UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

Master 2 - Ingénierie Numérique

Master Ingénierie Mathématique

Mise en Œuvre des Éléments Finis

Compte Rendu - Projet

Étudiante :
Sarah ALI

Professeur :
Dr. Nkonga BONIFACE

Janvier 2026

Contents

1 CODE

1.1 Généralisation du terme source :

```
function [out] = f(X,kx,ky,bx,by,cx,cy,alpha)
    x = X(1)
    y = X(2)
    out = (alpha + bx*kx * kx + by*ky * ky) * Exact(x, y, kx, ky) +cx*kx*cos(kx*x)*cos(ky*y)-cy*ky*sin(kx*x)*sin(ky*y)
endfunction
```

Listing 1.1: Correct RHS

Avec Cette nouvelle définition du terme source, le code tourne correctement avec les différents paramètres qu'on définit.

1.2 Généralisation de Composite_Mat

```
    function [Conv, Reac, Diff] = Composite_Mat(Xg, pb, Lx, Ly, Ne, i, mExp)

    // -------- defaults (optional args) ----------
    // allowed calls:
    //   Composite_Mat(Xg, pb, Lx, Ly, Ne)
    //   Composite_Mat(Xg, pb, Lx, Ly, Ne, i)
    //   Composite_Mat(Xg, pb, Lx, Ly, Ne, i, mExp)

    if argn(2) < 6 then
        i = 0;          // by default: no h-scaling trick
    end
    if argn(2) < 7 then
        mExp = 1;       // default exponent for dh^m
    end

    // -------- base init (always return something) ----------
    Conv = [0.0 ; 0.0];
    Reac = 0.0;
    Diff = diag([0.0; 0.0]);
```

```
    // -------- choose problem ----------
    select pb

    case 1 then
        Conv = [0.0 ; 0.0];
        Reac = 1.0;
        Diff = diag([0.0; 0.0]);

    case 2 then
        Conv = [0.0 ; 0.0];
        Reac = 0.0;
        Diff = diag([1.0; 1.0]);

    case 3 then
        Conv = [0.0 ; 0.0];
        Reac = 0.0;
        Diff = diag([1.0; 2.0]);

    case 4 then
        Conv = [0.0 ; 0.0];
        Reac = 0.0;
        Diff = diag([1.0; 0.0]);

    case 5 then
        Conv = [0.0 ; 0.0];
        Reac = 0.0;
        Diff = diag([1e-8; 1.0]);

    case 6 then
        Conv = [0.5 ; 1.0];
        Reac = 0.0;

        if i == 1 then
            dh = sqrt(Lx*Ly/Ne);
            Diff = diag([dh^mExp; dh^mExp]);
        else
            Diff = diag([0.0; 0.0]);
        end

    case 7 then
        Conv = [1.0 ; 0.5];
        Reac = -5.0;
        Diff = diag([1.0; 2.0]);

    else
        error(msprintf("Composite_Mat: unknown pb = %d", pb));
    end
```

```
endfunction
```

Listing 1.2: Composite_Mat

Dans cette fonction, j'ai ajouté les modification suivantes :

- pb = 1 ; problème de réaction avec

$$betx = 0, \quad bety = 0, \quad cx = 0, \quad cy = 0, \quad alpha = 1.$$

- pb = 2 ; problème de diffusion isotrope avec

$$betx = 4, \quad bety = 4, \quad cx = 0, \quad cy = 0, \quad alpha = 0.$$

- pb = 3 ; problème de diffusion anisotrope avec

$$betx = 1, \quad bety = 2, \quad cx = 0, \quad cy = 0, \quad alpha = 0.$$

- pb = 4 ; problème de diffusion anisotrope avec

$$betx = 1, \quad bety = 0, \quad cx = 0, \quad cy = 0, \quad alpha = 0.$$

- pb = 5 ; problème de diffusion anisotrope avec

$$betx = 10^{-8}, \quad bety = 1, \quad cx = 0, \quad cy = 0, \quad alpha = 0.$$

- pb = 6 ; problème de convection avec

$$cx = 0.5, \quad cy = 1.0, \quad alpha = 0$$

  .

  1. $betx = 0, \quad bety = 0$; pour $i = 0$.
  2. $betx = bety = dh^m$ avec, $dh = \sqrt{Lx * Ly/Ne}$ pour $m = 1, 2, 3$.

- pb = 7 ; problème de Convection - Réaction - Diffusion Anisotrope 2D avec :

$$betx = 1, \quad bety = 2, \quad cx = 1, \quad cy = 0.5, \quad alpha = -5.$$

1.3 Définition des fonctions de base P3

```
       function Phi = Phi_Pk(lmd1, lmd2, pk)
       lmd3 = 1.0 - lmd1  - lmd2
        select pk

        case 1 then
            Phi = zeros(3,1);
            Phi(1) = lmd1 ;
            Phi(2) = lmd2 ;
            Phi(3) = lmd3 ;

        case 2 then
            Phi = zeros(6,1);
            Phi(1) = lmd1.*( 2.0*lmd1 - 1.0) ;
            Phi(2) = lmd2.*( 2.0*lmd2 - 1.0) ;
            Phi(3) = lmd3.*( 2.0*lmd3 - 1.0) ;
            Phi(4) = 4.0*lmd1.*lmd2 ;
            Phi(5) = 4.0*lmd2.*lmd3 ;
            Phi(6) = 4.0*lmd3.*lmd1 ;

        case 3 then
            Phi = zeros(10,1);
            Phi(1)= lmd1.*(3.0*lmd1-2)*(3.0*lmd1-1)/2.0;
            Phi(2)= lmd2.*(3.0*lmd2-2)*(3.0*lmd2-1)/2.0;
            Phi(3)= lmd3.*(3.0*lmd3-2)*(3.0*lmd3-1)/2.0;
            Phi(4)= 9.0*lmd1.*lmd2.*(3.0*lmd1-1)/2.0;
            Phi(5)= 9.0*lmd1.*lmd2.*(3.0*lmd2-1)/2.0;
                Phi(6)= 9.0*lmd2.*lmd3.*(3.0*lmd2-1)/2.0;
            Phi(7)= 9.0*lmd2.*lmd3.*(3.0*lmd3-1)/2.0;
            Phi(8)= 9.0*lmd1.*lmd3.*(3.0*lmd3-1)/2.0;
            Phi(9)= 9.0*lmd1.*lmd3.*(3.0*lmd1-1)/2.0;
            Phi(10)= 27.0*lmd1.*lmd2.*lmd3;
    end
endfunction
```

