

Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

16. Juli 2018

Inhaltsverzeichnis

I	Endomorphismen	1
1	Eigenwerte	1
2	Das charakteristische Polynom	5
3	Diagonalisierbarkeit	7
4	Trigonalisierbarkeit	10
5	Das Minimalpolynom	13
6	Nilpotente Endomorphismen	16
7	Die JORDAN-Normalform	21
II	Skalarprodukte	24
1	Das Standardskalarprodukt	24
2	Bilinearformen und Sesquilinearformen	27
3	Euklidische und unitäre Vektorräume	30
4	Orthogonalität	32
5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	35
6	Selbstadjungierte Endomorphismen	38
7	Hauptachsentransformation	40
8	Quadriken	44
III	Dualität	49
1	Das Lemma von Zorn	49
2	Der Dualraum	52
3	Die duale Abbildung	55
4	Die adjungierte Abbildung	58
5	Der Spektralsatz	61
6	Tensorprodukte	64
IV	Moduln	69
1	Moduln	69
2	Teilbarkeit	73
3	Hauptidealringe	77
4	Faktorielle Ringe	79
5	Quotienten von Ringen und Moduln	82
6	Der Elementarteilersatz	86
	Anhang	90
A	Listen	90
A.1	Liste der Theoreme	90

A.2	Liste der benannten Sätze	91
A.3	Liste der Mathematica/WolframAlpha-Befehle	92
	Index	93

Kapitel I

Endomorphismen

In diesem Kapitel seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, V ein n -dimensionaler K -VR und $f \in \text{End}_K(V)$ ein Endomorphismus.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Geometrie von f besser zu verstehen und Basen zu finden, für die $M_B(f)$ eine besonders einfache oder kanonische Form hat.

1. Eigenwerte

► Bemerkung 1.1

Wir erinnern uns daran, dass $\text{End}_K(V) = \text{Hom}_K(V, V)$ sowohl einen K -VR als auch einen Ring bildet. Bei der Wahl einer Basis B von V wird $f \in \text{End}_K(V)$ durch die Matrix $M_B(f) = M_B^B(f)$ beschrieben.

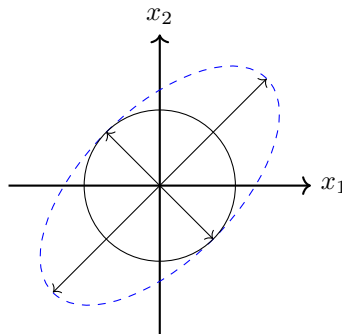
■ **Beispiel 1.2** $K = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}), f = f_A \in \text{End}_K(K^2)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{mit } B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ ist } M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Endomorphismus $f = f_A$ streckt also entlang der Achse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Faktor 3 und spiegelt

entlang der Achse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



Definition 1.3 (Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum)

Sind $0 \neq x \in V$ und $\lambda \in K$ mit $f(x) = \lambda x$ so nennt man λ einen Eigenwert von f und x einen Eigenvektor von f zum Eigenwert λ . Der Eigenraum zu $\lambda \in K$ ist $\text{Eig}(f, \lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$.

► Bemerkung 1.4

Für jedes $\lambda \in K$ ist $\text{Eig}(f, \lambda)$ ein UVR von V , da

$$\begin{aligned}\text{Eig}(f, \lambda) &= \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \\ &= \{x \in V \mid f(x) - \lambda \cdot \text{id}_V(x) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid (f - \lambda \cdot \text{id}_V)(x) = 0\} \\ &= \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_V)\end{aligned}$$

und $f - \lambda \cdot \text{id}_V \in \text{End}_K(V)$.

► Bemerkung 1.5

Achtung! Der Nullvektor ist nach Definition kein Eigenvektor, aber $\lambda = 0$ kann ein Eigenwert sein, nämlich genau dann, wenn $f \notin \text{Aut}_K(V)$, siehe Übung. Die Menge der Eigenvektoren zu λ ist also $\text{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ und λ ist genau dann ein Eigenwert von f , wenn $\text{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$.

■ Beispiel 1.6

Ist $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $f = f_A \in \text{End}_K(K^n)$, so sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ EW von f und jedes e_i ist ein EV zum EW λ_i .

Satz 1.7

Sei B eine Basis von V . Genau dann ist $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix, wenn B aus EV von f besteht.

Beweis. Ist $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis aus EV zu EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist $M_B(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und umgekehrt. \square

■ Beispiel 1.8

Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $f_\alpha \in \text{End}_K(\mathbb{R}^2)$ die Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für $\alpha = 0$ hat $f_\alpha = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW 1.

Für $\alpha = \pi$ hat $f_\alpha = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW -1.

Für $\alpha \neq 0, \pi$ hat f_α keine EW.

Lemma 1.9

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von f und ist x_i ein EV zu λ_i für $i = 1, \dots, m$, so ist (x_1, \dots, x_m) linear unabhängig.

Beweis. Induktion nach m

$m = 1$: klar, denn $x_1 \neq 0$

$m - 1 \rightarrow m$: Sei $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$ mit $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$.

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \lambda \cdot \text{id}_V) \left(\sum_{i=1}^m \mu_i x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_i (f(x_i) - \lambda_m \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i (\lambda_i - \lambda_m) \cdot x_i \end{aligned}$$

Nach IB ist $\mu_i (\lambda_i - \lambda_m) = 0$ für $i = 1, \dots, m - 1$, da $\lambda_i \neq \lambda_m$ für $i \neq m$ also $\mu_i = 0$ für $i = 1, \dots, m - 1$. Damit ist auch $\mu_m = 0$. Folglich ist (x_1, \dots, x_m) linear unabhängig. \square

Satz 1.10

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, so ist

$$\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i).$$

Beweis. Seien $x_i, y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, m$. Ist $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$, so ist $\sum_{i=1}^m \underbrace{x_i - y_i}_{z_i} = 0$.

o. E. seien $z_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$ und $z_i = 0$ für $i = r + 1, \dots, m$. Wäre $r > 0$, so wären (z_1, \dots, z_r) linear abhängig, aber $z_i = x_i - y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$, im Widerspruch zu Lemma 1.9. Somit ist $x_i = y_i$ für alle i und folglich ist die Summe $\sum \text{Eig}(f, \lambda_i)$ direkt. \square

Definition 1.11 (EW und EV für Matrizen)

Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$. Man definiert Eigenwerte, Eigenvektoren, etc von A als Eigenwerte, Eigenvektoren von $f_A \in \text{End}_K(K^n)$.

Mathematica/WolframAlpha-Befehle (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Um die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix A zu berechnen, gibt es in Mathematica bzw. WolframAlpha verschiedene Möglichkeiten:

- `Eigenvalues[A]`: liefert eine Liste der Eigenwerte
- `Eigenvectors[A]`: liefert eine Liste der Eigenvektoren
- `Eigensystem[A]`: liefert zu jedem Eigenwert den Eigenvektor

Satz 1.12

Sei B eine Basis von V und $\lambda \in K$. Genau dann ist λ ein EW von f , wenn λ ein EW von $A = M_B(f)$ ist. Insbesondere haben ähnliche Matrizen die selben EW.

Beweis. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_A} & K^n \\ \Phi_B \downarrow & & \downarrow \Phi_B \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

denn $f_A(x) = \lambda x \iff (\Phi_B \circ f_A)(x) = \Phi_B(\lambda x) \iff f(\Phi_B(x)) = \lambda \Phi_B(x)$.

Ähnliche Matrizen beschreiben den selben Endomorphismus bezüglich verschiedener Basen, vgl. IV.4.1 □

2. Das charakteristische Polynom

Satz 2.1

Sei $\lambda \in K$. Genau dann ist λ ein EW von f , wenn $\det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = 0$.

Beweis. Da $\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$ ist λ genau dann ein EW von f , wenn $\dim_K(\text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)) > 0$, also wenn $\lambda \cdot \text{id}_V - f \notin \text{Aut}_K(V)$. Nach IV.4.6 bedeutet dies, dass $\det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = 0$ \square

Definition 2.2 (charakteristisches Polynom)

Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ ist die Determinante der Matrix $t \cdot \mathbb{1}_n - A \in \text{Mat}_n(K[t])$.

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) \in K[t]$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ ist $\chi_f(t) = \chi_{M_B(f)}(t)$, wobei B eine Basis von V ist.

Mathematica/WolframAlpha-Befehle (charakteristisches Polynom)

Die folgende Funktion liefert das charakteristische Polynom einer Matrix A mit der Variable x

`CharacteristicPolynomial[A,x]`

Satz 2.3

Sind $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ mit $A \sim B$, so ist $\chi_A = \chi_B$. Insbesondere ist χ_f wohldefiniert.

Beweis. Ist $B = SAS^{-1}$ mit $S \in \text{GL}_n(K)$, so ist $t \cdot \mathbb{1}_n - B = S(t \cdot \mathbb{1}_n - A)S^{-1}$, also $t \cdot \mathbb{1}_n - B \sim t \cdot \mathbb{1}_n - A$ und ähnliche Matrizen haben die selben Determinante (IV.4.4).

Sind B, B' Basen von V , so sind $M_B(f) \sim M_{B'}(f)$, also $\chi_{M_B(f)} = \chi_{M_{B'}(f)}$ \square

Lemma 2.4

Für $\lambda \in K$ ist $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$.

