Sistemas dinámicos

Ecuaciones de diferencias

Jorge López Jiménez

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia

2023-20

En esta presentación...

El objetivo de esta presentación es dar una introducción al tema de ecuaciones de diferencias.

Más precisamente, veremos lo siguiente:

- Definición de ecuación de diferencias
- Concepto de solución de una ecuación de diferencias
- Teorema de la existencia y unicidad de soluciones
- Concepto de punto de equilibrio de una ecuación de diferencias
- Ecuaciones de diferencias lineales

¿Qué es una ecuación de diferencias?

Considere una secuencia finita o infinita de puntos que representa instantes discretos de tiempo (usualmente igualmente espaciados), y que está indexada por k, e.g., $k \in \{0, 1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Considere también la variable real $y[k] \in \mathbb{R}$ cuyo valor depende del instante de tiempo k, i.e., $y[\cdot]$ es un número real que cambia en el tiempo.

Una **ecuación de diferencias** es una ecuación que relaciona el valor $y[k]$, en un tiempo k, con otros valores $y[\cdot]$ definidos en otros tiempos (típicamente consecutivos).

¿Qué es una ecuación de diferencias?

Un ejemplo sencillo de ecuación de diferencias es

$$y[k+1] = 7y[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Otro ejemplo un poco más complejo es

$$ky[k+2]y[k+1] = \frac{1}{2}\sqrt{y[k]y[k-1]}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

¿Qué es una ecuación de diferencias?

Una ecuación de diferencias es realmente un conjunto de ecuaciones, una ecuación para cada instante de tiempo.

Por ende, parte de la especificación de una ecuación de diferencias son los instantes de tiempo en los cuales la ecuación está definida!

Por lo general, a menos que se especifique lo contrario de forma explicita, asumimos que la secuencia de tiempos en la que está definida la ecuación es $k = 0, 1, 2, \dots$ (hasta el infinito).

¿Qué es una ecuación de diferencias?

Como ejemplo, la ecuación de diferencias

$$y[k+1] = 7y[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

es equivalente al conjunto (infinito) de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y[1] &= 7y[0] \\ y[2] &= 7y[1] \\ y[3] &= 7y[2] \\ &\vdots \end{aligned}$$

El orden de una ecuación de diferencias

El **orden** de una ecuación de diferencias es la diferencia que hay entre el índice más alto y el índice más bajo que aparecen en la ecuación, i.e., la diferencia entre los corrimientos más alto y más bajo que hay en $y[\cdot]$.

Por ejemplo, la ecuación

$$y[k+1] = 7y[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

es de orden $(k+1) - (k) = 1$ (de primer orden), mientras que la ecuación

$$ky[k+2]y[k+1] = \frac{1}{2}\sqrt{y[k]y[k-1]}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

es de orden $(k+2) - (k-1) = 3$ (de tercer orden).

El orden de una ecuación de diferencias (ejercicio)

Determine el orden de las siguientes ecuaciones de diferencias:

$$y[k+4] + ky[k-1] = y[k]$$

$$(y[k+2])^2 + (y[k])^2 = -1$$

$$y[k+1] = \frac{y[k]}{1+y[k]}$$

El orden de una ecuación de diferencias (ejercicio)

Determine el orden de las siguientes ecuaciones de diferencias:

$$y[k+4] + ky[k-1] = y[k] \quad \text{Orden } (k+4)-(k-1)=5$$

$$(y[k+2])^2 + (y[k])^2 = -1 \quad \text{Orden } (k+2)-(k)=2$$

$$y[k+1] = \frac{y[k]}{1+y[k]} \quad \text{Orden } (k+1)-(k)=1$$

Concepto de solución de una ecuación de diferencias

Una solución de una ecuación de diferencias es una secuencia de números (reales) que satisface la ecuación. Dicha secuencia se denomina **trayectoria**.

Ejemplo: Determine la solución para $y[k+1] = 2y[k]$, para $k = 0, 1, 2, \dots,$ suponiendo que $y[0] = 1$.

Respuesta: Note que

$$\begin{aligned} y[1] &= 2y[0] = 2 \\ y[2] &= 2y[1] = 4 \\ y[3] &= 2y[2] = 8 \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

Por ende, la (única) solución en este caso es la secuencia de números:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \dots$$

Concepto de solución de una ecuación de diferencias

En ocasiones es posible encontrar una expresión cerrada para la secuencia de números que caracteriza la solución de la ecuación de diferencias.

Por ejemplo, para el caso de $y[k+1] = 2y[k]$ tenemos que $y[k] = 2^k$ es una expresión cerrada para la solución cuando $y[0] = 1$.

Para verificar esto, note que $y[k] = 2^k$ satisface la ecuación de diferencias para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$. Observe que $y[0] = 2^0 = 1$ y que

$$\begin{aligned} y[k+1] &= 2y[k] \\ &= 2\left(2^k\right) \qquad \text{(aplicando } y[k] = 2^k\text{)} \\ &= 2^{k+1} \\ &= y[k+1] \quad \text{(aplicando } y[k+1] = 2^{k+1}\text{)} \end{aligned}$$

Concepto de solución de una ecuación de diferencias

Considere por ejemplo la ecuación de diferencias

$$(k+1)y[k+1] - ky[k] = 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots,$$

y asuma que $y[1] = 0$. Una solución de esta ecuación es $y[k] = 1 - \frac{1}{k}$.

