

PROPRIÉTÉS ATTENDUES ET RECHERCHÉES

1. **Couverture optimale de l'espace des paramètres d'entrée**

2. Robustesse en sous-projections

3. Séquentialité

PROPRIÉTÉ 1 : COUVERTURE OPTIMALE DE L'ESPACE

- Répartir « régulièrement » un certain nombre de points *N* dans l'espace *p*-dimensionnel des entrées (**X** $\in \chi \subset R^p$), pour construire le plan

$$D_N = \left(x_j^{(i)}\right)_{i=1\ldots N,\, j=1\ldots p}$$

- Dans la pratique en analyse d'incertitudes : *N* ~ 10 à 1000 et *p* ~ 2 à 50

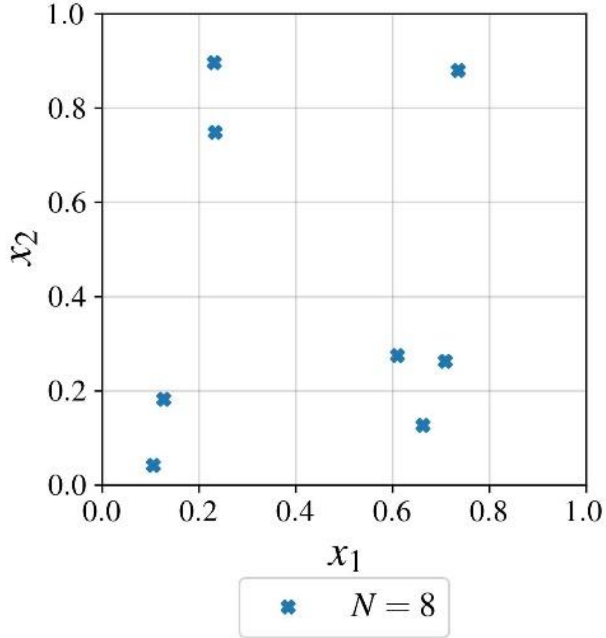
- Echantillons assurant une bonne couverture de l'espace des entrées

- De plus : besoin de robustesse de cette répartition vis-à-vis de la réduction de dimension car souvent, ce sont les effets d'ordre faible qui sont influents

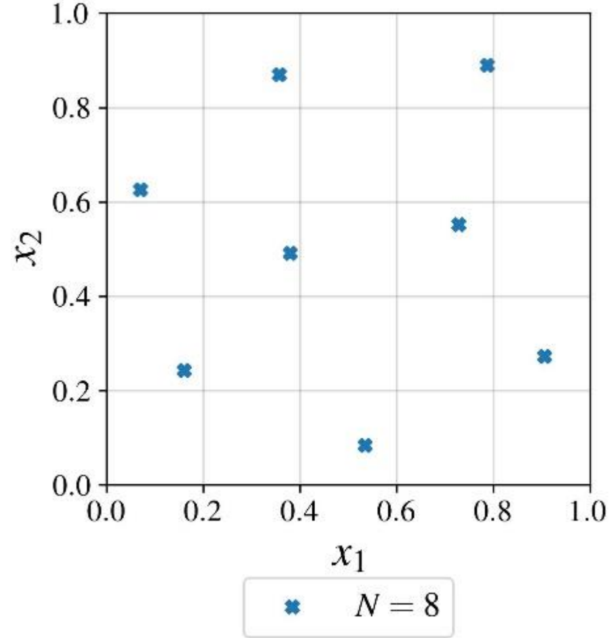
- Quelles sont les « bonnes » répartitions ? Différents critères possibles…

PROPRIÉTÉ 1 : COUVERTURE OPTIMALE DE L'ESPACE

- Exemple : p = 2 dimensions, N = 10 points.



Monte Carlo

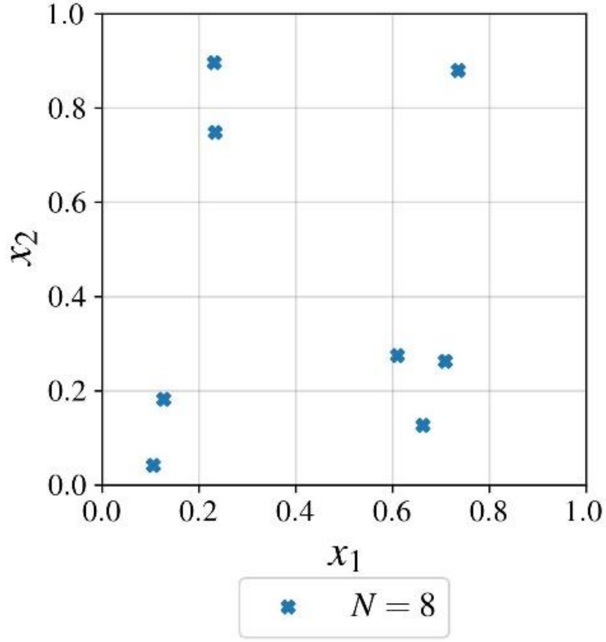


Plan optimisé

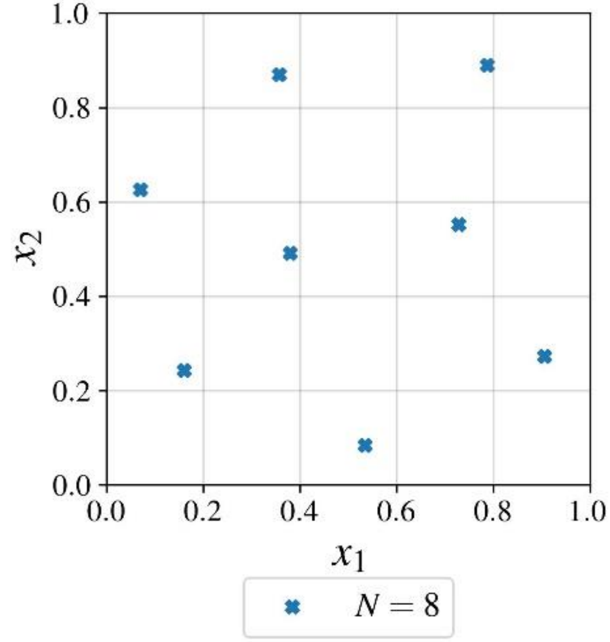
- **Question : qu'est-ce qui est optimisé à droite ?**

PROPRIÉTÉ 1 : COUVERTURE OPTIMALE DE L'ESPACE

- Exemple : p = 2 dimensions, N = 10 points.



Monte Carlo



Plan optimisé

- **Question : qu'est-ce qui est optimisé à droite ?**

- **Réponse : il n'y a pas de points « trop proches ».**

PROPRIÉTÉ 1 : CRITÈRES GÉOMÉTRIQUES

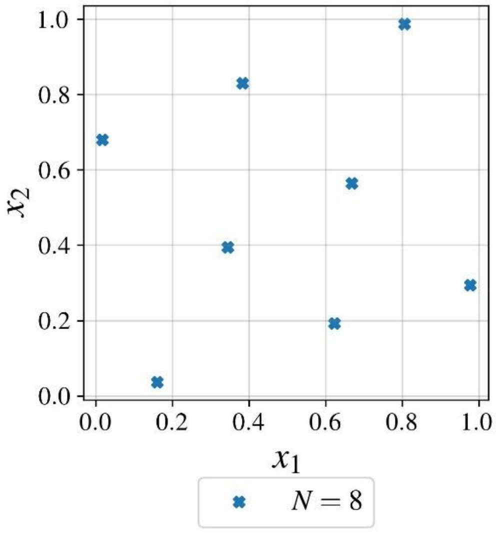
Minimax design D_{mM} : Minimise la distance maximale entre un point du domaine et un point du plan :

$$\min_D \max_x d(x, D)$$

$$\text{où } d(x, D) = \min_{y \in D} d(x, y)$$

[Johnson et al. 1990]
[Koehler & Owen 1996]

