Commande optimale
Examen CC no. 1

Durée 2H. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés.

▷ **Exercice 1** (9 points). On considère le problème de commande optimale suivant, où $t_f > 0$ est fixé :

$$-q(t_f) + \int_0^{t_f} u^2(t)\,\mathrm{d}t \to \min$$

avec

$$\ddot{q}(t) = u(t), \quad q(0) = \dot{q}(0) = 0.$$

On notera qu'il n'y pas de contraintes sur le contrôle ($u(t) \in \mathbf{R}$), et que $q(t_f)$ ainsi que $\dot{q}(t_f)$ sont libres.

1.1. On pose $x(t) := (q(t), \dot{q}(t))$. Mettre la dynamique sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

avec f une fonction que l'on précisera.

► $f(x_1, x_2, u) = (x_2, u)$, $(x_1, x_2, u) \in \mathbf{R}^3$

1.2. Montrer que la fonction coût peut s'écrire sous forme de Lagrange

$$\int_0^{t_f} (-x_2(t) + u^2(t))\,\mathrm{d}t.$$

►

$$\int_0^{t_f} (-x_2(t) + u^2(t))\,\mathrm{d}t = -x_1(t_f) + x_1(0) + \int_0^{t_f} u^2(t)\,\mathrm{d}t$$

et $x_1(0) = 0$

1.3. Écrire le hamiltonien du problème.

► $H(x_1, x_2, p_1, p_2, u) = p^0(-x_2 + u^2) + p_1 x_2 + p_2 u$

1.4. Écrire les conditions de transversalité.

► Comme x_1 et x_2 sont libres en t_f, p_1 et p_2 sont nuls en t_f.

1.5. En déduire que le cas $p^0 = 0$ est impossible. (On pourra raisonner par l'absurde et montrer que $p^0 = 0$ implique que l'état adjoint est identiquement nul.) On prend donc $p^0 = -1$ dans la suite de l'exercice.

► Si $p^0 = 0$, on vérifie que $\dot{p}_1 = 0$, $\dot{p}_2 = -p_1$, que p_1 et p_2 sont nuls en t_f d'après ce qui précède, donc que p est identiquement nul, donc que $(p^0, p) = (0, 0)$ ce qui est impossible.

1.6. Écrire le système adjoint.

►

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -1 - p_1$$

1.7. Écrire la condition de maximisation du hamiltonien et en déduire la valeur du contrôle optimal en fonction de l'état adjoint.

► $u = p_2/2$

1.8. Intégrer le système adjoint et déterminer le contrôle optimal ainsi que la valeur de $q(t_f)$.

► On a $p_1 \equiv 0$, $p_2(t) = t_f - t$, et $u(t) = (t_f - t)/2$.

1.9. Compléter le code de tir simple ci-dessous.

```
t0 = 0.
tf = 3.5
x0 = [ 0., 0. ]

# Hamiltonian
function h(t, x, p)
    r = p[2]^2/4 + (1+p[1])*x[2] # **** À COMPLÉTER ****
    return r
end

# Makes flow from Hamiltonian
f = Flow(h)

# Shooting function
function shoot(p0)
```

```
    xf, pf = f(t0, x0, p0, tf) # **** À COMPLÉTER ****
    s = pf # **** À COMPLÉTER ****
    return s
end
```

► Voir code ci-avant

▷ **Exercice 2** (7 points). On considère le problème de commande optimale général suivant, où $t_f > 0$ est libre :

$$\int_0^{t_f} f^0(x(t), u(t))\,\mathrm{d}t \to \min$$

avec

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \subset \mathbf{R}^m,$$

et des conditions aux limites sur $x(0)$ et $x(t_f)$ dans $\mathbf{R}^n$. (Les fonctions f et f^0 sont supposées indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$.) On se ramène à temps final fixé sur $[0,1]$ par le changement de temps $t = t_f \cdot s$, et on fait de t_f un nouvelle variable d'état en posant ($' = \mathrm{d}/\mathrm{d}s$ représente la dérivée par rapport au nouveau temps s) :

$$t_f'(s) = 0.$$

2.1. On pose $\widehat{x}(s) := (x(t_f(s) \cdot s), t_f(s))$ et $\widehat{u}(s) := u(t_f(s) \cdot s)$. Montrer que $\widehat{x}'(s) = \widehat{f}(\widehat{x}(s), \widehat{u}(s))$ avec

$$\widehat{f}(\widehat{x}, \widehat{u}) = (t_f \cdot f(x,u), 0), \quad \widehat{x} = (x, t_f) \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad \widehat{u} = u \in \mathbf{R}^m.$$

► Évident (dériver $\widehat{x}$)

2.2. Montrer que le coût de Lagrange s'écrit

$$\int_0^1 \widehat{f}^0(\widehat{x}(s), \widehat{u}(s))\,\mathrm{d}s$$

avec $\widehat{f}^0(\widehat{x}, \widehat{u}) = t_f \cdot f^0(x,u)$.

► Évident (changer de variable dans l'intégrale)

2.3. On note désormais $\widehat{x} = (x, t_f) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\widehat{p} = (p, p_{t_f}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ (et u pour le contrôle, p^0 pour le multiplicateur devant le terme de Lagrange). Écrire le hamiltonien du nouveau problème à temps final fixé.

► $\widehat{H}(\widehat{x}, \widehat{p}, u) = t_f(p^0 f^0(x,u) + (p|f(x,u)))$

2.4. Écrire l'équation différentielle vérifiée par p_{t_f}.

