Tarea 1
Sistemas Dinámicos – IELE 1502

Yanith Veronica Garcia Castro - 202215162
Santiago Rodríguez Mora - 202110332

August 23, 2023

Exercise 1

Muestre detalladamente los pasos necesarios que lo llevaron a obtener la respuesta, sin la ayuda de programas ni aplicaciones. Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y su matriz de cofactores:

$$cofA = \begin{bmatrix} -18 & -34 & 5 & -9 \\ 4 & 8 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 10 & 20 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

1. a) Calcule el determinante de A
   1. R2 - 0.5 R1 $\rightarrow$ R2 (multiplicamos la fila 1 por 0.5 y restamos a la fila 2); R4 - 1.5 R1 $\rightarrow$ R4 (multiplicamos la fila 1 por 1.5 y restamos a la fila 4)

$$det(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -0.5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   2. R3 - 2 R2 $\rightarrow$ R3 (multiplicamos la fila 2 por 2 y restamos a la fila 3); R4 + 1 R2 $\rightarrow$ R4 (multiplicamos la fila 2 por 1 y sumar a la fila 4)

$$det(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. R4 + 0.2 R3 $\rightarrow$ R4 (multiplicamos la fila 3 por 0.2 y sumar a la fila 4)

$$det(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}$$

4. Multiplicamos la diagonal y el resultado de esta multiplicación es el determinante
det(A)= (2)(0.5)(5)(-0.4)
det(A)= -2

2. b) Calcule A-1 Para esto uso la formula A-1= Adj(A)/det(A). Donde adj(A)= cof(A)T

1. Obtengo la matriz adjunta transponiendo la matriz de cofactores.

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -18 & 4 & 2 & 10 \\ -34 & 8 & 4 & 20 \\ 5 & -1 & -1 & -3 \\ -9 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Divido la matriz adjunta entre el determinante.

$$A - 1 = \begin{bmatrix} -18/-2 & 4/-2 & 2/-2 & 10/-2 \\ -34/-2 & 8/-2 & 4/-2 & 20/-2 \\ 5/-2 & -1/-2 & -1/-2 & -3/-2 \\ -9/-2 & 3/-2 & 1/-2 & 5/-2 \end{bmatrix}$$

3. Resultado

$$A - 1 = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -1 & -5 \\ 17 & -4 & -2 & -10 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 9/2 & -3/2 & -1/2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

Exercise 2

Muestre detalladamente los pasos necesarios que lo llevaron a obtener la respuesta, sin la ayuda de programas ni aplicaciones. Sea:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. a) Encuentre los valores y vectores propios de la matriz B

(a) 1. Encuentro los valores propios

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

2, Obtengo el determinante
$= -2 \cdot ((2) \cdot (3-\lambda) - 8) - \lambda \cdot ((3-\lambda) \cdot (3-\lambda) - 2 \cdot ((3-\lambda) \cdot (2) - 8)$
$= 8 + 15\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$
$= -(\lambda + 1) \cdot (\lambda^2 - 7\lambda - 8)$
0$= -(\lambda + 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 8)$
3. Valores propios
$\lambda 1 = -1$
$\lambda 2 = -1$
$\lambda 3 = 8$

(b) 2: Encuentro los vecotres propios 1. $\lambda 1 = -1$

$$B = \begin{bmatrix} 3-(-1) & 2 & 4 \\ 2 & 0-(-1) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(-1) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Divido la fila 1 entre F1= F1/4

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Reste la fila multiplicada por 2 de la fila 2. F2= F2-2F1

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Reste la fila multiplicada por 4 de la fila 3. R3= R3-4R1

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuentro la base para el espacio nulo
$x = -1/2y + z$

x = y(-1/2) +z (-1)
y = y(1) + z (0)

z = y(0) + z (1)
Vectores propios

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $\lambda 1 = 8$

$$B = \begin{bmatrix} 3-(8) & 2 & 4 \\ 2 & 0-(8) & 2 \\ 4 & 2 & 3-(8) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Divido la fila 1 entre -5. F1=F1/-5

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -4/5 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Resto la fila 1 multiplicada por 2 de la fila 2.F2=F2-2F1

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -4/5 \\ 0 & -36/5 & 18/5 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Resto la fila 1 multiplicada por 4 de la fila 3.F3=F3-4F1

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -4/5 \\ 0 & -36/5 & 18/5 \\ 0 & 18/5 & -9/5 \end{bmatrix}$$

Multiplico la fila 2 por -5/36. F2=-5/36F2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 18/5 & -9/5 \end{bmatrix}$$

Sumo la fila 2 multiplicada por 2/5 a la fila 1. F1=F1+2/5F2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 18/5 & -9/5 \end{bmatrix}$$

