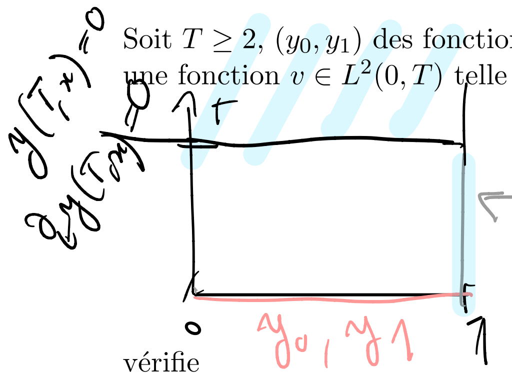
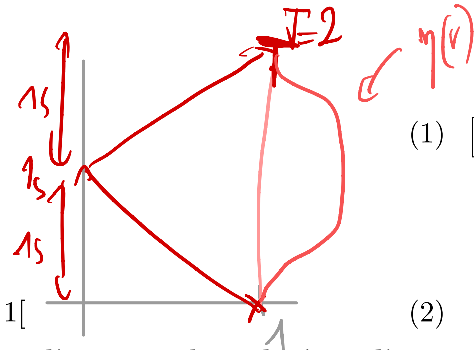
Projet MACS 2 : contrôlabilité à zéros de l'équation des ondes 1D



Soit $T \geq 2$, (y_0, y_1) des fonctions très régulières définies sur $[0,1]$ et s'annulant 0 et en 1. Nous cherchons une fonction $v \in L^2(0,T)$ telle que la solution de l'équation des ondes suivante

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 y - \partial_{xx}^2 y = 0 & t > 0, x \in]0,1[\\ y(t,0) = 0 & t > 0 \\ y(t,1) = v(t) & t > 0 \\ y(0,x) = y_0 & x \in]0,1[\\ \partial_t y(0,x) = y_1 & x \in]0,1[\end{cases} \tag{1}$$

Equation1



vérifie

$$y(T,x) = 0 \text{ et } \partial_t y(T,x) = 0 \quad x \in]0,1[\tag{2}$$

Une telle fonction v est appelée **contrôle frontière, elle permet d'amener la solution d'une équation des ondes à** 0 **en un temps** T. Nous admettons que si $T \geq 2$, un tel contrôle existe. En fait, il en existe même une infinité.

Remarque 1. *La condition $T \geq 2$ est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du contrôle. En effet, une onde partant de $x = 1$ au temps $t = 0$ se propage vers la gauche et atteint le bord gauche $x = 0$ à $t = 1$. Elle est ensuite réfléchie et atteint le bord droit en $t = 2$. Ainsi, pour contrôler cette onde avec un contrôle frontière en $x = 1$, il faut à minima choisir $T = 2$.*

Nous allons nous intéresser au contrôle de norme L^2 minimale, c'est à dire que parmi tous les contrôles nous allons choisir le contrôle v^* qui minimise la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^T \eta(t)(v(t)^2)dt.$$

→ fonction de troncature

$\boxed{\eta = 1}$

Traditionnellement, soit η est choisie constante égale à 1, soit η est une fonction de troncature régulière qui satisfait

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0 \qquad \eta(T) = \eta'(T) = 0$$

et

$$\eta(t) = 1 \quad t \in]\delta, T-\delta[\quad 0 < \delta < 0.5.$$

D'après des théorie de l'optimisation (dualité), il est possible de montrer que le contrôle v^* est obtenu en minimisant la fonctionnelle suivante : trouver (e_0^*, e_1^*) minimisant

$$\boxed{J_1(e_0, e_1) = \frac{1}{2}\int_0^T \eta(t)(\partial_x u(1,t))^2 dt + \int_0^1 y_0(x)\partial_t u(x,0)dx - \int_0^1 y_1(x)u(x,0)dx} \tag{3}$$

J1

où la fonction u est la solution du problème

inconnues

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = 0 & t > 0, x \in]0,1[\\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,1) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = e_0 & x \in]0,1[\\ \partial_t u(0,x) = e_1 & x \in]0,1[\end{cases} \tag{4}$$

données du problème

→ minimise J_1 ⇒ (e_0^*, e_1^*)

1

u^* solution de (4) avec comme donnée initiale (e_0^*, e_1^*)

Le contrôlé v^* est alors donné par la formule suivante

$$\boxed{v^*(t) = \eta(t)\partial_x u^*(t,1).} \tag{5}$$ definiti

La stratégie pour construire le contrôle consiste donc à minimiser la fonctionnelle J_1. En fait, le minimum $\mathbf{e}^* = (e_0^*, e_1^*)$ est l'unique solution de l'équation linéaire suivante

$$\boxed{\Lambda \mathbf{e}^* = \mathbf{f}} \qquad \left(\nabla J_1(e_0^*, e_1^*) = 0\right) \tag{6}$$ Equation

où

$$\mathbf{f} = (-y_1(t), y_0(t))$$

Λ est l'opérateur défini comme suit : partant d'une donnée initiale $= (e_0, e_1)$, on construit d'abord u solution de l'équation des ondes

$(e_0, e_1) \to$ resolution de l'equation des ondes sur $[0,T] \Rightarrow u$.

