筆答専門試験科目（午前）　　　　　　　　２９大修

情報工学系　　　　　　　　　　　時間　９：３０〜１２：３０

注　意　事　項

1. 各解答用紙に受験番号を記入せよ.
2. 次の５題のうち，１番〜３番の３題は必ず解答し，４番と５番からは１題を選び解答すること.
3. 解答は１題ごとに別々の解答用紙に，問題番号を明記した上で記入せよ．必要であれば，解答用紙の裏面に記入して良いが，解答用紙の表面にその旨を明記すること.
4. １枚の解答用紙に２題以上の解答を記入した場合はそれらの解答を無効とすることがある.
5. １題の解答を２枚以上の解答用紙に記入した場合はその解答を無効とすることがある.
6. 電子式卓上計算機等の使用は認めない.

1. 以下の問に答えよ.

1) 次の等式が成り立つ x の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & x^2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2) 次の行列 A について，以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) A を対角化する正規直交行列 U を求めよ.

b) 任意の自然数 n について，A^n を求めよ.

3) 3 次元直交座標系で表される空間内の点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ と，これを通らない直線 $\frac{x-x_1}{u} = \frac{y-y_1}{v} = \frac{z-z_1}{w}$ を含む平面の方程式を求める.

a) 点 P_0 を含む任意の平面を表す方程式（この方程式を Eq. 1 とする）を記せ.

b) 方程式 Eq. 1 の平面が点 (x_1, y_1, z_1) を含むことを表す式を記せ.

c) 方程式 Eq. 1 の平面が上記の直線と平行であることを表す式を記せ.

d) 求める平面の方程式は次式で与えられることを示せ.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

4) 実 2 次形式 $Q(\mathbf{x}) = \Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{j=1}^{n} h_{ij}x_ix_j$ を考える．ただし，$h_{ij} = h_{ji}$ ($\forall i, j = 1, 2, ..., n$) とする．$\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ の条件のもとで，$Q(\mathbf{x})$ の最大値は係数行列 $H = (h_{ij})$ の固有値の最大値と一致することを証明せよ.

2. 有限状態オートマトンは $(Q, \Sigma, \delta, q_{init}, F)$ の5つ組で定義される．ここで Q は状態集合，Σ は有限な入力記号の集合 (入力アルファベット)，δ は状態と入力記号の組を状態あるいは状態集合へ写像する状態遷移関数，$q_{init}(\in Q)$ は初期状態，$F(\subseteq Q)$ は終了状態の集合である．たとえば，0または1からなる偶数長の入力記号列のみを受理する2状態の有限状態オートマトン A_0 は以下のように定義できる．

A_0 : $\Sigma = \{0, 1\}$，$Q = \{q_0, q_1\}$，$q_{init} = q_0$，$F = \{q_0\}$

δ	0	1
q_0	q_1	q_1
q_1	q_0	q_0

以下では $\Sigma = \{0, 1\}$ とし，二進数表現された0以上の整数を入力とする有限状態オートマトンについて考える．ただし，オートマトンへの入力は二進数の最上位ビット (MSB) から先に1ビットずつ入力するものとし，最上位ビットから0が続くことも許す．たとえば，入力記号列 “0010” は二進数の10を表わすと考える．また，空記号 (列) は扱わないものとする．このような有限状態オートマトンについて以下の問に答えよ．解答に際して，状態遷移関数 δ は A_0 の例にならい，行に遷移元の状態，列に入力記号，各行列要素には遷移先の状態あるいは状態集合を持つ表形式で表現せよ．また，入力記号の集合は自明 ($\Sigma = \{0, 1\}$) なので定義から省略してよい．

1) 偶数のみを受理する2状態 ($Q = \{q_0, q_1\}$，$q_{init} = q_0$) の決定性有限状態オートマトン A_1 を A_0 の状態遷移関数のみを修正して定義せよ．ただし，A_1 の状態遷移関数のみを答えればよい．

