Projet S8 :

Contrôlabilité à zéros de l’équation des ondes 1D

MACS 2
CHAUTARD Alexandre
RANDIMBIARISON Sarobidy

2020 - 2021

Professeurs encadrants :
DELOURME Bérangère
AUDUSSE Emmanuel

Sommaire

Introduction

Objectif : trouver la fonction contrôle frontière v qui permet d’amener la solution d’une équation des ondes à 0 en un temps T.

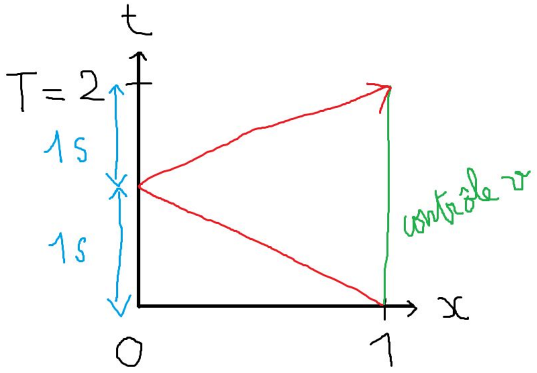
On considère l’équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 y - \partial_{xx}^2 y = 0 & t > 0, x \in]0,1[\\ y(t,0) = 0 & t > 0 \\ y(t,1) = v(t) & t > 0 \\ y(0,x) = y_0 & x \in [0,1] \\ \partial_t y(0,x) = y_1 & x \in [0,1] \end{cases} \tag{1}$$

avec donc

$$y(T,x) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t y(T,x) = 0 \qquad x \in]0,1[\tag{2}$$

La taille de l’intervalle en espace est de 1, donc une onde met 2s à revenir à la frontière.



Donc pour contrôler ce rayon, on doit prendre $T \geq 2$.

Dans ce cas, on a l’existence de la fonction v et on cherche celle dont la norme L2 est minimale, c’est-à-dire qui minimise la fonctionnelle primale :

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^T (v(t))^2 \mathrm{d}t$$

En fait, d'après la théorie de la dualité en optimisation, v peut être obtenu en minimisant la fonctionnelle dual :

$$J_1(e_0, e_1) = \frac{1}{2}\int_0^T \eta(t)(\partial_x u(t,1))^2 dt + \int_0^1 y_0(x)\partial_t u(0,x)\,dx - \int_0^1 y_1(x)u(0,x)\,dx \qquad (3)$$

où u est solution de l'équation des ondes suivante :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = 0 & t > 0, x \in [0,1] \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,1) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = e_0 & x \in [0,1] \\ \partial_t u(0,x) = e_1 & x \in [0,1] \end{cases} \qquad (4)$$

C'est-à-dire qu'on trouve le point de minimum (e_0^*, e_1^*) de J1, puis v est donné par

$$\boxed{v = \partial_x u(t,1)}$$

où u* est solution de (4), avec comme données initiales (e_0^*, e_1^*)

En pratique, pour trouver le point de minimum de J1, on résout l'équation $\nabla J_1(e_0^*, e_1^*) = 0$

(on admet que J1 est convexe coercive).

En fait, le point de minimum $\mathbf{e}^* = (e_0^*, e_1^*)$ est également solution de l'équation linéaire

$$\Lambda e^* = f \qquad (5)$$

L'objectif de ce projet est donc de résoudre l'équation (5) par une méthode de gradient conjugué, après avoir construit l'opérateur Λ .

