

Fonctions de la variable complexe

TD1

Octobre 2025

1 Fonctions multiformes

Exercice 1. Soit la fonction multiforme:

$$f(z) = (z - 1)^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

- Quelle est la forme générale des déterminations de rang k de la fonction f ?
- Définir la détermination qui prend la valeur $2^{\frac{1}{3}}$ au point $z = 3$ et qui admet pour domaine de définition \mathbb{C} privé de $] - \infty, 1]$.
- Quelles sont les valeurs de cette détermination sur les bords supérieurs et inférieurs de la coupure.

Exercice 2. Soit la fonction multiforme:

$$f(z) = (z - 1)^{\frac{1}{2}} \log(3 - z) \quad (2)$$

- Quelle est la forme générale des déterminations de rang k de la fonction f ?
- Définir la détermination qui prend la valeur $-i\pi\sqrt{3}$ au point $z = 4$ et qui admet pour domaine de définition \mathbb{C} privé de $] - \infty, 3]$.
- Quelles sont les valeurs de cette détermination sur les bords supérieurs et inférieurs de la coupure.

Exercice 3.

$$f(z) = \frac{\log(1 - z)}{z^{1+\alpha}}, \quad \alpha \in]0, 1[$$

- Définir dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ la détermination de $f(z)$ qui prend des valeurs réelles sur le bord supérieur de la coupure correspondant à $z = x + iy$, avec $0 < x < 1$ et $y \rightarrow 0^+$.
- Calculer les valeurs de cette détermination sur les autres bords de la coupure, ainsi que pour $z = x$, $x < 0$.