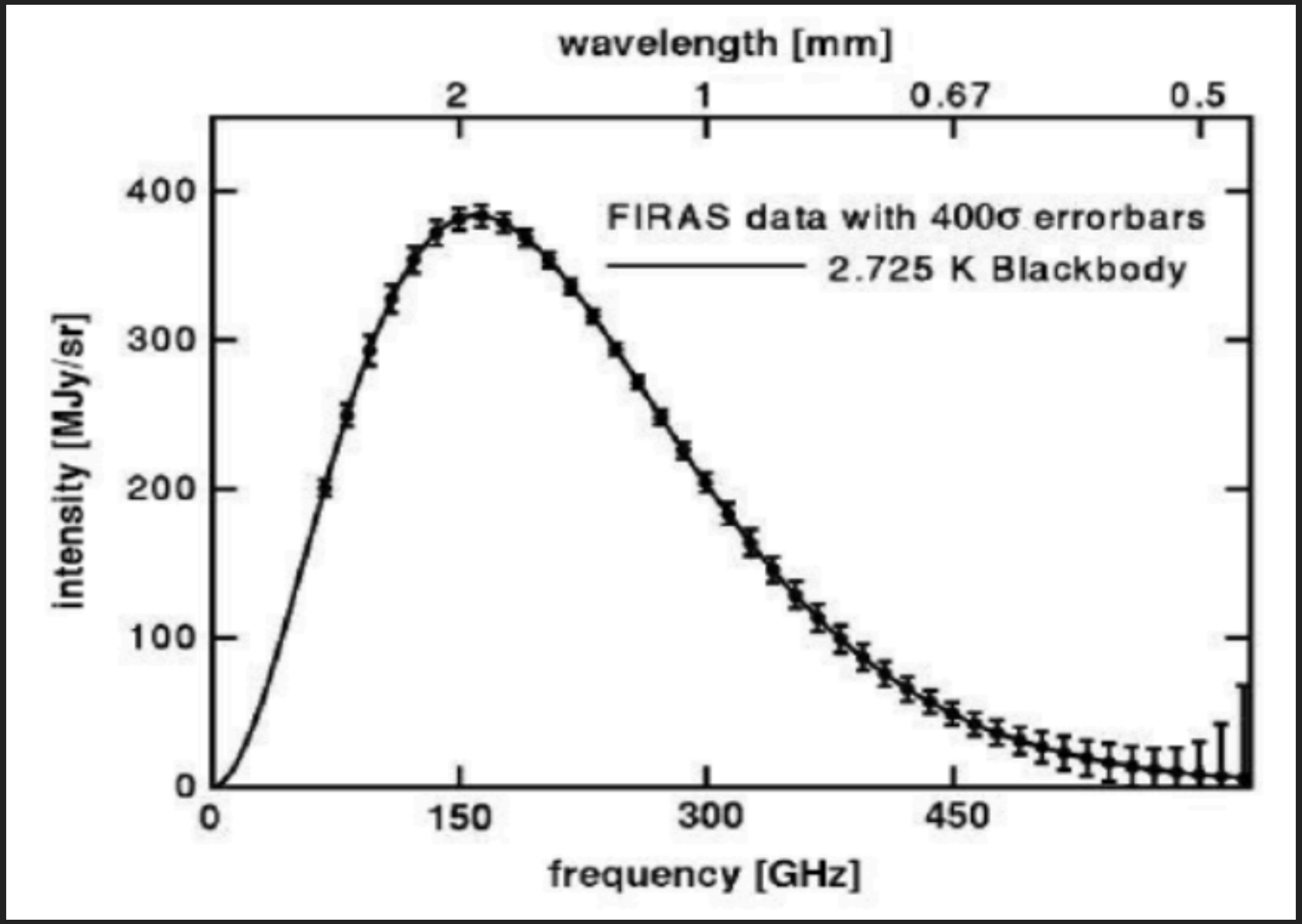
宇宙マイクロ波背景放射と
ザックス・ヴォルフェ効果

2019年度　天体形成研究会

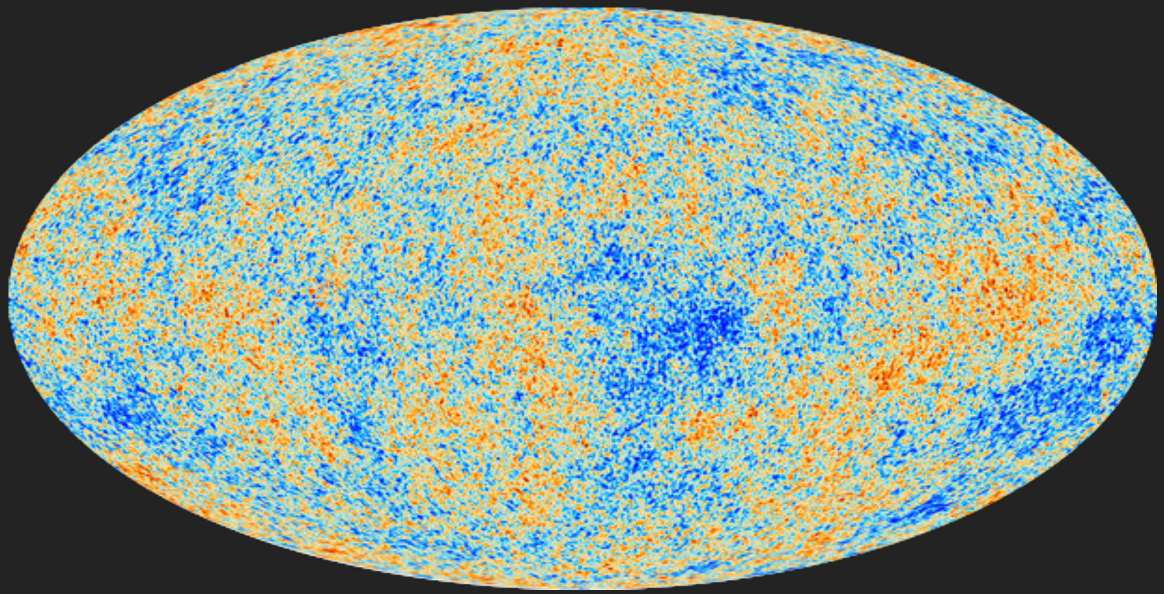
石倉　来実（新潟大学　M1）

宇宙マイクロ波背景放射(CMB)とは

- 全天でほぼ等方的に観測される電磁波
- スペクトルは絶対温度2.7Kのプランク分布にほぼ一致
- わずかな温度ゆらぎの発見（$\sim 10^{-5}$程度）



2013 PLANK



CMBの温度ゆらぎ

- 再結合期の地平線スケールよりも大きな角度でのゆらぎは
  宇宙誕生直後の姿を我々に教えてくれる宇宙の化石
  →ザックス・ヴォルフェ効果

- 温度ゆらぎの定量的な解析
  →パワースペクトル

CMBの温度ゆらぎの多重極展開

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \longrightarrow C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} a_{lm}^*$$

