TD Modélisation Géométrique
Problèmes d'intersection

Exercice 1. On suppose données deux courbes de Bézier dont les points de contrôle sont respectivement

$$((1,0),(0,1),(1,2),(0,3)) \text{ et } ((2,0),(2,1),(1,3),(3,3)).$$

Ces deux courbes s'intersectent-elles ? Justifier.

Exercice 2. On considère une cubique plane de Bézier définie par $P(t) := \sum_{i=0}^{3} P_i B_i^3(t)$ où l'on pose $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $i = 0, \ldots, 3$. On considère également une droite du plan d'équation $ax + by + c = 0$.

1. On cherche les points d'intersection de cette cubique avec cette droite. Quelle méthode pourriez-vous proposer pour les obtenir ? La décrire.
2. En considérant le graphe de la fonction obtenue en substituant $P(t)$ dans l'équation de la droite, donner une condition suffisante sur les points de contrôle P_i, $i = 0, \ldots, 3$, afin de décider que l'intersection est vide.

Exercice 3. Dans cet exercice, on s'intéresse à la distance d'un point donné $P = (x_P, y_P)$ du plan à une courbe plane paramétrée $t \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}^2$.

1. On appelle projeté orthogonal de P sur la courbe $\alpha(t)$ tout point Q sur cette courbe qui est tel que la droite (PQ) soit orthogonale au vecteur tangent à la courbe en Q. Montrer que les projetés orthogonaux du point P correspondent aux extremums de la fonction $\|P - \alpha(t)\|^2$.
2. D'après la question précédente, expliquez comment il est possible de ramener le calcul des projetés orthogonaux du point P à la résolution d'un polynôme en la variable t.
3. Illustrer la question précédente en traitant l'exemple de la courbe $\alpha(t) = (t, t^2)$ et en discutant en fonction du point P (par exemple, que se passe-t-il si $x_P = 0$) ?
4. Donner un algorithme qui permet de calculer de le(s) point(s) le plus proche de P sur la courbe $t \mapsto \alpha(t)$.
5. Comment peut-on généraliser cette approche afin de calculer le(s) point(s) le(s) plus proche(s) d'un point $P = (x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$ à une surface paramétrée $(u, v) \mapsto \alpha(u, v) \in \mathbb{R}^3$?