# Einführung in die Numerik WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Andreas Fischer

17. Oktober 2018

# Inhaltsverzeichnis

# *Vorwort*

## Kapitel I

# *Interpolation*

## 1. Grundlagen

**Aufgabe:**
Gegeben sind $n+1$ Datenpaare $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$, alles reelle Zahlen und paarweise verschieden. Gesucht ist eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Interpolationsbedingungen

$$F(x_0) = f_0, \; \dots, \; F(x_n) = f_n \tag{1}$$

genügt.

**Definition (Stützstellen, Stützwerte)**
Die $x_0$ bis $x_n$ werden Stützstellen genannt.

Die $f_0$ bis $f_n$ werden Stützwerte genannt.

Die oben gestellte Aufgabe wird zum Beispiel durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \{x_0, \dots, x_n\} \\ f_i & x = x_i \end{cases}$$

gelöst. Weitere Möglichkeiten sind: Polygonzug, Treppenfunktion, Polynom, ...

- In welcher Menge von Funktionen soll $F$ liegen?
- Gibt es im gewählten Funktionenraum für beliebige Datenpaare eine Funktion $F$, die den Interpolationsbedingungen genügt (eine solche Funktion heißt Interpolierende )?
- Ist die Interpolierende in diesem Raum eindeutig bestimmt?
- Welche weiteren Eigenschaften besitzt die Interpolierende, zum Beispiel hinsichtlich ihrer Krümmung oder der Approximation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k = f(x_k)$ für $k = 0, \dots, n$
- Wie sollte man die Stützstellen wählen, falls nicht vorgegeben?
- Wie lässt sich die Interpolierende effizient bestimmen, gegebenenfalls auch unter der Berücksichtigung, dass neue Datenpaare hinzukommen oder dass sich nur die Stützwerte ändern?

■ **Beispiel 1.1**

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_k$ in s | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f_k$ in °C | 80 | 85,8 | 86,4 | 93,6 | 98,3 | 99,1 |

Interpolation im

- Raum der stetigen stückweise affinen Funktionen
- Raum der Polynome höchstens 5. Grades
- Raum der Polynome höchstens 4. Grades (Interpolation im Allgemeinen nicht lösbar, Regression nötig)

# 2. Interpolation durch Polynome

$\Pi_n$ bezeichne den Vektorraum der Polynome von Höchstgrad $n$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation. Für jedes $p \in \Pi_n$ gibt es $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, sodass

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{2}$$

und umgekehrt.

## 2.1. Existenz und Eindeutigkeit

**Satz 2.1**
Zu $n+1$ Datenpaaren $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ mit paarweise verschiedenen Stützstellen existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$, dass die Interpolationsbedingung Gleichung (1) erfüllt.

*Beweis.*

- Existenz: Sei $j \in \{0, \ldots, n\}$ und $L_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$L_j(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot \cdots \cdot (x_j - x_n)}$$

  das LAGRANGE-Basispolynom vom Grad $n$. Offenbar gilt $L_j \in \Pi_n$ und

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} = \delta_{jk} \tag{3}$$

  Definiert man $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} f_j \cdot L_j(x) \tag{4}$$

  so ist $p \in \Pi_n$ und außerdem erfüllt $p$ wegen Gleichung (3) die Interpolationsbedingung Gleichung (1)

- Eindeutigkeit: Angenommen es gibt Interpolierende $p, \tilde{p} \in \Pi_n$ mit $p \neq \tilde{p}$. Dann folgt $p - \tilde{p} \in \Pi_n$ und $(p - \tilde{p})(x_k) = p(x_k) - \tilde{p}(x_k) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$. Also hat $(p - \tilde{p})$ mindestens $n + 1$ Nullstellen, hat aber Grad $n$. Das heißt, dass $(p - \tilde{p})$ das Nullpolynom sein muss. □

**Definition (Interpolationspolynom)**
Das Polynom, dass die Interpolationsbedingung erfüllt, heißt Interpolationspolynom zu $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$.