Beweis. Sei B eine Basis von V und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Dann ist $M_B(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = \lambda \cdot \mathbb{1}_n - A$. Aus IV.2.8 und I.6.8 folgt $\det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \chi_A(\lambda) \\ &= \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) \\ &= \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) \\ &= \det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) \end{aligned} \quad \square$$

Satz 2.5

Sei $\dim_K(V) = n$ und $f \in \text{End}_K(V)$. Dann ist $\chi_f(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$ ein Polynom vom Grad n mit

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 1 \\ \alpha_{n-1} &= -\text{tr}(f) \\ \alpha_0 &= (-1)^n \cdot \det(f)\end{aligned}$$

Die Nullstellen von χ_f sind genau die EW von f .

Beweis. Sei B eine Basis von V und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Wir erinnern uns daran, dass $\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Es ist $\chi_f(t) = \det(t \cdot 1_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (t\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$.

Der Summand für $\sigma = \text{id}$ ist $\prod_{i=1}^n (t - a_{ii}) = t^n + \sum_{i=1}^n (-a_{ii})t^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^n (-a_{ii})$

Für $\sigma \neq \text{id}$ ist $\sigma(i) \neq i$ für mindestens zwei i , der entsprechende Summand hat also Grad höchstens $n-2$. Somit haben α_n und α_{n-1} die oben behauptete Form, und $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(f)$.

Die Aussage über die Nullstellen von χ_f folgt aus Satz 2.1 und Lemma 2.4. \square

Folgerung 2.6

Ist $\dim_K(V) = n$, so hat f höchstens n Eigenwerte.

Beweis. Satz 2.5 und I.6.10 \square

Definition 2.7 (normiertes Polynom)

Ein Polynom $0 \neq P \in K[t]$ mit Leitkoeffizient 1 heißt normiert.

■ Beispiel 2.8

1. Ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t - a_{ii})$, vgl. IV.2.9.c

Insbesondere ist $\chi_{1_n}(t) = (t - 1)^n$, $\chi_0(t) = t^n$

2. Für eine Blockmatrix $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen A_1, A_2 ist $\chi_A = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$
vgl. IV.2.9.e

3. Für

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad c_0, \dots, c_{n-1} \in K$$

ist $\chi_A(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$

Man nennt diese Matrix die Begleitmatrix zum normierten Polynom $P = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$ und schreibt $M_P := A$

3. Diagonalisierbarkeit

Definition 3.1 (diagonalisierbar)

Man nennt f diagonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, für die $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Lemma 3.2

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn

$$V = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

Beweis. (\Rightarrow): Ist B eine Basis aus EV von f (vgl. Satz 1.7), so ist $B \subseteq \bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$, also $V = \text{span}_K(\bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)) = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$.

(\Leftarrow): Ist $V = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$, so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $V = \sum_{i=1}^n \text{Eig}(f, \lambda_i)$. Wir wählen Basen B_i von $\text{Eig}(f, \lambda_i)$. Dann ist $\bigcup_{i=1}^n B_i$ ein endliches Erzeugendensystem von V , enthält also eine Basis von V (II.3.6). Diese besteht aus EV von f . \square

Satz 3.3

Ist $\dim_K(V) = n$, so hat f höchstens n Eigenwerte. Hat f genau n Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.

Beweis. Ist λ ein EW von f , so ist $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \geq 1$. Sind also $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von f , so ist

$$\begin{aligned} n = \dim_K(V) &\geq \dim_K\left(\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &\stackrel{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda_i)) \\ &\geq m \end{aligned}$$

Ist zudem $m = n$, so muss

$$\begin{aligned} \dim_K(V) &= \dim_K\left(\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \text{ sein, also} \\ V &= \sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i) \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar. \square

Definition 3.4 (a teilt b)

Sei R ein kommutativer Ring mit seien $a, b \in R$. Man sagt, a teilt b (in Zeichen $a|b$), wenn es $x \in R$ mit $b = ax$ gibt.

Definition 3.5 (Vielfachheit)

Für $0 \neq P \in K[t]$ und $\lambda \in K$ nennt man $\mu(P, \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N}_{>0} \mid (t - \lambda)^r \mid P\}$ die Vielfachheit der Nullstelle λ von P .

Lemma 3.6

Genau dann ist $\mu(P, \lambda) \geq 1$, wenn λ eine Nullstelle von P ist.

Beweis. (\Rightarrow) : $t - \lambda \mid P \Rightarrow P(t) = (t - \lambda) \cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t] \Rightarrow P(\lambda) = 0 \cdot Q(\lambda) = 0$.

(\Leftarrow) : $P(\lambda) = 0 \stackrel{I.6.9}{=} t - \lambda \mid P(t) \Rightarrow \mu(P, \lambda) \geq 1$. □

Lemma 3.7

Ist $P(t) = (t - \lambda)^r \cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t]$ und $Q(\lambda) \neq 0$, so ist $\mu(P, \lambda) = r$

Beweis. Offensichtlich ist $\mu(P, \lambda) \geq r$. Wäre $\mu(P, \lambda) \geq r + l$, so $(t - \lambda)^{r+l} \mid P(t)$ also $(t - \lambda)^r \cdot Q(t) = (t - \lambda)^{r+l} \cdot R(t)$ mit $R(t) \in K[t]$, folglich $t - \lambda \mid Q(t)$, insbesondere $Q(\lambda) = 0$.

(Denn wir dürfen kürzen: R ist nullteilerfrei, genau so wie $K[t]$).

$(t - \lambda)^r (Q(t) - (t - \lambda)R(t)) = 0 \Rightarrow Q(t) = (t - \lambda)R(t)$. □

Lemma 3.8

Sind $P, Q, R \in K[t]$ mit $PQ = PR$, und ist $P \neq 0$, so ist $Q = R$.

Beweis. $PQ = PR \Rightarrow P(Q - R) = 0 \stackrel{K[t] \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} Q - R = 0$, d.h. $Q = R$. □

Lemma 3.9

Es ist $\sum_{\lambda \in K} \mu(P, \lambda) \leq \deg(P)$, mit Gleichheit genau dann, wenn P in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Schreibe $P(t) = \prod_{\lambda \in K} (t - \lambda)^{r_\lambda} \cdot Q(t)$, wobei $Q(t) \in K[t]$ keine Nullstellen mehr besitzt. Nach Lemma 3.7 ist $\mu(P, \lambda) = r_\lambda$ für alle λ und somit $\deg(P) = \sum_{\lambda \in K} r_\lambda + \deg(Q) \geq \sum_{\lambda \in K} \mu(P, \lambda)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\deg(Q) = 0$, also $Q = c \in K$, d.h. genau dann, wenn $P(t) = c \cdot \prod_{\lambda \in K} (t - \lambda)^{r_\lambda}$. □

Lemma 3.10

Für $\lambda \in K$ ist

$$\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \geq \mu(x_f, \lambda)$$

Beweis. Ergänze eine Basis B von $\text{Eig}(f, \lambda)$ zu einer Basis B von V . Dann ist

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_s & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $A' \in \text{Mat}_{n-s}(K)$, also $\chi_f(t) = \chi_A(t) \stackrel{\text{Beispiel 2.8}}{=} \chi_{\lambda \mathbb{1}} \cdot \chi_{A'}(t) = (t - \lambda)^s \cdot \chi_{A'}(t)$ und somit $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = s \leq \mu(x_f, \lambda)$. □

Satz 3.11

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt und $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = \mu(\chi_f, \lambda)$ für alle $\lambda \in K$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \dim_K\left(\sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)\right) &\stackrel{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)\right) \\
 &\stackrel{\text{II.4.12}}{=} \sum_{\lambda \in K} \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 3.10}}{\leq} \sum_{\lambda \in K} \mu(\chi_f, \lambda) \tag{1} \\
 &\leq \deg(\chi_f) \tag{2} \\
 &= n
 \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar, wenn $\dim_K(\sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)) = n$, also wenn bei (1) und (2) Gleichheit herrscht. Gleichheit bei (1) bedeutet $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = \mu(\chi_f, \lambda)$ für alle $\lambda \in K$, und Gleichheit bei (2) bedeutet nach Lemma 3.9, dass χ_f in Linearfaktoren zerfällt. \square

Definition 3.12 (algebraische und geometrische Vielfachheit)

Man nennt $\mu_a(f, \lambda) = \mu(\chi_f, \lambda)$ die algebraische Vielfachheit und $\mu_g(f, \lambda) = \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ von f .

► Bemerkung 3.13

Wieder nennt man $A \in \text{Mat}_n(K)$ diagonalisierbar, wenn $f_A \in \text{End}_K(K^n)$ diagonalisierbar ist, also wenn $A \sim D$ für eine Diagonalmatrix D .

4. Trigonalisierbarkeit

Definition 4.1

Man nennt f trigonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

■ Beispiel 4.2

Ist f diagonalisierbar, so ist f auch trigonalisierbar.

Lemma 4.3

Ist f trigonalisierbar, so zerfällt χ_f in Linearfaktoren.

Beweis. Klar aus Beispiel 2.8 und Satz 2.3. □

Definition 4.4 (invariant)

Ein Untervektorraum $W \leq V$ ist f -invariant, wenn $f(W) \leq W$.

► Bemerkung 4.5

Ist W ein f -invarianter UVR von V , so ist $f|_W \in \text{End}_K(W)$.

