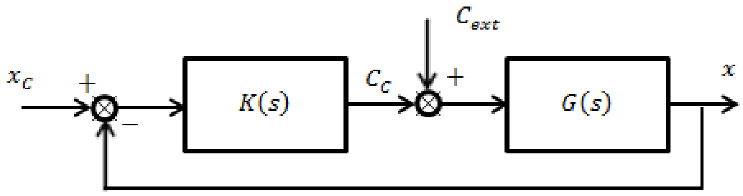
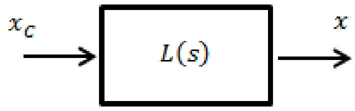
Examen MAM5 2021, partie « Contrôle d'Attitude des Satellites » (D. Losa)

Exercice 1)

Considérer la boucle de contrôle décrite dans le dessin juste en bas en fonction des fonctions de transfert $K(s)$ et $G(s)$



Pour ce qui concerne l'entrée x_C et la sortie x, réduire cette boucle de contrôle à celle simplifiée donnée par :



1. Écrire la fonction de transfert $L(s)$ en fonction des fonctions de transfert $K(s)$ et $G(s)$:

$$L(s) = \frac{x(s)}{x_C(s)} = ?$$

2. Sous quelle condition la fonction de transfert $L(s)$ garantie la stabilité du système avec x_C en entrée et x en sortie ?

3. Écrire maintenant la fonction de transfert entre que la variable externe C_{ext} et la sortie x :

$$\frac{x(s)}{C_{ext}(s)} = ?$$

4. Si la fonction de transfert $G(s)$ est la suivante

$$G(s) = 10\frac{(s+3)}{s(s-1)(s-5)}$$

si la fonction de transfert de $K(s)$ est la suivante

$$K(s) = \frac{10}{s} + 4$$

et si le couple C_{ext} est un signal à échelon dont la transformée de Laplace est

$$C_{ext}(s) = \frac{7}{s}$$

en appliquant le théorème de la valeur finale, évaluer l'impact de C_{ext} sur la sortie x.

Rappel : théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}[s \cdot F(s)]$$

avec $F(s)$ transformée de Laplace de $f(t)$)
Zéro
(7*(10*s + 30))/ ((s^4 - 6*s^3 + 45*s^2 + 220*s + 300)/s)

5. Répondre à la question 4. mais en supposant que la fonction de transfert $K(s)$ est la suivante

$$K(s) = 4$$

et que $G(s)$ et $C_{ext}(s)$ sont les mêmes du point 4..
7/4
(70*s + 210)/(s^3 - 6*s^2 + 45*s + 120)

6. Supposons que la fonction de transfert du contrôleur $K(s)$ est celle d'un contrôleur PID. Écrire la fonction de transfert de ce contrôleur en fonction des trois gains génériques Kp, Ki, Kd (proportionnel, intégral, dérivé).

Exercice 2)
Écrire la fonction de transfert entre X et U à partir de l'équation temporelle suivante

$$10\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 35\frac{dx(t)}{dt} + x(t) - 10\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$$

Calculer les pôles et les zéros du système.
Est-ce que le système avec u comme entrée et x comme sortie est stable ?
Notation : X est la transformée de Laplace de $x(t)$ et U la transformée de Laplace de $u(t)$.

$$\frac{(10s - 1)}{10s^2 + 35s + 1}$$

Zéro = 0.1

Pôles = -3.4712 et -0.0288

Exercice 3)
Considérer le système en forme d'état

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 20 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer les matrices de contrôlabilité et d'observabilité du système.
Est-ce que le système est contrôlable ?
Est-ce que le système est observable ?

ctrb(A,B) Ok rank 3

1	**3**	**53**
0	**1**	**5**
1	**23**	**471**

obsv(A,C) Ok rank 3

1	**2**	**0**
3	**8**	**2**
17	**32**	**46**

Exercice 4)
Pour le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$$

avec le suivant critère à minimiser

$$J = x_1(t_f)^2 + x_2(t_f)^2 + u(t_f)^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{1}{2} \cdot x_1(t)^2 + \frac{1}{2} \cdot u(t)^2\right] dt$$

écrire les étapes 1., 2., 3. de l'algorithme pour déterminer le contrôle optimale, jusqu'à l'écriture des équations d'état et d'états adjoint, sans résolution de ces dernières. Rappel :

Processus pour résoudre un problème de contrôle optimal

On considère un système dynamique non linéaire et non-stationnaire (qui dépend explicitement du temps)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

On considère un critère de performance de la forme

$$J = S(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt$$

1) Définir la fonction Hemiltonienne : $\mathcal{H}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}, t) = f_0(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$;
2) Minimiser $\mathcal{H}$ par rapport à $\boldsymbol{u}$ en résolvant $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$ pour obtenir $\boldsymbol{u}^*(t) = h(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\lambda}, t)$;
3) En utilisant les résultats des points 1) et 2) calculer la valeur optimale de fonction Hemiltonienne $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}, t)$ et construire les équations d'état et état adjoint $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^{*T}}{\partial \lambda}$ et $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}^{*T}}{\partial x}$;
4) Résoudre le système d'équations différentielles avec condition initiale $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ et condition finales $\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial x} - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\right]_{t_f} \delta \boldsymbol{x}_f = 0$;
5) Remplacer la solution des équation différentielles $\boldsymbol{x}^*(t)$ et $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ dans l'expression du contrôle optimale trouvée au pas 2).