Diseño de trayectorias

Yanith Veronica Garcia Castro
Universidad de los Andes
y.garciac@uniandes.edu.co
202215162

Santiago Rodriguez Mora
Universidad de los Andes
s.rodriguezm2@uniandes.edu.co
202110332

Juan Sebastián Burbano Salazar
Universidad de los Andes
j.burbanos@uniandes.edu.co
202220463

***Resumen*—Este documento contiene el desarrollo de la practica 8 del laboratorio de sistemas dinámicos en el que, con base en la ecuación del gradiente descendente, se diseña una trayectoria de agentes en un sistema dinámico para que agentes en un espacio bidimensional lleguen a un consenso.**

I. INTRODUCCIÓN

A lo largo de este documento, se analiza la aplicación de distintos conceptos de sistemas dinámicos en el desarrollo de las ecuaciones y las simulaciones en Matlab de estas ecuaciones con diferentes valores y condiciones iniciales para cuatro agentes que tienen una topología de conexión definida por un grafo.

El objetivo del desarrollo de esta practica es el diseño de rutas para agentes en un sistema dinámico en un espacio bidimensional tiene como objetivo lograr que los agentes lleguen a un acuerdo, utilizando la ecuación del gradiente descendente como herramienta principal.

A lo largo del documento se encuentra el desarrollo de los 4 puntos, con los códigos escritos para cada solución y debidamente comentados, además de un análisis y explicación de lo que se hizo para llegar a dicha solución.

II. TRABAJO REALIZADO

El método del gradiente en tiempo discreto está definido como $x(k+1) = x(k) - \alpha \nabla f(x(k))$, para el cual la trayectoria se moverá en dirección descendente del gradiente y con un α adecuado la trayectoria llegará al punto mínimo de la función $f(x)$. En sistemas de múltiples agentes podría escogerse una función $f(x)$ que dependa de los agentes aledaños con quienes se pueda comunicar (vecinos). Un caso específico es el de consensus o rendezvous para el cual $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j\in N_i} w_{ij}||x_i - x_j||^2$ donde N_i es el conjunto de vecinos del agente i y w_{ij} son pesos constantes. La función $f(x)$ por ser una norma, sabemos que tiene un único mínimo de valor cero cuando $x_i = x_j \forall i,j$, es decir cuando todas las variables tengan el mismo valor o hallan llegado a un consenso. En este caso vamos a considerar cada variable como posición de agentes en un espacio bidimensional, por tanto x_i es un vector de dimensiones $2x1$ con las coordenadas del agente i Las dinámicas en general para cada agente quedan con la forma:

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \alpha \sum_{j\in N_i} w_{ij}(x_i(k) - x_j(k)) \tag{1}$$

El conjunto de vecinos son los agentes con los que se comparte información, y están definidos por un grafo. Cada agente comparte información con los agentes con los cuales esté conectado en el grafo. Para todos los numerales $\alpha = 0{,}03, w_{ij} = 1$ para todo i, j.

1. Escriba las ecuaciones que rigen las dinámicas para cuatro agentes que tienen una topología de conexión definida por el siguiente grafo:

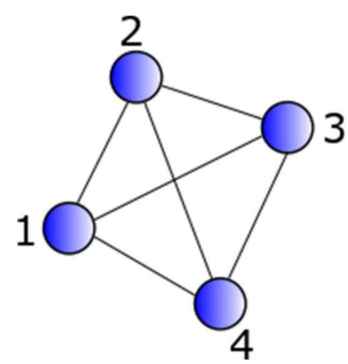

Figura 1. Grafo 1

$$\begin{aligned} x_1(k+1) = x_1(k) - \alpha * ((x_1(k) - x_2(k)) \\ +(x_1(k) - x_3(k)) + (x_1(k) - x_4(k))) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x_2(k+1) = x_2(k) - \alpha * ((x_2(k) - x_1(k)) \\ +(x_2(k) - x_3(k)) + (x_2(k) - x_4(k))) \end{aligned} \tag{3}$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) - \alpha * ((x_3(k) - x_1(k)) \\ +(x_3(k) - x_2(k)) + (x_3(k) - x_4(k))) \tag{4}$$

$$x_4(k+1) = x_4(k) - \alpha * ((x_4(k) - x_1(k)) \\ +(x_4(k) - x_2(k)) + (x_4(k) - x_3(k))) \tag{5}$$