■ Beispiel 4.6

1. V hat stets die f -invarianten UVR $W = \{0\}$ und $W = V$.
2. Jeder UVR $W \leq \text{Eig}(f, \lambda)$ ist f -invariant.
3. Ist $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V , für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, so sind alle UVR $W_i = \text{span}_K(x_1, \dots, x_i)$ f -invariant.
4. Sei $V = W \oplus U$, $B_1 = (x_1, \dots, x_r)$ Basis von W , $B_2(x_{r+1}, \dots, x_n)$ Basis von U und $B = (x_1, \dots, x_n)$. Ist W f -invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Sind W und U f -invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(f|_U) \end{pmatrix}$$

Lemma 4.7

Ist $W \subset V$ ein f -invarianter UVR, so gilt $\chi_{f|_W} | \chi_f$. Hat W ein lineares Komplement U , dass auch f -invariant ist, so $\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$.

Beweis. Ergänze eine Basis $B_0 = (x_1, \dots, x_r)$ von W zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V . Sei $A = M_B(f)$,

$A_0 = M_{B_0}(f|_W)$. Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad C \in \text{Mat}_{n-r}(K)$$

folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C$, insbesondere $\chi_{f|_W} | \chi_f$.

Ist auch $U = \text{span}_K(x_{r+1}, \dots, x_n)$ f -invariant, so ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

und folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$. □

Theorem 4.8

Genau dann ist f trigonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. (\Rightarrow): Lemma 4.3

(\Leftarrow): Induktion nach $n = \dim_K(V)$.

$n = 1$: trivial

$n - 1 \rightarrow n$: Nach Annahme ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Sei x_1 ein EV zum EW λ_1 . Dann ist $V_1 = K \cdot x_1$ ein f -invarianter UVR. Ergänze $B_1 = (x_1)$ zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V und setze $B_2 = (x_2, \dots, x_n)$, $V_2 = \text{span}_K(B_2)$. $n - 1 \rightarrow n$: Nach Annahme ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Sei x_1 ein EV zum EW λ_1 . Dann ist $V_1 = K \cdot x_1$ ein f -invarianter UVR. Ergänze $B_1 = (x_1)$ zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V und setze $B_2 = (x_2, \dots, x_n)$, $V_2 = \text{span}_K(B_2)$.

$$\Rightarrow M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad A_2 \in \text{Mat}_{n-1}(K)$$

$$\chi_f(t) = \chi_{\lambda_1 \mathbb{1}_1} \cdot \chi_{A_2} = (t - \lambda_1) \cdot \chi_{A_2}(t)$$

$$\stackrel{\text{Lemma 3.7}}{\Rightarrow} \chi_{A_2}(t) = \prod_{i=2}^n (t - \lambda_i)$$

Seien $\pi_1, \pi_2 \in \text{End}_K(V)$ gegeben durch $M_B(\pi_1) = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$ und $M_B(\pi_2) = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$. Dann ist $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}_V$ und $f_i = \pi_i \circ f$ ist $f = \text{id}_V \circ f = f_1 + f_2$ und $f_2|_{V_2} \in \text{End}_K(V_2)$. Nach Induktionshypothese ist $f_2|_{V_2}$ trigonalisierbar, da $M_B(f_2|_{V_2}) = A_2$, also $\chi_{f_2|_{V_2}} = \chi_{A_2}$. Dies bedeutet, es gibt also eine Basis $B'_2 = (x'_2, \dots, x'_n)$ von V_2 , für die $M_{B'_2}(f_2|_{V_2})$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist für $B' = (x_1, x'_2, \dots, x'_n)$ auch

$$\begin{aligned} M_{B'}(f) &= M_{B'}(f_1) + M_{B'}(f_2) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{B'_2}(f_2|_{V_2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine obere Dreiecksmatrix. □

Folgerung 4.9

Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist jedes $f \in \text{End}_K(V)$ trigonalisierbar.

Beweis. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfällt nach I.6.14 jedes Polynom über K in Linearfaktoren, ins-

besondere also χ_f . □

Folgerung 4.10

Ist V ein endlichdimensionaler \mathbb{C} -VR, so ist jedes $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ trigonalisierbar.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra I.6.16 ist \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen. □

5. Das Minimalpolynom

Definition 5.1

Für ein Polynom $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \in K[t]$ definieren wir $P(f) = \sum_{i=0}^m c_i f^i \in \text{End}_K(V)$, wobei $f^0 = \text{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ...

Analog definiert man $P(A)$ für $A \in \text{Mat}_n(K)$.

► **Bemerkung 5.2** Die Abbildung $\begin{cases} K[t] \rightarrow \text{End}_K(V) \\ P \mapsto P(f) \end{cases}$ ist ein Homomorphismus von K -VR und Ringen. Sein Kern ist das Ideal

$$\mathcal{I}_f := \{P \in K[t] \mid P(f) = 0\}$$

und sein Bild ist der kommutative Unterring

$$\begin{aligned} K[f] &:= \{P(f) \mid P \in K[t]\} \\ &= \text{span}_K(f^0, f^1, f^2, \dots) \end{aligned}$$

des (im Allgemeinen nicht kommutativen) Rings $\text{End}_K(V)$.

Analog definiert man \mathcal{I}_A und $K[A] \leq \text{Mat}_n(K)$.

Lemma 5.3

$$\mathcal{I}_f \neq \{0\}$$

Beweis. Wäre $\mathcal{I}_f = \{0\}$, so wäre $K[t] \rightarrow \text{End}_K(V)$ injektiv, aber $\dim_K(K[t]) = \infty > n^2 = \dim_K(\text{End}_K(V))$, ein Widerspruch. \square

Satz 5.4

Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$. Dieses teilt jedes $Q \in K[t]$ mit $Q(f) = 0$.

Beweis. Nach Lemma 5.3 gibt es $0 \neq P \in K[t]$ mit $P(f) = 0$ von minimalem Grad d . Indem wir durch den Leitkoeffizienten von P teilen, können wir annehmen, dass P normiert ist.

Sei $Q \in \mathcal{I}_f$. Polynomdivision liefert $R, H \in K[t]$ mit $Q = P \cdot H + R$ und $\deg(R) < \deg(P) = d$. Es folgt $R(f) = \underbrace{Q(f)}_{=0} - \underbrace{P(f)}_{=0} \cdot H(f) = 0$. Aus der Minimalität von d folgt $R = 0$ und somit $P \mid Q$.

Ist Q zudem normiert vom Grad d , so ist $H = 1$, also $Q = P$, was die Eindeutigkeit zeigt. \square

Definition 5.5 (Minimalpolynom)

Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$ nennt man das Minimalpolynom P_f von f .

Analog definiert man das Minimalpolynom $P_A \in K[t]$ einer Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$.

Mathematica/WolframAlpha-Befehle (Minimalpolynom)

Die Funktion für das Minimalpolynom p mit der Variable t in Mathematica bzw. WolframAlpha lautet:

`MinimalPolynomial[p,x]`

■ Beispiel 5.6

1. $A = \mathbb{1}_n$, $\chi_A(t) = (t-1)^n$, $P_A(t) = t-1$
2. $A = 0$, $\chi_A(t) = t^n$, $P_A(t) = t$
3. Ist $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t-a_i) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)^{\mu_a(f_A, \lambda_i)}$, $P_A(t) = \prod_{i=1}^r (t-\lambda_i)$ und es folgt $\deg(P_A) \geq |\{a_1, \dots, a_n\}| = r$.

Definition 5.7 (f -zyklisch)

Ein f -invarianter UVR $W \leq V$ heißt f -zyklisch, wenn es ein $x \in W$ mit $W = \text{span}_K(x, f(x), f^2(x), \dots)$ gibt.

Lemma 5.8

Sei $x \in V$ und $x_i = f^i(x)$. Es gibt ein kleinstes k mit $x_k \in \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$, und $W = \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$ ein f -zyklischer UVR von V mit Basis $B = (x_0, \dots, x_{k-1})$ und $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$.

Beweis. Da $\dim_K(V) = n$ ist (x_0, \dots, x_n) linear abhängig, es gibt also ein kleinstes k mit (x_0, \dots, x_{k-1}) linear unabhängig, aber (x_0, \dots, x_k) linear abhängig, folglich $x_k \in \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$. Mit $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ ist dann Da $\dim_K(V) = n$ ist (x_0, \dots, x_n) linear abhängig, es gibt also ein kleinstes k mit (x_0, \dots, x_{k-1}) linear unabhängig, aber (x_0, \dots, x_k) linear abhängig, folglich $x_k \in \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$. Mit $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ ist dann

$$M_B(f|_W) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

somit $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$. □

Theorem 5.9 (Satz von Cayley-Hamilton)

Für $f \in \text{End}_K(V)$ ist $\chi_f(f) = 0$.

Beweis. Sei $x \in V$. Definiere $x_i = f^i(x)$ und $W = \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$ wie in Lemma 5.8. Sei $\chi_{f|_W} = t^k +$

$\sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$. Wenden wir $\chi_{f|_W}(f) \in \text{End}_K(V)$ auf x an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\chi_{f|_W}(f)(x) &= \left(f^k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i f^i \right)(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} -c_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i \\ &= 0\end{aligned}$$

Aus $\chi_{f|_W}|_{\chi_f}$ (Beispiel 4.6) folgt somit $\chi_f(f)(x) = 0$, denn ist $\chi_f = Q \cdot \chi_{f|_W}$ mit $Q \in K[t]$, so ist $\chi_f(f) = Q(f) \circ \chi_{f|_W}(f)$, also $\chi_f(f)(x) = Q(f)(\underbrace{\chi_{f|_W}(f)(x)}_{=0}) = 0$. Da $x \in V$ beliebig war, folgt $\chi_f(f) = 0 \in \text{End}_K(V)$. \square

Folgerung 5.10

Es gilt $P_f|_{\chi_f}$. Insbesondere ist $\deg(P_f) \leq n$.

