Sistemas dinámicos

Ecuaciones de estado en tiempo discreto

Jorge López Jiménez

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia

2023-20

En esta presentación...

Hasta el momento hemos estudiado:

- Definición y conceptos generales de ecuaciones de diferencias
- Conceptos básicos de puntos de equilibrio y estabilidad
- Metodologías de solución de ecuaciones de diferencias lineales e invariantes en el tiempo

En esta presentación estudiaremos la representación en variables de estado de las ecuaciones de diferencias vistas hasta el momento.

La representación en variables de estado nos permite analizar las ecuaciones de diferencias usando herramientas de álgebra lineal!

Representación en variables de estado

De nuestras discusiones anteriores sabemos que las ecuaciones de diferencias son útiles para describir modelos de sistemas dinámicos en tiempo discreto.

Al momento, hemos considerado ecuaciones de diferencias de la forma:

$$y[k+n] = f\left(y[k+n-1], y[k+n-2], \cdots, y[k], k\right), \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde $y[\cdot]$ es un escalar real que representa la **salida** de nuestro sistema dinámico.

Sin embargo, esta no es la única representación posible para sistemas dinámicos en tiempo discreto.

Otra representación posible, que en ocasiones es más conveniente, es la representación en variables de estado!

Representación en variables de estado

La representación en variables de estado, de un sistema dinámico, es un **sistema de ecuaciones de primer orden** en donde cada ecuación describe la evolución temporal de una **variable de estado**, i.e., una variable que contiene cierta información sobre el sistema dinámico.

Por ejemplo, la representación de un sistema dinámico de orden n en variables de estado está dada por n ecuaciones de diferencias de primer orden:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= f_1\left(x_1[k], x_2[k], \ldots, x_n[k], k\right) \\ x_2[k+1] &= f_2\left(x_1[k], x_2[k], \ldots, x_n[k], k\right) \\ &\vdots \\ x_n[k+1] &= f_n\left(x_1[k], x_2[k], \ldots, x_n[k], k\right), \end{aligned}$$

donde las variables $x_i[\cdot] \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, se conocen como las **variables de estado**, y las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, determinan las **dinámicas** del sistema.

El vector

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

se conoce como el **vector de estado**, y el espacio vectorial en el que "vive" dicho vector se denomina el **espacio de estados**.

Por ejemplo, si las variables $x_i[\cdot]$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, pueden tomar cualquier valor en los reales, entonces el espacio de estados es $\mathbb{R}^n$.

Sin embargo, en general, el espacio de estados puede ser un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Representación en variables de estado

Un ejemplo de un sistema dinámico representado en variables de estado es el modelo de la propagación del COVID-19 que vimos en la introducción al curso.

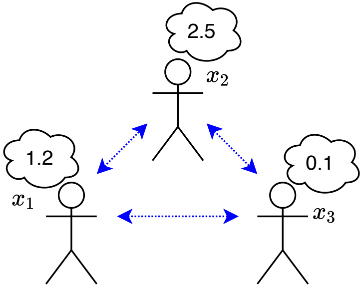
Modelo en tiempo discreto:

$$
\begin{aligned}
S[k+1] &= S[k] - \beta S[k]I[k] \\
I[k+1] &= I[k] + \beta S[k]I[k] - \gamma I[k] \\
R[k+1] &= R[k] + \gamma I[k]
\end{aligned}
$$

Si identificamos $S[\cdot] \to x_1[\cdot]$, $I[\cdot] \to x_2[\cdot]$, $R[\cdot] \to x_3[\cdot]$, entonces tenemos el sistema de tercer orden (i.e., $n = 3$) dado por:

$$
\begin{aligned}
x_1[k+1] &= x_1[k] - \beta x_1[k]x_2[k] \\
x_2[k+1] &= x_2[k] + \beta x_1[k]x_2[k] - \gamma x_2[k] \\
x_3[k+1] &= x_3[k] + \gamma x_2[k]
\end{aligned}
$$

Otro ejemplo de un sistema dinámico representado en variables de estado es el ejemplo de las dinámicas de opinión.



Modelo en tiempo discreto en representación de variables de estado:

$$x_1[k+1] = 0{,}6x_1[k] + 0{,}4x_2[k]$$
$$x_2[k+1] = 0{,}4x_1[k] + 0{,}2x_2[k] + 0{,}4x_3[k]$$
$$x_3[k+1] = 0{,}2x_1[k] + 0{,}1x_2[k] + 0{,}7x_3[k]$$

Representación en variables de estado

En particular, en este curso nos interesa estudiar **sistemas lineales**. Un sistema lineal en tiempo discreto en representación en variables de estado tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
x_1[k+1] &= a_{11}[k]x_1[k] + a_{12}[k]x_2[k] + \cdots + a_{1n}[k]x_n[k] + w_1[k] \\
x_2[k+1] &= a_{21}[k]x_1[k] + a_{22}[k]x_2[k] + \cdots + a_{2n}[k]x_n[k] + w_2[k] \\
&\vdots \\
x_n[k+1] &= a_{n1}[k]x_1[k] + a_{n2}[k]x_2[k] + \cdots + a_{nn}[k]x_n[k] + w_n[k]
\end{aligned}
$$

donde los coeficientes $a_{ij}[\cdot] \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$, son funciones del tiempo, i.e., parámetros del sistema que cambian con el tiempo; y las funciones $w_i[\cdot]$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, se denotan como los términos forzados o entradas del sistema.

Representación en variables de estado

Evidentemente, el sistema anterior se puede escribir forma compacta como:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{w}[k]$$

donde

$$\mathbf{A}[k] = \left[\begin{array}{cccc} a_{11}[k] & a_{12}[k] & \cdots & a_{1n}[k] \\ a_{21}[k] & a_{22}[k] & \cdots & a_{2n}[k] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}[k] & a_{n2}[k] & \cdots & a_{nn}[k] \end{array}\right], \quad \mathbf{w}[k] = \left[\begin{array}{c} w_1[k] \\ w_2[k] \\ \vdots \\ w_n[k] \end{array}\right]$$

Representación en variables de estado

Usualmente, para sistemas con m señales de entrada, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
w_1[k] &= b_{11}[k]u_1[k] + b_{12}[k]u_2[k] + \cdots + b_{1m}[k]u_m[k] \\
w_2[k] &= b_{21}[k]u_1[k] + b_{22}[k]u_2[k] + \cdots + b_{2m}[k]u_m[k] \\
&\vdots \\
w_n[k] &= b_{n1}[k]u_1[k] + b_{n2}[k]u_2[k] + \cdots + b_{nm}[k]u_m[k]
\end{aligned}
$$

donde $b_{ij}[\cdot] \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$, son funciones del tiempo, i.e., parámetros del sistema que cambian con el tiempo.

