Numerik WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Andreas Fischer

12. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kapitel I

Interpolation

1. Grundlagen

Aufgabe:
Gegeben sind $n+1$ Datenpaare $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$, alles reelle Zahlen und paarweise verschieden. Gesucht ist eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Interpolationsbedingungen

$$F(x_0) = f_0, \; \ldots, \; F(x_n) = f_n \tag{1}$$

genügt.

Definition (Stützstellen, Stützwerte)
Die x_0 bis x_n werden Stützstellen genannt.

Die f_0 bis f_n werden Stützwerte genannt.

Die oben gestellte Aufgabe wird zum Beispiel durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \{x_0, \ldots, x_n\} \\ f_i & x = x_i \end{cases}$$

gelöst. Weitere Möglichkeiten sind: Polygonzug, Treppenfunktion, Polynom, ...

- In welcher Menge von Funktionen soll F liegen?
- Gibt es im gewählten Funktionenraum für beliebige Datenpaare eine Funktion F, die den Interpolationsbedingungen genügt (eine solche Funktion heißt Interpolierende)?
- Ist die Interpolierende in diesem Raum eindeutig bestimmt?
- Welche weiteren Eigenschaften besitzt die Interpolierende, zum Beispiel hinsichtlich ihrer Krümmung oder der Approximation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k = f(x_k)$ für $k = 0, \ldots, n$
- Wie sollte man die Stützstellen wählen, falls nicht vorgegeben?
- Wie lässt sich die Interpolierende effizient bestimmen, gegebenenfalls auch unter der Berücksichtigung, dass neue Datenpaare hinzukommen oder dass sich nur die Stützwerte ändern?

■ **Beispiel 1.1**

k	0	1	2	3	4	5
x_k in s	0	1	2	3	4	5
f_k in °C	80	85,8	86,4	93,6	98,3	99,1

Interpolation im

- Raum der stetigen stückweise affinen Funktionen
- Raum der Polynome höchstens 5. Grades
- Raum der Polynome höchstens 4. Grades (Interpolation im Allgemeinen nicht lösbar, Regression nötig)

2. Interpolation durch Polynome

Π_n bezeichne den Vektorraum der Polynome von Höchstgrad n mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation. Für jedes $p \in \Pi_n$ gibt es $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

und umgekehrt.

2.1. Existenz und Eindeutigkeit

Satz 2.1
Zu $n+1$ Datenpaaren $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ mit paarweise verschiedenen Stützstellen existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$, dass die Interpolationsbedingung Gleichung (1) erfüllt.

Beweis.

- Existenz: Sei $j \in \{0, \dots, n\}$ und $L_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$L_j(x) := \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j - x_n)}$$

das LAGRANGE-Basispolynom vom Grad n. Offenbar gilt $L_j \in \Pi_n$ und

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} = \delta_{jk} \tag{3}$$

Definiert man $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} f_j \cdot L_j(x) \tag{4}$$

so ist $p \in \Pi_n$ und außerdem erfüllt p wegen Gleichung (3) die Interpolationsbedingung Gleichung (1)

- Eindeutigkeit: Angenommen es gibt Interpolierende $p, \tilde{p} \in \Pi_n$ mit $p \neq \tilde{p}$. Dann folgt $p - \tilde{p} \in \Pi_n$ und $(p - \tilde{p})(x_k) = p(x_k) - \tilde{p}(x_k) = 0$ für $k = 0, \dots, n$. Also hat $(p - \tilde{p})$ mindestens $n + 1$ Nullstellen, hat aber Grad n. Das heißt, dass $(p - \tilde{p})$ das Nullpolynom sein muss. □

Definition (Interpolationspolynom)
Das Polynom, dass die Interpolationsbedingung erfüllt, heißt Interpolationspolynom zu $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$.

▶ Bemerkung 2.2

- Die Darstellung Gleichung (4) heißt LAGRANGE-Form des Interpolationspolynoms.
- Um mittels Gleichung (4) einen Funktionswert $p(x)$ zu berechnen, werden $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen genötigt; bei gleichabständigen Stützstellen kann man diesen Aufwand auf $\mathcal{O}(n)$ verringern. Ändern sich die Stützwerte, kann man durch Wiederverwendung von den $L_j(x)$ das $p(x)$ in $\mathcal{O}(n)$ Operationen berechnen.
- Man kann zeigen, dass L_0 bis L_n eine Basis von Π_n bilden.

