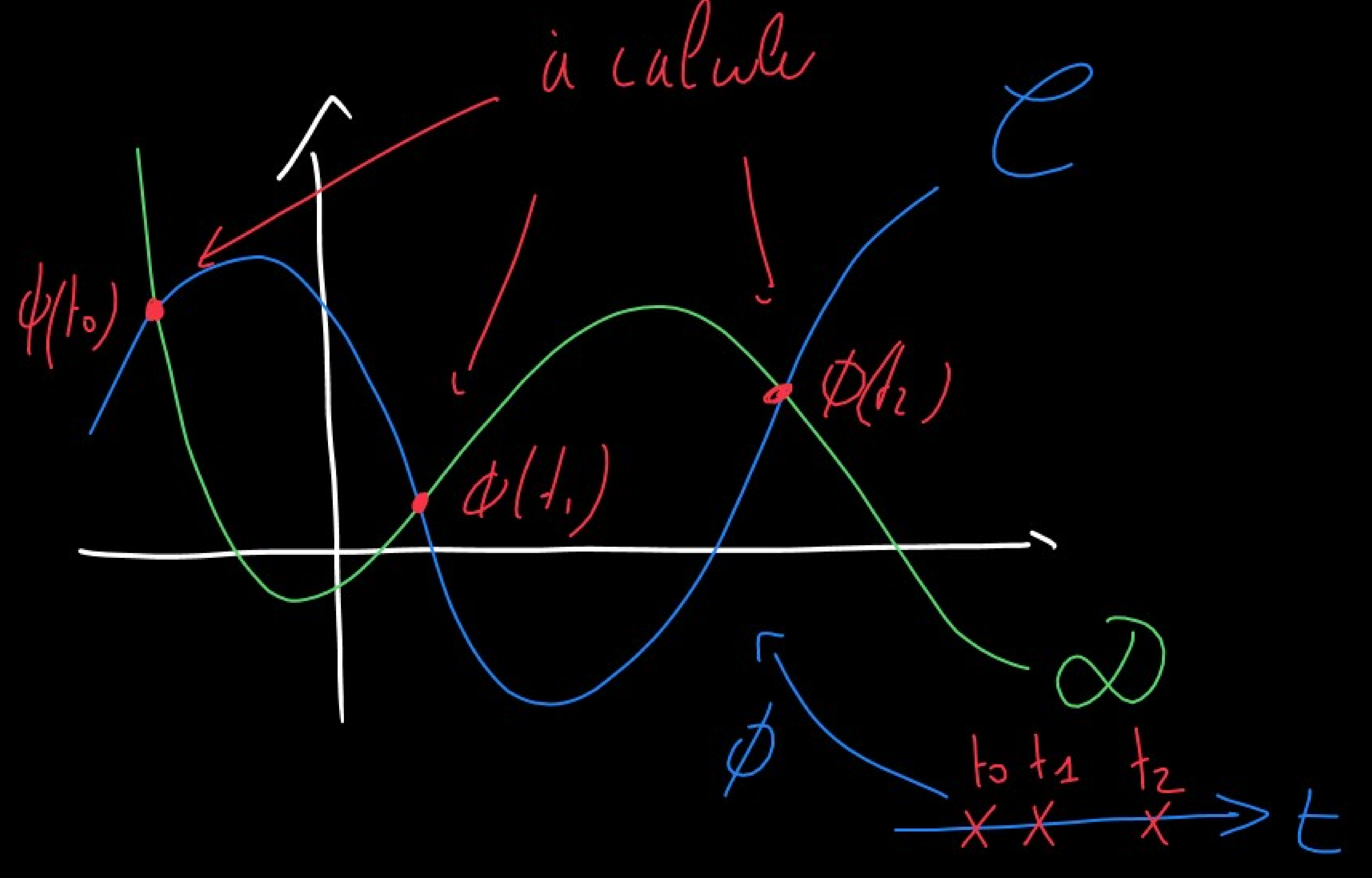
I/ Intersection courbe paramétrée / Courbe implicite

$x, y, w(t)$: pol.

$$\underline{\mathcal{C}} : t \overset{\phi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \frac{x(t)}{w(t)} \\ \frac{y(t)}{w(t)} \end{pmatrix} = \frac{\sum w_i P_i B_i^n(t)}{\sum w_i B_i^n(t)}$$

$$\mathcal{D} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \underbrace{F(x,y)=0}_{\text{pol.}}\}$$

3 var. $\rightsquigarrow$ 1 var.



