# Numerik WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Andreas Fischer

8. Oktober 2018

# *Inhaltsverzeichnis*

# *Vorwort*

## Kapitel I

# *Interpolation*

## 1. Grundlagen

**Aufgabe:**
Gegeben sind $n+1$ Datenpaare $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$, alles reelle Zahlen und paarweise verschieden. Gesucht ist eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Interpolationsbedingungen

$$F(x_0) = f_0,\ \dots,\ F(x_n) = f_n \tag{1}$$

genügt.

**Definition (Stützstellen, Stützwerte)**
Die $x_0$ bis $x_n$ werden Stützstellen genannt.

Die $f_0$ bis $f_n$ werden Stützwerte genannt.

Die oben gestellte Aufgabe wird zum Beispiel durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \{x_0, \dots, x_n\} \\ f_i & x = x_i \end{cases}$$

gelöst. Weitere Möglichkeiten sind: Polygonzug, Treppenfunktion, Polynom, ...

- In welcher Menge von Funktionen soll $F$ liegen?
- Gibt es im gewählten Funktionenraum für beliebige Datenpaare eine Funktion $F$, die den Interpolationsbedingungen genügt (eine solche Funktion heißt Interpolierende )?
- Ist die Interpolierende in diesem Raum eindeutig bestimmt?
- Welche weiteren Eigenschaften besitzt die Interpolierende, zum Beispiel hinsichtlich ihrer Krümmung oder der Approximation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k = f(x_k)$ für $k = 0, \dots, n$
- Wie sollte man die Stützstellen wählen, falls nicht vorgegeben?
- Wie lässt sich die Interpolierende effizient bestimmen, gegebenenfalls auch unter der Berücksichtigung, dass neue Datenpaare hinzukommen oder dass sich nur die Stützwerte ändern?

■ **Beispiel 1.1**

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ in s | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f_k$ in °C | 80 | 85,8 | 86,4 | 93,6 | 98,3 | 99,1 |

Interpolation im

- Raum der stetigen stückweise affinen Funktionen
- Raum der Polynome höchstens 5. Grades
- Raum der Polynome höchstens 4. Grades (Interpolation im Allgemeinen nicht lösbar, Regression nötig)

# 2. Interpolation durch Polynome

$\Pi_n$ bezeichne den Vektorraum der Polynome von Höchstgrad $n$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation. Für jedes $p \in \Pi_n$ gibt es $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

und umgekehrt.

## 2.1. Existenz und Eindeutigkeit

**Satz 2.1**
Zu $n+1$ Datenpaaren $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ mit paarweise verschiedenen Stützstellen existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$, dass die Interpolationsbedingung Gleichung (1) erfüllt.

*Beweis.*

- Existenz: Sei $j \in \{0, \dots, n\}$ und $L_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$L_j := \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x-x_0)\cdot\dots\cdot(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\dots\cdot(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdot\dots\cdot(x_j-x_n)}$$

  das LAGRANGE-Basispolynom vom Grad $n$. Offenbar gilt $L_j \in \Pi_n$ und

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} = \delta_{jk} \tag{3}$$

  Definiert man $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} f_j \cdot L_j(x) \tag{4}$$

  so ist $p \in \Pi_n$ und außerdem erfüllt $p$ wegen Gleichung (3) die Interpolationsbedingung Gleichung (1)

- Eindeutigkeit: Angenommen es gibt Interpolierende $p, \tilde{p} \in \Pi_n$ mit $p \neq \tilde{p}$. Dann folgt $p - \tilde{p} \in \Pi_n$ und $(p-\tilde{p})(x_k) = p(x_k) - \tilde{p}(x_k) = 0$ für $k = 0, \dots, n$. Also hat $(p - \tilde{p})$ mindestens $n+1$ Nullstellen, hat aber Grad $n$. Das heißt, dass $(p-\tilde{p})$ das Nullpolynom sein muss. □

**Definition (Interpolationspolynom)**
Das Polynom, dass die Interpolationsbedingung erfüllt, heißt Interpolationspolynom zu $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$.

**▶ Bemerkung 2.2**

- Die Darstellung Gleichung (4) heißt LAGRANGE-Form des Interpolationspolynoms.
- Um mittels Gleichung (4) einen Funktionswert $p(x)$ zu berechnen, werden $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen genötigt; bei gleichabständigen Stützstellen kann man diesen Aufwand auf $\mathcal{O}(n)$ verringern. Ändern sich die Stützwerte, kann man durch Wiederverwendung von den $L_j(x)$ das $p(x)$ in $\mathcal{O}(n)$ Operationen berechnen.
- Man kann zeigen, dass $L_0$ bis $L_n$ eine Basis von $Pi_n$ bilden.

**Kapitel II**

# *numerische Quadratur und Integration*

**Kapitel III**

# *Lineare Gleichungssysteme*

## Kapitel IV

# *Kondition*

**Kapitel V**

# *Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme*

Kapitel VI

# *lineare Optimierung*

# Anhang

# Index