2) 奇数のみを受理する決定性有限状態オートマトンを定義するには A_1 をどのように修正すればよいか30文字以内で答えよ．

3) 3の倍数のみを受理する3状態 ($Q = \{r_0, r_1, r_2\}$，$q_{init} = r_0$) の決定性有限状態オートマトン A_2 を定義せよ．

4) A_1 と A_2 の積 (Intersection) をとることにより6の倍数のみを受理する6状態の決定性有限状態オートマトン A_3 を定義せよ．ただし，A_1 および A_2 の状態と A_3 の状態との対応関係がわかるように A_3 の状態を命名せよ．その対応関係について60文字以内で説明せよ．

5) A_1 と A_2 の和 (Union) をとることにより偶数あるいは3の倍数のみを受理する6状態の非決定性有限状態オートマトン A_4 を定義せよ．ただし，A_4 の初期状態は s_0 とし ($q_{init} = s_0$)，その他の A_4 の状態は，A_1 および A_2 の状態との対応関係がわかるように命名せよ．その対応関係について60文字以内で説明せよ．

6) A_4 と等価な決定性有限状態オートマトン A_5 を定義せよ．ただし，A_5 の初期状態は s_0 とし ($q_{init} = s_0$)，その他の A_5 の状態は，A_1 および A_2 の状態との対応関係がわかるように命名せよ．その対応関係について120文字以内で説明せよ．

3. 部分和問題を解くプログラムを考える．部分和問題とは，n 個 $(n \geq 1)$ の非負整数の集合 $A = \{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ と非負整数 k が与えられたときに，A の中から 0 個以上の要素を選び，その和が k に等しくできるときに 1，どう選んでも等しくできないときに 0 を返す問題である．すなわち $(\sum_{a \in S} a) = k$ である A の部分集合 S $(S \subseteq A)$ が存在するときに 1，そうでないときに 0 を返す．

この問題を解くためのＣ言語プログラムに関して，問 1), 2) および 3) に答えよ．なお，非負整数の集合 A の要素は `int` 型の配列変数 `a[]` で与えられるものとし，配列のサイズは十分大きいとする．`a[]`, `int` 型の変数 `k`，`n` は大域変数として宣言されているものとする．また問題中に出現する `int` 型の配列変数 `b[][]` も大域変数として宣言され，そのサイズも十分大きいとする．空欄（$\boxed{①}$ など）には，１つの式が入るものとする．

なおＣ言語では，真偽値（true, false）は，`int` 型の値で表し，`if` 文などで使用される条件式の実行結果が，真のときはその条件式は 1，偽のときはその条件式は 0 を返す．例えば，比較演算子==を使った条件式 3==3 は 1 を返す．

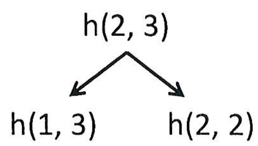
1) 図 3.1 のように部分和問題を解く２引数の関数 `f` を再帰呼び出しを使って定義した．この関数 `f` に関して以下の問いに答えよ．

```
int f(int s, int i){
   if (i==n) {return s==k;}
   else {return f(s, i+1) || f(s+a[i], i+1);}
}
```

図 3.1

a) `a[0]=8`，`a[1]=2`，`a[2]=4`，n=3，k=7 を与え，`f(0, 0)` を実行させたとき，その戻り値が何かを答えよ．

b) 問 1)-a) と同じ `a[0]=8`，`a[1]=2`，`a[2]=4`，n=3，k=7 を与え，`f(0, 0)` を実行させたとき，実行が終了するまでの関数 `f` の呼び出し関係を樹形図の形式で記述せよ．関数の呼び出し関係の樹形図とは，その関数が呼び出されたときにその関数と渡される引数の値を子ノード，呼び出し元の関数とその引数を親ノードとして，樹形図で書いたものである．例えば，右の樹形図は，関数 `h` に引数 2，3 が渡され，実行されると，その実行中に `h(1,3)` と `h(2,2)` が呼び出されることを表している．



c) 関数 `f` の２つの引数 `s`，`i` は何を表しているかを説明せよ．

2) 図 3.1 のプログラムの実行時間を改善するために，下記の文を図 3.1 の関数 `f` の本体の先頭行（プログラムの１行目と２行目の間）に挿入した．この文に関して以下の問いに答えよ．

