Calcul du gradient

Problème :

$$\min_X f(X, U) \quad \text{soumis à} \quad R(X, U) = 0$$

où $X \in \mathbb{R}^n$ = vecteur des paramètres de conception

$U \in \mathbb{R}^N$: vecteur des variables physiques ($\sim$ champ discrét)

R : un système d'équations non-linéaires ($\sim$ EDP discrétisées)

① Par différences finies

Résolution $R(X,U)=0$ pour X fixé $\Longrightarrow U=\Phi(X)$

Par suite $f(X,U) = f(X,\Phi(X)) = F(X)$

$$\frac{dF}{dX_i} = \frac{F(X+\delta X_i)-F(X)}{\delta X_i} + O(|\delta X_i|) \qquad \delta X_i = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

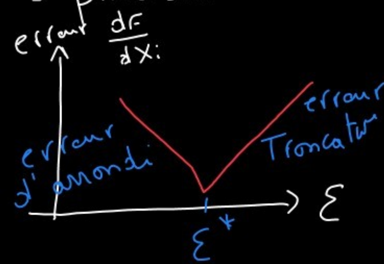
$$\frac{dF}{dX_i} = \frac{F(X+\delta X_i)-F(X-\delta X_i)}{2\,\delta X_i} + O(|\delta X_i|^2)$$

* Avantages :

- facile : seulement évaluer F

*Inconvénients

- précision



- coût de calcul

→ n+1 évaluation (1er)
2n évaluations (2e)

② Par calcul de sensibilités

dérivations composées :
$$\frac{dF}{dX_i} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial X_i}}_{\substack{\text{dépendance} \\ \text{directe vis à} \\ \text{vis de } X_i \\ \text{(à physique fixée)}}} + \overbrace{\frac{\partial U}{\partial X_i}}^{\substack{\text{changement des} \\ \text{variables physiques}}}{}^{T} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial U}}_{\substack{\text{dépendance} \\ \text{directe vis à vis} \\ \text{de la physique}}}$$

$\frac{\partial U}{\partial X_i}$: sensibilités

On dérive les équations de la physique : $\frac{\partial R}{\partial X_i} + \frac{\partial R}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0$ car $R(X, U) = 0$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial X_i} = -\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]^{-1} \frac{\partial R}{\partial X_i}}$$

équation des sensibilités

* Avantages :
  - précision
* Inconvénients
  - coût : éq. des sensibilités dépend de X_i !

③ Par méthode adjointe

On ajoute à la dérivée de la fonction la dérivée des équations physiques :

$$\frac{dF}{dX_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} + \frac{\partial U}{\partial X_i}^T \frac{\partial f}{\partial U} + \lambda^T \underbrace{\left[\frac{\partial R}{\partial X_i} + \frac{\partial R}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial X_i} \right]}_{\text{toujours nul}} \quad \forall \lambda$$

$$= \frac{\partial f}{\partial X_i} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial X_i} + \frac{\partial U}{\partial X_i}^T \left[\frac{\partial f}{\partial U} + \frac{\partial R}{\partial U}^T \lambda \right] \quad \forall \lambda$$

On choisit λ tel que $\boxed{\lambda = -\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]^{-T} \frac{\partial f}{\partial U}}$ équation adjointe

puis : $\frac{dF}{dX_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} + \lambda^T \frac{\partial R}{\partial X_i}$

Avantage :

- l'équation adjointe ne dépend pas de X_i

$\Rightarrow$ 1 seule équation quel que soit le nombre de paramètres n