

Introduction

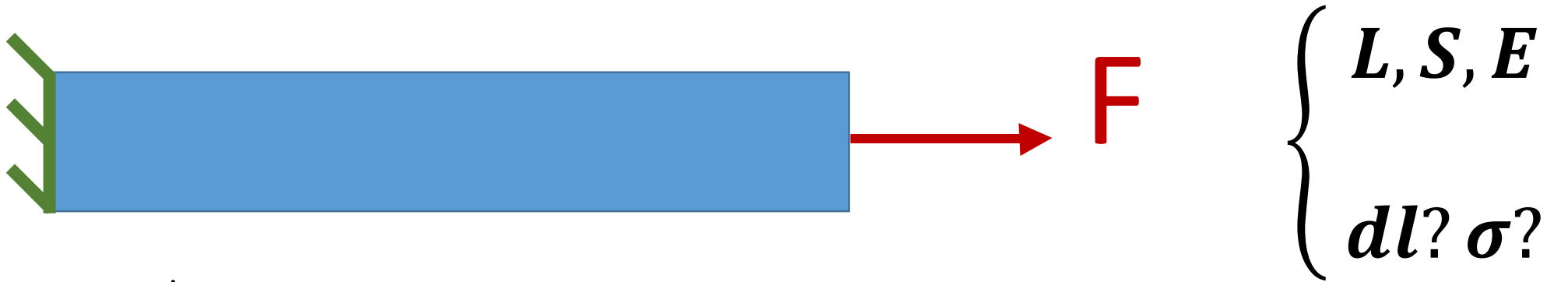
Eléments finis

Reine Fares – reine.fares@cea.fr

Objectifs

- Rappeler les principes fondamentaux de la méthode des éléments finis
- Comprendre la logique interne d'un code EF industriel
- Faire le lien entre :
 - Modèle mécanique
 - Modèle EF
 - Données d'entrée du logiciel
- Préparer la lecture critique des résultats numériques

Poutre en traction



- Barre 1D en traction
- Hypothèses :
 - section constante
 - matériau homogène,
 - Isotrope
 - petites déformations
- Grandeur recherchée : champ de déplacement $u(x)$

Poutre en traction



$$\begin{cases} L, S, E \\ dl? \sigma? \end{cases}$$

Solution RDM (loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$) :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

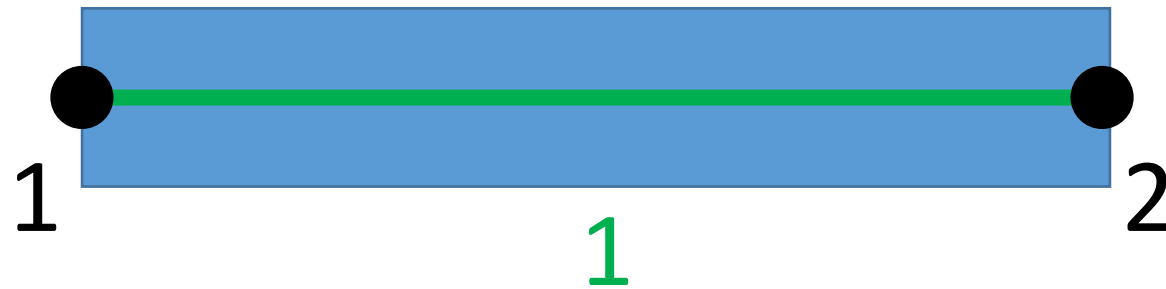
$$dl = \frac{FL}{ES}$$

Poutre en traction



$$\begin{cases} L, S, E \\ dl? \sigma? \end{cases}$$

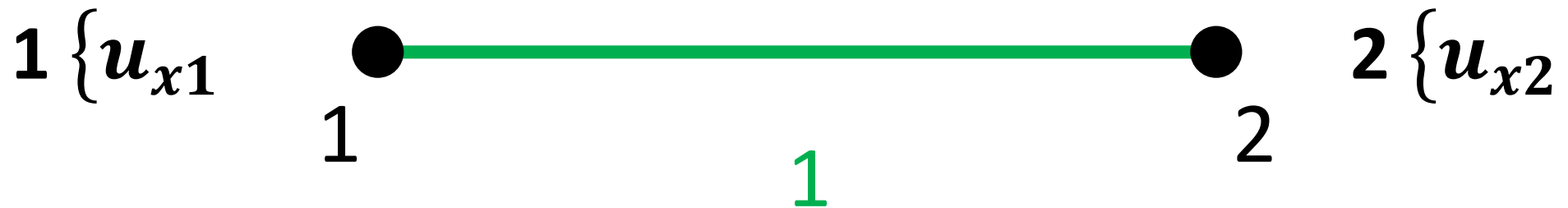
Solution par éléments finis :