On substitue la param. de $\mathcal{C}$ ds l'éq. de $\mathcal{D}$:

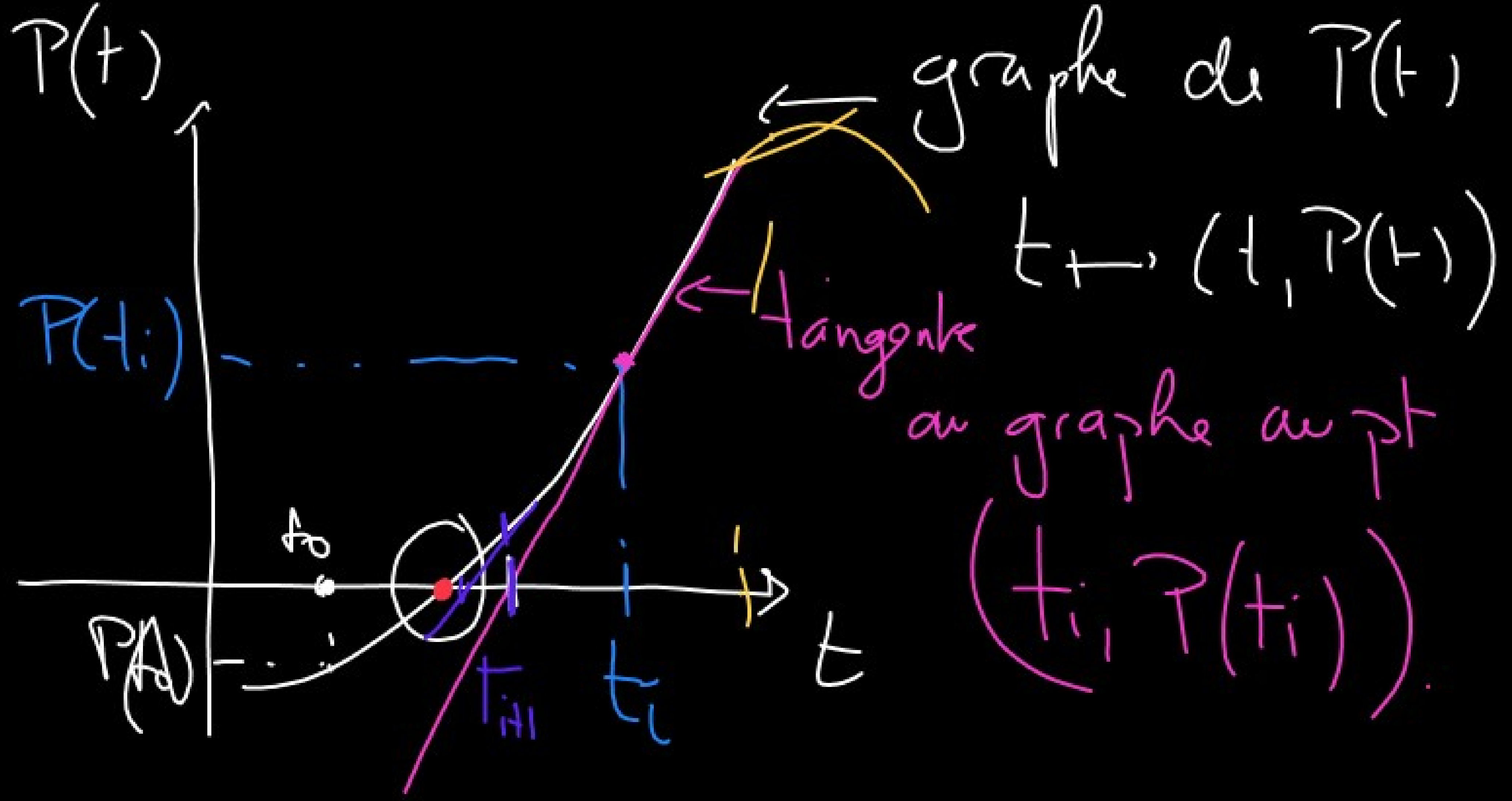
$$F\left(\frac{x(t)}{w(t)}, \frac{y(t)}{w(t)}\right) = 0 = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

sol ent

On s'est ramené à la résol. d'un polynôme en 1 variable. $P(t)=0$

$P \in \mathbb{C}[t]$.