Beweis. Theorem 5.9 + Satz 5.4 \square

► Bemerkung 5.11

Ist B eine Basis von V und $A = M_B(f)$, so ist $P_A = P_f$. Insbesondere ist $P_A = P_B$ für $A \sim B$. Als Spezialfall von Theorem 5.9 erhält man $\chi_A(A) = 0$ und $P_A|_{\chi_A}$.

► Bemerkung 5.12

Der naheliegende ‘Beweis’ $\underbrace{\chi_A}_{\in \text{Mat}_n(K)} = \det(t\mathbb{1}_n - A)(A) = \det(A\mathbb{1}_n - A) = \det(0) = \underbrace{0}_{\in K}$ ist falsch!

6. Nilpotente Endomorphismen

► Bemerkung 6.1

Für $f \in \text{End}_K(V)$ sind

- $f\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subseteq \text{Ker}(f^1) \subseteq \text{Ker}(f^2) \subseteq \dots$
- $V = \text{Im}(f^0) \supseteq \text{Im}(f^1) \supseteq \text{Im}(f^2) \supseteq \dots$

Folgen von UVR von V . Nach der Kern-Bild-Formel III.7.13 ist

$$\dim_K(\text{Ker}(f^i)) + \dim_K(\text{Im}(f^i)) = \dim_K(V) \quad \forall i$$

Da $\dim_K(V) = n < \infty$ gibt es ein d mit $\text{Ker}(f^d) = \text{Ker}(f^{d+i})$ und $\text{Im}(f^d) = \text{Im}(f^{d+i})$ für jedes $i \geq 0$.

■ Beispiel 6.2

$f = f_A$, $A \in \text{Mat}_2(K)$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \text{Ker}(f^0) = \text{Ker}(f^1) = \dots$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = \text{span}_K(e_2)$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \underbrace{\text{Ker}(f^1)}_{=\text{span}_K(e_1)} \subset \text{Ker}(f^2) = \dots = K^2$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = K^2$

Lemma 6.3

Seien $f, g \in \text{End}_K(V)$. Wenn f und g kommutieren, d.h. $f \circ g = g \circ f$, so sind die UVR $\text{Ker}(g)$ und $\text{Im}(g)$ f invariant.

Beweis. Ist $x \in \text{Ker}(f)$, so ist $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$, also $f(x) \in \text{Ker}(g)$. Für $g(x) \in \text{Im}(g)$ ist $f(g(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$. \square

Satz 6.4 (Lemma von Fitting)

Seien $V_i = \text{Ker}(f^i)$, $W_i = \text{Im}(f^i)$, $d = \min\{i : V_i = V_{i+1}\}$. Dann sind

$$\begin{aligned} \{0\} &= V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_d = V_{d+1} = \dots \\ V &= W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \dots \supsetneq W_d = W_{d+1} = \dots \end{aligned}$$

Folgen f -invarianter UVR und $V = V_d \oplus W_d$.

Beweis. Da f^i und f^j für beliebige i, j kommutieren, sind V_i und V_j nach Lemma 6.3 f -invariant für jedes i . Aus $\dim_K(V_i) + \dim_K(W_i) = n$ folgt $d = \min\{i : W_i = W_{i+1}\}$, insbesondere ist $\text{Im}(f^d) = \text{Im}(f^{d+1}) = f(\text{Im}(f^d))$, somit $W_{d+i} = \text{Im}(f^{d+i}) = W_d$ für $i \geq 0$, also auch $V_d = V_{d+i}$ für alle $i \geq 0$.

Insbesondere ist $f^d|_{W_d} : W_d \rightarrow W_{2d} = W_d$ surjektiv, also auch injektiv, also $V_d \cap W_d = \{0\}$. Aus der Dimensionsformel II.4.12 folgt dann $\dim_K(V_d + W_d) = \dim_K(V_d) + \dim_K(W_d) = \dim_K(V)$. Folglich ist $V_d + W_d = V$ und $V_d \cap W_d = \{0\}$, also $V = V_d \oplus W_d$. \square

Definition 6.5 (nilpotent)

Ein $f \in \text{End}_K(V)$ heißt nilpotent, wenn $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Analog heißt $A \in \text{Mat}_n(K)$ nilpotent, wenn $A^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Das kleinste k mit $f^k = 0$ bzw. A^k heißt die Nilpotenzklasse von f bzw. A .

Lemma 6.6

Ist f nilpotent, so gibt es eine Basis B von V , für die $M_B(f)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Induktion nach $n = \dim_K(V)$.

$n = 1$: $f^k = 0 \Rightarrow f = 0$

$n > 1$: Sei k die Nilpotenzklasse von f und $U = \text{Ker}(f^{k-1})$. Dann ist $U \subset V$. Da $f^k = f^{k-1} \circ f$ ist $f(V) \subset U$, insbesondere $f|_U \in \text{End}_K(U)$. Da $f|_U$ nilpotent ist, gibt es nach I.H. eine Basis B_0 von U , für die $M_{B_0}(f|_U)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Ergänze B_0 zu einer Basis B von V . Da $f(V) \subset U$ ist dann auch

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(f|_U) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix. \square

Satz 6.7

Für $f \in \text{End}_K(V)$ sind äquivalent:

- 1) f ist nilpotent
- 2) $f^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$
- 3) $P_f(t) = t^r$ für ein $r \leq n$
- 4) $\chi_f(t) = t^n$
- 5) Es gibt eine Basis B von V , mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis.

- 1) \Rightarrow 5): Lemma 6.6
- 5) \Rightarrow 4): Beispiel 2.8
- 4) \Rightarrow 3): Nach Folgerung 5.10 ist $P_f|_{\chi_f} = t^n$, also $t^n = P_f(t)Q(t)$ mit $Q \in K[t]$. Schreibe $P_f(t) = t^a \cdot P_1(t)$, $Q(t) = t^b \cdot Q_1(t)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, $P_1, Q_1 \in K[t]$, $P_1(0) \neq 0$, $Q_1(0) \neq 0$
 $\stackrel{3.8}{\Rightarrow} t^{n-(a+b)} = P_1(t)Q_1(t)$ und $(P_1Q_1)(0) \neq 0$
 $\Rightarrow n - (a + b) = 0 \Rightarrow P_1 = 1$, somit $P_f(t) = t^a$
- 3) \Rightarrow 2): $t^r = 0$, $r \leq n \Rightarrow f^n = 0$
- 2) \Rightarrow 1): nach Definition □

Folgerung 6.8

Die Nilpotenzklasse eines nilpotenten Endomorphismus $f \in \text{End}_K(V)$ ist höchstens $\dim_K(V)$.

Folgerung 6.9

Ist $d := \min\{i \mid \text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})\}$, so ist $d \leq \dim_K(\text{Ker}(f)) = \mu_a(f, 0)$.

Beweis. Sei $V_d = \text{Ker}(f^d)$, $W_d = \text{Im}(f^d)$, $k = \dim_K(V_d)$. Da $V = V_d \oplus W_d$ ist $\chi_f = \chi_{f|_{V_d}} \cdot \chi_{f|_{W_d}}$. Da $f|_{V_d}$ nilpotent ist, ist $\chi_{f|_{V_d}} = t$ nach Satz 6.7. Da $f|_{W_d}$ injektiv ist, ist $\chi_{f|_{W_d}}(0) \neq 0$. Somit ist $\mu_a(f, 0) = \mu(\chi_f, 0) \stackrel{3.6}{=} k$. Da $\dim_K(\text{Ker}(f^d)) > \dots > \dim_K(\text{Ker}(f)) > 0$ ist $k = \dim_K(\text{Ker}(f^d)) \geq d$, falls $d > 0$, sonst klar. □

► Bemerkung 6.10

Die Bedeutung nilpotenter Endomorphismen beim Finden geeigneter Basen ergibt sich aus der folgenden Beobachtung:

Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so ist $A = D + N$, wobei D eine Diagonalmatrix ist und N eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Anders gesagt: Jeder trigonalisierbare Endomorphismus ist Summe aus einem diagonalisierbaren und einem nilpotenten Endomorphismus.

Definition 6.11 (Jordan-Matrix)

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die JORDAN-Matrix

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_k(K)$$

weiter setzen wir für $\lambda \in K$ $J_k(\lambda) := \lambda \mathbb{1} + J_k$.

Lemma 6.12

Die JORDAN-Matrix J_k ist nilpotent von Nilpotenzklasse k .

Beweis. Es ist $(J_k)^r = (\delta_{i+r,j})_{i,j}$ für $r \geq 1$. □

Satz 6.13

Ist f nilpotent von Nilpotenzklasse k , so gibt es eindeutig bestimmte $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\sum_{d=1}^k dr_d = n$ und eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \text{diag}(\underbrace{J_k, \dots, J_k}_{r_k \text{ viele}}, \dots, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{r_1 \text{ viele}})$$

Beweis. Sei $U_i = \text{Ker}(f^i)$. Nach Satz 6.4 haben wir eine Folge $\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_k = V$ mit $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$ für alle $i > 0$.

