Cours 2 2026

Discrétisation VF des équations hyperboliques scalaires en dim 1

$$(E)\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times(0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

- $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $I^0 = [\min_{x\in\mathbb{R}} u^0(x), \max_{x\in\mathbb{R}} u^0(x)]$
- f est supposée Lipchitz sur I^0, i.e $\exists\, \mathrm{Lip}_f$

$$|f(v_2) - f(v_1)| \leq \mathrm{Lip}_f\, |v_2 - v_1| \quad \forall (v_1,v_2)\in I_0\times I_0$$

nb : si f est continue et C^1 par morceaux sur I_0 cela se réduit à $\sup_{v\in I_0} |f'(v)| = \mathrm{Lip}_f$

prop : Il existe une solution faible entropique unique à (E) dans $L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$.
De plus elle vérifie le principe du maximum
$u(x,t) \in I^0 \quad \forall (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T]$

prop : La solution entropique est la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$ $(\varepsilon > 0)$ de l'équation parabolique

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(x,t) + \partial_x f(u_\varepsilon(x,t)) \underbrace{- \varepsilon\, \partial_x^2 u(x,t)}_{\text{terme Diffusif}} = 0 \\ \quad \text{sur } \mathbb{R}\times(0,T) \\ u_\varepsilon(x,0) = u^0(x), \quad x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Exemple : $f(u) = cu$, $c\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0 & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T) \\ u(x,0) = u^0(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

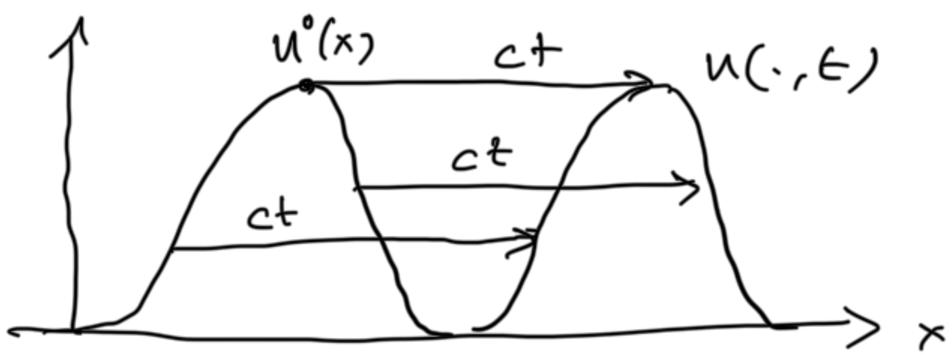
Solution : $u(x,t) = u^0(x-ct)$

Vérifions : $\partial_t u(x,t) = (u^0)'(x-ct)\times(-c)$

$\partial_x u(x,t) = (u^0)'(x-ct)\times 1$

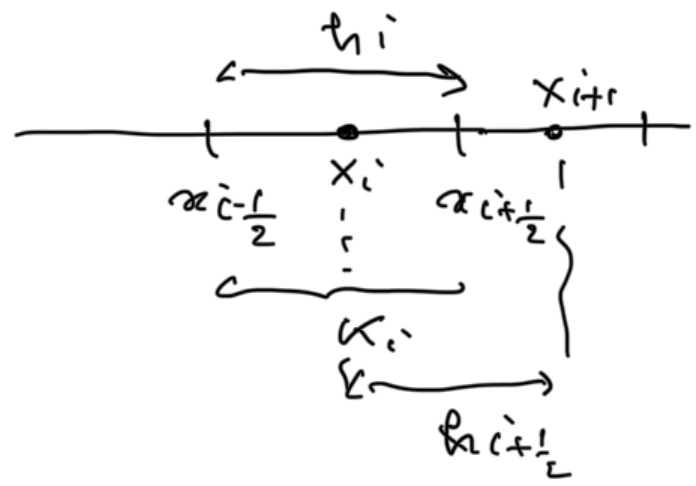
donc on a bien $\partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0$