Aucun point du domaine $[0,1]^p$ n'est trop loin d'un point du plan D_{mM}

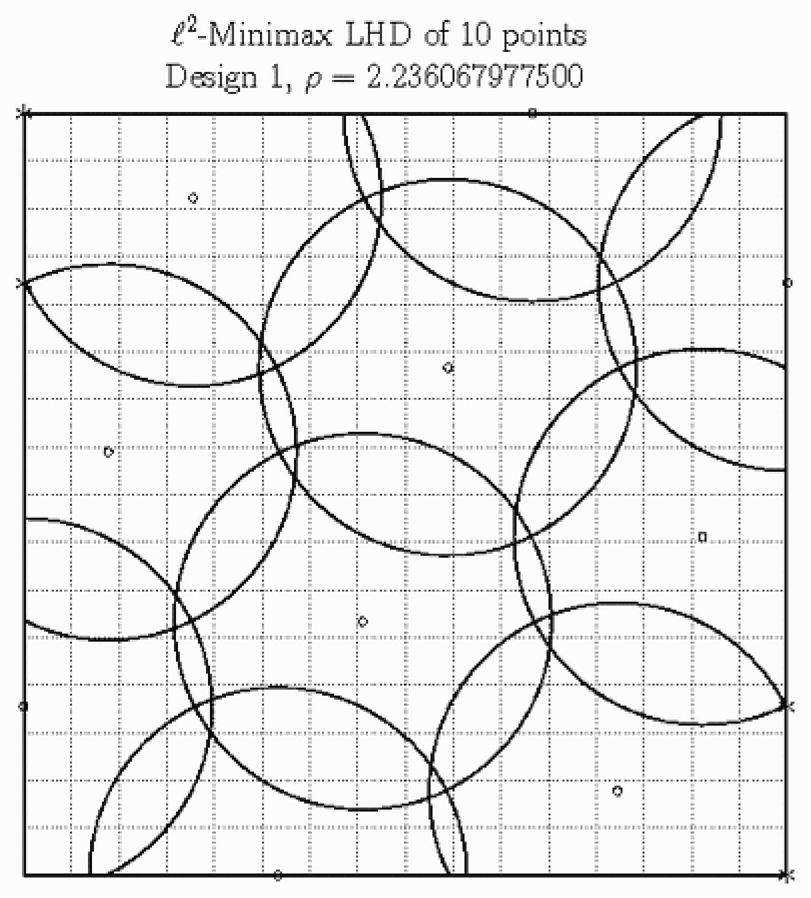


Un des meilleurs plans mais trop coûteux à construire pour p > 3.

Plans minimax

- $p = 1$; $X_i = (2i-1)/(2N)$; $\phi_{mM} = 1 / 2N$

- $p > 1$: recouvrement de sphères

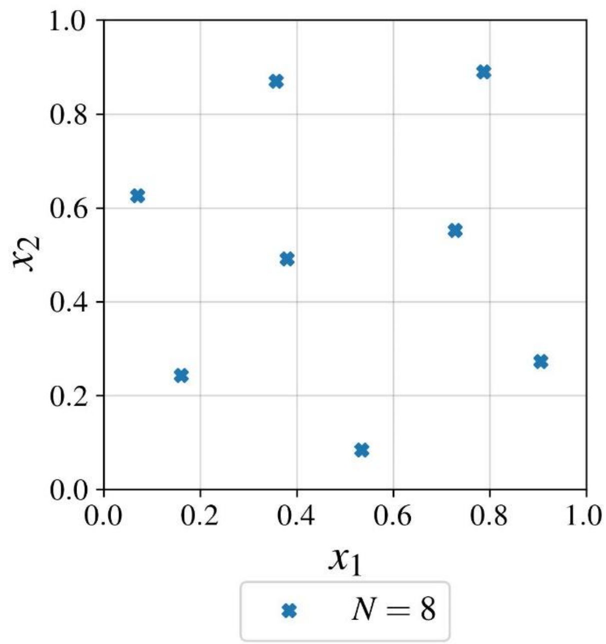


[www.spacefillingdesigns.nl]

PROPRIÉTÉ 1 : CRITÈRES GÉOMÉTRIQUES

- **Distance mindist :** $$\phi(D^N) = \min_{x,y \in D^N} d(x,y)$$ (norme L_2 usuellement)
- **Maximin design D_{Mm} :** maximise la distance minimale entre les points du plan

$$\max_{D^N} \min_{x,y \in D^N} d(x,y)$$

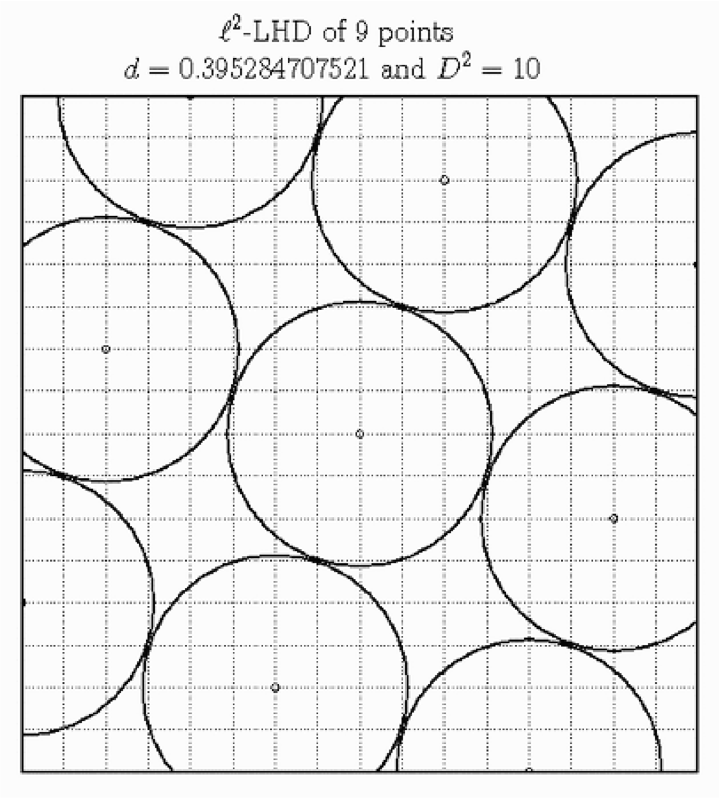


PLAN MAXIMIN

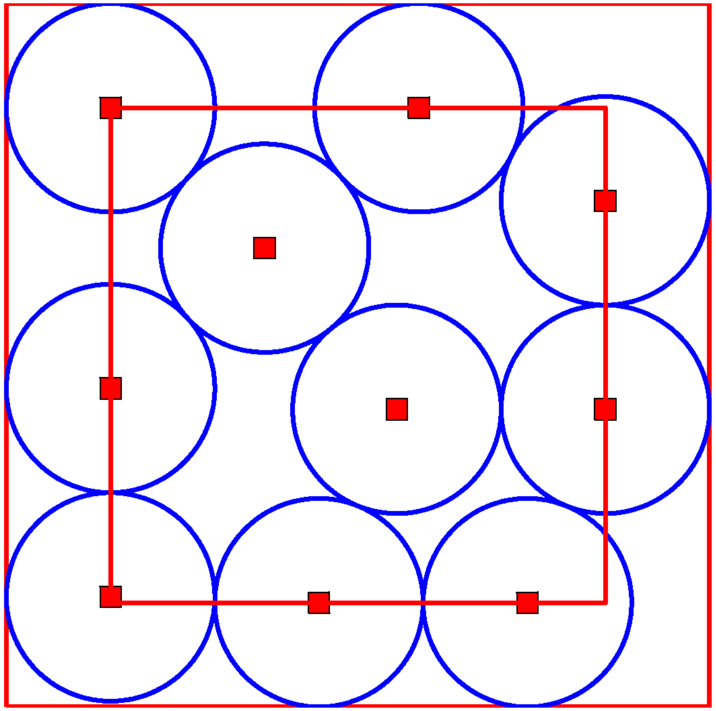
- $p = 1$; $X_i = (i-1)/(N-1)$; $\phi_{Mm} = 1 / (N-1)$

  [minimax : $X_i = (2i-1)/(2N)$; $\phi_{mM} = 1 / 2N$]

- $p > 1$: empilage de sphères



[www.spacefillingdesigns.nl]



[www.packomania.com]