Poutre en traction



$$\begin{cases} L, S, E \\ dl? \sigma? \end{cases}$$



Approximation par éléments finis



Définition: une approximation au sens des éléments finis d'une variable $u(x)$ sur un élément à deux nœuds, s'écrit :

$$u(x) = N_1(x) u_{1x} + N_2(x) u_{2x}$$

$N_1(x)$, $N_2(x)$ sont appelées fonctions d'approximation ou fonction de forme. Les fonctions de formes vérifient la relation générale :

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

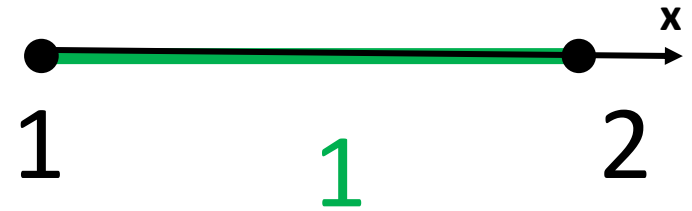
Approximation par éléments finis



$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(0) = \\ N_1(L) = \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N_2(0) = \\ N_2(L) = \end{cases}$$

Approximation par éléments finis



$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \begin{cases} N_1(0) = 1 \\ N_1(L) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} N_2(0) = 0 \\ N_2(L) = 1 \end{cases}$$

1- Choisir l'ordre d'approximation : deux nœuds (ordre 1, élément linéique)

$$N_1(x) = a_1x + b_1, N_2(x) = a_2x + b_2$$

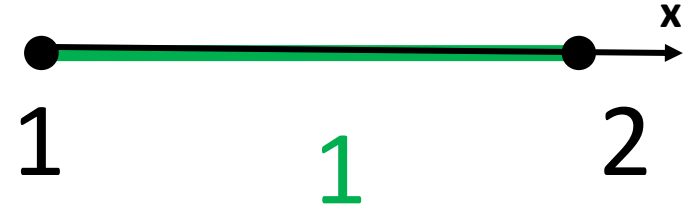
2 – Construction des deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} N_1(0) = a_1 \times 0 + b_1 = 1 \\ N_1(L) = a_1 \times L + b_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} N_2(0) = a_2 \times 0 + b_2 = 0 \\ N_2(L) = a_2 \times L + b_2 = 1 \end{cases}$$

