

Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

1. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

I	Endomorphismen	1
1	Eigenwerte	1
2	Das charakteristische Polynom	4
3	Diagonalisierbarkeit	6
4	Trigonalisierbarkeit	9
5	Das Minimalpolynom	11
6	Nilpotente Endomorphismen	14
7	Die JORDAN-Normalform	18
II	Skalarprodukte	21
1	Das Standardskalarprodukt	21
2	Bilinearformen und Sesquilinearformen	24
3	Euklidische und unitäre Vektorräume	27
4	Orthogonalität	29
5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	32
6	Selbstadjungierte Endomorphismen	35
7	Hauptachsentransformation	37
III	Dualität	40
IV	Moduln	41
	Anhang	43
A	Listen	43
A.1	Liste der Theoreme	43
A.2	Liste der benannten Sätze	44
	Index	44
	Index	45

Kapitel I

Endomorphismen

In diesem Kapitel seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, V ein n -dimensionaler K -VR und $f \in \text{End}_K(V)$ ein Endomorphismus.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Geometrie von f besser zu verstehen und Basen zu finden, für die $M_B(f)$ eine besonders einfache oder kanonische Form hat.

1. Eigenwerte

► Bemerkung 1.1

Wir erinnern uns daran, dass $\text{End}_K(V) = \text{Hom}_K(V, V)$ sowohl einen K -VR als auch einen Ring bildet. Bei der Wahl einer Basis B von V wird $f \in \text{End}_K(V)$ durch die Matrix $M_B(f) = M_B^B(f)$ beschrieben.

■ **Beispiel 1.2** $K = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}), f = f_A \in \text{End}_K(K^2)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{mit } B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ ist } M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Endomorphismus $f = f_A$ streckt also entlang der Achse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Faktor 3 und spiegelt entlang der Achse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Definition 1.3 (Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum)

Sind $0 \neq x \in V$ und $\lambda \in K$ mit $f(x) = \lambda x$ so nennt man λ einen Eigenwert von f und x einen Eigenvektor von f zum Eigenwert λ . Der Eigenraum zu $\lambda \in K$ ist $\text{Eig}(f, \lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$.

► Bemerkung 1.4

Für jedes $\lambda \in K$ ist $\text{Eig}(f, \lambda)$ ein UVR von V , da

$$\begin{aligned} \text{Eig}(f, \lambda) &= \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \\ &= \{x \in V \mid f(x) - \lambda \cdot \text{id}_V(x) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid (f - \lambda \cdot \text{id}_V)(x) = 0\} \\ &= \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_V) \end{aligned}$$

und $f - \lambda \cdot \text{id}_V \in \text{End}_K(V)$.

► Bemerkung 1.5

Achtung! Der Nullvektor ist nach Definition kein Eigenvektor, aber $\lambda = 0$ kann ein Eigenwert sein, nämlich genau dann, wenn $f \notin \text{Aut}_K(V)$, siehe Übung. Die Menge der Eigenvektoren zu λ ist also $\text{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ und λ ist genau dann ein Eigenwert von f , wenn $\text{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$.

■ **Beispiel 1.6**

Ist $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $f = f_A \in \text{End}_K(K^n)$, so sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ EW von f und jedes e_i ist ein EV zum EW λ_i .

Satz 1.7

Sei B eine Basis von V . Genau dann ist $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix, wenn B aus EV von f besteht.

Beweis. Ist $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis aus EV zu EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist $M_B(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und umgekehrt. \square

■ **Beispiel 1.8**

Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $f_\alpha \in \text{End}_K(\mathbb{R}^2)$ die Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für $\alpha = 0$ hat $f_\alpha = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW 1.

Für $\alpha = \pi$ hat $f_\alpha = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW -1.

Für $\alpha \neq 0, \pi$ hat f_α keine EW.

Lemma 1.9

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von f und ist x_i ein EV zu λ_i für $i = 1, \dots, m$, so ist (x_1, \dots, x_m) linear unabhängig.

Beweis. Induktion nach m

$m = 1$: klar, denn $x_1 \neq 0$

$m - 1 \rightarrow m$: Sei $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$ mit $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$.

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \lambda \cdot \text{id}_V) \left(\sum_{i=1}^m \mu_i x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_i (f(x_i) - \lambda_m \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i (\lambda_i - \lambda_m) \cdot x_i \end{aligned}$$

Nach IB ist $\mu_i (\lambda_i - \lambda_m) = 0$ für $i = 1, \dots, m-1$, da $\lambda_i \neq \lambda_m$ für $i \neq m$ also $\mu_i = 0$ für $i = 1, \dots, m-1$. Damit ist auch $\mu_m = 0$. Folglich ist (x_1, \dots, x_m) linear unabhängig. \square

Satz 1.10

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, so ist

$$\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i).$$

Beweis. Seien $x_i, y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, m$. Ist $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$, so ist $\sum_{i=1}^m \underbrace{x_i - y_i}_{z_i} = 0$.

o. E. seien $z_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$ und $z_i = 0$ für $i = r+1, \dots, m$. Wäre $r > 0$, so wären (z_1, \dots, z_r) linear abhängig, aber $z_i = x_i - y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$, im Widerspruch zu Lemma 1.9. Somit ist $x_i = y_i$ für alle i und folglich ist die Summe $\sum \text{Eig}(f, \lambda_i)$ direkt. \square

Definition 1.11 (EW und EV für Matrizen)

Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$. Man definiert Eigenwerte, Eigenvektoren, etc von A als Eigenwerte, Eigenvektoren von $f_A \in \text{End}_K(K^n)$.

Satz 1.12

Sei B eine Basis von V und $\lambda \in K$. Genau dann ist λ ein EW von f , wenn λ ein EW von $A = M_B(f)$ ist. Insbesondere haben ähnliche Matrizen die selben EW.

Beweis. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_A} & K^n \\ \Phi_B \downarrow & & \downarrow \Phi_B \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

denn $f_A(x) = \lambda x \iff (\Phi_B \circ f_A)(x) = \Phi_B(\lambda x) \iff f(\Phi_B(x)) = \lambda \Phi_B(x)$.

Ähnliche Matrizen beschreiben den selben Endomorphismus bezüglich verschiedener Basen, vgl. IV.4.1 □

2. Das charakteristische Polynom

Satz 2.1

Sei $\lambda \in K$. Genau dann ist λ ein EW von f , wenn $\det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = 0$.

Beweis. Da $\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$ ist λ genau dann ein EW von f , wenn $\dim_K(\text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)) > 0$, also wenn $\lambda \cdot \text{id}_V - f \notin \text{Aut}_K(V)$. Nach IV.4.6 bedeutet dies, dass $\det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = 0$ \square

Definition 2.2 (charakteristisches Polynom)

Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ ist die Determinante der Matrix $t \cdot \mathbb{1}_n - A \in \text{Mat}_n(K[t])$.

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) \in K[t]$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ ist $\chi_f(t) = \chi_{M_B(f)}(t)$, wobei B eine Basis von V ist.

Satz 2.3

Sind $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ mit $A \sim B$, so ist $\chi_A = \chi_B$. Insbesondere ist χ_f wohldefiniert.

Beweis. Ist $B = SAS^{-1}$ mit $S \in \text{GL}_n(K)$, so ist $t \cdot \mathbb{1}_n - B = S(t \cdot \mathbb{1}_n - A)S^{-1}$, also $t \cdot \mathbb{1}_n - B \sim t \cdot \mathbb{1}_n - A$ und ähnliche Matrizen haben die selben Determinante (IV.4.4).

Sind B, B' Basen von V , so sind $M_B(f) \sim M_{B'}(f)$, also $\chi_{M_B(f)} = \chi_{M_{B'}(f)}$ \square

Lemma 2.4

Für $\lambda \in K$ ist $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$.

Beweis. Sei B eine Basis von V und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Dann ist $M_B(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = \lambda \cdot \mathbb{1}_n - A$. Aus IV.2.8 und I.6.8 folgt $\det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \chi_A(\lambda) \\ &= \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) \\ &= \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) \\ &= \det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) \end{aligned} \quad \square$$

Satz 2.5

Sei $\dim_K(V) = n$ und $f \in \text{End}_K(V)$. Dann ist $\chi_f(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$ ein Polynom vom Grad n mit

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1 \\ \alpha_{n-1} &= -\text{tr}(f) \\ \alpha_0 &= (-1)^n \cdot \det(f) \end{aligned}$$

Die Nullstellen von χ_f sind genau die EW von f .

Beweis. Sei B eine Basis von V und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Wir erinnern uns daran, dass $\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Es ist $\chi_f(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (t\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$.

Der Summand für $\sigma = \text{id}$ ist $\prod_{i=1}^n (t - a_{ii}) = t^n + \sum_{i=1}^n (-a_{ii})t^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^n (-a_{ii})$

Für $\sigma \neq \text{id}$ ist $\sigma(i) \neq i$ für mindestens zwei i , der entsprechende Summand hat also Grad höchstens $n-2$. Somit haben α_n und α_{n-1} die oben behauptete Form, und $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(f)$.

Die Aussage über die Nullstellen von χ_f folgt aus Satz 2.1 und Lemma 2.4. \square

Folgerung 2.6

Ist $\dim_K(V) = n$, so hat f höchstens n Eigenwerte.

Beweis. Satz 2.5 und I.6.10 □

Definition 2.7 (normiertes Polynom)

Ein Polynom $0 \neq P \in K[t]$ mit Leitkoeffizient 1 heißt normiert.

■ Beispiel 2.8

1. Ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t - a_{ii})$, vgl. IV.2.9.c
Insbesondere ist $\chi_{1_n}(t) = (t - 1)^n$, $\chi_0(t) = t^n$
2. Für eine Blockmatrix $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen A_1, A_2 ist $\chi_A = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$
vgl. IV.2.9.e
3. Für

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad c_0, \dots, c_{n-1} \in K$$

ist $\chi_A(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$

Man nennt diese Matrix die Begleitmatrix zum normierten Polynom $P = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$ und schreibt $M_P := A$

3. Diagonalisierbarkeit

Definition 3.1 (diagonalisierbar)

Man nennt f diagonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, für die $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Lemma 3.2

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn

$$V = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

Beweis. (\Rightarrow): Ist B eine Basis aus EV von f (vgl. Satz 1.7), so ist $B \leq \bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$, also $V = \text{span}_K(\bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)) = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$.

(\Leftarrow): Ist $V = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$, so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $V = \sum_{i=1}^n \text{Eig}(f, \lambda_i)$. Wir wählen Basen B_i von $\text{Eig}(f, \lambda_i)$. Dann ist $\bigcup_{i=1}^n B_i$ ein endliches Erzeugendensystem von V , enthält also eine Basis von V (II.3.6). Diese besteht aus EV von f . \square

Satz 3.3

Ist $\dim_K(V) = n$, so hat f höchstens n Eigenwerte. Hat f genau n Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.

