TP – Evaluation du cours de Bertrand Iooss

Polytech Nice Sophia – 2026

Ce TP (à réaliser en binôme ou en solo) est à rendre pour le 27 février 2026. Vous devrez me fournir (par email à biooss@yahoo.fr) un rapport d'étude (dans un **format rédigé et agréable à lire**) des résultats des calculs, de leurs interprétations, des figures et tableaux étayés par des interprétations, ainsi que le code R (dans un fichier unique).

La fonction « borehole() » modélise l'écoulement de l'eau à travers un forage. La sortie (c'est-à-dire la réponse de la fonction) est le débit d'eau, en m^3/an. Les 13 variables d'entrée de la fonction et leurs plages de variation habituelles sont :

$r_w \in [0.05, 0.15]$	Rayon du forage (m)
$r_{iw} \in [0.02, 0.08]$	Rayon interne du forage (m)
$r \in [100, 50000]$	Rayon d'influence (m)
$T_u \in [63100, 116000]$	Transmissivité de l'aquifère supérieur (m^2/an)
$H_u \in [1000, 1100]$	Hauteur potentiométrique de l'aquifère supérieur (m)
$T_{um} \in [6310, 11600]$	Transmissivité de l'aquifère moyen supérieur (m^2/an)
$H_{um} \in [900, 1000]$	Hauteur potentiométrique de l'aquifère moyen supérieur (m)
$T_l \in [631, 1160]$	Transmissivité de l'aquifère moyen inférieur (m^2/an)
$H_l \in [800, 900]$	Hauteur potentiométrique de l'aquifère moyen inférieur (m)
$T_l \in [63.1, 116]$	Transmissivité de l'aquifère inférieur (m^2/an)
$H_l \in [700, 800]$	Hauteur potentiométrique de l'aquifère inférieur (m)
$L \in [1120, 1680]$	Longueur du forage (m)
$K_w \in [3000, 12000]$	Conductivité hydraulique du forage (m/an)

Pour la quantification d'incertitudes, les distributions des variables d'entrée aléatoires sont :

r_w ~ Normal(μ=0.10, σ=0.015)
r_{iw} ~ Normal(μ=0.05, σ=0.01)
r ~ Lognormal(μ=7.71, σ=1.0056)
T_u ~ Uniform[63100, 116000]
H_u ~ Uniform[1000, 1100]
T_{um} ~ Uniform[6310, 11600]
H_{um} ~ Uniform[900, 1000]
T_{lm} ~ Uniform[631, 1160]
H_{lm} ~ Uniform[800, 900]
T_l ~ Uniform[63.1, 116]
H_l ~ Uniform[700, 800]
L ~ Uniform[1120, 1680]
K_w ~ Uniform[3000, 12000]

avec Normal(μ, σ) la distribution normale de moyenne μ et variance σ^2 et Lognormal(μ, σ) la distribution lognormale telle que le logarithme de la variable a une distribution Normal(μ, σ).

1) Mise en place

Récupérez le fichier « borehole.R » qui contient deux fonctions R déjà écrites :

- le modèle de forage (fonction *borehole()*) permettant de calculer le débit d'eau en fonction des 13 entrées,
- la fonction *EchantBorehole()* qui permettra de générer le vecteur des entrées suivant leurs lois de probabilité données ci-dessus.

Faites un premier test en évaluant la sortie aux valeurs minimales, moyennes et maximales des entrées. Donnez les résultats. Pour les valeurs minimales et maximales, prenez les valeurs données dans les intervalles de variation définis ci-dessus. Pour les valeurs moyennes, prenez les moyennes de lois données ci-dessus. Pour la valeur moyenne de la loi lognormale, ne vous trompez pas et dites comment vous la calculez.

2) Propagation d'incertitudes par Monte Carlo

a) Calculez la moyenne et la variance de la sortie par échantillonnage Monte Carlo de taille 1000. Tracez aussi son histogramme.

b) En comparant au résultat obtenu en question 1), est-ce-que la moyenne de la fonction est égale à la fonction évaluée en la moyenne des entrées ? Qu'en déduisez-vous sur la fonction ?

c) Avec le même échantillon, calculez le quantile d'ordre 95% de la sortie. Calculez-en un intervalle de confiance à 95% (en répétant l'estimation un grand nombre de fois et en récupérant les quantiles à 2.5% et 97.5% du quantile d'ordre 95%).

d) Avec une erreur relative de 10%, calculez par Monte Carlo la probabilité que le débit du forage soit supérieur à 250 m^3/an en augmentant progressivement la taille de l'échantillon (en partant par exemple d'une taille de 2.10^6 avec un pas d'incrément de 2.10^6). Quelle a été la taille nécessaire pour l'échantillon ? Faîtes un graphe de convergence.

3) Analyse de sensibilité

a) Indices basés sur la régression linéaire

i. A partir d'un échantillon Monte Carlo de taille 500 sur lequel la sortie 'débit d'eau' est calculée, tracez les scatterplots entre la sortie et les entrées sur le même graphique. Interprétez-les.

ii. Sur le même échantillon, calculez les indices de sensibilité SRC^2 et interprétez-les. Est-il nécessaire d'aller plus loin (c'est-à-dire d'utiliser une autre méthode) dans l'analyse de sensibilité de la sortie ? N'avait-on pas déjà la réponse à cette question (cf. question 2) b)) ?

b) **Indices de Sobol :** A l'aide du package « sensitivity », calculez les indices de Sobol' du 1^er^ ordre et totaux de la sortie par rapport à toutes les entrées en utilisant une taille d'échantillon adaptée, ainsi que la fonction (de calcul d'indices de Sobol') la plus adaptée vue lors du TP4 qui permet aussi de contrôler la précision de vos estimations (via le bootstrap). Utilisez les outils appropriés pour interpréter les résultats.

4) Ajustement et utilisation d'un métamodèle de krigeage

a) Sur le même échantillon Monte Carlo de taille 500 qu'en 3) a), ajustez un modèle de krigeage et validez-le (par exemple avec le Q^2). Améliore-t-il un modèle de régression linéaire ?

b) Calculez les indices de Sobol' avec la même méthode que celle du 3) b) mais sur le métamodèle de krigeage plutôt que sur la fonction *borehole*(). Comparez-les aux indices de Sobol' obtenus en 3) b). Quel est l'intérêt pratique d'avoir utilisé un métamodèle ?