Wir konstruieren eine Zerlegung $V = \bigoplus_{d=1}^k W_d$ mit $U_i = U_{i-1} \oplus W_i$, $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$, $f|_{W_d}$ injektiv für $i > 1$.

$$\begin{aligned} V &= U_k \\ V &= U_{k-1} \oplus W_k \\ V &= U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k \\ &\vdots \\ V &= U_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k \end{aligned}$$

Wähle W_k mit $V = U_k = U_{k-1} \oplus W_k$. Ist $k > 1$, so ist $W_k \cap \text{Ker}(f) \subseteq W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$, also $f|_{W_k}$ ist injektiv. Des weiteren ist $f(W_k) \subseteq U_{k-1}$ und aus $W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$ folgt $f(W_k) \cap U_{k-2} = \{0\}$. Wir können deshalb W_{k-1} mit $U_{k-1} = U_{k-2} \oplus W_{k-1}$ und $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$ wählen. Somit ist $V = U_{k-1} \oplus W_k = U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k$. Wir setzen dies fort und erhalten $V = U_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ mit $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$ und $f|_{W_i}$ injektiv für $i > 1$, wobei $U_0 = \{0\}$ und $W_1 = \text{Ker}(f)$.

Sie $r_d = \dim_K(W_d) - \dim_K(W_{d+1})$, wobei wir $W_{k+1} = \{0\}$. Wähle nun eine Basis $(x_{k,1}, \dots, x_{k,r_k})$ von W_k . Ist $k > 1$, so ist $f|_{W_k}$ injektiv und wir können $(f(x_{k,1}), \dots, f(x_{k,r_k}))$ durch Elemente $x_{k-1,1}, \dots, x_{k-1,r_{k-1}}$ zu einer Basis von W_{k-1} ergänzen, und so weiter.

Da $V = \bigoplus_{d=1}^k W_d$ ist

$$B = \{f^i(x_{d,j}) \mid d = 1, \dots, k, j = 1, \dots, r_d, i = 0, \dots, d-1\}$$

eine Basis von V , die bei geeigneter Anordnung das Gewünschte leistet.

Es bleibt zu zeigen, dass r_1, \dots, r_k eindeutig bestimmt sind. Ist B_0 eine Basis, für die $M_{B_0}(f)$ in der gewünschten Form ist, so ist

$$\begin{aligned} \dim_K(U_1) &= \sum_{d=1}^k r_d \\ \dim_K(U_2) &= \sum_{d=2}^k r_d + \sum_{d=1}^k r_d \\ &\vdots \\ \dim_K(U_k) &= \sum_{d=k}^k r_d + \dots + \sum_{d=1}^k r_d \end{aligned}$$

woraus man sieht, dass r_1, \dots, r_k durch U_1, \dots, U_k , also durch f eindeutig bestimmt. \square

■ **Beispiel 6.14**

Sei $f = f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

$\Rightarrow k = 3, U_0 = \{0\}, U_1 = \mathbb{R}e_1, U_2 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2, U_3 = V.$

Wähle W_3 mit $V = U_3 = U_2 \oplus W_3$, z.B. $W_3 = \mathbb{R}e_3.$

Wähle W_2 mit $U_2 = U_1 \oplus W_2$ und $f(W_3) \subseteq W_2$, also

$$W_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze $W_1 = U_1 = \text{Ker}(f) = \mathbb{R}e_1 \Rightarrow \text{Basis } B = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

7. Die Jordan-Normalform

Definition 7.1 (Hauptraum)

Der Hauptraum von f zum EW λ der Vielfachheit $r = \mu_a(f, \lambda)$ ist

$$\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Ker} \left((f - \lambda \text{id}_V)^r \right)$$

Lemma 7.2

$\text{Hau}(f, \lambda)$ ist ein f -invarianter UVR der Dimension $\dim_K(\text{Hau}(f, \lambda)) = \mu_a(f, \lambda)$, auf dem $f - \lambda \text{id}_V$ nilpotent ist und $\chi_{f|_{\text{Hau}(f, \lambda)}} = (t - \lambda)^{\mu_a(f, \lambda)}$

Beweis. f kommutiert sowohl mit f als auch mit id_V , somit auch mit $(f - \lambda \text{id}_V)^r$. Die f -Invarianz von $U = \text{Hau}(f, \lambda)$ folgt aus Lemma 6.3. Nach Folgerung 6.9 ist $\dim_K(U) = \mu_a(f - \lambda \text{id}_V, 0)$ und da $\chi_f(t) = \chi_{f - \lambda \text{id}_V}(t - \lambda)$ ist $\mu_a(f, \lambda) = \mu(\chi_f, \lambda) = \mu_a(f - \lambda \text{id}_V, 0)$. Da $f - \lambda \text{id}_V|_U$ nilpotent ist $\chi_{f - \lambda \text{id}_V|_U}(t) = t^r$, somit $\chi_{f|_U}(t) = (t - \lambda)^r$. \square

Satz 7.3 (Hauptraumzerlegung)

Ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ paarweise verschieden und $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$, so ist $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ mit $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$ eine Zerlegung in f -invariante UVR und für jedes i ist $\chi_{f|_{V_i}}(t) = (t - \lambda_i)^{r_i}$.

Beweis. Induktion nach m .

$m = 1$: $r_1 = n \stackrel{7.2}{\Rightarrow} V = V_1$.

$m - 1 \rightarrow m$: Nach Satz 6.4 ist $V = V_1 \oplus W_1$ mit $W_1 = \text{Im}((f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1})$ eine Zerlegung in f -invariante UVR mit $\dim_K(V_1) = r_1$, $\dim_K(W_1) = n - r_1$. Somit ist $\chi_f = \chi_{f|_{V_1}} \cdot \chi_{f|_{W_1}}$ und $\chi_{f|_{V_1}} \stackrel{7.2}{=} (t - \lambda_1)^{r_1}$ also $\chi_{f|_{W_1}} = \prod_{i=2}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$. Nach I.H. ist also $W_1 = \bigoplus_{i=2}^m \text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)$. Es ist für $i \geq 2$ $\text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i) \subseteq \text{Hau}(f, \lambda_i) = V_i$ und da $\dim_K(\text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)) = r_i = \dim_K(\text{Hau}(f, \lambda_i))$ gilt Gleichheit. Damit ist

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus W_1 \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m \text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i) \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m V_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^m V_i \end{aligned} \quad \square$$

■ Beispiel 7.4

$f = f_A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$$

$$\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \underbrace{\text{Hau}(f, 1)}_{\dim=2} \oplus \underbrace{\text{Hau}(f, 2)}_{\dim 1}$$

$$\text{Hau}(f, 1) = \text{Ker}((f - \text{id})^2) = L((A - \mathbb{1})^2, 0)$$

$$\text{Hau}(f, 2) = \text{Ker}(f - 2 \text{id}) = \text{Eig}(f, 2) = L(A - 2\mathbb{1}, 0)$$

$$A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix}, (A - \mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 12 & \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hau}(f, 1) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$$

$$A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hau}(f, 2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit } B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ ist}$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Theorem 7.5 (Jordan-Normalform)

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom χ_f in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$ und $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^r k_i = \dim_K(V)$ und eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \text{diag}(J_{k_1}(\mu_1), \dots, J_{k_r}(\mu_r))$$

Die Paare $(\mu_1, k_1), \dots, (\mu_r, k_r)$ heißen die JORDAN-Invarianten von f und sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Beweis. Schreibe $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, $r_i \in \mathbb{N}$. Sei $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$. Nach Satz 7.3 ist $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ eine Zerlegung in f -invariante UVR. Für jedes i wenden wir Satz 6.13 auf $(f - \lambda_i \text{id}_V)|_{V_i}$ an und erhalten eine Basis B_i von V_i und $k_{i,1} \geq \dots \geq k_{i,s_i}$ mit

$$M_B((f - \lambda_i \text{id})|_{V_i}) = \text{diag}(J_{k_{i,1}}, \dots, J_{k_{i,s_i}})$$

Es folgt $M_{B_i}(f|_{V_i}) = M_{B_i}(\lambda_i \text{id}_{V_i}) + M_{B_i}((f - \lambda_i \text{id}_V)|_{V_i})$. Ist nun B die Vereinigung der B_i , so hat $M_B(f)$ die gewünschte Form. Die Eindeutigkeit der JORDAN-Invarianten folgt aus der Eindeutigkeit der $k_{i,j}$ in Lemma 6.3. \square

► **Bemerkung 7.6**

Ist K algebraisch abgeschlossen, so haben wir nun eine (bis auf Permutationen) eindeutige Normalform für Endomorphismen $f \in \text{End}_K(V)$ gefunden. Aus ihr lassen sich viele Eigenschaften des Endomorphismus leicht ablesen.

Folgerung 7.7

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ trigonalisierbar mit $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f, \lambda_i)}$, $P_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{d_i}$ und JORDAN-Invarianten $(\mu_1, k_1), \dots, (\mu_r, k_r)$. Mit $J_i = \{j \mid \mu_j = \lambda_i\}$ ist dann

$$\begin{aligned}\mu_g(f, \lambda_i) &= |J_i| \\ \mu_a(f, \lambda_i) &= \sum_{j \in J_i} k_j \\ d_i &= \max\{k_j \mid j \in J_i\}\end{aligned}$$

Beweis. • μ_a : klar, da $\chi_f(t) = \prod_{j=1}^r (t - \mu_j)^{k_j} = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f, \lambda_i)}$

- μ_g : lese Basis von $\text{Eig}(f, \lambda_i)$ aus JORDAN-NF: Jeder Block $J_{k_j}(\lambda_i)$ liefert ein Element der Basis.
- d_i : folgt, da J_{k_j} nilpotent von Nilpotenzklasse k_j ist (Lemma 6.12). □

Folgerung 7.8

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn

$$\begin{aligned}\chi_f(t) &= \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ paarweise verschieden und} \\ P_f(t) &= \prod_{i=1}^m m(t - \lambda_i)\end{aligned}$$

Beweis. Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn f trigonalisierbar ist und die JORDAN-NF die Diagonalmatrix ist (Eindeutigkeit der JNF), also $k_j = 1$ für alle j . Nach Folgerung 7.7 ist dies äquivalent dazu, dass $d_i = 1$ für alle i , also $P_f = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)$. □

► **Bemerkung 7.9**

Wider definiert man die JORDAN-Invarianten, etc. von einer Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ als die JORDAN-Invarianten von $f_A \in \text{End}_K(K^n)$.