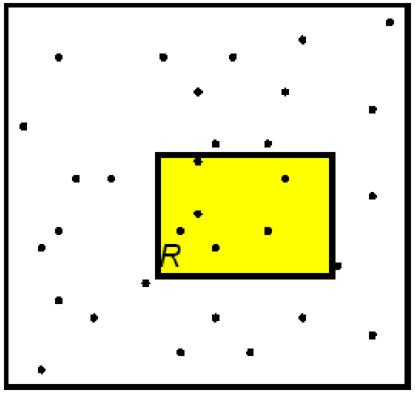
PROPRIÉTÉ 1 : CRITÈRE DE DISCRÉPANCE

Discrépance : critère statistique qui mesure la **déviation maximale** entre la répartition des points de l'échantillon et une **répartition uniforme**

Interprétation géométrique : Comparaison entre volume des intervalles du domaine et nbre de pts contenus dans ces intervalles

$$Q(\mathbf{t}) \subset \chi = [0,1[^p \,,\, Q(\mathbf{t}) = [0,t_1[\times[0,t_2[\times\ldots\times[0,t_p[$$

$$\text{discrépance(plan)} = \sup_{Q(\mathbf{t})\in[0,1[^p} \left| \frac{N_{Q(\mathbf{t})}}{N} - \prod_{i=1}^{p} t_i \right|$$



Discrépance faible *= bonne répartition uniforme des points dans l'espace, distribution régulière*

PROPRIÉTÉ 1 : CRITÈRE DE DISCRÉPANCE

Discrépance : critère statistique qui mesure la **déviation maximale** entre la répartition des points de l'échantillon et une **répartition uniforme**

Soit D_n la suite de points $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en dimension 1, répartis sur [0,1]

Si l'on considère la fonction de répartition empirique ,, on peut définir la discrépance par :

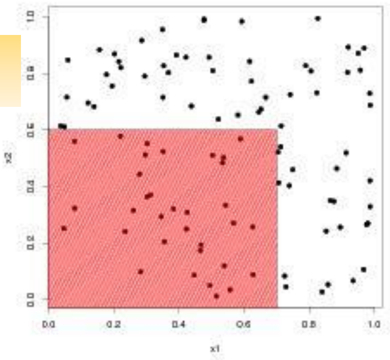
Avec F_U la fonction de répartition de la loi uniforme sur [0,1]

Une suite est uniformément répartie sur $[0,1[^p$ si $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Disc}(D_n) = 0$

Suite Monte-Carlo « *pur* » : $D_n \sim 1/\sqrt{n}$

En pratique, choix permettant de faire des calculs : **discrépance L^2**

$$D_2^*\left(\Xi^N\right) = \left[\int_{[0,1[^p} \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1_{\mathbf{x}^{(i)}\in Q(\mathbf{t})} - \mathrm{Volume}(Q(\mathbf{t}))\right]^2 d\mathbf{t}\right]^{1/2}$$



Discrépances L_2

Plusieurs définitions, dépendant de la norme et des intervalles considérés

$$D^*\left(\Xi^N\right) = \sup_{\mathbf{t}\in[0,1[^p} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1_{\mathbf{x}^{(i)}\in Q(\mathbf{t})} - \mathrm{Volume}(Q(\mathbf{t})) \right|$$

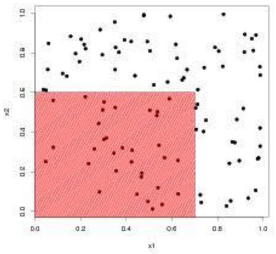
Choix permettant de faciliter les calculs : discrépance L^2 *[Hickernell 1998]*

Discrépance L_2 à l'origine : $D_2^*\left(\Xi^N\right) = \left[\int_{[0,1[^p} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1_{\mathbf{x}^{(i)}\in Q(\mathbf{t})} - \mathrm{Volume}(Q(\mathbf{t})) \right]^2 d\mathbf{t} \right]^{1/2}$

<u>Une propriété manquante :</u> prise en compte de l'uniformité des projections des points sur des sous-espaces de $[0,1[^p$

=> Discrépance L_2 modifiée

$$D_2\left(\Xi^N\right) = \left[\sum_{u\neq\emptyset} \int_{C^u} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 1_{\mathbf{x}_u^{(i)}\in Q_u(\mathbf{t})} - \mathrm{Volume}(Q_u(\mathbf{t})) \right]^2 d\mathbf{t} \right]$$



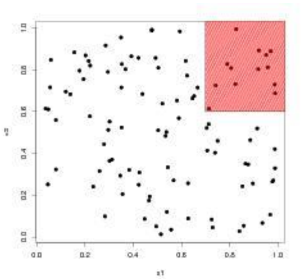
avec $u \subset \{1,\ldots,p\}$

et $Q_u(\mathbf{t})$ la projection de $Q(\mathbf{t})$ sur C^u (cube unité de coordonnées dans u)

Calculs de la discrépance en pratique

- Discrépance L_2 centrée (intervalles ancrés en un sommet de l'hypercube)

Formule analytique :

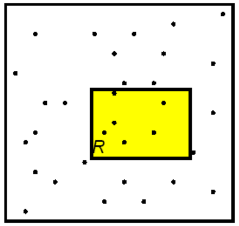


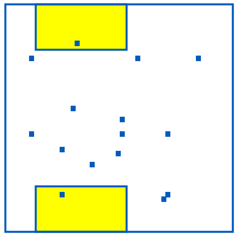
$$C^2(\Xi^N) = \left(\frac{13}{12}\right)^p - \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{p}\left(1+\frac{1}{2}\left|x_k^{(i)}-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\left|x_k^{(i)}-\frac{1}{2}\right|^2\right)$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\prod_{k=1}^{p}\left(1+\frac{1}{2}\left|x_k^{(i)}-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\left|x_k^{(j)}-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|\right)$$

- Discrépance L_2 wrap-around (supprime les effets de bord en enveloppant le cube unité)

$$W^2(\Xi^N) = \left(\frac{4}{3}\right)^p + \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\prod_{k=1}^{p}\left[\frac{3}{2}-\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|\left(1-\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|\right)\right]$$





LIEN ENTRE DISCRÉPANCE ET CALCUL D'UNE INTÉGRALE

Objectif : estimer une intégrale : $I = \int_{[0,1[^p} G(x)dx$

Estimateur Monte-Carlo : $I_N^{\mathrm{MC}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(x^{(i)})$

où $x^{(i)}$ sont i.i.d. dans $[0,1[^p$

Propriétés de l'estimateur :

$$\mathrm{E}\left(I_N^{\mathrm{MC}}\right) = I \qquad \mathrm{Var}\left(I_N^{\mathrm{MC}}\right) = \frac{\mathrm{Var}(G)}{N} \qquad \varepsilon = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

Propriété générale (Koksma-Hlawka) :

$$\varepsilon \leq V(G)\,\mathrm{disc}(D)$$

Avec une suite à faible discrépance *D* (quasi-Monte Carlo) : $\varepsilon = O\left(\frac{(\ln N)^p}{N}\right)$

Une suite est uniformément répartie sur $[0,1[^p$ si $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Disc}(D_n) = 0$

Choix bien connus : suite de Sobol', Halton, Faure, …

PROPRIÉTÉS ATTENDUES ET RECHERCHÉES

1. Couverture optimale de l'espace des paramètres d'entrée

2. **Robustesse en sous-projections**

3. Séquentialité

PROPRIÉTÉ 2 : ROBUSTESSE EN SOUS-PROJECTIONS

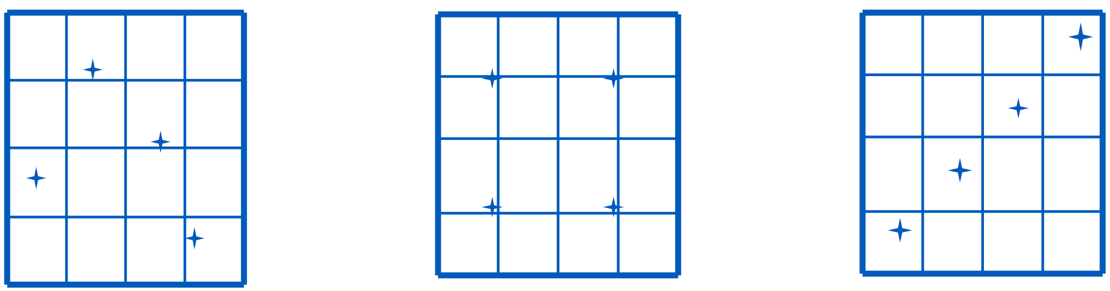
Le code de calcul *G* (**X**) a souvent de faibles dimensions effectives :

- au sens de la troncature (nombre de variables influentes **<< *p*)**

- au sens de la superposition **(+ gd ordre d'interaction influente << *p*)**

Il est donc nécessaire que le SFD conserve les propriétés space-filling sur les sous-espace de faibles dimensions (par importance : en dimension *p* '=1, puis *p* '=2, ...)