et $u(x,0) = u^0(x)$



Discrétisation VF

* Discrétisation du domaine



$i \in \mathbb{Z}$

$K_i =]\, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} [$

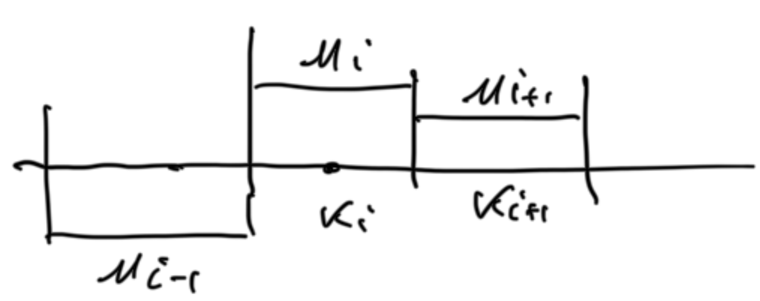
$x_i = \dfrac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2}$

$h_i = | x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} |$

$h_{i+\frac{1}{2}} \; (x_{i+1} - x_i)$

* Espace des solutions discrètes

$$V_h = \{ v_h \in L^\infty(\mathbb{R}),\ v_h(x) = v_i \ \forall x \in K_i,\ \forall i \in \mathbb{Z} \}$$



* Cas semi-discret, volume fini en espace, continu en temps

$u_h(t) \in V_h$

$u_h(x,t) = u_i(t) \quad \forall x \in K_i,\ \forall i \in \mathbb{Z}$

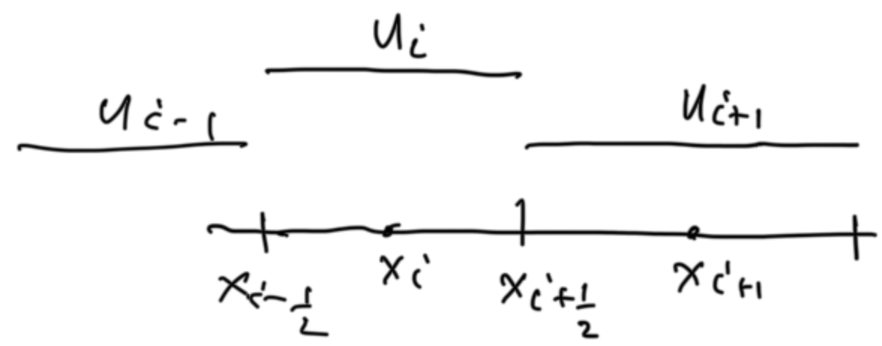
$$\underbrace{\int_{K_i} \partial_t u(x,t)\,dx}_{\approx\ h_i \frac{d}{dt} u_i(t)} + \underbrace{\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_x f(u(x,t))\,dx}_{\underbrace{f(u(x_{i+\frac{1}{2}},t))}_{\text{flux en } x_{i+\frac{1}{2}}} - \underbrace{f(u(x_{i-\frac{1}{2}},t))}_{\text{flux en } x_{i-\frac{1}{2}}}} = 0$$

on approxime

le flux $f(u(x_{i+\frac{1}{2}},t))$ par le flux numérique $F_{i+\frac{1}{2}}(u_h(t))$

$\Rightarrow$ équation de conservation discrète dans la maille K_i :

$$\begin{cases} h_i \dfrac{d}{dt} u_i(t) + F_{i+\frac{1}{2}}(u_h(t)) - F_{i-\frac{1}{2}}(u_h(t)) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ u_i(0) = \dfrac{1}{h_i} \displaystyle\int_{K_i} u^0(x)\,dx \end{cases}$$

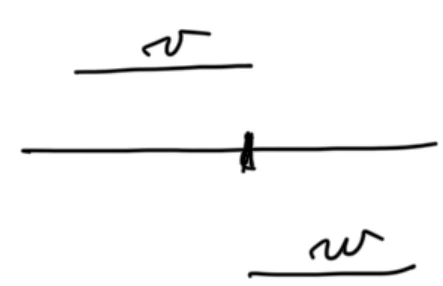


flux centré : $F^c_{i+\frac{1}{2}}(u_h) = f\left(\dfrac{u_i + u_{i+1}}{2}\right)$