Folgerung 7.10

Seien $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ trigonalisierbar. Genau dann ist $A \sim B$, wenn A und B die gleichen JORDAN-Invarianten haben.

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit der JORDAN-Normalform. □

Kapitel II

Skalarprodukte

In diesem ganzen Kapitel seien

- $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$
- $n \in \mathbb{N}$
- V ein n -dimensionaler K -VR

1. Das Standardskalarprodukt

Sei zunächst $K = \mathbb{R}$.

Definition 1.1 (Standardskalarprodukt in \mathbb{R})

Auf den Standardraum $V = \mathbb{R}^n$ definiert man das Standardskalarprodukt in \mathbb{R} $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Satz 1.2

Das Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Beweis. • klar

- klar

- $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq x_j^2$ für jedes $j \Rightarrow \langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle > 0$ falls $x_j \neq 0$ für ein j . □

Definition 1.3 (euklidische Norm in \mathbb{R})

Auf $K = \mathbb{R}^n$ definiert man euklidische Norm in \mathbb{R} $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Satz 1.4 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. siehe Analysis, siehe VI.§3 □

Satz 1.5

Die euklidische Norm erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beweis. • Satz 1.2

- Satz 1.2
- $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \stackrel{1.4}{\Rightarrow} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ □

Sei nun $K = \mathbb{C}$.

Definition 1.6 (komplexe Konjugation, Absolutbetrag)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiert man $\bar{z} = x - iy$ heißt komplexe Konjugation .. Man definiert den Absolutbetrag von z als

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$ sehen wir

$$\bar{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$$

Satz 1.7

Komplexe Konjugation ist ein Ringautomorphismus von \mathbb{C} mit Fixkörper

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\} = \mathbb{R}$$

Beweis. siehe LAAG1 H47 □

Folgerung 1.8

Für $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ist $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A^t} = \overline{A}^t$, $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$

Beweis. Satz 1.7, einfache Übung □

Definition 1.9 (Standardskalarprodukt in \mathbb{C})

Auf $K = \mathbb{C}^n$ definiert man das Standardskalarprodukt in \mathbb{C} $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\langle x, y \rangle = x^t \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

Satz 1.10

Das komplexe Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x, x', y, y' \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

- Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- Für $x \in \mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Beweis. • klar

- klar

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

□

Definition 1.11 (euklidische Norm in \mathbb{C})

Auf $V = \mathbb{C}$ definiert man die euklidische Norm in \mathbb{C} $\| \cdot \| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

► Bemerkung 1.12

Schränkt man das komplexe Skalarprodukt auf den \mathbb{R}^n ein, so erhält man das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n . Wir werden ab jetzt die beiden Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ parallel behandeln. Wenn nicht anders angegeben, werden wir die Begriffe für den komplexen Fall benutzen, aber auch den reellen Fall einschließen.

2. Bilinearformen und Sesquilinearformen

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition 2.1 (Bilinearform, Sesquilinearform)

Eine Bilinearform ($K = \mathbb{R}$) bzw. Sesquilinearform ($K = \mathbb{C}$) ist eine Abbildung $s : V \times V \rightarrow K$ für die gilt:

- Für $x, x', y \in V$ ist $s(x + x', y) = s(x, y) + s(x', y)$
- Für $x, y, y' \in V$ ist $s(x, y + y') = s(x, y) + s(x, y')$
- Für $x, y \in V, \lambda \in K$ ist $s(\lambda x, y) = \lambda s(x, y)$
- Für $x, y \in V, \lambda \in K$ ist $s(x, \lambda y) = \overline{\lambda} s(x, y)$

► Bemerkung 2.2

Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist $\lambda = \overline{\lambda}$. Wir werden der Einfachheit halber auch in diesem Fall von Sesquilinearformen sprechen, vgl. Bemerkung 1.12

■ Beispiel 2.3

Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_n(K)$ ist $s_A : K^n \times K^n \rightarrow K^n$ gegeben durch

$$s_A(x, y) = x^t A \bar{y} = x^t \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{y}_j \right)_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \bar{y}_j$$

eine Sesquilinearform auf $V = K^n$.

Definition 2.4

Sei s eine Sesquilinearform auf V und $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Die darstellende Matrix von s bzgl. B ist

$$M_B(s) = (s(v_i, v_j))_{i,j} \in \text{Mat}_n(K)$$

■ Beispiel 2.5

Die darstellende Matrix des Standardskalarprodukts $s = s_{\mathbb{1}_n}$ auf den Standardraum $V = K^n$ bzgl. der Standardbasis \mathcal{E} ist

$$M_{\mathcal{E}}(s) = \mathbb{1}_n$$

Lemma 2.6

Seien $v, w \in V$. Mit $x = \Phi_B^{-1}(v)$, $y = \Phi_B^{-1}(w)$ und $A = M_B(s)$ ist $s(v, w) = x^t A \bar{y} = s_A(x, y)$.

Beweis. Achtung: v_i beschreibt das i -te Element der Basis B !

$$s(v, w) = s\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j s(v_i, v_j) = x^t A \bar{y}$$

□

Satz 2.7

Sei B eine Basis von V . Die Abbildung $s \mapsto M_B(s)$ ist eine Bijektion zwischen den Sesquilinearformen auf V und $\text{Mat}_n(K)$.

Beweis. • injektiv: Lemma 2.6

- surjektiv: Für $A \in \text{Mat}_n(K)$ wird durch $s(v, w) = \Phi_B^{-1}(v)^t \cdot A \cdot \overline{\Phi_B^{-1}(w)}$ eine Sesquilinearform auf V mit $M_B(s) = (s(v_i, w_j))_{i,j} = (e_i^t A e_j)_{i,j} = (e_i A e_j)_{i,j} = A$ definiert. \square

Satz 2.8 (Transformationsformel)

Seien B und B' Basen von V und s eine Sesquilinearform auf V . Dann gilt:

$$M_{B'}(s) = (T_B^{B'})^t \cdot M_B(s) \cdot \overline{T_B^{B'}}$$

Beweis. Seien $v, w \in V$. Definiere $A = M_B(s)$, $A' = M_{B'}(s)$, $T = T_B^{B'}$ und $x, y, x', y' \in K^n$ mit $v = \Phi_B(x) = \Phi_B(x')$, $w = \Phi_B(y) = \Phi_B(y')$. Dann ist $x = Tx'$, $y = Ty'$ und somit

$$\begin{aligned} (x')^t A' \overline{y'} &\stackrel{2.6}{=} s(v, w) \\ &\stackrel{2.6}{=} x^t A \overline{y} \\ &= (Tx')^t A \overline{Ty'} \\ &= (x')^t T^t A \overline{Ty'} \end{aligned}$$

Da $v, w \in V$ und somit $x', y' \in K$ beliebig waren, folgt $A = T^t A T$. \square

■ Beispiel 2.9

Sei s das Standardskalarprodukt auf dem K^n und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis des K^n . Dann ist

$$M_B(s) = (T_{\mathcal{E}}^B)^t \cdot M_{\mathcal{E}}(s) \cdot \overline{T_{\mathcal{E}}^B} = B^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{B} = B^t B$$

wobei $B = (b_1, \dots, b_n) \in \text{Mat}_n(K)$.

Satz 2.10

Sei s eine Sesquilinearform auf V . Dann sind äquivalent:

- Es gibt $0 \neq v \in V$ mit $s(v, w) = 0$ für alle $w \in V$.
- Es gibt $0 \neq w \in V$ mit $s(v, w) = 0$ für alle $v \in V$.
- Es gibt eine Basis B von V mit $\det(M_B(s)) = 0$.
- Für jede Basis B von V gilt $\det(M_B(s)) = 0$.

Beweis. Sei B eine Basis von V , $v = \Phi_B(x)$ und $A = M_B(s)$. Genau dann ist die (semilineare) Abbildung $w \mapsto s(v, w)$ die Nullabbildung, wenn $x^t A \overline{y} = 0$ für alle $y \in K^n$, also wenn $0 = x^t A$, d.h. $A^t x = 0$. Somit ist (1) genau dann erfüllt, wenn A^t nicht invertierbar ist, also wenn $0 = \det(A^t) = \det(A)$. Damit $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ gezeigt und $(2) \iff (4)$ zeigt man analog. \square

Definition 2.11 (ausgeartet)

Eine Sesquilinearform s auf V heißt ausgeartet, wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 2.10 erfüllt ist, sonst nicht-ausgeartet.

Definition 2.12 (symmetrisch, hermitesch)

Eine Sesquilinearform s auf V heißt symmetrisch, wenn bzw. hermitesch, wenn

$$s(x, y) = \overline{s(y, x)} \quad \text{für alle } x, y \in V$$

Eine Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ heißt symmetrisch bzw. hermitesch, wenn $A = A^* = \overline{A}^t = \overline{A^t}$.

