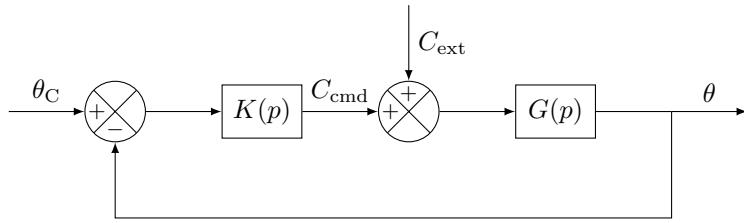


TD Systèmes satellitaires

Sommaire

Système en boucle fermée : fonctions de transfert	1
Loi de contrôle de l'attitude : le PID	2
Exercice automatique	5
Critère de Kalman : applications	6
Loi de contrôle de l'attitude : la commande LQ	8

Système en boucle fermée : fonctions de transfert



1. Écrire la fonction de transfert entre le couple externe C_{ext} de perturbation et l'angle d'attitude θ (sortie du système), avec $p \in \mathbb{C}$.

$$\rightarrow (-\theta(p)K(p) + C_{\text{ext}}(p))G(p) = \theta(p), \text{ donc : } L_1(p) = \frac{\theta(p)}{C_{\text{ext}}(p)} = \frac{G(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

2. Écrire la fonction de transfert entre le couple contrôle C_{cmd} et l'angle d'attitude θ (sortie du système).

$$\rightarrow C_{\text{cmd}}(p)G(p) = \theta(p), \text{ donc : } L_2(p) = \frac{\theta(p)}{C_{\text{cmd}}(p)} = G(p)$$

3. Écrire la fonction de transfert entre la valeur de consigne de l'angle d'attitude θ_C et sa valeur réelle θ .

$$\rightarrow (\theta_C(p) - \theta(p))K(p)G(p) = \theta(p), \text{ donc : } L_3(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_C(p)} = \frac{K(p)G(p)}{1 + K(p)G(p)}$$

4. Écrire la fonction de transfert d'un contrôleur avec action proportionnelle, intégrale et déivative (PID).

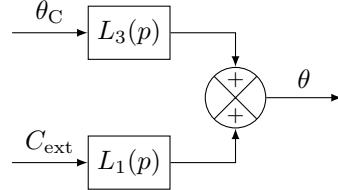
→ La fonction de transfert d'un contrôleur PID a une partie proportionnelle à l'erreur d'attitude $\varepsilon(p) = \theta_C(p) - \theta(p)$ via in coefficient K_P , une partie proportionnelle à l'intégrale de l'erreur d'attitude $\frac{\varepsilon(p)}{p}$ via in coefficient K_I et une partie proportionnelle à la dérivée de l'erreur d'attitude $p\varepsilon(p)$ via in coefficient K_D . La fonction de transfert du contrôleur PID, c'est-à-dire $K(p)$, est donc

$$\frac{C_C(p)}{\varepsilon(p)} = K(p) = K_P + \frac{K_I}{p} + K_D p.$$

On remarque qu'à la génération du signal de sortie $\theta(p)$ de la boucle de contrôle dessinée ci-dessus, il y a la contribution de deux signaux d'entrée :

- le signal de consigne $\theta_C(p)$;
- le couple de perturbation externe $C_{\text{ext}}(p)$.

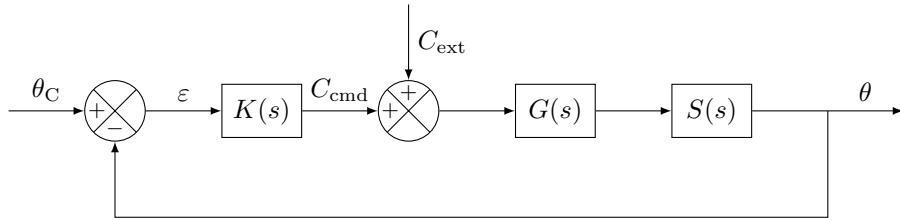
En terme de fonction de transfert, nous pouvons donc écrire $\theta(p) = L_3(p)\theta_C(p) + L_1(p)C_{\text{ext}}(p)$, comme si le système pouvait être décomposé en deux blocs parallèles :



Loi de contrôle de l'attitude : le PID

On considère un satellite placé sur une orbite circulaire à 800 km d'altitude et dont les inerties principales sont $I_X = 420 \text{ kg.s}^2$, $I_Y = 200 \text{ kg.s}^2$ et $I_Z = 615 \text{ kg.s}^2$. Le contrôle d'attitude est de type stabilisé trois axes. On suppose que les hypothèses permettant de découpler la dynamique du satellite axe par axe sont satisfaites. On étudie la stabilisation de l'axe Y du satellite.