De nuevo, en forma compacta se tiene $\mathbf{w}[k] = \mathbf{B}[k]\mathbf{u}[k]$, con

$$
\mathbf{B}[k] = \begin{bmatrix} b_{11}[k] & b_{12}[k] & \cdots & b_{1m}[k] \\ b_{21}[k] & b_{22}[k] & \cdots & b_{2m}[k] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}[k] & b_{n2}[k] & \cdots & b_{nm}[k] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}[k] = \begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \\ \vdots \\ u_m[k] \end{bmatrix}
$$

Representación en variables de estado

Es decir, típicamente consideraremos sistemas lineales cuya representación en variables de estado tiene la forma:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}[k]\mathbf{u}[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde para todo k tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k] &\in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u}[k] &\in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{A}[k] &\in \mathbb{R}^{n\times n} \\ \mathbf{B}[k] &\in \mathbb{R}^{n\times m} \end{aligned}$$

En el caso en el que no se tienen señales de entrada, i.e., $\mathbf{u}[\cdot] = \mathbf{0}$ o $\mathbf{B}[\cdot] = \mathbf{0}$, se dice que el sistema es **homogéneo** o **no forzado**.

En el caso en el que $\mathbf{A}[k] = \mathbf{A}$ y $\mathbf{B}[k] = \mathbf{B}$, para todo k, se dice que el sistema es **invariante en el tiempo**.

Note que las dinámicas de opinión corresponden a un sistema lineal e invariante en el tiempo y no forzado!

Note que las dinámicas

$$
\begin{aligned}
x_1[k+1] &= 0{,}6x_1[k] + 0{,}4x_2[k] \\
x_2[k+1] &= 0{,}4x_1[k] + 0{,}2x_2[k] + 0{,}4x_3[k] \\
x_3[k+1] &= 0{,}2x_1[k] + 0{,}1x_2[k] + 0{,}7x_3[k]
\end{aligned}
$$

se pueden escribir en la forma compacta

$$
\mathbf{x}[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}0 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}[k]
$$

¿Qué podemos decir del modelo SIR (ejemplo COVID-19)?

$$x_1[k+1] = x_1[k] - \beta x_1[k]x_2[k]$$
$$x_2[k+1] = x_2[k] + \beta x_1[k]x_2[k] - \gamma x_2[k]$$
$$x_3[k+1] = x_3[k] + \gamma x_2[k]$$

Si bien este sistema es invariante en el tiempo (β y γ se asumen constantes) y es no forzado (no tiene entradas externas), este sistema **no es lineal**.

Por ende, dicho sistema no se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}[k]\mathbf{u}[k]$$

Más adelante veremos como podemos estudiar sistemas que no son lineales. Por ahora, nos enfocamos únicamente en el caso lineal.

Representación en variables de estado

Dada una ecuación de diferencias lineal de orden n de la forma

$$y[k+n] + \alpha_{n-1}[k]y[k+n-1] + \cdots + \alpha_0[k]y[k] = u[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

es posible expresarla en representación de variables de estado aplicando un cambio de variables.

Definiendo:

$$\begin{aligned} x_1[k] &= y[k] \\ x_2[k] &= y[k+1] \\ &\vdots \\ x_n[k] &= y[k+n-1] \end{aligned}$$

podemos reescribir la ecuación de diferencias de orden n como un sistema de n ecuaciones de diferencias de primer orden!

Representación en variables de estado

Dadas las definiciones anteriores y la ecuación de orden n:

$$y[k+n] + \alpha_{n-1}[k]y[k+n-1] + \cdots + \alpha_0[k]y[k] = u[k],$$

tenemos que

$$x_n[k] = y[k+n-1]$$

Representación en variables de estado

Dadas las definiciones anteriores y la ecuación de orden n:

$$y[k+n] + \alpha_{n-1}[k]y[k+n-1] + \cdots + \alpha_0[k]y[k] = u[k],$$

tenemos que

$$x_n[k+1] = y[k+n-1+1]$$

Representación en variables de estado

Dadas las definiciones anteriores y la ecuación de orden n:

$$y[k+n] + \alpha_{n-1}[k]y[k+n-1] + \cdots + \alpha_0[k]y[k] = u[k],$$

tenemos que

$$\begin{aligned} x_n[k+1] &= y[k+n-1+1] \\ &= y[k+n] \end{aligned}$$

Representación en variables de estado

Dadas las definiciones anteriores y la ecuación de orden n:

$$y[k+n] + \alpha_{n-1}[k]y[k+n-1] + \cdots + \alpha_0[k]y[k] = u[k],$$

tenemos que

$$\begin{aligned} x_n[k+1] &= y[k+n-1+1] \\ &= y[k+n] \\ &= u[k] - \alpha_{n-1}[k]y[k+n-1] - \cdots - \alpha_0[k]y[k] \end{aligned}$$

Dadas las definiciones anteriores y la ecuación de orden n:

$$y[k+n] + \alpha_{n-1}[k]y[k+n-1] + \cdots + \alpha_0[k]y[k] = u[k],$$

tenemos que

$$\begin{aligned} x_n[k+1] &= y[k+n-1+1] \\ &= y[k+n] \\ &= u[k] - \alpha_{n-1}[k]y[k+n-1] - \cdots - \alpha_0[k]y[k] \\ &= u[k] - \alpha_{n-1}[k]x_n[k] - \cdots - \alpha_0[k]x_1[k] \end{aligned}$$

De forma similar, para las demás variables tenemos:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= x_2[k] \\ x_2[k+1] &= x_3[k] \\ &\vdots \\ x_{n-1}[k+1] &= x_n[k] \end{aligned}$$

Representación en variables de estado

Por ende, la ecuación de diferencias de orden n dada por

$$y[k+n] + \alpha_{n-1}[k]y[k+n-1] + \cdots + \alpha_0[k]y[k] = u[k],$$

se puede representar en variables de estado como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k+1] \\ x_n[k+1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0[k] & -\alpha_1[k] & -\alpha_2[k] & \cdots & -\alpha_{n-1}[k] \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}[k]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u[k]$$

Note que en este caso $m = 1$, por ende $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Ejemplo: Considere la ecuación de diferencias dada por

$$y[k+2] + 2y[k+1] + 3y[k] = u[k], \quad \forall k = 1, 2, \ldots$$

Determine la representación en variables de estado empleando el método descrito anteriormente.