Mathematica/WolframAlpha-Befehle (symmetrische bzw. hermitesche Matrizen)

Wie für vieles Andere auch, hat Mathematica bzw. WolframAlpha auch dafür eine Funktion:

`SymmetricMatrixQ[A]`

`HermitianMatrixQ[A]`

Satz 2.13

Sei s eine Sesquilinearform auf V und B eine Basis von V . Genau dann ist s hermitesch, wenn $M_B(s)$ dies ist.

Beweis. (\Rightarrow) : klar aus Definition von $M_B(s)$.

(\Leftarrow) : $x = \Phi_B^{-1}$, $y = \Phi_B^{-1}(w)$, $\overline{s(v, w)} = \overline{s(v, w)^t} = \overline{(x^t A \overline{y})^t} = y^t \overline{A^t x} = s(w, v)$

□

Satz 2.14

Für $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ und $S \in \text{GL}_n(K)$ ist $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$, $(A^*)^* = A$ und $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$.

Beweis. Folgerung 1.8, III.1.14, III.1.15

□

3. Euklidische und unitäre Vektorräume

Lemma 3.1

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V . Dann ist $s(x, x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$.

Beweis. Da s hermitesch ist, ist $s(x, x) = \overline{s(x, x)}$, also $s(x, x) \in \mathbb{R}$. □

Definition 3.2 (quadratische Form)

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V . Die quadratische Form zu s ist die Abbildung

$$q_s : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto s(x, x) \end{cases}$$

► Bemerkung 3.3

Die quadratische Form q_s erfüllt das $q_s(\lambda x) = |\lambda|^2 \cdot q_s(x)$ für alle $x \in V$, $\lambda \in K$. Im Fall $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^t$, $s = s_A$, $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist $q_s(x) = s_A(x, x) = x^t A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ein “quadratisches Polynom in den Variablen x_1, \dots, x_n ”.

Satz 3.4 (Polarisierung)

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V . Dann gilt für $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{1}{2}(q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y)) & K = \mathbb{R} \\ s(x, y) &= \frac{1}{4}(q_s(x+y) - q_s(x-y) + iq_s(x+iy) - iq_s(x-iy)) & K = \mathbb{C} \end{aligned}$$

Beweis. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y) &= s(x+y, x+y) - s(x, x) - s(y, y) \\ &= s(x, x) + s(x, y) + s(y, x) + s(y, y) - s(x, x) - s(y, y) \\ &= s(x, y) + s(y, x) - 2s(x, y) \end{aligned}$$

Im Fall $K = \mathbb{C}$: ÜA □

Definition 3.5 ((semi)definit, euklidischer VR, unitärer VR)

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V . Ist $s(x, x) \geq 0$ für alle $x \in V$, so heißt s positiv semidefinit. Ist $s(x, x) > 0$ für alle $0 \neq x \in V$, so heißt s positiv definit (oder ein Skalarprodukt).

Eine hermitesche Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ heißt positiv (semi)definit, wenn s_A dies ist.

Einen endlichdimensionalen K -VR zusammen mit positiv definiten hermiteschen Sesquilinearformen nennt man einen euklidischen bzw. unitären VR (oder auch Prähilbertraum). Wenn nicht anderes angegeben, notieren wir die Sesquilinearform mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

■ Beispiel 3.6

Der Standardraum $V = K^n$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt ist ein euklidischer bzw. unitärer VR.

■ **Beispiel 3.7**

Ist $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so ist s_A genau dann positiv definit, wenn $\lambda_i > 0$ für alle i , und positiv semidefinit, wenn $\lambda_i \geq 0$ für alle i .

Satz 3.8

Ist V ein unitärer VR und $U \subseteq V$ ein UVR, so ist U mit der Einschränkung des Skalarprodukts wieder ein unitärer VR.

Beweis. klar, die Einschränkung ist wieder positiv definit. □

Definition 3.9

Ist V ein unitärer VR, so definiert man die Norm von $x \in V$ als

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Satz 3.10

Die Norm eines unitären VR erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in V$ ist $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für $x \in V$ und $\lambda \in K$ ist $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für $x, y \in V$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beweis. • Das Skalarprodukt ist positiv definit.

- klar
 - Wie im Fall im \mathbb{R}^n
-

Satz 3.11

Ist V ein unitärer VR, so gilt für $x, y \in V$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Für $y = 0$ ist die Aussage klar.

Sei also $y \neq 0$. Für $\lambda, \mu \in K$ ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y \rangle \\ &= \lambda \bar{\lambda} \cdot \langle x, x \rangle + \mu \bar{\mu} \cdot \langle y, y \rangle + \lambda \bar{\mu} \cdot \langle x, y \rangle + \mu \bar{\lambda} \cdot \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

Setzt man $\lambda = \bar{\lambda} = \langle y, y \rangle > 0$ und $\mu = -\langle x, y \rangle$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \cdot \|x\|^2 \|y\|^2 + \mu \bar{\mu} \lambda - \lambda \mu \bar{\mu} - \langle x, y \rangle \bar{\lambda} \langle y, x \rangle \\ &= \lambda (\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2) \end{aligned}$$

Teilen durch λ und Wurzelziehen liefert die Ungleichung. Gilt dort Gleichheit, so ist $\|\lambda x + \mu y\| = 0$ folglich (da $\lambda \neq 0$) sind dann x, y linear unabhängig. Ist $x = \alpha y$ mit $\alpha \in K$, so ist $|\langle x, y \rangle| = |\alpha| \cdot \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$ □

4. Orthogonalität

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Definition 4.1 (orthogonal, orthogonales Komplement)

Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal, in Zeichen $x \perp y$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Zwei Mengen $X, Y \subseteq V$ sind orthogonal, in Zeichen $X \perp Y$, wenn $x \perp y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Für $U \subseteq V$ bezeichnet

$$U^\perp = \{x \in V \mid x \perp u \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement zu U .

Lemma 4.2

Für $x, y \in V$ ist

- $x \perp y \iff y \perp x$
- $x \perp 0$
- $x \perp x \iff x = 0$

Beweis. klar □

Satz 4.3

Für $U \subseteq V$ ist U^\perp ein Untervektorraum von V mit $U \perp U^\perp$ und $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$.

Beweis. Linearität des Skalarprodukts im ersten Argument liefert, dass U^\perp ein Untervektorraum ist. Die Aussage $U^\perp \perp U$ ist trivial, $U \perp U^\perp$ folgt dann aus Lemma 4.2. Ist $u \in U \cap U^\perp$, so ist insbesondere $u \perp u$, also $u = 0$ nach Lemma 4.2. □

Definition 4.4 (orthonormal)

Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen von V ist orthogonal, wenn $x_i \perp x_j$ für alle $i \neq j$, und orthonormal, wenn zusätzlich $\|x_i\| = 1$ für alle i . Eine orthogonale Basis nennt man eine Orthogonalbasis, eine orthonormale Basis nennt man eine Orthonormalbasis.

► Bemerkung 4.5

Eine Basis B ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die darstellende Matrix des Skalarprodukts bezüglich B die Einheitsmatrix ist. (Beispiel: Standardbasis des Standardraum bezüglich des Standardskalarprodukts)

Lemma 4.6

Ist die Familie $(x_i)_{i \in I}$ orthogonal und $x_i \neq 0$ für alle $i \in I$, so ist $(x_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Beweis. Ist $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$, $\lambda_i \in K$, fast alle gleich 0, so ist $0 = \langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, x_j \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle$. Aus $x_j \neq 0$ folgt $\langle x_j, x_j \rangle > 0$ und somit $\lambda_j = 0$ für jedes $j \in I$. □

Lemma 4.7

Ist $(x_i)_{i \in I}$ orthogonal und $x_i \neq 0$ für alle i , so ist $(y_i)_{i \in I}$ mit

$$y_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

orthonormal.

Beweis. Für alle i ist $\langle y_i, y_i \rangle = \frac{1}{\|x_i\|^2} \langle x_i, x_i \rangle = 1$.

Für alle $i \neq j$ ist $\langle y_i, y_j \rangle = \frac{1}{\|x_i\| \cdot \|x_j\|} \langle x_i, x_j \rangle = 0$. □

Satz 4.8

Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $B = (x_1, \dots, x_k)$ eine Orthonormalbasis von U . Es gibt genau einen Epimorphismus $\text{pr}_U : V \rightarrow U$ mit $\text{pr}_U|_U = \text{id}_U$ und $\text{Ker}(\text{pr}_U) \perp U$, insbesondere also $x - \text{pr}_U x \perp U$ für alle $x \in V$, genannt die orthogonale Projektion auf U , und dieser ist gegeben durch

$$x \mapsto \sum_{i=1}^k \langle x, x_i \rangle x_i \quad (1)$$

Beweis. Sei zunächst pr_U durch (1) gegeben. Die Linearität von pr_U folgt aus (S1) und (S3). Für $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in U$ ist $\langle u, x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j$, woraus $\text{pr}_U(u) = u$. Somit ist $\text{pr}_U|_U = \text{id}_U$, und insbesondere ist pr_U surjektiv. Ist $\text{pr}_U(x) = 0$, so ist $\langle x, x_i \rangle = 0$ für alle i , woraus mit (S2) und (S4) sofort $x \perp U$ folgt. Somit ist $\text{Ker}(\text{pr}_U) \perp U$.