Beweis. Ist λ ein EW von f , so ist $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \geq 1$. Sind also $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von f , so ist

$$\begin{aligned} n = \dim_K(V) &\geq \dim_K\left(\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &\stackrel{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda_i)) \\ &\geq m \end{aligned}$$

Ist zudem $m = n$, so muss

$$\begin{aligned} \dim_K(V) &= \dim_K\left(\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \text{ sein, also} \\ V &= \sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i) \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar. \square

Definition 3.4 (a teilt b)

Sei R ein kommutativer Ring mit seien $a, b \in R$. Man sagt, a teilt b (in Zeichen $a|b$), wenn es $x \in R$ mit $b = ax$ gibt.

Definition 3.5 (Vielfachheit)

Für $0 \neq P \in K[t]$ und $\lambda \in K$ nennt man $\mu(P, \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N}_{>0} \mid (t - \lambda)^r | P\}$ die Vielfachheit der Nullstelle λ von P .

Lemma 3.6

Genau dann ist $\mu(P, \lambda) \geq 1$, wenn λ eine Nullstelle von P ist.

Beweis. (\Rightarrow) : $t - \lambda | P \Rightarrow P(t) = (t - \lambda) \cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t] \Rightarrow P(\lambda) = 0 \cdot Q(\lambda) = 0$.

(\Leftarrow) : $P(\lambda) = 0 \stackrel{1.6.9}{=} t - \lambda | P(t) \Rightarrow \mu(P, \lambda) \geq 1$. □

Lemma 3.7

Ist $P(t) = (t - \lambda)^r \cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t]$ und $Q(\lambda) \neq 0$, so ist $\mu(P, \lambda) = r$

Beweis. Offensichtlich ist $\mu(P, \lambda) \geq r$. Wäre $\mu(P, \lambda) \geq r + l$, so $(t - \lambda)^{r+l} | P(t)$ also $(t - \lambda)^r \cdot Q(t) = (t - \lambda)^{r+l} \cdot R(t)$ mit $R(t) \in K[t]$, folglich $t - \lambda | Q(t)$, insbesondere $Q(\lambda) = 0$.

(Denn wir dürfen kürzen: R ist nullteilerfrei, genau so wie $K[t]$).

$(t - \lambda)^r (Q(t) - (t - \lambda)R(t)) = 0 \Rightarrow Q(t) = (t - \lambda)R(t)$. □

Lemma 3.8

Sind $P, Q, R \in K[t]$ mit $PQ = PR$, und ist $P \neq 0$, so ist $Q = R$.

Beweis. $PQ = PR \Rightarrow P(Q - R) = 0 \stackrel{K[t] \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} Q - R = 0$, d.h. $Q = R$. □

Lemma 3.9

Es ist $\sum_{\lambda \in K} \mu(P, \lambda) \leq \deg(P)$, mit Gleichheit genau dann, wenn P in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Schreibe $P(t) = \prod_{\lambda \in K} (t - \lambda)^{r_\lambda} \cdot Q(t)$, wobei $Q(t) \in K[t]$ keine Nullstellen mehr besitzt. Nach Lemma 3.7 ist $\mu(P, \lambda) = r_\lambda$ für alle λ und somit $\deg(P) = \sum_{\lambda \in K} r_\lambda + \deg(Q) \geq \sum_{\lambda \in K} \mu(P, \lambda)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\deg(Q) = 0$, also $Q = c \in K$, d.h. genau dann, wenn $P(t) = c \cdot \prod_{\lambda \in K} (t - \lambda)^{r_\lambda}$. □

Lemma 3.10

Für $\lambda \in K$ ist

$$\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \geq \mu(x_f, \lambda)$$

Beweis. Ergänze eine Basis B von $\text{Eig}(f, \lambda)$ zu einer Basis B von V . Dann ist

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{I}_s & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $A' \in \text{Mat}_{n-s}(K)$, also $\chi_f(t) = \chi_A(t) \stackrel{\text{Beispiel 2.8}}{=} \chi_{\lambda \mathbb{I}_s} \cdot \chi_{A'}(t) = (t - \lambda)^s \cdot \chi_{A'}(t)$ und somit $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = s \leq \mu(x_f, \lambda)$. □

Satz 3.11

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt und $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = \mu(x_f, \lambda)$ für alle $\lambda \in K$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \dim_K\left(\sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)\right) &\stackrel{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)\right) \\ &\stackrel{\text{II.4.12}}{=} \sum_{\lambda \in K} \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \\ &\stackrel{\text{Lemma 3.10}}{\leq} \sum_{\lambda \in K} \mu(\chi_f, \lambda) \tag{1} \\ &\leq \deg(\chi_f) \tag{2} \\ &= n \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar, wenn $\dim_K(\sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)) = n$, also wenn bei (1) und (2) Gleichheit herrscht. Gleichheit bei (1) bedeutet $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = \mu(\chi_f, \lambda)$ für alle $\lambda \in K$, und Gleichheit bei (2) bedeutet nach Lemma 3.9, dass χ_f in Linearfaktoren zerfällt. \square

Definition 3.12 (algebraische und geometrische Vielfachheit)

Man nennt $\mu_a(f, \lambda) = \mu(\chi_f, \lambda)$ die algebraische Vielfachheit und $\mu_g(f, \lambda) = \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ von f .

► **Bemerkung 3.13**

Wieder nennt man $A \in \text{Mat}_n(K)$ diagonalisierbar, wenn $f_A \in \text{End}_K(K^n)$ diagonalisierbar ist, also wenn $A \sim D$ für eine Diagonalmatrix D .

4. Trigonalisierbarkeit

Definition 4.1

Man nennt f trigonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

■ Beispiel 4.2

Ist f diagonalisierbar, so ist f auch trigonalisierbar.

Lemma 4.3

Ist f trigonalisierbar, so zerfällt χ_f in Linearfaktoren.

Beweis. Klar aus Beispiel 2.8 und Satz 2.3. □

Definition 4.4 (invariant)

Ein Untervektorraum $W \leq V$ ist f -invariant, wenn $f(W) \leq W$.

► Bemerkung 4.5

Ist W ein f -invarianter UVR von V , so ist $f|_W \in \text{End}_K(W)$.

■ Beispiel 4.6

1. V hat stets die f -invarianten UVR $W = \{0\}$ und $W = V$.
2. Jeder UVR $W \leq \text{Eig}(f, \lambda)$ ist f -invariant.
3. Ist $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V , für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, so sind alle UVR $W_i = \text{span}_K(x_1, \dots, x_i)$ f -invariant.
4. Sei $V = W \oplus U$, $B_1 = (x_1, \dots, x_r)$ Basis von W , $B_2(x_{r+1}, \dots, x_n)$ Basis von U und $B = (x_1, \dots, x_n)$. Ist W f -invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Sind W und U f -invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(f|_U) \end{pmatrix}$$

Lemma 4.7

Ist $W \subset V$ ein f -invarianter UVR, so gilt $\chi_{f|_W} | \chi_f$. Hat W ein lineares Komplement U , dass auch f -invariant ist, so $\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$.

Beweis. Ergänze eine Basis $B_0 = (x_1, \dots, x_r)$ von W zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V . Sei $A = M_B(f)$, $A_0 = M_{B_0}(f|_W)$. Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad C \in \text{Mat}_{n-r}(K)$$

folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C$, insbesondere $\chi_{f|_W} | \chi_f$.

Ist auch $U = \text{span}_K(x_{r+1}, \dots, x_n)$ f -invariant, so ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

und folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$. □

Theorem 4.8

Genau dann ist f trigonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. (\Rightarrow): Lemma 4.3

(\Leftarrow): Induktion nach $n = \dim_K(V)$.

$n = 1$: trivial

$n - 1 \rightarrow n$: Nach Annahme ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Sei x_1 ein EV zum EW λ_1 . Dann ist $V_1 = K \cdot x_1$ ein f -invarianter UVR. Ergänze $B_1 = (x_1)$ zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V und setze $B_2 = (x_2, \dots, x_n)$, $V_2 = \text{span}_K(B_2)$. $n - 1 \rightarrow n$: Nach Annahme ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Sei x_1 ein EV zum EW λ_1 . Dann ist $V_1 = K \cdot x_1$ ein f -invarianter UVR. Ergänze $B_1 = (x_1)$ zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V und setze $B_2 = (x_2, \dots, x_n)$, $V_2 = \text{span}_K(B_2)$.

$$\Rightarrow M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad A_2 \in \text{Mat}_{n-1}(K)$$

$$\chi_f(t) = \chi_{\lambda_1 1_1} \cdot \chi_{A_2} = (t - \lambda_1) \cdot \chi_{A_2}(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Lemma 3.7}} \chi_{A_2}(t) = \prod_{i=2}^n (t - \lambda_i)$$

Seien $\pi_1, \pi_2 \in \text{End}_K(V)$ gegeben durch $M_B(\pi_1) = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ und $M_B(\pi_2) = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$. Dann ist $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}_V$ und $f_i = \pi_i \circ f$ ist $f = \text{id}_V \circ f = f_1 + f_2$ und $f_2|_{V_2} \in \text{End}_K(V_2)$. Nach Induktionshypothese ist $f_2|_{V_2}$ trigonalisierbar, da $M_B(f_2|_{V_2}) = A_2$, also $\chi_{f_2|_{V_2}} = \chi_{A_2}$. Dies bedeutet, es gibt also eine Basis $B'_2 = (x'_2, \dots, x'_n)$ von V_2 , für die $M_{B'_2}(f_2|_{V_2})$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist für $B' = (x_1, x'_2, \dots, x'_n)$ auch

$$\begin{aligned} M_{B'}(f) &= M_{B'}(f_1) + M_{B'}(f_2) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{B'_2}(f_2|_{V_2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine obere Dreiecksmatrix. □

Folgerung 4.9

Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist jedes $f \in \text{End}_K(V)$ trigonalisierbar.

Beweis. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfällt nach I.6.14 jedes Polynom über K in Linearfaktoren, insbesondere also χ_f . □

Folgerung 4.10

Ist V ein endlichdimensionaler \mathbb{C} -VR, so ist jedes $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ trigonalisierbar.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra I.6.16 ist \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen. □

5. Das Minimalpolynom

Definition 5.1

Für ein Polynom $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \in K[t]$ definieren wir $P(f) = \sum_{i=0}^n c_i f^i \in \text{End}_K(V)$, wobei $f^0 = \text{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ... Für ein Polynom $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \in K[t]$ definieren wir $P(f) = \sum_{i=0}^n c_i f^i \in \text{End}_K(V)$, wobei $f^0 = \text{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ...

Analog definiert man $P(A)$ für $A \in \text{Mat}_n(K)$.

