Correction de l'exercice 3

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x \leqslant 1/2 \\ 2(1-x) & x > 1/2 \end{cases}$$ définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$

Calculons $g_2 = g \circ g$, soit x appartenant à $[0,1]$

$$g(g(x)) = \begin{cases} g(2x) & 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ g(2(1-x)) & 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

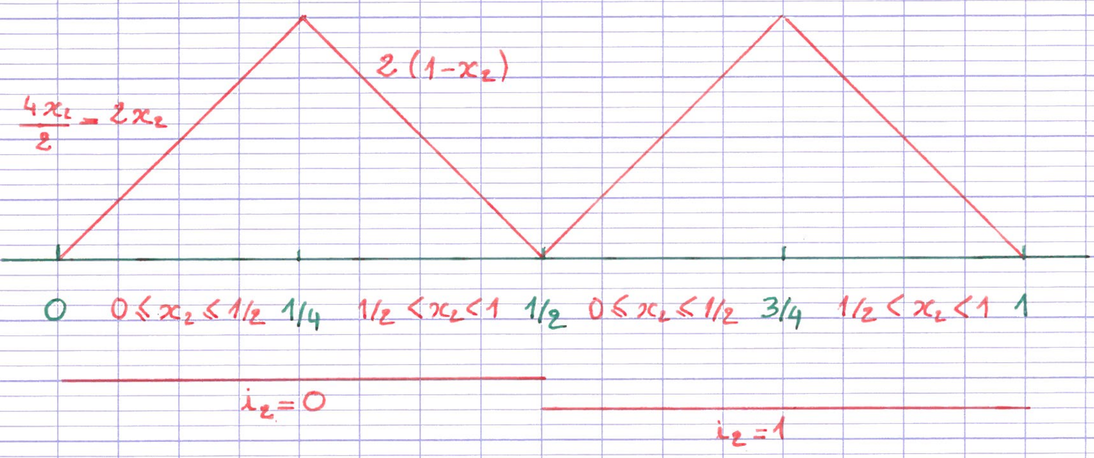
$$= \begin{cases} 4x & 0 \leqslant x \leqslant 1/4 \\ 2(1-2x) = 4(1/2 - x) & 1/4 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 2(1-2(1-x)) = 2(2x-1) = 4(x - 1/2) & 1/2 < x \leqslant 3/4 \\ 4(1-x) & 3/4 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

$1 < 2x \leqslant 3/2$
$1/2 \leqslant 2(1-x) < 1$

Démonstration du lemme 2

Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Pour $n = 2$



$$x = \frac{i_2 + x_2}{2}$$

On va ensuite démontrer le résultat par récurrence en supposant que le résultat est vrai jusqu'à l'étape $m \geq 2$.
Soit x appartenant à $[0, 1/2]$, on remarque que

$$g_{m+1}(x) = g_m(g(x)) = g_m(2x)$$

Si $0 \leq x \leq 1/2$ alors $0 \geq -x \geq -1/2$ et $1 \geq 1-x \geq 1/2$
$1/2 \leq 1-x \leq 1$

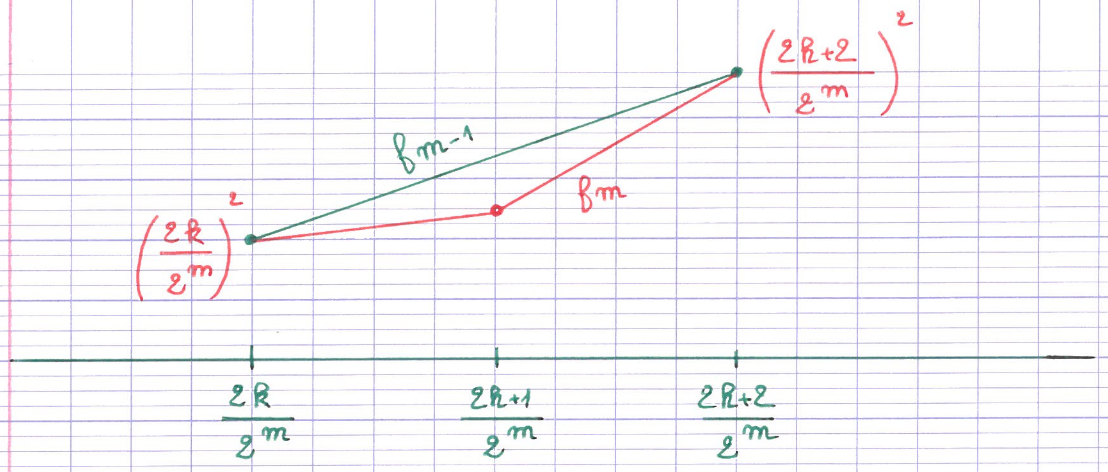
$$g_{m+1}(1-x) = g_m(g(1-x)) = g_m(2(1-(1-x)))$$
$$= g_m(2x)$$
$$= g_{m+1}(x)$$