1) Méthode de Newton.



éq. de la tangente : $y = P'(t_i)\cdot(x-t_i)+P(t_i)$

t_{i+1} : $y=0 \rightsquigarrow \dfrac{-P(t_i)}{P'(t_i)} = t_{i+1}-t_i$

$$t_{i+1} := t_i - \frac{P(t_i)}{P'(t_i)}$$

⊕ Très efficace quand ça fonctionne

⊕ Convergence quadratique

⊖ Nécessite une bonne valeur initiale

⊖ Ne calcule qu'une seule racine.

2) Matrice compagnon.

$$P(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_d t^d$$

$\deg(P(t))$ est vraiment de degré d : $p_d \neq 0$

$$M := \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{d-1} \quad \overbrace{\quad}^{1} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\frac{p_0}{p_d} \\ 1 & \ddots & \vdots & -\frac{p_1}{p_d} \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & -\frac{p_{d-1}}{p_d} \end{pmatrix} \end{array} \; d$$

$d \times d$ matrice compagnon

Prop. $\det(M - t I_d) = (-1)^d \dfrac{P(t)}{p_d}$

Intérêt : valeurs propres de $M \longleftrightarrow$ racines de $P(t)$.

↳ méthode exhaustive : on trouve d racines.

Rq : enchaînement : matrice compagnon + Newton est un outil standard en 2D.

Preuve :

$$M - tI_d = \begin{pmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 & -\frac{p_0}{p_d} \\ 1 & -t & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -t & -\frac{p_{d-2}}{p_d} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\frac{p_{d-1}}{p_d} - t \end{pmatrix}$$

dev

$$\left(-\frac{p_{d-1}}{p_d} - t\right)(-t)^{d-1} - \left(-\frac{p_{d-2}}{p_d}\right)(-t)^{d-2} + \left(-\frac{p_{d-3}}{p_d}\right)(-t)^{d-3} \dots$$

3) Méthode de Bernstein

- On suppose que le polynôme est donné dans la base de Bernstein :

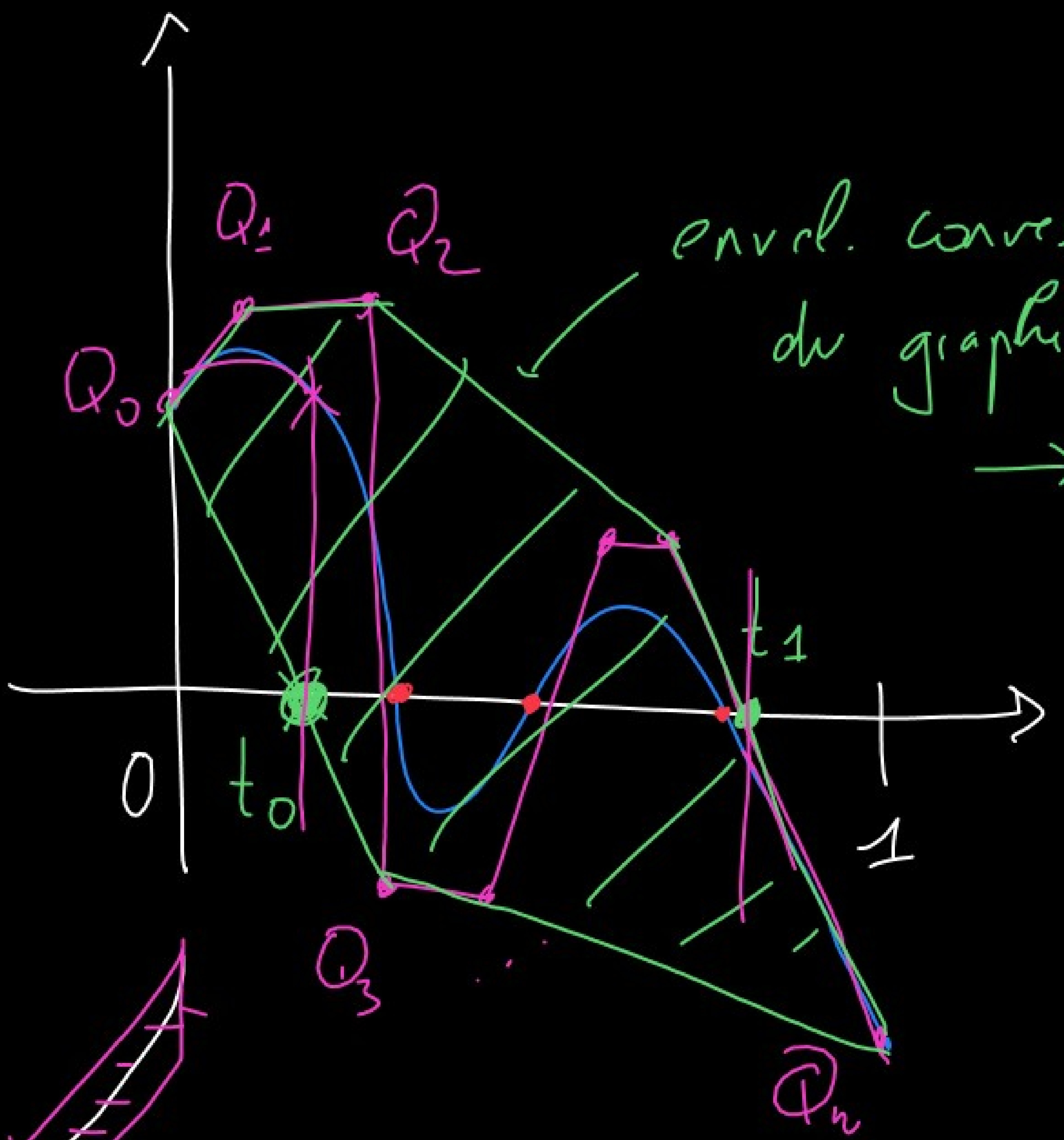
$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_i^n(t) \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