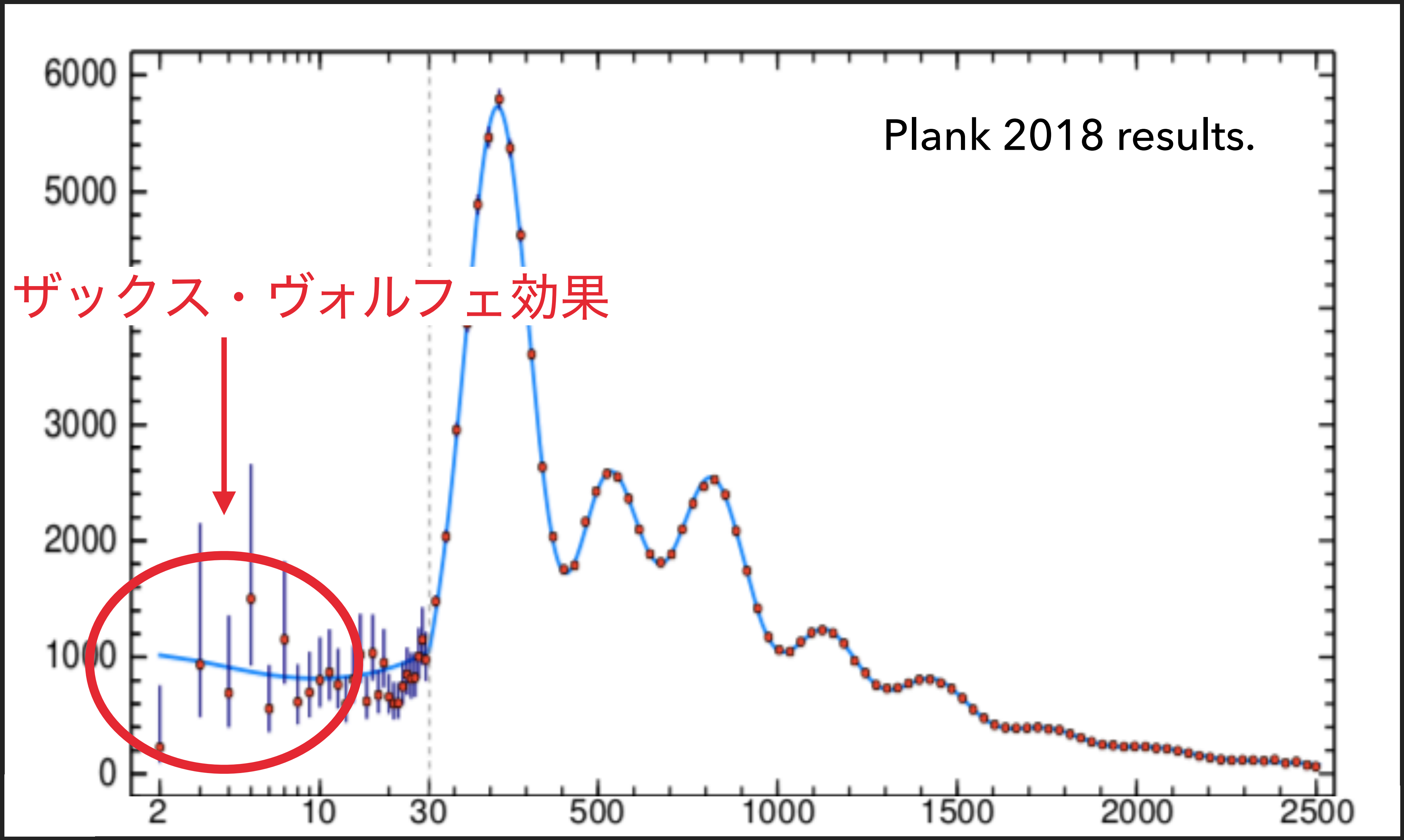
慣習的に、

$$D_l = \frac{l(l+1)C_l}{2\pi}$$ がよく使われる

$$\begin{cases} a_{lm} = \oint d\Omega Y_{lm}^* \left(\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} \right) \\ Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} p_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \\ \oint d\Omega Y_{lm}^* Y_{l'm'} \equiv \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \text{ (正規直交関係)} \end{cases}$$

→ l を角度 $\theta \sim \frac{180^\circ}{l}$ に対応させ、C_l を角度 θ での平均的な温度ゆらぎと解釈する.

パワースペクトル



パワースペクトル D_l

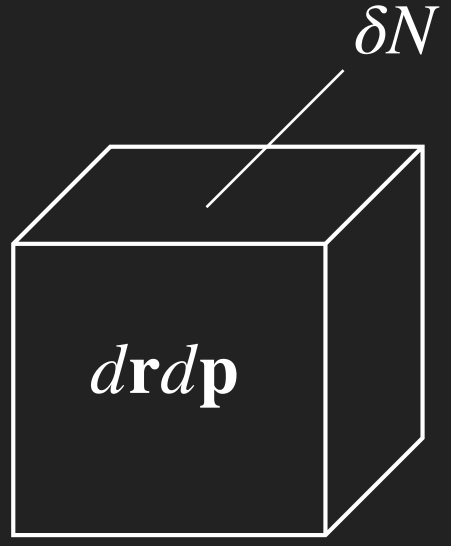
多重極モーメント l

ザックス・ヴォルフェ効果

物理法則

- **光線的測地線** $\left(a, b = 0 \sim 3\right)$ $\quad \cdot \equiv \dfrac{d}{d\lambda}$

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0 & \text{：光線条件} \\ \dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x^a} & \text{：測地線方程式} \end{cases}$$



- **光子の位相空間と分布関数** $\left(x^0 = ct\right)$

光子の4元運動量：$p_a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}$

光子の位相空間：$\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right) = \left(x^1, x^2, x^3, p_1, p_2, p_3\right)$

光子の位相体積要素に含まれる光子数：$\delta N = f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{t}\right) d\mathbf{r} d\mathbf{p}$