► **Bemerkung 5.2** $\begin{cases} K[t] \rightarrow \text{End}_K(V) \\ P \mapsto P(f) \end{cases}$ ist ein Homomorphismus von K -VR und Ringen. Sein Kern ist das Ideal

$$\mathcal{I}_f := \{P \in K[t] \mid P(f) = 0\}$$

und sein Bild ist der kommutative Unterring

$$\begin{aligned} K[f] &:= \{P(f) \mid P \in K[t]\} \\ &= \text{span}_K(f^0, f^1, f^2, \dots) \end{aligned}$$

des (im Allgemeinen nicht kommutativen) Rings $\text{End}_K(V)$.

Analog definiert man \mathcal{I}_A und $K[A] \leq \text{Mat}_n(K)$.

Lemma 5.3

$\mathcal{I}_f \neq \{0\}$

Beweis. Wäre $\mathcal{I}_f = \{0\}$, so wäre $K[t] \rightarrow \text{End}_K(V)$ injektiv, aber $\dim_K(K[t]) = \infty > n^2 = \dim_K(\text{End}_K(V))$, ein Widerspruch. \square

Satz 5.4

Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$. Dieses teilt jedes $Q \in K[t]$ mit $Q(f) = 0$.

Beweis. Nach Lemma 5.3 gibt es $0 \neq P \in K[t]$ mit $P(f) = 0$ von minimalem Grad d . Indem wir durch den Leitkoeffizienten von P teilen, können wir annehmen, dass P normiert ist.

Sei $Q \in \mathcal{I}_f$. Polynomdivision liefert $R, H \in K[t]$ mit $Q = P \cdot H + R$ und $\deg(R) < \deg(P) = d$. Es folgt $R(f) = \underbrace{Q(f)}_{=0} - \underbrace{P(f) \cdot H(f)}_{=0} = 0$. Aus der Minimalität von d folgt $R = 0$ und somit $P \mid Q$.

Ist Q zudem normiert vom Grad d , so ist $H = 1$, also $Q = P$, was die Eindeutigkeit zeigt. \square

Definition 5.5 (Minimalpolynom)

Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$ nennt man das Minimalpolynom P_f von f .

Analog definiert man das Minimalpolynom $P_A \in K[t]$ einer Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$.

■ Beispiel 5.6

1. $A = \mathbb{1}_n$, $\chi_A(t) = (t-1)^n$, $P_A(t) = t-1$
2. $A = 0$, $\chi_A(t) = t^n$, $P_A(t) = t$
3. Ist $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t-a_i) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)^{\mu_a(f_A, \lambda_i)}$, $P_A(t) = \prod_{i=1}^r (t-\lambda_i)$ und es folgt $\deg(P_A) \geq |\{a_1, \dots, a_n\}| = r$.

Definition 5.7 (f -zyklisch)

Ein f -invarianter UVR $W \leq V$ heißt f -zyklisch, wenn es ein $x \in W$ mit $W = \text{span}_K(x, f(x), f^2(x), \dots)$ gibt.

Lemma 5.8

Sei $x \in V$ und $x_i = f^i(x)$. Es gibt ein kleinstes k mit $x_k \in \text{span}_K(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$, und $W = \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$ ein f -zyklischer UVR von V mit Basis $B = (x_0, \dots, x_{k-1})$ und $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$.

Beweis. Da $\dim_K(V) = n$ ist (x_0, \dots, x_n) linear abhängig, es gibt also ein kleinstes k mit (x_0, \dots, x_{k-1}) linear unabhängig, aber (x_0, \dots, x_k) linear abhängig, folglich $x_k \in \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$. Mit $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ ist dann Da $\dim_K(V) = n$ ist (x_0, \dots, x_n) linear abhängig, es gibt also ein kleinstes k mit (x_0, \dots, x_{k-1}) linear unabhängig, aber (x_0, \dots, x_k) linear abhängig, folglich $x_k \in \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$. Mit $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ ist dann

$$M_B(f|_W) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

somit $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$. □

Theorem 5.9 (Satz von CAYLEY-HAMILTON)

Für $f \in \text{End}_K(V)$ ist $\chi_f(f) = 0$.

Beweis. Sei $x \in V$. Definiere $x_i = f^i(x)$ und $W = \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$ wie in Lemma 5.8. Sei $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$. Wenden wir $\chi_{f|_W}(f) \in \text{End}_K(V)$ auf x an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_{f|_W}(f)(x) &= \left(f^k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i f^i \right) (x) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} -c_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aus $\chi_{f|_W}|_{\chi_f}$ (Beispiel 4.6) folgt somit $\chi_f(f)(x) = 0$, denn ist $\chi_f = Q \cdot \chi_{f|_W}$ mit $Q \in K[t]$, so ist $\chi_f(f) = Q(f) \circ \chi_{f|_W}(f)$, also $\chi_f(f)(x) = Q(f)(\underbrace{\chi_{f|_W}(f)(x)}_{=0}) = 0$. Da $x \in V$ beliebig war, folgt $\chi_f(f) = 0 \in \text{End}_K(V)$. □

Folgerung 5.10

Es gilt $P_f|_{\chi_f}$. Insbesondere ist $\deg(P_f) \leq n$.

Beweis. Theorem 5.9 + Satz 5.4 □

► Bemerkung 5.11

Ist B eine Basis von V und $A = M_B(f)$, so ist $P_A = P_f$. Insbesondere ist $P_A = P_B$ für $A \sim B$. Als Spezialfall von Theorem 5.9 erhält man $\chi_A(A) = 0$ und $P_A|_{\chi_A}$.

► **Bemerkung 5.12**

Der naheliegende “Beweis“ $\underbrace{\chi_A}_{\in \text{Mat}_n(K)} = \det(t\mathbb{1}_n - A)(A) = \det(A\mathbb{1}_n - A) = \det(0) = \underbrace{0}_{\in K}$ ist falsch!

6. Nilpotente Endomorphismen

► Bemerkung 6.1

Für $f \in \text{End}_K(V)$ sind

- $f\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subseteq \text{Ker}(f^1) \subseteq \text{Ker}(f^2) \subseteq \dots$
- $V = \text{Im}(f^0) \supseteq \text{Im}(f^1) \supseteq \text{Im}(f^2) \supseteq \dots$

Folgen von UVR von V . Nach der Kern-Bild-Formel III.7.13 ist

$$\dim_K(\text{Ker}(f^i)) + \dim_K(\text{Im}(f^i)) = \dim_K(V) \quad \forall i$$

Da $\dim_K(V) = n < \infty$ gibt es ein d mit $\text{Ker}(f^d) = \text{Ker}(f^{d+i})$ und $\text{Im}(f^d) = \text{Im}(f^{d+i})$ für jedes $i \geq 0$.

■ Beispiel 6.2

$f = f_A$, $A \in \text{Mat}_2(K)$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \text{Ker}(f^0) = \text{Ker}(f^1) = \dots$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = \text{span}_K(e_2)$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \underbrace{\text{Ker}(f^1)}_{=\text{span}_K(e_1)} \subset \text{Ker}(f^2) = \dots = K^2$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = K^2$

Lemma 6.3

Seien $f, g \in \text{End}_K(V)$. Wenn f und g kommutieren, d.h. $f \circ g = g \circ f$, so sind die UVR $\text{Ker}(g)$ und $\text{Im}(g)$ f invariant.

Beweis. Ist $x \in \text{Ker}(f)$, so ist $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$, also $f(x) \in \text{Ker}(g)$. Für $g(x) \in \text{Im}(g)$ ist $f(g(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$. \square

Satz 6.4 (Lemma von FITTING)

Seien $V_i = \text{Ker}(f^i)$, $W_i = \text{Im}(f^i)$, $d = \min\{i : V_i = V_{i+1}\}$. Dann sind

$$\begin{aligned} \{0\} &= V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_d = V_{d+1} = \dots \\ V &= W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \dots \supsetneq W_d = W_{d+1} = \dots \end{aligned}$$

Folgen f -invarianter UVR und $V = V_d \oplus W_d$.

Beweis. Da f^i und f^j für beliebige i, j kommutieren, sind V_i und V_j nach Lemma 6.3 f -invariant für jedes i . Aus $\dim_K(V_i) + \dim_K(W_i) = n$ folgt $d = \min\{i : W_i = W_{i+1}\}$, insbesondere ist $\text{Im}(f^d) = \text{Im}(f^{d+1}) = f(\text{Im}(f^d))$, somit $W_{d+i} = \text{Im}(f^{d+i}) = W_d$ für $i \geq 0$, also auch $V_d = V_{d+i}$ für alle $i \geq 0$. Insbesondere ist $f^d|_{W_d} : W_d \rightarrow W_{2d} = W_d$ surjektiv, also auch injektiv, also $V_d \cap W_d = \{0\}$. Aus der Dimensionsformel II.4.12 folgt dann $\dim_K(V_d + W_d) = \dim_K(V_d) + \dim_K(W_d) = \dim_K(V)$. Folglich ist $V_d + W_d = V$ und $V_d \cap W_d = \{0\}$, also $V = V_d \oplus W_d$. \square

Definition 6.5 (nilpotent)

Ein $f \in \text{End}_K(V)$ heißt nilpotent, wenn $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Analog heißt $A \in \text{Mat}_n(K)$ nilpotent, wenn $A^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Das kleinste k mit $f^k = 0$ bzw. A^k heißt die Nilpotenzklasse von f bzw. A .

Lemma 6.6

Ist f nilpotent, so gibt es eine Basis B von V , für die $M_B(f)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Induktion nach $n = \dim_K(V)$.

$n = 1$: $f^k = 0 \Rightarrow f = 0$

$n > 1$: Sei k die Nilpotenzklasse von f und $U = \text{Ker}(f^{k-1})$. Dann ist $U \subset V$. Da $f^k = f^{k-1} \circ f$ ist $f(V) \subset U$, insbesondere $f|_U \in \text{End}_K(U)$. Da $f|_U$ nilpotent ist, gibt es nach I.H. eine Basis B_0 von U , für die $M_{B_0}(f|_U)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Ergänze B_0 zu einer Basis B von V . Da $f(V) \subset U$ ist dann auch

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(f|_U) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix. □

Satz 6.7

Für $f \in \text{End}_K(V)$ sind äquivalent:

- 1) f ist nilpotent
- 2) $f^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$
- 3) $P_f(t) = t^r$ für ein $r \leq n$
- 4) $\chi_f(t) = t^n$
- 5) Es gibt eine Basis B von V , mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis.

- 1) \Rightarrow 5): Lemma 6.6
- 5) \Rightarrow 4): Beispiel 2.8
- 4) \Rightarrow 3): Nach Folgerung 5.10 ist $P_f|_{\chi_f} = t^n$, also $t^n = P_f(t)Q(t)$ mit $Q \in K[t]$. Schreibe $P_f(t) = t^a \cdot P_1(t)$, $Q(t) = t^b \cdot Q_1(t)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, $P_1, Q_1 \in K[t]$, $P_1(0) \neq 0$, $Q_1(0) \neq 0$
 $\xRightarrow{\text{Lemma 3.8}} t^{n-(a+b)} = P_1(t)Q_1(t)$ und $(P_1Q_1)(0) \neq 0$
 $\Rightarrow n - (a+b) = 0 \Rightarrow P_1 = 1$, somit $P_f(t) = t^a$
- 3) \Rightarrow 2): $t^r = 0$, $r \leq n \Rightarrow f^n = 0$
- 2) \Rightarrow 1): nach Definition □

Folgerung 6.8

Die Nilpotenzklasse eines nilpotenten Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ ist höchstens $\dim_K(V)$.