- *p* ' = 1 – Bonnes projections 1D



Question : Quel plan a de bonnes projections 1D ?

- *p* ' ≥ 2 - Les discrépances L^2 modifiées (centrée, wrap-around, …) prennent en compte les sous-projections dans leurs définitions

  Par contre, les critères de distances vus précédemment n'assurent pas de robustesse en sous-projections

PROPRIÉTÉS ATTENDUES ET RECHERCHÉES

1. Couverture optimale de l'espace des paramètres d'entrée

2. Robustesse en sous-projections

3. **Séquentialité**

PROPRIÉTÉ 3 : SÉQUENTIALITÉ DU PLAN

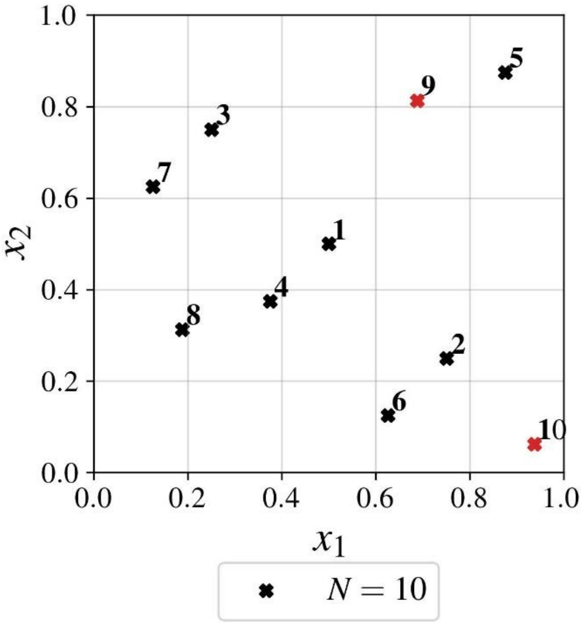
- Commencer par un plan de taille réduite (ex : taille 10)

- Augmenter la taille du plan en recyclant les calculs précédents

Exemple : suite de Sobol

On rajoute 2 points

On rajoute 2 points



PLAN

- Propriétés attendues

- Suite à discrépance faible

- Plan hypercube latin (LHS)

CONSTRUCTION D'UNE SUITE À DISCRÉPANCE FAIBLE

Séquence 1D de Van der Corput en base *b* = 2

Base b : $i = (\ldots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)_b$

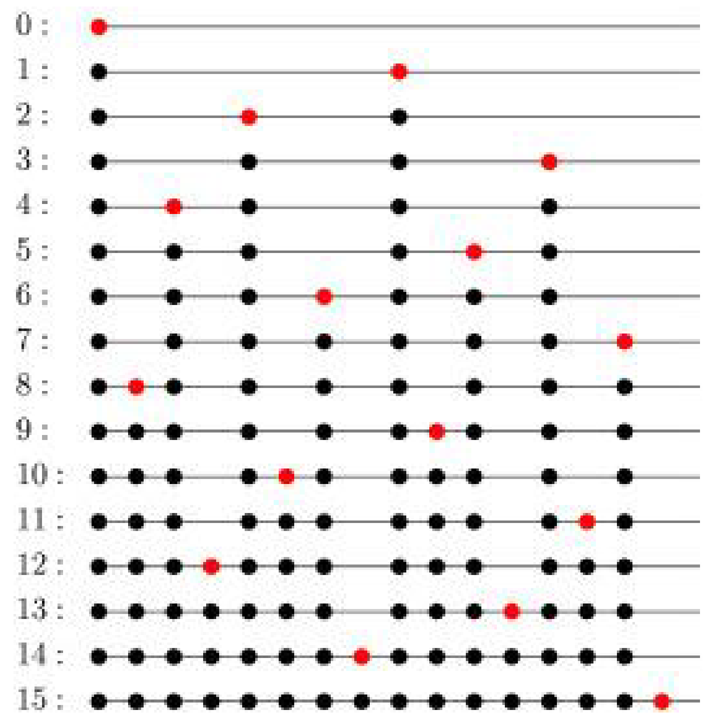
Syst. décimal : $i = \sum_{j=0}^{m} a_j b^j \, , 0 \leq a_j \leq b-1$

$\Rightarrow$

$y = (0.a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots)_b$

Syst. décimal : $h(i,b) = \sum_{j=0}^{m} a_j b^{-j-1}$

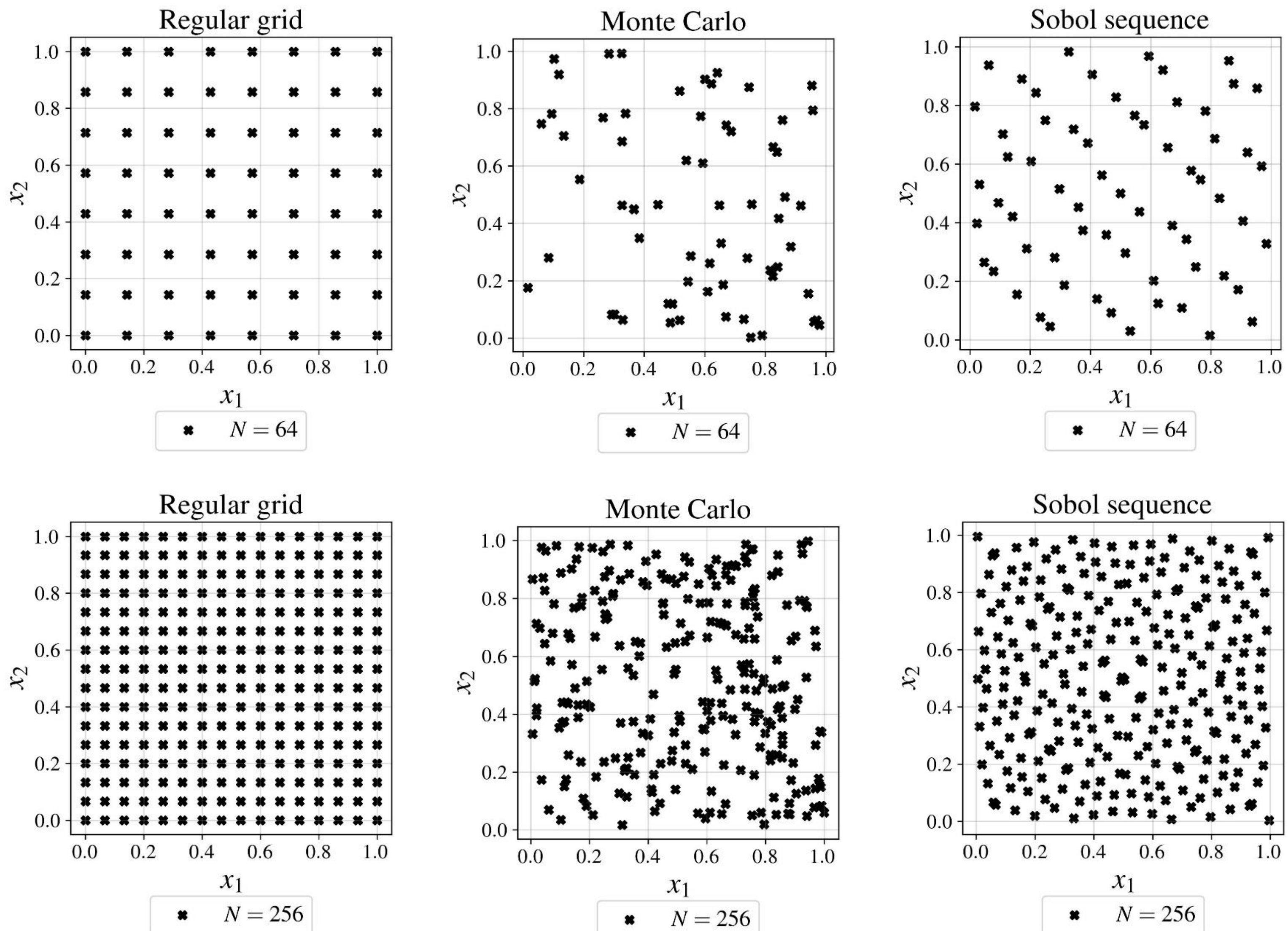
i	binary form of i	radical inverse	x_i
0	0	0.0	0
1	1	0.1	0.5
2	10	0.01	0.25
3	11	0.11	0.75
4	100	0.001	0.125
5	101	0.101	0.625
6	110	0.011	0.375