Para verificar esto note que $y[1] = 1 - \frac{1}{1} = 0$ y que

$$\begin{aligned}
1 &= (k+1)y[k+1] - ky[k] \\
&= (k+1)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - k\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{k+1}\right) - k\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= k - (k-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Concepto de solución de una ecuación de diferencias

Considere por ejemplo la ecuación de diferencias

$$y[k+1] = \frac{y[k]}{1+y[k]}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

con condición inicial $y[0] = a$, con $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Note que la solución general para esta ecuación de diferencias es:

$$y[k] = \frac{a}{1+ak}$$

Para verificar esto observe que

$$y[0] = \frac{a}{1 + a(0)} = a$$

y que

$$\begin{aligned}
y[k+1] &= \frac{y[k]}{1 + y[k]} \\
&= \frac{\frac{a}{1+ak}}{1 + \frac{a}{1+ak}} \\
&= \frac{\frac{a}{1+ak}}{\frac{1+ak+a}{1+ak}} \\
&= \frac{a}{1 + ak + a} \\
&= \frac{a}{1 + a(k+1)} \\
&= y[k+1]
\end{aligned}$$

Concepto de solución de una ecuación de diferencias

En general, una ecuación de diferencias no necesariamente tiene solución. Y de tenerla, la solución no necesariamente es única!

Considere la ecuación de diferencias:

$$(y[k+1])^2 + (y[k])^2 = -1, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Dado que $y[\cdot] \in \mathbb{R}$ por definición, note que la ecuación de diferencias no tiene solución!

¿Qué condiciones debe cumplir una ecuación de diferencias para que su solución exista y además sea única?

Teorema de existencia y unicidad de soluciones

Teorema

Sea una ecuación de diferencias de la forma

$$y[k+n] = f\left(y[k+n-1], y[k+n-2], \ldots, y[k], k\right),$$

donde f es una función real arbitraria, definida sobre una secuencia de valores de k ($k = k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots$). La ecuación de diferencias tiene una y sólo una solución correspondiente a la especificación de las n condiciones iniciales: $y[k_0]$, $y[k_0+1]$, $\ldots$, $y[k_0+n-1]$.

Prueba: si las n condiciones iniciales $y[k_0]$, $y[k_0+1]$, $\ldots$, $y[k_0+n-1]$ están dadas, entonces $y[k+n]$ se puede computar evaluando la función f. Con $y[k+n]$ dado, se puede ahora evaluar la ecuación de diferencias para $y[k+n+1]$, y así sucesivamente.

Existencia y unicidad de soluciones

Determine si las siguientes ecuaciones de diferencias tienen una solución única (suponiendo que se dan las condiciones iniciales correspondientes).

$$y[k+2] + y[k] = 0 \to \textbf{SI}$$

Note que en este caso se tiene: $f\left(y[k]\right) = -y[k] \in \mathbb{R}$

$$e^{y[k+1]} + \left(y[k]\right)^2 = -1 \to \textbf{NO}$$

Note que en este caso se tiene: $f\left(y[k]\right) = \ln\left(-1 - \left(y[k]\right)^2\right) \notin \mathbb{R}$

$$y[k+2] - y[k+1]e^{y[k]} - k^2 = 0 \to \textbf{SI}$$

Note que: $f\left(y[k+1], y[k], k\right) = \left(y[k+1]e^{y[k]} + k^2\right) \in \mathbb{R}$

Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

Un punto de equilibrio de una ecuación de diferencias es un valor y^*, tal que, si $y[k] = y^*$, entonces $y[\kappa] = y^*$, para todo $\kappa \geq k$.

En otras palabras, un punto de equilibrio de una ecuación de diferencias es un punto fijo que una vez alcanzado se mantiene a lo largo del tiempo.

Para ecuaciones de diferencias de primer orden, todo punto de equilibrio y^* debe satisfacer:

$$y[k+1] = y[k] = y^*$$

para todo k en la secuencia de tiempos en los que está definida la ecuación.

Veamos un ejemplo (**Sección 2.5, Luenberger, 1979**).

Supongamos que tenemos la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[k+1] = -\frac{b}{a}y[k] + \frac{c}{a}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ son coeficientes constantes de la ecuación.

Noten que $y^* = \frac{c}{a+b}$ es un punto de equilibrio de la ecuación de diferencias:

$$y[k+1] = -\frac{b}{a}\left(\frac{c}{a+b}\right) + \frac{c}{a} = \frac{c}{a}\left(1 - \frac{b}{a+b}\right) = \frac{c}{a}\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{c}{a+b}$$

Por ende, $y[k+1] = y[k] = y^*$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

Ejercicio: determine por inspección al menos un punto de equilibrio de las siguientes ecuaciones de primer orden:

$$y[k+1] = 7y[k]$$

$$y[k+1] = -y[k] + 4$$

$$y[k+1] = (y[k])^2$$

Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

Ejercicio: determine por inspección al menos un punto de equilibrio de las siguientes ecuaciones de primer orden:

$$y[k+1] = 7y[k] \longrightarrow y^* = 7y^* \longrightarrow y^* = 0$$

$$y[k+1] = -y[k] + 4 \longrightarrow y^* = -y^* + 4 \longrightarrow y^* = 2$$

$$y[k+1] = (y[k])^2 \longrightarrow y^* = (y^*)^2 \longrightarrow y^* = 0,\ y^* = 1$$

Por ahora nos interesa entender el concepto de punto de equilibrio. Más adelante estudiaremos en detalle las propiedades de los puntos de equilibrio para ciertos tipos de ecuaciones de diferencias!

Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

En general, una ecuación de diferencias puede no tener ningún punto de equilibrio, puede tener múltiples puntos de equilibrio (incluso infinitos), o puede tener un único punto de equilibrio.

Usualmente, lo que nos interesará es estudiar si un punto de equilibrio dado (asumiendo que exista) es estable, asintóticamente estable, o inestable.

Más adelante definiremos en más detalle los diferentes conceptos de estabilidad. Por ahora, podemos considerar las siguientes definiciones informales:

- **Equilibrio estable:** "si comenzamos suficientemente cerca al equilibrio, sin estar exactamente en el equilibrio, entonces podemos garantizar que nos quedamos en una región cercana al mismo".
- **Equilibrio asintóticamente estable:** "si comenzamos suficientemente cerca al equilibrio, sin estar exactamente en el equilibrio, entonces podemos garantizar que convergemos al mismo".
- **Equilibrio inestable:** un punto de equilibrio que no es estable.

Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

Consideremos de nuevo la ecuación de diferencias:

$$y[k+1] = -\frac{b}{a}y[k] + \frac{c}{a}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots,$$

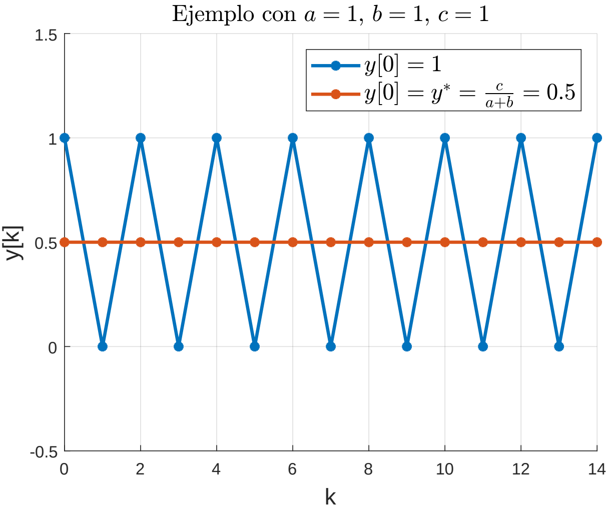
donde $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ son coeficientes constantes de la ecuación.

Ya vimos que $y^* = \frac{c}{a+b}$ es un punto de equilibrio de dicha ecuación.

Veamos que sucede para distintos valores de a, b, y c.

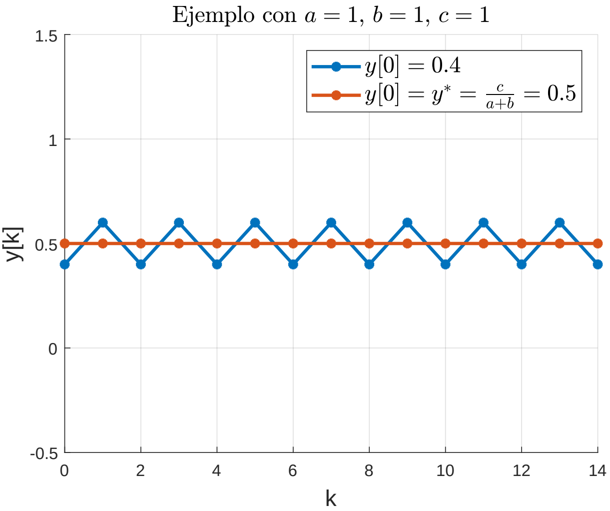
Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

Para la ecuación considerada, si $a = b$, entonces $y^* = \frac{c}{a+b}$ es un punto de equilibrio **estable**.



Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

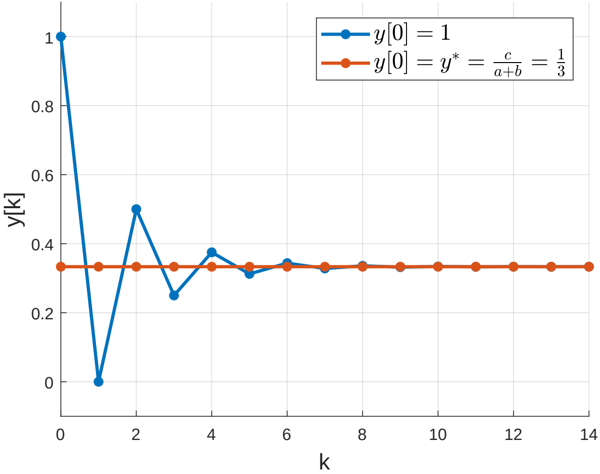
Para la ecuación considerada, si $a = b$, entonces $y^* = \frac{c}{a+b}$ es un punto de equilibrio **estable**.



Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

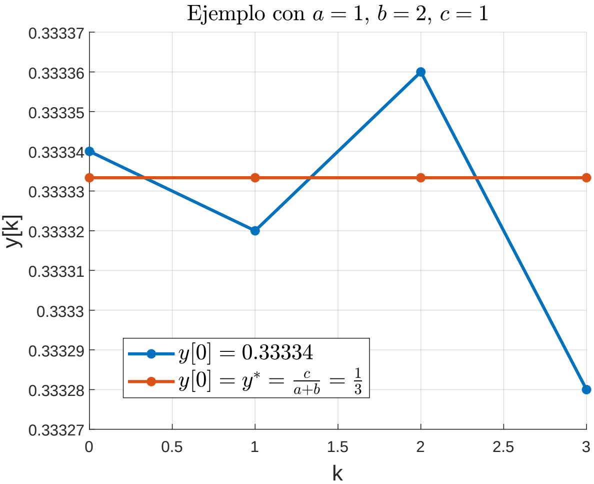
Para la ecuación considerada, si $a > b$, entonces $y^* = \frac{c}{a+b}$ es un punto de equilibrio **asintóticamente estable**.

Ejemplo con $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$



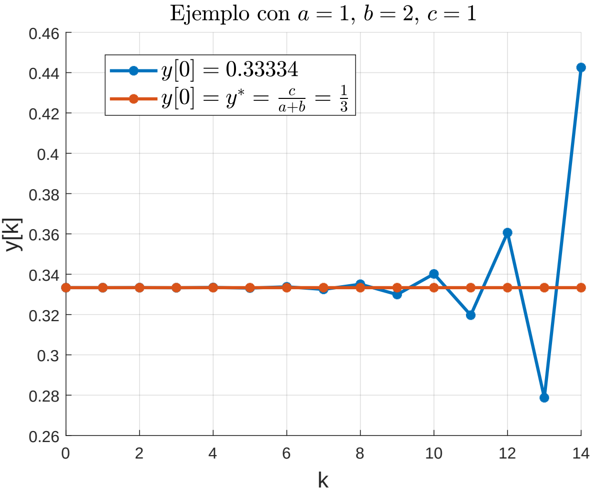
Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

Para la ecuación considerada, si $a < b$, entonces $y^* = \frac{c}{a+b}$ es un punto de equilibrio **inestable**.

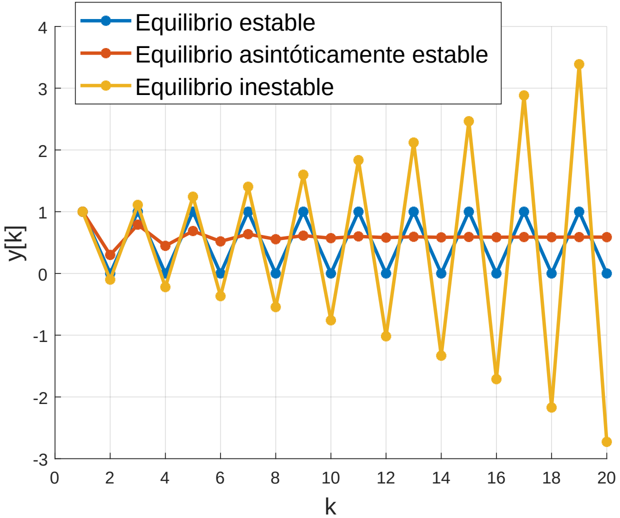


Punto de equilibrio de una ecuación de diferencias

Para la ecuación considerada, si $a < b$, entonces $y^* = \frac{c}{a+b}$ es un punto de equilibrio **inestable**.



En resumen, para la ecuación considerada, si $b/a = 1$, y^* es estable; si $b/a < 1$, y^* es asintóticamente estable; y si $b/a > 1$, y^* es inestable.



Ecuaciones de diferencias lineales

Para formalizar nuestro estudio de las ecuaciones de diferencias, vamos a enfocarnos en la familia de ecuaciones de diferencias lineales.

Sea una ecuación de diferencias de la forma

$$y[k+n] = f\left(y[k+n-1], y[k+n-2], \ldots, y[k], k\right), \tag{1}$$

donde f es una función real definida sobre una secuencia de valores de k (i.e., $k = 0, 1, 2, \ldots$). Si para cualquier k la función f es una combinación lineal de los términos $y[k+n-1], y[k+n-2], \ldots, y[k]$, entonces se dice que (1) es una ecuación de diferencias lineal.

Ecuaciones de diferencias lineales

Usualmente, una ecuación de diferencias lineal de orden n tiene la forma:

$$y[k+n] + a_{n-1}[k+n-1]y[k+n-1] + \cdots + a_1[k+1]y[k+1] + a_0[k]y[k] = u[k],$$

para una secuencia definida de valores de k, donde $a_i[\cdot]$ y $u[\cdot]$ son funciones reales del tiempo.

- Si $u[k] = 0$ para todo k, entonces la ecuación de diferencias lineal se denomina **homogénea** o **no forzada**.
- Si $a_i[k] = a_i$ para todo k y para todo i, entonces la ecuación de diferencias lineal se denomina **invariante en el tiempo**.
- Si $u[k] = 0$ y $a_i[k] = a_i$ para todo k y para todo i, entonces la ecuación de diferencias lineal se denomina **autónoma** (i.e., la ecuación no depende del tiempo k).