Folgerung 6.9

Ist $d := \min\{i \mid \text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})\}$, so ist $d \leq \dim_K(\text{Ker}(f)) = \mu_a(f, 0)$.

Beweis. Sei $V_d = \text{Ker}(f^d)$, $W_d = \text{Im}(f^d)$, $k = \dim_K(V_d)$. Da $V = V_d \oplus W_d$ ist $\chi_f = \chi_{f|_{V_d}} \cdot \chi_{f|_{W_d}}$. Da $f|_{V_d}$ nilpotent ist, ist $\chi_{f|_{V_d}} = t$ nach Satz 6.7. Da $f|_{W_d}$ injektiv ist, ist $\chi_{f|_{W_d}}(0) \neq 0$. Somit ist $\mu_a(f, 0) = \mu(\chi_f, 0) \stackrel{\text{Lemma 3.6}}{=} k$. Da $\dim_K(\text{Ker}(f^d)) > \dots > \dim_K(\text{Ker}(f)) > 0$ ist $k = \dim_K(\text{Ker}(f^d)) \geq d$, falls $d > 0$, sonst klar. \square

► **Bemerkung 6.10**

Die Bedeutung nilpotenter Endomorphismen beim Finden geeigneter Basen ergibt sich aus der folgenden Beobachtung:

Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so ist $A = D + N$, wobei D eine Diagonalmatrix ist und N eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Anders gesagt: Jeder trigonalisierbare Endomorphismus ist Summe aus einem diagonalisierbaren und einem nilpotenten Endomorphismus.

Definition 6.11 (JORDAN-Matrix)

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die JORDAN-Matrix

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_k(K)$$

weiter setzen wir für $\lambda \in K$ $J_k(\lambda) := \lambda \mathbb{1} + J_k$.

Lemma 6.12

Die JORDAN-Matrix J_k ist nilpotent von Nilpotenzklasse k .

Beweis. Es ist $(J_k)^r = (\delta_{i+r,j})_{i,j}$ für $r \geq 1$. \square

Satz 6.13

Ist f nilpotent von Nilpotenzklasse k , so gibt es eindeutig bestimmte $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\sum_{d=1}^k dr_d = n$ und eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \text{diag}(\underbrace{J_k, \dots, J_k}_{r_k \text{ viele}}, \dots, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{r_1 \text{ viele}})$$

Beweis. Sei $U_i = \text{Ker}(f^i)$. Nach Satz 6.4 haben wir eine Folge $\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_k = V$ mit $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$ für alle $i > 0$.

Wir konstruieren eine Zerlegung $V = \bigoplus_{d=1}^k W_d$ mit $U_i = U_{i-1} \oplus W_i$, $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$, $f|_{W_d}$ injektiv für $i > 1$.

$$\begin{aligned} V &= U_k \\ V &= U_{k-1} \oplus W_k \\ V &= U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k \\ &\vdots \\ V &= U_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k \end{aligned}$$

Wähle W_k mit $V = U_k = U_{k-1} \oplus W_k$. Ist $k > 1$, so ist $W_k \cap \text{Ker}(f) \subseteq W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$, also $f|_{W_k}$ injektiv. Des weiteren ist $f(W_k) \subseteq U_{k-1}$ und aus $W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$ folgt $f(W_k) \cap U_{k-2} = \{0\}$. Wir können deshalb W_{k-1} mit $U_{k-1} = U_{k-2} \oplus W_{k-1}$ und $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$ wählen. Somit ist $V = U_{k-1} \oplus W_k = U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k$. Wir setzen dies fort und erhalten $V = U_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ mit $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$ und $f|_{W_i}$ injektiv für $i > 1$, wobei $U_0 = \{0\}$ und $W_1 = \text{Ker}(f)$.

Sie $r_d = \dim_K(W_d) - \dim_K(W_{d+1})$, wobei wir $W_{k+1} = \{0\}$. Wähle nun eine Basis $(x_{k,1}, \dots, x_{k,r_k})$ von W_k . Ist $k > 1$, so ist $f|_{W_k}$ injektiv und wir können $(f(x_{k,1}), \dots, f(x_{k,r_k}))$ durch Elemente $x_{k-1,1}, \dots, x_{k-1,r_{k-1}}$ zu einer Basis von W_{k-1} ergänzen, und so weiter.

Da $V = \bigoplus_{d=1}^k W_d$ ist

$$B = \{f^i(x_{d,j}) \mid d = 1, \dots, k, j = 1, \dots, r_d, i = 0, \dots, d-1\}$$

eine Basis von V , die bei geeigneter Anordnung das Gewünschte leistet.

Es bleibt zu zeigen, dass r_1, \dots, r_k eindeutig bestimmt sind. Ist B_0 eine Basis, für die $M_{B_0}(f)$ in der gewünschten Form ist, so ist

$$\begin{aligned} \dim_K(U_1) &= \sum_{d=1}^k r_d \\ \dim_K(U_2) &= \sum_{d=2}^k r_d + \sum_{d=1}^k r_d \\ &\vdots \\ \dim_K(U_k) &= \sum_{d=k}^k r_d + \dots + \sum_{d=1}^k r_d \end{aligned}$$

woraus man sieht, dass r_1, \dots, r_k durch U_1, \dots, U_k , also durch f eindeutig bestimmt. □

■ **Beispiel 6.14**

Sei $f = f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

$\Rightarrow k = 3, U_0 = \{0\}, U_1 = \mathbb{R}e_1, U_2 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2, U_3 = V$.

Wähle W_3 mit $V = U_3 = U_2 \oplus W_3$, z.B. $W_3 = \mathbb{R}e_3$.

Wähle W_2 mit $U_2 = U_1 \oplus W_2$ und $f(W_3) \subseteq W_2$, also

$$W_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze $W_1 = U_1 = \text{Ker}(f) = \mathbb{R}e_1 \Rightarrow \text{Basis } B = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

7. Die JORDAN-Normalform

Definition 7.1 (Hauptraum)

Der Hauptraum von f zum EW λ der Vielfachheit $r = \mu_a(f, \lambda)$ ist

$$\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Ker} \left((f - \lambda \text{id}_V)^r \right)$$

Lemma 7.2

$\text{Hau}(f, \lambda)$ ist ein f -invarianter UVR der Dimension $\dim_K(\text{Hau}(f, \lambda)) = \mu_a(f, \lambda)$, auf dem $f - \lambda \text{id}_V$ nilpotent ist und $\chi_{f|_{\text{Hau}(f, \lambda)}} = (t - \lambda)^{\mu_a(f, \lambda)}$

Beweis. f kommutiert sowohl mit f als auch mit id_V , somit auch mit $(f - \lambda \text{id}_V)^r$. Die f -Invarianz von $U = \text{Hau}(f, \lambda)$ folgt aus Lemma 6.3. Nach Folgerung 6.9 ist $\dim_K(U) = \mu_a(f - \lambda \text{id}_V, 0)$ und da $\chi_f(t) = \chi_{f - \lambda \text{id}_V}(t - \lambda)$ ist $\mu_a(f, \lambda) = \mu(\chi_f, \lambda) = \mu_a(f - \lambda \text{id}_V, 0)$. Da $f - \lambda \text{id}_V|_U$ nilpotent ist $\chi_{f - \lambda \text{id}_V|_U}(t) = t^r$, somit $\chi_{f|_U}(t) = (t - \lambda)^r$. \square

Satz 7.3 (Hauptraumzerlegung)

Ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ paarweise verschieden und $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$, so ist $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ mit $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$ eine Zerlegung in f -invariante UVR und für jedes i ist $\chi_{f|_{V_i}}(t) = (t - \lambda_i)^{r_i}$.

Beweis. Induktion nach m .

$\underline{m=1}$: $r_1 = n \xrightarrow{\text{Lemma 7.2}} V = V_1$.

$\underline{m-1 \rightarrow m}$: Nach Satz 6.4 ist $V = V_1 \oplus W_1$ mit $W_1 = \text{Im}((f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1})$ eine Zerlegung in f -invariante UVR mit $\dim_K(V_1) = r_1$, $\dim_K(W_1) = n - r_1$. Somit ist $\chi_f = \chi_{f|_{V_1}} \cdot \chi_{f|_{W_1}}$ und $\chi_{f|_{V_1}} \stackrel{\text{Lemma 7.2}}{=} (t - \lambda_1)^{r_1}$ also $\chi_{f|_{W_1}} = \prod_{i=2}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$. Nach I.H. ist also $W_1 = \bigoplus_{i=2}^m \text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)$. Es ist für $i \geq 2$ $\text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i) \subseteq \text{Hau}(f, \lambda_i) = V_i$ und da $\dim_K(\text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)) = r_i = \dim_K(\text{Hau}(f, \lambda_i))$ gilt Gleichheit. Damit ist

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus W_1 \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m \text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i) \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m V_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^m V_i \end{aligned} \quad \square$$

■ Beispiel 7.4

$f = f_A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$$

$$\chi_A(t) = (t - 1)^2(t - 2) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \underbrace{\text{Hau}(f, 1)}_{\dim=2} \oplus \underbrace{\text{Hau}(f, 2)}_{\dim=1}$$

$$\text{Hau}(f, 1) = \text{Ker}((f - \text{id})^2) = L((A - \mathbb{1})^2, 0)$$

$$\text{Hau}(f, 2) = \text{Ker}(f - 2 \text{id}) = \text{Eig}(f, 2) = L(A - 2\mathbb{1}, 0)$$

$$A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix}, (A - \mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 12 & \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hau}(f, 1) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$$

$$A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hau}(f, 2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit } B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ ist}$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Theorem 7.5 (JORDAN-Normalform)

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom χ_f in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$ und $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^r k_i = \dim_K(V)$ und eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \text{diag}(J_{k_1}(\mu_1), \dots, J_{k_r}(\mu_r))$$

Die Paare $(\mu_1, k_1), \dots, (\mu_r, k_r)$ heißen die JORDAN-Invarianten von f und sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Beweis. Schreibe $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, $r_i \in \mathbb{N}$. Sei $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$. Nach Satz 7.3 ist $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ eine Zerlegung in f -invariante UVR. Für jedes i wenden wir Satz 6.13 auf $(f - \lambda_i \text{id}_V)|_{V_i}$ an und erhalten eine Basis B_i von V_i und $k_{i,1} \geq \dots \geq k_{i,s_i}$ mit

$$M_B((f - \lambda_i \text{id})|_{V_i}) = \text{diag}(J_{k_{i,1}}, \dots, J_{k_{i,s_i}})$$

Es folgt $M_{B_i}(f|_{V_i}) = M_{B_i}(\lambda_i \text{id}_{V_i}) + M_{B_i}((f - \lambda_i \text{id}_V)|_{V_i})$. Ist nun B die Vereinigung der B_i , so hat $M_B(f)$ die gewünschte Form. Die Eindeutigkeit der JORDAN-Invarianten folgt aus der Eindeutigkeit der $k_{i,j}$ in Lemma 6.3. \square

► Bemerkung 7.6

Ist K algebraisch abgeschlossen, so haben wir nun eine (bis auf Permutationen) eindeutige Normalform für Endomorphismen $f \in \text{End}_K(V)$ gefunden. Aus ihr lassen sich viele Eigenschaften des Endomorphismus leicht ablesen.

