Soluzioni prova scritta parziale n. 1

Analisi Matematica B, 2021/22

18.12.2021

1. Determinare il carattere della serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k!)^m}{(mk)!} x^k$$
al variare di $m \in \mathbb{N}$ e di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Posto $a_k = \frac{(k!)^m}{(mk)!} x^k$ si ha
$$\begin{aligned}
\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \frac{\frac{((k+1)!)^m}{(mk+m)!} \cdot |x|^{k+1}}{\frac{(k!)^m}{(mk)!} \cdot |x|^k} \\
&= \frac{(k+1)^m}{(mk+m) \cdot (mk+m-1) \cdots (mk+1)} \cdot |x| \\
&\sim \frac{k^m}{(mk)^m} \cdot |x| \to \frac{|x|}{m^m} \qquad \text{per } k \to +\infty.
\end{aligned}$$
Dunque se $|x| < m^m$ il limite del rapporto è inferiore a 1 e dunque la serie data è assolutamente convergente. Se $|x| > m^m$ il limite del rapporto è superiore a 1 e dunque $|a_k| \to +\infty$ e la serie non può essere convergente ($a_k \to 0$ è condizione necessaria per la convergenza).

Se $|x| = m^m$ si ha
$$\begin{aligned}
\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= \frac{(k+1)^m}{(mk+m) \cdot (mk+m-1) \cdots (mk+1)} \cdot m^m \\
&= \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+\frac{m-1}{m}} \cdots \frac{k+1}{k+\frac{1}{m}} \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$
Dunque $|a_{k+1}| \geq |a_k|$ cioè $|a_k|$ è crescente. Essendo $a_k \neq 0$ si ha $\lim|a_k| > 0$ e quindi la condizione necessaria $a_k \to 0$ non è verificata e la serie non è convergente. □

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare, se esiste, il limite della successione definita ricorsivamente:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n}{3}. \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{2a_n - a_n^2}{3}. \end{cases}$$

Per $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\lambda > \frac{2}{3}$ calcolare inoltre il limite

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{\lambda^k}.$$

Svolgimento. Consideriamo la successione $a_{n+1} = f(a_n)$ con $f(x) = \frac{x^2+2x}{3}$. Il caso $f(x) = \frac{2x-x^2}{3}$ è analogo ma tutti i segni vengono opposti.

Il grafico della funzione $f(x)$ è una parabola rivolta verso l'alto con vertice nel punto $(x, y) = (-1, f(-1)) = (-1, -1/3)$. Dunque la funzione f è strettamente decrescente sull'intervallo $(-\infty, -1]$ e strettamente crescente sull'intervallo $[-1, +\infty)$.

I punti fissi di f, ovvero le soluzioni di $f(x) = x$ sono $x = 0$ e $x = 1$.

Nell'intervallo $[0, 1]$ la funzione f è crescente dunque l'intervallo è invariante perché se $0 \leq x \leq 1$ si ha $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ cioè $0 \leq f(x) \leq 1$. Dunque se $\alpha \in [0, 1]$ si ha $a_n \in [0, 1]$ per ogni n. Su tale intervallo inoltre si ha $f(x) \leq x$ e dunque $a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$ e la successione è quindi decrescente. La successione ha quindi limite: $a_n \to \ell$ e si deve avere $\ell \in [0, 1]$ visto che $a_n \in [0, 1]$. Essendo inoltre a_n decrescente si ha $\ell \leq a_0 = \alpha$. Passando al limite nell'uguaglianza $a_{n+1} = f(a_n)$ si scopre infine che ℓ è un punto fisso di f. Se $\alpha < 1$ sarà quindi $\ell = 0$, se invece $\alpha = 1$ si avrà $a_n = 1$ e quindi $\ell = 1$.

Anche l'intervallo $(1, +\infty)$ è invariante in quanto su tale intervallo la funzione f è strettamente crescente e quindi se $x > 1$ si ha $f(x) > f(1) = 1$. Essendo inoltre $f(x) > x$ si trova che se $\alpha > 1$ la successione a_n è crescente. Dunque se $\alpha > 1$ si ha $a_n \to \ell$ con $\ell \geq \alpha > 1$. Non può dunque convergere ad un punto fisso e quindi per esclusione deve essere divergente: $\ell = +\infty$.

