$$\rho_\ell^N(x) \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{2\alpha}{N}\right) - \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)$$

$\ell \neq j-1, j, j+1$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)}{1+\sigma^2\left(\frac{\alpha}{N}\right)} - \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\left(-1 + \frac{2}{1+\sigma^2\left(\frac{\alpha}{N}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\left(1 - 1 - 1 + \frac{2}{1+\sigma^2\left(\frac{\alpha}{N}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\left(1 + \frac{\cancel{2} - \cancel{2} - 2\sigma^2\left(\frac{\alpha}{N}\right)}{1+\sigma^2\left(\frac{\alpha}{N}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\left(1 - \underbrace{2\frac{\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)}{1+\sigma^2\left(\frac{\alpha}{N}\right)}}_{=\sigma\left(\frac{2\alpha}{N}\right)}\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\left(1 - \sigma\left(\frac{2\alpha}{N}\right)\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\left(1 - \sigma^2\left(\frac{\alpha}{N}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\left(1 + \sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\right)}_{\leqslant 1}\underbrace{\left(1 - \sigma\left(\frac{\alpha}{N}\right)\right)}_{\leqslant \varepsilon}$$

$$\leqslant \varepsilon$$

on considère

$$\rho_{j+2}(x) = \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x - \frac{j+1}{N}\right)\right) - \frac{1}{2}\sigma\left(\alpha\left(x - \frac{j+2}{N}\right)\right)$$

$$\rho_{j+2}\left(\frac{j}{N}\right) = \frac{1}{2}\sigma\left(-\frac{\alpha}{N}\right) - \frac{1}{2}\sigma\left(-\frac{2\alpha}{N}\right)$$

d'où $\left\| \rho_\ell^N \right\|_{\left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]} \leqslant \varepsilon$

On a donc à ε près une partition de l'unité

$$f(x) = f(x) - \sum_{\ell=0}^{N} \rho_\ell^N(x) f(x) + \sum_{\ell=0}^{N} \rho_\ell^N(x)\left(f(x) - P_j(x) + P_j(x)\right)$$

$$= f(x) - \sum_{\ell=0}^{N} \rho_\ell^N(x) f(x) + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{N} \rho_\ell^N(x)\left(f(x) - P_j(x)\right)}_{\text{peut être majoré par } C\varepsilon} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{N} \rho_\ell^N(x) P_j(x)}_{\text{peut être approché à } \varepsilon \text{ près par un réseau}}$$

$$\left| f(x) - \sum_{\ell=0}^{N} \rho_\ell^N(x) f(x) \right| \leqslant \left| \cancel{f(x)} - \left(\sum_{\ell=j-1}^{j+1} \rho_\ell^N(x) - 1 \right) f(x) - \cancel{f(x)} - \sum_{\ell \neq j-1, j, j+1} \rho_\ell^N(x) f(x) \right|$$

$$\leqslant \left| \left(\sum_{\ell=j-1}^{j+1} \rho_\ell^N(x) - 1 \right) \right| |f(x)| + \left| \sum_{\ell \neq j-1, j, j+1} \rho_\ell^N(x) \right| |f(x)|$$

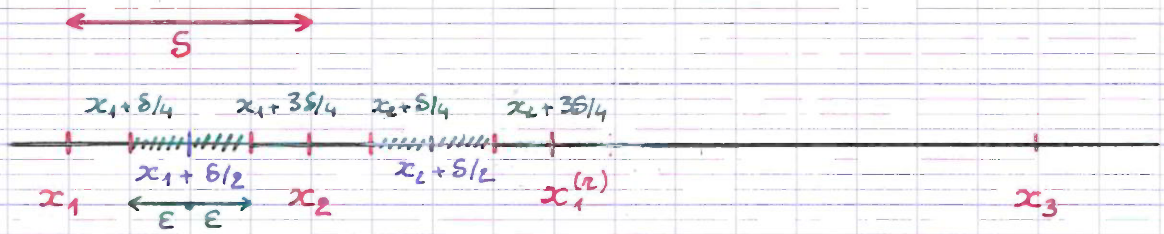
Pour $x \in \left[\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right]$ $\qquad \leqslant \left(\varepsilon + (N-2)\varepsilon \right) \|f\|_{[0,1]}$

Exemple de divergence d'un PINNs

On a donc x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $x_j^{(r)}$, $1 \leqslant j \leqslant n_r$ qui sont connus, on suppose que les points sont deux à deux distincts et rangés par ordre croissant et qu'il en est de même pour les points $x_j^{(r)}$, $1 \leqslant j \leqslant n_r$.