Folgerung 7.7

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ trigonalisierbar mit $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f, \lambda_i)}$, $P_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{d_i}$ und JORDAN-Invarianten $(\mu_1, k_1), \dots, (\mu_r, k_r)$. Mit $J_i = \{j \mid \mu_j = \lambda_i\}$ ist dann

$$\begin{aligned} \mu_g(f, \lambda_i) &= |J_i| \\ \mu_a(f, \lambda_i) &= \sum_{j \in J_i} k_j \\ d_i &= \max\{k_j \mid j \in J_i\} \end{aligned}$$

Beweis. • μ_a : klar, da $\chi_f(t) = \prod_{j=1}^r (t - \mu_j)^{k_j} = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f, \lambda_i)}$

• μ_g : lese Basis von $\text{Eig}(f, \lambda_i)$ aus JORDAN-NF: Jeder Block $J_{k_j}(\lambda_i)$ liefert ein Element der Basis.

- d_i : folgt, da J_{k_j} nilpotent von Nilpotenzklasse k_j ist (Lemma 6.12). □

Folgerung 7.8

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ paarweise verschieden und}$$

$$P_f(t) = \prod_{i=1}^m m(t - \lambda_i)$$

Beweis. Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn f trigonalisierbar ist und die JORDAN-NF die Diagonalmatrix ist (Eindeutigkeit der JNF), also $k_j = 1$ für alle j . Nach Folgerung 7.7 ist dies äquivalent dazu, dass $d_i = 1$ für alle i , also $P_f = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)$. □

► Bemerkung 7.9

Wider definiert man die JORDAN-Invarianten, etc. von einer Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ als die JORDAN-Invarianten von $f_A \in \text{End}_K(K^n)$.

Folgerung 7.10

Seien $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ trigonalisierbar. Genau dann ist $A \sim B$, wenn A und B die gleichen JORDAN-Invarianten haben.

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit der JORDAN-Normalform. □

Kapitel II

Skalarprodukte

In diesem ganzen Kapitel seien

- $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$
- $n \in \mathbb{N}$
- V ein n -dimensionaler K -VR

1. Das Standardskalarprodukt

Sei zunächst $K = \mathbb{R}$.

Definition 1.1 (Standardskalarprodukt in \mathbb{R})

Auf den Standardraum $V = \mathbb{R}^n$ definiert man das Standardskalarprodukt in \mathbb{R} $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Satz 1.2

Das Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Beweis. • klar

- klar

- $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq x_j^2$ für jedes $j \Rightarrow \langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle > 0$ falls $x_j \neq 0$ für ein j . □

Definition 1.3 (euklidische Norm in \mathbb{R})

Auf $K = \mathbb{R}^n$ definiert man euklidische Norm in \mathbb{R} $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Satz 1.4 (Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ)Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.*Beweis.* siehe Analysis, siehe VI.§3 □**Satz 1.5**

Die euklidische Norm erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beweis. • Satz 1.2

- Satz 1.2
- $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \xrightarrow{\text{Satz 1.4}} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ □

Sei nun $K = \mathbb{C}$.**Definition 1.6 (komplexe Konjugation, Absolutbetrag)**Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiert man $\bar{z} = x - iy$ heißt komplexe Konjugation. Man definiert den Absolutbetrag von z als

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$ sehen wir

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$$

Satz 1.7Komplexe Konjugation ist ein Ringautomorphismus von \mathbb{C} mit Fixkörper

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\} = \mathbb{R}$$

Beweis. siehe LAAG1 H47 □**Folgerung 1.8**Für $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ist $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, $\overline{A^t} = \bar{A}^t$, $\overline{S^{-1}} = \bar{S}^{-1}$ *Beweis.* Satz 1.7, einfache Übung □**Definition 1.9 (Standardskalarprodukt in \mathbb{C})**Auf $K = \mathbb{C}^n$ definiert man das Standardskalarprodukt in \mathbb{C} $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

Satz 1.10

Das komplexe Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x, x', y, y' \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

- Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- Für $x \in \mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Beweis. • klar

- klar

- $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$

□

Definition 1.11 (euklidische Norm in \mathbb{C})

Auf $V = \mathbb{C}$ definiert man die euklidische Norm in \mathbb{C} $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

► Bemerkung 1.12

Schränkt man das komplexe Skalarprodukt auf den \mathbb{R}^n ein, so erhält man das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n . Wir werden ab jetzt die beiden Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ parallel behandeln. Wenn nicht anders angegeben, werden wir die Begriffe für den komplexen Fall benutzen, aber auch den reellen Fall einschließen.

2. Bilinearformen und Sesquilinearformen

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition 2.1 (Bilinearform, Sesquilinearform)

Eine Bilinearform ($K = \mathbb{R}$) bzw. Sesquilinearform ($K = \mathbb{C}$) ist eine Abbildung $s : V \times V \rightarrow K$ für die gilt:

- Für $x, x', y \in V$ ist $s(x + x', y) = s(x, y) + s(x', y)$
- Für $x, y, y' \in V$ ist $s(x, y + y') = s(x, y) + s(x, y')$
- Für $x, y \in V, \lambda \in K$ ist $s(\lambda x, y) = \lambda s(x, y)$
- Für $x, y \in V, \lambda \in K$ ist $s(x, \lambda y) = \overline{\lambda} s(x, y)$

► Bemerkung 2.2

Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist $\lambda = \overline{\lambda}$. Wir werden der Einfachheit halber auch in diesem Fall von Sesquilinearformen sprechen, vgl. Bemerkung 1.12

■ Beispiel 2.3

Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_n(K)$ ist $s_A : K^n \times K^n \rightarrow K^n$ gegeben durch

$$s_A(x, y) = x^t A \bar{y} = x^t \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{y}_j \right)_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \bar{y}_j$$

eine Sesquilinearform auf $V = K^n$.

Definition 2.4

Sei s eine Sesquilinearform auf V und $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Die darstellende Matrix von s bzgl. B ist

$$M_B(s) = (s(v_i, v_j))_{i,j} \in \text{Mat}_n(K)$$

■ Beispiel 2.5

Die darstellende Matrix des Standardskalarprodukts $s = s_{\mathbb{1}_n}$ auf den Standardraum $V = K^n$ bzgl. der Standardbasis \mathcal{E} ist

$$M_{\mathcal{E}}(s) = \mathbb{1}_n$$

Lemma 2.6

Seien $v, w \in V$. Mit $x = \Phi_B^{-1}(v)$, $y = \Phi_B^{-1}(w)$ und $A = M_B(s)$ ist $s(v, w) = x^t A \bar{y} = s_A(x, y)$.

Beweis. Achtung: v_i beschreibt das i -te Element der Basis B !
 $s(v, w) = s(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j s(v_i, v_j) = x^t A \bar{y}$ □

Satz 2.7

Sei B eine Basis von V . Die Abbildung $s \mapsto M_B(s)$ ist eine Bijektion zwischen den Sesquilinearformen auf V und $\text{Mat}_n(K)$.

Beweis. • injektiv: Lemma 2.6

- surjektiv: Für $A \in \text{Mat}_n(K)$ wird durch $s(v, w) = \Phi_B^{-1}(v)^t \cdot A \cdot \overline{\Phi_B^{-1}(w)}$ eine Sesquilinearform auf V mit $M_B(s) = (s(v_i, w_j))_{i,j} = (e_i^t A \bar{e}_j)_{i,j} = (e_i A e_j)_{i,j} = A$ definiert. □

Satz 2.8 (Transformationsformel)

Seien B und B' Basen von V und s eine Sesquilinearform auf V . Dann gilt:

$$M_{B'}(s) = (T_B^{B'})^t \cdot M_B(s) \cdot \overline{T_B^{B'}}$$

Beweis. Seien $v, w \in V$. Definiere $A = M_B(s)$, $A' = M_{B'}(s)$, $T = T_B^{B'}$ und $x, y, x', y' \in K^n$ mit $v = \Phi_B(x) = \Phi_B(x')$, $w = \Phi_B(y) = \Phi_B(y')$. Dann ist $x = Tx'$, $y = Ty'$ und somit

$$\begin{aligned} (x')^t A' \overline{y'} &\stackrel{\text{Lemma 2.6}}{=} s(v, w) \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.6}}{=} x^t A \overline{y} \\ &= (Tx')^t A \overline{Ty'} \\ &= (x')^t T^t A \overline{T y'} \end{aligned}$$

Da $v, w \in V$ und somit $x', y' \in K$ beliebig waren, folgt $A = T^t A \overline{T}$. □

■ Beispiel 2.9

Sei s das Standardskalarprodukt auf dem K^n und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis des K^n . Dann ist

$$M_B(s) = (T_{\mathcal{E}}^B)^t \cdot M_{\mathcal{E}}(s) \cdot \overline{T_{\mathcal{E}}^B} = B^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{B} = B^t B$$

wobei $B = (b_1, \dots, b_n) \in \text{Mat}_n(K)$.

Satz 2.10

Sei s eine Sesquilinearform auf V . Dann sind äquivalent:

- Es gibt $0 \neq v \in V$ mit $s(v, w) = 0$ für alle $w \in V$.
- Es gibt $0 \neq w \in V$ mit $s(v, w) = 0$ für alle $v \in V$.
- Es gibt eine Basis B von V mit $\det(M_B(s)) = 0$.
- Für jede Basis B von V gilt $\det(M_B(s)) = 0$.

Beweis. Sei B eine Basis von V , $v = \Phi_B(x)$ und $A = M_B(s)$. Genau dann ist die (semilineare) Abbildung $w \mapsto s(v, w)$ die Nullabbildung, wenn $x^t A \overline{y} = 0$ für alle $y \in K^n$, also wenn $0 = x^t A$, d.h. $A^t x = 0$. Somit ist (1) genau dann erfüllt, wenn A^t nicht invertierbar ist, also wenn $0 = \det(A^t) = \det(A)$. Damit $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ gezeigt und $(2) \iff (4)$ zeigt man analog. □

Definition 2.11 (ausgeartet)

Eine Sesquilinearform s auf V heißt ausgeartet, wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 2.10 erfüllt ist, sonst nicht-ausgeartet.