2. Realice la simulación para 50 valores de tiempo discreto, considerando las siguientes condiciones iniciales $x_1[1] = [1, 0]$, $x_2[1] = [0, 0{,}5]$, $x_3[1] = [0, 1]$, $x_4[1] = [0, 2]$. ¿Cuál fue el valor de consenso al cual llegaron los agentes? Grafique el resultado obtenido y analice los resultados.

```
clc,clear;

x_1=[1;0];
x_2=[0;0.5];
x_3=[0;1];
x_4=[0;2];
a=0.03;

for k = 1:50

    x_1(:,k+1) = x_1(:,k)-a*((x_1(:,k)
    -x_2(:,k))+(x_1(:,k) ...
        -x_3(:,k))+(x_1(:,k)-x_4(:,k)));
    x_2(:,k+1) = x_2(:,k)-a*((x_2(:,k)
    -x_1(:,k))+(x_2(:,k) ...
        -x_3(:,k))+(x_2(:,k)-x_4(:,k)));
    x_3(:,k+1) = x_3(:,k)-a*((x_3(:,k)
    -x_1(:,k))+(x_3(:,k) ...
        -x_2(:,k))+(x_3(:,k)-x_4(:,k)));
    x_4(:,k+1) = x_4(:,k)-a*((x_4(:,k)
    -x_1(:,k))+(x_4(:,k) ...
        -x_2(:,k))+(x_4(:,k)-x_3(:,k)));
end
figure
hold on
plot(x_1(1,:),x_1(2,:))
plot(x_2(1,:),x_2(2,:))
plot(x_3(1,:),x_3(2,:))
plot(x_4(1,:),x_4(2,:))
hold off
```

3. Realice la simulación, pero ahora cambiando los valores iniciales a $x_1[1] = [10, 0]$, $x_2[1] = [0, 2]$, $x_3[1] = [0, 4]$, $x_4[1] = [3, 3]$. ¿Cuál fue el valor de consenso al cual llegaron los agentes? Grafique el resultado obtenido y analice los resultados.

```
clc,clear;

x_1=[10;0];
x_2=[0;2];
x_3=[0;4];
x_4=[3;3];
a=0.03;

for k = 1:50

    x_1(:,k+1) = ...
        x_1(:,k)-a*((x_1(:,k)-x_2(:,k)) ...
        +(x_1(:,k)-x_3(:,k))
        +(x_1(:,k)-x_4(:,k)));
    x_2(:,k+1) = ...
        x_2(:,k)-a*((x_2(:,k)-x_1(:,k)) ...
        +(x_2(:,k)-x_3(:,k))
        +(x_2(:,k)-x_4(:,k)));
    x_3(:,k+1) = ...
        x_3(:,k)-a*((x_3(:,k)-x_1(:,k)) ...
        +(x_3(:,k)-x_2(:,k))
        +(x_3(:,k)-x_4(:,k)));
    x_4(:,k+1) = ...
        x_4(:,k)-a*((x_4(:,k)-x_1(:,k)) ...
        +(x_4(:,k)-x_2(:,k))
        +(x_4(:,k)-x_3(:,k)));
end

figure
hold on
plot(x_1(1,:),x_1(2,:))
plot(x_2(1,:),x_2(2,:))
plot(x_3(1,:),x_3(2,:))
plot(x_4(1,:),x_4(2,:))
hold off
```

4. Para las mismas condiciones iniciales del numeral 2, simule el sistema para 600 valores de tiempo discreto, pero ahora considerando una topología de conexión de la forma:

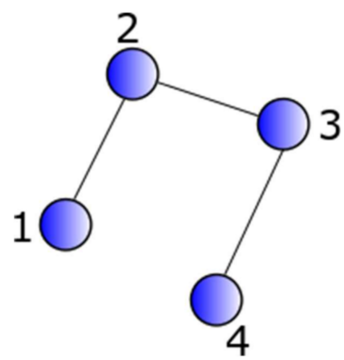

Figura 2. Grafo 2

```
clc,clear;

x_1=[1;0];
x_2=[0;0.5];
x_3=[0;1];
x_4=[0;2];
a=0.03;

for k = 1:600

    x_1(:,k+1) = ...
        x_1(:,k)-a*((x_1(:,k)-x_2(:,k)));
    x_2(:,k+1) = ...
        x_2(:,k)-a*((x_2(:,k)-x_1(:,k))
    +(x_2(:,k)-x_3(:,k)));
    x_3(:,k+1) = ...
        x_3(:,k)-a*((x_3(:,k)-x_2(:,k))
    +(x_3(:,k)-x_4(:,k)));
    x_4(:,k+1) = ...
        x_4(:,k)-a*((x_4(:,k)-x_3(:,k)));
end
figure
hold on
plot(x_1(1,:),x_1(2,:))
plot(x_2(1,:),x_2(2,:))
```

```
plot(x_3(1,:),x_3(2,:))
plot(x_4(1,:),x_4(2,:))
hold off
```

¿El sistema llega a un consenso? ¿Cuál es el valor? Analice los resultados y grafique.