I - Construction de l'opérateur Λ

Equation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = 0 & t > 0, x \in [0,1] \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(t,1) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = e_0 & x \in [0,1] \\ \partial_t u(0,x) = e_1 & x \in [0,1] \end{cases}$$

Equation des ondes rétrograde:

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 y - \partial_{xx}^2 y = 0 & t < T, x \in]0,1[\\ y(t,0) = 0 & t < T \\ y(t,1) = -\eta(t)\, \partial_x u(t,1) & t < T \\ y(T,x) = 0 & x \in]0,1[\\ \partial_t y(T,x) = 0 & x \in]0,1[\end{cases}$$

$$\Lambda e = \begin{cases} (\Lambda e)_1 = -\partial_t y(0,x) \\ (\Lambda e)_2 = y(0,x) \end{cases}$$

Λ est Symétrique Défini Positif

On a montré par le calcul la formule suivante :

$$(\Lambda e, \tilde{e}) = \int_0^1 (\Lambda e)_0 \tilde{e}_0 dx + \int_0^1 (\Lambda e)_1 \tilde{e}_1 dx = \int_0^T \partial_x u(t,1) \partial_x \tilde{u}(t,1) dt = (\Lambda \tilde{e}, e)$$

Discrétisation

Equation des ondes :

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \\ u_0^n = u_N^n = 0 \qquad \forall n \geq 0 \\ u_j^0 = e_0(x_j) \\ \frac{u_j^1-u_j^0}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) = e_1(x_j) \end{cases}$$

Equation des ondes rétrograde :

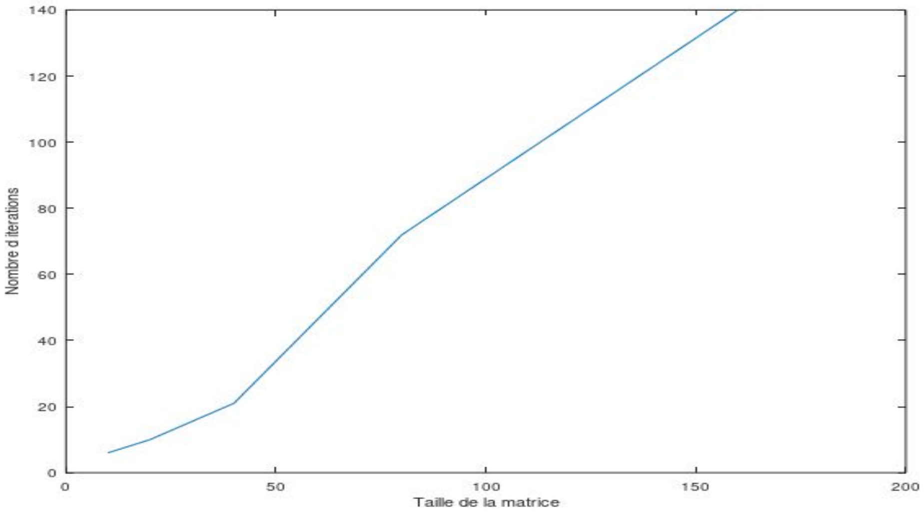
$$\begin{cases} \frac{y_j^{n+1}-2y_j^n+y_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{y_{j+1}^n-2y_j^n+y_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \\ y_0^n = 0 \qquad \forall n > 0 \\ y_{Nx}^n = -\eta(t^n)\left(\frac{u^n_{N_x} - u^n_{N_x-1}}{\Delta x}\right) \\ y_j^0 = 0 \\ \frac{y_j^{Nt}-y_j^{Nt-1}}{\Delta t} = 0 \end{cases}$$

Schéma explicite convergent si $\Delta t \leq \Delta x$

II - Résolution par algorithme du gradient conjugué

Pour résoudre l'équatior $\Lambda e^* = f$, on choisit la méthode du gradient conjugué car Λ est symétrique défini positif.

Tout d'abord, on écrit le gradient conjugué pour une matrice A symétrique quelconque et on observe la convergence :



Ici, on a pris A le laplacien de taille n, et on observe bien que le gradient conjugué converge en au plus n itérations.

