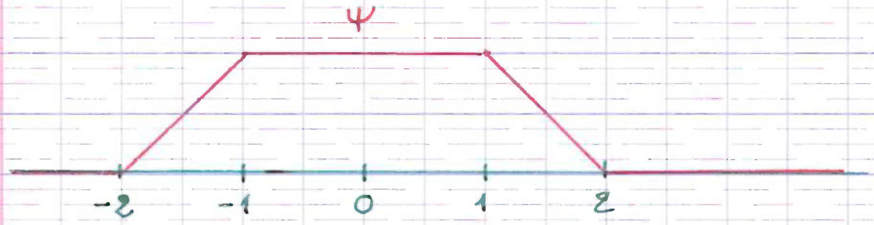
Etape 3



On rappelle que d'après la formule de Taylor-Lagrange, pour un entier n et une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a,b]$ alors il existe c appartenant à $]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

Pour un entier $N > 0$, on reprend nos points $x_j = j/N$, $0 \leq j \leq N$ et on note pour une fonction f suffisamment régulière, pour x appartenant à $[0,1]$

$$P_j(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_j)}{k!} \left(x - j/N\right)^k$$

Pour x appartenant à $[0,1]$, posons

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) P_j(x)$$, on remarque que

$$|f(x) - f_1(x)| = \left| \underbrace{\sum_{j=0}^{N} \psi_j(x)}_{=1} f(x) - \sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) P_j(x) \right|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) |f(x) - P_j(x)| \leq \sum_{j / |x - j/N| < 1/N} |f(x) - P_j(x)|$$

$$\leq 2 \max_{j / |x-j/N| < 1/N} |f(x) - P_j(x)| \leq \frac{2}{n!} \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\frac{2}{n!}\left(\frac{1}{N}\right)^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

(plus f est régulière plus N peut être choisi petit) et donc

$\| f - f_1 \|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ Il reste maintenant à construire un

réseau de neurones approchant f_1 à $\varepsilon/2$ près

On a
$$f_1(x) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_j)}{k!} \underbrace{\varphi_j(x)}_{\substack{\text{combinaison}\\ \text{linéaire de}\\ \text{fonctions } \sigma\\ \text{à une constante}\\ \text{près}}} \prod_{\ell=1}^{k} \underbrace{(x - x_j)}_{\substack{\text{combinaison}\\ \text{linéaire de}\\ \text{fonctions } \sigma\\ \text{à une constante}\\ \text{près}}}$$

et avec ω, on a un moyen d'approcher f_1.

Introduisons pour k et j donnés

$$f_{\omega,k,j}(x) = \omega\big(\varphi_j(x), \underbrace{\omega(x-x_j, \omega(x-x_j, \ldots \omega(x-x_j, x-x_j)\ldots}_{k-1 \text{ fois}}$$

et

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_j)}{k!} f_{\omega,k,j}(x)$$ qui appartient à nos réseaux

on a

$$|f_1(x) - \tilde{f}(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overbrace{|f^{(k)}(x_j)|}^{\leqslant 1}}{k!} \left| \varphi_j(x)(x-x_j)^k - f_{\omega,k,j}(x) \right|$$

$$\leqslant 2 \max_{j \,|\, |x-x_j| < 1/N} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \varphi_j(x)(x-x_j)^k - f_{\omega,k,j}(x) \right|$$

Il reste à majorer les différents termes, par exemple

notation

$$\Psi_j(x)(x-x_j)^2 - \omega\left(\Psi_j(x), \omega(x-x_j, x-x_j)\right) = Err_j$$

$$= \Psi_j(x)(x-x_j)^2 - \Psi_j(x)\,\omega(x-x_j, x-x_j)$$

$$+ \Psi_j(x)\,\omega(x-x_j, x-x_j) - \omega\left(\Psi_j(x), \omega(x-x_j, x-x_j)\right)$$

On sait que $|\Psi_j(x)| \leqslant 1$, $|x-x_j| \leqslant 1$ d'où

$$|Err_j| \leqslant |(x-x_j)^2 - \omega(x-x_j, x-x_j)|$$
$$+ |\Psi_j(x)\,\omega(x-x_j, x-x_j) - \omega(\Psi_j(x), \omega(x-x_j, x-x_j))|$$

Chaque terme peut être majoré à l'aide des propriétés de ω donc de manière générale, on peut montrer que

$\| f_1 - \tilde{f} \| \leqslant \varepsilon/2$ ce qui démontre le résultat d'approximation

Démonstration du lemme 3

Soit j fixé et x appartenant à $[(j-1)/N, j/N]$

$$\sum_{\ell=j-1}^{j+1} \rho_\ell^N(x) = \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x-\frac{j-2}{N}\right)\right) - \cancel{\frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x-\frac{j-1}{N}\right)\right)}$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x-\frac{j-1}{N}\right)\right)} - \cancel{\frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x-\frac{j}{N}\right)\right)}$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x-\frac{j}{N}\right)\right)} - \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x-\frac{j+1}{N}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x-\frac{j-2}{N}\right)\right) - \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x-\frac{j+1}{N}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\underbrace{\left(x-\frac{j-2}{N}\right)}_{>0}\right) + \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\underbrace{\left(\frac{j+1}{N}-x\right)}_{>0}\right) \leqslant 1$$

$$\leqslant 1+\varepsilon$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(\frac{j}{N}-\frac{j-2}{N}\right)\right) - \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(\frac{j}{N}-\frac{j+1}{N}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{2\alpha}{N}\right) - \frac{1}{2}\sigma\left(-\frac{\alpha}{N}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)+\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\right)$$

$$= \sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right) \geqslant 1-\varepsilon$$

On en déduit que $\quad -\varepsilon \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=j-1}^{j+1} \rho_\ell^N(x) - 1 \leqslant \varepsilon$

et donc $\left\| \displaystyle\sum_{\ell=j-1}^{j+1} \rho_\ell^N - 1 \right\|_{\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]} \leqslant \varepsilon$