Respuesta: Definiendo:

$$x_1[k] = y[k], \quad x_2[k] = y[k+1],$$

tenemos que:

$$x_1[k+1] = y[k+1] = x_2[k]$$

y de forma similar:

$$x_2[k+1] = y[k+2] = u[k] - 2y[k+1] - 3y[k] = u[k] - 2x_2[k] - 3x_1[k]$$

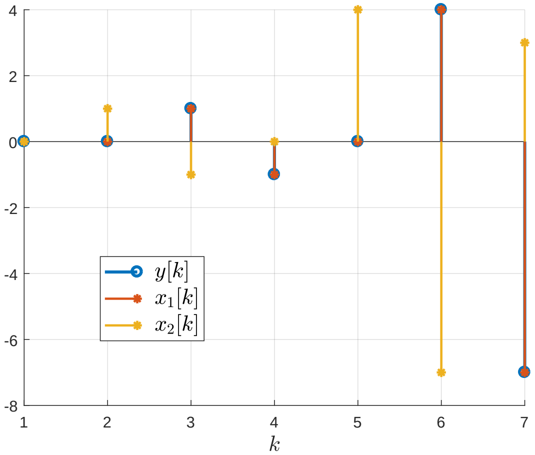
Respuesta (continuación): Por lo tanto, la representación en variables de estado en este caso es:

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

Comparemos las simulaciones de la ecuación de diferencias original (la ecuación de segundo orden) contra la representación en variables de estado!

Representación en variables de estado

Respuesta (continuación): Recordemos que $k = 1, 2, \ldots$ (relevante para los índices de Matlab) y que $x_1[k] = y[k]$, $x_2[k] = x_1[k+1]$. Adicionalmente asumimos: $u[k] = 1$, $y[0] = y[1] = 0$.



Respuesta (continuación): Recordemos que $k = 1, 2, \dots$ (relevante para los índices de Matlab) y que $x_1[k] = y[k]$, $x_2[k] = x_1[k+1]$. Adicionalmente asumimos: $u[k] = 1$, $y[0] = y[1] = 0$.

```
clc, clear
T = 7;
% Simulación de la ecuación de diferencias de segundo orden
y = zeros(1, T);
for k=1:T
    y(k+2) = 1 - 2*y(k+1) - 3*y(k);
end
% Simulación de la representación en variables de estados
A = [0 1; -3 -2];
b = [0; 1];
x = zeros(2, T);
for k=1:T
    x(:, k+1) = A*x(:, k) + b*1;
end
% Gráfica de resultados
figure(1)
hold on
stem(y(:, 1:T), 'LineWidth', 2)
stem(x(1, 1:T), 'LineWidth', 1.5, 'Marker', '*')
stem(x(2, 1:T), 'LineWidth', 1.5, 'Marker', '*')
grid on
xlabel('$k$', 'Fontsize', 14, 'Interpreter', 'Latex')
legend({'$y[k]$', '$x_1[k]$', '$x_2[k]$'}, 'Fontsize', 14, ...
    'Interpreter', 'Latex')
```

Ejercicio: Considere la ecuación de diferencias

$$y[k+3] + y[k+2] - y[k+1] - y[k] = u[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Determine la representación en variables de estado usando el método visto anteriormente.

Respuesta: Definimos:

$$x_1[k] = y[k], \quad x_2[k] = y[k+1], \quad x_3[k] = y[k+2]$$

Por ende, tenemos que:

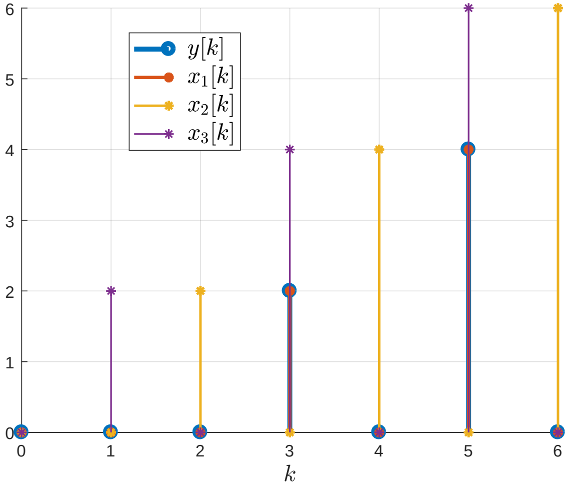
$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= x_2[k] \\ x_2[k+1] &= x_3[k] \\ x_3[k+1] &= u[k] - x_3[k] + x_2[k] + x_1[k] \end{aligned}$$

Respuesta (continuación): Por lo tanto, la representación en variables de estado es:

$$\mathbf{x}[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

Simulemos el sistema!

Respuesta (continuación): Recordemos que $k = 0, 1, 2, \ldots$. Adicionalmente asumimos: $u[k] = 2$, $y[0] = y[1] = y[2] = 0$.



Respuesta (continuación): Recordemos que $k = 0, 1, 2, \ldots$. Adicionalmente asumimos: $u[k] = 2$, $y[0] = y[1] = y[2] = 0$.

```
clc, clear
T = 7;
ks = zeros(1, T); % Arreglo para almacenar el tiempo
% Simulación de la ecuación de diferencias de segundo orden
y = zeros(1, T);
for k=0:T
    y(k+4) = 2 - y(k+3) + y(k+2) + y(k+1); % Recordar los índices de Matlab
end
% Simulación de la representación en variables de estados
A = [0 1 0; 0 0 1; 1 1 -1];
b = [0; 0; 1];
x = zeros(3, T);
for k=0:T
    ks(1, k+1) = k;
    x(:, k+2) = A*x(:, k+1) + b*2; % Recordar los índices de Matlab
end
% Gráfica de resultados
figure(1)
hold on
stem(ks(1, 1:T), y(:, 1:T), 'LineWidth', 3)
stem(ks(1, 1:T), x(1, 1:T), 'LineWidth', 2, 'Marker', '*')
stem(ks(1, 1:T), x(2, 1:T), 'LineWidth', 1.5, 'Marker', '*')
stem(ks(1, 1:T), x(3, 1:T), 'LineWidth', 1, 'Marker', '*')
grid on
xlabel('$k$', 'Fontsize', 14, 'Interpreter', 'Latex')
legend({'$y[k]$', '$x_1[k]$', '$x_2[k]$', '$x_3[k]$'}, 'Fontsize', 14, ...
    'Interpreter', 'Latex')
```

Representación en variables de estado

La representación en variables de estado nos permite entonces expresar una ecuación de diferencias de orden n como un sistema de n ecuaciones de primer orden.

En general, la representación en variables de estado no es única!