Definition 2.12 (symmetrisch, hermitesch)

Eine Sesquilinearform s auf V heißt symmetrisch, wenn bzw. hermitesch, wenn

$$s(x, y) = \overline{s(y, x)} \quad \text{für alle } x, y \in V$$

Eine Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ heißt symmetrisch bzw. hermitesch, wenn $A = A^* = \overline{A}^t = \overline{A^t}$.

Satz 2.13

Sei s eine Sesquilinearform auf V und B eine Basis von V . Genau dann ist s hermitesch, wenn $M_B(s)$ dies ist.

Beweis. (\Rightarrow) : klar aus Definition von $M_B(s)$.

$$(\Leftarrow): x = \Phi_B^{-1}, y = \Phi_B^{-1}(w), \overline{s(v, w)} = \overline{s(v, w)}^t = \overline{(x^t A \bar{y})}^t = y^t \overline{A^t x} = s(w, v) \quad \square$$

Satz 2.14

Für $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ und $S \in \text{GL}_n(K)$ ist $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$, $(A^*)^* = A$ und $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$.

Beweis. Folgerung [1.8](#), III.1.14, III.1.15 □

3. Euklidische und unitäre Vektorräume

Lemma 3.1

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V . Dann ist $s(x, x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$.

Beweis. Da s hermitesch ist, ist $s(x, x) = \overline{s(x, x)}$, also $s(x, x) \in \mathbb{R}$. □

Definition 3.2 (quadratische Form)

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V . Die quadratische Form zu s ist die Abbildung

$$q_s : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto s(x, x) \end{cases}$$

► Bemerkung 3.3

Die quadratische Form q_s erfüllt das $q_s(\lambda x) = |\lambda|^2 \cdot q_s(x)$ für alle $x \in V$, $\lambda \in K$. Im Fall $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^t$, $s = s_A$, $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist $q_s(x) = s_A(x, x) = x^t A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ein “quadratisches Polynom in den Variablen x_1, \dots, x_n ”.

Satz 3.4 (Polarisierung)

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V . Dann gilt für $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{1}{2}(q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y)) \quad K = \mathbb{R} \\ s(x, y) &= \frac{1}{4}(q_s(x+y) - q_s(x-y) + iq_s(x+iy) - iq_s(x-iy)) \quad K = \mathbb{C} \end{aligned}$$

Beweis. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y) &= s(x+y, x+y) - s(x, x) - s(y, y) \\ &= s(x, x) + s(x, y) + s(y, x) + s(y, y) - s(x, x) - s(y, y) \\ &= s(x, y) + s(y, x) = 2s(x, y) \end{aligned}$$

Im Fall $K = \mathbb{C}$: ÜA □

Definition 3.5 ((semi)definit, euklidischer VR, unitärer VR)

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V . Ist $s(x, x) \geq 0$ für alle $x \in V$, so heißt s positiv semidefinit. Ist $s(x, x) > 0$ für alle $0 \neq x \in V$, so heißt s positiv definit (oder ein Skalarprodukt).

Eine hermitesche Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ heißt positiv (semi)definit, wenn s_A dies ist.

Einen endlichdimensionalen K -VR zusammen mit positiv definiten hermiteschen Sesquilinearformen nennt man einen euklidischen bzw. unitären VR (oder auch Prähilbertraum). Wenn nicht anderes angegeben, notieren wir die Sesquilinearform mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

■ Beispiel 3.6

Der Standardraum $V = K^n$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt ist ein euklidischer bzw. unitärer VR.

■ Beispiel 3.7

Ist $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so ist s_A genau dann positiv definit, wenn $\lambda_i > 0$ für alle i , und positiv semidefinit, wenn $\lambda_i \geq 0$ für alle i .

Satz 3.8

Ist V ein unitärer VR und $U \subseteq V$ ein UVR, so ist U mit der Einschränkung des Skalarprodukts wieder ein unitärer VR.

Beweis. klar, die Einschränkung ist wieder positiv definit. \square

Definition 3.9

Ist V ein unitärer VR, so definiert man die Norm von $x \in V$ als

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Satz 3.10

Die Norm eines unitären VR erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in V$ ist $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für $x \in V$ und $\lambda \in K$ ist $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für $x, y \in V$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beweis. • Das Skalarprodukt ist positiv definit.

- klar
- Wie im Fall im \mathbb{R}^n

\square

Satz 3.11

Ist V ein unitärer VR, so gilt für $x, y \in V$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Für $y = 0$ ist die Aussage klar.

Sei also $y \neq 0$. Für $\lambda, \mu \in K$ ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y \rangle \\ &= \lambda \bar{\lambda} \cdot \langle x, x \rangle + \mu \bar{\mu} \cdot \langle y, y \rangle + \lambda \bar{\mu} \cdot \langle x, y \rangle + \mu \bar{\lambda} \cdot \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

Setzt man $\lambda = \bar{\lambda} = \langle y, y \rangle > 0$ und $\mu = -\langle x, y \rangle$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \cdot \|x\|^2 \|y\|^2 + \mu \bar{\mu} \lambda - \lambda \mu \bar{\mu} - \langle x, y \rangle \bar{\lambda} \langle y, x \rangle \\ &= \lambda (\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2) \end{aligned}$$

Teilen durch λ und Wurzelziehen liefert die Ungleichung. Gilt dort Gleichheit, so ist $\|\lambda x + \mu y\| = 0$ folglich (da $\lambda \neq 0$) sind dann x, y linear unabhängig. Ist $x = \alpha y$ mit $\alpha \in K$, so ist $|\langle x, y \rangle| = |\alpha| \cdot \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$ \square

4. Orthogonalität

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Definition 4.1 (orthogonal, orthogonales Komplement)

Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal, in Zeichen $x \perp y$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Zwei Mengen $X, Y \subseteq V$ sind orthogonal, in Zeichen $X \perp Y$, wenn $x \perp y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Für $U \subseteq V$ bezeichnet

$$U^\perp = \{x \in V \mid x \perp u \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement zu U .

Lemma 4.2

Für $x, y \in V$ ist

- $x \perp y \iff y \perp x$
- $x \perp 0$
- $x \perp x \iff x = 0$

Beweis. klar □

Satz 4.3

Für $U \subseteq V$ ist U^\perp ein Untervektorraum von V mit $U \perp U^\perp$ und $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$.

Beweis. Linearität des Skalarprodukts im ersten Argument liefert, dass U^\perp ein Untervektorraum ist. Die Aussage $U^\perp \perp U$ ist trivial, $U \perp U^\perp$ folgt dann aus Lemma 4.2. Ist $u \in U \cap U^\perp$, so ist insbesondere $u \perp u$, also $u = 0$ nach Lemma 4.2. □

Definition 4.4 (orthonormal)

Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen von V ist orthogonal, wenn $x_i \perp x_j$ für alle $i \neq j$, und orthonormal, wenn zusätzlich $\|x_i\| = 1$ für alle i . Eine orthogonale Basis nennt man eine Orthogonalbasis, eine orthonormale Basis nennt man eine Orthonormalbasis.

► Bemerkung 4.5

Eine Basis B ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die darstellende Matrix des Skalarprodukts bezüglich B die Einheitsmatrix ist. (Beispiel: Standardbasis des Standardraum bezüglich des Standardskalarprodukts)

Lemma 4.6

Ist die Familie $(x_i)_{i \in I}$ orthogonal und $x_i \neq 0$ für alle $i \in I$, so ist $(x_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Beweis. Ist $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$, $\lambda_i \in K$, fast alle gleich 0, so ist $0 = \langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, x_j \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle$. Aus $x_j \neq 0$ folgt $\langle x_j, x_j \rangle > 0$ und somit $\lambda_j = 0$ für jedes $j \in I$. □

Lemma 4.7

Ist $(x_i)_{i \in I}$ orthogonal und $x_i \neq 0$ für alle i , so ist $(y_i)_{i \in I}$ mit

$$y_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

orthonormal.

Beweis. Für alle i ist $\langle y_i, y_i \rangle = \frac{1}{\|x_i\|^2} \langle x_i, x_i \rangle = 1$.
 Für alle $i \neq j$ ist $\langle y_i, y_j \rangle = \frac{1}{\|x_i\| \cdot \|x_j\|} \langle x_i, x_j \rangle = 0$. □

Satz 4.8

Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $B = (x_1, \dots, x_k)$ eine Orthonormalbasis von U . Es gibt genau einen Epimorphismus $\text{pr}_U : V \rightarrow U$ mit $\text{pr}_U|_U = \text{id}_U$ und $\text{Ker}(\text{pr}_U) \perp U$, insbesondere also $x - \text{pr}_U x \perp U$ für alle $x \in V$, genannt die orthogonale Projektion auf U , und dieser ist gegeben durch

$$x \mapsto \sum_{i=1}^k \langle x, x_i \rangle x_i \quad (1)$$

Beweis. Sei zunächst pr_U durch (1) gegeben. Die Linearität von pr_U folgt aus (S1) und (S3). Für $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in U$ ist $\langle u, x_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j$, woraus $\text{pr}_U(u) = u$. Somit ist $\text{pr}_U|_U = \text{id}_U$, und insbesondere ist pr_U surjektiv. Ist $\text{pr}_U(x) = 0$, so ist $\langle x, x_i \rangle = 0$ für alle i , woraus mit (S2) und (S4) sofort $x \perp U$ folgt. Somit ist $\text{Ker}(\text{pr}_U) \perp U$.

Für $x \in V$ ist $\text{pr}_U(x - \text{pr}_U(x)) = \text{pr}_U(x) - \text{pr}_U(\text{pr}_U(x)) = \text{pr}_U(x) - \text{pr}_U(x) = 0$, also $x - \text{pr}_U(x) \in \text{Ker}(\text{pr}_U) \subseteq U^\perp$. Ist $f : V \rightarrow U$ ein weiterer Epimorphismus mit $f|_U = \text{id}_U$ und $\text{Ker}(f) \perp U$, so ist

$$\underbrace{\text{pr}_U(x)}_{\in U} - \underbrace{f(x)}_{\in U} = \underbrace{\text{pr}_U(x) - x}_{\in U^\perp} - \underbrace{f(x) - x}_{\in U^\perp} \in U \cap U^\perp = \{0\}$$

für jedes $x \in V$, somit $f = \text{pr}_U$. □

Theorem 4.9 (GRAM-SCHMIDT-Verfahren)

Ist (x_1, \dots, x_n) eine Basis von V und $k \leq n$ mit (x_1, \dots, x_k) orthonormal, so gibt es eine Orthonormalbasis (y_1, \dots, y_n) von V mit $y_i = x_i$ für $i = 1, \dots, k$ und $\text{span}_K(y_1, \dots, y_l) = \text{span}_K(x_1, \dots, x_l)$ für $l = 1, \dots, n$.

Beweis. Induktion nach $d = n - k$.