`if (` $\boxed{①}$ `> k ) {return 0;}`

（次ページへ続く）

（前ページの続き）

a) 空欄 $\boxed{①}$ を埋めて，文を完成せよ．

b) 問 1)-a) と同じ `a[0]=8, a[1]=2, a[2]=4, n=3, k=7` を与え，`f(0, 0)` を実行させたとき，実行が終了するまでの `f` の呼び出し関係を樹形図の形式で記述せよ．

c) 図 3.1 のプログラムと比べて，何が改善されたかを理由とともに述べよ．

3) 再帰呼び出しを使用せずに，部分和問題を解くプログラムを作ることを考える．$n \geq 2$，集合 $A=\{a_0, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}\}$ において，$A'=\{a_0, \cdots, a_{n-2}\}$ とすると，以下の性質 3.1 が成り立つことに気づいた．

性質 3.1

$(\sum_{a \in T} a) = k$ となる A の部分集合 T $(T \subseteq A)$ が存在することの必要かつ十分な条件は，
$(\sum_{a \in U} a) = k$ である A' の部分集合 U $(U \subseteq A')$ が存在するか，または
$(\sum_{a \in V} a) = k - \boxed{②}$ である A' の部分集合 V $(V \subseteq A')$ が存在するかである．

性質 3.1 を使って，配列変数 `b[][]` を導入し，図 3.2 のような関数 `g` のプログラムを作成した．性質 3.1 と図 3.2 について，以下の問いに答えよ．

```
int g(void){
  int i, j;
  b[0][0]=1;
  for (i=0; i<n; i++) {
    for (j=1; j<=k; j++) {b[i][j]=0;}
    for (j=0; j<=k; j++) {
      if ( ③ ) {b[i][j]=1;}
      if (i>0) {
        if (b[i-1][ ④ ]) {b[i][j]=1;}
        if (j>=a[i]) {
          if (b[i-1][ ⑤ ]) {b[i][j]=1;}
        }
      }
    }
  }
  return b[n-1][k];
}
```

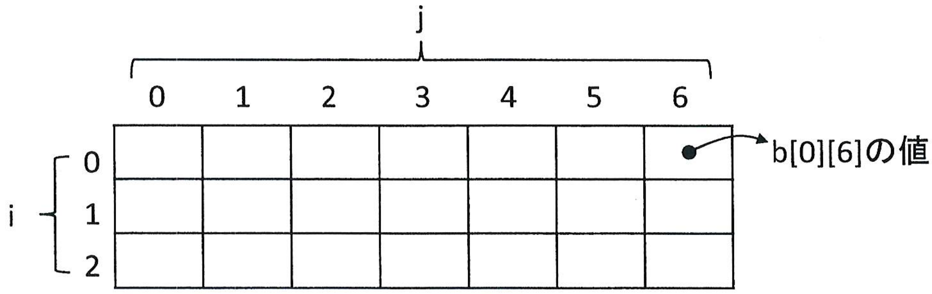
図 3.2

（次ページへ続く）

a) 性質 3.1 が成り立つように，空欄 ② を埋めよ．なぜ性質 3.1 が成り立つのかも説明せよ．

b) 図 3.2 の 3 つの空欄 ③，④，⑤ を埋めて，関数 `g` のプログラムを完成させよ．

c) `a[0]=8`，`a[1]=2`，`a[2]=4`，`n=3`，`k=6` を与え，`g()` を実行させたときの戻り値と，配列 `b[i][j]` (ただし，$0 \le$ `i` ≤ 2，$0 \le$ `j` ≤ 6) に格納されている値を下記のような表形式で示せ．



d) 配列 `b[i][j]` の値が 1 になったとき，それは何を表しているかを説明せよ．

e) 図 3.1 と図 3.2 のプログラムを比較して，計算時間の観点からどちらが優れているかを論ぜよ．

4.