III. Resultados y Análisis de Resultados

1. Las ecuaciones obtenidas se colocaron en la sección de Trabajo Realizado. En el caso del grafo de la figura 1, el cual consiste de una red donde cada uno de los agentes están conectados entre sí, la ecuación obtenida fue la siguiente:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) = x_1(k) - \alpha * ((x_1(k) - x_2(k)) \\ +(x_1(k) - x_3(k)) + (x_1(k) - x_4(k))) \end{aligned} \tag{6}$$

2. Posteriormente, se realizó la simulación del grafo de la figura 1 para 50 valores de tiempo discreto. Teniendo en cuenta los valores iniciales, los cuales fueron indicados anteriormente en la sección de Trabajo Realizado, se llegó a un valor de consenso de (0.24, 0.87) como se ve en la figura 3

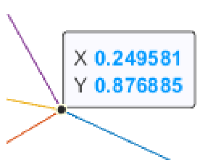

Figura 3. Punto de consenso grafo 1 (50 valores de tiempo)

Además, se graficó el resultado obtenido y se llegó a la siguiente gráfica:

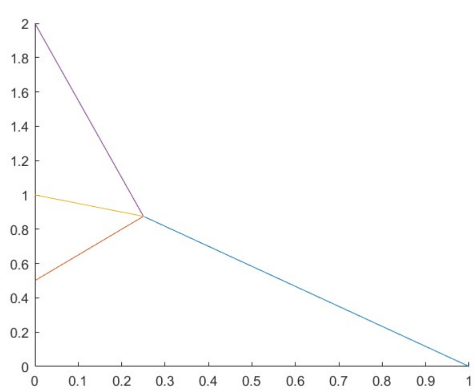

Figura 4. Trayectoria grafo 1 con 50 valores discretos de tiempo

A partir de esta gráfica se puede ver el comportamiento de los agentes cuando hay 50 valores discretos de tiempo. Se evidencia que los agentes siempre están constantemente buscando el camino con menor recorrido para llegar al punto donde todos se encuentran.

Se evidencia que x_1 es la línea azul, x_2 es la línea roja, x_3 es la línea amarilla y x_4 es la línea morada. Esto se sabe debido a los puntos de inicio de cada uno de los agentes. Del mismo modo, se puede ver que el punto de inicio de todos son muy cerca a excepción de x_1, y por ello, basado en la naturaleza de la función empleada, este es el agente que más se tiene que desplazar para llegar al punto de consenso.

3. Por otro lado, se realizó la simulación pero variando las posiciones iniciales de los agentes a las que se especificaron anteriormente en la sección de Trabajo Realizado. El punto de consenso con estos nuevos parametros iniciales se puede evidenciar en la figura 5.

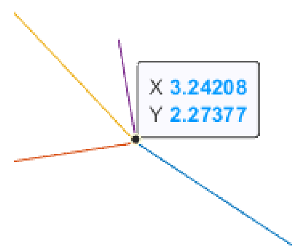

Figura 5. Punto de consenso grafo 1 con nuevos parametros iniciales

Como se puede evidenciar, el punto de consenso varío con respecto al anterior. Esto se debe a que el punto de consenso depende de la posición inicial de los agentes y de las conexiones que tengan entre sí. En este caso, debido a que el grafo era el mismo y lo único que cambiaba era la posición inicial de los agentes, entonces el punto de consenso se ajustó al lugar más conveniente para los cuatros agentes interconectados.

De igual modo, se graficaron los resultados. La gráfica que representa esta nueva trayectoria para el mismo grafo 1 se puede ver en la figura 6

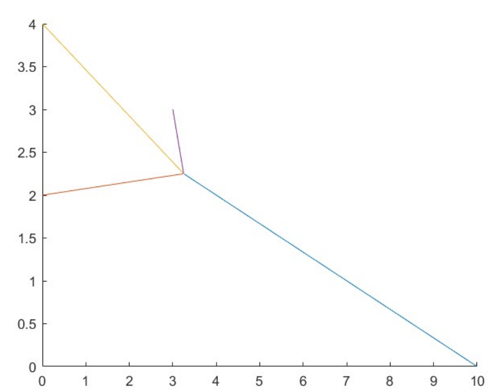

Figura 6. Trayectoria grafo 1 con nuevos parametros

A partir de la gráfica se puede notar x_1 es la línea azul, x_2 es la línea roja, x_3 es la línea amarilla y x_4 es la línea morada. Es decir, los colores que representan a cada agente no cambiaron. Además, se puede evidenciar que con respecto al resultado anterior, los agentes se centran más la derecha y hacia arriba. Esto se debe a que el agente azul sale con un valor mayor en x, y adicionalmente el vector morado esta vez tiene un valor en x mucho mayor. Por último, los agentes rojos y amarillos también tienen un valor en y mayor y por ende, eso explica este nuevo punto de consenso.