**▶ Bemerkung 2.2**

- Die Darstellung Gleichung (4) heißt LAGRANGE-Form des Interpolationspolynoms.
- Um mittels Gleichung (4) einen Funktionswert $p(x)$ zu berechnen, werden $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen genötigt; bei gleichabständigen Stützstellen kann man diesen Aufwand auf $\mathcal{O}(n)$ verringern. Ändern sich die Stützwerte, kann man durch Wiederverwendung von den $L_j(x)$ das $p(x)$ in $\mathcal{O}(n)$ Operationen berechnen.
- Man kann zeigen, dass $L_0$ bis $L_n$ eine Basis von $\Pi_n$ bilden.

## 2.2. Newton-Form des Interpolationspolynoms

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \tag{5}$$

mit Koeffizienten $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Die Berechnung des Koeffizienten $c_j$ kann rekursiv durch Ausnutzen der Interpolationsbedingung Gleichung (1) erfolgen. Für $c_0$ erhält man

$$f_0 \overset{!}{=} p(x_0) = c_0$$

Seien $c_0$ bis $c_{j-1}$ bereits ermittelt. Dann folgt:

$$f_j \overset{!}{=} p(x_j) = \underbrace{c_0 + \sum_{k=1}^{j-1} c_k(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{k-1})}_{\text{bekannt}} + c_j \underbrace{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})}_{\text{bekannt}}$$

▶ **Bemerkung 2.3**

- Der Aufwand um die Koeffizienten $c_0, \dots, c_n$ zu ermitteln ist $\mathcal{O}(n^2)$. Kommt ein Datenpaar hinzu, kann man Gleichung (5) um einen Summanden erweitern und mit $\mathcal{O}(n)$ Operationen $c_{n+1}$ bestimmen.
- Sind die Koeffizienten $c_0, \dots, c_n$ in Gleichung (5) bekannt, dann benötigt man zur Berechnung von $p(x)$ $\mathcal{O}(n)$ Operationen.
- Die Polynome $N_0, \dots, N_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

  $$N_0 = 1 \quad \text{und} \quad N_j = (x - x_0)\dots(x - x_{j-1})$$

  heißen Newton-Basispolynome und bilden eine Basis von $\Pi_n$.

Die Koeffizienten $c_0, \dots, c_n$ ergeben sich wegen Gleichung (2) auch als Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & (x_1 - x_0) & & & \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \dots & \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Die Systemmatrix dieses linearen Gleichungssystems ist eine reguläre untere Dreiecksmatrix.

Zu effizienten Berechnung eines Funktionswertes $p(x)$ nach Gleichung (5) mit gegebenen Koeffizienten

$c_0, \ldots, c_n$ kann man das Horner-Schema anwenden. Überlegung für $n = 3$.

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= c_0 + (x - x_0)\Big[c_1 + (x - x_1)\left[c_2 + (x - x_2)c_3\right]\Big] \end{aligned}$$

Für beliebiges $n$ liefert das den folgenden Algorithmus:

■ **Algorithmus 2.4 (Horner-Schema für Newton-Form)**

Input: $n$, $x$, $c_0$,..., $c_n$, $x_0$,..., $x_n$

```
p = c_n
do j = n-1, 0, -1
 p = c_j + (x - x_j)p
end do
```

## 2.3. Interpolationsfehler

**Definition (Maximum-Norm)**

Die Norm

$$\|g\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |g(x)| \quad \text{für } g \in C[a, b]$$

definiert die Maximum-Norm in $C[a, b]$.

**Satz 2.5**

Sei $f \in C[a, b]$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom $p_\varepsilon$ mit $\|f - p_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

Also liegt die Menge aller Polynome (beliebig hohen Grades) direkt in $C[a, b]$.

**Definition 2.6 (Stützstellensystem)**

Stützstellensystem : $a \leq x_0^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leq b$. Weiterhin bezeichne $p_n \in \Pi_n$ das zu den Datenpaaren $(x_k^{(n)}, f(x_k^{(n)}))$ gehörende eindeutig bestimmte Interpolationspolynom.

**Satz 2.7 (Satz von Faber 1914)**

Zu jedem Stützstellensystem gibt es $f \in C[a, b]$, sodass $(p_n)$ nicht gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. $\|p_n - f\|_\infty \to 0$ bedeutet, dass $(p_n)$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.