物理法則

- 無衝突ボルツマン方程式

光線軌道上において $\frac{d}{dt}\delta N = 0$ が成り立つ場合の輸送方程式

$$\frac{df(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0$$

$$\sigma = \sigma(\mathbf{r},\mathbf{p},t), \quad \frac{d\sigma}{d\lambda} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{df}{d\lambda} = \frac{d\sigma}{d\lambda}\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = 0$$

$\Downarrow$

$f = F(\sigma)$ は特解となる

一様等方宇宙におけるCMB

FLRW計量： $ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ （曲率 $K = 0$）

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0 \\ \dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x^a} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} &\sigma = Cta(t) \\ &f = F(\sigma) = (e^{\sigma} - 1)^{-1} \end{aligned}$$

（$C > 0$：定数）

<観測者と振動数>

・ニュートン理論： $e^{i\left(kx - 2\pi\nu t\right)} = e^{2\pi i S(x,t)} \longrightarrow \nu = -\dfrac{\partial S}{\partial t}$

・相対論： $t \to \tau$, $\nu = -\dfrac{\partial S}{\partial \tau} = -\displaystyle\sum_{a=0}^{3} \dfrac{dx^a(\tau)}{d\tau}\dfrac{\partial S}{\partial x^a}$

電磁波に対する幾何光学近似

$$\frac{\partial S}{\partial x^a} = \sum_{b=0}^{3} g_{ab}\frac{dx^b(\lambda)}{d\lambda}$$

$$\therefore \nu = -\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}\frac{dx^a(\tau)}{d\tau}\frac{dx^b(\lambda)}{d\lambda} = -\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}u^a\dot{x}^b$$

一様等方宇宙におけるCMB

- 共動座標系に静止する観測者を設定

$$\nu = -g_{00}u^0\dot{x}^0 = c^2\dot{t} \rightarrow \sigma = C\dot{t}a(t) = \frac{C\nu a(t)}{c^2} = \frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T(a)}$$

$$T(a) = \frac{a_0}{a(t)}T_0 \quad , \quad C = \frac{hc^2}{k_\mathrm{B}T_0 a_0}$$

$$\therefore f = (e^\sigma - 1)^{-1} = \left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T(a)}\right) - 1\right)^{-1}$$

$$T(a) = \frac{a_0}{a(t)}T_0 = \big(1 + z(t)\big)\,T_0$$ z：赤方偏移

パラメータT_0 は、熱力学的な温度の意味を持たない！

一様等方からゆらいでいる宇宙でのCMB(ダスト優勢)

- **Einstein方程式を解く**

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = -\,8\pi G T_{ab}$$

・**計量 (ニュートン・ゲージ)：**（ 曲率 $K = 0$ ）

$$ds^2 = -\,e^{2\psi_N(\mathbf{r})}c^2dt^2 + e^{-2\psi_N(\mathbf{r})}a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

・**エネルギー運動量テンソル：** $T^{ab} = \rho\frac{u^a}{c}\frac{u^b}{c} \qquad (i = 1 \sim 3)$

$$\begin{cases} T_{00} = \rho(t)c^2\left(1 + \Delta\left(\mathbf{r}, t\right)\right) \\ T_{0i} = -\,\rho(t)c\left(1 + \Delta\left(\mathbf{r}, t\right)\right)a(t)v_i\left(\mathbf{r}, t\right) \\ T_{ij} = \rho(t)\left(1 + \Delta\left(\mathbf{r}, t\right)\right)a(t)^2 v_i\left(\mathbf{r}, t\right)v_j\left(\mathbf{r}, t\right) \end{cases}$$

一様等方からゆらいでいる宇宙でのCMB(ダスト優勢)

- **Einstein方程式の線形解**

$$
\begin{cases}
\rho(t) = (6\pi G t^2)^{-1}, a(t) = A t^{\frac{2}{3}} \\
\dfrac{\partial \psi_N(\mathbf{r})}{\partial t} = 0 \quad \text{(ニュートン・ポテンシャルは } \psi_N(\mathbf{r}) c^2 \text{)} \\
\Delta_N(\mathbf{r}, t) = \dfrac{c^2 \nabla^2 \psi_N(\mathbf{r})}{4\pi G \rho(t) a(t)^2} = \dfrac{3c^2}{2A^2} \nabla^2 \psi_N(\mathbf{r}) t^{\frac{2}{3}} \propto a(t) \\
\mathbf{v}_N(\mathbf{r}, t) = \left(v_{N_i}(\mathbf{r}, t) \right) = -\dfrac{c^2 t}{a(t)} \nabla \psi_N(\mathbf{r}) \\
\mathbf{v}_N(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}_N(\mathbf{r}, t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \left(v_{Ni}(\mathbf{r}, t) \right)^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} u^i u^j \right)_N
\end{cases}
$$

