# Numerische Mathematik SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Andreas Fischer

3. April 2019

# *Inhaltsverzeichnis*

# Vorwort

# Literatur


- Bollhöfer/Mehrmann: Numerische Mathematik, Vieweg 2004
- Deuflhard/Hohmann: Numerische Mathematik1, de Gruyter 2008
- Deuflhard/Bornemann: Numerische Mathematik, de Gruyter 2008
- Deuflhard/Weiser: Numerische Mathematik 3, de Gruyter 2011
- Freund/Hoppe: Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1, Springer 2007
- Hämmerlin/Hoffmann: Numerische Mathematik, Springer 2013
- Knorrenschild, M: Numerische Mathematik, Fachbuchverlag 2005
- Plato, R: Numerische Mathematik kompakt, Vieweg 2009
- Preuß/Wenisch: Lehr- und Übungsbuch Numerische Mathematik, Fachbuchverlag 2001
- Quarteroni/Sacco/Saleri: Numerische Mathematik 1+2, Springer 2002
- Roos/Schwetlick: Numerische Mathematik, Teubner 1999
- Schaback/Wendland: Numerische Mathematik, Springer 2004
- Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik II, Springer 2005

# 1. Das gewöhnliche Interationsverfahren

## 1.1. Fixpunkte

Seien ein Vektorraum $V$, eine Menge $U \subseteq V$ und eine Abbildung $\Phi : U \to V$ gegeben. Dann heißt $x^* \in U$ Fixpunkt der Abbildung $\Phi$, falls $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Die Aufgabe

$$\Phi(x) = x$$

eigentlich die Aufgabe, diese Gleichung zu lösen) wird als Fixpunktaufgabe bezeichnet. Die Abbildung $\Phi$ heißt Fixpunktabbildung. Im Unterschied zur Fixpunktaufgabe heißt

$$F(x) = 0$$

Nullstellenaufgabe. Zu jeder Nullstellenaufgabe gibt es eine äquivalente Fixpunktaufgabe (z.B. $F(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = x$ mit $\Phi(x) := F(x) + x$) und umgekehrt (z.B. $\Phi(x) = x \Leftrightarrow F(x) = 0$ mit $F(x) := \Phi(x) - x$).

## 1.2. Der Fixpunktsatz von Banach

Der folgende Satz gibt (unter gewissen Bedingungen) eine konstruktive Möglichkeit an, einen Fixpunkt näherungsweise zu ermitteln.

**Satz 1.1 (Banach)**
Seien $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum, $U \subseteq V$ eine abgeschlossene Menge und $\Phi : U \to V$ eine Abbildung. Die Abbildung $\Phi$ sei selbstabbildend, d.h. es gilt

$$\Phi(U) \subseteq U.$$

Außerdem sei $\Phi$ kontraktiv, d.h. es gibt $\lambda \in [0, 1)$, so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \lambda \|x - y\|, \text{für alle } x, y \in U.$$

Dann besitzt $\Phi$ genau einen Fixpunkt $x^* \in U$. Weiterhin konvergiert die durch

$$x^{k+1} := \Phi(x^k) \tag{1}$$

erzeugte Folge $\{x^k\}$ für jeden Startwert $x^0 \in U$ gegen $x^*$ und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \|x^{k+1} - x^k\| \text{ a posteriori Fehlerabschätzung,} \tag{2}$$

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{\lambda^{k+1}}{1-\lambda} \|x^1 - x^0\| \text{ a priori Fehlerabschätzung,} \tag{3}$$

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \lambda \|x^k - x^*\| \text{ Q-lineare Konvergenz mit Ordnung } \lambda. \tag{4}$$

*Beweis.* Vorlesung zur Analysis. □

Die in Satz 1.1 vorkommende Zahl $\lambda \in [0, 1)$ wird Kontraktionskonstante genannt.

## 1.3. Gewöhnliches Iterationsverfahren

Durch 1 erklärte Verfahren heißt gewöhnliches Interationsverfahren oder Fixpunktiteration. Kritisch ist dabei, ob die Vorraussetzungen ($\Phi$ ist selbstabbildend und kontraktiv) erfüllt werden können. Dies wird in diesem Abschnitt im Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit einer beliebigen aber festen Vektornorm $\|\cdot\|$ untersucht. Die zugeordnete Matrixnorm wurde mit $\|\cdot\|_*$ bezeichnet.

**Lemma 1.2**
Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Falls $L > 0$ existiert mit

$$\|\Phi^{'}(x)\|_* \leq L \text{ für alle } x \in D, \tag{5}$$

dann ist $\Phi$ Lipschitz-stetig in $D$ mit der Lipschitz-Konstante $L$, d.h. es gilt

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \text{ für alle } x \in D. \tag{6}$$

Die Umkehrung dieser Aussage ist ebenfalls richtig.

*Beweis.* 1. Sei 5 erfüllt. Mit Satz 5.1 aus der Vorlesung ENM (Taylorformel mit Integralrestglied) folgt

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_* = \left\| \int_0^1 \Phi^{'}(y + t(x-y))(x-y)\mathrm{d}t \right\| \leq \|x - y\| \sup_{t\in[0,1]} \|\Phi^{'}(y + t(x-y))\|_* \tag{7}$$

für alle $x, y \in D$. Also liefert 5 unter Beachtung der Konvexität von $D$ die Behauptung.