1) 周期 2π の区分的に滑らかな関数 $f(x)$ において，そのフーリエ級数を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

で与える場合，これらの係数は

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

となる．以下の問に答えよ．

a) 次式の周期関数 $f_1(x)$ のフーリエ級数の係数 a_0, a_k, b_k を求めよ．

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, \quad -\pi \le x < \pi \\ f_1(x+2\pi) &= f_1(x) \end{aligned}$$

b) 次式の周期関数 $f_2(x)$ のフーリエ級数の係数 a_0, a_k, b_k を求めよ．

$$f_2(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < -\pi/2 \\ 1, & -\pi/2 \le x < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$$

$$f_2(x+2\pi) = f_2(x)$$

c) 周期関数 $f(x)$ のフーリエ級数を用いて，以下のパーシヴァル (Parseval) の等式を導出せよ．

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

2) 関数 $x(t)$ のフーリエ変換を

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

と定義する．ただし，i は虚数単位である．以下の問に答えよ．

a) インパルス関数（ディラック (Dirac) のデルタ関数）$\delta(t)$ が周期 T で並んでいる次のくし形関数を考える．

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

このくし形関数をフーリエ変換すると，

$$G(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\Omega)$$

になる．定数 Ω と周期 T の関係を求めよ．ただし，

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k), \quad \delta(c\omega) = \frac{1}{|c|}\delta(\omega)$$

の関係式を用いてもよい．c はゼロでない実数である．

(次ページにつづく)

(前ページのつづき)

b) 関数 $x(t)$ と問 2)-a) のくし形関数 $g(t)$ の積 $x_s(t) = x(t)g(t)$ を考える．$x_s(t)$ をフーリエ変換して $X_s(\omega)$ を求めたい．このとき，この積の関係はフーリエ変換後に以下の畳み込み積分の関係になる．

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \omega')G(\omega')d\omega'$$

この畳み込み積分を計算し，$X_s(\omega)$ と $X(\omega)$ の関係式を示せ．

c) $X(\omega)$ が図 4.1 に示す分布である場合，問 2)-b) の $X_s(\omega)$ の概形を図示せよ．サンプリング定理の観点からこの状況を簡潔に説明せよ．