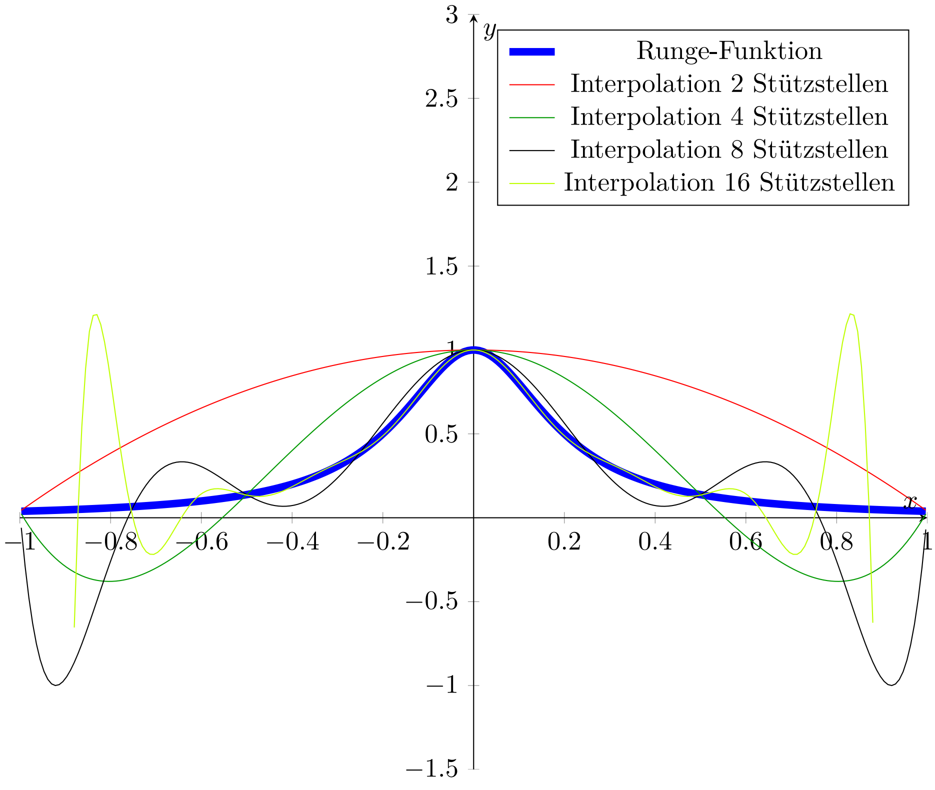
Nach einem Resultat von Erdös/Vertesi (1980) gilt sogar, dass $(p_n(x))$ fast überall divergiert.

■ **Beispiel 2.8 (Runge)**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

äquidistante Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, $p \in \Pi_n$ als Interpolationspolynom

| **Stützstellen** | **interpoliertes Polynom** |
|---|---|
| 2 | $1 - \frac{25x^2}{26}$ |
| 4 | $3,31565x^4 - 4,27719x^2 + 1$ |
| 8 | $53,6893x^8 - 102,815x^6 + 61,3672x^4 - 13,203x^2 + 1$ |
| 16 | $15403,1x^{16} - 49713,5x^{14} + 63743,8x^{12} - 41870x^{10} + 15206x^8 - 3100,35x^6 + 351,984x^4 - 22,7759x^2 + 1$ |




**Anmerkung**

Wer mit Mathematica selber diese Polynome berechnen will, muss folgende Befehle benutzen:

- Funktion definieren: `f[x_]:=1/(1+25x^2)`
- Interpolationspolynome ausrechnen: `Expand[InterpolatingPolynomial[Table[{i,f[i]}, {i,-1,-1,Schrittweite}],{x}]]`
- plotten: `Plot[f[x],InterpolatingPolynomial[Table[{i,f[i]},{i,-1,-1,Schrittweite} ],{x}],{x,-1,1}]`

**Satz 2.9**
Sei $f \in C^{n+1}[a,b]$ und gelte $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$. Mit $p_n \in \Pi_n$ werde das zu den Datenpaaren $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ gehörende Interpolationspolynom bezeichnet. Dann existiert zu jedem $x \in [a,b]$ eine Zahl $\xi \in (a,b)$, so dass

$$\begin{aligned} f(x) - p_n(x) &= \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} w(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b] \\ \text{wobei } w(x) &= (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \end{aligned}$$