On considère la boucle de contrôle représentée sur la figure ci-dessous, avec $s \in \mathbb{C}$:



1. Écrire la fonction de transfert de la dynamique de l'axe Y du satellite (entrée couple, sortie position angulaire) sous les deux hypothèses suivantes :

- la fonction de transfert du senseur $S_1(s) = 1$;
- la fonction de transfert du senseur $S_2(s)$ ayant un pôle simple en $-a = -1 \text{ rad.s}^{-1}$ (a est la constante de temps du senseur).

→ On a $C_{\text{cmd}}(s)G(s)S(s) = \theta(s)$, avec $S_2(s) = \frac{1}{s+a}$, donc $\frac{\theta(s)}{C_{\text{cmd}}(s)} = G(s)S(s)$.

Comme on ne s'intéresse qu'à l'axe Y , alors $G(s) = \frac{1}{I_Y s^2}$. Ainsi $L_{1;1}(s) = G(s)S_1(s) = \frac{1}{I_Y s^2}$

et $L_{1;2}(s) = G(s)S_2(s) = \frac{1}{I_Y s^2(s+a)}$.

2. La dynamique du satellite est-elle stable si elle n'est pas contrôlée ?

→ $\lim_{s \rightarrow 0} sL_{1;1}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{I_Y s} = +\infty$ et $\lim_{s \rightarrow 0} sL_{1;2}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{I_Y s(s+a)} = +\infty$,

donc la dynamique du satellite n'est pas stable si elle n'est pas contrôlée dans les deux cas.

On suppose que le contrôleur est un simple gain constant $K(s) = K_1 > 0$.

3.a. Écrire la fonction de transfert de la boucle fermée entre l'entrée "consigne" θ_C et la sortie "attitude mesurée" θ (attitude en sortie du senseur).

$$\begin{aligned} \rightarrow & \text{On a } \varepsilon(s)K(s)G(s)S(s) = \theta(s) \text{ avec } \varepsilon(s) = \theta_C(s) - \theta(s), \\ \text{donc } & (\theta_C(s) - \theta(s))K(s)G(s)S(s) = \theta(s), \text{ d'où } \frac{\theta(s)}{\theta_C(s)} = \frac{K(s)G(s)S(s)}{1 + K(s)G(s)S(s)}. \\ \text{Ainsi } L_{2;1}(s) &= \frac{K(s)G(s)S_1(s)}{1 + K(s)G(s)S_1(s)} = \frac{\frac{K_1}{I_Y s^2}}{1 + \frac{K_1}{I_Y s^2}} = \frac{K_1}{I_Y s^2} \times \frac{I_Y s^2}{I_Y s^2 + K_1} = \frac{K_1}{I_Y(s^2 + \frac{K_1}{I_Y})} \\ \text{et } L_{2;2}(s) &= \frac{K(s)G(s)S_2(s)}{1 + K(s)G(s)S_2(s)} = \frac{\frac{K_1}{I_Y s^2(s+a)}}{1 + \frac{K_1}{I_Y s^2(s+a)}} = \frac{K_1}{I_Y s^2(s+a)} \times \frac{I_Y s^2(s+a)}{I_Y s^2(s+a) + K_1}, \\ \text{c'est-à-dire } L_{2;2}(s) &= \frac{K_1}{I_Y(s^3 + as^2 + \frac{K_1}{I_Y})}. \end{aligned}$$

3.b. Le système bouclé est-il stable ? Quelle est l'allure de l'attitude en réponse à une consigne impulsionale ?

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sL_{2;1}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s}{I_Y s^2 + K_1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s}{K_1(\frac{I_Y}{K_1}s^2 + 1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s}{K_1} = 0 \\ \text{et } \lim_{s \rightarrow 0} sL_{2;2}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s}{I_Y s^3 + aI_Y s^2 + K_1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s}{K_1(\frac{I_Y}{K_1}s^3 + \frac{aI_Y}{K_1}s^2 + 1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s}{K_1} = 0, \end{aligned}$$

donc le système bouclé est stable dans les deux cas.

En ne considérant uniquement $L_{2;1}(s)$, on remarque qu'il y a deux pôles simples complexes conjugués. Ces pôles appartiennent à l'ensemble $\left\{ \xi\omega + bj\omega\sqrt{1-\xi^2} \in \mathbb{C} \mid (\xi, \omega, b) \in [0; 1[\times \mathbb{R}^{+*} \times \{-1; 1\} \right\}$ (avec $j^2 = -1$). Voici la forme générale de la réponse impulsionale :

$$\forall (\xi, \omega, t) \in [0; 1[\times (\mathbb{R}^{+*})^2, y(t) = \frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{\xi\omega t} \sin(\omega t \sqrt{1-\xi^2})$$

Dans ce cas-ci, nous avons $\xi = 0$ et $\omega = \sqrt{\frac{K_1}{I_Y}}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $y(t) = \sqrt{\frac{K_1}{I_Y}} \sin\left(\sqrt{\frac{K_1}{I_Y}} t\right)$.

Comme s_1 et s_2 sont imaginaires purs, on a alors une réponse oscillatoire permanente.