- On cherche les solutions sur l'intervalle $[0;1]$ (sur un compact)

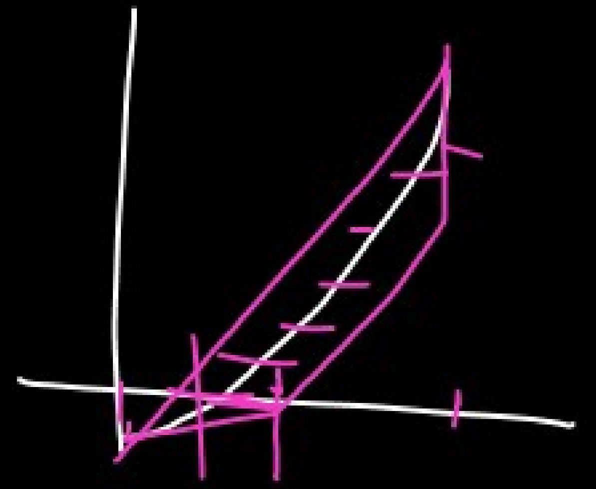
• On considère le graphe de $P(t)$

$$t \longmapsto (t, P(t)) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\begin{pmatrix} i/n \\ a_i \end{pmatrix}}_{Q_i} B_i^n(t) = \begin{pmatrix} \sum \frac{i}{n} B_i^n(t) \\ \sum a_i B_i^n(t) \end{pmatrix}$$

$$t = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_i^n(t)$$



→ les racines sont dans $[t_0; t_1]$

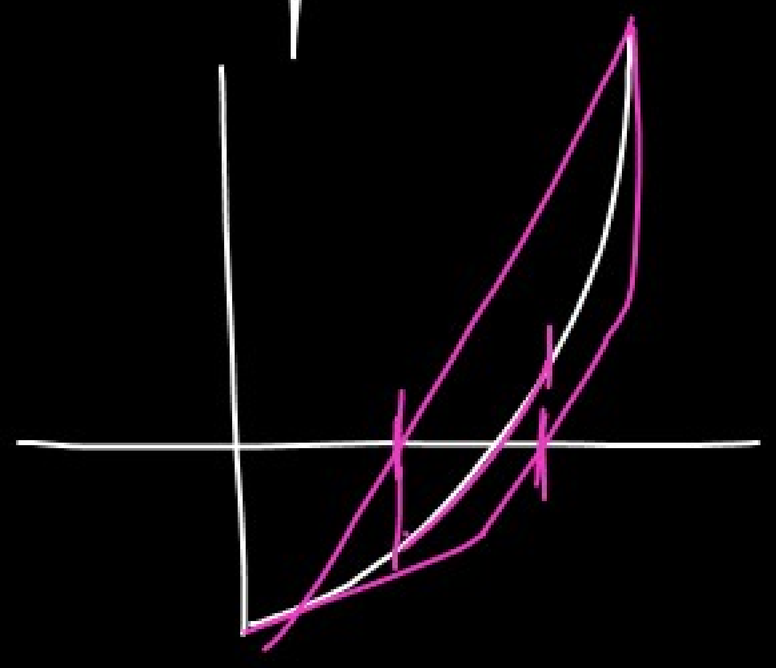


On réduit l'intervalle :

$$[0;1] \longrightarrow [t_0; t_1]$$

- On itère en subdivisant 2 fois la courbe aux points t_0 et t_1.