*Beweis.* Für $x = x_k$ mit $k = 0, \ldots, n$ ist nicht zu zeigen, da $p_n$ die Interpolationsbedingung erfüllt. Sei nun $x \in [a,b]$ fest gewählt mit $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$. Weiter seien

$$K = \frac{f(x) - p_n(x)}{w(x)} \quad \text{und} \quad F : \begin{cases} [a,b] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) - p_n(t) - Kw(t) \end{cases}$$

Man stellt unter Beachtung der Interpolationsbedingung fest, dass $F(x_0) = F(x_1) = \ldots = F(x_n) = 0$ und $F(x) = 0$. Also besitzt $F$ mindestens $n+2$ paarweise verschiedene Nullstellen in $[a,b]$. Da $F \in C^{n+1}[a,b]$ erhält man durch $n+1$-fache Anwendung des Satzes von Rolle, dass $F^{(n+1)}$ mindestens eine Nullstelle $\xi(x)$ in $(a,b)$ besitzt. Also folgt

$$0 = F^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+1)}(\xi(x)) - \underbrace{p_n^{(n+1)}(\xi(x))}_{=0} - K \underbrace{w^{(n+1)}(\xi(x))}_{\text{Konstante}}$$

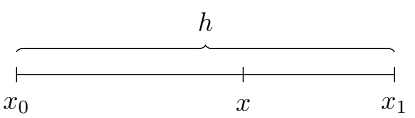
Da $w^{(n+1)} = (n+1)!$, erhält man

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

Da $x \in [a,b]$ beliebig gewählt war, ist die Behauptung bewiesen. □

■ **Beispiel 2.10**
Sei $f \in C^2[a,b]$ mit $\|f\|_\infty \leq M$. Weiter sei $a = x_0 < x_1 = x_0 + h = b$. Mit Satz 2.9 folgt:

$$\begin{aligned} |f(x) - p_2(x)| &= \left| \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - x_0)(x - x_1) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} M \cdot \lambda(x) h \cdot (1 - \lambda(x)) h \\ &\leq \frac{1}{2} M \cdot h^2 \underbrace{\lambda(x)(1 - \lambda(x))}_{\leq 1/4} \\ &\leq \frac{1}{8} M \cdot h^2 \end{aligned}$$




$\Rightarrow x = x_0 + \lambda \cdot (x_1 - x_0) = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_0$

# 3. Interpolation durch Polynomsplines

## 3.1. Polynomsplines

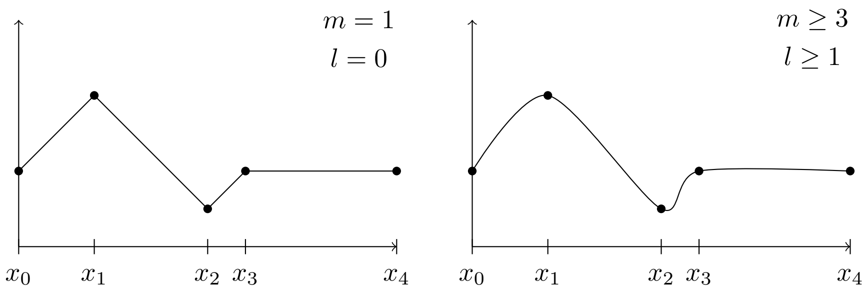
Zur Abkürzung bezeichne $\Delta$ eine Zerlegung des Intervall $[a, b]$ durch die Stützstellen $a =: x_0 < ... < x_n := b$.

**Definition 3.1 (Polynomspline)**
Ein Polynomspline vom Grad $m \in \mathbb{N}$ und Glattheit $l \in \mathbb{N}$ zur Zerlegung $\Delta$ ist eine Funktion $s \in C^l[a, b]$ mit

$$s_k := s|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \Pi_n \quad \text{für } k = 0, ..., n-1$$

Dabei bezeichnet $s|_{[x_k, x_{k+1}]}$ die Einschränkung von $s$ auf das Intervall $[x_k, x_{k+1}]$. Die Menge aller Splines wird mit $\mathcal{S}_m^l(\Delta)$ bezeichnet.