On suppose maintenant que le contrôleur a la fonction de transfert $K(s) = K_1 + K_2 s$, avec $K_2 > 0$.

4.a. Écrire la fonction de transfert de la boucle fermée entre l'entrée "consigne" θ_C et la sortie "attitude mesurée" θ .

$$\begin{aligned} \rightarrow & \text{On a } L_{3;1}(s) = \frac{K(s)G(s)S_1(s)}{1 + K(s)G(s)S_1(s)} = \frac{\frac{K_1 + K_2 s}{I_Y s^2}}{1 + \frac{K_1 + K_2 s}{I_Y s^2}} = \frac{K_2 s + K_1}{I_Y(s^2 + \frac{K_2}{I_Y}s + \frac{K_1}{I_Y})} \\ \text{et } L_{3;2}(s) &= \frac{K(s)G(s)S_2(s)}{1 + K(s)G(s)S_2(s)} = \frac{\frac{K_1 + K_2 s}{I_Y s^2(s+a)}}{1 + \frac{K_1 + K_2 s}{I_Y s^2(s+a)}} = \frac{K_2 s + K_1}{I_Y(s^3 + as^2 + \frac{K_2}{I_Y}s + \frac{K_1}{I_Y})}. \end{aligned}$$

4.b. Le système bouclé est-il stable ?

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} sL_{3;1}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_2 s^2 + K_1 s}{I_Y s^2 + K_2 s + K_1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s(\frac{K_2}{K_1}s + 1)}{K_1(\frac{I_Y}{K_1}s^2 + \frac{K_2}{K_1}s + 1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s}{K_1} = 0 \\ \text{et } \lim_{s \rightarrow 0} sL_{3;2}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_2 s^2 + K_1 s}{I_Y s^3 + aI_Y s^2 + K_2 s + K_1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s(\frac{K_2}{K_1}s + 1)}{K_1(\frac{I_Y}{K_1}s^3 + \frac{aI_Y}{K_1}s^2 + \frac{K_2}{K_1}s + 1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1 s}{K_1}, \\ \text{c'est-à-dire } \lim_{s \rightarrow 0} sL_{3;2}(s) &= 0, \text{ donc le système bouclé est stable dans les deux cas.} \end{aligned}$$

4.c. On souhaite que le système bouclé réponde comme une fonction de transfert du second ordre de pulsation $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ et d'amortissement $\xi \in]0; 1[$. Comment les gains du contrôleur K_1 et K_2 doivent-ils

être choisis pour placer les pôles complexes du système en boucle fermée ?

→ On ne considère uniquement $L_{3;1}(s)$. Pour que le système bouclé réponde comme la fonction de transfert souhaitée, celle-ci doit avoir pour pôles simples complexes conjugués $s_1 = -\xi\omega - j\omega\sqrt{1-\xi^2}$ et $s_2 = -\xi\omega + j\omega\sqrt{1-\xi^2}$. On pose $P(s) = (s - s_1)(s - s_2)$, alors :

$$\begin{aligned} P(s) &= (s - s_1)(s - \bar{s}_1) \\ &= s^2 - (s_1 + \bar{s}_1)s + s_1\bar{s}_1 \\ &= s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2\xi^2 + \omega^2(1 - \xi^2) \\ &= s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2(\xi^2 + (1 - \xi^2)) \\ &= s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 \end{aligned}$$

On doit donc avoir $L_{3;1}(s) = \frac{K_2s + K_1}{I_Y P(s)}$, c'est-à-dire $P(s) = s^2 + \frac{K_2}{I_Y}s + \frac{K_1}{I_Y}$. Par unicité de l'écriture

d'un polynôme dans une base donnée, on obtient $\begin{cases} \frac{K_2}{I_Y} = 2\xi\omega \\ \frac{K_1}{I_Y} = \omega^2 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} K_2 = 2I_Y\xi\omega \\ K_1 = I_Y\omega^2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} K_2 = 2I_Y\xi\omega \\ K_1 = I_Y\omega^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \xi = \frac{K_2}{2I_Y\omega} \\ \omega^2 = \frac{K_1}{I_Y} \end{cases} \iff \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{K_1}{I_Y}} \\ \xi = \frac{K_2}{2\sqrt{I_Y K_1}} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{K_2}{2\sqrt{I_Y K_1}} \sqrt{\frac{K_1}{I_Y}} - j\sqrt{\frac{K_1}{I_Y}} \sqrt{1 - \left(\frac{K_2}{2\sqrt{I_Y K_1}}\right)^2} \\ &= -\sqrt{\frac{K_1}{I_Y}} \left(\frac{K_2}{2\sqrt{I_Y K_1}} + j\sqrt{\frac{4I_Y K_1 - (K_2)^2}{4I_Y K_1}} \right) \\ &= -\sqrt{\frac{K_1}{I_Y}} \left(\frac{K_2 + j\sqrt{4I_Y K_1 - (K_2)^2}}{2\sqrt{I_Y K_1}} \right) \\ &= \frac{-K_2 - j\sqrt{4I_Y K_1 - (K_2)^2}}{2I_Y} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } s_2 = \bar{s}_1 = \frac{-K_2 + j\sqrt{4I_Y K_1 - (K_2)^2}}{2I_Y}.$$

4.d. Quelle est l'allure de l'attitude en réponse à une consigne impulsionale ?