(" mauvais choix car instable "

Flux monotone deux points

$$F_{i+\frac{1}{2}}(v, w) = F(\underbrace{v}_{\text{valeur à gauche}}, \overbrace{w}^{\text{valeur à droite}})$$



ex $F_{i-\frac{1}{2}}(u_h) = F(u_{i-1}, u_i)$

$F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) = F(u_i, u_{i+1})$

$F(v, w)$ est un flux monotone deux points ssi il vérifie les trois propriétés suivantes :

* Consistance : $F(v, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$

  " flux exact sur les fonctions constantes "

* Monotonie : $F(v\nearrow, w\searrow)$

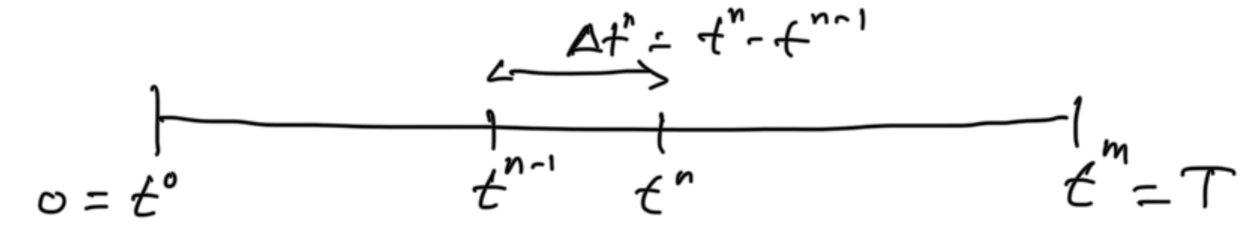
  $F(v, w)$ est croissante par rapport à v et décroissante par rapport à w

  (condition de stabilité au sens ici du principe du maximum)

$*$ $F(v,w)$ est Lipchitz par rapport à v et w $\forall (v,w) \in I_0 \times I_0$.

$$|F(v_2,w) - F(v_1,w)| \leq Lip_1 F \, |v_2 - v_1|$$
$$|F(v,w_2) - F(v,w_1)| \leq Lip_2 F \, |w_2 - w_1|$$
$$\forall v_1, v_2, w_1, w_2, v, w \in I_0.$$

<u>Discrétisation en temps</u> : on va prendre l'exemple des schémas d'Euler explicite et implicites



$$\begin{cases} u_i^n = u_i(t^n) \\ u_i^* = \begin{cases} u_i^n \text{ si implicite} \\ u_i^{n-1} \text{ si explicite} \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n}\left(h_i \frac{du_i(t)}{dt} + F(u_i(t), u_{i+1}(t)) - F(u_{i-1}(t), u_i(t))\right) dt = 0$$

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + \underbrace{\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n} \big(F(u_i(t), u_{i+1}(t)) - F(u_{i-1}(t), u_i(t))\big) dt}_{F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*)}$$

$$\begin{cases} h_i \dfrac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ \qquad \forall n = 1, \dots, m \\ u_i^0 = \dfrac{1}{h_i}\displaystyle\int_{K_i} u^0(x)\, dx \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>Exemple du cas linéaire</u> $f(u) = cu$

Famille des flux deux points linéaires

$$F(v,w) = \alpha v + \beta w + \gamma \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