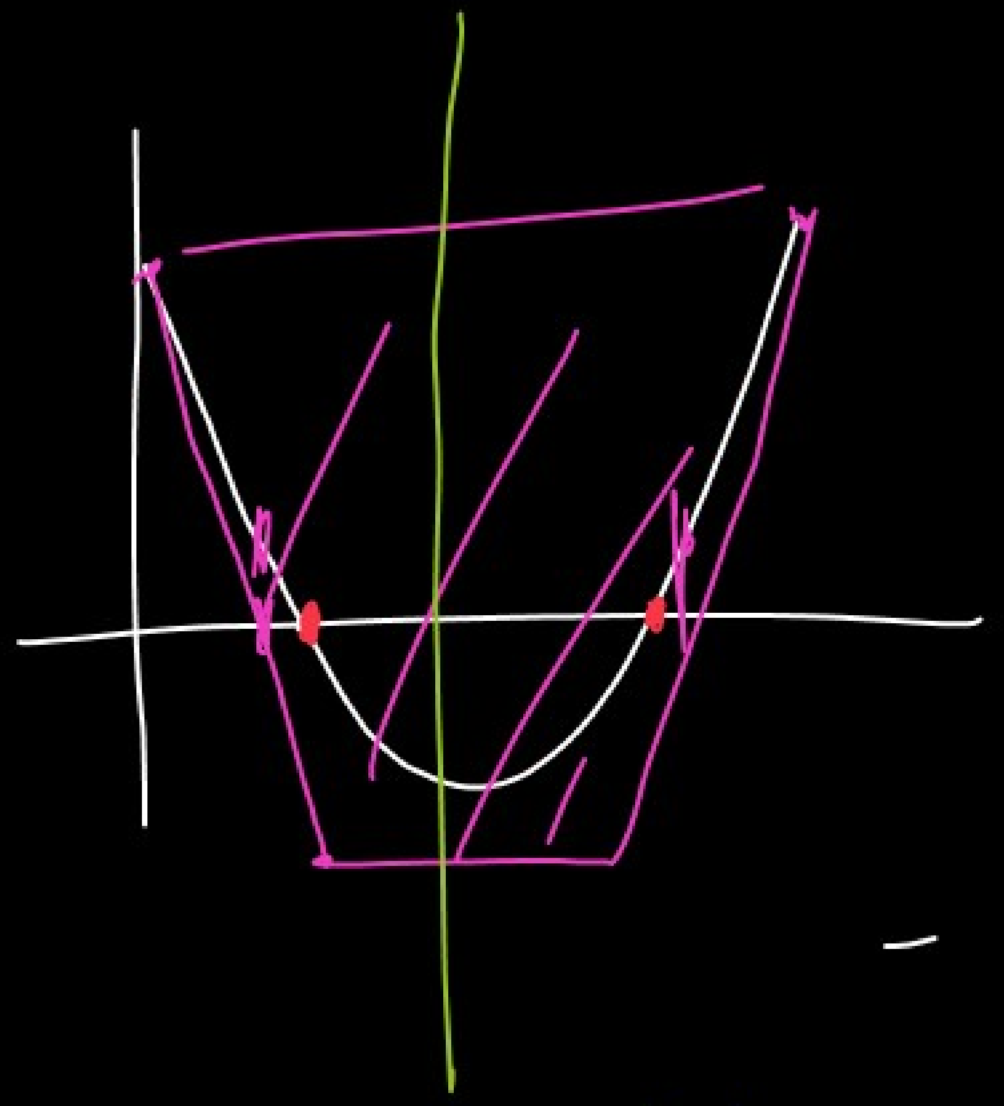
On obtient alors une nouvelle courbe de Bernstein définie sur $[0;1]$.