→ Comme $\frac{-K_2}{2I_Y} < 0$ et $\frac{\sqrt{4I_Y K_1 - (K_2)^2}}{2I_Y} \neq 0$, on a alors une réponse oscillatoire amortie.

4.e. À l'aide du théorème de la valeur finale, calculer l'erreur d'attitude vis-à-vis d'un échelon de consigne.

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{Soit } \theta_C(s) &= \frac{A}{s} \text{ un échelon de consigne d'amplitude } A \in \mathbb{R}^*. \\ \lim_{s \rightarrow 0} s(\theta_C(s) - \theta(s)) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\theta_C(s)(1 - L_{3;1}(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} A \left(1 - \frac{K_2s + K_1}{I_Y s^2 + K_2s + K_1} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{AI_Y s^2}{I_Y s^2 + K_2s + K_1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{AI_Y s^2}{K_1 \left(\frac{I_Y}{K_1} s^2 + \frac{K_2}{K_1} s + 1 \right)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{AI_Y s^2}{K_1} \\ = 0$$

4.f. À l'aide du théorème de la valeur finale, calculer l'erreur d'attitude vis-à-vis d'un échelon de perturbation. Proposer une solution permettant d'annuler cette erreur.

→ On a $(-\theta(s)K(s) + C_{\text{ext}}(s))G(s)S(s) = \theta$, alors $L(s) = \frac{\theta(s)}{C_{\text{ext}}(s)} = \frac{G(s)S(s)}{1 + K(s)G(s)S(s)}$.

Ainsi on obtient les fonctions de transfert $L_{4;1}(s) = \frac{G(s)S_1(s)}{1 + K(s)G(s)S_1(s)} = \frac{1}{I_Y(s^2 + \frac{K_2}{I_Y}s + \frac{K_1}{I_Y})}$ et $L_{4;2}(s) = \frac{G(s)S_2(s)}{1 + K(s)G(s)S_2(s)} = \frac{1}{I_Y(s^3 + as^2 + \frac{K_2}{I_Y}s + \frac{K_1}{I_Y})}$. Soit $C_{\text{ext}}(s) = \frac{B}{s}$ un échelon de perturbation d'amplitude $B \in \mathbb{R}^*$. On ne considère maintenant que $L_{4;1}(s)$.

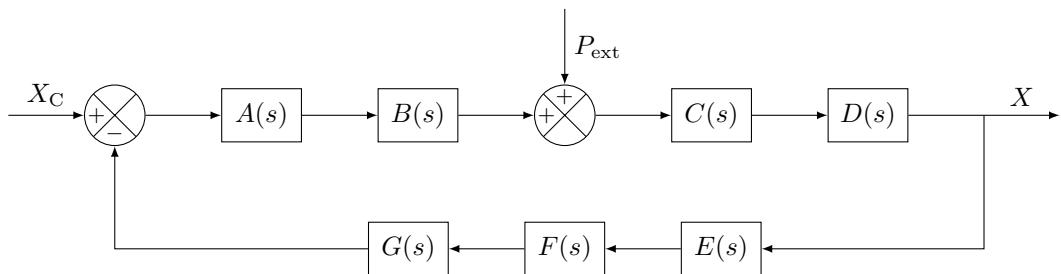
$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s\theta(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} sL_{4;1}(s)C_{\text{ext}}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B}{I_Y s^2 + K_2 s + K_1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B}{K_1 \left(\frac{I_Y}{K_1} s^2 + \frac{K_2}{K_1} s + 1 \right)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B}{K_1} \\ &= \frac{B}{K_1} \end{aligned}$$

La solution pour annuler cette erreur serait de considérer la fonction de transfert

$K(s) = K_1 + K_2 s + \frac{K_3}{s}$ (avec $K_3 > 0$), ajoutant ainsi une action intégrale dans le contrôleur. Voici la nouvelle fonction de transfert :

$$\begin{aligned} L_5(s) &= \frac{G(s)S_1(s)}{1 + K(s)G(s)S_1(s)} = \frac{\frac{1}{I_Y s^2}}{1 + \frac{K_1 + K_2 s + \frac{K_3}{s}}{I_Y s^2}} = \frac{s}{I_Y(s^3 + \frac{K_2}{I_Y}s^2 + \frac{K_1}{I_Y}s + \frac{K_3}{I_Y})} \\ \lim_{s \rightarrow 0} s\theta(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} sL_5(s)C_{\text{ext}}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Bs}{I_Y s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_3} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Bs}{K_3 \left(\frac{I_Y}{K_3} s^3 + \frac{K_2}{K_3} s^2 + \frac{K_1}{K_3} s + 1 \right)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Bs}{K_3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice automatique