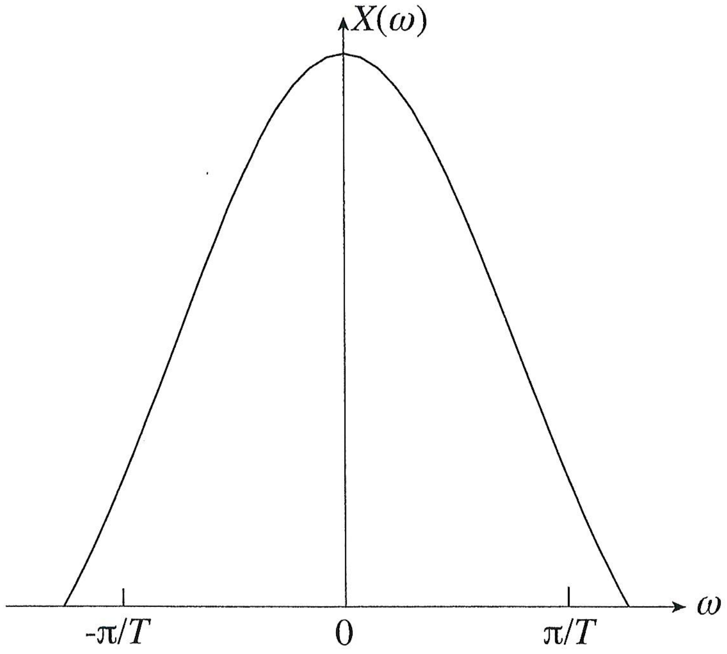


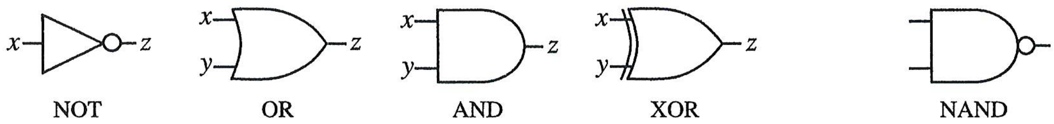
図 4.1　$X(\omega)$ の分布

5.

1) 次の論理代数（ブール代数）の等式を証明せよ．ただし $\overline{x}$ は x の否定（NOT），$x \vee y$ は x と y の論理和（OR），$x \cdot y$ は x と y の論理積（AND）を表す．

$$\overline{\overline{x \cdot (\overline{x \cdot y})} \cdot \overline{y \cdot (\overline{x \cdot y})}} = x \cdot \overline{y} \vee y \cdot \overline{x}$$

2) 図 5.1(a) に示す NOT, OR, AND, および排他的論理和（XOR）のそれぞれの論理ゲートを，4 個以下の図 5.1(b) に示す NAND ゲートのみを用いて実現せよ．



(a) (b)

図 5.1

（次ページにつづく）

（前ページのつづき）

3) 図 5.2 に示す 3 ビットのデータを送受信するシリアル通信のための送信回路を考える．R_0 から R_4 は立ち上がり動作のエッジトリガ型 D フリップフロップであり，0 に初期化されている．*clock* はクロック信号，e はデータ送信のタイミングを制御する入力信号，z は送信回路の出力である．M_0 から M_4 は入力信号 e が 1 の時に上側の入力を，0 の時に下側の入力を出力するマルチプレクサである．d_0 から d_2 は 3 ビットの送信データである．

M_4 の下側の入力を 0 に固定することで，データを送信していない間の出力 z を 0 にする．また，M_0 の上側の入力を 1 に固定することで，3 ビットのデータの先頭に 1 を追加して出力し，データ送信の開始を判定できるようにする．

