Wichtige Methoden der Linearen Algebra

H. Haustein, P. Lehmann

7. August 2018

1 Basiswechsel

1. Alle Vektoren b_j der alten Basis als Linearkombination mit Vektoren b' der neuen Basis darstellen

$$b_j = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} b_i'$$

2. Matrix zusammenbauen

$$T_{B'}^{B} = M_{B'}^{B}(\mathrm{id}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{array} \right)$$

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Eliminierungsverfahren nach Gauss

Matrix in Zeilenstufenform bringen mit folgenden Methoden

1. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl
2. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
3. Vertauschung von zwei Zeilen

2.2 Cramer'sche Regel

$$x_i = \frac{\det(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n)}{\det(A)}$$

3 Determinanten

1. Laplace'scher Entwicklungssatz: Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A')$$

2. Determinante einer Diagonalmatrix:

$$\det(D) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

4 Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Das charakteristische Polynom bestimmen

$$\chi = \det(A - \lambda \mathbb{1}_n)$$

2. Das charakteristische Polynom 0 setzen und die λ_i's ausrechnen.

3. Für jedes λ_i die Eigenräume berechnen

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda_i) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i \mathbb{1}_n)$$

4. Die λ_i sind dann die Eigenwerte und die Eigenräume sind alle Vielfachen des Eigenvektors zum Eigenwert λ_i.

5 Diagonalisierung und Trigonalisierung

5.1 Diagonalisierung

1. Die Eigenwerte und dazu die Vielfachheiten ausrechnen. Die Diagonalmatrix besteht dann auf der Hauptdiagonalen aus Eigenwerten mit ihrer Vielfachheit, also

$$D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, ..., \lambda_1}_{\mu(\chi,\lambda_1)}, ..., \underbrace{\lambda_n, ..., \lambda_n}_{\mu(\chi,\lambda_n)})$$

Allerdings ist A nur dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert gilt

$$\dim(\mathrm{Eig}(A, \lambda)) = \mu(\chi, \lambda)$$

2. Will man noch die Transformationsmatrizen S und S^{-1} berechnen, so muss man zu jedem Eigenraum eine Basis finden. Die Vereinigung bildet dann eine Basis B von V.

3. Die Matrix S^{-1} besteht dann aus den Basiselementen von B als Spaltenvektoren, also

$$S^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} b_1 & \dots & b_n \end{array} \right)$$

4. Das Invertieren von S^{-1} gibt dann S und es gilt $SAS^{-1} = D$.

5.2 Trigonalisierung

1. Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen und zu einer Basis von V erweitern

$$S_1^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array} \right)$$

2. Matrix A_2 berechnen

$$A_2 = S_1 A S_1^{-1}$$

3. Den Vorgang mit der noch nicht trigonalisierten Matrix unten rechts wiederholen,

$$S_2^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & v_2 & e_3 & \dots & e_n \end{array} \right)$$

5.3 Minimalpolynom

1. Betrachte Potenzen des Endomorphismus $a \in \text{End}(V)$ (A ist die Matrix dazu) und finde geeignete Linearkombination. z.B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Betrachte Basisvektor e_1 und Multipliziere mit Potenzen von A. Das sieht dann so aus:

$$A^3 \cdot e_1 = -4A^2 \cdot e_1 - A \cdot e_1 + e_1$$
$$\Rightarrow \text{Minimalpolynom: } \mu_A(X) = X^3 + 4X^2 + X - \mathbb{1}_3 = \underline{0}$$

6 Jordan-Normalform

1. Eigenwerte und deren Vielfachheit bestimmen
2. zu jedem Eigenwert den Jordan-Block mit Größe = Vielfachheit des Eigenwertes bestimmen
3. Die Jordan-Normalform besteht aus den Jordan-Blocken auf der Hauptdiagonalen
4. Will man noch die Transformationsmatrizen bestimmen, muss man noch zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor bestimmen.
5. Kommt ein Eigenwert mehrfach (z.B. d-fach) vor, so muss man noch Ker $\big((A - \lambda\mathbb{1}_n)^2\big)$, Ker $\big((A - \lambda\mathbb{1}_n)^3\big)$, ..., Ker $\big((A - \lambda\mathbb{1}_n)^{d-1}\big)$ bestimmen.
6. Dann kann man sich die Transformationsmatrix S zusammenbauen:

$$S = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} EV & EV & & EV & EV & & EV \\ \text{zu } \lambda_1 & \text{zu } \lambda_1 & \dots & \text{zu } \lambda_1 & \text{zu } \lambda_2 & \dots & \text{zu } \lambda_n \\ \text{Potenz } 1 & \text{Potenz } 2 & & \text{Potenz } d-1 & \text{Potenz } 1 & & \text{Potenz } d-1 \end{array} \right)$$

7. Dann gilt $SAS^{-1} = J$.

7 Gram-Schmidt-Verfahren

1. Eine orthogonale Basis ist gegeben $(w_1, ..., w_n)$. Die Basis $(v_1, ..., v_n)$ lässt sich dann so orthgonalisieren:

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1 \\ v_2 &= w_2 - \frac{\langle v_1, w_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \\ v_3 &= w_3 - \frac{\langle v_1, w_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, w_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 \\ &\vdots \\ v_n &= w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_i, w_n \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i \end{aligned}$$

2. Jetzt noch normalisieren:

$$v_i' = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$$

3. Dann ist $(v_1', ..., v_n')$ eine Orthonormalbasis.