1. Écrire la fonction de transfert entre X_C et X , avec $s \in \mathbb{C}$.

$$\rightarrow (-X(s)E(s)F(s)G(s) + X_C(s))A(s)B(s)C(s)D(s) = X(s), \text{ donc :}$$

$$L_1(s) = \frac{X(s)}{X_C(s)} = \frac{A(s)B(s)C(s)D(s)}{1 + A(s)B(s)C(s)D(s)E(s)F(s)G(s)}$$

2. Écrire la fonction de transfert entre P_{ext} et X .

$$\rightarrow (-X(s)E(s)F(s)G(s)A(s)B(s) + P_{\text{ext}}(s))C(s)D(s) = X(s), \text{ donc :}$$

$$L_2(s) = \frac{X(s)}{P_{\text{ext}}(s)} = \frac{C(s)D(s)}{1 + A(s)B(s)C(s)D(s)E(s)F(s)G(s)}$$

Critère de Kalman : applications

1.a. Le système induit par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est-il contrôlable (i.e. commandable) ?

\rightarrow On a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$, où $n = 3$. On pose donc la matrice ligne par blocs de contrôlabilité $\mathcal{C} = [A^i B]_{i=0}^{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\text{rg}(\mathcal{C}) = \text{rg}\left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq n$$

Ainsi le système n'est pas contrôlable.

Seul le premier coefficient de B est non-nul, ce qui signifie que la contrôlabilité du système est liée uniquement à la première variable du vecteur d'état. Donc en retirant la première ligne et la première colonne de A , on obtient la matrice associée à la partie non-contrôlable du système $\overline{A_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme 1 est valeur propre double positive de $\overline{A_c}$, alors le système n'est pas stabilisable non plus.

1.b. Le système induit par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est-il contrôlable ?

\rightarrow On a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$, où $n = 3$. On pose donc la matrice ligne par blocs de contrôlabilité $\mathcal{C} = [A^i B]_{i=0}^{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\text{rg}(\mathcal{C}) = \text{rg}\left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = n$$

Ainsi le système est contrôlable (et donc aussi stabilisable).

Remarque : Pour calculer le rang d'une matrice A et la matrice de contrôlabilité pour un couple de matrices (A, B) , les commandes Matlab respectives sont `rank(A)` et `ctrb(A, B)`.

1.c. Le système induit par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-il observable ?

→ On a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{1;n}(\mathbb{R})$, où $n = 3$. On pose donc la matrice colonne par blocs d'observabilité $\mathcal{O} = {}^t \left(\begin{bmatrix} CA^i \end{bmatrix}_{i=0}^{n-1} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\text{rg}(\mathcal{O}) = \text{rg} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2 \neq n$$

Ainsi le système n'est pas observable.

Seul le deuxième coefficient de C est non-nul, donc en retirant la deuxième ligne et la deuxième colonne de A , on obtient la matrice associée à la partie non-observable du système $\overline{A}_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme 1 est valeur propre double positive de \overline{A}_o , alors le système n'est pas détectable non plus.

1.d. Le système induit par les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-il observable ?

→ On a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{1;n}(\mathbb{R})$, où $n = 3$. On pose donc la matrice colonne par blocs d'observabilité $\mathcal{O} = {}^t \left(\begin{bmatrix} CA^i \end{bmatrix}_{i=0}^{n-1} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\text{rg}(\mathcal{O}) = \text{rg} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) = n$$

Ainsi le système est observable (et donc aussi détectable).

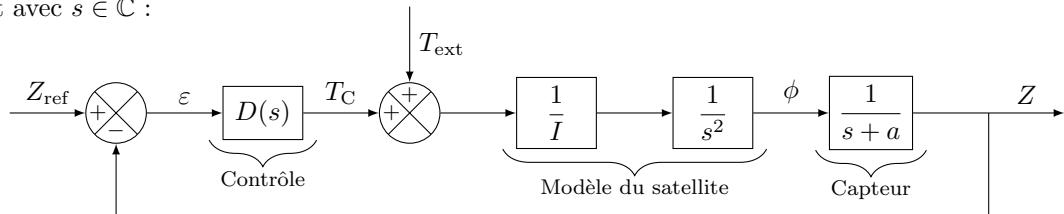
Un système de contrôle d'attitude d'un satellite utilise le principe de la conservation du moment angulaire pour fournir un couple de contrôle qui induit un mouvement angulaire. Le mouvement rotationnel d'un satellite le long d'un axe est modélisé par l'équation du deuxième ordre $I\ddot{\phi} = t_C + t_{\text{ext}}$, où :

- ϕ est l'angle d'orientation du satellite par rapport à l'axe de rotation considéré ;
- $I = 1000 \text{ kg.m}^2$ est l'inertie du satellite le long de l'axe considéré ;
- t_C est le couple lié au contrôle ;
- t_{ext} est le couple lié à des perturbations extérieures.