Ecuaciones de diferencias lineales

En particular, nos interesa estudiar en detalle la familia de ecuaciones lineales con coeficientes constantes (invariantes en el tiempo) de la forma:

$$y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \cdots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = u[k], \qquad (2)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, para todo i, y $y[\cdot], u[\cdot] \in \mathbb{R}$.

Pregunta: Dadas las n condiciones iniciales $y[n-1]$, $y[n-2]$, $\ldots$, $y[1]$, $y[0]$, ¿qué podemos decir con respecto a la solución de la ecuación (2)?

Respuesta: podemos decir que para cada set de condiciones iniciales $y[n-1]$, $y[n-2]$, $\ldots$, $y[1]$, $y[0]$ existe una y sólo una solución de la ecuación de diferencias (2). Este resultado sigue del Teorema de existencia y unicidad notando que:

$$\begin{aligned} y[k+n] &= f\left(y[k+n-1], y[k+n-2], \ldots, y[k], k\right) \\ &= u[k] - \left(a_{n-1}y[k+n-1] + \cdots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k]\right). \end{aligned}$$

Ecuaciones de diferencias lineales

Para las ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes existen expresiones cerradas para las soluciones en varios casos generales.

Consideremos primero el caso de la ecuación homogénea:

$$y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \cdots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = 0.$$

El **polinomio característico** de dada ecuación homogénea está dado por:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ las n raíces (simples) del polinomio característico, entonces la **solución general** de la ecuación homogénea está dada por:

$$y[k] = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k + \cdots + c_n\lambda_n^k,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son coeficientes constantes cuyos valores dependen de la condición inicial para la cual se quiera encontrar la solución.

Ecuaciones de diferencias lineales

Ejemplo: Determine la forma de la solución general para la ecuación de diferencias:

$$y[k+1] = ay[k], \quad a \in \mathbb{R}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Posteriormente, determine el valor del coeficiente asociado para encontrar la solución para el caso $y[0] = 7$.

Respuesta: El polinomio característico en este caso es: $\lambda - a = 0$. Por ende, la única raíz en este caso es $\lambda = a$. Por lo tanto, la solución general es: $y[k] = ca^k$.

Ahora, para cumplir $y[0] = 7$ se requiere que:

$$y[0] = 7 \implies ca^0 = 7 \implies c = 7.$$

Por ende, la solución para esa condición inicial sería $y[k] = 7a^k$.

Ejemplo: Determine la forma de la solución general para la ecuación de diferencias:

$$y[k+2] + 3y[k+1] + 2y[k] = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2 \ldots$$

Posteriormente, determine el valor de los coeficientes asociados cuando $y[0] = 0$ y $y[1] = 1$.

Respuesta: En este caso el polinomio característico es:

$$\begin{array}{ccccccc} y[k+2] & + & 3y[k+1] & + & 2y[k] & = & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \lambda^2 & + & 3\lambda^1 & + & 2\lambda^0 & = & 0 \end{array}$$

Es decir, $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$.

De aquí podemos ver que: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$.
Por ende, la raíces del polinomio característico son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$.

Respuesta (continuación): Dado que todas las raíces son simples, i.e., $\lambda_1 \neq \lambda_2$, de la discusión anterior tenemos que la solución general de la ecuación de diferencias considerada es:

$$y[k] = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k$$

Remplazando $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$ tenemos:

$$y[k] = c_1(-1)^k + c_2(-2)^k$$

Los valores de c_1 y c_2 se determinan con base en las condiciones iniciales dadas!

Respuesta (continuación): Las condiciones iniciales dadas son $y[0] = 0$ y $y[1] = 1$. Por ende,

$$y[0] = c_1(-1)^0 + c_2(-2)^0 = 0$$
$$y[1] = c_1(-1)^1 + c_2(-2)^1 = 1$$

Es decir, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que la solución de este sistema es: $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación de diferencias con las condiciones iniciales dadas es:

$$y[k] = (-1)^k - (-2)^k$$

Verifiquemos la solución!

Respuesta (continuación): Primero verificamos el cumplimiento de las condiciones iniciales:

$$y[0] = (-1)^0 - (-2)^0 = 1 - 1 = 0$$
$$y[1] = (-1)^1 - (-2)^1 = -1 + 2 = 1$$

Posteriormente, evaluamos la expresión de la solución en la ecuación:

$0 = y[k+2] + 3y[k+1] + 2y[k]$

Respuesta (continuación): Primero verificamos el cumplimiento de las condiciones iniciales:

$$y[0] = (-1)^0 - (-2)^0 = 1 - 1 = 0$$
$$y[1] = (-1)^1 - (-2)^1 = -1 + 2 = 1$$

Posteriormente, evaluamos la expresión de la solución en la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= y[k+2] + 3y[k+1] + 2y[k] \\ &= (-1)^{k+2} - (-2)^{k+2} + (3)(-1)^{k+1} - (3)(-2)^{k+1} + (2)(-1)^k - (2)(-2)^k \end{aligned}$$