4. Finalmente, se simuló el sistema con las mismas condiciones iniciales del numeral 2, pero con la diferencia de que se usaron 600 valores discretos de tiempo y se usó el grafo de la figura 2. En este caso, los agentes no tienen todos conexiones entre sí, de tal forma que el agente 1 solo está compartiendo información con 2 y el agente 4 solo comparte información con el agente 3. Por su parte, el agente 2 y 3 comparten información entre sí.

   Ahora bien, sí se llega a un valor de consenso con estas nuevas condiciones y se ve de esta manera:

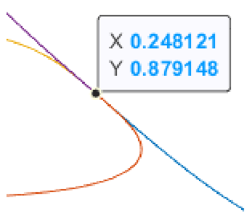

Figura 7. Punto de consenso grafo 2

Adicionalmente, se graficaron los resultados para visualizar el comportamiento de los agentes con estas características en específico. Se puede ver en la gráfica 8.

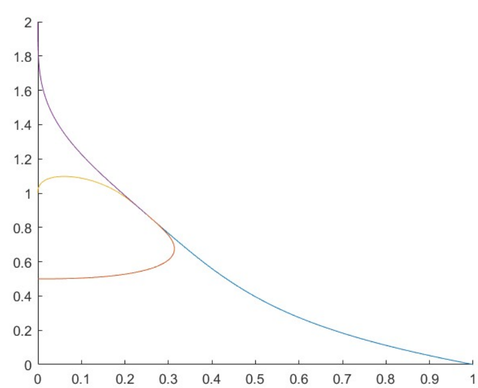

Figura 8. Trayectoria grafo 2 con 600 valores discretos de tiempo

En la gráfica se puede evidenciar que el comportamiento en este caso fue distinto a los anteriores ya que dos de los agentes tienen una trayectoria curva.

Con ayuda del grafo y de los parametros iniciales, se deduce que x_1 es la línea azul, x_2 es la línea roja, x_3 es la línea amarilla y x_4 es la línea morada.

En este caso, el agente amarillo y el rojo toman este curva debido a dos factores principalmente.

En primer lugar, el número de valores discretos de tiempo alto incide en que se puede apreciar cada uno de los pasos que toman los agentes para llegar al punto de consenso con mayor precisión. Por lo que cualquier cambio en la trayectoria va a ser notoria por pequeña que sea.

En segundo lugar, debido a que estos dos agentes solo están conectados con un agente, entonces, están enfocados en llegar al punto de consenso únicamente con su respectivo agente con el que comparte información. No obstante, debido a que los agentes morado y azul sí comparten información entre ellos, entonces por eso entre estos no hay tanta curvatura sino que es más lineal. De hecho, si se hace énfasis en x_3, se puede ver que empieza con una trayectoria hacia arriba debido a que x_4 empieza con una pendiente pronunciada hacia abajo. Sin embargo, en el momento en que x_4 empieza a enderezar su rumbo para encontrarse con x_1, entonces, a x_3 le toca cambiar completamente su trayectoria para poder llegar al punto de consenso entre los cuatro agentes, formando así la curva amarilla.

IV. Conclusiones

- Si hay un cambio en la trayectoria para llegar al punto de consenso este va a ser muy notorio
- Cuando un agente esta conectado a otro agente únicamente, este se enfoca en llegar al punto de consenso. En cambio cuando un agente esta conectado a más de un agente realiza una trayectoria diferente
- El éxito en la resolución de este tipo de problemas depende en gran medida de una modelización precisa del sistema. La capacidad de describir con precisión las dinámicas de los agentes y las interacciones entre ellos es muy importante para diseñar una estrategia efectiva, en este caso plantar el sistema de ecuaciones.
- El uso de grafos para este tipo de problemas permite modelar y optimizar la convergencia de agentes en un sistema, teniendo en cuenta las relaciones y las interacciones, y puede ser aplicado en diferentes situaciones, desde la coordinación de robots hasta la toma de decisiones.

Referencias

[]