به نام خداوند رنگین کمان

درس هوش مصنوعی و سیستم های خبره

تمرین ششم

مدرس : دکتر محمدی

دانشجو : سارا سادات یونسی / ۹۸۵۳۳۰۵۳

بخش تئوری

۱.شما یک زمین بازی دارید که در آن تعدادی خانه های مربع شکل هست. در برخی از این خانه ها بمب هست در این بازی دو مربع در صورتی همسایه هستند که در یک ضلع یا یک راس مشترک باشند. پس یک مربع که در کناره های صفحه نباشد، ۸ همسایه دارد . هدف بازی ساده است. شما باید همه ی خانه هایی را که بمب ندارند خالی یا اشکار کنید. اگر خانه ای حاوی بمب را به اشتباه خالی کنید. بازی تمام می شود و شما می بازید .حال فرض کنید در صفحه این بازی N خانه و M بمب مخفی وجود دارد.

الف. فرض کنید مقدار $x_{i,j}$ درست است اگر تنها اگر خانه [j, i] حاوی بمب باشد. گزاره ای بنویسید که بگوید که در همسایگی خانه [۱ ,۱] دقیقا ۲ بمب وجود دارد و حاوی ترکیب گزاره های منطقی و$x_{i,j}$ باشد. (خانه [۰ ,۰]درگوشه ی سمت بالا چپ صفحه قرار دارد)

ب) با استفاده از گزاره بخش الف توضیح دهید چگونهrمی توانیم CNF ای بسازیم که k از n همسایه حاوی بمب باشد.

جواب الف)

طبق فرض مسئله $X_{i,j}$ درست می باشد اگر و تنها اگر خانه ی [i,j] حاوی بمب باشد.

حداکثر K خانه از n خانه بمب است M (k,n) و حداقل K خانه از n خانه بمب است L (k,n) .

یعنی برای هر k+1 خانه از n خانه حداقل یکی بمب نیست = M (k,n)

یعنی برای هر n-k+1 خانه از n خانه حداقل یکی بمب است = L (k,n)

حالت دقیقا دو بمب در همسایگی در [1,1] باشد یعنی حالت اینکه حداقل دو تا باشد و اجتماع حالتی که دقیقا دو تا باشد.

حالت های حداکثر دو خانه از ۸ خانه ی مجاور [1,1] دارای بمب باشد:

$$(\sim X_{0,0} \lor \sim X_{0,0} \lor \sim X_{0,2}) \land (\sim X_{0,0} \lor \sim X_{0,0} \lor \sim X_{0,2}) \land \ldots$$

به ازای هر سه خانه از ۸ خانه or نقیض ان ها باید درست باشد.

حالت حداقل دو خانه از ۸ خانه ی مجاور [1,1] دارای بمب باشد مانند این حالت می باشد که حداکثر ۶ خانه خالی در همسایگی باشد پس داریم :

$$(X_{0,0} \lor X_{0,1} \lor X_{0,2} \lor X_{1,0} \lor X_{1,2} \lor X_{2,0} \lor X_{2,1}) \land (X_{0,0} \lor X_{0,1} \lor X_{0,2} \lor X_{1,0} \lor X_{1,2} \lor X_{2,0} \lor X_{2,2}) \land \ldots$$

به ازای هر ۷ خانه ۱ خانه باید بمب داشته باشد.

و در نهایت حالت مطلوب ما یعنی دقیقا دو خانه از ۸ خانه ی مجاور [1,1] دارای بمب باشد and دو حالت بالاست.

یا می توان به عبارت دیگر گفت :

پس به صورت ریاضی می توان گفت از میان ۸ خانه مجاور خانه [1,1] دقیقا دو خانه دارای بمب است اگر و تنها اگر از میان ۸ خانه حداقل دو خانه دارای بمب و حداکثر ۲ خانه دارای بمب باشند.

M : دقیقا دو خانه از ۸ خانه ی مجاور [1,1] دارای بمب باشد.

L : حداقل دو خانه از ۸ خانه ی مجاور [1,1] دارای بمب باشد.

Q : حداکثر دو خانه از ۸ خانه ی مجاور [1,1] دارای بمب باشد.