Para el caso de sistemas lineales, la representación en variables de estado nos permite determinar las propiedades más importantes del sistema a partir de las propiedades de las matrices $\mathbf{A}[\cdot]$ y $\mathbf{B}[\cdot]$.

Solución desde la representación en variables de estado

Una ventaja de la representación en variables de estado es que en ocasiones nos permite encontrar fácilmente la trayectoria de solución del sistema.

Consideremos por ejemplo el sistema con dinámicas de la forma:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}[k]\mathbf{u}[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Suponiendo que tenemos una condición inicial $\mathbf{x}[0] \in \mathbb{R}^n$, ¿cuál sería el siguiente vector de estados $\mathbf{x}[1]$?

$$\longrightarrow \mathbf{x}[1] = \mathbf{A}[0]\mathbf{x}[0] + \mathbf{B}[0]\mathbf{u}[0]$$

¿Cuál sería el siguiente vector de estado $\mathbf{x}[2]$?

$$\longrightarrow \mathbf{x}[2] = \mathbf{A}[1]\mathbf{x}[1] + \mathbf{B}[1]\mathbf{u}[1] = \mathbf{A}[1]\left(\mathbf{A}[0]\mathbf{x}[0] + \mathbf{B}[0]\mathbf{u}[0]\right) + \mathbf{B}[1]\mathbf{u}[1]$$

$$\longrightarrow \mathbf{x}[2] = \mathbf{A}[1]\mathbf{A}[0]\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}[1]\mathbf{B}[0]\mathbf{u}[0] + \mathbf{B}[1]\mathbf{u}[1]$$

Solución desde la representación en variables de estado

¿Cuál sería el siguiente vector de estado $\mathbf{x}[3]$?

$$\longrightarrow \mathbf{x}[3] = \mathbf{A}[2]\mathbf{x}[2] + \mathbf{B}[2]\mathbf{u}[2] = \mathbf{A}[2]\left(\mathbf{A}[1]\mathbf{A}[0]\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}[1]\mathbf{B}[0]\mathbf{u}[0] + \mathbf{B}[1]\mathbf{u}[1]\right) + \mathbf{B}[2]\mathbf{u}[2]$$

$$\longrightarrow \mathbf{x}[3] = \mathbf{A}[2]\mathbf{A}[1]\mathbf{A}[0]\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}[2]\mathbf{A}[1]\mathbf{B}[0]\mathbf{u}[0] + \mathbf{A}[2]\mathbf{B}[1]\mathbf{u}[1] + \mathbf{B}[2]\mathbf{u}[2]$$

¿Observan un patrón recurrente?

Definamos la **matriz de transición de estado** dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(k,l) &= \mathbf{A}[k-1]\mathbf{A}[k-2]\cdots\mathbf{A}[l], \quad k > l \\ \mathbf{\Phi}(k,k) &= \mathbf{I}_n\end{aligned}$$

Solución desde la representación en variables de estado

En términos de $\mathbf{\Phi}(\cdot,\cdot)$, la expresión para $\mathbf{x}[3]$ se puede simplificar:

$$\mathbf{x}[3] = \underbrace{\mathbf{A}[2]\mathbf{A}[1]\mathbf{A}[0]}_{\mathbf{\Phi}(3,0)}\mathbf{x}[0] + \underbrace{\mathbf{A}[2]\mathbf{A}[1]}_{\mathbf{\Phi}(3,1)}\mathbf{B}[0]\mathbf{u}[0] + \underbrace{\mathbf{A}[2]}_{\mathbf{\Phi}(3,2)}\mathbf{B}[1]\mathbf{u}[1] + \underbrace{\mathbf{I}_n}_{\mathbf{\Phi}(3,3)}\mathbf{B}[2]\mathbf{u}[2$$

Equivalentemente:

$$\longrightarrow \mathbf{x}[3] = \mathbf{\Phi}(3,0)\mathbf{x}[0] + \mathbf{\Phi}(3,1)\mathbf{B}[0]\mathbf{u}[0] + \mathbf{\Phi}(3,2)\mathbf{B}[1]\mathbf{u}[1] + \mathbf{\Phi}(3,3)\mathbf{B}[2]\mathbf{u}[2]$$

$$\longrightarrow \mathbf{x}[3] = \mathbf{\Phi}(3,0)\mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{2}\mathbf{\Phi}(3,j+1)\mathbf{B}[j]\mathbf{u}[j]$$

Por ende, en general se tiene que:

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{\Phi}(k,k_0)\mathbf{x}[k_0] + \sum_{j=k_0}^{k-1}\mathbf{\Phi}(k,j+1)\mathbf{B}[j]\mathbf{u}[j]$$

donde $k_0 \in \mathbb{Z}$ es el tiempo inicial del sistema, e.g., $k_0 = 0$.

Solución desde la representación en variables de estado

Note que la expresión encontrada, i.e.,

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{\Phi}(k, k_0)\mathbf{x}[k_0] + \sum_{j=k_0}^{k-1} \mathbf{\Phi}(k, j+1)\mathbf{B}[j]\mathbf{u}[j]$$

nos permite determinar el valor del vector de estado del sistema dinámico

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}[k]\mathbf{u}[k], \quad \forall k = k_0, k_0+1, k_0+2, \dots,$$

en cualquier tiempo k.

Claramente, tenemos que conocer la condición inicial del sistema, i.e., $\mathrm{x}[k_0]$, y la señal de entrada $\mathrm{u}[k]$ para todos los tiempos.

En algunos casos especiales es posible simplificar aún más la expresión para la solución!

Solución desde la representación en variables de estado

Un caso particularmente importante es el de sistemas lineales homogéneos e invariantes en el tiempo. Es decir, sistemas de la forma:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Para dichos sistemas la expresión de la solución se reduce a

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k\mathbf{x}[0], \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

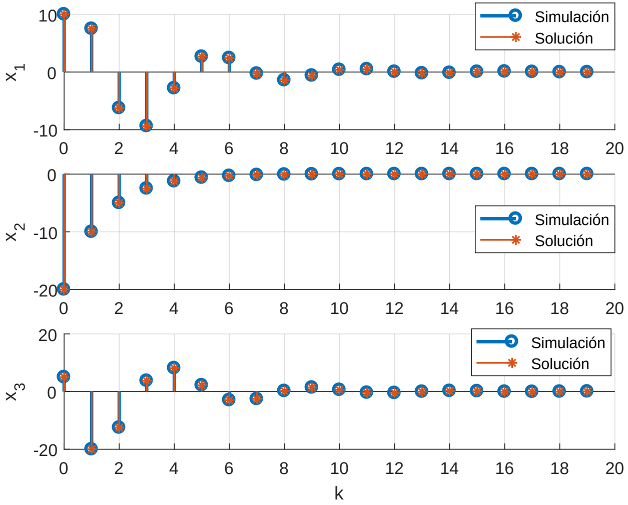
Veamos un ejemplo!