Folglich ist ein Polynomspline $s \in \mathcal{S}_m^l(\Delta)$ auf jedem der Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ ein Polynom vom Höchstgrad $m$. Außerdem ist $s \in \mathcal{S}_m^l(\Delta)$ in allen Punkten $x \in [a, b]$ (also auch in den Stützstellen) $l$-mal stetig differenzierbar. $\mathcal{S}_m^l(\Delta)$ ist mit der üblichen Addition und Multiplikation ein Vektorraum. Speziell ist $\mathcal{S}_1^0(\Delta)$ die Menge aller stetigen stückweise affin linearen Funktionen.




## 3.2. Interpolation durch kubische Polynomsplines

Gegeben sei eine Zerlegung $\Delta$ und die Stützwerte $f_0, ..., f_n$. Gesucht ist eine Funktion $s \in \mathcal{S}_3^l(\Delta)$ mit $l = 1, 2$ derart, dass

$$s(x_k) = f_k \quad \text{für } k = 0, ..., n \tag{6}$$

Jede derartige Funktion heißt kubischer Interpolationsspline .

**Konstruktion eines solchen Splines:**

$$h_k := x_{k-1} - x_k \quad \text{für } k = 0, ..., n-1$$
$$m_k := s'(x_k) \quad \text{für } k = 0, ..., n-1$$

Wegen $l \in \{1, 2\}$ ist $s$ zunächst stetig differenzierbar. Wegen $s_k = s|_{[x_k, x_{k+1}]}$ für $k = 0, ..., n-1$ und $m = 3$ kann man folgenden Ansatz für $s_k$ benutzen:

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k \tag{7}$$

Aus den Interpolationsbedingungen Gleichung (6) und der stetigen Differenzierbarkeit aller Funktionen in $s \in \mathcal{S}_m^l(\Delta)$ für $l \geq 1$ ergeben sich folgende Forderungen an $s_k$, $k = 0, ..., n-1$:

$$\begin{aligned} s_k(x_k) = f_k \quad &\text{und} \quad s_k(x_{k+1}) = f_{k+1} \\ s_k'(x_k) = m_k \quad &\text{und} \quad s_k'(x_{k+1}) = m_{k+1} \end{aligned} \tag{8}$$

Diese liefern:

$$\begin{aligned} d_k &= s_k(x_k) = f_k \\ c_k &= s_k'(x_k) = m_k \end{aligned} \tag{9}$$

und damit:

$$\begin{aligned} s_k(x_{k+1}) &= a_k h_k^3 + b_k h_k^2 + m_k h_k + f_k = f_{k+1} \\ s_k'(x_{k+1}) &= 3a_k h_k^2 + 2b_k h_k + m_k = m_{k+1} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich $a_k$ und $b_k$ als eindeutige Lösung für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} h_k^3 & h_k^2 \\ 3h_k^2 & 2h_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} - f_k - m_k f_k \\ m_{k+1} - m_k \end{pmatrix} \tag{10}$$

Die Determinante ist $-h_k^4 \neq 0$.

**Satz 3.2**
Sei eine Zerlegung $\Delta$ des Intervalls $[a, b]$ gegeben. Dann gibt es für beliebig gewählte reelle Zahlen $f_0, ..., f_n$ und $m_0, ..., m_n$ einen Interpolationsspline $s \in \mathcal{S}_3^1(\Delta)$, der den Interpolationsbedingungen

$$s'(x_0) = m_0, ..., s'(x_n) = m_n$$

genügt. Außerdem gilt:

$$s|_{[x_k, x_{k+1}]} = s_k \quad \text{für } k = 0, ..., n-1$$

mit $s_k$ entsprechend Gleichung (7), wobei sich $a_k, b_k, c_k, d_k$ aus Gleichung (9) und Gleichung (10) ergeben.

Für die Wahl der $m_k$ gibt es verschiedene Möglichkeiten, zum Beispiel:

- Falls Ableitungswerte der zu interpolierenden Funktion $f$ bekannt sind, kann man $m_k = f'(x_k)$ setzen.
- Man wählt $m_0, ..., m_n$ so, dass $s$ zweimal stetig differenzierbar ist, das heißt $s \in \mathcal{S}_3^2(\Delta)$ statt $s \in \mathcal{S}_3^1(\Delta)$ gilt.