一様等方からゆらいでいる宇宙でのCMB(ダスト優勢)

・ダストと共に遅い速度で運動する観測者の固有時

$$c^2 d\tau^2 = e^{2\psi_N(\mathbf{r})}c^2dt^2 - e^{-2\psi_N(\mathbf{r})}a(t)^2\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$$

$$= e^{2\psi_N(\mathbf{r})}\left\{1 - e^{-4\psi_N(\mathbf{r})}a(t)^2\left(\left(\frac{dx}{cdt}\right)^2+\left(\frac{dy}{cdt}\right)^2+\left(\frac{dz}{cdt}\right)^2\right)\right\}$$

$\ll 1$

$$\approx e^{2\psi_N(\mathbf{r})}c^2dt^2$$

$$\therefore d\tau \approx e^{\psi_N(\mathbf{r})}dt \rightarrow \tau \approx e^{\psi_N(\mathbf{r})}t \rightarrow t(\mathbf{r}) = \tau(\mathbf{r})\mathbf{e}^{-\psi_\mathbf{N}(\mathbf{r})}$$

再結合期は τ の意味で同時刻！

・Einstein方程式の線形解：$a(t) = At^{\frac{2}{3}}$ を用いると、

$$a(t(\mathbf{r})) = a\left(\tau(\mathbf{r})\right)e^{-\frac{2}{3}\psi_N(\mathbf{r})}$$

一様等方からゆらいでいる宇宙でのCMB(ダスト優勢)

- 保存量を見つける

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = 0 \\ \dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x^a} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} &\sigma_N = C_N a(t) e^{2\psi_N(\mathbf{r})} c^2 \dot{t} \quad (C_N > 0\text{：定数}) \\ &f = F(\sigma_N) \end{aligned}$$

<観測者と振動数>

└→ ダストと共に運動

$$\begin{cases} \left(\dot{x}^a\right) = \left(c\dot{t}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right) \approx c\dot{t}\left(1, \dfrac{-\mathbf{n}}{a(t)}\right), \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}(n_i)^2 = 1 \\ (u^a) = \left(ce^{-\psi_N(\mathbf{r})}, \dfrac{v_{Ni}(\mathbf{r}, t)}{a(t)}\right) \end{cases}$$

$$\therefore \nu = -\sum_{a,b=0}^{3} g_{ab}u^a\dot{x}^b \approx e^{\psi_N(\mathbf{r})}c^2\dot{t}\left(1 + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_N(\mathbf{r}, t)}{c}\right)$$

一様等方からゆらいでいる宇宙でのCMB(ダスト優勢)

$$\sigma_N = C_N a(t) e^{2\psi_N(\mathbf{r})} c^2 \dot{t} = C_N \nu a(t) e^{\psi_N(\mathbf{r})} \left(1 + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v_N}(\mathbf{r},t)}{c}\right)^{-1}$$

$\dot{t} \Longrightarrow \nu$ に書き換え！

再結合期は τ の意味で同時刻！ → すべての $\mathbf{r}$ に共通の同時刻 τ で表したい！

$a(t) \rightarrow a(\tau)$ に書き換え

$$a(t(\mathbf{r})) = a\left(\tau(\mathbf{r})\right) e^{-\frac{2}{3}\psi_N(\mathbf{r})}$$

$$\sigma_N = C_N \nu a(\tau) e^{\frac{1}{3}\psi_N(\mathbf{r})} \left(1 + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v_N}(\mathbf{r},\tau)}{c}\right)$$

$$\sigma_N = C_N \nu_0 a_0 \exp\left(\frac{1}{3}\psi_N(\mathbf{0})\right)\left(1 + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_N(\mathbf{0},\tau_0)}{c}\right)^{-1}$$ ⟵ 現在

$$= C_N \nu_{\rm rec} a_{\rm rec} \exp\left(\frac{1}{3}\psi_N(\mathbf{r})\right)\left(1 + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_N(\mathbf{r},\tau_{\rm rec})}{c}\right)^{-1}$$ ⟵ 再結合時

