Outils mathématiques pour l'électronique

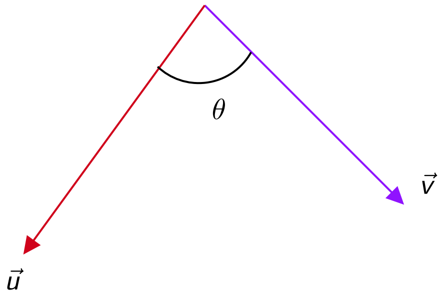
Sara El Bouch

sara.el-bouch@univ-cotedazur.fr
Université Côte d'Azur, EUR DS4H, J-.L Lagrange

Octobre 2024

Introduction

- Les espaces euclidiens sont des espaces vectoriels réels munis d'un produit scalaire.
- Ces espaces permettent de généraliser les notions de distance, angle et orthogonalité.



Application bilinéaire

Definition

Une *forme bilinéaire* d'un espace vectoriel est une application:

$$\begin{aligned} \phi : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\mapsto \phi(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned} \tag{1}$$

linéaire en chacune de ses entrées, c-à-d:

$$\phi(\vec{u}, \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \phi(\vec{u}, \vec{v}_1) + \lambda_2 \phi(\vec{u}, \vec{v}_2) \tag{2}$$

$$\phi(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda_1 \phi(\vec{u}_1, \vec{v}) + \lambda_2 \phi(\vec{u}_2, \vec{v}) \tag{3}$$

Une forme bilinéaire est dite:

- symétrique si $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = \phi(\vec{v}, \vec{u})$
- positive: $\phi(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$
- définie: $\phi(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}$.

Matrice associée à une application bilinéaire

Dans une base donnée $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Une forme bilinéaire peut être représentée par une matrice A tel que:

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = u^\top A v$$

où u et v sont les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Matrice définie positive

Une matrice est dite:

- Symétrique: $A^T = A$
- Positive: $u^T A u \geq 0$
- positive et : $u^T A u = 0 \implies u = 0$.

Exemple

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\phi(u, v) = u_1 v_1 + 2u_2 v_2.$$

La matrice associée à ϕ dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est définie positive car pour tout $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$x^T A x = x_1^2 + 2x_2^2 > 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Par conséquent, la forme bilinéaire ϕ est définie positive.

Produit scalaire

Définition

Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, vérifiant :

1. **Symétrie** : $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ pour tous $u, v \in E$.
2. **Bilinéarité** : $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$, pour tous $u, v, w \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
3. **Définie positive** : $\langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Exercice

- Montrer que
$$\langle X, Y\rangle = X^T Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Norme et Distance dans un Espace Euclidien

- La **norme** d'un vecteur $u \in E$ est définie par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

- La **distance** entre deux vecteurs $u, v \in E$ est donnée par :

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

Propriétés fondamentales de la norme

- Homogénéité: $\|\lambda u\| = |\lambda| u$
- Inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|.\|v\|$$

- Inégalité triangulaire: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Famille orthogonale

Une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ est dite orthogonale ssi tous ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux:

$$\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0$$

pour $i \neq j$

Famille orthonormée

Définition

Une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ est dite orthonormale ssi:

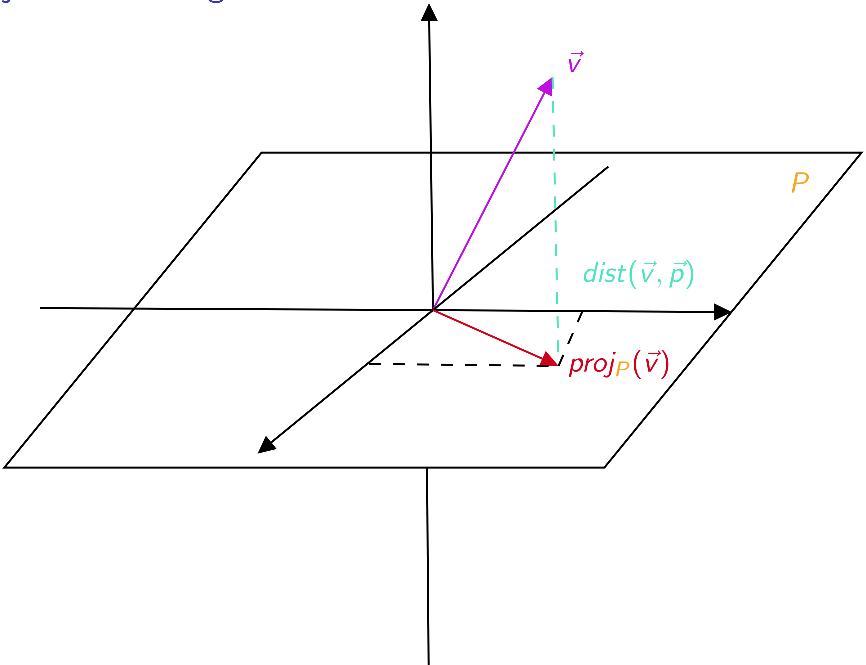
- $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$
- $\|\vec{a}_i\| = 1$

Proposition

Une famille $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ forme une base orthonormale ssi la matrice de passage de $\mathcal{A}$ dans la base canonique est **une matrice orthogonale**. Soit

$$P = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(id), P^\top P = I_n$$

Projection Orthogonale



Orthogonalité

Pour tout ensemble $A \subset E$ de vecteurs, on définit son **ensemble orthogonal** par l'ensemble de tous les vecteurs de A tel que:

$$A^{\perp} = \{\vec{x} \in E, \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0, \forall \vec{a} \in A\}$$

Definition (Projection orthogonale)

La projection orthogonale sur P est la projection sur P parallèlement à $P^{\perp}$. On la note $proj_P^{\perp}$

Projection Orthogonale

Definition

Soit $P \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien. La projection orthogonale sur F est donnée par la formule:

$$proj_P(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1} + \ldots + \langle \vec{v}, \vec{e_n} \rangle \vec{e_n} \tag{4}$$

Proposition importante

Le projeté orthogonal sur P est l'unique vecteur de P qui minimise la distance de $\vec{v}$ à P.