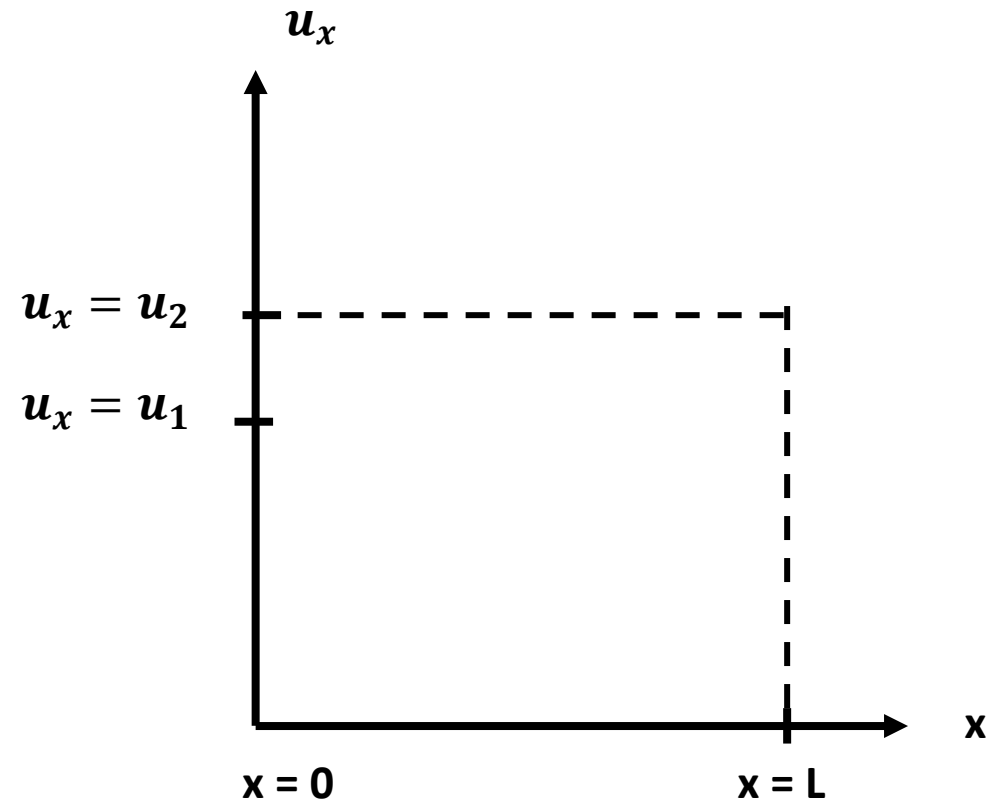
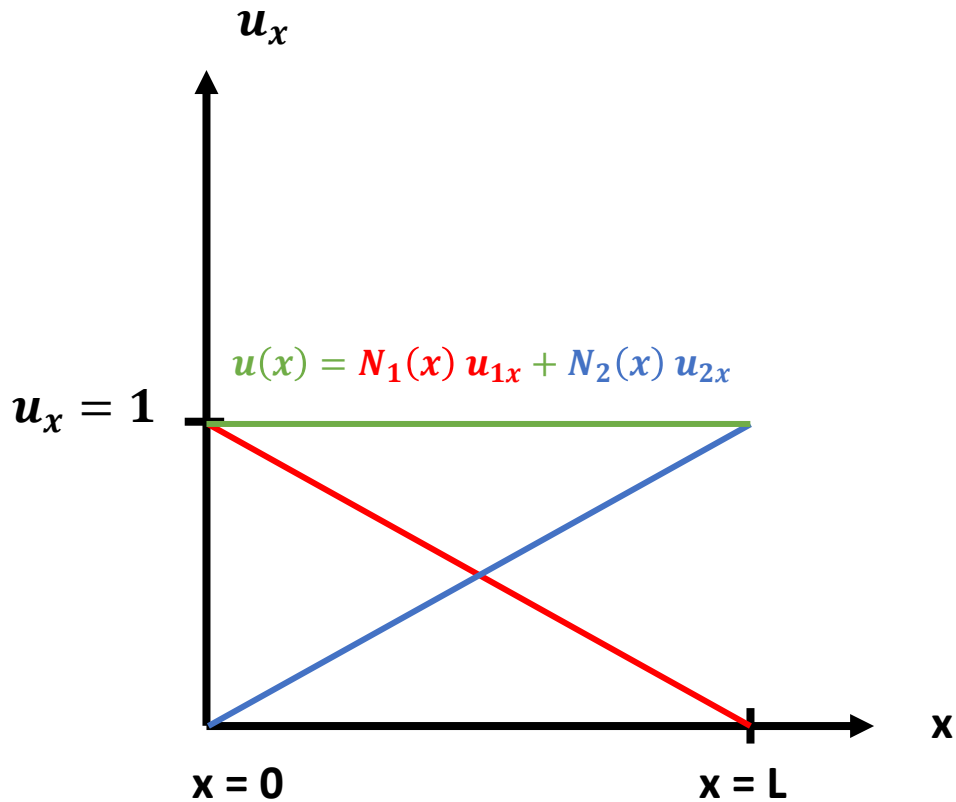
3- Résolution