Ejemplo: Simule la ecuación de diferencias y la solución analítica correspondientes al sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ x_3[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ -1 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Considere la condición inicial $\mathbf{x}[0] = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 5 \end{bmatrix}^\top$.

Solución desde la representación en variables de estado



Solución desde la representación en variables de estado

```
clc, clear
T = 20;
A = [0.5 0 0.5; 0 0.5 0; -1 0.5 0];
ks = zeros(1, T);         % Arreglo para almacenar los tiempos
x = zeros(3, T);          % Arreglo para guardar vectores de estado
sol = zeros(3, T);        % Arreglo para guardar vectores de estado
x(:, 1) = [10, -20, 5]';  % Condición inicial del sistema "x[0]"
% Simulación del sistema
for k=0:T-2
    x(:, k+2) = A*x(:, k+1); % Recordar índices de Matlab
end
% Simulación de la solución analítica
for k=0:T-1
    ks(1, k+1) = k;              % Recordar índices de Matlab
    sol(:, k+1) = (A^k)*x(:, 1); % Recordar índices de Matlab
end
% Gráfica de resultados
figure(1)
for i=1:3
    subplot(3, 1, i)
    hold on
    stem(ks(1, :), x(i, :), 'LineWidth', 2)
    stem(ks(1, :), sol(i, :), 'LineWidth', 1, 'Marker', '*')
    grid on
    ylabel(strcat('x_', num2str(i)))
    legend({'Simulación', 'Solución'})
end
xlabel('k')
```

Puntos de equilibrio desde las variables de estado

Anteriormente vimos el concepto de un punto de equilibrio de una ecuación de diferencias. Ahora retomamos dicho tema en el contexto de la representación en variables de estado.

Definición

Si $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es un estado particular de un sistema dinámico para el cual se cumple la propiedad

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^* \implies \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}^*, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

entonces $\mathbf{x}^*$ es un punto de equilibrio del sistema.

En palabras: si el estado del sistema llega al punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$, entonces el estado del sistema se queda en ese punto $\mathbf{x}^*$ durante todos los tiempos futuros.

Puntos de equilibrio desde las variables de estado

Consideremos el caso de un sistema lineal, homogéneo en invariante en el tiempo, i.e.,

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k]$$

¿Cuál sería un punto de equilibrio trivial de este sistema?

$$\longrightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{0}, \quad \text{puesto que:} \quad \mathbf{x}[k] = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \forall k$$

¿Podrían existir más puntos de equilibrio para este sistema?

Recordemos que por definición un punto de equilibrio cumple que:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* \quad \longrightarrow \quad 1\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* \quad \longrightarrow \quad \underbrace{1\mathbf{x}^*}_{\lambda\mathbf{v}} = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}^*}_{\mathbf{A}\mathbf{v}}$$

Por ende, si $\lambda = 1$ es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces todo vector propio $\mathbf{v}$ asociado a $\lambda = 1$ es un punto de equilibrio del sistema!

Si $\lambda = 1$ no es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces el único punto de equilibrio posible es $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$.

Puntos de equilibrio desde las variables de estado

Ejemplo: Determine el (los) punto(s) de equilibrio del sistema:

$$\mathbf{x}[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}[k]$$

Respuesta: Note que

$$\det\left(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Por ende, los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

Por otro lado, denotando $\mathbf{v}_1$ como el vector propio asociado a λ_1, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}_1 \in \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Por ende, cualquier $\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*]^\top \in \mathbb{R}^2$, con $x_1^* = x_2^*$ es un punto de equilibrio del sistema.

Puntos de equilibrio desde las variables de estado

Ejemplo: Determine el (los) punto(s) de equilibrio del sistema:

$$\mathbf{x}[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}[k]$$

Respuesta: Note que

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 3)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{6+\sqrt{(-6)^2-4(1)(8)}}{2} = 4 \\ \lambda_2 = \frac{6-\sqrt{(-6)^2-4(1)(8)}}{2} = 2 \end{cases}$$

Por ende, el único punto de equilibrio del sistema es $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$.

Puntos de equilibrio desde las variables de estado

Ahora consideremos el caso de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo con entrada escalar constante diferente de 0, i.e., $u[k] = \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta \neq 0$. Es decir, sistemas con dinámicas de la forma

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \beta\mathbf{b}$$

Un punto de equilibrio de dicho sistema debe satisfacer que:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \beta\mathbf{b}$$

Por ende, si $\lambda = 1$ no es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ existe y $\mathbf{x}^*$ es único y está dado por:

$$\mathbf{x}^* = \beta\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{b}$$

Si $\lambda = 1$ si es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces el sistema dinámico podría tener infinitos puntos de equilibrio o no tener ninguno.

Puntos de equilibrio desde las variables de estado

Ejemplo: Determine el (los) punto(s) de equilibrio del sistema con dinámicas

$$\mathbf{x}[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u[k]$$

cuando $u[k] = 7$ para todo el tiempo.

Respuesta: Del ejemplo anterior sabemos que $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$. Por ende, $\lambda = 1$ no es un valor propio de $\mathbf{A}$.

Entonces:

$$\mathbf{x}^* = 7 \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es el único punto de equilibrio del sistema.

Respuesta (continuación): Para verificar la respuesta evaluamos el punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = [-7, 0]^\top$ en la ecuación del sistema:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -21 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}^*\end{aligned}$$

Por ende, $\mathbf{x}^* = [-7, 0]^\top$ es efectivamente un punto de equilibrio del sistema considerado.

Ejemplo: Fibonacci

Considere la secuencia de Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Note que:

$$\begin{aligned} 0 + 1 &= 1 \\ 1 + 1 &= 2 \\ 1 + 2 &= 3 \\ 2 + 3 &= 5 \\ 3 + 5 &= 8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es decir, si $y[k]$ denota valor de la secuencia en la iteración k, entonces la secuencia de Fibonacci está dada por el sistema dinámico:

$$y[k+2] = y[k+1] + y[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{con } y[0] = 0 \text{ y } y[1] = 1.$$

Ejemplo: Fibonacci

Escrito en forma estándar, el sistema dinámico de la secuencia de Fibonacci es:

$y[k+2]-y[k+1]-y[k]=0, \quad \forall k=0,1,2,\ldots,$ con $y[0]=0$ y $y[1]=1.$

La secuencia de Fibonacci corresponde a un sistema dinámico de segundo orden, homogéneo, lineal e invariante en el tiempo!

