

Résumé de la séance sur les EF 1D: Pk-Lagrange.

Transformation

$x^e(\xi)$ est la transformation par laquelle l'élément $e \equiv (x_1^e, x_2^e)$ est l'image du même élément de référence $\hat{e} \equiv [0, 1]$, ξ est la coordonnée de l'élément de référence, et $\xi^e(x)$ est la transformation inverse. Changement de variable :

$$\begin{aligned}\xi^e : e &\equiv (x_1^e, x_2^e) \longrightarrow \hat{e} = [0, 1] \\ x &\longrightarrow \xi^e(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x^e : \hat{e} &\longrightarrow e \\ \xi &\longrightarrow x^e(\xi) = \xi x_1^e + (1 - \xi)x_2^e \\ &= \lambda_1 x_1^e + \lambda_2 x_2^e\end{aligned}$$

avec λ_1 et λ_2 les coordonnées barycentriques d'un point $x \in e$, définies par

$$\lambda_1 \equiv \xi \equiv \lambda_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad \lambda_2 \equiv \lambda_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 - \lambda_1(x)$$

Ces transformations sont toujours bien définies,

- que $x_1^e > x_2^e$ soit $e = [x_2^e, x_1^e]$
- ou que $x_1^e < x_2^e$ soit $e = [x_1^e, x_2^e]$

EF P1-Lagrange 1D

$$\begin{aligned}\varphi_1^{p1}(x) &= \lambda_1(x) = \frac{x - x_2^e}{x_1^e - x_2^e} \quad \text{et} \quad \varphi_2^{p1}(x) = \lambda_2(x) = \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \\ \widehat{\varphi}_1^{p1}(\xi) &= \xi \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}_2^{p1}(\xi) = 1 - \xi\end{aligned}$$

Gradient des fonctions de la base canonique

$$\frac{\partial \varphi_1^{p1}}{\partial x} = \frac{\partial \widehat{\varphi}_1^{p1}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = \frac{1}{x_1^e - x_2^e}$$

et

$$\frac{\partial \varphi_2^{p1}}{\partial x} = \frac{\partial \widehat{\varphi}_2^{p1}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = -\frac{1}{x_1^e - x_2^e} = \frac{1}{x_2^e - x_1^e} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial x}$$

EF P2-Lagrange 1D

$$\begin{aligned}\varphi_1^{p2}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_1^{p2}(\xi) = \lambda_1(2\lambda_1 - 1) \\ \varphi_2^{p2}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_2^{p2}(\xi) = \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \\ \varphi_3^{p2}(x) &\equiv \widehat{\varphi}_3^{p2}(\xi) = 4\lambda_1\lambda_2\end{aligned}$$