Listing 1.3: Base functions P3

1.4 Définition des Gradient des fonctions de bases P2 & P3

```
    function GradPhi = GradPhi_Pk(lmd1, lmd2, G1, G2, pk)
    lmd3 = 1.0 - lmd1  - lmd2;
    G3   = - G1 - G2;

    select pk

```

```
    case 1 then
        GradPhi(1,:) = G1 ;
        GradPhi(2,:) = G2 ;
        GradPhi(3,:) = G3 ;

    case 2 then
        GradPhi = zeros(6,2)

        GradPhi(1,:) = G1*(2.0*lmd1 - 1.0) + lmd1*(2.0*G1)
        GradPhi(2,:) = G2*(2.0*lmd2 - 1.0) + lmd2*(2.0*G2)
        GradPhi(3,:) = G3*(2.0*lmd3 - 1.0) + lmd3*(2.0*G3)

        GradPhi(4,:) = 4.0*(G1*lmd2 + lmd1*G2)
        GradPhi(5,:) = 4.0*(G2*lmd3 + lmd2*G3)
        GradPhi(6,:) = 4.0*(G3*lmd1 + lmd3*G1)


    case 3 then
        GradPhi = zeros(10,2)

        GradPhi(1,:) = 0.5*(G1*(3.0*lmd1 - 2.0)*(3.0*lmd1 -1.0) +
            lmd1*(3.0*G1)*(3.0*lmd1 -1.0)+ lmd1*(3.0*lmd1 - 2.0)
           *(3.0*G1))
        GradPhi(2,:) = 0.5*(G2*(3.0*lmd2 - 2.0)*(3.0*lmd2 -1.0) +
            lmd2*(3.0*G2)*(3.0*lmd2 -1.0)+ lmd2*(3.0*lmd2 - 2.0)
           *(3.0*G2))
        GradPhi(3,:) = 0.5*(G3*(3.0*lmd3 - 2.0)*(3.0*lmd3 -1.0) +
            lmd3*(3.0*G3)*(3.0*lmd3 -1.0)+ lmd3*(3.0*lmd3 - 2.0)
           *(3.0*G3))

        GradPhi(4,:) = (9.0/2.0)*(G1*lmd2*(3.0*lmd1-1)+lmd1*G2
           *(3.0*lmd1-1)+lmd1*lmd2*(3.0*G1))
        GradPhi(5,:) = (9.0/2.0)*(G1*lmd2*(3.0*lmd2-1)+lmd1*G2
           *(3.0*lmd2-1)+lmd1*lmd2*(3.0*G2))
        GradPhi(6,:) = (9.0/2.0)*(G2*lmd3*(3.0*lmd2-1)+lmd2*G3
           *(3.0*lmd2-1)+lmd2*lmd3*(3.0*G2))
        GradPhi(7,:) = (9.0/2.0)*(G2*lmd3*(3.0*lmd3-1)+lmd2*G3
           *(3.0*lmd3-1)+lmd2*lmd3*(3.0*G3))
        GradPhi(8,:) = (9.0/2.0)*(G1*lmd3*(3.0*lmd3-1)+lmd1*G3
           *(3.0*lmd3-1)+lmd1*lmd3*(3.0*G3))
        GradPhi(9,:) = (9.0/2.0)*(G1*lmd3*(3.0*lmd1-1)+lmd1*G3
           *(3.0*lmd1-1)+lmd1*lmd3*(3.0*G1))

        GradPhi(10,:) = 27.0*(G1*lmd2*lmd3+lmd1*G2*lmd3+lmd1*lmd2
           *G3)
    end
endfunction
```

Listing 1.4: Gradient of base functions P2 & P3

1.5 Les points de Gauss

```
function [Poid, Xsi, Ngo]= IntegrationNum(Ngi)
Ngo  = Ngi

select Ngi

case 1 then// integration numerique avec UN points de Gauss.

    Poid = zeros(Ngo,1);         // column vector
    Xsi  = zeros(3, Ngo);        // 3 x Ngo matrix

    Poid(1) = 0.5;

    Xsi(1,:) = 1.0/3.0;
    Xsi(2,:) = 1.0/3.0;


case 2 then// integration numerique avec DEUX points de Gauss
   .
    Poid = zeros(Ngo,1);
    Xsi  = zeros(3, Ngo);

    // weights
    Poid(1) = 0.25;
    Poid(2) = 0.25;

    // Gauss points (barycentric coordinates)
    Xsi(:,1) = [0.5; 0.5; 0.0];
    Xsi(:,2) = [0.5; 0.0; 0.5];

case 3 then// integration numerique avec TROIS points de
   Gauss.
    Poid = zeros(Ngo,1);
    Xsi  = zeros(3, Ngo);

    // weights
    Poid(1) = 1.0/6.0;
    Poid(2) = 1.0/6.0;
    Poid(3) = 1.0/6.0;

    // Gauss points (barycentric coordinates)
    Xsi(:,1) = [1.0/6.0; 1.0/6.0; 2.0/3.0];
```

```
        Xsi(:,2) = [2.0/3.0; 1.0/6.0; 1.0/6.0];
        Xsi(:,3) = [1.0/6.0; 2.0/3.0; 1.0/6.0];

    case 4 then// integration numerique avec TROIS points de Gauss.
        Poid = zeros(Ngo,1);
        Xsi  = zeros(3, Ngo);

        // weights
        Poid(1) = -27.0/96.0;
        Poid(2) =  25.0/96.0;
        Poid(3) =  25.0/96.0;
        Poid(4) =  25.0/96.0;

        // Gauss points (barycentric coordinates)
        // barycenter
        Xsi(:,1) = [1.0/3.0; 1.0/3.0; 1.0/3.0];

        // symmetric points
        Xsi(:,2) = [0.6; 0.2; 0.2];
        Xsi(:,3) = [0.2; 0.6; 0.2];
        Xsi(:,4) = [0.2; 0.2; 0.6];

    else
        // une autre alternative
        // six points de Gauss
        // ------------------------------------------------------

        // Nombre de points de Gauss
        // -------------------------
        Ngo               = 6;

        s1 = 0.11169079483905;
        s2 = 0.0549758718227661;
        aa = 0.445948490915965;
        bb = 0.091576213509771;
        // poids de Gauss
        // -------------------------------------
        Poid(1:3)             = s2;
        Poid(4:6)             = s1;

        // Points de Gauss xi_1 == Xsi_1
        // -------------------------------------
        Xsi(1,1:Ngo)         = [bb, 1-2*bb, bb, aa, aa, 1-2*aa];
        // Points de Gauss xi_2 == Xsi_2
        // -------------------------------------
        Xsi(2,1:Ngo)         = [bb, bb, 1-2*bb, 1-2*aa, aa, aa];
```

```
    end


    //   Xsi_3 = 1 - Xsi_1 -Xsi_2
    // ========================================
    Xsi(3, 1:Ngo)  = 1.0 - Xsi(1,1:Ngo) - Xsi(2,1:Ngo);

endfunction
```