¿Cuál es la representación en espacio de estados para este sistema?

Ejemplo: Fibonacci

Sea

$$y[k+2]-y[k+1]-y[k]=0, \quad \forall k=0,1,2,\ldots, \quad \text{con } y[0]=0 \text{ y } y[1]=1,$$

tomamos

$$x_1[k]=y[k], \quad x_2[k]=y[k+1].$$

Por ende,

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= x_2[k] \\ x_2[k+1] &= x_1[k]+x_2[k] \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}, \forall k=0,1,\ldots, \text{ con } \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 \approx -0{,}6180$ y $\lambda_2 = -1{,}6180$.

¿Qué podemos decir sobre la secuencia de Fibonacci?

Ejemplo: Fibonacci

Note que desde la representación en espacio de estados podemos saber el valor de la secuencia de Fibonacci para cualquier punto de la iteración!

$$\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} y[k] = x_1[k] \\ y[k+1] = x_2[k] \end{array}$$

¿Converge a algo la secuencia?

Propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio

Como vimos anteriormente, los puntos de equilibrio de un sistema dinámico pueden ser estables, asintóticamente estables, o inestables. Ahora vamos a definir más formalmente algunas de estas caracterizaciones.

Definición:

Un punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ de un sistema dinámico es (globalmente) asintóticamente estable si para todo $\mathbf{x}[0]$ se cumple que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^*$. Es decir, el estado del sistema converge asintóticamente al equilibrio $\mathbf{x}^*$ desde cualquier condición inicial $\mathbf{x}[0]$.

Definición:

Un punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ de un sistema dinámico es inestable si existe algún estado inicial $\mathbf{x}[0]$ para el cual se cumpla que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}[k] = \pm\infty$.

Propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio

Resulta que para sistemas lineales e invariantes en el tiempo podemos caracterizar completamente las propiedades de estabilidad de sus puntos de equilibrio!

Consideremos el sistema con dinámicas:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}^*, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$ es un vector de entrada constante.

Supongamos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio del sistema considerado, y definamos $\mathbf{e}[k] = \mathbf{x}[k] - \mathbf{x}^*$ como el vector de desviación del estado $\mathbf{x}[k]$ con respecto al equilibrio $\mathbf{x}^*$.

Propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio

Dado que $\mathbf{x}^*$ es un punto de equilibrio, entonces se cumple que:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^*$$

Por ende, de acuerdo con nuestras definiciones tenemos que:

$$\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}^* = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}^* - \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{B}\mathbf{u}^*$$

$$\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}^* = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}[k] - \mathbf{x}^*\right) + \mathbf{B}\mathbf{u}^* - \mathbf{B}\mathbf{u}^*$$

$$\mathbf{e}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{e}[k]$$

Por lo tanto, en términos del error $\mathrm{e}[k]$ tenemos un sistema lineal homogéneo!

Propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio

De nuestra discusión anterior tenemos que la expresión analítica para la solución del sistema

$$\mathbf{e}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{e}[k], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

está dada por:

$$\mathbf{e}[k] = \mathbf{A}^k \mathbf{e}[0]$$

Por ende, para garantizar la estabilidad asintótica del equilibrio $\mathbf{x}^*$, i.e., para garantizar que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{e}[k] = \mathbf{0}$, se requiere que $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{e}[0] = \mathbf{0}$.

Dicha condición depende de los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$.

Propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio

Teorema:

Considere el sistema dinámico de la forma

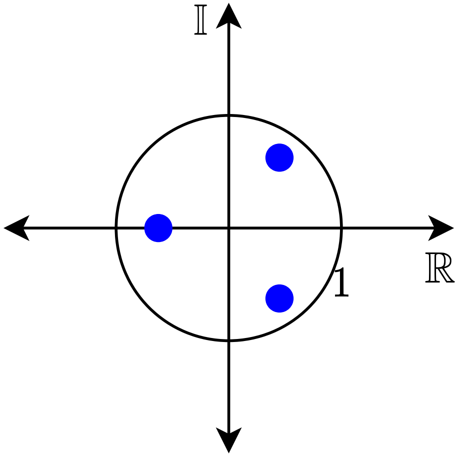
$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}^*, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$ es un vector de entrada constante, y asuma que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es el único punto de equilibrio del sistema.

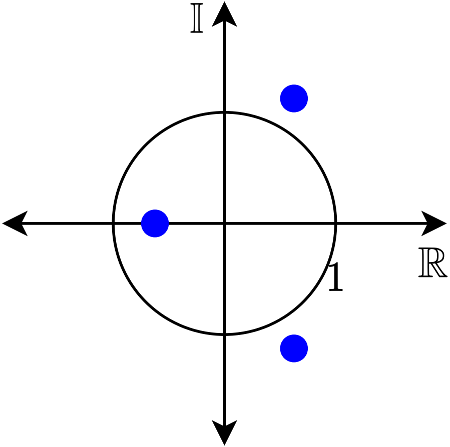
Si la magnitud de **todos** los valores propios de $\mathbf{A}$ es estrictamente menor a 1, entonces el punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ es (globalmente) asintóticamente estable. Si por lo menos un valor propio de $\mathbf{A}$ tiene magnitud estrictamente mayor a 1, entonces el punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ es inestable.

Dado que los valores propios son en general números complejos, la condición de que la magnitud sea menor a uno implica que los valores propios se encuentran en el interior estricto del circulo unitario en el plano complejo.

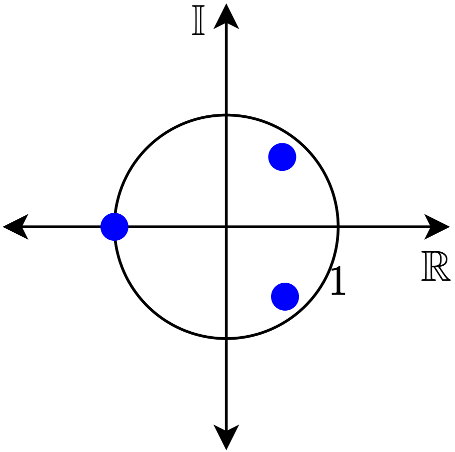
Caso de estabilidad asintótica



Caso de inestabilidad



Caso de estabilidad marginal



Es el caso intermedio entre estabilidad asintótica e inestabilidad!

Ejemplo: Determine las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio del sistema

$$\mathbf{x}[k+1] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k]$$

Respuesta: De nuestro análisis anterior sabemos que el único punto de equilibrio de este sistema es $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Adicionalmente, dado que $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$, podemos concluir que el equilibrio $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ es inestable.