در نتیجه خواهیم داشت : $M = L \wedge Q$

حالا اگر بخواهیم به حالت CNF های دارای عبارت xi,j بنویسیم باید cluse ها به صورت حداقلی نوشته شوند تا بتوان هر cluse را به صورت اجتماعی از دنباله ای از حروف نمایش داد :

Q: حداکثر دو خانه از ۸ خانه ی مجاور [1,1] دارای بمب باشد . یعنی از هر سه خانه میان همسایگان حداقل یک خانه فاقد بمب است در نتیجه Q به صورت CNF ای است که در آن هر cluse به این صورت خواهد بود :

$(\sim X_{i,j} \vee \sim X_{S,Q} \vee \sim X_{L,T})$: [I, j], [S,Q] , [L,T] انتخاب شده از همسایگان

در نتیجه با انتخاب سه از هشت درنتیجه ۵۶ کلاز خواهیم داشت.

L: حداقل دو خانه از ۸ خانه ی مجاور [1,1] دارای بمب باشد. یعنی از هر هشت خانه میان همسایگان حداکثر شش خانه خالی خواهد بود بنابراین از هر هفت خانه حداقل یه خانه بمب دارد. در نتیجه L به صورت CNF ای است که در آن هر cluse به این صورت خواهد بود :

$(X_{i,j} \vee X_{m,n} \vee X_{b,v} \vee X_{c,x} \vee X_{k,j} \vee X_{h,g} \vee X_{w,e})$

در نتیجه با انتخاب هفت از هشت درنتیجه ۸ کلاز خواهیم داشت.

M: اشتراک گیری دو گذاره ی بالا که مجموع ۵۶+۸ کلاز سه تایی و هفت تایی خواهد بود.

جواب ب)

مانند قسمت الف برای مورد دقیقا k همسایه از n همسایه بمب باشد عمل می کنیم.

اجتماع حداکثر K خانه از n خانه بمب است Q (k,n) و حداقل K خانه از n خانه بمب است L (k,n) .

برای بخش حداقل k همسایه به ازای هر K+1 همسایه xi,j باید درست باشد.

برای بخش حداقل k همسایه به ازای هر n-K+1 همسایه xi,j حداقل یکی ازxi,j باید درست باشد.

Xi وجود بمب در i امین همسایه خانه

حداقل K خانه از n خانه بمب است L (k,n) و حداکثر K خانه از n خانه بمب است Q (k,n) و دقیقا K خانه از n خانه بمب است M (k,n)

در نتیجه خواهیم داشت :

$M(k,n) = L(k,n) \wedge Q(k,n)$

حال باید هرگزاره را باز کنیم تا بتوان CNF تشکیل شده از clause هایی که تنها حاوی litelar اند بنویسیم.

L(k,n) : حداقل یک خانه از K+1 خانه از میان ان n همسایه فاقد بمب است.هر کلاز در CNF برای L(k,n) به صورت اجتماع k+1 متغیر نقیض xi خواهد بود.

Q(k,n): : حداقل یک خانه از n-K+1 خانه از میان ان n همسایه دارای بمب است.هر کلاز در CNF برای Q(k,n) به صورت اجتماع n- k+1متغیر xi خواهد بود.پس M(k,n) به صورت ترکیبی از CNF های تشکیلی از دو مورد بالا می باشد.

اگر k=0 باشد یعنی هیچ همسایه ای بمب ندارد در نتیجه M(0,n) به صورت اشتراکی از Xi ها خواهد بود.

اگر k=n باشد یعنی تمام همسایه ای بمب دارند در نتیجه M(n,n) به صورت اجتماعی از Xi ها خواهد بود و تنها شامل یک کلاز خواهد بود.

۲. با استفاده از گزاره های منطقی و روش رزولوشن اثبات کنید که از فرضیات زیر می توان هدف را نتیجه گرفت .فرضیات :

- یا رطوبت هوا بالاست یا هوا ابری می باشد.
- .اگر هوا ابری باشد، باران میبارد.
- اگر رطوبت بالا باشد، پس هوا گرم است.
- هوا گرم نیست .

هدف: باران میبارد.

جواب)

رطوبت : R ابری: A گرم:G باران : B

$R_1 : R \vee A \quad R_2 : A \Rightarrow B \quad R_3 : R \Rightarrow G \quad R_4 : \sim G$

KB : پایگاه داده $\sum_{k=1}^{4} Rk$

یعنی در نهایت پایگاه داده ی ما مجموعه ای از and فرضیات ما می باشد که برای استفاده ی Resolution باید فرضیات خود را به صورت CNF دراوریم.

