Devoir Maison: mise en œuvre des éléments finis

A rendre le 26 Janvier 2026 avant 18:00 par e-mail à l'adresse nkonga@unice.fr

Mise en œuvre et validation des éléments finis P3-Lagrange sur des triangles.

Définition du problème Convection-réaction-diffusion 2D.

On se donne un coefficient de réaction α, un vecteur de convection $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$ et une matrice de diffusion $\underline{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 \\ 0 & \beta_y \end{pmatrix}$. Le problème ici est de trouver une fonction scalaire $\mathrm{u}(\boldsymbol{x})$ solution de l'équation

$$-\nabla \cdot \left(\underline{\boldsymbol{\beta}} \nabla \mathrm{u}\right) + \alpha \mathrm{u} + \nabla \cdot (\mathrm{u}\mathbf{C}) = f(\boldsymbol{x})$$

Avec les conditions aux limites données par la solution exacte qui est encore à établir. On se donne un profil de $\mathrm{u}(\boldsymbol{x})$ de la forme

$$\mathrm{u}(\boldsymbol{x}) = \sin(\gamma_x x)\cos(\gamma_y y)$$

Avec γ_x et γ_y des paramètres constants donnés. Le profil choisi définira une solution exacte du problème de convection-réaction-diffusion, pour le second membre donné par

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\alpha + \beta_x\gamma_x^2 + \beta_y\gamma_y^2\right)\sin(\gamma_x x)\cos(\gamma_y y) + c_x\gamma_x\cos(\gamma_x x)\cos(\gamma_y y) - c_y\gamma_y\sin(\gamma_x x)\sin(\gamma_y y)$$

La forme faible associée au problème de convection-réaction-diffusion est définie avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(\widehat{\varphi}_l, \widehat{\varphi}_{l'}) \equiv \mathcal{A}_{\widehat{\varphi}_l\widehat{\varphi}_{l'}}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) & = & \left(\underline{\boldsymbol{\beta}}\nabla\widehat{\varphi}_{l'}\right)\cdot\nabla\widehat{\varphi}_l + \alpha\widehat{\varphi}_{l'}\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi}_{l'}\mathbf{C}\cdot\nabla\widehat{\varphi}_l \\ \mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \widehat{\varphi}_l) \equiv \mathcal{L}_{\widehat{\varphi}_l}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi})) & = & \left(\alpha + \beta_x\gamma_x^2 + \beta_y\gamma_y^2\right)\sin(\gamma_x x)\cos(\gamma_y y)\,\widehat{\varphi}_l(\boldsymbol{\xi}) \\ & & + \left(c_x\gamma_x\cos(\gamma_x x)\cos(\gamma_y y) - c_y\gamma_y\sin(\gamma_x x)\sin(\gamma_y y)\right)\widehat{\varphi}_l(\boldsymbol{\xi}) \end{array}\right.$$

C'est cette forme qui est utilisée pour construire, par éléments finis, une solution approchée $\mathrm{u}_h(x, y)$ du problème de convection-réaction-diffusion anisotrope.

Travail à faire.

L'objectif est de modifier (compléter) le programme scilab qui vous a été transmis,
de manière à :

- Ajouter les éléments finis P3-Lagrange : en complétant les fonctions `Phi_Pk` et `GradPhi_Pk` pour le cas pk=3.
- Résoudre le probème de convection-réaction-diffusion anisotrope 2D.
  Il faudra
  - Modifier la fonction `f(X, kx, ky, Mu, Cm)` en une fonction
    `f(X, gamx, gamy, betx, bety,  cx, cy, alpha )`
    pour que la solution exacte du problème de Convection-réaction-diffusion anisotrope 2D soit :
    $$\mathrm{u}(\boldsymbol{x}) = \sin(\gamma_x x)\cos(\gamma_y y) \equiv \texttt{Exact(x, y, gamx, gamy)}$$
    avec $\gamma_x \equiv$ `gamx` et $\gamma_y \equiv$ `gamy`.
  - Modifier la sortie de la fonction `Composite_Mat(Xg)` pour avoir en sortie les valeurs de `betax`, `betay` , `cx`, `cy` et `alpha` .
  - Modifier la définition des variables `Be_k` et `Ae_k_kp` pour prendre en compte la physique du problème de convection-réaction-diffusion anisotrope 2D.