- ← Convergence rapide.

réduction rapide de l'intervalle qui contient la racine

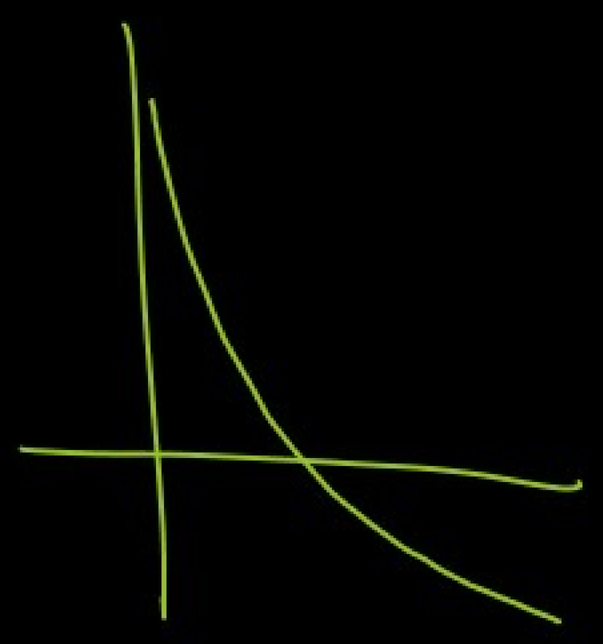
-

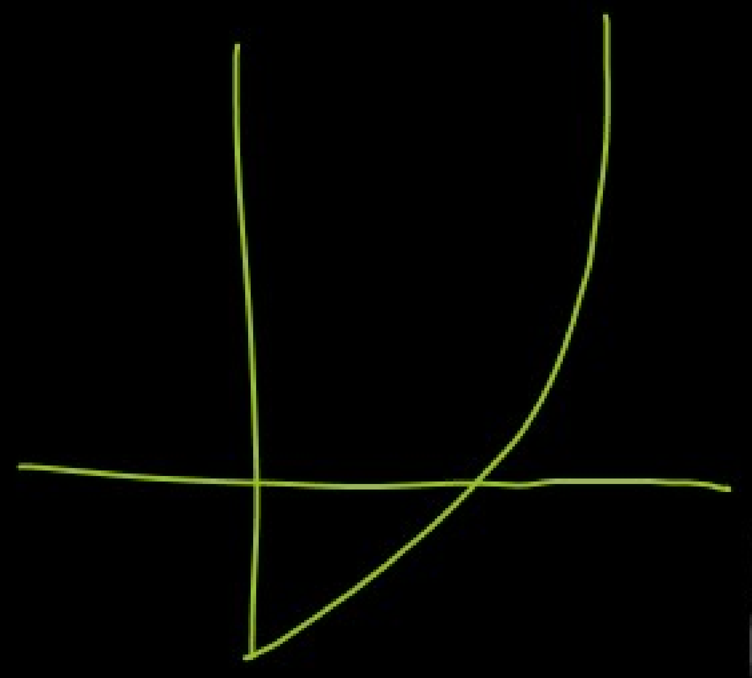


⚠ Le pol. de contrôle ne peut pas traverser les 2 racines.

On subdivise en $t = 1/2$

pb 1 pb 2





- Observation : réduction faible de l'intervalle

$[0;1] \rightarrow [t_0;t_1]$

20 %

Structure de résolution en arbre

⊕ Simplicité précision numérique

⊖ place mémoire D

III Intersection entre 2 courbes paramétrées.