Conditionnement

Corollaire 8.3 . *On a l'estimation d'erreur*

$$E(x^k) \leq 4\left(\frac{\sqrt{K(A)}-1}{\sqrt{K(A)}+1}\right)^{2k} E(x^0)$$

où K(A) est le conditionnement de A.

$$M = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

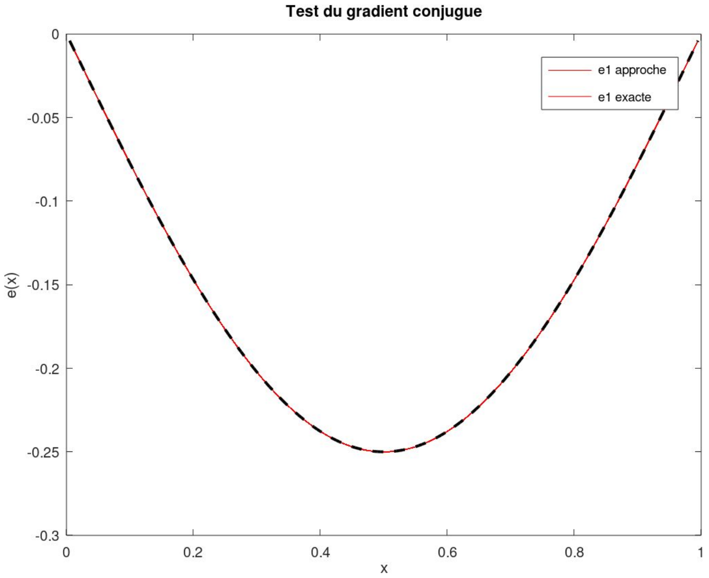
où φ est solution de

$$\begin{cases} -\varphi'' = -\partial_t y(0, x) \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

Finalement, on implémente le gradient conjugué pour l'équation bien conditionnée :

$$M\Lambda e^* = Mf$$

Avec le gradient conjugué codé sous Octave:



$$f = \begin{cases} \sin(pi \cdot x) \\ 0 \end{cases}$$

$$e_{initiale} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$e_{exacte} = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{\sin(pi \cdot x)}{4} \end{cases}$$

Résolution exacte avec T = 4

- On a : $J_1(e_0, e_1) = \frac{1}{2}\int_0^T \eta(t)(\partial_x u(t,1))^2 dt + \int_0^1 y_0(x)\partial_t u(0,x)dx - \int_0^1 y_1(x)u(0,x)dx \qquad (3)$

- On peut écrire y0, y1 et e sous forme de séries de Fourier :

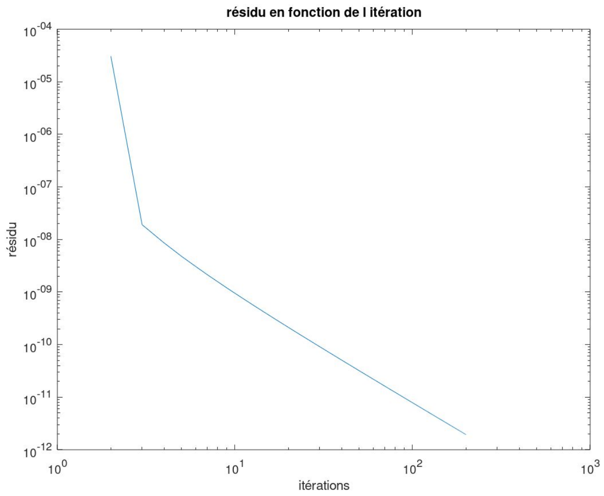
$$y_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{y}_k^0 sin(k\pi x) \quad \text{et} \quad y_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{y}_k^1 sin(k\pi x) \qquad e_0 = \sum_{k\geq 1} a_k sin(k\pi x) \quad \text{et} \quad e_1 = \sum_{k\geq 1} b_k sin(k\pi x).$$

- On obtient ainsi : $$J_1(a_k, b_k) = \sum_{k\geq 1}(k^2\pi^2 a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{2}(\widehat{y}_k^0 b_k - \widehat{y}_k^1 a_k).$$

- Et enfin, $\nabla J_1(a_k, b_k) = 0$ donne : $$a_k = \frac{\widehat{y}_k^1}{4k^2\pi^2} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{-\widehat{y}_k^0}{4}.$$