$R_1 : R \vee A \quad R_2 : \sim A \vee B \quad R_3 : \sim R \vee G \quad R_4 : \sim G$

KB : پایگاه داده :$(R \vee A)\wedge(\sim A \vee B) \wedge (\sim R \vee G) \wedge \sim G$

ما می دانیم که در Resolution برای نشان دادن آنکه پایگاه داد یک حکم را entities می کند باید اثبات کنیم پایگاه داده و نقیض حکم درست می باشد که باید از Full Resolution استفاده کنیم. در نتیجه نقیض حکم مرا به پایگاه داده خود اضافه می کنیم و در هر قسمت دو مورد از فرضیات پایگاه داده را Full Resolution می زنیم اگر قانون جدیدی تولید شد که در پایگاه داده نداشتیم ان را اضافه می کنیم و دوباره عملیات را تکرار می کنیم و اگر قانون جدید تکراری باشد میدانیم که حکم غلط است.

$(R \vee A)\wedge(\sim A \vee B) \wedge (\sim R \vee G) \wedge \sim G \wedge \sim B$

$(R \vee A),(\sim A \vee B) \rightarrow R \vee B$

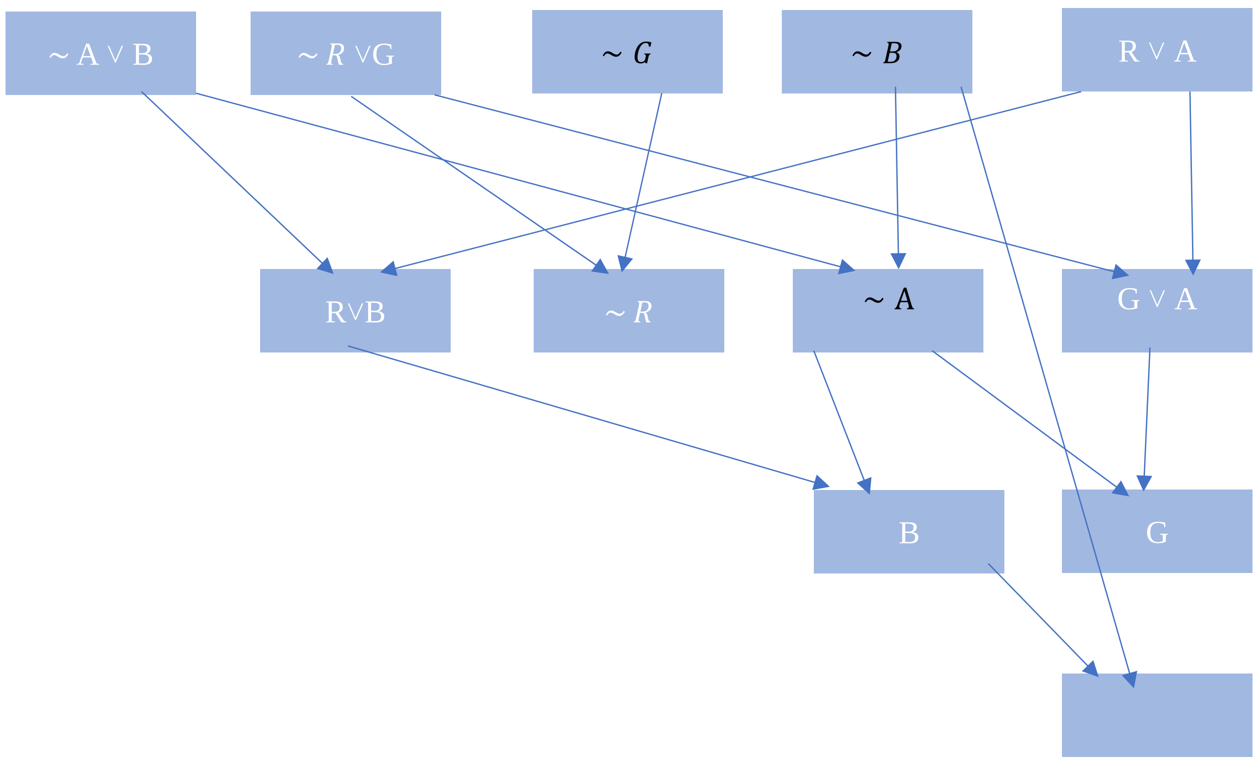
$(\sim R \vee G) , \sim G \rightarrow \sim R$

$(R \vee B) , \sim R \rightarrow B$

در اینجا می بینیم که به حکم مورد نظر یعنی امدن باران می رسیم حال می توانیم یک مرحله جلوتر بریم و خواهیم داشت .

