Résumé de la dernière séance.

$$\Omega_h = \bigcup_1^{\mathrm{Ne}} e \quad \text{avec} \qquad \text{Mesure}\,(e) \neq 0, \quad \text{et} \quad e \cap e' = \emptyset \quad \text{si} \quad e \neq e'$$

$$e \equiv \mathcal{G}^e = \left\{ \boldsymbol{x}_1^e, \cdots, \boldsymbol{x}_{\mathrm{Npe}}^e \right\}, \qquad \mathcal{D}^e = \left\{ \mathbf{x}_1^e, \cdots, \mathbf{x}_{\mathrm{Nve}}^e \right\} \frac{\supset \mathcal{G}^e}{\mathrm{L}agrange}$$

$$\begin{aligned}
a\left(\mathrm{u}_h, \mathrm{v}_h\right) &= \sum_{e=1}^{\mathrm{Ne}} \int_e \mathcal{A}\left(\mathrm{u}_h, \mathrm{v}_h\right) d\boldsymbol{x} &&= \sum_{e=1}^{\mathrm{Ne}} a^e\left(\mathrm{u}_h, \mathrm{v}_h\right) \\
\ell\left(\mathrm{v}_h\right) &= \sum_{e=1}^{\mathrm{Ne}} \left(\int_e \mathcal{L}\left(\boldsymbol{x}, \mathrm{v}_h\right) d\boldsymbol{x} + \int_{\partial e \cap \partial \Omega_h} \mathcal{L}_{\mathrm{N}}\left(\boldsymbol{x}, \mathrm{v}_h\right) dS \right) &&= \sum_{e=1}^{\mathrm{Ne}} \ell^e\left(\mathrm{v}_h\right) \\
\mathrm{u}_h\left(\boldsymbol{x}\right) &= \sum_{j=1}^{\mathrm{Nv}} \mathrm{u}_j \varphi_j\left(\boldsymbol{x}\right) = \sum_{e=1}^{\mathrm{Ne}} \sum_{p=1}^{\mathrm{Nve}} \mathrm{u}_{\mathrm{G}(p,e)} \widehat{\varphi}_p\left(\boldsymbol{\xi}^e\left(\boldsymbol{x}\right)\right) &&= \sum_{e=1}^{\mathrm{Ne}} \mathrm{u}_h^e\left(\boldsymbol{x}\right) \\
\mathrm{u}_h^e\left(\boldsymbol{x}\right) &= \sum_{p=1}^{\mathrm{Nve}} \mathrm{u}_{\mathrm{G}(p,e)} \widehat{\varphi}_p\left(\boldsymbol{\xi}^e\left(\boldsymbol{x}\right)\right)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}^e\left(\boldsymbol{\xi}\right)$ est la transformation par laquelle l'élément e est l'image **du même** élément de référence $\widehat{e}$, $\boldsymbol{\xi}$ est la coordonnée de l'élément de référence, et $\boldsymbol{\xi}^e\left(\boldsymbol{x}\right)$ est la transformation inverse.

Soit j la numérotation globale d'un degré de liberté, p_j^e est la numérotation locale du degré de liberté j sur l'élément $e \in \vartheta\left(j\right)$.
En pratique, il est plus commode de ne pas alourdir les notations par des indices j. On a alors

$$\varphi_j\left(\boldsymbol{x}\right) = \begin{cases} \widehat{\varphi}_p\left(\boldsymbol{\xi}\left(\boldsymbol{x}\right)\right) & \text{si} \quad e \in \vartheta\left(j\right) \quad \text{avec } j = \mathrm{G}\left(p, e\right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Trouver } \mathrm{u}_h \in \mathcal{V}_h\left(\Omega_h\right) \text{ tel que} \quad a\left(\mathrm{u}_h, \mathrm{v}_h\right) = \ell\left(\mathrm{v}_h\right), \quad \forall \mathrm{v}_h \in \mathcal{V}_h\left(\Omega_h\right)}$$

est équivalent à (**problème global**): trouver $\mathrm{u}_h = \sum_{e=1}^{\mathrm{Ne}} \mathrm{u}_h^e\left(\boldsymbol{x}\right)$ tel que

$$\sum_{e=1}^{\mathrm{Ne}} a^e\left(\mathrm{u}_h^e, \varphi_i\right) = \sum_{e=1}^{\mathrm{Ne}} \ell^e\left(\varphi_i\right) \quad \text{pour} \quad i = 1, \cdots \mathrm{Nv}$$

La restriction à l'élément e, **problème local**): trouver $\mathrm{u}_h^e\left(\boldsymbol{x}\right) = \sum_{q=1}^{\mathrm{Nve}} \mathrm{u}_{\mathrm{G}(q,e)} \widehat{\varphi}_q\left(\boldsymbol{\xi}^e\left(\boldsymbol{x}\right)\right)$ tel que

$$a^e\left(\mathrm{u}_h^e, \widehat{\varphi}_p\right) = \ell^e\left(\widehat{\varphi}_p\right) \quad \text{pour} \quad p = 1, \cdots \mathrm{Nve}$$

Comment construire l'application $\mathrm{G}\left(q, e\right)$ (Maillage) et les $\widehat{\varphi}_q\left(\boldsymbol{\xi}\right)$ (interpolation)?