On note δ la plus petite distance entre deux points de $\{x_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{x_j^{(r)}, 1 \leqslant j \leqslant n_r\}$ que l'on supposera strictement positive et on pose

$$G = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \left] x_i + \frac{\delta}{4}, x_i + \frac{3\delta}{4} \right[$$



Notons pour $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $H \geqslant 1$

$$u_\theta(x) = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_{i+1} - y_i}{2} \left(\tanh_\theta^{\circ H}\left(x - x_i - \frac{\delta}{2}\right) + 1 \right)$$

Concentrons nous pour commencer sur x_1, d'après le lemme 4 on sait que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit

$$\lim_{\theta \to +\infty} \left\| \tanh_\theta^{\circ H}\left(\cdot - x_1 - \frac{\delta}{2}\right) - \text{signe}\left(\cdot - x_1 - \frac{\delta}{2}\right) \right\|_{C^K(\mathbb{R} \setminus J_\varepsilon)} = 0$$

$J_\varepsilon = \left] -\varepsilon + x_1 + \frac{\delta}{2}, \varepsilon + x_1 + \frac{\delta}{2} \right[$

Choisissons $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$, pour $x \in G$, on a

$$\lim_{\theta \to +\infty} \tanh_\theta^{\circ H}\left(x - x_1 - \frac{\delta}{2}\right) + 1 - \left(1 + \text{signe}\left(x - x_1 - \frac{\delta}{2}\right)\right) = 0$$

De plus pour $x \neq x_1 + \frac{\delta}{2}$

$$1 + \text{signe}\left(x - x_1 - \frac{\delta}{2}\right) = \mathbb{1}_{\{x > x_1 + \delta/2\}} + \cancel{\mathbb{1}_{\{x < x_1 + \delta/2\}}}$$
$$+ \mathbb{1}_{\{x > x_1 + \delta/2\}} - \cancel{\mathbb{1}_{\{x < x_1 + \delta/2\}}}$$

d'où $1 + \text{signe}\left(x - x_1 - \frac{\delta}{2}\right) = 2\,\mathbb{1}_{\{x > x_1 + \delta/2\}}$

Pour tout x appartenant à G, on peut donc démontrer que

$$\lim_{\theta \to +\infty} u_\theta(x) = y_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i+1} - y_i}{2} \times 2\,\mathbb{1}_{\{x > x_i + \delta/2\}}$$
$$= y_1 + \sum_{i=1}^{n} (y_{i+1} - y_i)\mathbb{1}_{\{x > x_i + \delta/2\}}$$
$$\overset{\text{notation}}{=} u_\infty(x)$$

On a donc au final $\lim_{\theta \to +\infty} \| u_\theta - u_\infty \|_{C^K(G)} = 0$

Propriétés de u_∞

- $u_\infty(x_k) = y_k$, $1 \leq k \leq n$

$$u_\infty(x_k) = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i)\mathbb{1}_{\{x_k > x_i + \delta/2\}}$$
$$= y_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (y_{i+1} - y_i) = y_k$$

- Pour $K \geq 1$ et $1 \leq j \leq n_r$ $\quad u_\infty^{(K)}\left(x_j^{(r)}\right) = 0$

Pour $x \in G$, $u'_\infty(x) = 0$ et comme x_j appartient à G, $1 \leq j \leq n_r$
on en déduit le résultat

Quelles conséquences ?

On a $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} |u_\theta(x_i) - y_i|^2 = 0$

$$\lim_{\theta \to +\infty} \sum_{j=1}^{n_r} \left(m\, u''_\theta\left(x_j^{(r)}\right) + \mu\, u'_\theta\left(x_j^{(r)}\right)\right)^2 = 0$$

Nous avons bien construit une suite minimisante pour R_{n,n_r}

Il reste à montrer que

$$\lim_{\theta \to +\infty} \int_0^T \left(m\, u''_\theta(x) + \mu\, u'_\theta(x)\right)^2 dx = +\infty$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour $\varepsilon > 0$ et f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

$$2\varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(m f''(x) + \mu f'(x)\right)^2 dx \geqslant \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(m f''(x) + \mu f'(x)\right) dx\right)^2$$

$$= \left(m\left(f'(\varepsilon) - f'(-\varepsilon)\right) + \mu\left(f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\right)\right)^2$$

Donc pour $0 < \varepsilon < \delta/4$

$$\int_0^T \left(m\, u''_\theta(x) + \mu\, u'_\theta(x)\right)^2 dx \geqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i + \delta/2 - \varepsilon}^{x_i + \delta/2 + \varepsilon} \left(m\, u''_\theta(x) + \mu\, u'_\theta(x)\right)^2 dx$$

$$\geqslant \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \Big(m\left(u'_\theta(x_i + \delta/2 + \varepsilon) - u'_\theta(x_i + \delta/2 - \varepsilon\right)$$

$$+ \mu\left(u_\theta(x_i + \delta/2 + \varepsilon) - u_\theta(x_i + \delta/2 - \varepsilon\right)$$

Or pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\lim_{\theta \to +\infty} u_\theta\left(x_i + \frac{\delta}{2} + \varepsilon\right) = y_{i+1}$$

$$\lim_{\theta \to +\infty} u_\theta\left(x_i + \frac{\delta}{2} - \varepsilon\right) = y_i$$

$$\lim_{\theta \to +\infty} u'_\theta\left(x_i + \frac{\delta}{2} + \varepsilon\right) = \lim_{\theta \to +\infty} u'_\theta\left(x_i - \frac{\delta}{2} - \varepsilon\right) = 0$$

alors

$$\lim_{\theta \to +\infty} \int_0^T \left(m\, u''_\theta(x) + \mu\, u'_\theta(x)\right)^2 dx \geqslant \frac{\mu^2}{2\varepsilon} \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \left(y_{i+1} - y_i\right)^2}_{\neq 0}$$

$$\underline{\text{donc } \lim_{\theta \to +\infty} \int_0^T \left(m\, u''_\theta(x) + \mu\, u'_\theta(x)\right)^2 dx = +\infty}$$