Ejemplo: Determine las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio del sistema

$$\mathbf{x}[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

cuando $u[k] = 2$ para todo k.

Respuesta: Note que

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0{,}5 & \lambda + 0{,}5 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 0{,}5\lambda + 0{,}5$$

Por ende: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 2}}{2} \quad \longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = -0{,}25 \pm j\,\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Por lo tanto: $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{(-0{,}25)^2 + (\sqrt{7}/4)^2} \approx 0{,}7071$

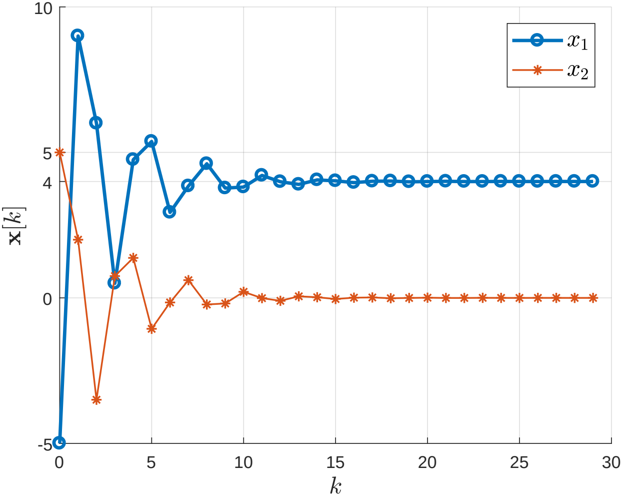
Respuesta (continuación): Dado que el equilibrio del sistema es único ($\lambda = 1$ no es un valor propio de $\mathbf{A}$), y dado que todos los valores propios se encuentran en el interior estricto del circulo unitario, entonces podemos concluir que el equilibrio del sistema es globalmente asintóticamente estable.

De hecho, en este caso el equilibrio del sistema es:

$$\mathbf{x}^* = u^* \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{b} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifiquemos esto en simulación!

Sin perdida de generalidad, tomamos $\mathbf{x}[0] = [-5, 5]^\top$.



Sin perdida de generalidad, tomamos $\mathbf{x}[0] = [-5, 5]^\top$.

```
clc, clear
T = 30;
A = [0 1; -0.5 -0.5];
b = [2; 1];
u = 2;
x_eq = u.*inv(eye(2) - A)*b; % Cálculo del punto de equilibrio
% Simulación del sistema
ks = zeros(1, T);
x = zeros(2, T);
x(:, 1) = [-5; 5]; % Condición inicial "x[0]"
for k=0:T
    ks(1, k+1) = k;
    x(:, k+2) = A*x(:, k+1) + b.*u; % Recordar ínidices de Matlab
end
% Gráfica de resultados
figure(1)
hold on
plot(ks(1, 1:T), x(1, 1:T), 'LineWidth', 2, 'Marker', 'o')
plot(ks(1, 1:T), x(2, 1:T), 'LineWidth', 1, 'Marker', '*')
grid on
yticks([-5, 0, 4, 5, 10])
xlabel('$k$', 'Fontsize', 14, 'Interpreter', 'Latex')
ylabel('$\mathbf{x}[k]$', 'Fontsize', 14, 'Interpreter', 'Latex')
legend({'$x_1$', '$x_2$'}, 'Fontsize', 14, 'Interpreter', 'Latex')
```

Repaso: linealización de funciones

Nuestro estudio de las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio sólo aplica para el caso de sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

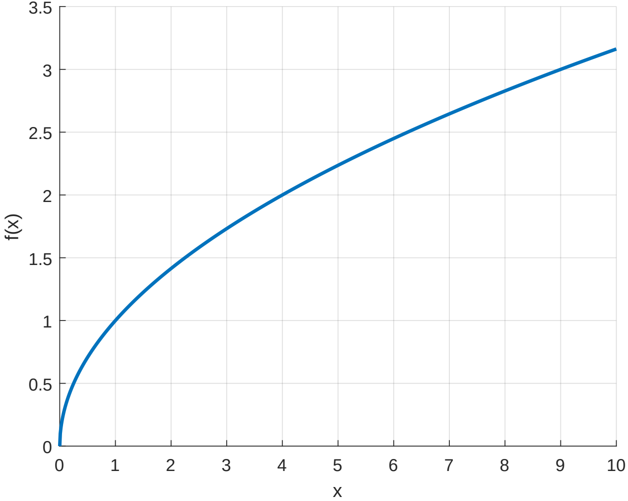
¿Qué sucede si tenemos un sistema cuyas dinámicas no son lineales?

Una opción, es aproximar de forma lineal las dinámicas no lineales alrededor de un punto (estado) dado, y analizar el sistema lineal aproximado.

A esto se le conoce como "linealizar.el sistema.

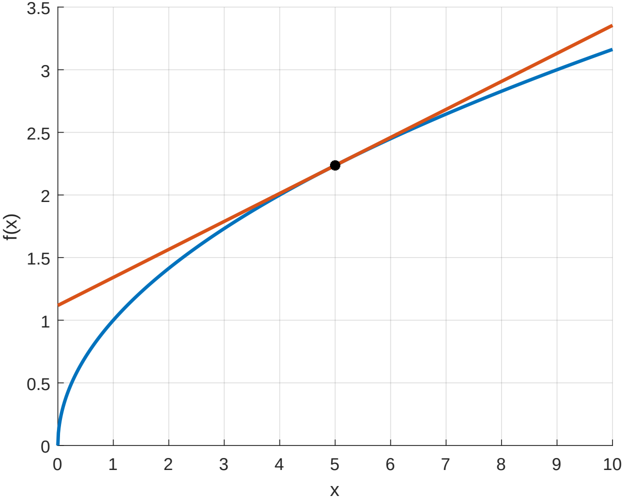
Repaso: linealización de funciones

Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$



Repaso: linealización de funciones

Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$



Repaso: linealización de funciones

Recordemos que la expansión de series de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un punto x^* está dada por:

$$f(x) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}\frac{(x-x^*)}{1!} + \frac{d^2f(x^*)}{dx^2}\frac{(x-x^*)^2}{2!} + \cdots$$

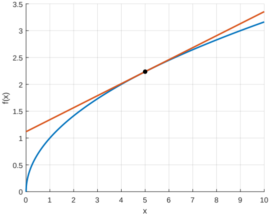
Si consideramos solo términos lineales:

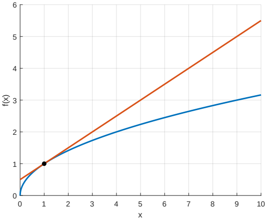
$$f(x) \approx f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}(x-x^*)$$

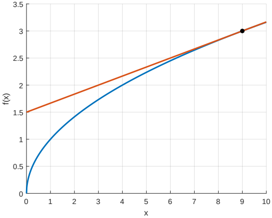
Esta es la aproximación lineal de $f(x)$ alrededor de x^*.

