Contrôle d'attitude des satellites

Automne 2024 – Politech' Sophia – MAM5

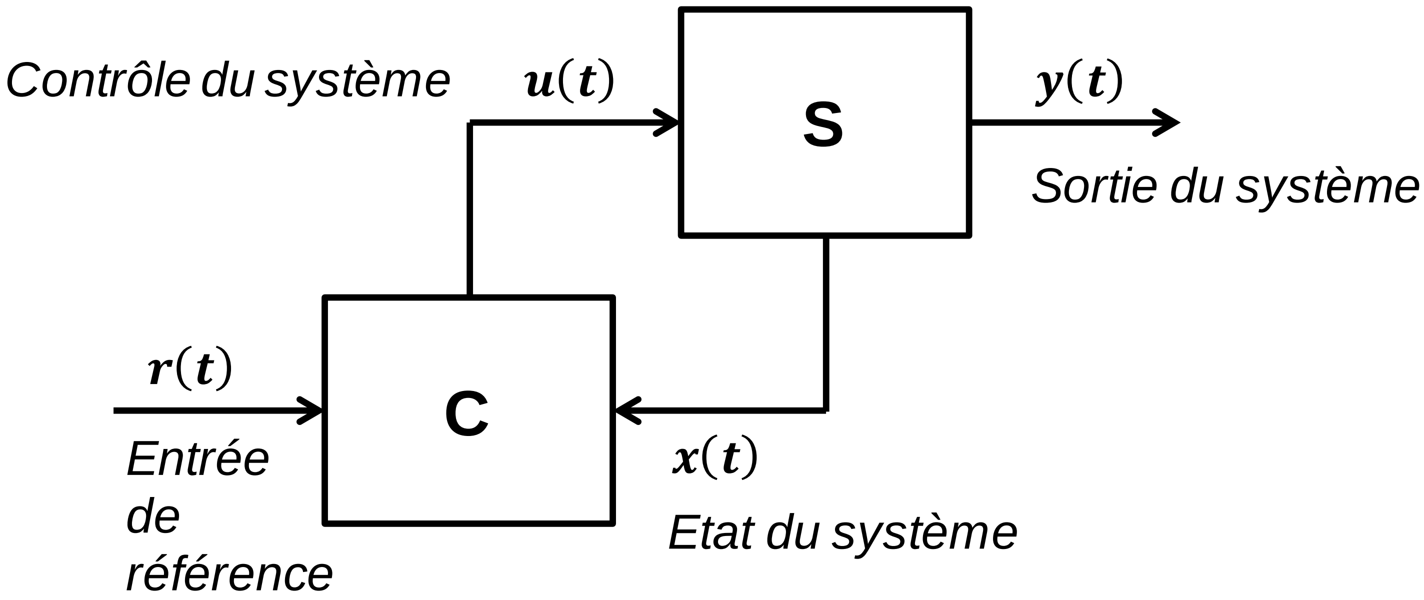
Partie 2b – Contrôle optimal

Damiana Losa – Thales Alenia Space

Le contrôle optimal (1/2)

- Un problème de control optimal a comme objectif celui de « faire marcher le système sous contrôle dans la manière la meilleur possible ».

