Cours Scientific Machine Learning

Séance d'exercices du 26 janvier

Exercice 1

Soit K appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que

$$\| \tanh^{(K)} \|_\infty \leq 2^{K-1}(K+2)!$$

Exercice 2 (issu de l'examen en 2024-2025)

Soit σ la fonction qui à x appartenant à $\mathbb{R}$ associe $\sigma(x) = \tanh(x)$. Dans le cours nous avons vu l'importance de savoir estimer les dérivées successives de cette fonction et cet exercice propose une estimation de la dérivée k-ième de σ.

1. Soit $k \geq 1$, montrer que si on introduit la suite de polynômes définie par $p_1 = 1$ et pour $j > 1$ et x appartenant à $\mathbb{R}$ par

$$p_j(x) = xp_{j-1}(x) - \frac{1-x^2}{2} p'_{j-1}(x),$$

alors pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$\sigma^{(k)}(x) = (-2)^{k-1}\sigma'(x)p_k(\sigma(x)).$$

2. En déduire que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

$$|\sigma^{(k)}(x)| \leq 2^{k+1}\min(e^{-2x}, e^{2x}) \max_{y\in[-1,1]} |p_k(y)|.$$

Exercice 3

Soit la fonction sign définie pour x appartenant à $\mathbb{R}$ par $1_{\{x>0\}} - 1_{\{x<0\}}$. Soit K appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\theta\to+\infty} \| \tanh_\theta - sign\|_{C^K(\mathbb{R}\setminus]-\varepsilon,\varepsilon[)} = 0.$$