## 3.3. Interpolation mit kubischen $C^2$-Splines

Damit ein kubischer Interpolationsspline $s$ zu $\mathcal{S}_3^2(\Delta)$ gehört, muss neben den Forderungen in Gleichung (8) die Stetigkeit von $s''$ an den Stützstellen $x_1, ..., x_{n-1}$ gewährleistet sein. Also hat man zusätzliche Bedingungen

$$s_k''(x_{k+1}) = s_{k+1}''(x_{k+1}) \quad \text{für } k = 0, ..., n-2$$

Mit Gleichung (7) ergibt sich $s''(x) = 6a_k(x - x_0) + 2b_k$ für $x \in [x_k, x_{k+1}]$ und damit $s_k''(x_{k+1}) = 6a_k h_k + 2b_k$ und $s_{k+1}''(x_{k+1}) = 2b_{k+1}$, also

$$3a_k h_k + b_k = b_{k+1} \quad \text{für } k = 0, ..., n-2 \tag{11}$$

Aus Gleichung (10) folgt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{-2}{h_k^2}(f_{k+1} - f_k) + \frac{1}{h_k^2}(m_k + m_{k+1}) \\ b_k &= \frac{3}{h_k^2}(f_{k+1} - f_k) - \frac{1}{h_k}(2m_k + m_{k+1}) \end{aligned}$$

für $k = 0, ..., n-1$. Wegen Gleichung (11) erhält man für $k = 0, ..., n-2$

$$\begin{aligned} &\frac{-6}{h_k^2}(f_{k+1} - f_k) + \frac{3}{h_k}(m_k + m_{k+1}) + \frac{3}{h_k^2}(f_{k+1} - f_k) - \frac{1}{h_k}(2m_k + m_{k+1}) \\ &= \frac{-6}{h_{k+1}^2}(f_{k+2} - f_{k+1}) - \frac{1}{h_{k+1}}(2m_{k+1} + m_{k+2}) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_k}(m_k + 2m_{k+1}) + \frac{1}{h_{k+1}}(2m_{k+1} + m_{k+2}) = \frac{3}{h_k^2}(f_{k+1} - f_k) + \frac{3}{h_{k+1}^2}(f_{k+2} - f_{k+1}) \\ \text{bzw.} \quad &h_{k+1}m_k + 2(h_{k+1} + h_k)m_{k+1} + h_k m_{k+2} = \frac{3h_{k+1}}{h_k}(f_{k+1} - f_k) + \frac{3h_k}{h_{k+1}}(f_{k+2} - f_{k+1}) \end{aligned}$$

Also müssen die $n+1$ Zahlen $m_0, ..., m_n$ den $n-1$ Gleichungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 2 & \mu_0 & & & \\ & \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n-2} \end{pmatrix}$$

genügen, wobei $\lambda_k, \mu_k, r_k$ durch

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} \\
\mu_k &= \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \\
r_k &= \frac{3h_{k+1}}{h_k(h_k + h_{k+1})}(f_{k+1} - f_k) + \frac{3h_k}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})}(f_{k+2} - f_{k+1})
\end{aligned}$$

für $k = 0, ..., n-2$ gegeben sind. Die Systemmatrix und die erweiterte Systemmatrix haben den Rang $n-1$. Somit ist das Gleichungssystem lösbar, besitzt aber keine eindeutige Lösung. Um solche zu erhalten, kann man zusätzliche Bedingungen stellen, etwa

(a) **natürliche Randbedingungen:**

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0 \tag{12}$$

Diese sind gleichbedeutend mit

$$s_0''(x_0) = 6a_0(x - x_0) + 2b_0 = 0 \quad \text{und} \quad s_{n-1}''(x_n) = 6a_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + 2b_{n-1} = 0$$

Also folgt

$$b_0 = 0 \quad \text{und} \quad 3a_{n-1}h_{n-1} + b_{n-1} = 0$$

Nutzt man noch die Darstellung für $b_0$ sowie für $a_{n-1}$ und $b_{n-1}$, so folgt

$$2m_0 + m_1 = \frac{3}{h_0}(f_1 - f_0) \quad \text{und} \quad m_{n-1} + 2m_n = \frac{3}{h_{n-1}}(f_n - f_{n-1})$$

Fügt man beide Gleichungen geeignet zum obigen System hinzu, erhält man ein lineares Gleichungssystem mit einer regulären trigonales Systemmatrix. Dieses kann in $\mathcal{O}(n)$ Operationen gelöst werden.