Validations avec à chaque fois : `Lx=1, Ly=1, gamx = %pi/Lx, gamy = 2*%pi/Ly`

- **Problème de réaction:** Pour un problème de réaction on a :

$$\texttt{betx} = 0, \quad \texttt{bety} = 0, \quad \texttt{cx} = 0, \quad \texttt{cy} = 0 \quad \text{et} \quad \texttt{alpha} \neq 0.$$

  La convergence optimale est-elle obtenue ? (c.ad. Avoir l'ordre k+1 avec les éléments finis Pk-Lagrange : pour k=1, 2 et 3, soit (EF_Pk = 1, EF_Pk= 2 et EF_Pk= = 3).

- **Problème de diffusion isotrope:** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\texttt{betx} = \texttt{bety} > 0, \quad \texttt{cx} = 0, \quad \texttt{cy} = 0 \quad \text{et} \quad \texttt{alpha} = 0.$$

  La convergence optimale est-elle obtenue ?

- **Problème de diffusion anisotrope:** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\texttt{betx} > 0, \quad \texttt{betx} \neq \texttt{bety} > 0, \quad \texttt{cx} = 0, \quad \texttt{cy} = 0 \quad \text{et} \quad \texttt{alpha} = 0.$$

  La convergence optimale est-elle obtenue ? Qu'observez-vous quand $\texttt{betx} > 0$ et $\texttt{bety} = 0$? Qu'observez vous quand soit $\texttt{betx} = 10^{-8}$ et $\texttt{bety} = 1$. Qu'en concluez-vous ?

- **Problème de convection:** Pour ce problème on a les données suivantes :

$$\texttt{betx} = 0, \quad \texttt{bety} = 0, \quad \texttt{cx} \neq 0, \quad \texttt{cy} \neq 0 \quad \text{et} \quad \texttt{alpha} = 0.$$

  La convergence optimale est-elle toujours obtenue? Comment évolue la convergence quand on utilise $\texttt{betx} = \texttt{bety} = dh^m$ avec $dh = \sqrt{Lx * Ly/Ne}$ et pour m = 1, 2, 3?

- pour un problème de diffusion anisotrope (cx = cy = 0, alpha = 0, (betx = 0 et bety > 0 ou bien (betx > 0 et bety = 0)), on n'a pas la convergence à l'ordre k+1 avec les éléments finis Pk-Lagrange : pour k=1, 2 et 3.

- **Convection-réaction-diffusion anisotrope 2D.** Pour ce problème, on a les données suivantes :

$$\texttt{betx} = 1, \quad \texttt{bety} = 2, \quad \texttt{cx} = 1, \quad \texttt{cy} = 0.5 \quad \text{et} \quad \texttt{alpha} = -5.$$

  La convergence optimale est-elle obtenue?

Analyse de la convergence numérique (pratique).

L'analyse de convergence se fait à partir de l'erreur (en norme p)

$$\mathcal{E}_p(h) = \|\mathrm{u}_h - \mathrm{u}\|_p = \left(\int_{\Omega_h} |\mathrm{u}_h(x,y) - \mathrm{u}(x,y)|^p dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec h le pas du maillage. Les éléments finis $\mathrm{P}\textsc{k}$, dans le contexte du problème de diffusion isotrope, on a l'estimation suivante :

$$\mathcal{E}_p(h) = Ch^{k+1}$$

Pour des maillages de pas h_ℓ, $\ell = 1, \cdots, N_\ell$ avec par exemple $h_{\ell+1} > h_\ell$, on a un ordre de convergence numérique $\textsc{k} + 1$

$$\log\left(\frac{\mathcal{E}_p(h_{\ell+1})}{\mathcal{E}_p(h_\ell)}\right) = (\textsc{k}+1)\log\left(\frac{h_{\ell+1}}{h_\ell}\right)$$

On obtient alors l'ordre de convergence pratique (de la mise en œuvre) par

$$(\mathrm{\kappa}+1) = \log\left(\frac{\mathcal{E}_p\left(h_{\ell+1}\right)}{\mathcal{E}_p\left(h_{\ell}\right)}\right) \Big/ \log\left(\frac{h_{\ell+1}}{h_{\ell}}\right)$$

On a validé la stratégie numérique lorsque l'ordre de convergence pratique est proche de l'ordre de convergence analytique:

$$\mathrm{\kappa}+1 \simeq k+1$$

L'évaluation de l'erreur $\mathcal{E}_p\left(h\right)$ se fait en utilisant les points de quadrature :

$$\mathcal{E}_p\left(h\right) = \left(\int_{\Omega_h} \left|\mathrm{u}_h\left(\boldsymbol{x}\right) - \mathrm{u}\left(\boldsymbol{x}\right)\right|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_e \left|\mathcal{J}^e\right| \sum_{g=1}^{\mathrm{Ng}} \omega_g \left|\mathrm{u}_h\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}_g)\right) - \mathrm{u}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}_g)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$