$$N_1(x) = -\frac{x}{L} + 1, N_2(x) = \frac{x}{L}$$

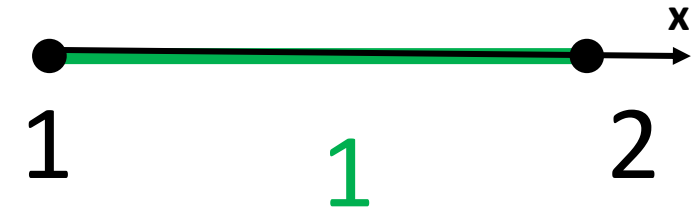
Approximation par éléments finis



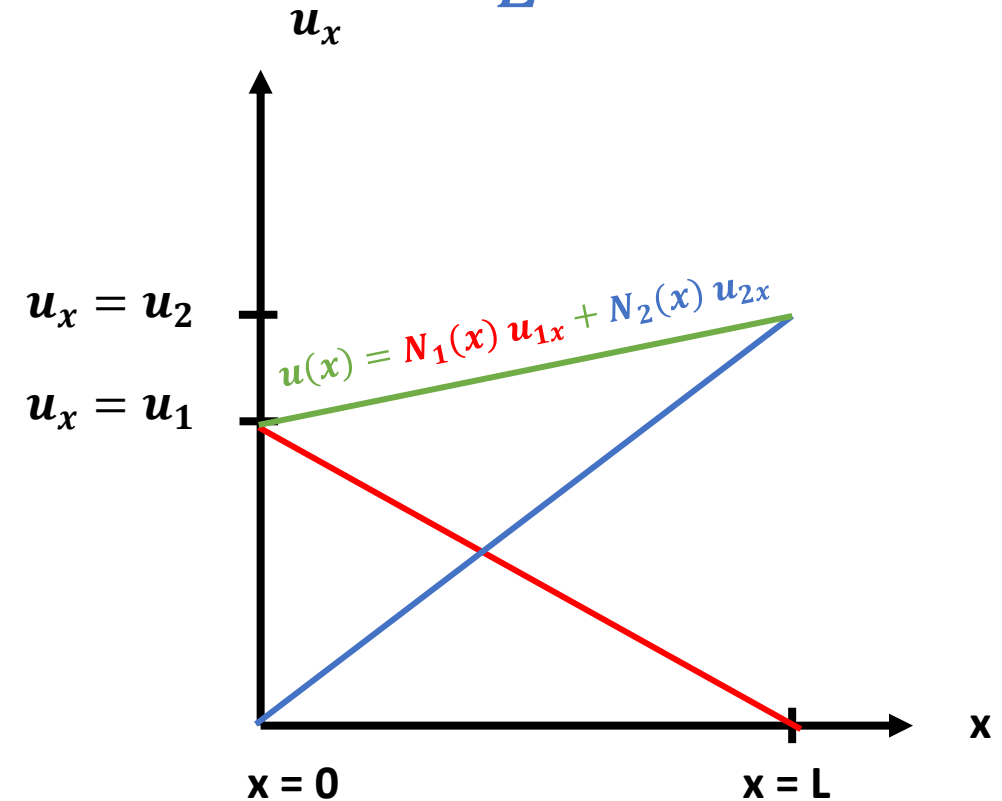
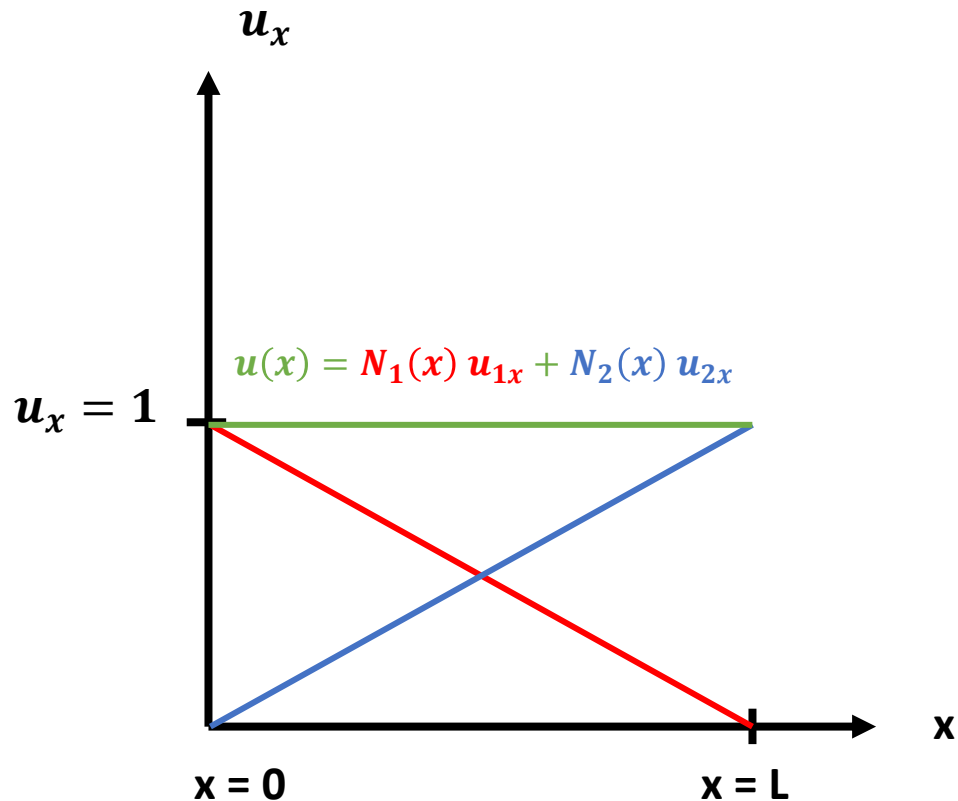
$$N_1(x) = -\frac{x}{L} + 1, N_2(x) = \frac{x}{L}$$