$d = 0$: nichts zu zeigen

$d - 1 \rightarrow d$: Für $i \neq k + 1$ definiere $y_i = x_i$. Sei $U = \text{span}_K(x_1, \dots, x_k)$, $x_{k+1}^\sim = x_{k+1} - \text{pr}_U(x_{k+1})$. Dann ist $x_{k+1}^\sim \in \text{Ker}(\text{pr}_U) \subseteq U^\perp$ (vgl. Satz 4.8) und $\text{span}_K(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}^\sim) = \text{span}_K(x_1, \dots, x_{k+1})$. Setze $y_{k+1} = \frac{1}{\|x_{k+1}^\sim\|} x_{k+1}^\sim$. Dann ist (y_1, \dots, y_n) eine Basis von V mit (y_1, \dots, y_{k+1}) orthonormal (vgl. Lemma 4.7). Nach Induktionshypothese gibt es eine Orthonormalbasis von V , die das Gewünschte leistet. □

Folgerung 4.10

Jeder endlichdimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum V besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis. Wähle irgendeine Basis von V und wende Theorem 4.9 mit $k = 0$ an. □

Folgerung 4.11

Ist U ein Untervektorraum von V , so ist $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis von U (vgl. Folgerung 4.10), $B = (x_1, \dots, x_k)$ und ergänze diese zu einer Orthonormalbasis (x_1, \dots, x_n) von V (vgl. Theorem 4.9). Dann sind $x_{k+1}, \dots, x_n \in U^\perp$, da $U \cap U^\perp = \{0\}$ ist somit $V = U \oplus U^\perp$. Insbesondere ist $\dim_K(U^\perp) = n - \dim_K(U)$, woraus $\dim_K((U^\perp)^\perp) = \dim_K(U)$ folgt. Zusammen mit der trivialen Inklusion $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ folgt $U = (U^\perp)^\perp$. □

Folgerung 4.12

Ist s eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf V und B eine Basis von V , so ist

$$\det(M_B(s)) \in \mathbb{R}_{>0}$$

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis B' von V bezüglich s . Dann ist $M_{B'}(s) = \mathbb{1}_n$, folglich

$$\begin{aligned}\det(M_B(s)) &= \det \left((T_{B'}^B)^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{T_{B'}^B} \right) \\ &= \det \left((T_{B'}^B)^t \right) \cdot \det \left(\overline{T_{B'}^B} \right) \\ &= \det \left(T_{B'}^B \right) \cdot \overline{\det \left(T_{B'}^B \right)} \\ &= |\det \left(T_{B'}^B \right)|^2 \\ &> 0\end{aligned}$$

□

5. Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f \in \text{End}_K(V)$.

Definition 5.1 (orthogonale, unitäre Endomorphismen)

f ist orthogonal bzw. unitär, wenn

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Satz 5.2

Ist f unitär, so gelten

- Für $x \in V$ ist $\|f(x)\| = \|x\|$.
- Sind $x, y \in V$ mit $x \perp y$, so ist $f(x) \perp f(y)$.
- Es ist $f \in \text{Aut}_K(V)$ und auch f^{-1} ist unitär.
- Das Bild einer Orthonormalbasis unter f ist eine Orthonormalbasis.
- Ist λ ein Eigenwert von f , so ist $|\lambda| = 1$.

Beweis. • klar

- klar

- $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$, also ist f injektiv, somit $f \in \text{Aut}_K(V)$ und

$$\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y) \rangle \stackrel{f \text{ unitär}}{=} \langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y)) \rangle = \langle x, y \rangle$$

- Folgt aus 1, 2 und 3
- Ist $f(x) = \lambda x$, $x \neq 0$, so ist

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

□

Satz 5.3

Ist $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, so ist f unitär.

Beweis. Aus $\|f(x)\| = \|x\|$ folgt $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$. Die Polarisierung (Satz 3.4) für $\langle f(x), f(y) \rangle$ und die Linearität von f liefern $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Zum Beispiel im Fall $K = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\left\langle \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)}, \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)} \right\rangle - \langle f(x), f(x) \rangle - \langle f(y), f(y) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle) \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

□

Definition 5.4 (orthogonale, unitäre Matrizen)

Eine Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ heißt orthogonal bzw. unitär, wenn

$$A^* A = \mathbb{1}_n$$

► Bemerkung 5.5

Offenbar ist A genau dann unitär, wenn A^* das Inverse zu A ist. Die folgenden Bedingungen sind

daher äquivalent dazu, dass A unitär ist:

$$AA^* = \mathbb{1}_n, \overline{A}A^t = \mathbb{1}_n, A^t\overline{A} = \mathbb{1}_n, A^t = \overline{A^{-1}}$$

Satz 5.6

Sei B eine Orthogonalbasis von V . Genau dann ist f unitär, wenn $M_B(f)$ unitär ist.

Beweis. Sei $A = M_B(f)$, $v = \Phi_B(x)$, $\Phi_B(y)$. Dann ist $\langle v, w \rangle = x^t \underbrace{M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle)}_{=1} \cdot \overline{y} = x^t \cdot \overline{y}$. Somit ist f genau dann unitär, wenn $(Ax)^t \overline{Ay} = x^t \overline{y}$ für alle $x, y \in K^n$, also wenn $A^t \overline{A} = \mathbb{1}$, d.h. A unitär. \square

Satz 5.7

Die folgenden Mengen bilden Untergruppen der $GL_n(K)$.

- $O_n = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}$ die orthogonale Gruppe
- $SO_n = \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\}$ die spezielle orthogonale Gruppe
- $U_n = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\}$ die unitäre Gruppe
- $SU_n = \{A \in U_n \mid \det(A) = 1\}$ die spezielle unitäre Gruppe

Beweis. z.B. für U_n : Sind $A^{-1} = A^*$, $B^{-1} = B^*$, so ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$, $(A^{-1})^{-1} = A = (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ \square

Satz 5.8

Genau dann ist $A \in \text{Mat}_n(K)$ unitär, wenn die Spalten (oder die Zeilen) von A eine Orthonormalbasis des K^n bilden.

Beweis. Sei s das Standardskalarprodukt und $B = (a_1, \dots, a_n)$. Nach Bemerkung 4.5 ist B genau dann eine Orthonormalbasis, wenn $M_B(s) = \mathbb{1}_n$, und $M_B(s) = A^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{A}$, vgl. Beispiel 2.9 \square

Theorem 5.9

Sei $K = \mathbb{C}$ und $f \in \text{End}_K(V)$. Ist f unitär, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f .

Beweis. Induktion über $n = \dim_K(V)$.

$n = 0$: klar

$n - 1 \rightarrow n$: Da K algebraisch abgeschlossen ist, hat χ_f eine Nullstelle λ , es gibt also einen Eigenvektor x_1 von f zum Eigenwert λ . Ohne Einschränkung nehmen wir $\|x_1\| = 1$ an. Sei $W = K \cdot x_1$. Nach Folgerung 4.11 ist dann $V = W \oplus W^\perp$. Für $v \in W^\perp, w \in W$ ist

$$0 = \langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \overline{\lambda} \langle f(v), w \rangle$$

da $\lambda \neq 0$ (f unitär) also $f(W^\perp) \perp W$. Somit ist $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$, d.h. W^\perp ist f -invariant. Da auch $f|_{W^\perp}$ unitär ist, gibt es nach Induktionshypothese eine Orthonormalbasis (x_1, \dots, x_n) aus Eigenvektoren von $f|_{W^\perp}$. Da $V = W \oplus W^\perp$ und $W \perp W^\perp$ ist (x_1, \dots, x_n) eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f . \square

Folgerung 5.10

Jeder unitäre Endomorphismus eines unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

Folgerung 5.11

Zu jeder $A \in U_n$ gibt es $S \in U_n$ so, dass

$$S^*AS = S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

■ mit $|\lambda_i| = 1$ für $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Da A unitär ist, ist $f_A \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ unitär, nach Theorem 5.9 existiert also eine Orthonormalbasis B des \mathbb{C}^n aus Eigenvektoren von A . Die Transformationsmatrix $S = T_{\mathcal{E}}^B$ hat als Spalten die Elemente von B und somit ist S nach Satz 5.8 unitär. Nach Satz 5.2 ist $|\lambda| = 1$ für alle Eigenwerte von f_A . \square

► **Bemerkung 5.12**

Dies (Theorem 5.9) gilt nicht im Fall $K = \mathbb{R}$. Man kann aber auch orthogonale Endomorphismen immer “fast diagonalisieren“.

6. Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f \in \text{End}_K(V)$.

Definition 6.1 (selbstadjungiert)

f ist selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Satz 6.2

Sei B eine Orthonormalbasis von V . Genau dann ist f selbstadjungiert, wenn $M_B(f)$ hermitesch ist.

Beweis. Seien $A = M_B(f)$, $v = \Phi_B(x)$, $w = \Phi_B(y)$. Es ist

$$\begin{aligned} \langle f(v), w \rangle &= (Ax)^t \bar{y} = x^t A^t \bar{y} \\ \langle v, f(w) \rangle &= x^t \overline{Ay} = x^t \overline{A} \bar{y} \end{aligned}$$

Somit ist $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$ genau dann, wenn $A^t = \overline{A}$, d.h. $A = A^*$, also A hermitesch. \square

Lemma 6.3

Ist f selbstadjungiert und λ ein Eigenwert von f , so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. Ist $0 \neq x \in V$ mit $f(x) = \lambda x$, so ist

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle f(x), x \rangle = \langle x, f(x) \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle$$

und mit $\langle x, x \rangle \neq 0$ folgt $\lambda = \overline{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Satz 6.4

Ist f selbstadjungiert, so ist $\chi_f \in \mathbb{R}[t]$ und χ_f zerfällt über \mathbb{R} in Linearfaktoren.

Beweis. Sei B eine Orthonormalbasis von V . Nach Satz 6.2 ist $A = M_B(f) \in \text{Mat}_n(K) \subseteq \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ hermitesch. Da \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist, ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Nach Lemma 6.3 ist aber schon $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Somit zerfällt $\chi_f \in \mathbb{R}[t]$ über \mathbb{R} in Linearfaktoren. \square

Theorem 6.5

Ist f selbstadjungiert, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f .

Beweis. Induktion über $n = \dim_K(V)$.

$n = 0$: klar

$n - 1 \rightarrow n$: Nach Satz 6.4 hat f einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Wähle $x_1 \in V$ mit $f(x_1) = \lambda x_1$ und $\|x_1\| = 1$. Sei $W = K \cdot x_1$. Für $y \in W^\perp$ ist

$$\langle x_1, f(y) \rangle = \langle f(x_1), y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle = 0$$

und folglich ist W^\perp f -invariant. Nach Folgerung 4.11 ist $V = W \oplus W^\perp$ und $f|_{W^\perp}$ ist wieder selbstadjungiert. Nach Induktionshypothese hat W^\perp eine Orthonormalbasis (x_2, \dots, x_n) aus Eigenvektoren von $f|_{W^\perp}$. Da $V = W \oplus W^\perp$ und $W \perp W^\perp$ ist (x_1, \dots, x_n) eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f . \square

Folgerung 6.6

Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines euklidischen oder unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

Folgerung 6.7

Ist

- f selbstadjungiert ($K = \mathbb{C}$ oder \mathbb{R})
- f unitär ($K = \mathbb{C}$)

so ist

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

eine Zerlegung von V in paarweise orthogonale Untervektorräume.