- Consistance : $F(v,v) = f(v) = cv \quad \forall v \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) v + \gamma = cv \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = c \end{cases}$$

$$F(v,w) = \alpha v + (c-\alpha) w$$

flux centré : $F^c(v,w) = \frac{c}{2}(v+w)$

$$F(v,w) = \frac{c}{2}(v+w) - \frac{c}{2}(v+w) + \alpha v + (c-\alpha) w$$

$$= \frac{c}{2}(v+w) - \frac{c}{2}(v-w) + \alpha(v-w)$$

$$= \frac{c}{2}(v+w) + \underbrace{\left(\alpha - \frac{c}{2}\right)}_{D}(v-w)$$

$\Rightarrow$ famille à un paramètre D de flux linéaires consistant pour $f(u) = cu$:

$$F(v,w) = \underbrace{\frac{c}{2}(v+w)}_{\text{flux centré}} + \underbrace{D(v-w)}_{\text{flux diffusif}}$$

on remarque que $D(v-w)$ est la discrétisation du flux diffusif $D\, h_{i+\frac{1}{2}}\left(-u'(x_{i+\frac{1}{2}})\right)$ (en $x_{i+\frac{1}{2}}$)

Monotonicité de $F(v,w)$:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{c}{2} + D \geq 0 & \Leftrightarrow & D \geq -\frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} - D \leq 0 & \Leftrightarrow & D \geq \frac{c}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boxed{D \geq \frac{|c|}{2}}$$

Le meilleur flux est le moins diffusif, qui s'obtient pour $D = \frac{|c|}{2}$

$$\Rightarrow F(v,w) = \begin{cases} cv & \text{si } c \geq 0 \\ cw & \text{si } c \leq 0 \end{cases}$$

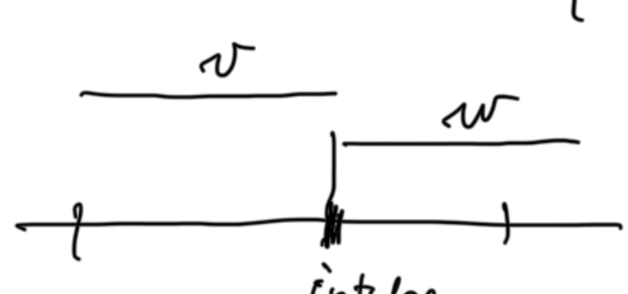


schéma | décentré amont
upwind
Godunov

Analyse de stabilité par le principe du maximum :
on va écrire que le schéma est une combinaison convexe

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + c\,\frac{u_i^* + u_{i+1}^*}{2} + D(u_i^* - u_{i+1}^*)$$
$$- c\,\frac{u_{i-1}^* + u_i^*}{2} - D(u_{i-1}^* - u_i^*) = 0$$

Cas implicite : $* = n$

$$\left(\frac{h_i}{\Delta t^n} + \cancel{\frac{c}{2}} + D - \cancel{\frac{c}{2}} + D\right) u_i^n = \frac{h_i}{\Delta t^n} u_i^{n-1} + \left(D - \frac{c}{2}\right) u_{i+1}^n$$
$$+ \left(D + \frac{c}{2}\right) u_{i-1}^n$$

$$\left.\begin{array}{l} D - \frac{c}{2} \geqslant 0 \\ D + \frac{c}{2} \geqslant 0 \end{array}\right| \iff D \geqslant \frac{|c|}{2}$$

Cas du schéma explicite : $* = n-1$

$$\frac{h_i}{\Delta t^n} u_i^n = \left(\frac{h_i}{\Delta t^n} - \frac{c}{2} - D + \frac{c}{2} - D\right) u_i^{n-1} + \left(D - \frac{c}{2}\right) u_{i+1}^{n-1}$$
$$+ \left(D + \frac{c}{2}\right) u_{i-1}^{n-1}$$

$$\begin{array}{l} D - \frac{c}{2} \geqslant 0 \\ D + \frac{c}{2} \geqslant 0 \end{array} \iff D \geqslant \frac{|c|}{2} \quad \text{stabilité en espace.}$$

$$\frac{h_i}{\Delta t^n} - 2D \geqslant 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \iff \underbrace{\boxed{\Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} \frac{h_i}{2D}}}_{\text{Condition CFL}}$$

Bilan de l'exemple :

- Le schéma implicite est stable au sens où il vérifie le principe du maximum $\forall \Delta t^n > 0$ si $D \geqslant \frac{|c|}{2}$ qui est la condition de monotonie. $\rightarrow$ $u_i^n \in I_0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \ \forall n \geqslant 0$.