Respuesta (continuación): Primero verificamos el cumplimiento de las condiciones iniciales:

$$y[0] = (-1)^0 - (-2)^0 = 1 - 1 = 0$$
$$y[1] = (-1)^1 - (-2)^1 = -1 + 2 = 1$$

Posteriormente, evaluamos la expresión de la solución en la ecuación:

$$\begin{aligned}
0 &= y[k+2] + 3y[k+1] + 2y[k] \\
&= (-1)^{k+2} - (-2)^{k+2} + (3)(-1)^{k+1} - (3)(-2)^{k+1} + (2)(-1)^k - (2)(-2)^k \\
&= (-1)^k \left((-1)^2 + (3)(-1)^1 + (2)\right) - (-2)^k \left((-2)^2 + (3)(-2)^1 + (2)\right)
\end{aligned}$$

Respuesta (continuación): Primero verificamos el cumplimiento de las condiciones iniciales:

$$y[0] = (-1)^0 - (-2)^0 = 1 - 1 = 0$$
$$y[1] = (-1)^1 - (-2)^1 = -1 + 2 = 1$$

Posteriormente, evaluamos la expresión de la solución en la ecuación:

$$\begin{aligned}
0 &= y[k+2] + 3y[k+1] + 2y[k] \\
&= (-1)^{k+2} - (-2)^{k+2} + (3)(-1)^{k+1} - (3)(-2)^{k+1} + (2)(-1)^k - (2)(-2)^k \\
&= (-1)^k \left((-1)^2 + (3)(-1)^1 + (2)\right) - (-2)^k \left((-2)^2 + (3)(-2)^1 + (2)\right) \\
&= (-1)^k (1 - 3 + 2) - (-2)^k (4 - 6 + 2)
\end{aligned}$$

Respuesta (continuación): Primero verificamos el cumplimiento de las condiciones iniciales:

$$y[0] = (-1)^0 - (-2)^0 = 1 - 1 = 0$$
$$y[1] = (-1)^1 - (-2)^1 = -1 + 2 = 1$$

Posteriormente, evaluamos la expresión de la solución en la ecuación:

$$\begin{aligned}
0 &= y[k+2] + 3y[k+1] + 2y[k] \\
&= (-1)^{k+2} - (-2)^{k+2} + (3)(-1)^{k+1} - (3)(-2)^{k+1} + (2)(-1)^k - (2)(-2)^k \\
&= (-1)^k \left((-1)^2 + (3)(-1)^1 + (2)\right) - (-2)^k \left((-2)^2 + (3)(-2)^1 + (2)\right) \\
&= (-1)^k (1 - 3 + 2) - (-2)^k (4 - 6 + 2) \\
&= (-1)^k (0) - (-2)^k (0)
\end{aligned}$$

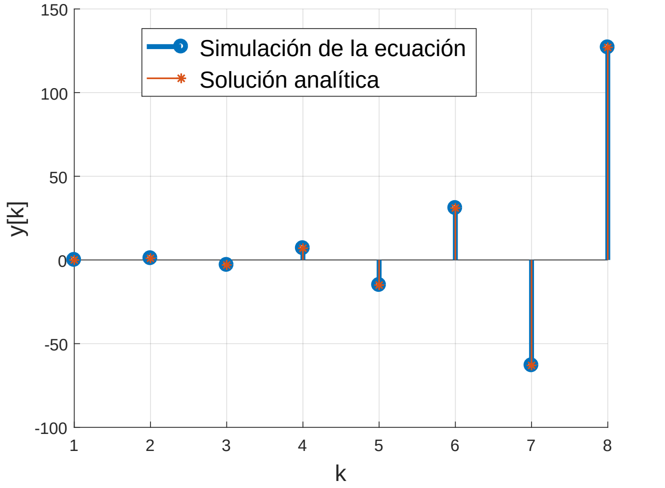
Respuesta (continuación): Primero verificamos el cumplimiento de las condiciones iniciales:

$$y[0] = (-1)^0 - (-2)^0 = 1 - 1 = 0$$
$$y[1] = (-1)^1 - (-2)^1 = -1 + 2 = 1$$

Posteriormente, evaluamos la expresión de la solución en la ecuación:

$$\begin{aligned}
0 &= y[k+2] + 3y[k+1] + 2y[k] \\
&= (-1)^{k+2} - (-2)^{k+2} + (3)(-1)^{k+1} - (3)(-2)^{k+1} + (2)(-1)^k - (2)(-2)^k \\
&= (-1)^k \left((-1)^2 + (3)(-1)^1 + (2)\right) - (-2)^k \left((-2)^2 + (3)(-2)^1 + (2)\right) \\
&= (-1)^k (1 - 3 + 2) - (-2)^k (4 - 6 + 2) \\
&= (-1)^k (0) - (-2)^k (0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Respuesta (continuación): También podemos verificar la solución simulando la ecuación de diferencias y la solución analítica:



Ejemplo: Determine la solución para la ecuación de segundo orden

$$y[k+2] + y[k] = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

cuando $y[0] = 1$, $y[1] = 2$.