(b) **Vollständige Randbedingungen:** Sind $f'(a)$ und $f'(b)$ bekannt, dann können die zusätzlichen Bedingungen

$$s'(x_0) = f'(a) \quad \text{und} \quad s'(x_n) = f'(b) \tag{13}$$

mittels $m_0 = f'(a)$ und $m_n = f'(b)$ geeignet in das Gleichungssystem eingefügt werden, so dass man analog zu Fall (a) eine trigonale reguläre Systemmatrix erhält.

(c) **Periodische Spline-Interpolation:** Falls

$$f'(a) = f'(b) \tag{14}$$

und $f''(a) = f''(b)$ gilt, dann sind

$$s'(x_0) = s'(x_n) \quad \text{und} \quad s''(x_0) = s''(x_n) \tag{15}$$

sinnvolle Randbedingungen, woraus sich zwei zusätzliche lineare Gleichungen zur Ergänzung des Gleichungssystems ableiten lassen.

(d) (nicht in der Vorlesung) **Not-in-knot Bedingung:** Es soll zusätzlich

$$s_0'''(x_1) = s_1'''(x_1) \quad \text{und} \quad s_{n-2}'''(x_{n-1}) = s_{n-1}'''(x_{n-1})$$

gelten, das heißt $s$ ist auf $[x_0, x_2]$ und auf $[x_{n-2}, x_n]$ ein Polynom dritten Grades. Man erhält daraus die Forderungen $a_0 = a_1$ und $a_{n-2} = a_{n-1}$, woraus sich zusätzliche Gleichungen in den Variablen $m_0, m_1, m_2$ und $m_{n-2}, m_{n-1}, m_n$ ergeben.

## 3.4. Eine Minimaleigenschaft kubischer $C^2$-Interpolationssplines

Durch

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad \|g\|_2 := \sqrt{\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x} \quad \text{für } f, g \in L^2[a,b]$$

ist ein Skalarprodukt bzw. eine Norm in $L^2[a,b]$ definiert.

**Satz 3.3**
Seien $f \in C^2[a,b]$, $\Delta$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $f_k := f(x_k)$ für $k = 0, ..., n$. Für einen Interpolationsspline $s \in \mathcal{S}_3^2(\Delta)$, der die natürlichen, vollständigen oder periodischen Randbedingungen (bei letzteren gelte Gleichung (14)) erfüllt, gilt:

$$\|s''\|_2^2 = \|f''\|_2^2 - \|f'' - s''\|_2^2 \le \|f''\|_2^2 \tag{16}$$

*Beweis.* Durch Nachrechnen sieht man

$$\int_a^b (f''(x))^2\mathrm{d}x - \int_a^b (f''(x) - s''(x))^2\mathrm{d}x = \int_a^b (s''(x))^2\mathrm{d}x + 2\int_a^b (f''(x) - s''(x))s''(x)\mathrm{d}x$$

Es wird nun $J := \int_a^b (f''(x) - s''(x))s''(x)\mathrm{d}x = 0$ gezeigt. Mit Hilfe partieller Integration folgt

$$J = (f'(x) - s'(x))s''(x)|_a^b - \int_a^b (f'(x) - s'(x))s'''(x)\mathrm{d}x$$

wobei $s'''$ auf jedem Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ konstant ist. Dies ergibt wegen Gleichung (6)

$$\begin{aligned}\int_a^b (f'(x) - s'(x))s'''(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} s'''(x_k + \frac{h_k}{2}) \int_{x_k}^{x_{x+1}} (f'(x) - s'(x))\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} s'''(x_k + \frac{h_k}{2})(f(x_{k+1}) - s(x_{k+1}) - f(x_k) + s(x_k)) \\ &= 0\end{aligned}$$

und damit

$$J = (f'(x) - s'(x))s''(x)|_a^b = (f'(b) - s'(b))s''(b) - (f'(a) - s'(a))s''(a)$$

Nutzt man nun noch Gleichung (12), **??** bzw. Gleichung (14) mit Gleichung (15), so folgt $J = 0$. □