Le modèle de la roue qui est l'actionneur capable de fournir le couple de contrôle peut s'exprimer comme $J\dot{r} = -t_C$, avec :

- r la vitesse de rotation angulaire ;
- J l'inertie de la roue ;
- t_C le couple de contrôle ;

L'équation qui modélise la mesure z de l'angle d'attitude ϕ est $\dot{z} = \phi - az$, où a est la constante de temps du capteur égale à 1 rad.s^{-1} . L'expression du couple de contrôle en terme de transformée de Laplace est $T_C = -D(s)(Z - Z_{\text{ref}})$, avec T_C , Z et Z_{ref} qui sont les transformées de Laplace respectives de t_C , z et z_{ref} et avec $s \in \mathbb{C}$:



2. En considérant un contrôleur purement proportionnel constant, c'est-à-dire $D(s) = K_0$, écrire la fonction de transfert $W(s)$ du système en boucle fermée entre Z_{ref} et Z .

→ On a $\frac{Z}{Z_{\text{ref}}} = W(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$ où $L(s) = D(s)G(s)H(s)$ est la fonction du système en boucle ouverte et donc $D(s) = K_0$, $G(s) = \frac{1}{I} \times \frac{1}{s^2} = \frac{1}{Is^2}$ et $H(s) = \frac{1}{s+a}$ sont respectivement les fonctions de transfert du contrôleur, de la dynamique du satellite et du capteur.
Ainsi $L(s) = \frac{K_0}{Is^2(s+a)}$ et $W(s) = \frac{K_0}{I(s^3 + as^2 + \frac{K_0}{I})}$.

3. Écrire les équations du système en boucle ouverte en utilisant comme variables d'état l'angle ϕ , la vitesse $\dot{\phi}$ et la mesure z .

→ Les équations sous forme matricielle du système en boucle ouverte sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Fx + Gu + Ew \\ y = Hx \end{array} \right. , \text{ avec :}$$

$$x = \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ z \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; G = E = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{pmatrix}; u = \begin{pmatrix} t_C \end{pmatrix}; w = \begin{pmatrix} t_{\text{ext}} \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} \phi \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t_C + t_{\text{ext}}}{I} \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Calculer ensuite le gain matriciel $K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 \end{pmatrix}$ du contrôleur à retour d'état pour placer les valeurs propres simples complexes conjugués du système en boucle fermée à $\lambda_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{50}$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, la troisième valeur propre simple étant $\lambda_3 = -1$ et en ayant $t_C = -K_1\phi - K_2\dot{\phi}$.

→ La matrice d'état du système en boucle fermée avec $u_F = -Kx$ est :

$$A = F - GK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-K_1}{I} & \frac{-K_2}{I} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut placer les pôles du système parce que celui-ci est contrôlable (le rang de matrice de contrôlabilité du système vaut 3). (*le peu de calcul restant est laissé au lecteur* Θ)

Loi de contrôle de l'attitude : la commande LQ

On considère un satellite placé sur une orbite circulaire. Le contrôle d'attitude est de type stabilisé sur les trois axes. On suppose que les hypothèses permettant de découpler la dynamique du satellite axe par axe sont satisfaites. On étudie la stabilisation de l'axe Z du satellite, axe d'inertie $I_Z \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Écrire l'équation différentielle régissant la dynamique de l'axe Z du satellite.

→ Sous l'hypothèse de découplage axe par axe, on a $I_Z \ddot{\psi} = T_{\text{ext};Z} - \dot{H}_{\text{ext};Z}$.

2. Écrire la représentation d'état de la dynamique. On supposera que l'on mesure l'attitude et la vitesse angulaire.

→ Avec les variables respectivement d'état, de sortie et de contrôle $(x, y, u) \in (\mathcal{M}_{2;1}(\mathbb{R}))^2 \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on a la représentation d'état standard suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + d \\ y = Cx \end{cases}, \text{ avec } A, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } B, d \in \mathcal{M}_{2;1}(\mathbb{R})$$

Il n'y a pas de sortie particulière souhaitée, donc on rend la deuxième équation triviale en posant $y = x$ et $C = I_2$. Ensuite, on pose $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, avec l'attitude $x_1 = \psi$ et la vitesse angulaire autour de l'axe Z $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\psi} = \omega_z$. À l'aide de l'équation différentielle du second ordre de la question ci-dessus (1.), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{I_Z}u + \frac{1}{I_Z}T_{\text{ext};Z} \end{cases}, \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} \dot{x}_1 = 0x_1 + 1x_2 + 0u + 0 \\ \dot{x}_2 = 0x_1 + 0x_2 + \frac{1}{I_Z}u + \frac{T_{\text{ext};Z}}{I_Z} \end{cases}$$

Ainsi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_Z} \end{pmatrix}$ et $d = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{T_{\text{ext};Z}}{I_Z} \end{pmatrix}$.

