Knapsack is NP-complete

Sarai E Gómez Ibarra

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico - Matemáticas

6 de Septiembre del 2021

Contenido

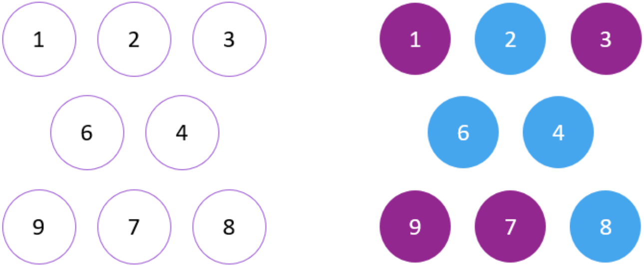
Preliminares

Knapsack

Dado un conjunto de articulos I, donde cada articulo i se le asocia un peso w_i y un beneficio b_i y se tiene que el recipiente tiene una capacidad de W y sea $k \in \mathbb{R}$ ¿existe un subconjunto $S \subseteq I$ tal que $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ y $\sum_{i \in S} b_i \geq k$?

Partition

Dado un conjunto I, donde cada elemento i tiene asociado un valor (o peso) a_i y sea $k = \frac{1}{2}\sum_{i\in I} a_i$ ¿existe un subconjunto $S \subseteq I$ tal que $\sum_{i\in S} a_i = k$?



Contenido

Teorema

Teorema

Knapsack es NP-completo

Demostración:

Primero validaremos que efectivamente Knapsack es NP.
Véase que para responder "YES" al problema de decisión tenemos que validar que se cumpla que $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ y $\sum_{i \in S} b_i \geq k$ esto es, $\mathcal{O}(|S|)$, el cual se considera polinomial. Por tanto decimos que Knapsack es NP.

Algorithm 1 Checking Stage

Input: s_1, s_2 ... s_n

Output: "YES.º "NO"

if $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ y $\sum_{i \in S} b_i \geq k$ **then**
  YES
else
  NO

P.D. Que existe una reducción polinómica del problema de Partición a Knapsack. Basta con mostrar que existe una reducción en tiempo polinómico $\mathcal{O}(*)$ tal que $\mathcal{O}(X)$ es una instancia "YES" a Knapsack si y solo si X es una instancia "YES" a Partición.

- **Reducción del problema de Partición a Knapsack**
  Supongamos que nos dan $a_1, a_2, ..., a_n$ para el problema de Partición, consideremos el siguiente problema de Knapsack como

$$w_i = a_i, \qquad b_i = a_i \quad \forall\ i = 1, 2, ..., n$$

$$W = k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

  Véase que el proceso que convierte el problema de partición en el problema de Knapsack $\mathcal{O}(*) = \mathcal{O}(n)$ el cual es un proceso polinómico del tamaño de la entrada.

- $\Rightarrow$) **Si X es una instancia "YES" para Partition, entonces X es una instancia "YES" para Knapsack**
  Si X es una instancia "YES" para el problema de la Partición, existen S y $T \subset I$ tales que

$$\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \in T} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

  Si nuestra mochila contiene los elementos de S, se tiene que

$$\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \in S} w_i = W$$

$$\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \in S} b_i = k$$

  Por lo tanto, $\mathcal{O}(X)$ es una instancia "YES" para el problema Knapsack

- **$\Leftarrow$) Si X es una instancia "YES" para Knapsack, entonces X es una instancia "YES" para Partition**
  Si $\mathcal{O}(X)$ es una instancia "YES" para el problema Knapsack, con el conjunto $S \subset I$, definamos $T = I - S$
  Tenemos que

$$\sum_{i \in S} w_i = \sum_{i \in S} a_i \leq W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i \in S} b_i = \sum_{i \in S} a_i \geq k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Esto implica que

$$\sum_{i \in S} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i \in T} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Por lo tanto, $\{S, T\}$ es la partición deseada, y X es una instancia "YES" para Partition.

$\therefore$ Knapsack es NP-complete.