Examen Blanc

L3 électronique

September 2024

1 Bases de l'algèbre linéaires

- On considère les vecteurs:
$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$
Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
- On considère l'application linéaire f représentée dans la base $\mathcal{F}$ par la matrice:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$
  - Énoncer le théorème du rang.
  - Donner la dimension de l'image $\mathrm{Im}(f)$ et du noyau $\mathrm{Ker}(f)$.
  - En déduire une solution non-triviale du système homogène $B\vec{x} = 0$.

2 Systèmes d'équations linéaires

Discuter et résoudre suivant la valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} tx - y = 1 \\ x + (t-2)y = -1 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} (t-1)x + y = 1 \\ 2x + ty = -1 \end{cases} \tag{4}$$

3 Diagonalisation des matrices

On considère la matrice à **valeurs complexes**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \tag{5}$$

- Déterminer le polynôme caractéristique de A.
- En déduire les valeurs propres de A.
- Montrer que:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

  sont deux vecteurs propres.
- Déterminer la matrice de passage P de la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
- En déduire que A est semblable à une matrice diagonale dans les nombres complexes.

3.1 Bonus.

Discuter, selon les cas de figures de k, les résultats possible de la puissance de la matrice A^k.