Analisi Matematica B
Soluzioni prova scritta parziale n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

4 dicembre 2017

1. Siano $z \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostrare che
$$\frac{|w|^2 \cdot z}{w} + w \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. La parte immaginaria di un numero complesso z è $(z - \bar{z})/2$. Il doppio della parte immaginaria dell'espressione data è
$$\frac{|w|^2 \cdot z}{w} + w \cdot \bar{z} - \frac{|w|^2 \cdot \bar{z}}{\bar{w}} - \bar{w} \cdot z$$
e facendo denominatore comune e ricordando che $w\bar{w} = |w|^2$ si ottiene
$$= \frac{|w|^2 z\bar{w} + w\bar{z}\,|w|^2 - |w|^2 \bar{z}w - \bar{w}z\,|w|^2}{|w|^2} = 0.$$
Visto che la parte immaginaria è nulla il numero è reale. □

2. (a) Mostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = +\infty.$$
(b) Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}.$$

Soluzione. Posto $a_n = (2n)!/(n!)^2$ si ha
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{((n+1)!)^2(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \to 4$$
per $n \to +\infty$. Per il criterio del rapporto, essendo $4 > 1$, deduciamo che la successione a_n (a termini positivi) diverge a $+\infty$.

Per il criterio del rapporto alla Cesàro, visto che $a_{n+1}/a_n \to 4$ anche $\sqrt[n]{a_n} \to 4$. □

3. Si consideri la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi \cdot \frac{(n+x)^2}{n}\right).$$

   (a) Per $x = 1$ dire se la serie converge e se converge assolutamente.

   (b) Determinare gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge.

   (c) (più difficile) Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie è indeterminata?

Soluzione. Si noti che, in generale,

$$\sin(n\pi + x) = \sin(n\pi)\cos(x) + \cos(n\pi)\sin(x) = (-1)^n \sin(x).$$

Dunque, per $x = 1$, si ha

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi \cdot \frac{(n+1)^2}{n}\right) &= \sin\left(\pi\frac{n^2+2n+1}{n}\right) = \sin\left(\pi(n+2) + \frac{\pi}{n}\right)\\ &= (-1)^{n+2}\sin(\pi/n).\end{aligned}$$

La serie è dunque a segni alterni del tipo $\sum(-1)^n a_n$ dove $a_n = \sin(\pi/n)$. Per $n \to \infty$ si ha $a_n \to 0$. Inoltre visto che $\sin(x)$ è crescente per $x \in [0, \pi/2]$ la successione a_n risulta definitivamente decrescente. Per il teorema di Leibniz sulle serie a segni alterni la serie è dunque convergente. Ma non è assolutamente convergente in quanto

$$a_n = \sin(\pi/n) \sim \frac{\pi}{n}$$

e $\sum \pi/n$ è divergente.

Per determinare per quali x la serie converge possiamo innanzitutto verificare la condizione necessaria per la convergenza, ovvero per quali x si ha
$$\sin\left(\pi \cdot \frac{(n+x)^2}{n}\right) \to 0.$$

Ma

$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\pi \cdot \frac{(n+x)^2}{n}\right)\right| &= \left|\sin\left(\pi n + 2\pi x + \frac{\pi x^2}{n}\right)\right|\\ &= \left|(-1)^n \sin(2\pi x + \pi x^2/n)\right| \to |\sin(2\pi x)|\end{aligned}$$

e il limite è nullo se e solo se $\sin(2\pi x) = 0$ ovvero se $x = k/2$ con $k \in \mathbb{Z}$. Per valori diversi da questi la serie non può convergere. Se invece $x = k/2$ la serie si scrive nella forma

$$\sum(-1)^n \sin(\pi k + \pi k^2/(4n)) = \sum(-1)^{n+k}\sin(\pi k^2/(4n))$$

Risulta quindi, come nel caso precedente, che la serie è a segni alterni nella forma $\sum(-1)^n a_n$ e la successione $|a_n|$ è infinitesima e definitivamente decrescente.

Mostriamo infine che la serie è indeterminata per ogni altro $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo le somme parziali

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\pi \cdot \frac{(n+x)^2}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \sin(\pi n + 2\pi x + \pi x^2/n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \sin(2\pi x + \pi x^2/n) \\ &= \sin(2\pi x) \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cos(\pi x^2/n) + \cos(2\pi x) \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \sin(\pi x^2/n). \end{aligned}$$

La seconda parte:

$$Q_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \sin(\pi x^2/n)$$

è la somma parziale di una serie a segni alterni convergente. Dunque Q_N converge per $N \to +\infty$. Per la prima parte

$$R_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cos(\pi x^2/n)$$

vogliamo dimostrare che le somme R_{2N} sono convergenti. Associando i termini due a due si ottiene

$$\begin{aligned} R_{2N} &= \sum_{n=0}^{N-1} \big(\cos(\pi x^2/(2n+2)) - \cos(\pi x^2/(2n+1))\big) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (\cos(\pi x^2/(2n+2)) - 1) + \sum_{n=0}^{N-1} (1 - \cos(\pi x^2/(2n+1))) \end{aligned}$$

e ricordando che $1 - \cos(a_n) \sim a_n^2/2$ quando $a_n \to 0$ si osserva facilmente che le serie convergono e quindi R_{2N} converge. Risulta quindi che S_{2N} è convergente e dunque S_N non può divergere. □

4. Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!}.$$

   (a) Mostrare che la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(b) calcolare la somma della serie per $x = -1$;

(c) mostrare che per $x = 1$ la somma della serie è $\dfrac{e + e^{-1}}{2}$;

(d) calcolare la somma della serie per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. La serie in questione è una serie di potenze. Applicando il criterio del rapporto alla successione $a_n = 1/(2k)!$ si trova facilmente che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2k)!}{(2k+2)!} = \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} \to 0$$

dunque la serie ha raggio di convergenza $R = +\infty$ e quindi converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per $x = -1$ si ottiene

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

che coincide con lo sviluppo in serie della funzione $cos(y)$:

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

per $y = 1$. Dunque la somma della serie è pari a $\cos(1)$.

Per $x = 1$ possiamo invece applicare lo sviluppo in serie della funzione esponenziale:

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y^k}{k!} + \frac{(-1)^k y^k}{k!}}{2}.$$

Osservando che i termini con k dispari si cancellano e quelli con k pari si sommano, si ottiene

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!}.$$

Per $y = 1$ si ottiene proprio la serie corrispondente a $x = 1$ e dunque il risultato richiesto.

Dalle osservazioni precedenti ponendo $y = \sqrt{\pm x}$ si osserva, più in generale, che vale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \begin{cases} \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} & \text{se } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$\square$