Listing 1.5: Approximate integrals with 1,2,3,4 or 6 Gauss points

1.6 Boucle De résolution et d'assemblage

Dans cette boucle j'ai fait les modifications suivantes :

- Coefficients du problème :

```
    [Coef_Lm, Coef_Reac, Coef_Mu] = Composite_Mat(Xg,pb,Lx,
       Ly, Ne); //pour le test de convergence pour le pb de
       convection, il faut ajouter les arg i et mExp
            bx = Coef_Mu(1,1);
            by = Coef_Mu(2,2);
            cx = Coef_Lm(1);
            cy = Coef_Lm(2);
            alpha = Coef_Reac;
```

Listing 1.6: Unpacking the coefficients

- Correction de l'appelle du terme source pour Be_k :

```
        Be_k        = f(Xg,kx,ky,bx,by,cx,cy,alpha)*Phi_is ;
```

Listing 1.7: constructing the RHS vector

- Correction de la construction de la matrice locale Ae_k_kp :

```
        Ae_k_kp    = (GradPhi_is * Coef_Mu * GradPhi_js')
                    + Coef_Reac * Phi_is * Phi_js
                    - Phi_js * (Coef_Lm' * GradPhi_is')
```

Listing 1.8: Locale Matrix construction

2 Analyse des résultats

Les différents problèmes ont pour solution éxacte :

$$u_{exac} = sin(\pi x) \cdot cos(2\pi y)$$

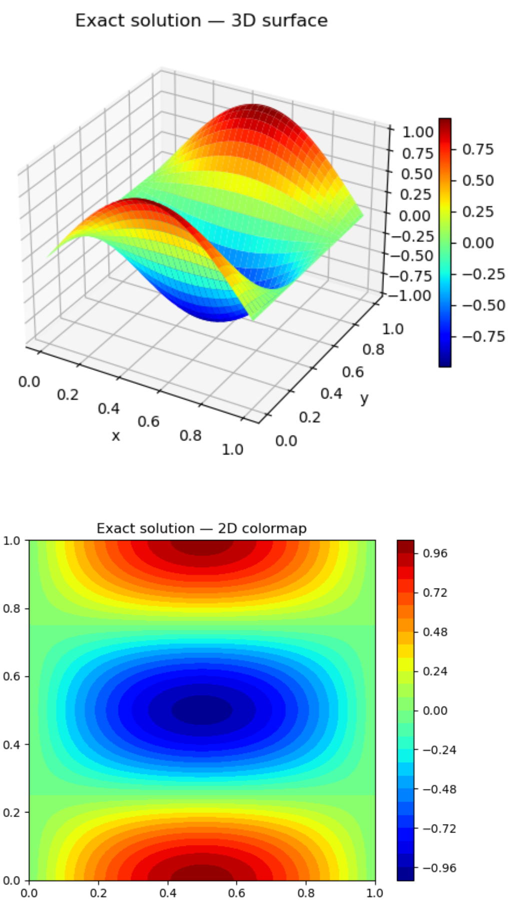

Figure 2.1: Exact solution of the problem: 3D representation (top) and 2D colormap (bottom).

2.1 Problème de Réaction

2.1.1 Éléments Finis P1

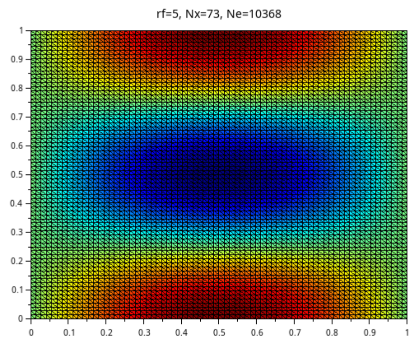

Table 2.1: Ordres de Convergences EF P1

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	2.15294	2.15900	2.01613
961	2.08818	2.10191	2.00607
3721	2.05417	2.06678	2.00260
5329	2.03301	2.42928	2.00100

2.1.2 Éléments Finis P2

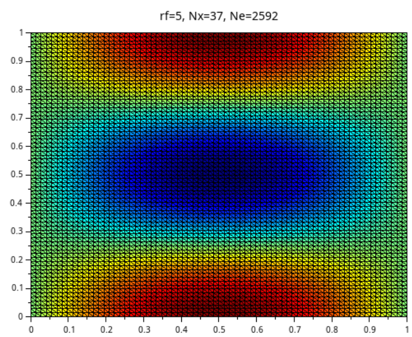

Table 2.2: Ordres de Convergences EF P2

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	2.85264	2.82079	2.65647
961	2.95548	2.90296	2.85820
3721	2.99312	2.95187	2.92177
5329	3.00648	2.97912	2.94753