- Le schéma explicite est stable au sens où il vérifie le principe du maximum si $D \geqslant \frac{|c|}{2}$ (Monotonie du flux) et $\Delta t^n \leq \min \frac{h_i}{...}$ (Condition CFL) soit $F(v,w)$ un flux monotone deux points.

On va faire l'analyse de stabilité par le principe du maximum

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + \underbrace{F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_i^*, u_i^*)}_{b_i^*(u_i^* - u_{i+1}^*)} \underbrace{- F(u_{i-1}^*, u_i^*) + F(u_i^*, u_i^*)}_{a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + b_i^*(u_i^* - u_{i+1}^*) + a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) = 0$$

Monotonie $\Rightarrow$

$$0 \leq b_i^* = \frac{F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_i^*, u_i^*)}{u_i^* - u_{i+1}^*} \leq \mathrm{Lip}_2 F$$

$$0 \leq a_i^* = \frac{F(u_i^*, u_i^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*)}{u_i^* - u_{i-1}^*} \leq \mathrm{Lip}_1 F$$

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + b_i^*(u_i^* - u_{i+1}^*) + a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) = 0$$

Cas implicite : $$\Big(\underbrace{\frac{h_i}{\Delta t^n} + b_i^* + a_i^*}_{>0}\Big) u_i^n = \underbrace{\frac{u_i^{n-1}}{\Delta t^n}}_{>0} + \underbrace{b_i^*}_{\geq 0} u_{i+1}^n + \underbrace{a_i^*}_{\geq 0} u_{i-1}^n$$

$\Longrightarrow$ on a bien une combinaison convexe et donc le principe du **maximum**

Cas explicite : $$\frac{h_i}{\Delta t^n} u_i^n = \Big(\frac{h_i}{\Delta t^n} - b_i^* - a_i^*\Big) u_i^{n-1} + \underbrace{b_i^*}_{\geq 0} u_{i+1}^{n-1} + \underbrace{a_i^*}_{\geq 0} u_{i-1}^{n-1}$$

$$\Delta t^n \leq \frac{h_i}{a_i^* + b_i^*}$$

Comme $0 \leq a_i^* + b_i^* \leq Lip_1 F + Lip_2 F$, il suffit d'avoir la condition CFL

$$\boxed{\Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} \frac{h_i}{Lip_1 F + Lip_2 F}}$$

Soit $F(v,w)$ un flux Monotone deux points, alors le schéma VF avec Euler implicite admet une solution unique qui vérifie le principe du maximum $U_i^n \in I_0 \ \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$.

Soit $F(v,w)$ un flux Monotone deux points, alors le schéma VF avec Euler explicite admet une solution unique qui vérifie le principe du maximum $U_i^n \in I_0 \ \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$

Sous la condition CFL $\Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i / (\mathrm{Lip}_1 F + \mathrm{Lip}_2 F) \quad \forall n \geq 1$

$c>0$ $\boxed{F(v,w) := cv}$

Equation équivalente : elle s'obtient par $f(u) = cu$, $h_i = h \ \forall i \in \mathbb{Z}$

$\Delta t^n = \Delta t \ \forall n \geq 1$

On injecte $u_i^n = u(x_i, t^n)$ avec u fonction régulière solution de (E) et on fait des développements limités à l'ordre $h^2 + \Delta t^2 + h\Delta t$

Cas implicite :

$$\partial_t u + \partial_x(cu) - \underbrace{\frac{hc}{2}(1 + CFL)}\partial_x^2 u = O(h^2 + \Delta t^2 + h\Delta t)$$

CFL = nombre CFL : $CFL = \frac{c\Delta t}{h}$

(Condition CFL : $\Delta t \leq \frac{h}{c}$)

Cas explicite

$$\partial_t u + \partial_x(cu) - \underbrace{\frac{hc}{2}(1 - CFL)}\partial_x^2 u = O(\text{———})$$