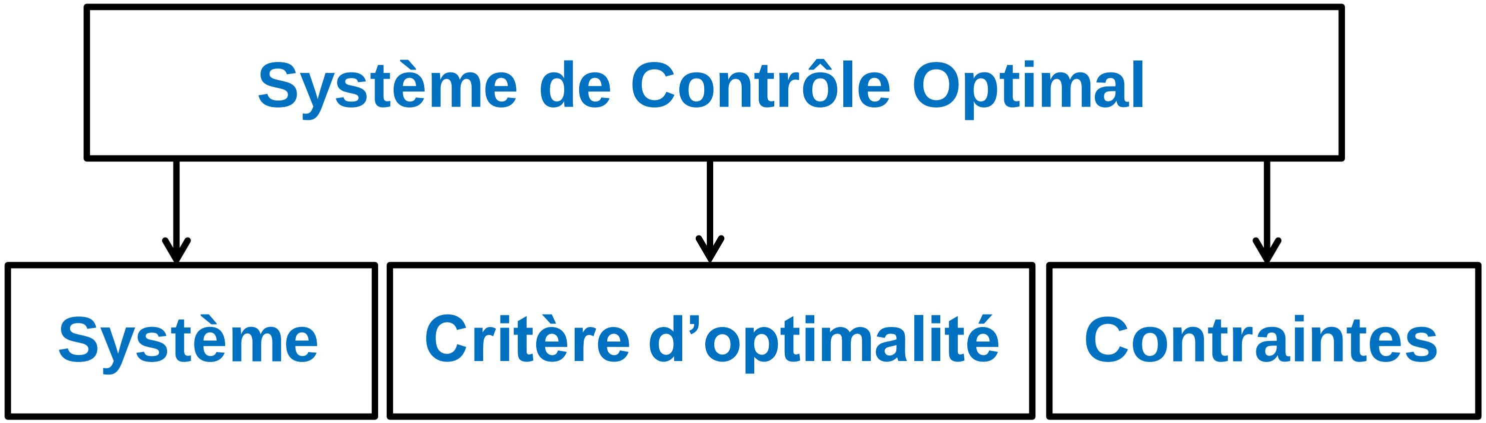
- Plus formellement, la commande optimale a l'objectif de déterminer une séquence de variables de contrôle (à appliquer au système) qui minimisent un certain critère capable de mesurer les performances du système, tous en respectant les contraintes physiques du système et éventuellement d'autres contraintes sur les variables d'état et de contrôle.



Le contrôle optimal (2/2)

- Pour formuler un problème de contrôle optimal les suivants éléments sont nécessaire :

1) Un modèle mathématique qui décrit le comportement du système dynamique qu'on veut contrôler;
2) Une fonction de cout (un critère d'optimalité généralement fonction des variables d'état et/ou de contrôle) qui donne avec un numéro réel un jugement global sur le comportement du système quand il est soumis aux variables de contrôle calculées;
3) Les relations mathématiques qui décrivent les contraintes imposées aux variables du modèle mathématique du système (contraintes sur les variables d'état et/ou de contrôle).



Deux courants de pensée

Ce sont deux les principales méthodologies pour résoudre un problème de contrôle optimal. Les deux ont été proposées dans les année ‘50/’60.

- **La théorie de Hamilton - Jacobi**
  - Elle fournit des conditions suffisantes pour déterminer le contrôle optimal (on ne pourra rien conclure sur la contrôlabilité du système si on arrive pas à résoudre l’équation de Hamilton- Jacobi);
  - Cette théorie peut être utilisée pour formuler et résoudre le plus connu problème de contrôle optimal: le problème Linéaire – Quadratique (LQ) où le système à contrôler et Linéaire et le critère de performance est Quadratique.

- **La théorie de Pontriaguine**
  - Elle a été développée par le mathématicien Russe Lev S. Pontriaguine à la moitié des année ’50 du siècle passé;
  - Elle se base sur le « principe du maximum » car originairement cette théorie a été développée en relation aux problèmes de maximisation des fonctions de cout;
  - Elle fournit des conditions nécessaires mais qui à priori ne garantissent pas l’optimalité (contrairement à la théorie de Hamilton-Jacobi);
  - Elle implique une charge computationnelle inférieur par rapport à celle demandée dans la théorie de Hamilton- Jacobi.

Contrôle optimal d'un système dynamique - Définitions

- On considère un système dynamique non linéaire et non-stationnaire (qui dépend explicitement du temps)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

- On considère un critère de performance de la forme

$$J = S\left(\boldsymbol{x}\left(t_f\right), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} f_0\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\,dt$$

- Les conditions aux bords sont
  - $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$;
  - t_f et $\boldsymbol{x}\left(t_f\right)$ libres.

- Le problème de contrôle optimal est celui de déterminer $\boldsymbol{u}^*(t)$, $\forall t \in \left[t_0, t_f\right]$ qui minimise le critère J.