2.2. Newton-Form des Interpolationspolynoms

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \tag{5}$$

mit Koeffizienten $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Die Berechnung des Koeffizienten c_j kann rekursiv durch Ausnutzen der Interpolationsbedingung Gleichung (1) erfolgen. Für c_0 erhält man

$$f_0 \stackrel{!}{=} p(x_0) = c_0$$

Seien c_0 bis c_{j-1} bereits ermittelt. Dann folgt:

$$f_j \stackrel{!}{=} p(x_j) = \underbrace{c_0 + \sum_{k=1}^{j-1} c_k(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{k-1})}_{\text{bekannt}} + c_j \underbrace{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})}_{\text{unbekannt}}$$

▶ **Bemerkung 2.3**

- Der Aufwand um die Koeffizienten $c_0, \dots, c_n$ zu ermitteln ist $\mathcal{O}(n^2)$. Kommt ein Datenpaar hinzu, kann man Gleichung (5) um einen Summanden erweitern und mit $\mathcal{O}(n)$ Operationen c_{n+1} bestimmen.
- Sind die Koeffizienten $c_0, \dots, c_n$ in Gleichung (5) bekannt, dann benötigt man zur Berechnung von $p(x)$ $\mathcal{O}(n)$ Operationen.
- Die Polynome $N_0, \dots, N_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

  $$N_0 = 1 \quad \text{und} \quad N_j = (x - x_0)\dots(x - x_{j-1})$$

  heißen NEWTON-Basispolynome und bilden eine Basis von Π_n.

Die Koeffizienten $c_0, \dots, c_n$ ergeben sich wegen Gleichung (2) auch als Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & (x_1 - x_0) & & & \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \dots & \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Die Systemmatrix dieses linearen Gleichungssystems ist eine reguläre untere Dreiecksmatrix.

Zu effizienten Berechnung eines Funktionswertes $p(x)$ nach Gleichung (5) mit gegebenen Koeffizienten

$c_0, \ldots, c_n$ kann man das HORNER-Schema anwenden. Überlegung für $n = 3$.

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= c_0 + (x - x_0)\Big[c_1 + (x - x_1)\left[c_2 + (x - x_2)c_3\right]\Big] \end{aligned}$$

Für beliebiges n liefert das den folgenden Algorithmus:

■ **Algorithmus 2.4 (Horner-Schema für Newton-Form)**

Input: n, x, c_0,..., c_n, x_0,..., x_n

```
p = c_n
do j = n-1, 0, -1
 p = c_j + (x - x_j)p
end do
```

2.3. Interpolationsfehler

Definition (Maximum-Norm)

Die Norm

$$\|g\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |g(x)| \quad \text{für } g \in C[a, b]$$

definiert die Maximum-Norm in $C[a, b]$.

Satz 2.5

Sei $f \in C[a, b]$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom p_ε mit $\|f - p_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

Also liegt die Menge aller Polynome (beliebig hohen Grades) direkt in $C[a, b]$.

Definition 2.6 (Stützstellensystem)

Stützstellensystem : $a \leq x_0^{(n)} < ... < x_n^{(n)} \leq b$. Weiterhin bezeichne $p_n \in \Pi_n$ das zu den Datenpaaren $(x_k^{(n)}, f(x_k^{(n)}))$ gehörende eindeutig bestimmte Interpolationspolynom.

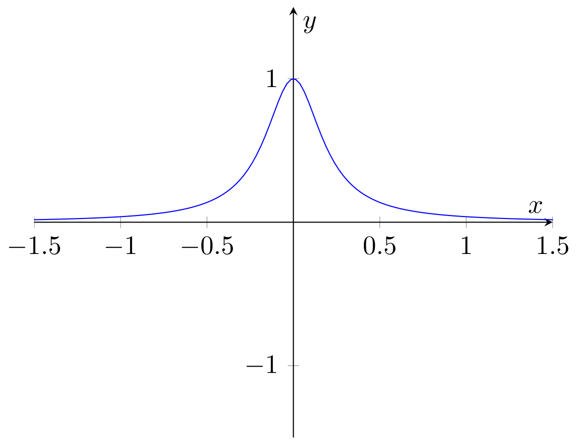
Satz 2.7 (Satz von Faber 1914)

Zu jedem Stützstellensystem gibt es $f \in C[a, b]$, sodass (p_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.
$\|p_n - f\|_\infty \to 0$ bedeutet, dass (p_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Nach einem Resultat von ERDÖS/VERTESI (1980) gilt sogar, dass $(p_n(x))$ fast überall divergiert.

■ **Beispiel 2.8 (Runge)**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$
äquidistante Stützstellen $x_0, ..., x_n$, $p \in \Pi_n$ als Interpolationspolynom


y
1
x
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
−1

Kapitel II

numerische Quadratur und Integration

Kapitel III

Lineare Gleichungssysteme

Kapitel IV

Kondition

Kapitel V

Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Kapitel VI

lineare Optimierung

Anhang