一様等方からゆらいでいる宇宙でのCMB(ダスト優勢)

$$C_N \nu_0 a_0 \exp\left(\frac{1}{3}\psi_N(\mathbf{0})\right)\left(1+\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_N(\mathbf{0},\tau_0)}{c}\right)^{-1} = C_N \nu_{\mathrm{rec}} a_{\mathrm{rec}} \exp\left(\frac{1}{3}\psi_N(\mathbf{r})\right)\left(1+\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_N(\mathbf{r},\tau_{\mathrm{rec}})}{c}\right)^{-1}$$

$$\frac{\nu_0}{\nu_{\mathrm{rec}}} = \frac{a_{\mathrm{rec}}}{a_0}\left[1+\frac{1}{3}\left\{\psi_N(\mathbf{r})-\psi_N(\mathbf{0})\right\}-\frac{\mathbf{n}}{c}\cdot\left\{\mathbf{v}_N(\mathbf{r},\tau_{\mathrm{rec}})-\mathbf{v}_N(\mathbf{0},\tau_0)\right\}\right]$$

・CMBの温度ゆらぎを $\dfrac{T_0(\mathbf{n})}{T_{\mathrm{rec}}} = \dfrac{\nu_0}{\nu_{\mathrm{rec}}}$ で定義

$$\frac{T_0(\mathbf{n})}{T_{\mathrm{rec}}} = \frac{a_{\mathrm{rec}}}{a_0}\left[1+\frac{1}{3}\left\{\psi_N(\mathbf{r})-\psi_N(\mathbf{0})\right\}-\frac{\mathbf{n}}{c}\cdot\left\{\mathbf{v}_N(\mathbf{r},\tau_{\mathrm{rec}})-\mathbf{v}_N(\mathbf{0},\tau_0)\right\}\right]$$

$$\equiv \frac{a_{\mathrm{rec}}}{a_0}\left(1+\frac{\Delta T_0(\mathbf{n})}{T_0}\right) \longrightarrow \text{ザックス・ヴォルフェ効果}$$

ザックス・ヴォルフェ効果

$$\frac{\Delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} = +\frac{1}{3}\left(\psi_N(\mathbf{r}) - \psi_N(\mathbf{0})\right)$$ ：ポテンシャル差

$$-\frac{\mathbf{n}}{c}\cdot\left\{\mathbf{v}_N(\mathbf{r},\tau_{\mathrm{rec}}) - \mathbf{v}_N(\mathbf{0},\tau_0)\right\}$$ ：速度差

$$+0$$ ：ポテンシャルの時間変動

再結合期でのポテンシャル項と速度項の比較を行う！

$$\left|\frac{\mathbf{v}_N(\mathbf{r},\tau_{\mathrm{rec}})}{c\psi_N(\mathbf{r})}\right|$$ の比較

ザックス・ヴォルフェ効果

<ポテンシャル項と速度項の比較 (再結合期)>

$$\left|\frac{\mathbf{v}_N(\mathbf{r},\tau_{\rm rec})}{c\psi_N(\mathbf{r})}\right| = \left|\frac{ct_{\rm rec}\nabla\psi_N(\mathbf{r})}{a\psi_N(\mathbf{r})}\right| \qquad \left(\because\ \mathbf{v}_N(\mathbf{r},t) = \left(v_{N_i}(\mathbf{r},t)\right) = -\frac{c^2 t}{a(t)}\nabla\psi_N(\mathbf{r})\right)$$

・波長 L_x のゆらぎ： $\psi_N(x) = \Psi_N \sin\left(\frac{ax}{L_x}\right) \longrightarrow \frac{\partial\psi_N(x)}{\partial x} = \frac{a\Psi_N(x)}{L_x}\cos\left(\frac{ax}{L_x}\right) \sim \frac{a}{L_x}\psi_N(x)$

y, z についても同様 $\quad \therefore\ \nabla\psi_N(\mathbf{r}) \sim \frac{a}{L_X}\psi_N(\mathbf{r})$

・$a(t) = At^{\frac{2}{3}}$ より、

宇宙の大きさ： $L_H(t_{\rm rec}) \equiv \frac{c}{H(t_{\rm rec})} = \frac{c}{(\dot{a}/a)_{t_{\rm rec}}} = \frac{3}{2}ct_{\rm rec} \sim ct_{\rm rec}$

$$\therefore \left|\frac{\mathbf{v}_N(\mathbf{r},\tau_{\rm rec})}{c\psi_N(\mathbf{r})}\right| = \left|\frac{ct_{\rm rec}\nabla\psi_N(\mathbf{r})}{a\psi_N(\mathbf{r})}\right| \sim \frac{ct_{\rm rec}}{L_X} \sim \frac{L_H(t_{\rm rec})}{L_X}$$