On a $g_{m+1}(x) = g_{m+1}(1-x) = g_{m-1}(g_2(1-x))$
$= g_{m-1}(g_2(x+1/2))$ par symétrie
$= g_{m+1}(x+1/2)$ $\quad g_2(3/4-y) = g_2(\frac{3}{4}+y)$

Il suffit donc de se limiter au cas où $x \in [0, 1/2]$, introduisons i_{m+1} et x_{m+1} tels que

$$x = \frac{i_{m+1} + x_{m+1}}{2^m} \quad \text{alors} \quad 2x = \frac{i_{m+1} + x_{m+1}}{2^{m-1}}$$

$$\text{et} \quad g_{m+1}(x) = g_m(2x) = \begin{cases} 2x_{m+1} & 0 \leq x_{m+1} \leq 1/2, \\ 2(1-x_{m+1}) & 1/2 < x_{m+1} < 1 \end{cases}$$



$f_{m-1}(x) - f_m(x) = C\, g_m(x)$ pour x appartenant à $\left[\frac{2k}{2^m}, \frac{2k+2}{2^m}\right] = I$

Il reste à trouver C

$$C = f_{m-1}\left(\frac{2k+1}{2^m}\right) - \left(\frac{2k+1}{2^m}\right)^2$$

Pour x appartenant à I, $f_{m-1}(x) = \overset{\text{réel}}{\alpha}\left(x - \frac{2k}{2^m}\right) + \left(\frac{2k}{2^m}\right)^2$

$$f_{m-1}\left(\frac{2k+2}{2^m}\right) = \alpha\left(\underbrace{\frac{2k+2}{2^m} - \frac{2k}{2^m}}_{\frac{2}{2^m}}\right) + \left(\frac{2k}{2^m}\right)^2 = \left(\frac{2k+2}{2^m}\right)^2$$

d'où $\alpha = \frac{2^{m-1}}{(2^m)^2}\left(\underbrace{(2k+2)^2 - (2k)^2}_{2(4k+2)}\right)$

$$C = \frac{4k+2}{2^m}\left(\frac{2k+1}{2^m} - \frac{2k}{2^m}\right) - \left(\frac{2k+1}{2^m}\right)^2 + \left(\frac{2k}{2^m}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}\left(\cancel{4k}+2 + \cancel{4k^2} - \cancel{4k^2} - \cancel{4k} - 1\right) = \frac{1}{2^{2m}}$$

Démonstration de la proposition 2

On rappelle que $xy = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - x^2 - y^2 \right)$

Sans perte de généralité, on suppose que $M \geqslant 1$, posons $\delta = \frac{\varepsilon}{6M^2}$ et introduisons f_δ telle que $f_\delta(0) = 0$ et

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_\delta(x) - x^2| < \delta$$

Posons $\omega(x,y) = 2M^2 \left(f_\delta\left(\frac{|x+y|}{2M}\right) - f_\delta\left(\frac{|x|}{2M}\right) - f_\delta\left(\frac{|y|}{2M}\right) \right)$

Remarque $|x+y|$ peut être calculée avec le réseau

Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $\omega(x,y) = 0$; si $|x| \leqslant M$ et $|y| \leqslant M$

$$\omega(x,y) - xy = 2M^2 \left(f_\delta\left(\frac{|x+y|}{2M}\right) - \frac{1}{4M^2}(x+y)^2 - f_\delta\left(\frac{|x|}{2M}\right) + \frac{1}{4M^2}x^2 - f_\delta\left(\frac{|y|}{2M}\right) + \frac{1}{4M^2}y^2 \right)$$

On a par exemple

$$\left| f_\delta\left(\frac{|x|}{2M}\right) - \frac{1}{4M^2}x^2 \right| = \left| f_\delta\left(\frac{|x|}{2M}\right) - \left(\frac{|x|}{2M}\right)^2 \right| < \delta \text{ d'où}$$

$$|\omega(x,y) - xy| \leqslant 3 \times 2M^2 \times \delta = \varepsilon$$

Etape 3

On rappelle que d'après la formule de Taylor-Lagrange, pour un entier n et une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a,b]$ alors il existe c appartenant à $]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

Pour un entier $N > 0$, on reprend nos points $x_j = j/N$, $0 \leqslant j \leqslant N$ et on note pour une fonction f suffisamment régulière, pour x appartenant à $[0,1]$

$$P_j(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_j)}{k!} \left(x - j/N\right)^k$$

Pour x appartenant à $[0,1]$, posons

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) P_j(x) \text{ , on remarque que}$$

$$|f(x) - f_1(x)| = \left| \underbrace{\sum_{j=0}^{N} \psi_j(x)}_{=1} f(x) - \sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) P_j(x) \right|$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{N} \psi_j(x) |f(x) - P_j(x)| \leqslant \sum_{j / |x - j/N| < 1/N} |f(x) - P_j(x)|$$

$$\leqslant 2 \max_{j / |x-j/N| < 1/N} |f(x) - P_j(x)| \leqslant \frac{2}{n!} \left(\frac{1}{N}\right)^n$$