Respuesta: El polinomio característico en este caso es: $\lambda^2 + 1 = 0$. Las raíces correspondientes son: $\lambda_1 = j$ y $\lambda_2 = -j$, donde $j = \sqrt{-1}$. Por ende,

$$y[k] = c_1(j)^k + c_2(-j)^k$$

Por lo tanto,

$$y[0] = c_1(j)^0 + c_2(-j)^0 = c_1 + c_2 \implies c_1 + c_2 = 1$$

De forma similar,

$$y[1] = c_1(j)^1 + c_2(-j)^1 = c_1 j - c_2 j \implies c_1 j - c_2 j = 2$$

Respuesta (continuación) Resolviendo la primera ecuación tenemos que:

$$c_1 = 1 - c_2,$$

y reemplazando en la segunda encontramos que:

$$(1-c_2)j - c_2 j = 2 \implies j - 2c_2 j = 2 \implies -1 + 2c_2 = 2j \implies c_2 = \frac{1+2j}{2}$$

En consecuencia, $c_1 = \frac{1-2j}{2}$.

Finalmente, la expresión cerrada para la solución es:

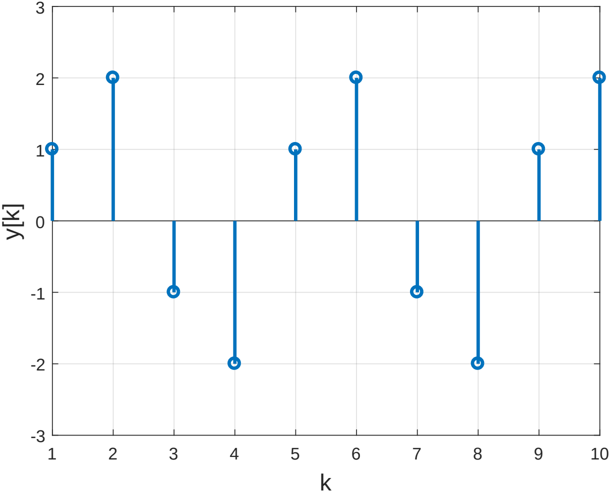
$$y[k] = \frac{(1-2j)(j)^k}{2} + \frac{(1+2j)(-j)^k}{2}$$

Ecuaciones de diferencias lineales

Respuesta (continuación) Observen que a pesar de que la expresión para la solución involucra números complejos, la secuencia de valores generada pertenece únicamente a los reales: $y[k] = \frac{(1-2j)(j)^k}{2} + \frac{(1+2j)(-j)^k}{2}$

$$
\begin{aligned}
y[0] &= \frac{(1-2j)(j)^0}{2} + \frac{(1+2j)(-j)^0}{2} = 1 \\
y[1] &= \frac{(1-2j)(j)^1}{2} + \frac{(1+2j)(-j)^1}{2} = 2 \\
y[2] &= \frac{(1-2j)(j)^2}{2} + \frac{(1+2j)(-j)^2}{2} = -1 \\
y[3] &= \frac{(1-2j)(j)^3}{2} + \frac{(1+2j)(-j)^3}{2} = -2 \\
y[4] &= \frac{(1-2j)(j)^4}{2} + \frac{(1+2j)(-j)^4}{2} = 1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Respuesta (continuación) Simulando la ecuación de diferencias se obtiene:



¿Qué sucede si el polinomio característico tiene raíces repetidas?

En ese caso, los términos de la solución general deben tomarse de forma que sean **linealmente independientes.**

Veamos un ejemplo!

Ecuaciones de diferencias lineales

Ejemplo: Determine la solución de la ecuación de diferencias de tercer orden dada por

$$y[k+3] + 4y[k+2] + 5y[k+1] + 2y[k] = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

cuando $y[0] = 0$, $y[1] = y[2] = 1$.

Respuesta: El polinomio característico es: $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda^1 + 2 = 0$, y sus raíces son: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, y $\lambda_3 = -2$.

Dado que la raíz $\lambda = -1$ se repite dos veces, en este caso la solución general tiene la forma:

$$y[k] = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k + c_3(-2)^k$$

Respuesta (continuación): Para cumplir las condiciones iniciales noten que:

$$y[0] = c_1(-1)^0 + c_2(0)(-1)^0 + c_3(-2)^0 = 0 \implies c_1 + c_3 = 0$$
$$y[1] = c_1(-1)^1 + c_2(1)(-1)^1 + c_3(-2)^1 = 1 \implies -c_1 - c_2 - 2c_3 = 1$$
$$y[2] = c_1(-1)^2 + c_2(2)(-1)^2 + c_3(-2)^2 = 1 \implies c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 1$$

Esto es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones:

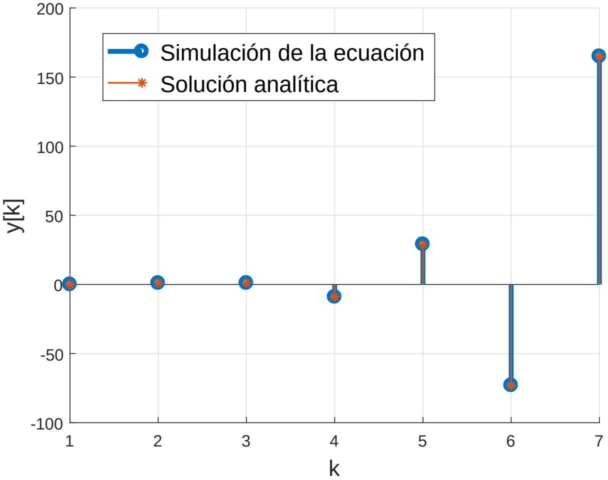
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la expresión cerrada para la solución de la ecuación de diferencias es:

$$y[k] = -3(-1)^k - 4k(-1)^k + 3(-2)^k$$

Ecuaciones de diferencias lineales

Respuesta (continuación): Comparación de la simulación de la ecuación de diferencias y la solución analítica encontrada.