Beweis. Nach Theorem 5.9 bzw. Theorem 6.5 existiert eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren. Insbesondere ist f diagonalisierbar, also

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

Zu jedem λ gibt es eine Teilfamilie von B die eine Basis von $\text{Eig}(f, \lambda)$ bildet. Da B eine Orthonormalbasis ist, folgt, dass die Eigenräume paarweise orthogonal sind. \square

► Bemerkung 6.8

Um eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren wie in Theorem 5.9 oder Theorem 6.5 zu bestimmen, kann man entweder wie im Induktionsbeweis vorgehen, oder man bestimmt zunächst Basen B von $\text{Eig}(f, \lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$ und orthonormalisiert diese mit Theorem 4.9 zu Basen B' . Nach Folgerung 6.7 ist $\bigcup B'$ dann eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f .

7. Hauptachsentransformation

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und s eine hermitesche Sesquilinearform auf V .

Satz 7.1

Zu $A \in \text{Mat}_n(K)$ hermitesch gibt es $S \in \text{U}_n(K)$ so, dass

$$S^*AS = S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da A hermitesch ist, ist $f_A \in \text{End}_K(K^n)$ selbstadjungiert, es gibt also nach Theorem 6.5 also eine Orthonormalbasis $B = (x_1, \dots, x_n)$ aus Eigenvektoren von f_A . Die Transformationsmatrix $S = T_{\mathcal{E}}^B$ hat x_1, \dots, x_n als Spalten und ist somit nach Satz 5.8 unitär. Nach Lemma 6.3 sind die Eigenvektoren $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reell. \square

Folgerung 7.2

Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$ hermitesch. Genau dann ist A positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Beweis. Nach Satz 7.1 existiert $S \in \text{U}_n(K)$ mit

$$S^*AS = S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Die Eigenwerte von A sind die Eigenwerte von $S^{-1}AS$ (LAAG 1.5.1.11), also $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Sei $T = \bar{S}$. Genau dann ist A positiv definit, wenn $T^t A \bar{T} = S^*AS = D$ positiv definit ist (Satz 2.8), also wenn $\lambda_i > 0$. \square

Theorem 7.3 (Hauptachsentransformation)

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform s auf V gibt es eine Orthonormalbasis B von V , für die

$$M_B(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Beweis. Sei $B_0 = (x_1, \dots, x_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $A = M_{B_0}(s)$. Da s hermitesch ist, ist auch A hermitesch (Satz 2.13). Nach Satz 7.1 gibt es deshalb $S \in \text{U}_n(K)$ mit $S^*AS = D$ eine reelle Diagonalmatrix. Ist nun $f \in \text{End}_K(V)$ mit $M_{B_0}(f) = \bar{S}$, so ist auch $B = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ eine Basis von V mit $T_{B_0}^B = \bar{S}$ unitär. Da $M_{B_0}(f)$ unitär ist, ist auch f unitär. Nach Satz 5.2 ist $f(B_0) = B$ somit auch eine Orthonormalbasis. Nach Satz 2.8 ist

$$M_B(s) = (T_{B_0}^B)^t \cdot M_{B_0}(s) \cdot \overline{T_{B_0}^B} = S^*AS = D \quad \square$$

■ Beispiel 7.4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, s = s_A, K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow q_s(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

Wie verhält sich $q_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$? Wie sehen die "Höhenlinien"

$$H_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_s(x) = c\} \quad c \in \mathbb{R}$$

aus?

$$\chi_A = (t-2)^2 - 1 = (t-1)(t-3) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow M_B(s) = \text{diag}(3, 1)$$

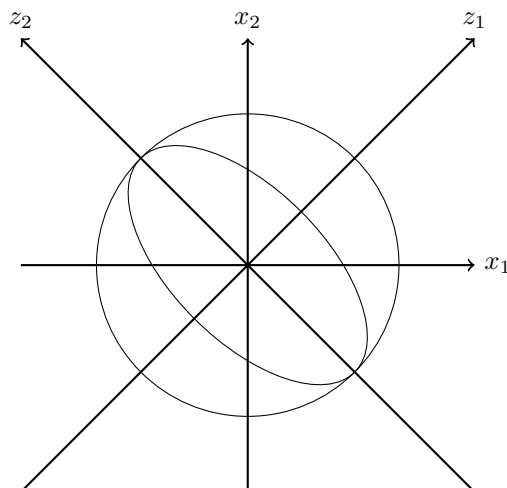
Im neuen Koordinatensystem $z = \Phi_B^{-1}(x)$ ist dann

$$q_s(z) = 3z_1^2 + z_2^2$$

Mit $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_2 = 1$ erhält man "Höhenlinien" der Form

$$\left(\frac{z_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{a_2}\right)^2 = c$$

was für $c > 0$ eine Ellipse beschreibt.



Folgerung 7.5

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform s auf V gibt es eine Basis B von V , für die

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{r_+(s)} & & \\ & -\mathbb{1}_{r_-(s)} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $r_+(s) - r_-(s) \leq n$.

Beweis. Sei $B_0 = (x_1, \dots, x_n)$ eine Orthonormalbasis von V mit $A = M_{B_0}(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Setze

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i \neq 0 \\ 1 & \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Sei $x'_i = \mu_i \cdot x_i$ und $B' = (x'_1, \dots, x'_n)$. Dann ist $M_B(s) = S^t A \bar{S}$ mit $S = T_{B_0}^{B'} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ also $M_{B'}(s) = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ mit $\lambda'_i = \mu_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\mu_i} = \mu_i^2 \lambda_i \in \{0, 1, -1\}$. Durch Permutation der Elemente von B' erhält man die gewünschte Basis B . \square

Definition 7.6 (Ausartungsraum)

Der Ausartungsraum von s ist

$$V_0 = \{x \in V \mid s(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\}$$

Lemma 7.7

V_0 ist ein Untervektorraum von V .

Beweis. Klar aus Linearität im ersten Argument. \square

Lemma 7.8

Seien V_+ und V_- Untervektorräume von V mit $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ und s positiv definit auf V_+ , $-s$ positiv definit auf V_- . Dann ist

$$\begin{aligned} \dim_K(V_+) &= \max \dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, s \text{ positiv definit auf } W \\ \dim_K(V_-) &= \max \dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, -s \text{ positiv definit auf } W \end{aligned}$$

Beweis. Beweis nur für V_+ , analog für V_- .

\leq : klar

\geq : Ist $W \leq V$ Untervektorraum mit $s(x, x) > 0 \quad \forall x \in W \setminus \{0\}$, so ist $W \cap (V_- \oplus V_0) = \{0\}$. Ist $x = y + z$ mit $y \in V_+$, $z \in V_0$, so ist $s(x, x) = s(y + z, y + z) = \underbrace{s(y, y)}_{\leq 0} + \underbrace{s(y, z) + s(z, y) + s(z, z)}_{=0} \leq 0 \Rightarrow \dim_K(W) \leq$

$$\dim_K(V) - \dim_K(V_-) - \dim_K(V_0) = \dim_K(V_+).$$

□

Theorem 7.9 (Trägheitssatz von SYLVESTER)

Für eine hermitesche Sesquilinearform s auf V sind die Zahlen $r_+(s)$, $r_-(s)$ aus Folgerung 7.5 eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei B eine Basis von V wie in Folgerung 7.5, $B = (x_1, \dots, x_n)$. Definiere

$$\begin{aligned} V_+ &= \text{span}_K(x_1, \dots, x_{r_+(s)}) \\ V_- &= \text{span}_K(x_{r_+(s)+1}, \dots, x_{r_+(s)+r_-(s)}) \\ V'_0 &= \text{span}_K(x_{r_+(s)+r_-(s)+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Dann ist s positiv definit auf V_+ , $-s$ positiv definit auf V_- und $V = V_+ \oplus V_- \oplus V'_0$. Es gilt $V'_0 = V_0$: \subseteq : klar
 \supseteq : Ist $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in V_0$, so ist $0 = s(x, x_i) = \lambda_i \cdot s(x_i, x_i)$ für $i = 1, \dots, n$ also $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, r_+(s) + r_-(s)$, d.h. $x \in V'_0$. Nach Lemma 7.8 ist $r_+(s) = \dim_K(V_+)$ nur von s abhängig, analog für $r_-(s)$. □

Kapitel III

Dualität

Kapitel IV
Moduln

Anhang

Anhang A: Listen

A.1. Liste der Theoreme

Theorem 4.8:	10
Theorem 5.9: Satz von CAYLEY-HAMILTION	12
Theorem 7.5: JORDAN-Normalform	19
Theorem 4.9: GRAM-SCHMIDT-Verfahren	30
Theorem 5.9:	33
Theorem 6.5:	35
Theorem 7.3: Hauptachsentransformation	37
Theorem 7.9: Trägheitssatz von SYLVESTER	39

A.2. Liste der benannten Sätze

Satz 6.4: Lemma von FITTING	14
Satz 7.3: Hauptraumzerlegung	18
Satz 1.4: Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ	22
Satz 2.8: Transformationsformel	25
Satz 3.4: Polarisierung	27

Index

- JORDAN-Invarianten, 19
- JORDAN-Matrix, 16

- Absolutbetrag, 22
- Ausartungsraum, 38
- ausgeartet, 25

- Bilinearform, 24

- charakteristische Polynom, 4

- definit, 27
- diagonalisierbar, 6

- Eigenraum, 1
- Eigenvektor, 1
- Eigenwert, 1
- Endomorphismus
 - orthogonal, 32
 - unitär, 32
- euklidische Norm in \mathbb{C} , 23
- euklidische Norm in \mathbb{R} , 21
- euklidischen, 27

- Hauptraum, 18
- hermitesch, 25

- invariant, 9

- komplexe Konjugation, 22

- Matrix
 - orthogonal, 32
 - unitär, 32
- Minimalpolynom, 11

- nilpotent, 15
- Nilpotenzklasse, 15
- normiert, 5

- orthogonal, 29
- orthogonale Gruppe, 33
- orthogonale Komplement, 29
- orthogonale Projektion, 30
- orthonormal, 29

- quadratische Form, 27

- selbstadjungiert, 35
- semidefinit, 27
- Sesquilinearform, 24
 - darstellende Matrix, 24
- spezielle orthogonale Gruppe, 33
- spezielle unitäre Gruppe, 33
- Standardskalarprodukt in \mathbb{C} , 22
- Standardskalarprodukt in \mathbb{R} , 21
- symmetrisch, 25

- teilt, 6
- trigonalisierbar, 9

- unitäre Gruppe, 33
- unitären, 27

- Vielfachheit, 6
 - algebraische Vielfachheit, 8
 - geometrische Vielfachheit, 8

- zyklisch, 12