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = 0 & t > 0, x \in]0,1[\\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,1) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = e_0 & x \in]0,1[\\ \partial_t u(0,x) = e_1 & x \in]0,1[\end{cases} \tag{7}$$ Lambda1

puis la fonction y solution de l'équation des ondes 'rétrograde' $\to$ $(T \to 0)$

connaissant u, on calcule y

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 y - \partial_{xx}^2 y = 0 & t < T, x \in]0,1[\\ y(t,0) = 0 & t < T \\ y(t,1) = -\eta(t)\partial_x u(t,1) & t < T \\ y(T,x) = 0 & x \in]0,1[\\ \partial_t y(T,x) = 0 & x \in]0,1[\end{cases} \tag{8}$$ Lambda2

Nous remarquons que la solution du problème (7) intervient comme source dans le problème (8) (condition de Dirichlet non homogène sur le bord $x = 1$). L'opérateur Λ est alors donné par

$\Lambda(e_0, e_1) \to (-\partial_t y(0,x), y(0,x))$

$$\Lambda \mathbf{e} = (-\partial_t y(0,x), y(0,x))$$

L'équation (6) n'est rien d'autre que les équations d'Euler associées à (3). On peut montrer que l'opérateur Λ est symétrique au sens où

Λ symetrique

$$(\Lambda \mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}}) = \int_0^1 (\Lambda \mathbf{e})_0 \tilde{\mathbf{e}}_0 dx + \int_0^1 (\Lambda \mathbf{e})_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 dx = \int_0^T \partial_x u(t,1)\partial_x \tilde{u}(t,1) dt \tag{9}$$ SymLambd

Ainsi, afin de minimiser la fonctionnelle J_1, on pourra résoudre le problème (6) par une méthode de gradient conjugué.

1 Travail demandé

conservation de l'energie pour l'equation des ondes.

1.1 Un peu de théorie

1. Soit u la solution du problème (7). Montrer que la quantité

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\partial_t u(t,x)|^2 dx + \int_0^1 |\partial_x u(t,x)|^2 dx$$

se conserve au cours du temps.

2. Montrer que l'opérateur Λ est symétrique et non négatif.
3. Montrer la formule (9).
4. Montrer que la fonction v^* définie par (5) définit effectivement un contôle (à zéros) pour l'équation des ondes (1).
5. Ecrire l'algorithme de gradient conjugué associé à l'équation (6).
6. Montrer que l'équation (6) est un réécriture des équations d'Euler associées à la minimisation de la fonctionnelle J_1.
7. Pour $\eta = 1$ et $T = 4$, à l'aide d'une méthode de séparation de variables calculer explicitement le contrôle (5).

1.2 Discrétisation

1. Proposer un schéma centré pour discrétiser les problèmes (7). Montrer qu'une énergie discrète est conservée. Quel est l'ordre de votre schéma ?
2. Proposer alors une méthode de discrétisation de l'opérateur Λ.
3. Appliquer l'algorithme du gradient conjugué pour construire un controle approché. t
4. Que se passe-t-il si les données initiales sont discontinues ?

Objectif : resoudre par une methode de gradient conjugué l'equation $\Lambda e = f$.

• discretisation de l'operateur Λ.

$Ax = b$.

A faire pour cette semaine :

9h le 5 mai

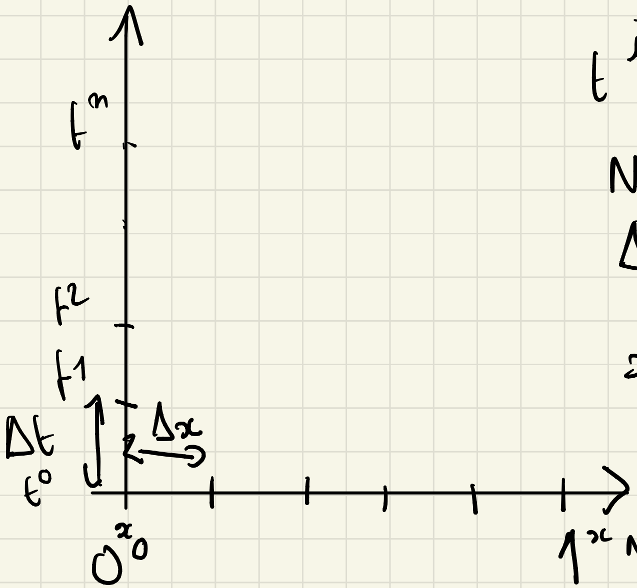
- question 1/3) rapport
- revoir l'algorithme du gradient conjugué. rapport
- ou résoudre numeriquement equation 7. (differences finies centrées) — Matlab, Octave (C ou C++)

discretisation de l'equation des ondes.