2.1.3 Éléments Finis P3

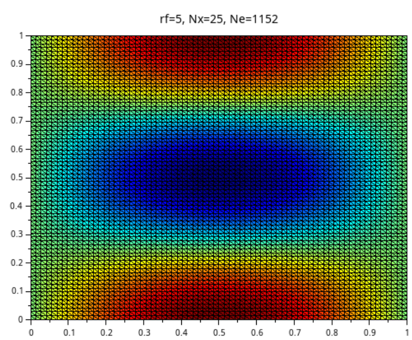

Table 2.3: Ordres de Convergences EF P3

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	4.74501	4.57589	3.94618
961	4.37001	4.30688	3.80242
3721	4.20338	4.19458	3.95926
5329	4.10402	4.12366	3.96478

D'après le cours, on sait que l'ordre de convergence des approximations en éléments finis, qui est directement relié au degré de la méthode.

$$\mathcal{E}_p(h) = \|u - u_h\|_{L^p(\Omega)} \leq Ch^{k+1}$$

.

On remarque, d'après les résultats de l'analyse de l'erreur numérique, que pour les trois degrés d'éléments finis considérés (P1, P2 et P3), l'augmentation du raffinement du maillage conduit à des ordres de convergence numériques qui se rapprochent de plus en plus de l'ordre de convergence analytique attendu.

Dans ce problème, l'absence d'opérateur de différentiation assure que la régularité du terme source est entièrement conservée dans la solution exacte. Le problème se réduit ainsi à un problème d'interpolation pure, et l'erreur numérique observée est essentiellement l'erreur d'interpolation associée aux éléments finis utilisés. Cela explique la convergence optimale observée pour les différents degrés de discrétisation. Ce test constitue donc un cas de validation pertinent de l'implémentation de la méthode des éléments finis.

2.2 Problème de Diffusion Isotropique

2.2.1 Éléments Finis P1

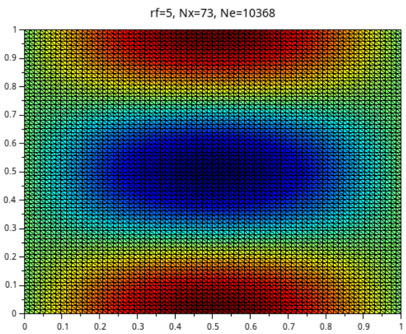

Table 2.4: Ordres de Convergences EF P1

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.97419	1.97652	1.96301
961	1.99012	1.99117	1.98623
3721	1.99588	1.99620	1.99409
5329	1.99840	1.99852	1.99771

2.2.2 Éléments Finis P2

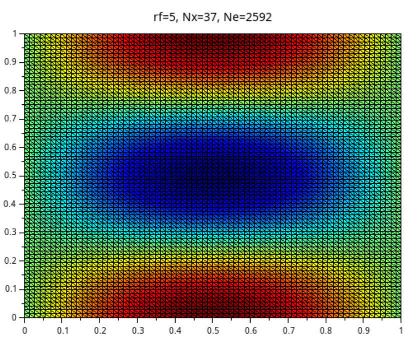

Table 2.5: Ordres de Convergences EF P2

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	3.1115708	3.001482	2.8781441
961	3.0816749	2.9984202	2.8825957
3721	3.0509048	2.9987316	2.965169
5329	3.0305138	2.9992783	3.0040535

2.2.3 Éléments Finis P3

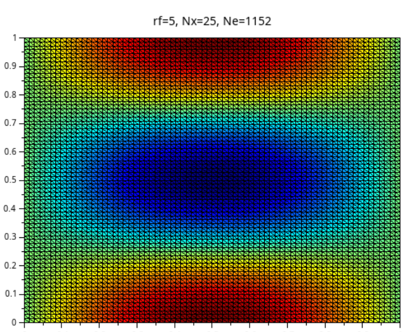

Table 2.6: Ordres de Convergences EF P3

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	4.06672	4.04725	3.91527
961	4.08945	4.06334	3.91370
3721	4.05030	4.04369	3.99174
5329	4.03180	4.02687	3.99300

On peut voire clairement que l'ordre de convergence optimal est atteint avec les 3 degrés d'éléments finis on observe la convergence vers l'ordre analytique avec le rafinnement su maillage.
Dans le cas du problème de diffusion isotrope, l'équation comporte un opérateur elliptique du second ordre. Néanmoins, compte tenu de la régularité du domaine, des coefficients constants et du choix d'un second membre lisse, la solution exacte reste suffisamment régulière. Les estimations théoriques de la méthode des éléments finis prédisent alors une convergence d'ordre $k+1$ en norme L^2 pour des éléments finis de degré P_k. Les résultats numériques confirment ces estimations, ce qui montre que la convergence observée est optimale.

2.3 Problème de Diffusion Anisotropique -1

bet_x=1 - bet_y = 2

2.3.1 Éléments Finis P1

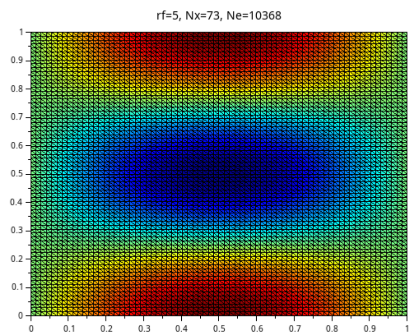

Table 2.7: Ordres de Convergences EF P1

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.97273	1.97544	1.96380
961	1.98943	1.99073	1.98653
3721	1.99559	1.99600	1.99422
5329	1.99831	1.99845	1.99776