- Définition de la fonction Hemiltonienne ($\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des états adjoint)

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}, t) = f_0(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

Contrôle optimal d'un système dynamique – Solution (1/2)

- Les conditions nécessaires pour que le problème énoncé dans la planche précédente admette une solution optimale $\boldsymbol{u}^*(t)$ sont les suivantes:
  - La variable $\boldsymbol{u}^*(t)$ doit satisfaire l'équation de la dynamique $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$;
  - L'équation de l'état adjoint doit être satisfaite :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{x}}^T$$

  - L'équation du contrôle doit être satisfaite :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{u}} = 0$$

  - Le tout avec les suivantes conditions aux bords (conditions finales)

$$\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\right]_{t_f} \delta \boldsymbol{x}_f = 0$$

  - Les variation δt_f et $\delta \boldsymbol{x}_f$ du temps et de l'état finals sont arbitraires.

Contrôle optimal d'un système dynamique – Solution (2/2)

- Puisque les variation δt_f et $\delta \boldsymbol{x}_f$ du temps et de l'état finals sont arbitraires, les conditions aux bords

$$\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\right]_{t_f} \delta \boldsymbol{x}_f = 0$$

peuvent s'écrire avec les deux équations suivantes

$$\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} = 0 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T_{t_f}$$

  - Cas $\boldsymbol{x}_f$ fixé et t_f libre : il est nécessaire de résoudre seulement $\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} = 0$
  - Cas $\boldsymbol{x}_f$ libre et t_f fixé : il est nécessaire de résoudre seulement $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^T_{t_f}$
  - Cas $\boldsymbol{x}_f$ fixé et t_f fixé : pas d'équations aux bords à résoudre.

- Nous devons en tous cas résoudre un « two-boundary value problem » (des équations aux dérivés partielles avec conditions initiales et finales imposées) ➔ difficile d'un point de vue numérique.

Processus pour résoudre un problème de contrôle optimal

On considère un système dynamique non linéaire et non-stationnaire (qui dépend explicitement du temps)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

On considère un critère de performance de la forme

$$J = S\big(\boldsymbol{x}(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} f_0\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\,dt$$

1) Définir la fonction Hemiltonienne : $\mathcal{H}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}, t) = f_0(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$;
2) Minimiser $\mathcal{H}$ par rapport à $\boldsymbol{u}$ en résolvant $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{u}} = 0$ pour obtenir $\boldsymbol{u}^*(t) = h(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\lambda}, t)$;
3) En utilisant les résultats des points 1) et 2) calculer la valeur optimale de fonction Hemiltonienne $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}, t)$ et construire les équations d'état et état adjoint $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^{*T}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}$ et $\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}^{*T}}{\partial \boldsymbol{x}}$;
4) Résoudre le système d'équations différentielles avec condition initiale $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ et condition finales $\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\right]_{t_f} \delta \boldsymbol{x}_f = 0$;
5) Remplacer la solution des équation différentielles $\boldsymbol{x}^*(t)$ et $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ dans l'expression du contrôle optimale trouvée au pas 2).

Exemples - TD

On considère un point de masse m en mouvement droit unidimensionnel. On applique une force f à ce point pour faire évoluer sa position x selon l'équation de Newton $m\ddot{x}(t) = f$.

Les conditions initiales de position et vitesse sont fournies: $x(t_0) = 1$ et $\dot{x}(t_0) = 2$.

1) Déterminer l'action de contrôle $u(t) = f(t)$ dans l'intervalle $t \in [t_0, t_f]$ qui permette au point de se trouver suffisamment près de zéro à l'instant final $t_f = 2$ et qui possède une énergie de contrôle suffisamment limitée.
2) Déterminer l'action de contrôle $u(t) = f(t)$ dans l'intervalle $t \in [t_0, t_f]$ qui permette au point de se trouver en position $x(t_f) = 1$ avec vitesse $\dot{x}(t_f) = 0$ à l'instant final $t_f = 2$ et qui possède une énergie de contrôle suffisamment limitée.
3) Déterminer l'action de contrôle $u(t) = f(t)$ dans l'intervalle $t \in [t_0, t_f]$ qui permette au point de se trouver en position $x(t_f) = 0$ avec vitesse quelconque à l'instant final $t_f = 2$ et qui possède une énergie de contrôle suffisamment limitée.

Les lois de contrôle trouvés dans les trois cas sont des lois fonctions uniquement du temps : il s'agit d'un contrôle en boucle ouverte.