Anche l'intervallo $[-2, 0]$ è invariante perché su tale intervallo si ha $-\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 0$ e dunque $f(x) \in [-1/3, 0] \subset [-2, 0]$ se $x \in [-2, 0]$. Dunque se $\alpha \in [-2, 0]$ si ha $a_n \in [-2, 0]$ per ogni n. Su tale intervallo si ha inoltre $f(x) \geq x$ dunque la successione a_n è crescente e si ha $a_n \to \ell$ con $\ell \in [-2, 0]$. Necessariamente ℓ è un punto fisso di f e dunque deve essere $\ell = 0$.

Se $\alpha \in (-3, 2]$ si ha $a_0 = \alpha$ e $a_1 = f(\alpha) \in [0, 1)$. Ci si riconduce quindi ad un caso precedente e la successione a_n risulta essere convergente a 0.

Se $\alpha = -3$ si ha $a_0 = -3$, $a_1 = f(-3) = 1$ e dunque $a_n = 1$ per $n \geq 1$. La succesione dunque ha limite $\ell = 1$.

Se $\alpha < -3$ si ha $a_0 = \alpha < -3$ e $a_1 = f(\alpha) > 1$. Ci si riconduce quindi al caso $\alpha > 1$ e dunque anche in questo caso $a_n \to +\infty$.

Veniamo ora al limite di $\frac{a_n}{\lambda^n}$. Osserviamo che

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n}{3} = a_n \cdot \frac{2 + a_n}{3}.$$

Quando $\alpha = \frac{1}{2}$ sappiamo che $a_n \to 0$ e $a_n \geq 0$. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni $n \geq N$ si ha $0 \leq a_n < \varepsilon$. Dunque per $n > N$ si ha $\frac{2+a_n}{3} < \frac{2}{3} + \frac{\varepsilon}{2}$. Ed essendo $\lambda > \frac{2}{3}$ possiamo prendere ε sufficientemente piccolo in modo che sia $\frac{2+a_n}{3} < \mu$ per un qualche $\mu < \lambda$. Allora si ha, per ogni $n \geq N$:

$$0 \leq a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2 + a_n}{3} \leq a_n \cdot \mu.$$

Induttivamente si trova:

$$\begin{aligned}
&a_{N+1} \leq a_N \cdot \mu,\\
&a_{N+2} \leq a_{N+1} \cdot \mu \leq a_N \cdot \mu^2\\
&\quad \dots\\
&a_{N+k} \leq a_N \cdot \mu^k
\end{aligned}$$

e dunque

$$\frac{a_{N+k}}{\lambda^{N+k}} \leq \frac{a_N \cdot \mu^k}{\lambda^{N+k}} = \frac{a_N}{\lambda^N} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k \to 0 \qquad \text{per } k \to +\infty.$$

Significa che il limite richiesto è pari a 0. □

3. Al variare di $\alpha > 0$ calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{(n^3 + k)^\alpha} \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^3 + k^2)^\alpha}.$$

Svolgimento. Per la prima variante basta osservare che per $k = 1, \dots, n^2$ si ha

$$\frac{1}{(n^3 + n^2)^\alpha} \leq \frac{1}{(n^3 + k)^\alpha} \leq \frac{1}{(n^3 + 1)^\alpha}$$

da cui

$$\frac{n^2}{(n^3 + n^2)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{(n^3 + k)^\alpha} \leq \frac{n^2}{(n^3 + 1)^\alpha}.$$

Ma per $n \to +\infty$ si ha

$$\frac{n^2}{(n^3 + n^2)^\alpha} \sim \frac{n^2}{(n^3 + 1)^\alpha} \sim n^{2-3\alpha}$$

che tende a 0 se $\alpha > \frac{2}{3}$, tende a 1 se $\alpha = \frac{2}{3}$ e tende a $+\infty$ se $\alpha < \frac{2}{3}$. Per confronto dall'alto e dal basso, la sommatoria tende agli stessi valori.

Per la seconda variante, per $k = 1, \dots, n$ si ha

$$\frac{1}{(n^3 + n^2)^\alpha} \leq \frac{1}{(n^3 + k^2)^\alpha} \leq \frac{1}{(n^3 + 1)^\alpha}$$

da cui

$$\frac{n}{(n^3 + n^2)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^3 + k^2)^\alpha} \leq \frac{n}{(n^3 + 1)^\alpha}.$$

Stavolta la sommatoria risulta asintoticamente equivalente a $n^{1-3\alpha}$. $\square$