まとめ

- CMBのスペクトル分布は、ほぼ2.7Kのプランク分布
- CMBにはわずかな温度ゆらぎがある
- 大角度スケールの温度ゆらぎ

  →ザックス・ヴォルフェ効果(重力項+速度項)

APPENDIX

角径距離

・FLRW計量：

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a(t)^2\left\{d\chi^2 + \left(\frac{\sinh(\sqrt{-K}\chi)}{\sqrt{-K}}\right)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right\}$$

・フリードマン方程式：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \left(\frac{\dot{z}}{1+z}\right)^2 = H_0{}^2\left\{\Omega_m(1+z)^3 - \frac{Kc^2}{(a_0H_0)^2}(1+z)^2 + \Omega_z\right\}$$

・角径距離 d_A ：

$$d_A \equiv a(t)\frac{\sinh\left(\sqrt{-K}\chi(z)\right)}{\sqrt{-K}}$$

※フリードマン方程式より、$\frac{Kc^2}{(a_0H_0)^2} = \Omega_m + \Omega_\Lambda - 1$

$$\chi(z) \equiv \int_0^{t(z)}\frac{cdt}{a(t)} = \frac{c}{a_0H_0}\int_0^z\frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + (1-\Omega_m-\Omega_\Lambda)(1+z')^2 + \Omega_\Lambda}}$$

角径距離

- $\Omega_m = 0,\ \Omega_\Lambda = 0$ ：

$$\frac{H_0 d_A}{c} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{(1+z)^2}\right)$$

- $\Omega_m > 0,\ \Omega_\Lambda = 0$ ：

$$\frac{H_0 d_A}{c} = \frac{2}{{\Omega_m}^2(1+z)^2}\left\{\Omega_m z + (\Omega_m - 2)\left(\sqrt{\Omega_m z + 1} - 1\right)\right\}$$

- $\Omega_m = 0,\ \Omega_\Lambda > 0$ ：

$$\frac{H_0 d_A}{c} = \frac{1}{\Omega_\Lambda}\left(1 - \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{(1+z)^2} - \Omega_\Lambda + 1}\right)$$

※ $\Omega_\Lambda > 1$ のとき、$z \leq \sqrt{\dfrac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda - 1}} - 1$ を見たす z のみが可能.

CMBの温度ゆらぎの多重極展開

CMBの温度ゆらぎ $\dfrac{\Delta T(\theta,\phi)}{T} \equiv \dfrac{T'(\theta,\phi) - T}{T}$ (T は T' の平均)

$$\frac{\Delta T}{T} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi) \longrightarrow C_l = \frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm} a_{lm}^{*}$$

慣習的に、

$$D_l = \frac{l(l+1)C_l}{2\pi}$$ がよく使われる

$$a_{lm} = \oint d\Omega Y_{lm}^{*} \left(\frac{\Delta T(\theta,\phi)}{T}\right)$$