2.3.2 Éléments Finis P2

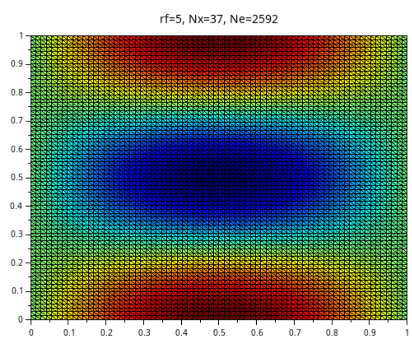

Table 2.8: Ordres de Convergences EF P2

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	3.13451	3.01762	2.83257
961	3.09126	3.00677	2.84382
3721	3.058652	3.00260	2.96526
5329	3.03275	3.00084	2.99838

2.3.3 Éléments Finis P3

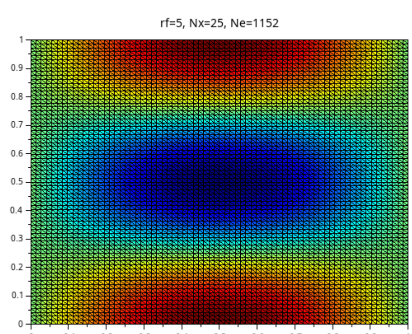

Table 2.9: Ordres de Convergences EF P3

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	4.06637	4.06888	3.99099
961	4.10074	4.08167	3.94179
3721	4.05800	4.05519	3.99241
5329	4.03741	4.03330	3.99652

Pour le cas de diffusion anisotrope, bet_x , bet_y ¿ 0 , on se retrouve avec un résultat similaire au cas de diffusion isotrope, on atteint la convergence optimale grace à l'oprateur de diffusion qui nous assure la continuité entre les éléments, qui assure la convergence de la méthode.

2.4 Problème de Diffusion Anisotropique - 2

bet_x=1 - bet_y = 0

2.4.1 Éléments Finis P1

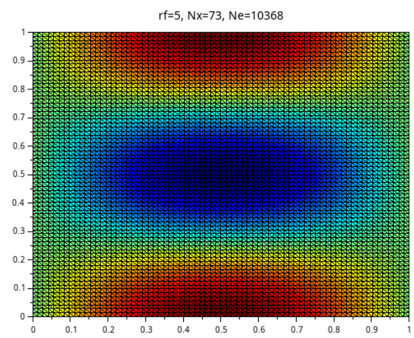

Table 2.10: Ordres de Convergences EF P1

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.93041	1.93026	1.94752
961	1.96431	1.96378	1.98049
3721	1.97949	1.97908	1.99163
5329	1.98831	1.9879	1.99676

2.4.2 Éléments Finis P2

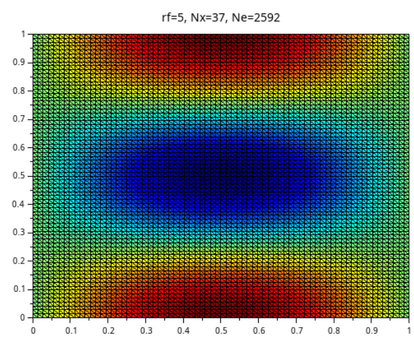

Table 2.11: Ordres de Convergences EF P2

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.93141	1.92792	1.80499
961	1.97769	1.97254	1.92654
3721	1.98919	1.98862	1.91316
5329	1.99577	1.99577	1.95396

2.4.3 Éléments Finis P3

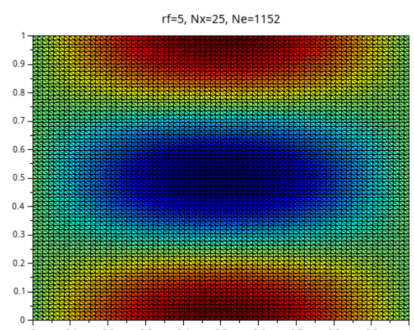

Table 2.12: Ordres de Convergences P3

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	3.05904	3.01542	2.87664
961	3.09398	3.03914	3.07300
3721	3.05904	3.02753	2.95907
5329	3.02970	3.01459	2.99720

Dans ce cas, on a un coefficients de diffusion strictement positive, et l'autre est nul, donc la diffusion est controlée dans une seule direction mais pas l'autre, donc ça engendre une perte de précision pour le schémas numérique, surtout pour les éléments finis P2, P3.

Pour les éléments finis P1 en 2D, les fonctions de bases sont affines, et leurs gradients sont des constantes, donc pour une fonction de base ϕ, on a $\partial_y \phi = 0$ et $\partial_{yy} \phi = 0$, donc on est pas capable de capturer les oscillations dans la direction y. Par contre pour les éléments finis P2, P3, les fonction de bases ont des dérivées double non nulle dans la direction y, et donc ces oscillations qui viennent de bet_y=0, vont diminuer l'ordre de convergence.

2.5 Problème de Diffusion Anisotropique - 3

bet_x=10^{-8} - bet_y=1.0

2.5.1 Éléments Finis P1

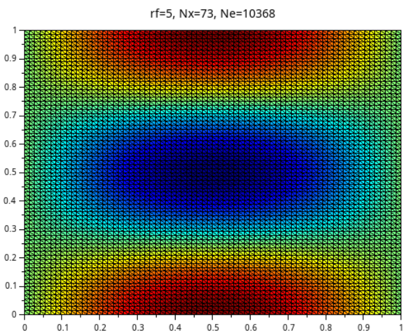

Table 2.13: Ordres de Convergences EF P1

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.95385	1.96422	1.96428
961	1.97641	1.98314	1.98671
3721	1.98690	1.99094	1.99430
5329	1.99257	1.99516	1.99779

2.5.2 Éléments Finis P2

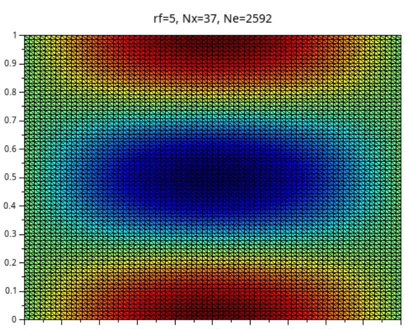

Table 2.14: Ordres de Convergences EF P2

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	2.02834	2.01544	2.10425
961	2.00754	2.00640	2.03411
3721	2.00438	2.00293	1.98629
5329	2.00182	2.00123	1.99467