Suite de Halton (dimension p) : pour chaque dimension, prendre une base (nombre premier) différente : $\{h(i,2), h(i,3), \ldots, h(i,b_p)\}$

EXEMPLES 2D

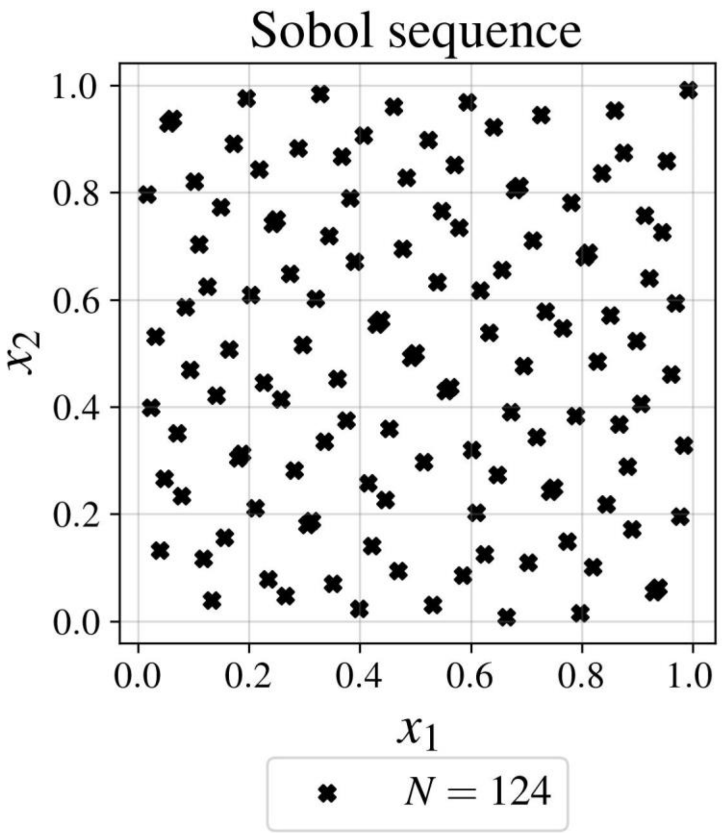
Suite de Sobol vs. échantillon aléatoire vs. grille