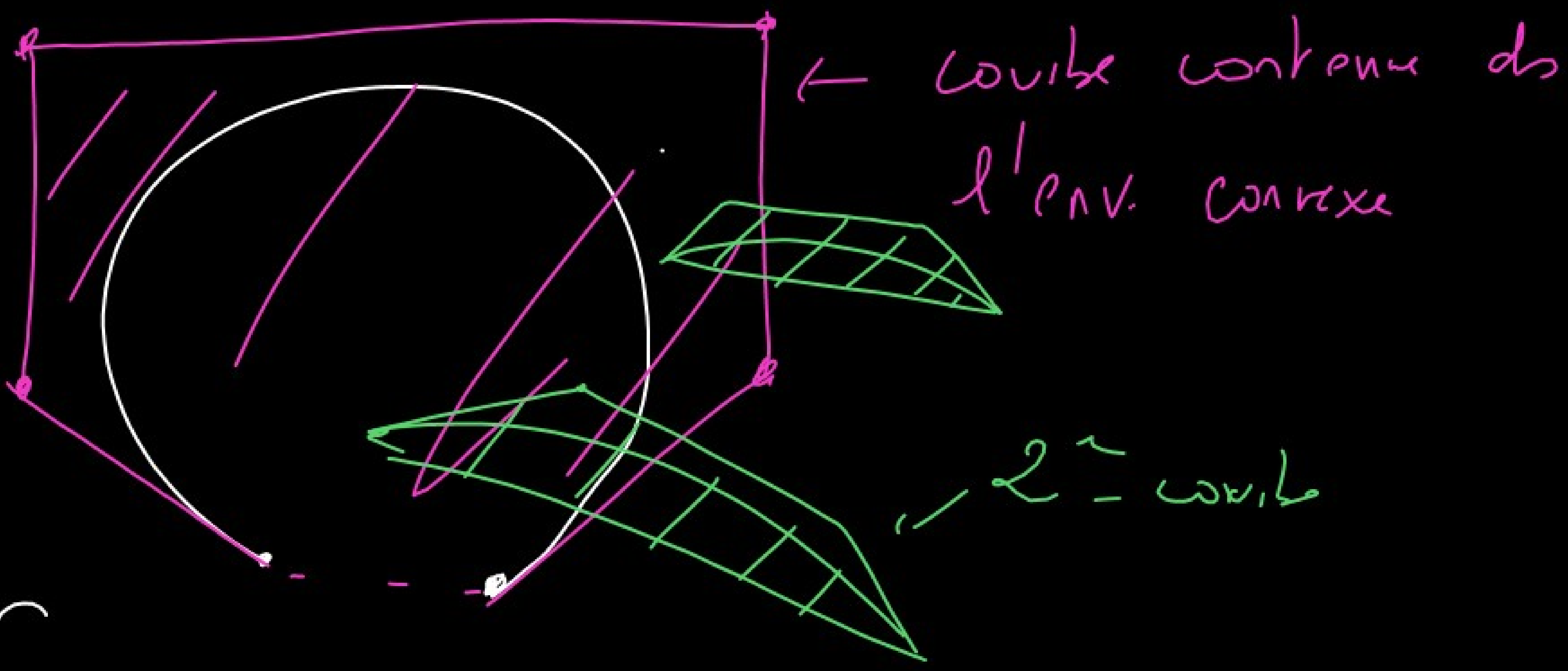
1ère tentative : peut-on "facilement" calculer l'équation implicite d'une courbe paramétrique ? $F(x,y)=0$

$\left(Ex : t \longmapsto \left(\underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{x}, \underbrace{\frac{1-t^2}{1+t^2}}_{y} \right) \right)$

(semaine prochaine).