$B \ , \sim B$

حال می بینیم که قانون جدیدی بدست نیامده است که در نتیجه حکم ما درست می باشد در نتیجه باران می بارد گزاره ای صحیح می باشد.



چون به فیلد خالی رسیدیم این عبارت Unsatisfiable می باشد و kβ |= alpha

۳ . سه تا سکه داریم:

سکه ی اول سالم است و با احتمال ۱/۲ شیر میاد .

سکه دوم خراب است و با احتمال ۱/۴ شیر میاد.

سکه سوم هم خراب است و با احتمال ۳/۴ شیر میاد.

یک سکه به صورت رندوم برمی داریم و سه بار پرتاب می کنیم. اگر دو بار اول شیر و بار سوم خط بیاد.

با چه احتمالی سکه سوم رو برداشتیم؟

Coin ={1,2,3}
Model={shir, khat}

P(coin | Model) = P(Model | Coin) P(Coin) / P(Model)

$$\frac{3/4\times 3/4\times 1/4\times1/3}{1/2\times1/2\times1/2\times1/3 + 1/4\times1/4\times3/4\times1/3 + 3/4\times3/4\times3/4\times1/3}=\frac{9}{20}$$

P(coin | Model) $=\frac{9}{20}$

۴. اگر X , Y دو متغیر رندوم و مستقل در دامنه {۳،۲،۱} با احتمال $P(X=3)=1/6$ باشند.
با توجه به توزیع احتمال مشترک داده شده مقادیر باقی رو محاسبه کنید.

P(X=1 ,Y=1)=1/4 P(X=2 ,Y=1)=1/6 P(X=1 ,Y=2)=1/16 P(X=2 ,Y=2)=1/24

P(X=3 ,Y=1)=

P(X=3 ,Y=2)=

P(X=3 ,Y=3)=

P(X=1 ,Y=3)=

P(X=2 ,Y=3)=

جواب)

ما می دانیم که X و Y مستقل اند در نتیجه

$$P(X,Y) = P(x)\, P(y)$$

$$P(X|Y) = P(x)$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\frac{P(x=1)\, P(y=1)}{P(x=2)\, P(y=1)} = \frac{1/4}{1/6} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad p(x=1) = \frac{3\, p(x=2)}{2}$$

$$P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(x=1) + p(x=2) = \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{2}\, p(x=2) + p(x=2) = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad p(x=2) = \frac{1}{3}$$

$$p(x=1) + p(x=2) = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad p(x=1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1 ,Y=1) = P(x=1)\, P(y=1) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad p(y=1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1 ,Y=2) = P(x=1)\, P(y=2) = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad p(y=2) = \frac{1}{8}$$

$P(y=1) + P(y=2) + P(y=3) = 1 \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + p(x=3) = 1 \Rightarrow P(y=3) = \frac{3}{8}$

در نتیجه خواهیم داشت :

$P(x=1) = 1/2$ $P(x=2) = 1/3$ $P(x=3) = 1/6$

$P(y=1) = 1/2$ $P(y=2) = 1/8$ $P(y=3) = 3/8$

احتمال مقادیر داده شده :

$P(X=3, Y=1) = P(x=3)\,P(y=1) = (1/6)(1/2) = 1/12$

$P(X=3, Y=2) = P(x=3)\,P(y=2) = (1/6)(1/8) = 1/48$

$P(X=3, Y=3) = P(x=3)\,P(y=3) = (1/6)(3/8) = 1/16$

$P(X=1, Y=3) = P(x=1)\,P(y=3) = (1/2)(3/8) = 3/16$

$P(X=2, Y=3) = P(x=2)\,P(y=3) = (1/3)(3/8) = 1/8$

X|Y	**1**	**2**	**3**	
1	1/4	1/16	3/16	**1/2**
2	1/6	1/24	1/8	**1/3**
3	1/12	1/48	1/16	**1/6**
	4/8	1/8	3/8	**1**