2.5.3 Éléments Finis P3

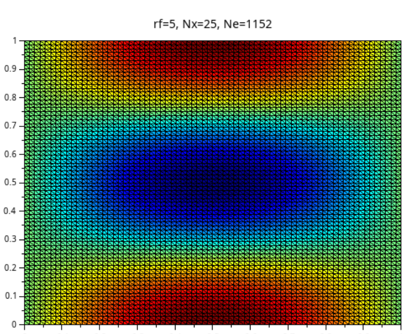

Table 2.15: Ordres de Convergences EF P3

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	3.05480	3.04433	3.01779
961	3.06434	3.02938	3.01797
3721	3.03969	3.01526	3.00915
5329	3.01913	3.00674	3.00392

Dans ce cas, on est équivalent au cas précedent, parce que la stabilisation avec 10^{-8} , ne change pas trop le résultat vue que on est à l'ordre zéro machine.

2.6 Problème de convection - 1

bet_x=0 - bet_y= 0

2.6.1 Éléments Finis P1

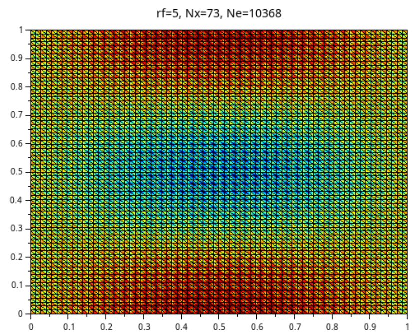

Table 2.16: Ordres de Convergences EF P1

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.74852	1.72200	1.71416
961	-8.14237	-8.13579	-8.00416
3721	3.37056	3.37478	3.36347
5329	-6.53575	-6.55494	-6.51228

2.6.2 Éléments Finis P2

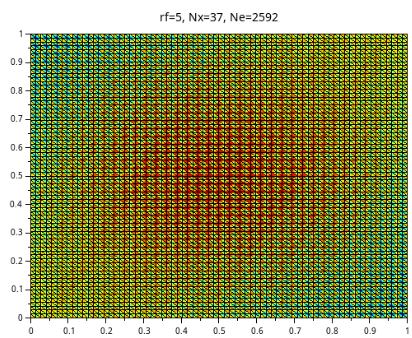

Table 2.17: Ordres de Convergences EF P2

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	-1.75563	-1.74403	-1.73462
961	2.28233	2.28359	2.33131
3721	5.24659	5.23791	5.19899
5329	-11.63702	-11.60970	-11.4353

2.6.3 Éléments Finis P3

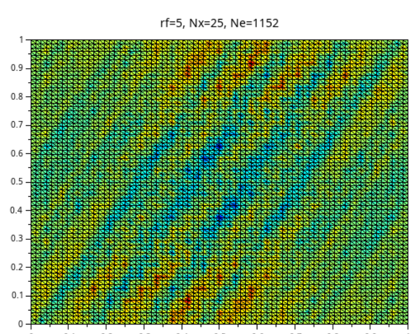

Table 2.18: Ordres de Convergences EF P3

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	0.091138	0.03396	-0.53013
961	4.24665	4.49939	5.42121
3721	0.27163	0.20397	-0.51486
5329	-4.73597	-4.45104	-3.29281

On voit très bien que pour un problème de convection pure, le schéma est instable.
Pour un problème de convection ,on a la matrice de convection qui est non-symmétrique et non-définie positive.

2.7 Problème de convection - 2

bet_x= bet_y= dh^m

2.7.1 Éléments Finis P1

$m = 1$

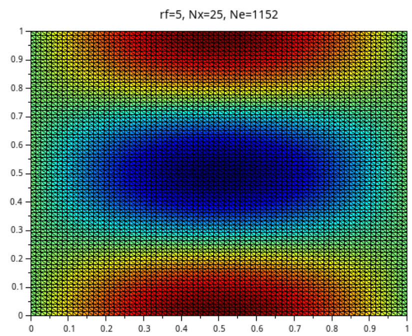

Table 2.19: Ordres de Convergences EF P1 - $m = 1$

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.97112	1.98308	2.07831
961	1.90754	1.95687	2.08645
3721	1.90620	1.95104	2.05827
5329	1.92658	1.95561	2.03342

$m = 2$

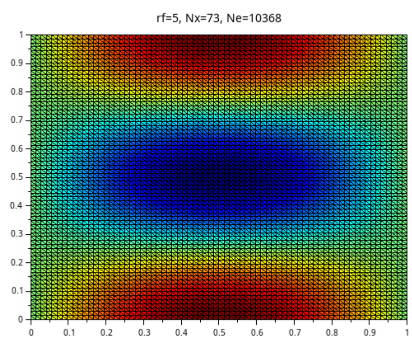

Table 2.20: Ordres de Convergences EF P1 - $m = 2$

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.98728	2.00090	1.74738
961	1.99571	1.99941	1.88509
3721	1.99770	1.99963	1.93538
5329	1.99911	1.99982	1.96316

$m = 3$

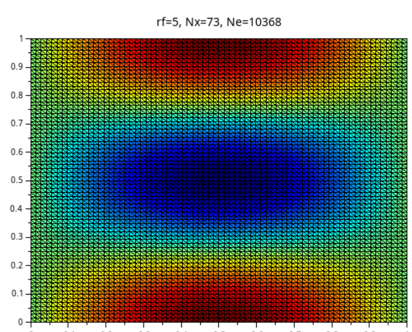

Table 2.21: Ordres de Convergences EF P1 - $m = 3$

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	2.02202	2.00893	1.94600
961	1.98542	1.97772	1.73081
3721	1.80738	1.79945	1.59054
5329	1.41346	1.39649	1.18902