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$$

$$\partial_t^2 u(t,x) \simeq \frac{u(t-\Delta t,x) - 2u(t,x) + u(t+\Delta t,x)}{\Delta t^2}$$

$$\partial_x^2 u(t,x) \simeq \frac{u(t,x-\Delta x) - 2u(t,x) + u(t,x+\Delta x)}{\Delta x^2}$$



$$t^i = i\,\Delta t \quad i \geq 0$$

$$N \in \mathbb{N}$$

$$\Delta x = \frac{1}{N}$$

$$x_j = j\,\Delta x.$$

u_j^n : inconnues (calculées par le schema)

$$u_j^n \simeq u(x_j, t^n)$$

$$\begin{cases} \dfrac{+u_j^{n-1} - 2u_j^n + u_j^{n+1}}{\Delta t^2} - \dfrac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} = 0 \\ u_0^n = u_N^n = 0 \qquad \forall n \geq 0 \\ u_j^0 = e_0(x_j) \\ \dfrac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = e_1(x_j) \end{cases}$$

$$\underbrace{\partial_t u(0,x)}_{} = e_1$$

Schema explicite : stable sous la condition $\boxed{\Delta t \leq \Delta x}$.

$$u(t,x) = \sin(\pi x)\cos(\pi t)$$

$$u(0,x) \qquad \partial_t u(0,x)$$

définition de Λ

$$(\Lambda e, \tilde{e}) = \underbrace{\left\{ - \int \overbrace{\partial_t y(0,x)}^{(\Lambda e)_0} \tilde{e}_0(x)\, dx \right\}^{*} + \int \overbrace{y(0,x)}^{(\Lambda e)_1} \tilde{e}_1(x)\, dx}$$

on reconnaît des termes de bords liés à une intégration par partie en temps.

$$\int_0^T \int_0^1 (\partial_{tt} y)\, \tilde{u}(t,x)\, dx\, dt$$

$$= - \int_0^T \int_0^1 \partial_t y\, \partial_t \tilde{u}(t,x)\, dx\, dt$$

$$+ \left[\int_0^1 \partial_t y\, \tilde{u}\, dx \right]_0^T \left\} \begin{array}{l} \text{en } t = T, \\ \partial_t y(T,x) = 0 \\ \left\{ - \int \partial_t y(0,x)\, \overbrace{\tilde{u}(0,x)}^{\tilde{e}_0} \right\}^{*} \end{array} \right.$$

$$= \int_0^T \int_0^1 y(t,x)\, \partial_{tt} \tilde{u}(t,x)\, dx\, dt$$

$$- \left[\int_0^1 y\, \partial_t \tilde{u}\, dx \right]_0^T \qquad y(T,x) = 0 \qquad \to \int_0^1 y(0,x)\, \underbrace{\partial_t \tilde{u}(0,x)}_{e_1} dx$$

$$- \int_0^1 \partial_t y(0,x)\, \tilde{e}_0(x)\, dx$$

$$\boxed{\int_0^T \int_0^1 \overbrace{(\partial_{tt} y)}^{\partial_{xx} y}\, \tilde{u} = \int_0^T \int_0^1 y\, \overbrace{\partial_{tt} \tilde{u}}^{\partial_{xx} \tilde{u}} + (\Lambda e, \tilde{e})}$$

$$\underbrace{\int_0^T\int_0^1 \partial_{xx} y \,\tilde{u}\, dx\,dt}_{\text{IPP en espace.}} = \underbrace{\int_0^T\int_0^1 y\, \partial_{xx}\tilde{u}\, dx\,dt}_{+(\Lambda e, \tilde{e})}$$

$$\cancel{-\int_0^T\int_0^1 \partial_x y\, \partial_x \tilde{u}\, dt\, dx}$$

$$+\int_0^T \underbrace{\left[\partial_x y\ \tilde{u}\right]_0^1}_{0} dt = \cancel{-\int_0^T\int_0^1 \partial_x y\, \partial_x \tilde{u}\, dt\, dx} + \underbrace{\int_0^T \left[\partial_x \tilde{u}\ y\right]_0^1}_{+(\Lambda e, \tilde{e})}$$

$\tilde{u}(t, x=0) = \tilde{u}(t, x=1) = 0$

y

$y(t, x=0) = 0 \qquad y(t, x=1) =$

$$-\int_0^T \eta(t)\, \partial_x \tilde{u}\ \partial_x u\ dt$$

En conclusion

$$\boxed{(\Lambda e, \tilde{e}) = \int_0^T \eta(r)\, \partial_x \tilde{u}\, \partial_x u \, dt}$$

$$(\Lambda \tilde{e}, e) = \int_0^T \eta(r)\, \partial_x u \, \partial_x \tilde{u} \, dt$$

$$= (\Lambda e, \tilde{e})$$

$\Rightarrow \Lambda$ symétrique

$\Rightarrow (\Lambda$ positif : $(\Lambda e, e) = \displaystyle\int_0^T \eta(r) (\partial_x u)^2 dt \geq 0$

$T \geq 2$ $\Rightarrow$ Λ est SDP.

$$(\Lambda e, e) \geq C_T\, E(u)$$