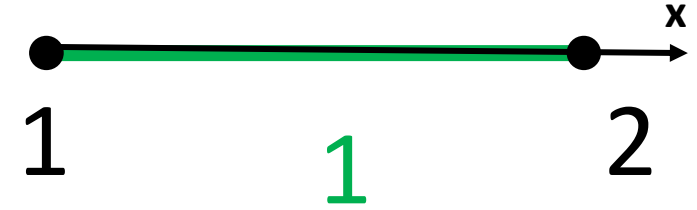
Approximation par éléments finis



$$N_1(x) = -\frac{x}{L} + 1, N_2(x) = \frac{x}{L}$$



Approximation par éléments finis



Réécriture du problème :

$$u_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; u_x = (1 - x/L) u_1 + x/L u_2$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U}_e$$

$$\varepsilon = \partial \mathbf{u} / \partial x; \varepsilon = (-1/L) u_1 + (1/L) u_2$$

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{U}_e$$

$$\sigma = E \varepsilon = \frac{N}{S}; \varepsilon = N/SE + u(0) \text{ (} N: \text{effort normal)}$$

On associe aux déplacements nodaux u_1 et u_2 les forces nodaes f_1 et f_2

$$\begin{cases} f_1 = (SE/L) u_1 + (-SE/L) u_2 = -N(0) \\ f_2 = (-SE/L) u_1 + (SE/L) u_2 = N(L) \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e$$

Approximation par éléments finis

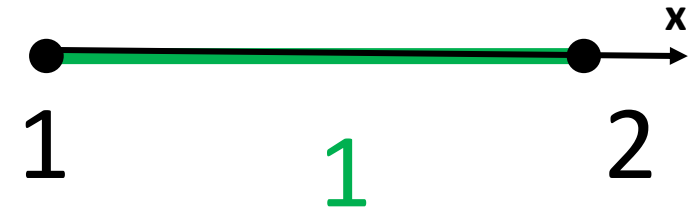


$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e$$

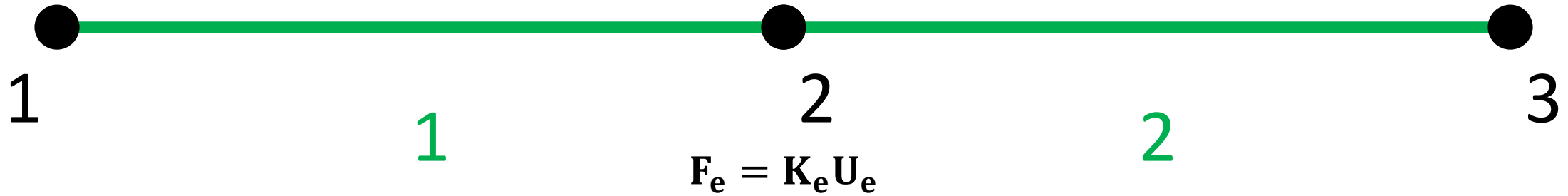
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SE/L & -SE/L \\ -SE/L & SE/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SE/L & -SE/L \\ -SE/L & SE/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}; u_2 = \frac{FL}{ES} \text{ et } F_1 = -F$$

$$\varepsilon = \frac{F}{ES} \rightarrow \sigma = \frac{F}{S}$$



Approximation par éléments finis



$$\text{E1} \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = SE/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{E2} \quad \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = SE/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Assemblage du système à 2 éléments

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = SE/L \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Résolution par éléments finis

- Géométrie et Maillage
- Propriétés des Matériaux
- Assemblage
- Conditions aux limites



- Algorithme de résolution
- Enregistrement des résultats

Théorie EF	Abaqus
Domaine Ω	Part
Élément fini	Element type
Nœuds	Nodes
Matériau	Material
Conditions aux Limites	Boundary Conditions
Chargement	Load
Résolution	Step
Résultats	Output

Rôle d'un logiciel industriel d'éléments fini

- Le logiciel :
 - discrétise le domaine (maillage)
 - approxime les champs (fonctions de forme)
 - assemble un système algébrique
 - applique les conditions aux limites
 - résout numériquement
- Le logiciel ne :
 - choisit pas le bon modèle physique
 - vérifie pas automatiquement la pertinence du maillage
 - interprète pas les résultats à votre place