Contrôle optimal Linéaire Quadratique (LQ) à temps fini

- On parle de contrôle LQ si ces deux conditions sont satisfaites :
  - Le système dynamique à contrôler est de type linéaire

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

  - Les fonctions qui apparaissent dans le critère de performance sont quadratiques

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{S}_f\boldsymbol{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]dt$$

Les matrices $\boldsymbol{S}_f$, $\boldsymbol{Q}(t)$ et $\boldsymbol{R}(t)$ doivent être symétriques et demi-définies positives les premières deux, définie positive seulement la troisième: $\boldsymbol{S}_f = \boldsymbol{S}_f{}^T \geq 0$, $\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{Q}(t)^T \geq 0$ et $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(t)^T > 0$.

D'habitude ces matrices sont prises comme diagonales.

Puisque dans ce cas le but est de maintenir l'état près de la valeur zéro, on parle de problème de **régulation de l'état**. Puisque $t_f < \infty$ ce type de **contrôle** est dit **à temps fini**.

Avec ce type de contrôle LQ sur horizon de temps fini, pas de conditions de contrôlabilité sur le système.

Le contrôle optimale aura la forme $\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{x}(t)$ où $\boldsymbol{S}(t)$ est la solution de l'équation matricielle différentielle de Riccati

$$\dot{\boldsymbol{S}}(t) + \boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{A}^T(t)\boldsymbol{S}(t) - \boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\boldsymbol{S}(t) + \boldsymbol{Q}(t) = 0,\ \boldsymbol{S}(t_f) = \boldsymbol{S}_f$$

Contrôle optimal Linéaire Quadratique (LQ) à temps infini

- On parle de contrôle LQ si ces deux conditions sont satisfaites :
  - Le système dynamique à contrôler est de type linéaire

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

  - Les fonctions qui apparaissent dans le critère de performance sont quadratiques

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]dt$$

Les matrices $\boldsymbol{Q}(t)$ et $\boldsymbol{R}(t)$ doivent être symétriques et demi-définies positives la première, définie positive seulement la deuxième: $\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{Q}(t)^T \geq 0$ et $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(t)^T > 0$.

D'habitude ces matrices sont prises comme diagonales.

Avec ce type de contrôle LQ sur horizon de temps infini, il est nécessaire d'imposer une condition de complète contrôlabilité sur le système.

Le contrôle optimale aura la forme $\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\widehat{\boldsymbol{S}}(t)\boldsymbol{x}(t)$ où $\widehat{\boldsymbol{S}}(t) = \lim_{t_f \to \infty} \boldsymbol{S}(t)$ est une matrice symétrique, semi-définie positive, solution de l'équation matricielle différentielle de Riccati

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{S}}}(t) + \widehat{\boldsymbol{S}}(t)\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{A}^T(t)\widehat{\boldsymbol{S}}(t) - \widehat{\boldsymbol{S}}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^T(t)\widehat{\boldsymbol{S}}(t) + \boldsymbol{Q}(t) = 0, \lim_{t_f \to \infty} \widehat{\boldsymbol{S}}\left(t_f\right) = 0$$

Contrôle optimal Linéaire Quadratique (LQ) à temps infini Système linéaire stationnaire (1/2)

- On parle de contrôle LQ si ces deux conditions sont satisfaites :
  - Le système dynamique à contrôler est de type linéaire et stationnaire (LTI)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

  - Les fonctions qui apparaissent dans le critère de performance sont quadratiques

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]dt$$

Les matrices $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{R}$ doivent être symétriques et demi-définies positives la première, définie positive seulement la deuxième: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T \geq 0$ et $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T > 0$.

D'habitude ces matrices sont prises comme diagonales.

Avec ce type de contrôle LQ sur horizon de temps infini, il est nécessaire d'imposer une condition de complète contrôlabilité sur le système.

Le contrôle optimale aura la forme

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{x}(t)$$

où $\overline{\boldsymbol{S}}$ est une matrice constante, symétrique, semi-définie positive, solution de l'équation matricielle algébrique de Riccati (ARE)

$$\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{S}} - \overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{Q} = 0$$

Contrôle optimal Linéaire Quadratique (LQ) à temps infini
Système linéaire stationnaire (2/2)

- Le système en boucle fermée avec $\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{x}(t)$ devient

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}})\boldsymbol{x}(t)$$

- Pour que système soit stable il ne suffit pas d'imposer le système de départ complétement contrôlable. Il est nécessaire de décomposer la matrice qui pèse la variable d'état comme $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}$ et d'imposer que le couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{G})$ soit observable.