## 3.5. Interpolationsfehler bei kubischer $C^2$-Interpolation

**Satz 3.4**
Seien $f \in C^2[a,b]$, $\Delta$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $f_k := f(x_k)$ für $k = 0, ..., n$. Für einen Interpolationsspline $s \in \mathcal{S}_3^2(\Delta)$, der die natürlichen, vollständigen oder periodischen Randbedingungen (bei letzteren gelte Gleichung (14)) erfüllt, gilt:

$$\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{2} h^{3/2} \|f''\|_2$$

wobei $h := \max\{h_0, ..., h_{n-1}\}$.

*Beweis.* Die Funktion $r := f - s$ hat wegen Gleichung (6) die $n+1$ Nullstellen $x_0, ..., x_n$. Der maximale Abstand benachbarter Nullstellen ist $h$. Nach dem Satz von Rolle besitzt $r'$ mindestens $n$ Nullstellen. Der Abstand zweier Nullstellen von $r'$ ist durch $2h$ nach oben beschränkt. Sei $z \in [a,b]$ so gewählt, dass $|r'(z)| = \|r'\|_\infty$. Dann gilt $|z - z^0| \leq h$ für die $z$ am nächsten liegende Nullstelle $z^0$ von $r'$. O.B.d.A. sei $z^0 \leq z$. Mit der Cauchy-Scharz-Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \|r'\|_\infty^2 &= |r'(z) - r'(z^0)|^2 \\ &= \left| \int_{z^0}^{z} r''(x) \cdot 1 \mathrm{d}x \right|^2 \\ &\leq \int_{z^0}^{z} r''(x)^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{z^0}^{z} 1^2 \mathrm{d}x \\ &\leq h \|r''\|_2^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Sei nun $y \in [a,b]$ so gewählt, dass $|r(y)| = \|r$
$Vert_\infty$. Dann gilt $|y - y_0| \leq h/2$ für die $y$ am nächsten liegende Nullstelle $y^0$ von $r$. O.B.d.A. sei $y^0 \leq y$. Mit Gleichung (17) ergibt sich

$$\|r\|_\infty = |r(y) - r(y^0)| = \left| \int_{y^0}^{y} r'(x) \mathrm{d}x \right| \leq \max |r'(x)| \cdot \int_{y^0}^{y} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2} \|r'\|_\infty \leq \frac{1}{2} h^{3/2} \|r''\|_2$$

Mit Satz 3.3 hat man $\|r''\|_2 \leq \|f\|_2$ und damit die Behauptung. □

**▶ Bemerkung 3.5**
Besitzt $f$ eine höhere Glattheit, so kann die obige Fehlerschranke bezüglich der $h$-Potenz verbessert werden. Es lassen sich ferner Abschätzungen für $\|f' - s'\|_\infty$ und $\|f'' - s''\|_\infty$ herleiten.

Kapitel II

# *numerische Quadratur und Integration*

## 1. Integration von Interpolationspolynomen

# 2. Newton-Cotes-Formeln

# 3. spezielle Newton-Cotes-Formeln

# 4. Zusammengesetzte Newton-Cotes-Formeln

# 5. Gauss'sche Quadraturformeln

**Kapitel III**

# *direkte Verfahren für lineare Gleichungssysteme*

## 1. Gauss'scher Algorithmus für quadratische Systeme

# 2. Lineare Quadratmittelprobleme

# 3. Kondition linearer Gleichungssysteme

Kapitel IV

# *Kondition von Aufgaben und Stabilität von Algorithmen*

## 1. Maschinenzahlen und Rundungsfehler

## 2. Fehleranalyse

Kapitel V

# Newton-*Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme*

## 1. Das Newton-Verfahren

## 2. Gedämpftes Newton-Verfahren

**Kapitel VI**

# *lineare Optimierung*

## 1. Ecken und ihre Charakterisierung

# 2. Simplex-Verfahren

# 3. Die Tableauform des Simplex-Verfahrens

# 4. Revidiertes Simplex-Verfahren

# 5. Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung

# Anhang

# Anhang A: Listen

## A.1. Liste der Theoreme

## A.2. Liste der benannten Sätze, Lemmata und Folgerungen

# Index