3. Le système est-il stabilisable ?

→ On a la matrice (ligne par blocs) de contrôlabilité $\mathcal{C} = \left[A^i B \right]_{i=0}^{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n = 2$ le degré de l'équation différentielle originelle, donc $\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{I_Z} & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\text{rg}(\mathcal{C}) = n$, ainsi le système est contrôlable et donc stabilisable.

On considère une commande LQ, avec une fonction de coût quadratique, dans laquelle la matrice de pondération sur l'état $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ est diagonale.

4. Calculer l'expression du retour d'état optimal $u_F \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ en fonction des composantes de la matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ solution de l'équation algébrique de Riccati du problème LQ.

→ On considère l'équation algébrique de Riccati ("Algebraic Riccati Equation" que l'on désignera par ARE) d'inconnue matricielle $P = \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{2;1} & p_{2;2} \end{pmatrix}$: $PA + A^tP - PBR^{-1}B^tP + C^tQC = 0_n$.
On a $Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{+*})$ qui est la matrice de pondération de la nouvelle variable de contrôle u_F , donc R est de même dimension que u_F . Ainsi :

$$\begin{aligned} u_F &= -R^{-1}B^tPx \\ &= \left(\frac{-1}{r} \right) \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{I_Z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{2;1} & p_{2;2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{-p_{2;1}}{rI_Z} \quad \frac{-p_{2;2}}{rI_Z} \right) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{-p_{2;1}x_1 - p_{2;2}x_2}{rI_Z} \right) \end{aligned}$$

5. À l'aide de l'équation algébrique de Riccati, donner les relations entre les composantes de la matrice P et celles des matrices Q et R du critère quadratique (pour ensuite faire l'application numérique avec $I_Z = 100$ et $q_1 = q_2 = r = 1$).

→ À l'aide de la ARE :

$$\begin{aligned}
PA + {}^t AP - PBR^{-1} {}^t BP + {}^t CQC &= 0_n \\
\iff \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{2;1} & p_{2;2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{2;1} & p_{2;2} \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{2;1} & p_{2;2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_Z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{I_Z} \\ 0 & I_Z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{2;1} & p_{2;2} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\iff \begin{pmatrix} 0 & p_{1;1} \\ 0 & p_{2;1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_{1;1} & p_{1;2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{2;1} & p_{2;2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r(I_Z)^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{2;1} & p_{2;2} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\iff \begin{pmatrix} 0 & p_{1;1} \\ p_{1;1} & p_{1;2} + p_{2;1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{r(I_Z)^2} \begin{pmatrix} 0 & p_{1;2} \\ 0 & p_{2;2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{1;1} & p_{1;2} \\ p_{2;1} & p_{2;2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\iff \begin{pmatrix} q_1 & p_{1;1} \\ p_{1;1} & p_{1;2} + p_{2;1} + q_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{r(I_Z)^2} \begin{pmatrix} p_{1;2}p_{2;1} & p_{1;2}p_{2;2} \\ p_{2;2}p_{2;1} & (p_{2;2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\iff \begin{cases} q_1 - \frac{p_{1;2}p_{2;1}}{r(I_Z)^2} = 0 \\ p_{1;1} - \frac{p_{1;2}p_{2;2}}{r(I_Z)^2} = 0 \\ p_{1;1} - \frac{p_{2;2}p_{2;1}}{r(I_Z)^2} = 0 \\ p_{1;2} + p_{2;1} + q_2 - \frac{(p_{2;2})^2}{r(I_Z)^2} = 0 \end{cases} \\
\iff \begin{cases} p_{1;1} = \frac{p_{1;2}p_{2;2}}{r(I_Z)^2} \\ \frac{p_{2;2}}{r(I_Z)^2}(p_{1;2} - p_{2;1}) = 0 \\ q_1 - \frac{p_{1;2}p_{2;1}}{r(I_Z)^2} = 0 \\ p_{1;2} + p_{2;1} + q_2 - \frac{(p_{2;2})^2}{r(I_Z)^2} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme on souhaite obtenir une solution complète à la ARE, on choisit $p_{2;2} \neq 0$, donc :

$$PA + {}^t AP - PBR^{-1} {}^t BP + {}^t CQC = 0_n \implies \begin{cases} p_{1;1} = \frac{p_{2;1}p_{2;2}}{r(I_Z)^2} \\ p_{1;2} = p_{2;1} \\ (p_{2;1})^2 = r(I_Z)^2 q_1 \\ (p_{2;2})^2 = r(I_Z)^2 (2p_{2;1} + q_2) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} p_{1;1} = \sqrt{q_1(2I_Z\sqrt{rq_1} + q_2)} \\ p_{1;2} = I_Z\sqrt{rq_1} \\ p_{2;1} = I_Z\sqrt{rq_1} \\ p_{2;2} = I_Z\sqrt{r(2I_Z\sqrt{rq_1} + q_2)} \end{cases}$$