2.7.2 Éléments Finis P2

$m = 1$

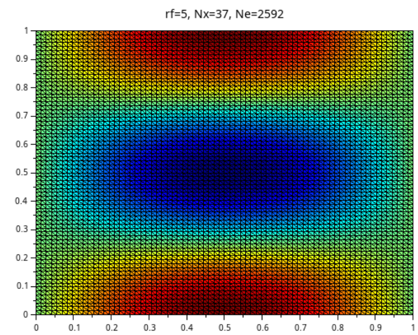

Table 2.22: Ordres de Convergences EF P2 - $m = 1$

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	3.05919	2.9829	2.94559
961	3.03844	2.98196	2.94208
3721	3.02272	2.98681	3.01895
5329	3.01351	2.99100	3.04087

$m = 2$

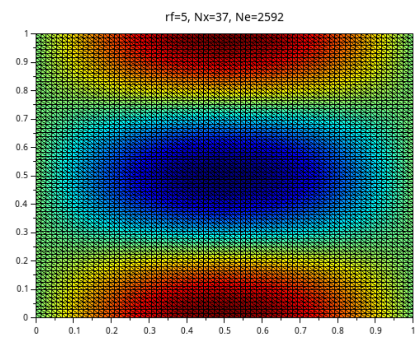

Table 2.23: Ordres de Convergences EF P2 - $m = 2$

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	2.03881	2.05278	2.12951
961	2.01009	2.01687	2.07534
3721	1.99973	2.00576	1.93441
5329	1.99851	2.00152	1.87253

$m = 3$

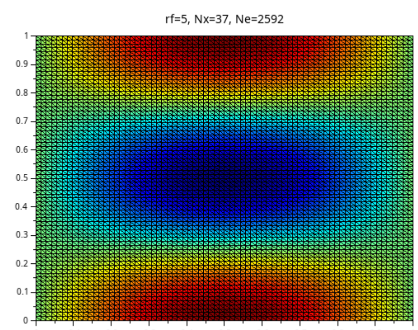

Table 2.24: Ordres de Convergences EF P2 - $m = 3$

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.88702	1.88042	1.79024
961	1.89207	1.89154	1.76315
3721	1.92472	1.91969	1.31702
5329	1.95201	1.93999	1.28818

2.7.3 Éléments Finis P3

$m = 1$

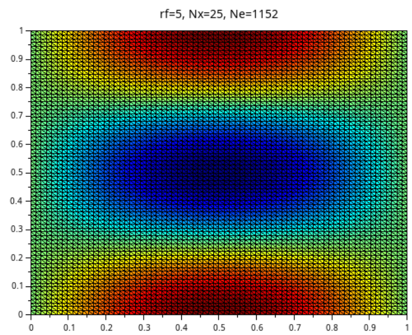

Table 2.25: Ordres de Convergences EF P3 - $m = 1$

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	4.05680	4.03643	3.91231
961	4.01539	4.03475	3.88134
3721	3.94236	3.96746	3.99044
5329	3.83154	3.86755	3.90009

$m = 2$

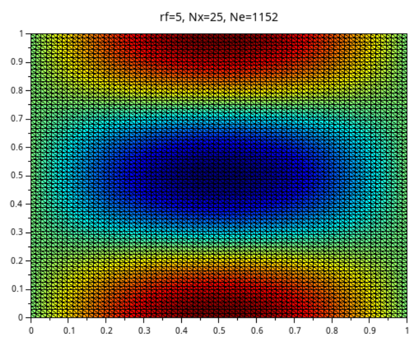

Table 2.26: Ordres de Convergences EF P3 - $m = 2$

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	3.56840	3.53996	2.9969
961	3.04225	2.93576	2.4476
3721	2.67782	2.67194	2.69727
5329	2.4107	2.48314	2.77680

$m = 3$

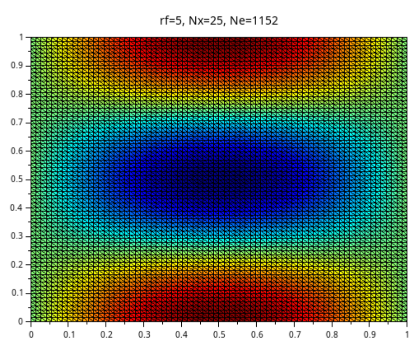

Table 2.27: Ordres de Convergences EF P3 - $m = 3$

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.51875	1.49997	1.13130
961	1.53346	1.46655	1.14225
3721	1.72918	1.66856	1.64177
5329	1.54625	1.58416	1.69793

Dans ce cas, on rajoute un terme diffusive afin de stabiliser le schéma, par un terme $dh = \sqrt{\frac{L_x * L_y}{Ne}}$, qui dépend du nombre d'éléments du maillage.

- Pour les éléments P1 : On voit que pour les éléments , avec un $m = 1$ et $m = 2$ on voit un ordre de convergence égale à l'ordre optimale ,même avec augmentation du nombre d'éléments , pour un $m = 3$ on voit que l'ordre diminue en augmentant le nombre d'éléments.

- Pour les éléments P2 : On voit que pour $m = 1$ on obtient la convergence optimale même en augmentant le nombre d'éléments, par contre pour $m = 2$ et $m = 3$ on observe une diminution d'ordre de convergence, surtout en augmentant le nombre d'éléments.

- Pour les éléments P3 : Tout de même , on observe l'ordre de convergence optimale pour $m = 1$ et on observe une détérioration de cet ordre pour $m = 2$ et $m = 3$ surtout en augmentant le nombre d'éléments.

En augmentant m de 1 à 3, ou en augmentant le nombre d'éléments, le terme de stabilization diminue, et donc se rapproche de 0 et on devient de plus en plus en plus proche du problème convectif pure.