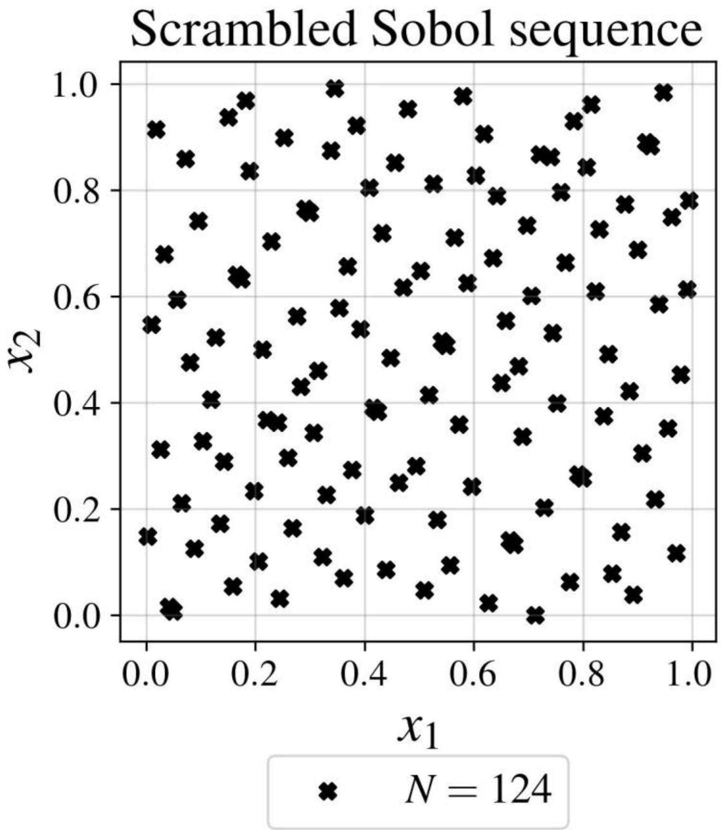


EXEMPLES 2D

Suites à discrépance faible

dimension p = 8

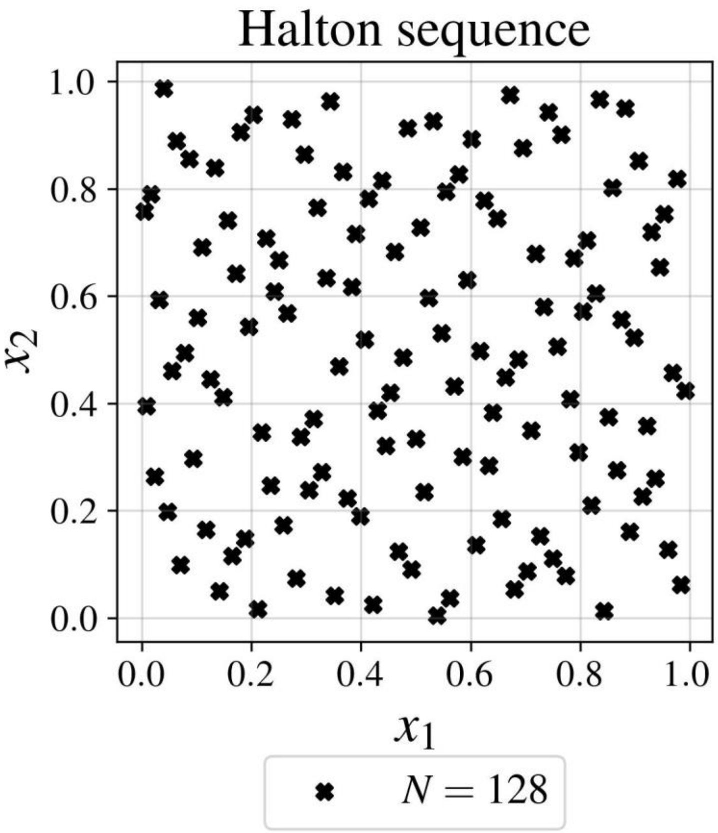


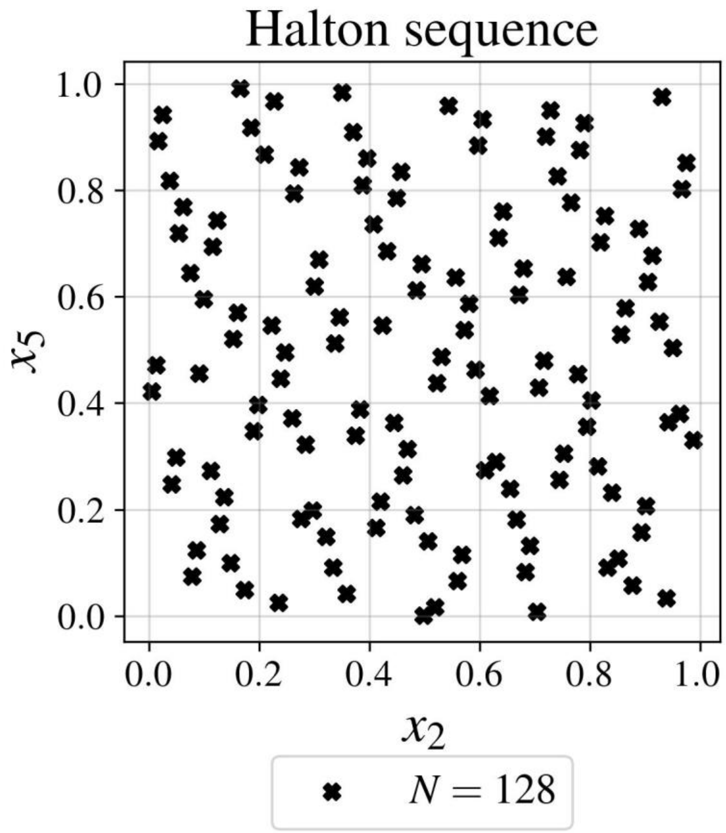


EXEMPLES 2D

Suites à discrépance faible

dimension p = 8

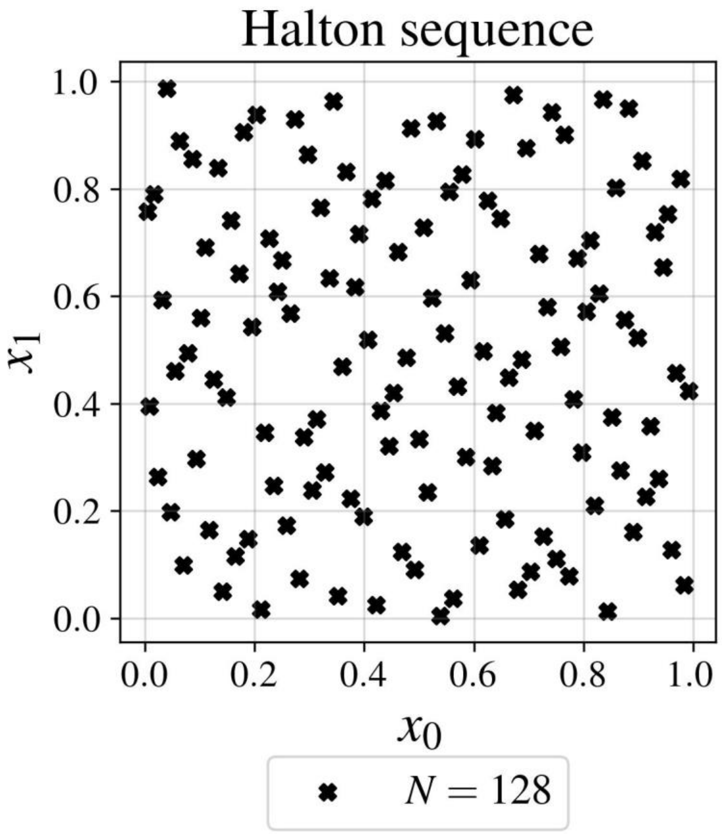


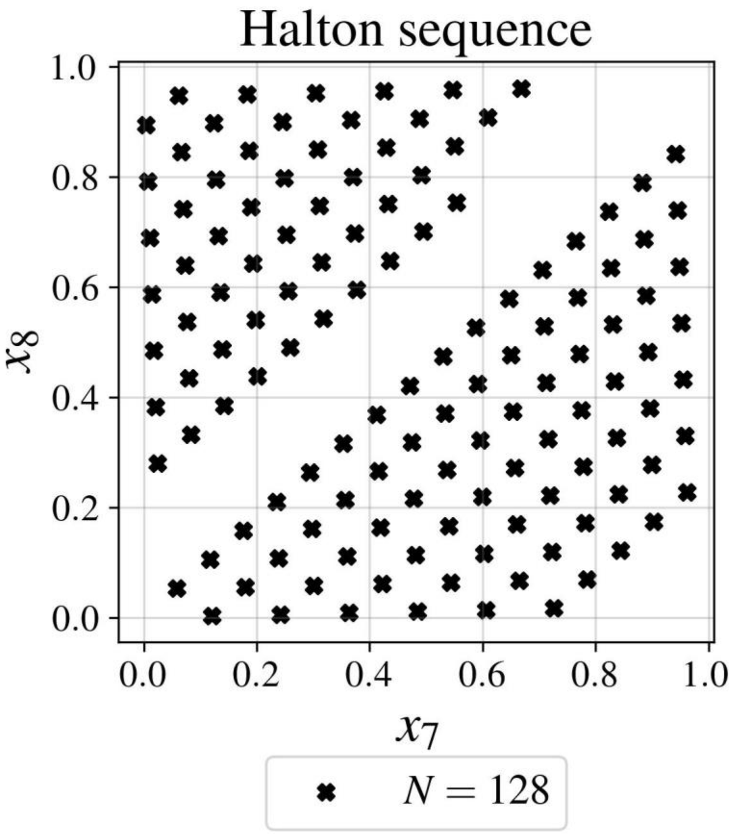


EXEMPLES 2D

Suites à discrépance faible

Pathologies sur les projections 2D
=> Manque de robustesse dans les sous-projections





SUITES À DISCRÉPANCE FAIBLE

Comment choisir une séquence ?

- Plus la base est petite, plus la discrépance est petite.
- Choix par défaut : Sobol (sauf si on a de bonnes raisons de faire autrement).
- Si on veut plus de points, on utilise les points suivants dans la séquence : séquentialité

Nom	Base
Halton	b(1),b(2),…,b(p)
Sobol	b=2
Faure	Plus petit b ≥ p
Niederreiter	b≥ 2, puissance d'un premier

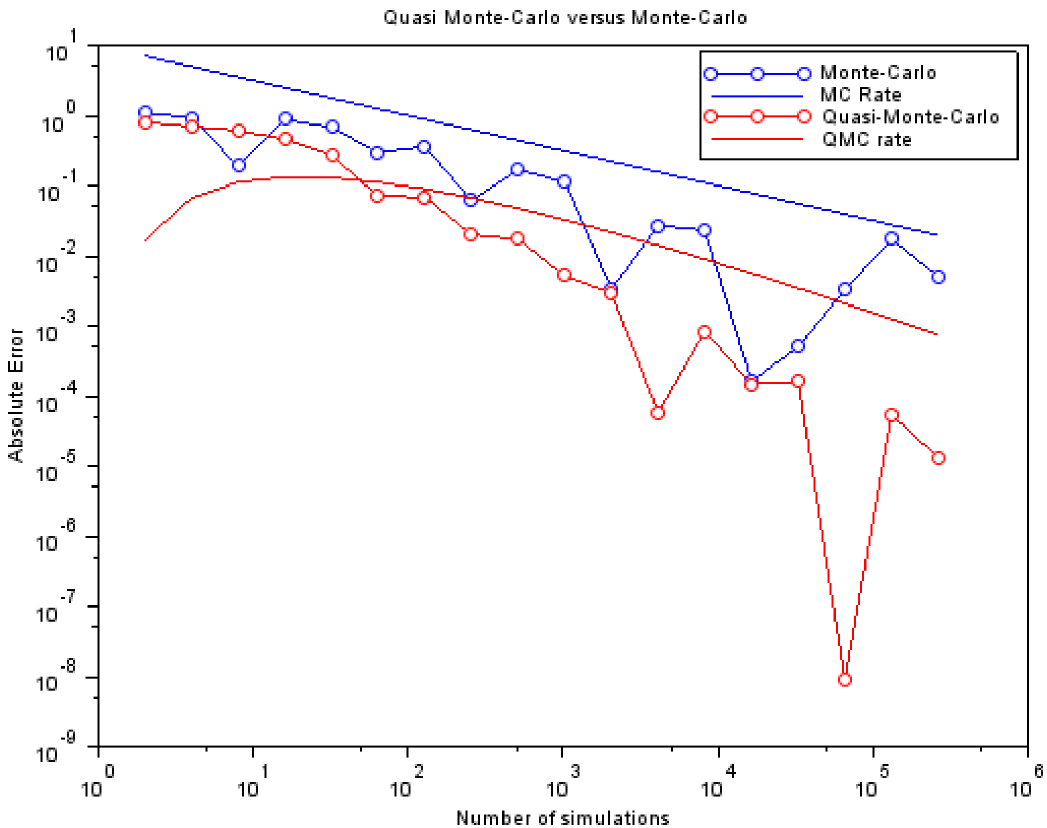
- Mettre les variables les plus importantes en premier.
  - Premières composantes utilisent une base plus petite (Halton), ou un polynôme irréductible de degré plus petit (Sobol, Nieder.).
  - Les variables importantes ont de meilleures projections 1D, 2D, …

SUITES (OU SÉQUENCES) À DISCRÉPANCE FAIBLE

Est-ce efficace ?