Ecuaciones de diferencias lineales

¿Qué sucede cuando la ecuación de diferencias lineal no es homogénea?

En dichos casos, la solución general de la ecuación no homogénea será la suma de la solución general de la ecuación homogénea con una solución particular que corresponde al término forzado.

Veamos un ejemplo!

Ejemplo: Determine la solución general para la ecuación de diferencias lineal no homogénea dada por

$$y[k+2]-3y[k+1]+2y[k]=3^k \quad \forall k=0,1,2,\ldots$$

Respuesta: Note que la ecuación homogénea correspondiente es:

$$y[k+2]-3y[k+1]+2y[k]=0 \quad \forall k=0,1,2,\ldots$$

y el polinomio característico correspondiente es: $\lambda^2-3\lambda+2=0$. Las raíces del polinomio en este caso son: $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=2$. Por ende, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y[k]=c_1(1)^k+c_2(2)^k.$$

Respuesta (continuación): Por otro lado, observe que una solución particular de la ecuación es: $y[k] = \frac{1}{2}3^k$. Para verificar esto note que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}3^{k+2} - 3\frac{1}{2}3^{k+1} + 2\frac{1}{2}3^k &= \frac{1}{2}\left(3^{k+2} - 3 \cdot 3^{k+1} + 2 \cdot 3^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3^{k+2} - 3^{k+2} + 2 \cdot 3^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2 \cdot 3^k\right) \\
&= 3^k
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y[k] = \frac{1}{2}3^k + c_1(1)^k + c_2(2)^k$$

Ejercicio: Determine la expresión para la solución general de:

$$y[k+1] + y[k] = a^k, \quad a \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Respuesta: El polinomio característico de la ecuación homogénea correspondiente es: $\lambda + 1 = 0$. Por ende, $\lambda = -1$ es la única raíz. Entonces, la solución general de la ecuación homogénea es: $y[k] = c_1(-1)^k$.

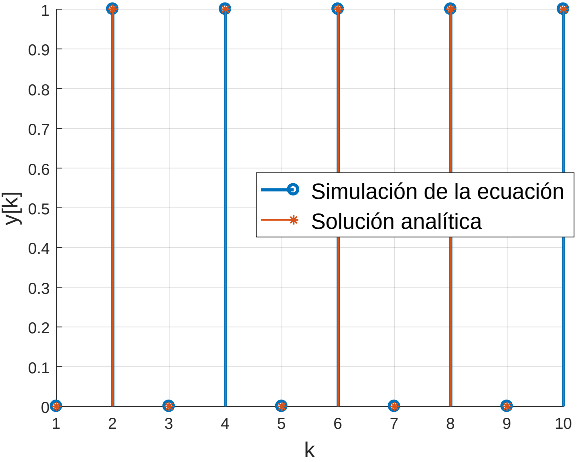
Por otro lado, como solución particular de la ecuación no homogénea tomamos: $y[k] = c_2 a^k$. Para que esto sea solución se requiere:

$$a^k = c_2 a^{k+1} + c_2 a^k = c_2 a^k (a+1) \implies c_2 = \frac{1}{a+1}$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y[k] = c_1(-1)^k + \frac{a^k}{1+a}$$

Respuesta (continuación): Para verificar nuestra solución, simulemos el sistema en Matlab para el caso con $a = 1$, y $y[0] = 0$ (lo que implica que $c_1 = -0{,}5$)



Respuesta (continuación): El código de Matlab de la figura anterior es:

```
%% Ejemplo ecuación no homogénea
% Hay que recordar que en Matlab los índices en los arreglos
% inician en 1 y no en 0.
clc, clear
a = 1;
T = 10;             % Número de iteraciones a simular
y = zeros(1, T);    % Inicializamos el arreglo "y"
sol = zeros(1, T); % Inicializamos el arreglo "sol"

for k=1:T-1                  % Recordar índices de Matlab
    y(k+1) = a^k - y(k); % Simulación de la ecuación
end

for k=0:T-1                  % Recordar índices de Matlab
    sol(k+1) = -0.5*((-1)^(k)) + (a^(k))/(1 + a); % Solución analítica
end

figure(1)
hold on
stem(y, 'LineWidth', 2)
stem(sol, 'Marker', '*', 'LineWidth', 1)
grid on
xlabel('k', 'Fontsize', 14)
ylabel('y[k]', 'Fontsize', 14)
legend({'Simulación de la ecuación', ...
        'Solución analítica'}, 'Fontsize', 14)
```

Ecuaciones de diferencias lineales

Reconocer la forma de las soluciones particulares para otros tipos de ecuaciones no homogéneas requiere un poco de práctica e intuición!

Sin embargo, como veremos más adelante, en ocasiones es posible obtener la información más relevante sobre la solución de una ecuación de diferencias sin necesidad de resolver de manera analítica la ecuación!

Esto nos será útil para analizar sistemas dinámicos!