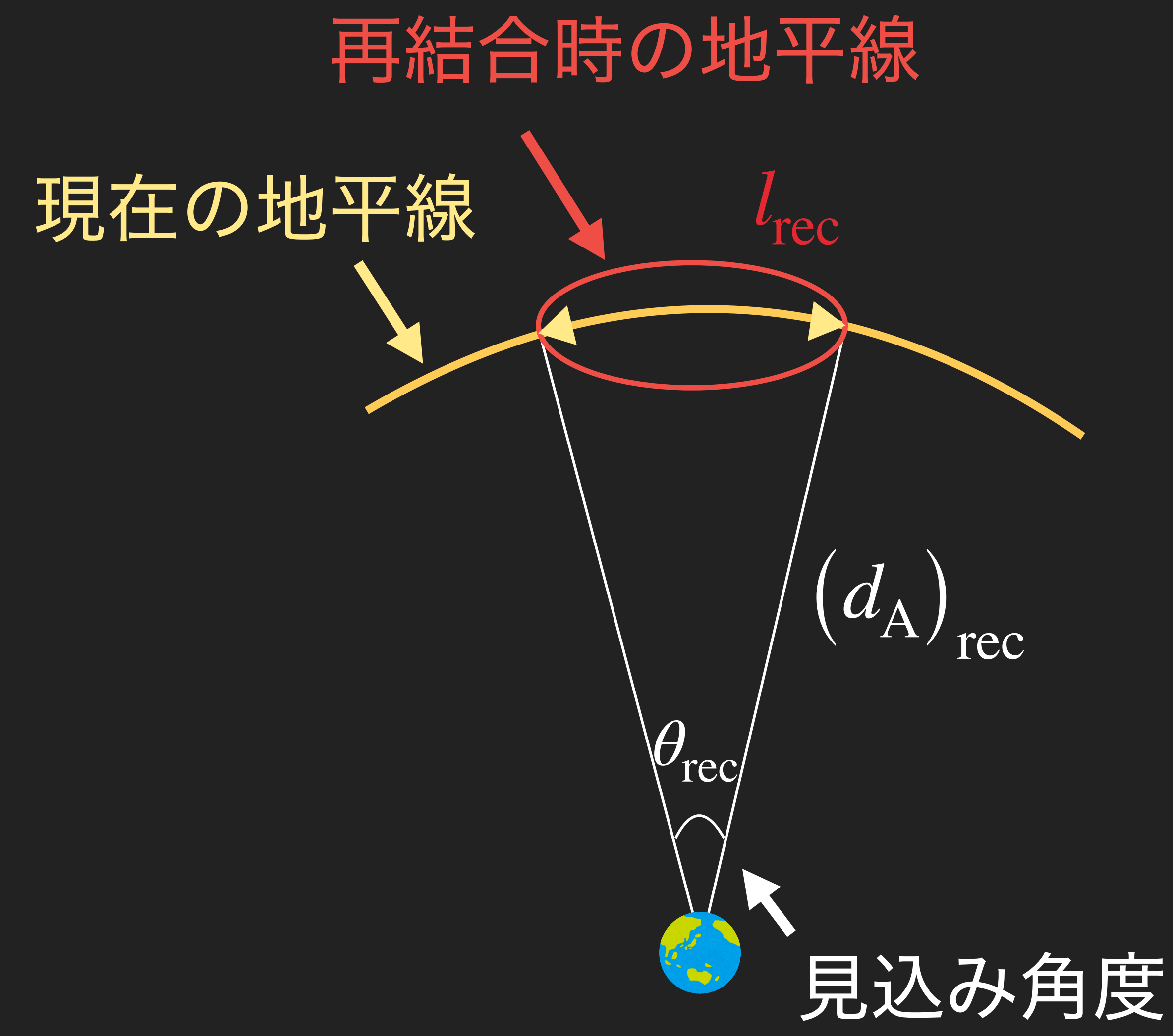
$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}\, p_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

$$\oint d\Omega Y_{lm}^{*} Y_{l'm'} \equiv \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^{*}(\theta,\phi) Y_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$ (正規直交関係)

パワースペクトル

$$\theta \sim \frac{180^\circ}{l}$$

※以下、$\Omega_K = 0,\ \Omega_\Lambda = 0$ とする.



・ $$l_{\mathrm{rec}} \equiv \left(\frac{ca}{\dot{a}}\right)_{\mathrm{rec}} \approx \frac{c}{H_0\sqrt{\Omega_m}\left(1+z_{\mathrm{rec}}^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$= 226\sqrt{\frac{0.13}{\Omega_m h^2}}\left(\frac{1100}{1+z_{\mathrm{rec}}}\right)^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{kpc}$$

・ $$(d_A)_{\mathrm{rec}} \approx \frac{2c}{H_0{\Omega_m}^2(1+z_{\mathrm{rec}})^2}\{\Omega_m z_{\mathrm{rec}} + (\Omega_m - 2)(\sqrt{\Omega_m z_{\mathrm{rec}}+1} - 1)\}$$

$$\therefore\ \theta_{\mathrm{rec}} \equiv \frac{l_{\mathrm{rec}}}{(d_A)_{\mathrm{rec}}} \approx \sqrt{\frac{\Omega_m}{4z_{\mathrm{rec}}}} = 27'\sqrt{\left(\frac{\Omega_m}{0.27}\right)\left(\frac{1100}{z_{\mathrm{rec}}}\right)} \sim 0.5^\circ\ \text{程度} \quad \Longleftrightarrow \quad l \sim 10^2$$