Série de Travaux Dirigés 2

L3 électronique

Septembre 2024

1 Questions de cours

- Montrer que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + z = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v1 = (1, -3, -5) \tag{1}$$
$$v2 = (3, 4, -2) \tag{2}$$
$$v3 = (1, 10, 8) \tag{3}$$

  - Ces vecteurs sont-ils libres ?
  - Quel est la dimension du sous-espace engendré par ces vecteurs ?

- Considérons le système homogène $AX = b$ ou A est une matrice carré d'ordre n. Quelles sont les solutions possible de ce système d'équations linéaires selon la valeur de b?

2 Systèmes d'équations linéaires

Résoudre selon la valeur de $t \in \mathbb{R}$ le système d'équations linéaires:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + t^2 y = t \end{cases} \tag{4}$$

Résoudre les sytèmes d'équations linéaires suivants:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 10x_2 - 11x_3 + 6x_4 \end{cases} \tag{6}$$

3 Diagonalisation des matrices

On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

- Calculer le polynôme caractéristique de A.
- Déterminer l'ensemble des valeurs propres.
- Déterminer le rang de la matrice $A - 3I$.
- On pose:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

- Montrer que $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ sont des vecteurs propres.
- Considérons $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, montrer que $\mathcal{B}$ est une base $\mathbb{R}^3$.
- Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Calculer l'inverse de P.
- Calculer $P^{-1}AP$.
- En déduire des propriétés (déterminant, trace, inversibilité, puissance..) sur la matrice A.