- **Définitions**
  - Le couple de matrices $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ du système LTI est **observable** si et seulement si

$$rang\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

  - Un système est **détectable** si les pôles non observable appartiennent aux demi-plan gauche ouvert. Un système observable est donc détectable.
  - Le couple de matrices $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ du système LTI est **contrôlable** si

$$rang[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \quad \dots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] = n$$

  - Un système est **stabilisable** si les pôles non contrôlables appartiennent aux demi-plan gauche ouvert. Un système commandable est donc stabilisable.

Contrôle optimal Linéaire Quadratique (LQ) à temps infini
Système linéaire stationnaire – Retour de sortie

- Le système dynamique à contrôler est de type linéaire et stationnaire (LTI)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

avec c.i. $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

- Les fonctions qui apparaissent dans le critère de performance sont quadratiques

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [\boldsymbol{y}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]dt$$

- Les matrices $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{R}$ doivent être symétriques et demi-définies positives la première, définie positive seulement la deuxième: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T \geq 0$ et $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^T > 0$. D'habitude ces matrices sont prises comme diagonales.
- Le contrôle optimale aura la forme

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{x}(t)$$

où $\overline{\boldsymbol{S}}$ est une matrice constante, symétrique, semi-définie positive, solution de l'équation matricielle algébrique de Riccati (ARE)

$$\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{S}} - \overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} = 0$$

Tous les résultats trouvés pour le retour de sortie sont valables, en remplaçant la matrice $\boldsymbol{Q}$ avec la matrice $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}$.

- Si le couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ est stabilisable et le couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ détectable alors la ARE admet comme $\overline{\boldsymbol{S}}$ comme seule solution demi-définie positive. Et si le couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ est complétement observable, la matrice $\overline{\boldsymbol{S}}$ est définie positive.

Contrôle optimal Linéaire Quadratique (LQ) à temps infini
Système linéaire stationnaire – Consigne différente de zéro

- Si le but est d'avoir une variable de sortie égale à une consigne différente de zéro ($\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_C}$) on va résoudre le problème LQ pour le système

$$\frac{d\boldsymbol{x_s}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_s}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u_s}(t)$$
$$\boldsymbol{y_s} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x_s}(t)$$

où $\boldsymbol{x_s} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_C}$, $\boldsymbol{u_s} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u_C}$ et $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_C}$ (les valeurs $\boldsymbol{x_C}$ et $\boldsymbol{u_C}$ sont tels que $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x_C} = \boldsymbol{y_C}$ et $0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u_C}$).

- Le critère de performance pour un tel système est

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [\boldsymbol{y_s}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y_s}(t) + \boldsymbol{u_s}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u_s}(t)]dt$$

- Le contrôle optimale aura la forme

$$\boldsymbol{u_s}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{x_s}(t) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}}[\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_C}(t)] + \boldsymbol{u_C}$$

où $\overline{\boldsymbol{S}}$ est une matrice constante, symétrique, semi-définie positive, solution de l'équation matricielle algébrique de Riccati (ARE)

$$\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\overline{\boldsymbol{S}} - \overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{Q} = 0$$

- Généralement la valeur de $\boldsymbol{x_C}$ n'est pas fournie. On définit $\boldsymbol{u_{Cs}} = \boldsymbol{u_C} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\overline{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{x_C}$ sur la base de $\boldsymbol{y_C}$.
  - Cas $dim(\boldsymbol{u}) = dim(\boldsymbol{y})$: solution optimale du problème;
  - Cas $dim(\boldsymbol{u}) < dim(\boldsymbol{y})$: en générale il n'existe pas de solution;
  - Cas $dim(\boldsymbol{u}) > dim(\boldsymbol{y})$: il y a plusieurs solution $\boldsymbol{u_{Cs}}$ qui correspondent à la consigne $\boldsymbol{y_C}$ ➔ on rajoute des composantes à la sortie ou on enlève des composantes à la variable de contrôle.