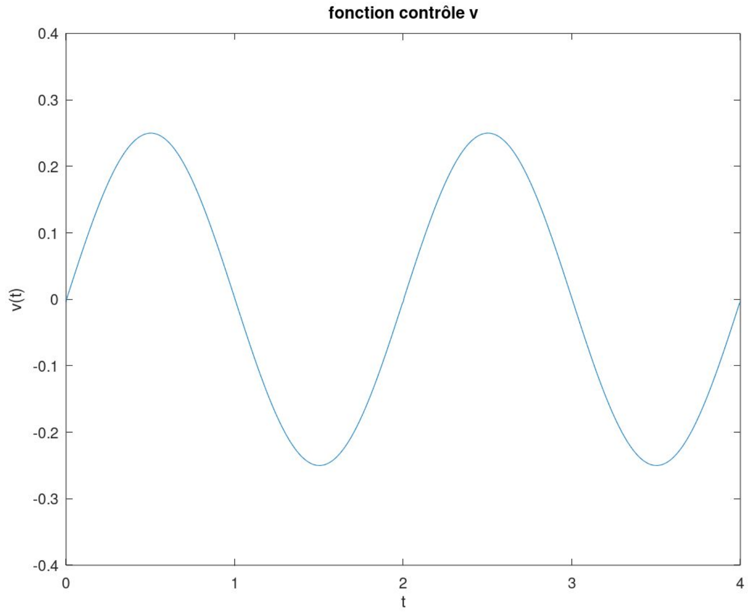
Conclusion

D’une part, on peut observer le résidu pour le gradient conjugué en fonction du nombre d’itérations :

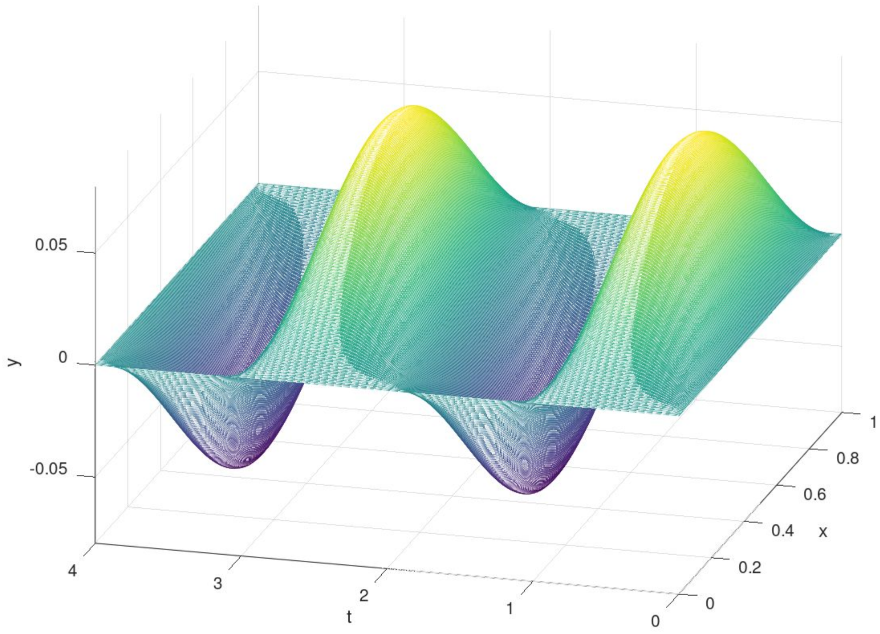


On observe que le résidu diminue moins vite à la fin, cela est dû au mauvais conditionnement lié à la discrétisation.

D’autre part, on peut voir le contrôle v qu’on obtient après avoir résolu l’ équation des ondes avec comme données initiales la solution $\mathbf{e}^* = (e_0^*, e_1^*)$ de $\Lambda e^* = f$



Enfin, on trace la solution de l'équation des ondes et on observe bien qu'en T = 4, celle-ci vaut 0 pour tout x dans [0,1] :



Remerciements