Repaso: linealización de funciones

Ejemplo: $\sqrt{x} \approx \sqrt{x^*} + \frac{1}{2\sqrt{x^*}}(x - x^*)$







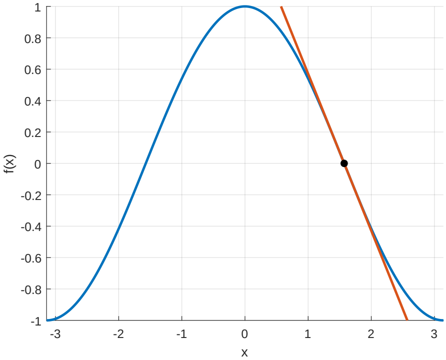
La linealización depende del punto escogido para linealizar, i.e., x^*. **Típicamente, el punto de linealización es un punto de equilibrio en la región de operación esperada para el sistema.**

Ejemplo: linealización de cos(x)

Encuentre una aproximación lineal de cos(x) alrededor de $x^* = \frac{\pi}{2}$.

Respuesta:

$$\begin{aligned}\cos(x) &\approx \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\\ &\approx -x + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$



Repaso: linealización de funciones

Generalización a múltiples variables:

Para una función escalar de n variables x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tenemos que esta se puede aproximar alrededor de $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ como:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i}(x_i - x_i^*)$$

Para una función vectorial de n variables, i.e., $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, el resultado anterior se puede generalizar de forma que:

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) \approx \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*\right) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^*\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\right), \;\; \mathbf{J}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^*\right) = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

La matriz $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ se conoce como la matriz Jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con respecto a $\mathbf{x}$.

Linealización de sistemas dinámicos

Considere el sistema dinámico **no lineal** con dinámicas de la forma:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}[k]\right)$$

Aplicando la aproximación de Taylor de primer orden alrededor del equilibrio $\mathbf{x}^*$ tenemos:

$$\mathbf{x}[k+1] \approx \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*\right) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^*\right)\left(\mathbf{x}[k] - \mathbf{x}^*\right)$$

Definiendo las variables de desviación con respecto a $\mathbf{x}^*$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[k+1] &= \mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}^* \quad \text{(aquí usamos: } \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*\right) = \mathbf{x}^*\text{)} \\ \hat{\mathbf{x}}[k] &= \mathbf{x}[k] - \mathbf{x}^*, \end{aligned}$$

encontramos que el sistema dinámico linealizado (expresado en variables de desviación) está dado por:

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1] = \underbrace{\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^*\right)}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}[k]$$

¿Qué sucede si el sistema no es homogéneo?

Considere el sistema dinámico **no lineal** con dinámicas de la forma:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]\right)$$

Un punto de equilibrio de este sistema es cualquier par $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ para el cual:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right)$$

De forma similar al caso homogéneo, podemos definir

$$\mathbf{J_x}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right) = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\mathbf{u}=\mathbf{u}^*}$$

Junto con:

$$\mathbf{J_u}\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right)=\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u_m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u_m}\end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\mathbf{u}=\mathbf{u}^*}$$

La matriz $\mathrm{J_u}(\mathrm{x},\mathrm{u})$ se conoce como la matriz Jacobiana de $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{u})$ con respecto a u.

De manera que:

$$\mathbf{x}[k+1]\approx\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right)+\mathbf{J_x}\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right)\left(\mathbf{x}[k]-\mathbf{x}^*\right)+\mathbf{J_u}\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*\right)\left(\mathbf{u}[k]-\mathbf{u}^*\right)$$

$$\mathbf{x}[k+1] \approx \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right) + \mathbf{J_x}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right)\left(\mathbf{x}[k] - \mathbf{x}^*\right) + \mathbf{J_u}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right)\left(\mathbf{u}[k] - \mathbf{u}^*\right)$$

Definiendo las variables de desviación con respecto a $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{u}^*$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[k+1] &= \mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}^* \quad \text{(aquí usamos: } \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right) = \mathbf{x}^*\text{)} \\ \hat{\mathbf{x}}[k] &= \mathbf{x}[k] - \mathbf{x}^* \\ \hat{\mathbf{u}}[k] &= \mathbf{u}[k] - \mathbf{u}^*, \end{aligned}$$

tenemos que el sistema dinámico linealizado (expresado en variables de desviación) está dado por:

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1] = \underbrace{\mathbf{J_x}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right)}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}[k] + \underbrace{\mathbf{J_u}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*\right)}_{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{u}}[k]$$

Ejemplo: Considere el sistema dinámico dado por:

$$x_1[k+1] = x_1[k] + u[k] - \sqrt{x_1[k]}$$
$$x_2[k+1] = x_2[k] + \sqrt{x_1[k]} - \sqrt{x_2[k]}$$

Encuentre una aproximación lineal alrededor del punto: $x_1^* = x_2^* = u^* = 1$.

Solución: Primero calculamos $\mathbf{J_x}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$:

$$\mathbf{J_x}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \left.\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2\sqrt{x_1}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x_1}} & 1 - \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix}\right|_{x_1^*, x_2^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Posteriormente calculamos $\mathbf{J_u}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$:

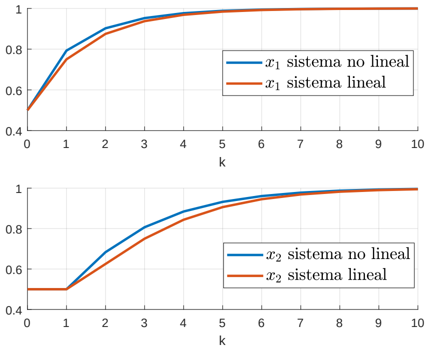
$$\mathbf{J_u}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \left.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right|_{x_1^*, x_2^*, u^*} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución (continuación): Por lo tanto, el sistema linealizado (expresado en las variables de desviación) es:

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}[k] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{u}[k]$$

Comparemos las trayectorias de ambos sistemas!

Solución (continuación): Simulación del sistema no lineal contra el sistema linealizado. Para este caso se tomó: $u[k] = 1$, $x_1[0] = x_2[0] = 0{,}5$.



Recordar aplicar $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*$ y $u = \hat{u} - u^*$ para poder comparar todas las trayectorias en el mismo marco de referencia!