► $p'_{t_f}(s) = -[p^0 f^0(x(s), u(s)) + (p(s)|f(x(s), u(s)))]$

2.5. Les valeurs $t_f(0)$ et $t_f(1)$ sont libres, en déduire les conditions de transversalité sur p_{t_f}.

► p_{t_f} est nul en $s = 0$ et $s = 1$

2.6. En déduire la valeur de

$$\int_0^1 t_f(s)\left[p^0 f^0(x(s), u(s)) + (p(s)|f(x(s), u(s)))\right]\, \mathrm{d}s.$$

► Comme t_f est constant, cette intégrale vaut $t_f(p_{t_f}(0) - p_{t_f}(1)) = 0$

2.7. En déduire que le hamiltonien du problème de départ à temps final libre est nul.

► La quantité $p^0 f^0(x(s), u(s)) + (p(s)|f(x(s), u(s)))$ est égale presque pour tout s à une constante, la valeur du hamiltonien du problème de départ. D'après la question précédente, cette valeur est nulle (on suppose $t_f > 0$).

▷ **Exercice 3** (4 points)**.** On considère la portion de code ci-dessous (extrait de la résolution du problème de navigation par une méthode directe) :

```
# Dynamics: Crank-Nicolson scheme
for j in 1 : P-1
    @NLconstraints(sys, begin
        # x' = w + cos(theta)
        x[1, j+1] == x[1, j] + 0.5 * τ[1]*Δt * ( w + cos(θ[1, j]) + w + cos(θ[1, j+1]) )
        x[2, j+1] == x[2, j] + 0.5 * τ[2]*Δt * ( w + cos(θ[2, j]) + w + cos(θ[2, j+1]) )
        x[3, j+1] == x[3, j] + 0.5 * τ[3]*Δt * ( w + cos(θ[3, j]) + w + cos(θ[3, j+1]) )
        # y' = sin(theta)
        y[1, j+1] == y[1, j] + 0.5 * τ[1]*Δt * ( sin(θ[1, j])+ sin(θ[1, j+1]) )
        y[2, j+1] == y[2, j] + 0.5 * τ[2]*Δt * ( sin(θ[2, j])+ sin(θ[2, j+1]) )
        y[3, j+1] == y[3, j] + 0.5 * τ[3]*Δt * ( sin(θ[3, j])+ sin(θ[3, j+1]) )
        # theta' = u
        θ[1, j+1] == θ[1, j] +       τ[1]*Δt * u[1]
        θ[2, j+1] == θ[2, j] +       τ[2]*Δt * u[2]
        θ[3, j+1] == θ[3, j] +       τ[3]*Δt * u[3]
    end)
end
```

3.1. Rappeler le schéma de Crank-Nicolson.

► Si $\dot{y}(t) = g(t, y(t))$, on discrétise selon (quadrature de type trapèze)

$$y_{i+1} = y_i + (h_i/2)(g(t_i, y_i) + g(t_{i+1}, y_{i+1})), \quad h_i := t_{i+1} - t_i.$$

3.2. Expliquer pourquoi les équations sont multipliées par `τ[1]`, `τ[2]` ou `τ[3]`.

► Parce qu'on a ramené chaque sous-intervalle $[0, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_1 + \tau_2]$ et $[\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3]$ sur $[0, 1]$ par une similitude.

3.3. À quel endroit du code voit-on que le contrôle est constant par morceaux ?

► On a un simple vecteur de dimension trois, `u[1], u[2], u[3]`, dans le second membre.

3.4. On souhaite modifier la dynamique en ajoutant un courant plus général, sous la forme

$$\dot{x}(t) = w_x + \cos\theta(t), \quad \dot{y}(t) = w_y + \sin\theta(t).$$

Indiquer comment modifier le code ci-avant.

► Voir ci-dessous avec $w = (w_x, w_y)$:

```
# Dynamics: Crank-Nicolson scheme
for j in 1 : P-1
    @NLconstraints(sys, begin
        # x' = wx + cos(theta)
        x[1, j+1] == x[1, j] + 0.5 * τ[1]*Δt * ( w[1] + cos(θ[1, j]) + w[1] + cos(θ[1, j+1]
        x[2, j+1] == x[2, j] + 0.5 * τ[2]*Δt * ( w[1] + cos(θ[2, j]) + w[1] + cos(θ[2, j+1]
        x[3, j+1] == x[3, j] + 0.5 * τ[3]*Δt * ( w[1] + cos(θ[3, j]) + w[1] + cos(θ[3, j+1]
        # y' = wy + sin(theta)
        y[1, j+1] == y[1, j] + 0.5 * τ[1]*Δt * ( w[2] + sin(θ[1, j]) + w[2] + sin(θ[1, j+1]
        y[2, j+1] == y[2, j] + 0.5 * τ[2]*Δt * ( w[2] + sin(θ[2, j]) + w[2] + sin(θ[2, j+1]
        y[3, j+1] == y[3, j] + 0.5 * τ[3]*Δt * ( w[2] + sin(θ[3, j]) + w[2] + sin(θ[3, j+1]
        # theta' = u
        θ[1, j+1] == θ[1, j] +       τ[1]*Δt * u[1]
        θ[2, j+1] == θ[2, j] +       τ[2]*Δt * u[2]
        θ[3, j+1] == θ[3, j] +       τ[3]*Δt * u[3]
    end)
end
```