Resto la fila 2 multiplicada 18/5 de la fila 3. F3=F3-18/5F2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x=z
y=1/2z
z=z

x=z(1)
y=z(1/2)
z=z(1)
Vector propio:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. b) Verifique que los anteriores vectores sean vectores propios de B.
   Para verificar si las anteriores vectores son valores propios de la matriz B, multiplico cada vector propio por la matriz B, esto debe ser igual a la multiplicación del valor propio por el vector propio correspondiente:
   $\lambda 1 = 8$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

   $\lambda 1 = -1$
   Vector propio 1:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vector propio 2:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exercise 3

Valores y vectores propios
Sea:

$$C = \begin{bmatrix} 3-7i & 0 & 0 \\ 0 & 6+i & 0 \\ 0 & 0 & -3+5i \end{bmatrix}$$

1. Encuentre los valores propios de C

$$C - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-7i-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6+i-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3+5i-\lambda \end{bmatrix}$$

$= -\lambda^3 + (6-i) \cdot \lambda^2 - (28+24i) \cdot \lambda + (120+242i)$
$= -(\lambda + (3-5i)) \cdot (\lambda^2 - (9-6i) \cdot \lambda + (25-39i))$
$= -(\lambda + (3-5i)) \cdot (\lambda - (3-7i)) \cdot (\lambda - (6+i)) = 0$

$\lambda_1 = -3 + 5i$
$\lambda_2 = 3 - 7i$
$\lambda_3 = 6 + i$

2. Encontrar un vector propio asociado (el que desee) a su valor propio.

$\lambda_1 = -3 + 5i$

$$C - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 6-12i & 0 & 0 \\ 0 & 9-4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1/(6-12\cdot i) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9-4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2/(9-4i) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = x_3$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\{x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

$x_3 = 1,$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercise 4

Clasificación de sistema en tiempo continuo
Sea:

$$y(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t}{4}\right) & t \geq 0 \\ x(4t) & t < 0 \end{cases}$$

Determine si el sistema es:

1. Lineal

   Para determinar si el sistema es lineal las ecuaciones que lo componen tienen que tener un comportamiento lineal. En este caso $x(\frac{t}{4})$ es una función lineal así como $x(4t)$. Por ende, $y(t)$ va a ser de carácter lineal y el sistema en tiempo continuo es lineal.

2. Invariante en el tiempo

   Se declara la salida y_1 para la entrada x_1

$$y_1(t) = \begin{cases} x_1\left(\frac{t}{4}\right) & t \geq 0 \\ x_1(4t) & t < 0 \end{cases}$$

   Se declara la salida y_2 para la entrada x_2

$$y_2(t) = \begin{cases} x_2\left(\frac{t}{4}\right) & t \geq 0 \\ x_2(4t) & t < 0 \end{cases}$$

   Se sustituye $x_2(t) = x_1(t - t_0)$. Es decir, x_2 es una traslación de x_1

$$y_2(t) = \begin{cases} x_1\left(\frac{t-t_0}{4}\right) & t - t_0 \geq 0 \\ x_1(4(t - t_0)) & t - t_0 < 0 \end{cases}$$

   Ahora se realiza una traslación para la salida y_1

$$y_1(t - t_0) = \begin{cases} x_1\left(\frac{t}{4}\right) & t - t_0 \geq 0 \\ x_1(4t) & t - t_0 < 0 \end{cases}$$

   Ahora se comparan las traslaciones para verificar que después de trasladada la salida y_1 coincide con la salida y_2. Ya que no hay coincidencia se determina que el sistema es variante en el tiempo.

3. Tiene memoria

$$y(t) = \begin{cases} x\left(\frac{t}{4}\right) & t \geq 0 \\ x(4t) & t < 0 \end{cases}$$

   Si tomamos el instante $t = 1$ entonces notamos que:

$y(1) = x(\frac{1}{4})$
$y(1) = x(0.25)$

Para números enteros positivos tiene memoria en el pasado.

Se puede determinar que el sistema tiene memoria en el pasado.

Si tomamos el instante $t = -1$ entonces notamos que:

$y(-1) = x(4 \cdot (-1))$
$y(-1) = x(-1)$

Para números enteros negativos tiene memoria en el pasado.

4. Causal

   El sistema no es causal ya que la salida no depende en ningún momento de algún tiempo futuro sino únicamente del pasado. Asimismo no cumple que tenga memoria en el pasado y en el presente.

5. Estable

$$y(t) \leq \beta = \begin{cases} x\left(\frac{t}{4}\right) \leq \beta & t \geq 0 \\ x(4t) \leq \beta & t < 0 \end{cases}$$

   EL sistema es estable ya que al acotar las entradas la salida también van a estar acotadas a un numero finito.