2. Sei nun 6 erfüllt. Angenommen es gibt $\hat{y} \in D$ mit

$$\|\Phi^{'}(\hat{y})\|_* > L. \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung der Definition der zugeordneten Matrixnorm $\|\cdot\|_*$ folgt, dass $d \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $\|d\| = 1$ und $\|\Phi^{'}(\hat{y})d\| = \|\Phi(\hat{y})\|_*$. Wendet man nun 6 und Satz 5.1 der Vorlesung ENM mit $x := \hat{y} + sd$ und $y := \hat{y}$ an, so folgt für alle $s > 0$ hinreichend klein

$$\|\Phi(\hat{y} + sd) - \Phi(\hat{y})\| \leq L\|sd\| = sL \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\hat{y} + sd) - \Phi(\hat{y})\| &= \left\| \int_0^1 \Phi^{'}(\hat{y} + tsd)(sd)\mathrm{d}t \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 \Phi^{'}(\hat{y})(sd)\mathrm{d}t + \int_0^1 (\Phi^{'}(\hat{y} + tsd) - \Phi^{'}(\hat{y}))(sd)\mathrm{d}t \right\| \\
&\geq s\|\Phi^{'}(\hat{y})d\| - s\|d\| \sup_{t\in[0,1]} \|\Phi^{'}(\hat{y} + tsd) - \Phi^{'}(\hat{y})\|_* \\
&= s\left( \|\Phi^{'}(\hat{y})\|_* - \sup_{t\in[0,1]} \|\Phi^{'}(\hat{y} + tsd) - \Phi^{'}(\hat{y})\|_* \right) \\
&= sL,
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Ungleichung wegen 8 und der Stetigkeit von $\Phi^{'}$ ergibt. Offenbar hat man damit einen Widerspruch, so dass die Annahme falsch ist. □

■ **Beispiel 1.3**

Die Nullstellenaufgabe $\cos x - 2x = 0$ sei zu lösen. Eine mögliche Formulierung als Fixpunktaufgabe ist

$$\Phi(x) = x \text{ mit } \Phi(x) := -x + \cos x$$

Offenbar ist $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selbstabbildend. Weiter ergibt sich

$$\Phi^{'}(x) = -1 - \sin x$$

Für $x \in D := (0, 1)$ gilt daher $|\Phi^{'}(x)| > 1$. Mit Lemma 1.2 folgt $|\Phi(x) - \Phi(y)| \geq |x - y|$ für mindestens ein Paar $(x, y) \in D \times D$. Somit ist $\Phi$ in $D$ nicht kontrahierend. Definiert man $\Phi$ aber durch $\Phi(x) := {}^1\!/\!_2 \cos x$, so ist die Fixpunktaufgabe ${}^1\!/\!_2 \cos x = x$ wiederum zur Nullstellenaufgabe äquivalent und es folgt

$$\Phi^{'}(x) = -\frac{1}{2} \sin x.$$

Damit hat man $|\Phi^{'}(x)| \leq {}^1\!/\!_2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist die zuletzt definierte Abbildung $\Phi$ kontrahierend auf $\mathbb{R}$ (und dort natürlich selbstabbildend), so dass die Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind. Die Fixpunktiteration mit $\Phi(x) = {}^1\!/\!_2 \cos x$ und $x^0 := 1$ ergibt:

$$\begin{array}{llll} x^1 = 0.270\ldots, & x^2 = 0.481\ldots, & x^3 = 0.433\ldots, & x^4 = 0.4517\ldots, \\ x^5 = 0.4498\ldots, & x^6 = 0.45025\ldots, & x^7 = 0.450167\ldots, & x^8 = 0.450187\ldots \end{array}$$

Nehmen wir an, die Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes seien gegeben. Dann hängt die Konvergenzgeschwindigkeit der Fixpunktiteration offenbar von der Kontraktionskonstanten $\lambda \in [0, 1)$ ab. Je kleiner $\lambda$ ist, desto schneller ist ist die Konvergenzgeschwindigkeit. Unter Umständen kann die Umformulierung einer Fixpunktaufgabe mit Hilfe einer anderen Fixpunktabbildung helfen, die Konvergenzgeschwindigkeit zu verbessern (ggf. auf Kosten der Größe der Menge $U$, in der die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind). Ein Beispiel zur Konstruktion einer Fixpunktabbildung mit lokal beliebig kleiner Kontraktionskonstante gibt Abschnitt 1.4. In Abschnitt 2.1 wird gezeigt, wie Fixpunktabbildungen zur iterativen Lösung von linearen Gleichungssystemen eingesetzt werden können. Im Weiteren bezeichne $B(x^*, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - x^*\| \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel um $x^*$ mit Radius $r$ (bzgl. einer passenden Norm).

**Satz 1.4 (Ostrowski)**
Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Die Abbildung $\Phi$ besitze einen Fixpunkt $x^* \in D$ mit $\|\Phi^{'}(x^*)\|_* < 1$. Dann existiert $r > 0$, so dass das gewöhnliche Iterationsverfahren für jeden Startpunkt $x^0 \in B(x^*, r)$ gegen $x^*$ konvergiert.

*Beweis.* TODO! □

# Anhang