Pour l'intégration : souvent proche de $1/N$ pour $p < 40$.

Exemple : fonction d'Ishigami, dimension 3.



PLAN

- Propriétés attendues
- Suite à discrépance faible
- **Plan hypercube latin (LHS)**

PLANS HYPERCUBE LATINS (LHS)

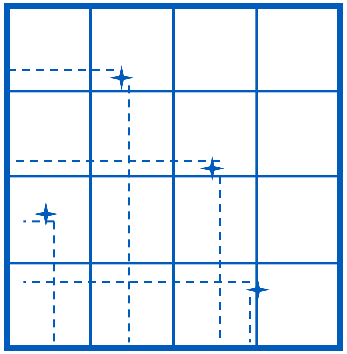
[McKay et al. 1979]

Souvent, seules quelques variables sont influentes

Propriété : Projections uniforme sur les marginales

Principe : p variables, N points $\Rightarrow$ $LHS(p,N)$

- On divise chaque dimension en N intervalles
- Tirage aléatoire d'un point dans chaque strate



Exemple : p =2, N =4

Chacun des niveaux est pris une seule fois par chaque facteur : **chacune des colonnes du plan est donc une permutation de {1,2,..,*N*}**

PLANS HYPERCUBE LATINS (LHS)

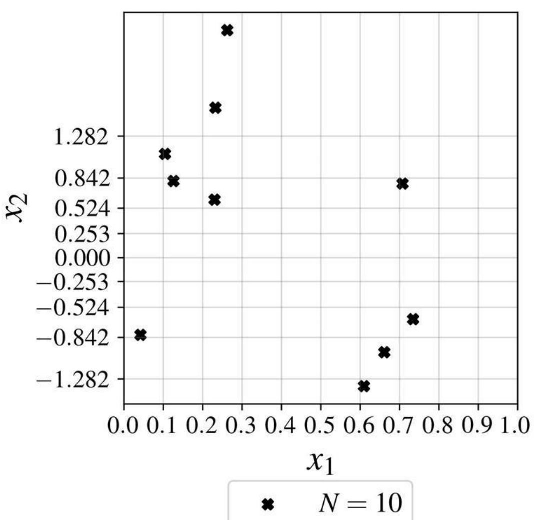
Plans LHS : algorithme LHS(P,N) – méthode de Stein

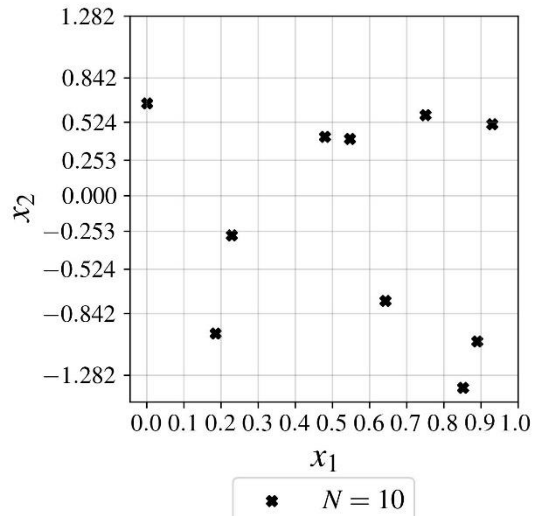
```
ran = matrix(runif(N*p),nrow=N,ncol=p) #tirage de N x p valeurs selon loi U[0,1]
x = matrix(0,nrow=N,ncol=p)            # construction de la matrice x

for (i in 1:p) {
      idx = sample(1:N) #vecteur de permutations des entiers {1,2,…,N}
      P = (idx-ran[,i]) / N    # vecteur de probabilités
      x[,i] <- quantile_selon_la_loi (P)   }
```

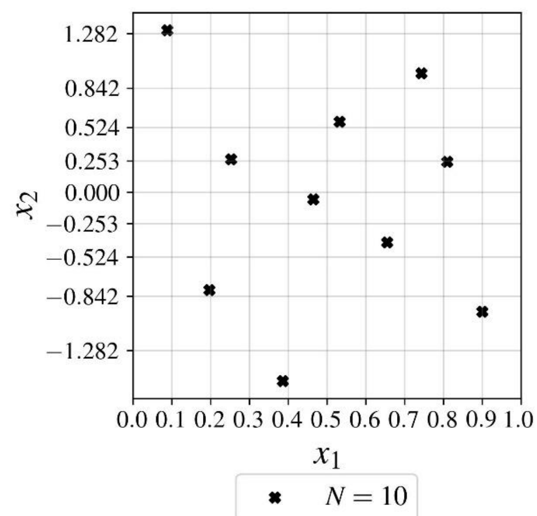
<u>Exemple :</u> *p* =2, *N* =10, X_1 ~ U[0,1], X_2 ~ N(0,1)

Monte Carlo



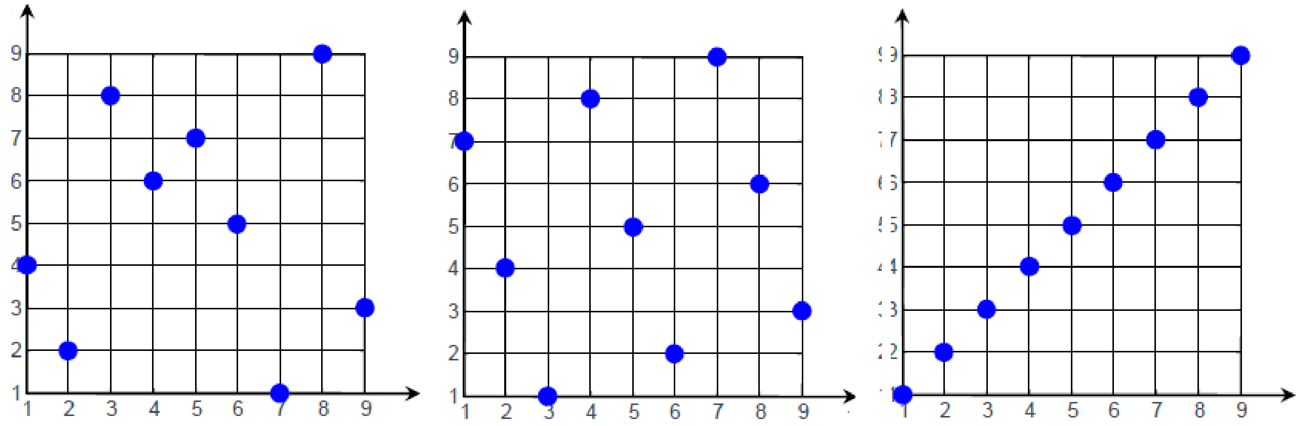


LHS



PLANS HYPERCUBE LATINS (LHS)

[McKay et al. 1979]

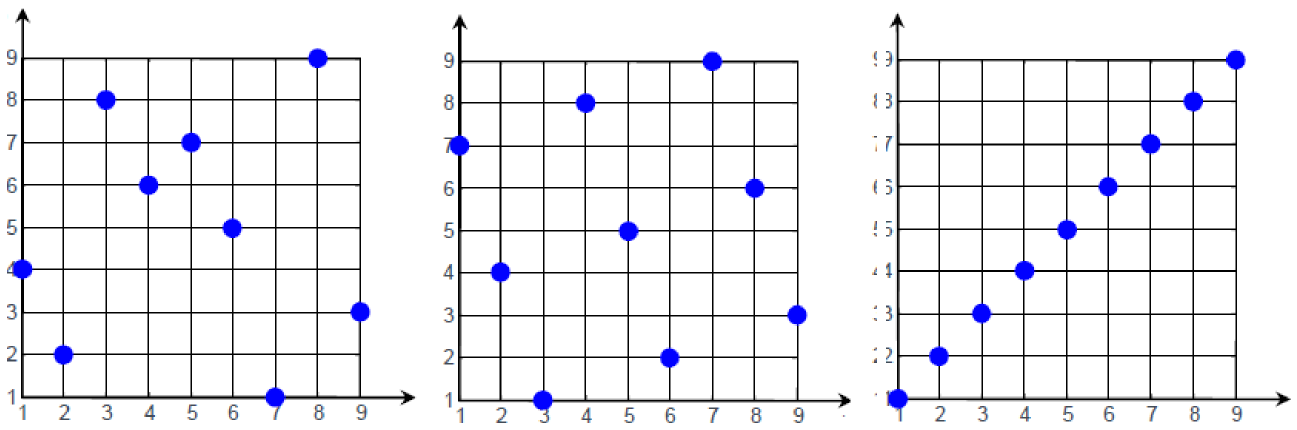


Quel est le meilleur plan d’expérience ?