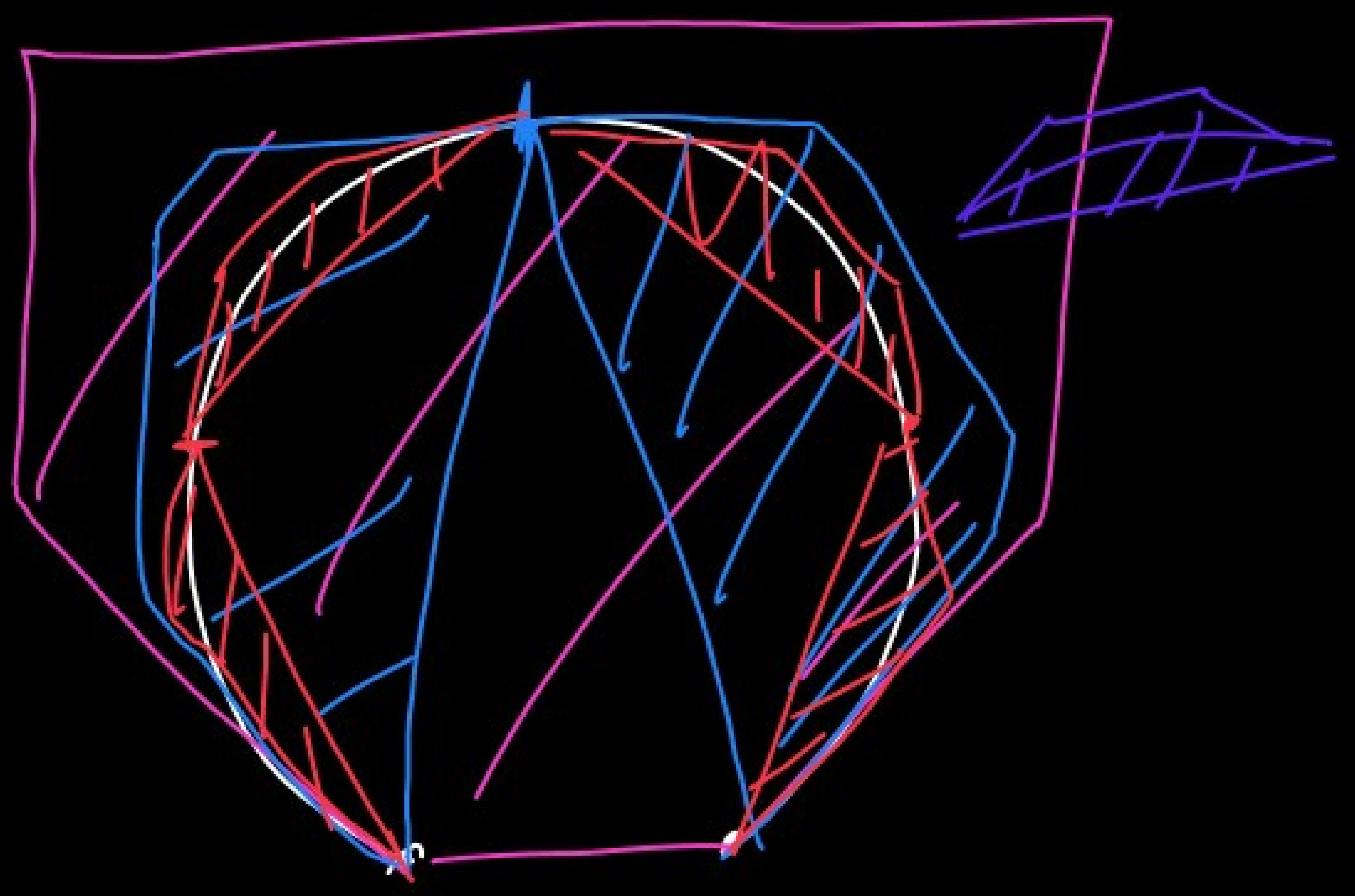
1) Algorithme de subdivision.

On exploite la propriété d'enveloppe convexe des courbes de Bézier / Splines.



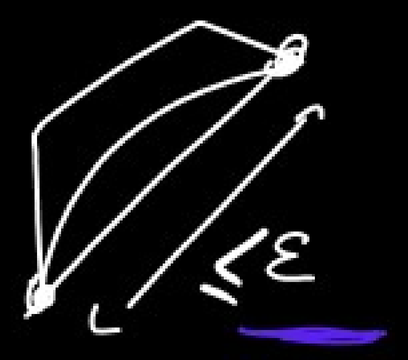
Si les 2 boîtes ne s'intersectent pas, alors il n'y a pas d'$\cap$ entre les 2 courbes.

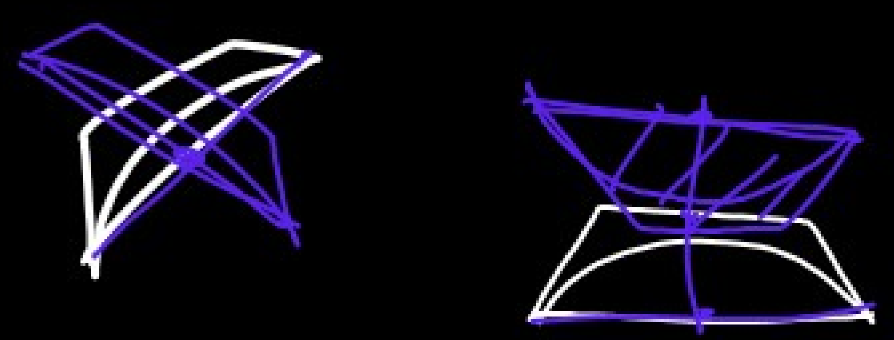
Stratégie : raffiner la boîte.



subdivision en $t = \frac{1}{2}$

- Stratégie subdivision alternée.
- Critère d'arrêt : $\varepsilon \leftarrow$ fixe





← On renvoie une ε-racine

⊖ place mémoire

⊖ calcul des env. convexes

↳ variante "A.A.B.B tree"