Ainsi, avec $(I_Z, q_1, q_2, r) = (100; 1; 1; 1)$, on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{q_1(2I_Z\sqrt{rq_1} + q_2)} & I_Z\sqrt{rq_1} \\ I_Z\sqrt{rq_1} & I_Z\sqrt{r(2I_Z\sqrt{rq_1} + q_2)} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 14,177 & 100 \\ 100 & 1417,7 \end{pmatrix}$$

6. En déduire l'expression du retour d'état optimal u_F en fonction des composantes de Q et de R .

$$\rightarrow u_F = \left(\frac{-1}{rI_Z} \left(I_Z\sqrt{rq_1}x_1 + I_Z\sqrt{r(2I_Z\sqrt{rq_1} + q_2)}x_2 \right) \right) = \left(-\sqrt{\frac{q_1}{r}}x_1 - \sqrt{\frac{2I_Z\sqrt{rq_1} + q_2}{r}}x_2 \right),$$

alors : $u_F \simeq (-x_1 - 14,177x_2)$

On rappelle que les expressions des coefficients du correcteur "proportionnelle-dérivée" (PD) obtenus par identification de la boucle fermée avec un système du second ordre de pulsation $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ et d'amortissement $\xi \in]0; 1[$ sont respectivement $K_p = I_Z\omega^2$ et $K_d = 2\xi I_Z\omega$.

7. Montrer que le retour d'état optimal u_F par commande LQ correspond à un amortissement de la boucle fermée proche de 0,7.

→ La nouvelle variable de contrôle u_F a une forme PD, donc $u_F = -Kx = (-K_p x_1 - K_d x_2)$, avec $K = \begin{pmatrix} K_p & K_d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1;2}(\mathbb{R})$. Par identification, on a $-\sqrt{\frac{q_1}{r}} = -K_p = -I_Z\omega^2$ et $-\sqrt{\frac{2I_Z\sqrt{rq_1} + q_2}{r}} = -K_d = -2\xi I_Z\omega$. Alors $\omega = \sqrt{\frac{1}{I_Z}\sqrt{\frac{q_1}{r}}}$ et $\xi = \frac{1}{2I_Z\omega}\sqrt{\frac{2I_Z\sqrt{rq_1} + q_2}{r}} \simeq 0,70887$. On retrouve bien $\xi \simeq 0,7$ (car $\omega = 0,1$).

8. Écrire la matrice d'état du système en boucle fermée. Calculer son polynôme caractéristique pour vérifier que l'on retombe sur l'équation du second ordre de pulsation ω et d'amortissement ξ .

→ Le système en boucle fermée suite au retour d'angle d'attitude et de vitesse correspondante devient $\dot{x} = Ax + Bu_F = Ax - BKx$. On pose donc $A_C = A - BK \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce qui nous donne $\dot{x} = A_C x$. Alors :

$$A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_Z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_p & K_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K_p}{I_Z} & \frac{-K_d}{I_Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{pmatrix}$$

Soit χ_{A_C} le polynôme caractéristique de A_C et $s \in \mathbb{C}$, alors :

$$\chi_{A_C}(s) = \det(A_C - sI_2) = \begin{vmatrix} -s & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega - s \end{vmatrix} = s(s + 2\xi\omega) + \omega^2 = s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2$$

On souhaite maintenant calculer un retour d'état optimal $u_{bis} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ assurant une erreur statique nulle par rapport à une entrée de référence ou à des perturbations constantes.

9. Écrire la nouvelle représentation d'état à considérer pour atteindre cet objectif.

→ On introduit dans le système une équation d'état qui modélise l'intégrale de l'erreur de la variable de sortie y par rapport à sa valeur de consigne $R_{\text{bis}} = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2;1}(\mathbb{R}^*)$, erreur que l'on nomme $\varepsilon \in \mathcal{M}_{2;1}(\mathbb{R})$:

$$\dot{\varepsilon} = y - R_{\text{bis}} = Cx - R_{\text{bis}}$$

Puis on procède avec une synthèse de contrôleur LQ pour rendre les coefficients de ε les plus petits possibles en valeur absolue (ce qui est équivalent à faire tendre la sortie y vers la consigne R_{bis}). Le système devient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{\text{bis}} = A_{\text{bis}}x_{\text{bis}} + B_{\text{bis}}u_{\text{bis}} \\ y_{\text{bis}} = C_{\text{bis}}x_{\text{bis}} \end{array} \right. , \text{ avec :}$$

$$x_{\text{bis}} = \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (\text{où } \varepsilon = x) ; \quad A_{\text{bis}} = \begin{bmatrix} A & 0_2 \\ I_2 & 0_2 \end{bmatrix} ; \quad B_{\text{bis}} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{2;1} \end{bmatrix} ; \quad C_{\text{bis}} = \begin{bmatrix} C & 0_2 \end{bmatrix}$$