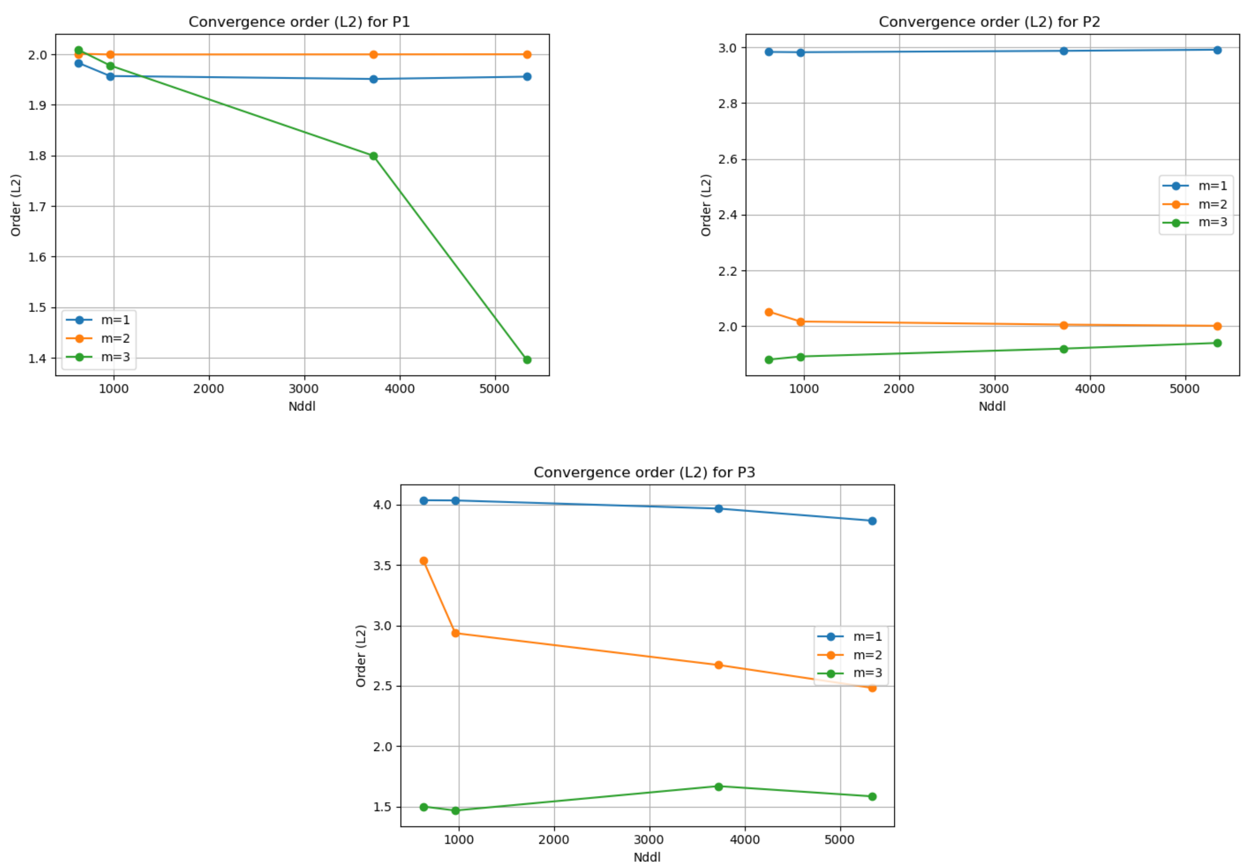

Figure 2.2: Variations de l'ordre de convergence pour différents m, en raffinant le maillage

2.8 Problème de Convection-Réaction-Diffusion anisotrope

2.8.1 Éléments Finis P1

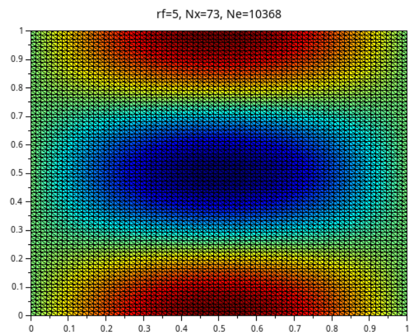

Table 2.28: Ordres de Convergences EF P1

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	1.96948	1.97216	1.96383
961	1.98850	1.98947	1.98745
3721	1.99488	1.99546	1.99447
5329	1.99808	1.99824	1.99822

2.8.2 Éléments Finis P2

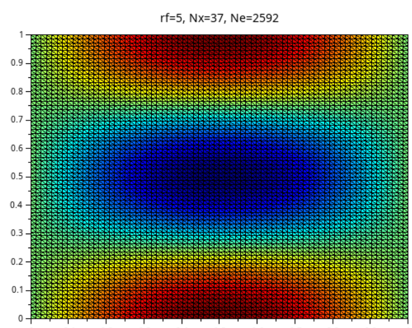

Table 2.29: Ordres de Convergences EF P2

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	3.14889	3.03116	2.85023
961	3.10345	3.01325	2.85401
3721	3.06385	3.00557	2.97114
5329	3.03600	3.00204	3.00165

2.8.3 Éléments Finis P3

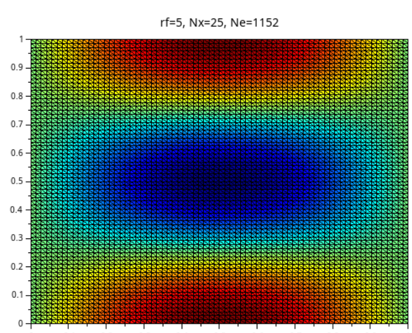

Table 2.30: Ordres de Convergences EF P3

N_{ddl}	$\mathcal{O}_{L^1}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^\infty}$
625	4.06894	4.07209	3.99289
961	4.10116	4.08265	3.94118
3721	4.05844	4.05560	3.99638
5329	4.03749	4.03345	3.99800

Pour le problème de Convection-Réaction-Diffusion, la convergence optimale est obtenue pour les éléments finis P1,P2 et P3; surtout avec les termes de diffusion et de réaction ce qui assure la stabilité du schéma en présence du terme convectif.