- Gauche
- Centre
- Droit

PLANS HYPERCUBE LATINS (LHS)

[McKay et al. 1979]



Quel est le meilleur plan d'expérience ?

- Gauche : certains points sont trop proches
- **Centre : bon remplissage**
- Droit : X2=X1 !

Choix du LHS par optimisation de différents critères

- Remplissage
- Indépendance
- Uniformité

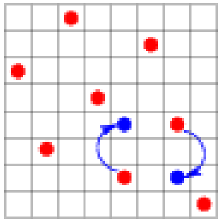
PLANS LHS OPTIMISÉS => SPACE-FILLING LHS

<u>Méthode simple :</u> générer un grand nombre (par ex. 1000) de LHS différents. Puis, choisir le meilleur au sens d'un critère *f* (.) (« space filling »)

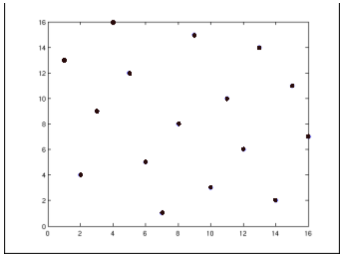
MAIS : le nombre de LHS possibles est énorme : $(N!)^p$

<u>Méthode par algos d'optimisation</u> (ex : minimisation de *f*(.) par recuit simulé) :

1. Initialisation d'un plan *X* (LHS initial) et d'une température *T*
2. Tant que *T* > 0 :
   1. générer un voisin X_{new} de X (voisin = permutation de 2 composantes dans une colonne)
   2. remplacer X par X_{new} avec la probabilité $\min\left(\exp\left[-\frac{\phi(\Xi_{new})-\phi(\Xi)}{T}\right],1\right)$
   3. faire décroître *T* (par ex. profil géom. : $T = T_0 c^i$ où $0<c<1$ et i n° d'itération)

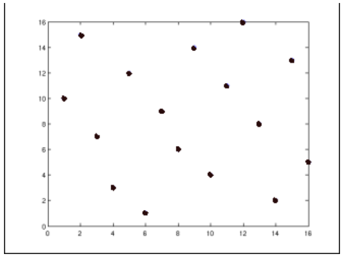


3. Critère d'arrêt => X contient la solution optimale générée par le recuit simulé



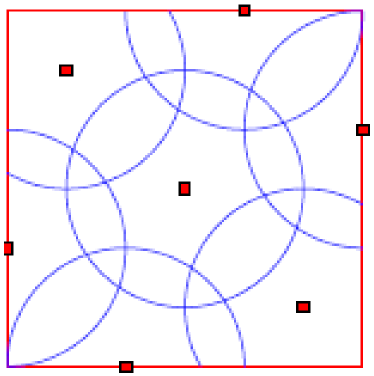
Maximin LHS

Exemple : LHS(2,16)

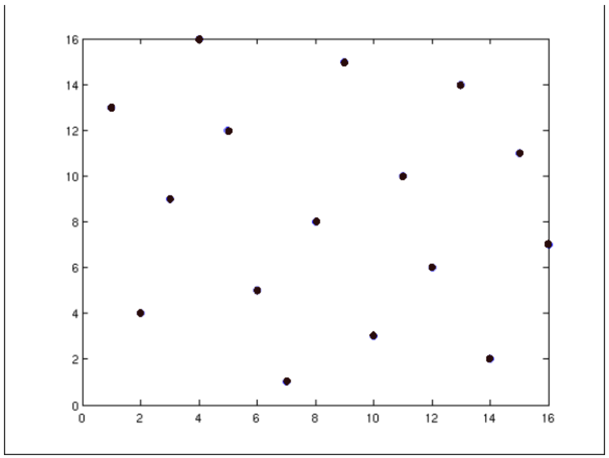


LHS à faible discrépance

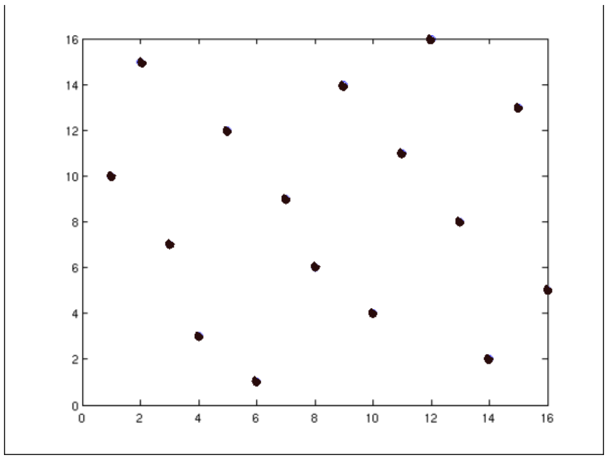
Exemples



Maximin LHS
p=2 ; N=7



Maximin LHS
p=2 ; N=16



LHS à discrép. faible
p=2 ; N=16

Sur des tests numériques (N =100), on voit qu'à partir de la dimension 10, le LHS maximin se comporte comme un LHS standard (dimension 40 pour un LHS à discrépance centrée faible)

Cela confirme la pertinence de la discrépance L^2 centrée en terme de sous-projection

En pratique, par exemple, on peut lancer plusieurs (~10) optimisations suivant un critère de discrépance, et on compare les résultats suivant un critère de distance afin de choisir le meilleur plan

SYNTHÈSE

Enjeu : Echantillonner un espace de grande dimension de manière « optimale » (obtenir le plus d'informations possible sur le comportement de la sortie *Z* / X $\in$ R^p)

Problème : un échantillon aléatoire pur (Monte Carlo) remplit mal l'espace

1. Plans « space filling » sont de bons candidats pour bien remplir l'espace :

- Basés sur un critère de distances entre les points du plan (minimax, maximin, …), *justification théorique pour la construction du métamodèle de krigeage*

- Basés sur un critère de répartition uniforme des points (discrépance) ; *justification théorique lorsque l'on calcule la moyenne de la fonction G(X)*

2. Propriété de projections uniformes sur les marges peut être obtenue via les plans hypercubes latins (LHS)

3. Il est possible de coupler les 2 propriétés en construisant des LHS optimisés

RÉCAPITULATIF

	Motifs, alignement	Plan séquentiel	Réduction dimension
Monte Carlo	Non	Oui	Oui
Faure, Halton, Sobol	Oui, en dim. élevée	Oui	Oui, mais pathologies
LHS à discrép centrée faible	Non	Non	Oui
LHS maximin	Oui	Non	Non

Crédits & Bibliographie

Ouvrages :

- Faivre et al., *Analyse de sensibilité et exploration de modèles – Applications aux sciences de la nature et de l'environnement,* Editions Quaé, 2013.
- Fang et al., *Design and modeling for computer experiments*, Chapman & Hall, 2006
- C. Lemieux, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*, Springer-Verlag, 2009
- S. Da Veiga, F. Gamboa, B. Iooss and C. Prieur. *Basics and trends in sensitivity analysis - Theory and practice in R*, SIAM, 2021

Articles :

- G. Damblin, M. Couplet & B. Iooss, Numerical studies of space filling designs: optimization algorithms and subprojection properties, *Journal of Simulation, 7, 2013*
- Koehler, J. and Owen, A. Computer experiments. In Ghosh, S. and Rao, C., editors, Design and Analysis of experiments, volume 13 of Handbook of statistics. Elsevier, 1996
- McKay, M., Beckman, R., and Conover, W. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code.Technometrics, 21,1979
- L. Pronzato & W. Müller. Design of computer experiments: space filling and beyond. *Statistics and Computing*, 22, 2012