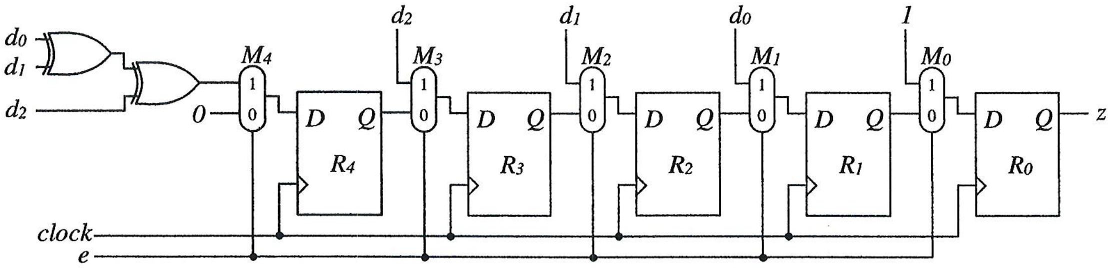


図 5.2

a) 図 5.3 の波形が入力として与えられた時，クロックサイクル C1 から C12 の間のクロックサイクルの波形と，その範囲の出力 z の波形を描け．

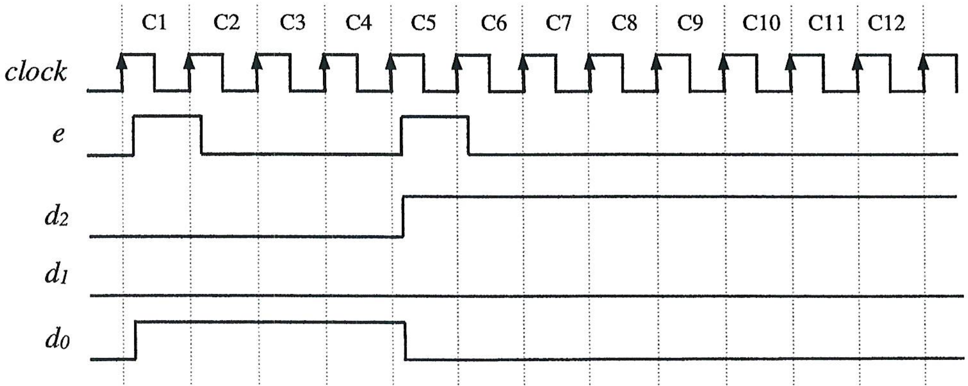


図 5.3

b) この送信回路には，受信側でデータの誤りを検出する仕組みが使われている．この原理を 150 文字程度で説明せよ．

（次ページにつづく）

（前ページのつづき）

4) 3ウェイ・セット・アソシアティブ方式のキャッシュを考える．ブロックサイズを2ワード，キャッシュの容量を12ブロック，置き換えアルゴリズムをLRU(Least Recently Used)とする．このキャッシュの初期状態を図5.4に示す．

way-1

index	*v*	*tag*	*lru*	*data1*	*data2*
0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0

way-2

index	*v*	*tag*	*lru*	*data1*	*data2*
0	0	0	2	0	0
1	0	0	2	0	0
2	0	0	2	0	0
3	0	0	2	0	0

way-3

index	*v*	*tag*	*lru*	*data1*	*data2*
0	0	0	3	0	0
1	0	0	3	0	0
2	0	0	3	0	0
3	0	0	3	0	0

図 5.4

メモリ参照のアドレスから生成されるインデックス ($index$) の値により，0〜3の中から1つのセットが選択される．v はエントリが利用されている場合に1，そうでない場合に0となる有効ビットである．tag はタグ，*data1* はブロックの下位アドレスのワード，*data2* はブロックの上位アドレスのワードをそれぞれ格納するフィールドである．

lru はLRU置き換えアルゴリズムのためのフィールドであり，あるセットの中で最も近い過去にアクセスされたエントリに3，最も遠い過去にアクセスされたものに1，そうでないものに2を格納する．*way-1* の全てのエントリの lru は1で，*way-2* の全てのエントリの lru は2で，*way-3* の全てのエントリの lru は3で初期化されている．

図5.4の状態から，ワードアドレス（ワード単位で割り当てられたアドレス）が26のワードを参照し，その後，ワードアドレスが51のワードを参照した後の状態を図5.5に示す．ただし，ワードアドレス x のワードを (x) と記述する．

way-1

index	*v*	*tag*	*lru*	*data1*	*data2*
0	0	0	1	0	0
1	1	3	2	(26)	(27)
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0

way-2

index	*v*	*tag*	*lru*	*data1*	*data2*
0	0	0	2	0	0
1	1	6	3	(50)	(51)
2	0	0	2	0	0
3	0	0	2	0	0

way-3

index	*v*	*tag*	*lru*	*data1*	*data2*
0	0	0	3	0	0
1	0	0	1	0	0
2	0	0	3	0	0
3	0	0	3	0	0

図 5.5

a) 図5.5の状態から，ワードアドレスが60のワードを参照した後の *way-1* の状態を図5.5と同じ形式で示せ．

b) その後，次の系列のワードアドレスのワードを参照する．

61, 19, 50

それぞれの参照がキャッシュにヒットするかミスするかを述べよ．また，これらのワードを参照した後の *way-2* の状態を図5.5と同じ形式で示せ．

c) さらにその後，次の系列のワードアドレスのワードを参照する．

18, 42, 43, 12

それぞれの参照がキャッシュにヒットするかミスするかを述べよ．また，これらのワードを参照した後の *way-1*, *way-2*, *way-3* の状態を図5.5と同じ形式で示せ．