Studi Kasus 1 : Integral Simpson dari Fungsi *$f(x) = 2x^2+5$*

Program ini menghitung integral dari fungsi f(x) = $2x^2 + 5$ dengan menggunakan metode integral numerik Simpson 1/3. Pada kasus fungsi f(x) digunakan batas bawah (a) “0” dan batas atas (b) “2”. Metode Simpson 1/3 didapat dari Polinomial Newton-Gregory orde 2 dengan menggunakan interpolan parabola melalui tiga titik yang berdekatan. Dari sebuah kurva fungsi f(x) ditentukan tiga titik misalkan diinisialisasi sebagai 0, h, dan 2h. Kemudian dicari nilai fungsi dari ketiga titik yang digunakan. Setelah didapatkan nilai fungsi dari setiap titik, maka nilai-nilai tersebut disubtitusi ke dalam persamaan Integral Numerik metode Simpson 1/3. Dari nilai perhitungan tersebut dapat dibandingkan dengan perhitungan eksak, di mana dalam kasus fungsi ***$f(x) = 2x^2+5$*** didapat nilai integral dengan metode Simpson 1/3 yaitu 15.33 yang sesuai dengan perhitungan eksak. Namun untuk kasus kelipatan grid ganjil terdapat sedikit kekurangan yaitu metode ini hanya diterapkan pada sebagian interval, dan untuk menyelesaikan yang tersisa dapat digunakan metode trapezoid.

$f(x) = 2x^2 + 5$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^2 2x^2 + 5 = \frac{2x^3}{3} + 5x$$

$$= \frac{2x^3}{3} + 5x \Big|_0^2$$

$$= \frac{2(2)^3}{3} + 5(2) - 0$$

$$= \frac{16}{3} + 10$$

$$= \frac{46}{3}$$

$$= 15,33$$

Polinomial Newton - Gregory Orde 2 (Simpson 1/3)

$$P(x) = f_0 + \frac{x\,\Delta f_0}{1!\,h} + \frac{x(x-h)\,\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P(x)\,dx$$

$$I = \int_a^b \left(f_0 + \frac{x\,\Delta f_0}{h} + \frac{x(x-h)\,\Delta^2 f_0}{2h^2} \right) dx$$

$$I = x f_0 + \frac{x^2 \Delta f_0}{2h} + \frac{x^3 \Delta^2 f_0}{6h^2} - \frac{x^2 h\,\Delta^2 f_0}{4h^2} \Big]_0^{2h}$$

$$I = 2h f_0 + \frac{(2h)^2 \Delta f_0}{2h} + \frac{(2h)^3 \Delta^2 f_0}{6h^2} - \frac{(2h)^2 h\,\Delta^2 f_0}{4h^2}$$

$$I = 2h f_0 + 2h\,\Delta f_0 + \frac{4}{3} h\,\Delta^2 f_0 - h\,\Delta^2 f_0$$

$$I = 2h f_0 + 2h\,\Delta f_0 + \frac{1}{3} h\,\Delta^2 f_0$$

Jika $\Delta f_0 = f_1 - f_0$; $\Delta^2 f_0 = (f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$

maka

$$I = \cancel{2hf_0} + 2hf_1 - \cancel{2hf_0} + \tfrac{1}{3} hf_2 - \tfrac{2}{3} hf_1 + \tfrac{1}{3} hf_0$$

$$I = \tfrac{1}{3} hf_0 + \tfrac{4}{3} hf_1 + \tfrac{1}{3} hf_2$$

$$\boxed{I = \tfrac{1}{3} h (f_0 + 4f_1 + f_2)}$$

$f(x) = 2x^2 + 5$

$f_0 = f(0) = 2(0)^2 + 5 = 5$

$f_1 = f(1) = 2(1)^2 + 5 = 7$

$f_2 = f(2) = 2(2)^2 + 5 = 13$

$I = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$

$I = \frac{1}{3}(5 + 4(7) + 13)$

$I = \frac{1}{3}(46)$

$I = 15,33$ //

* Batas bawah (a) = 0

Batas atas (b) = 2

Jumlah grid (N) = 2

$h = \frac{b-a}{N} = \frac{2-0}{2} = 1$ //