Für $x \in V$ ist $\text{pr}_U(x - \text{pr}_U(x)) = \text{pr}_U(x) - \text{pr}_U(\text{pr}_U(x)) = \text{pr}_U(x) - \text{pr}_U(x) = 0$, also $x - \text{pr}_U(x) \in \text{Ker}(\text{pr}_U) \subseteq U^\perp$. Ist $f : V \rightarrow U$ ein weiterer Epimorphismus mit $f|_U = \text{id}_U$ und $\text{Ker}(f) \perp U$, so ist

$$\underbrace{\text{pr}_U(x)}_{\in U} - \underbrace{f(x)}_{\in U} = \underbrace{\text{pr}_U(x) - x}_{\in U^\perp} - \underbrace{f(x) - x}_{\in U^\perp} \in U \cap U^\perp = \{0\}$$

für jedes $x \in V$, somit $f = \text{pr}_U$. □

Theorem 4.9 (Gram-Schmidt-Verfahren)

Ist (x_1, \dots, x_n) eine Basis von V und $k \leq n$ mit (x_1, \dots, x_k) orthonormal, so gibt es eine Orthonormalbasis (y_1, \dots, y_n) von V mit $y_i = x_i$ für $i = 1, \dots, k$ und $\text{span}_K(y_1, \dots, y_l) = \text{span}_K(x_1, \dots, x_l)$ für $l = 1, \dots, n$.

Beweis. Induktion nach $d = n - k$.

$d = 0$: nichts zu zeigen

$d - 1 \rightarrow d$: Für $i \neq k+1$ definiere $y_i = x_i$. Sei $U = \text{span}_K(x_1, \dots, x_k)$, $\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} - \text{pr}_U(x_{k+1})$. Dann ist $\tilde{x}_{k+1} \in \text{Ker}(\text{pr}_U) \subseteq U^\perp$ (vgl. Satz 4.8) und $\text{span}_K(x_1, \dots, x_k, \tilde{x}_{k+1}) = \text{span}_K(x_1, \dots, x_{k+1})$. Setze $y_{k+1} = \frac{1}{\|\tilde{x}_{k+1}\|} \tilde{x}_{k+1}$. Dann ist (y_1, \dots, y_n) eine Basis von V mit (y_1, \dots, y_{k+1}) orthonormal (vgl. Lemma 4.7). Nach Induktionshypothese gibt es eine Orthonormalbasis von V , die das Gewünschte leistet. □

Folgerung 4.10

Jeder endlichdimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum V besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis. Wähle irgendeine Basis von V und wende Theorem 4.9 mit $k = 0$ an. □

Folgerung 4.11

Ist U ein Untervektorraum von V , so ist $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis von U (vgl. Folgerung 4.10), $B = (x_1, \dots, x_k)$ und ergänze diese zu einer Orthonormalbasis (x_1, \dots, x_n) von V (vgl. Theorem 4.9). Dann sind $x_{k+1}, \dots, x_n \in U^\perp$, da $U \cap U^\perp = \{0\}$ ist somit $V = U \oplus U^\perp$. Insbesondere ist $\dim_K(U^\perp) = n - \dim_K(U)$, woraus $\dim_K((U^\perp)^\perp) = \dim_K(U)$ folgt. Zusammen mit der trivialen Inklusion $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ folgt $U = (U^\perp)^\perp$. \square

Folgerung 4.12

Ist s eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf V und B eine Basis von V , so ist

$$\det(M_B(s)) \in \mathbb{R}_{>0}$$

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis B' von V bezüglich s . Dann ist $M_{B'}(s) = \mathbb{1}_n$, folglich

$$\begin{aligned} \det(M_B(s)) &= \det\left((T_{B'}^B)^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{T_{B'}^B}\right) \\ &= \det\left((T_{B'}^B)^t\right) \cdot \det\left(\overline{T_{B'}^B}\right) \\ &= \det\left(T_{B'}^B\right) \cdot \overline{\det\left(T_{B'}^B\right)} \\ &= |\det\left(T_{B'}^B\right)|^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

 \square

5. Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f \in \text{End}_K(V)$.

Definition 5.1 (orthogonale, unitäre Endomorphismen)

f ist orthogonal bzw. unitär, wenn

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Satz 5.2

Ist f unitär, so gelten

- Für $x \in V$ ist $\|f(x)\| = \|x\|$.
- Sind $x, y \in V$ mit $x \perp y$, so ist $f(x) \perp f(y)$.
- Es ist $f \in \text{Aut}_K(V)$ und auch f^{-1} ist unitär.
- Das Bild einer Orthonormalbasis unter f ist eine Orthonormalbasis.
- Ist λ ein Eigenwert von f , so ist $|\lambda| = 1$.

Beweis. • klar

• klar

• $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$, also ist f injektiv, somit $f \in \text{Aut}_K(V)$ und

$$\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y) \rangle \stackrel{f \text{ unitär}}{=} \langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y)) \rangle = \langle x, y \rangle$$

• Folgt aus 1, 2 und 3

• Ist $f(x) = \lambda x$, $x \neq 0$, so ist

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

□

Satz 5.3

Ist $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, so ist f unitär.

Beweis. Aus $\|f(x)\| = \|x\|$ folgt $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$. Die Polarisierung (Satz 3.4) für $\langle f(x), f(y) \rangle$ und die Linearität von f liefern $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Zum Beispiel im Fall $K = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\left\langle \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)}, \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)} \right\rangle - \langle f(x), f(x) \rangle - \langle f(y), f(y) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle) \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

□

Definition 5.4 (orthogonale, unitäre Matrizen)

Eine Matrix $A \in \text{Mat}_n(K)$ heißt orthogonal bzw. unitär, wenn

$$A^* A = \mathbb{1}_n$$

Mathematica/WolframAlpha-Befehle (orthogonale bzw. unitäre Matrizen)

Auch für orthogonale bzw. unitäre Matrizen A gibt es eine Mathematica bzw. WolframAlpha-Funktion

OrthogonalMatrixQ[A]

UnitaryMatrixQ[A]

► Bemerkung 5.5

Offenbar ist A genau dann unitär, wenn A^* das Inverse zu A ist. Die folgenden Bedingungen sind daher äquivalent dazu, dass A unitär ist:

$$AA^* = \mathbb{1}_n, \overline{A}A^t = \mathbb{1}_n, A^t\overline{A} = \mathbb{1}_n, A^t = \overline{A^{-1}}$$

Satz 5.6

Sei B eine Orthonormalbasis von V . Genau dann ist f unitär, wenn $M_B(f)$ unitär ist.

Beweis. Sei $A = M_B(f)$, $v = \Phi_B(x)$, $\Phi_B(y)$. Dann ist $\langle v, w \rangle = x^t \underbrace{M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle)}_{=1} \cdot \overline{y} = x^t \cdot \overline{y}$. Somit ist f genau dann unitär, wenn $(Ax)^t \overline{Ay} = x^t \overline{y}$ für alle $x, y \in K^n$, also wenn $A^t \overline{A} = \mathbb{1}$, d.h. A unitär. \square

Satz 5.7

Die folgenden Mengen bilden Untergruppen der $\text{GL}_n(K)$.

- $O_n = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}$ die orthogonale Gruppe
- $SO_n = \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\}$ die spezielle orthogonale Gruppe
- $U_n = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\}$ die unitäre Gruppe
- $SU_n = \{A \in U_n \mid \det(A) = 1\}$ die spezielle unitäre Gruppe

Beweis. z.B. für U_n : Sind $A^{-1} = A^*$, $B^{-1} = B^*$, so ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$, $(A^{-1})^{-1} = A = (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ \square

Satz 5.8

Genau dann ist $A \in \text{Mat}_n(K)$ unitär, wenn die Spalten (oder die Zeilen) von A eine Orthonormalbasis des K^n bilden.

Beweis. Sei s das Standardskalarprodukt und $B = (a_1, \dots, a_n)$. Nach Bemerkung 4.5 ist B genau dann eine Orthonormalbasis, wenn $M_B(s) = \mathbb{1}_n$, und $M_B(s) = A^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{A}$, vgl. Beispiel 2.9 \square

Theorem 5.9

Sei $K = \mathbb{C}$ und $f \in \text{End}_K(V)$. Ist f unitär, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f .

Beweis. Induktion über $n = \dim_K(V)$.

$n = 0$: klar

$n - 1 \rightarrow n$: Da K algebraisch abgeschlossen ist, hat χ_f eine Nullstelle λ , es gibt also einen Eigenvektor x_1 von f zum Eigenwert λ . Ohne Einschränkung nehmen wir $\|x_1\| = 1$ an. Sei $W = K \cdot x_1$. Nach Folgerung 4.11 ist dann $V = W \oplus W^\perp$. Für $v \in W^\perp, w \in W$ ist

$$0 = \langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \bar{\lambda} \langle f(v), w \rangle$$

da $\lambda \neq 0$ (f unitär) also $f(W^\perp) \perp W$. Somit ist $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$, d.h. W^\perp ist f -invariant. Da auch $f|_{W^\perp}$ unitär ist, gibt es nach Induktionshypothese eine Orthonormalbasis (x_1, \dots, x_n) aus Eigenvektoren von $f|_{W^\perp}$. Da $V = W \oplus W^\perp$ und $W \perp W^\perp$ ist (x_1, \dots, x_n) eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f . \square

Folgerung 5.10

Jeder unitäre Endomorphismus eines unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

Folgerung 5.11

Zu jeder $A \in U_n$ gibt es $S \in U_n$ so, dass

$$S^* A S = S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit $|\lambda_i| = 1$ für $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Da A unitär ist, ist $f_A \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ unitär, nach Theorem 5.9 existiert also eine Orthonormalbasis B des \mathbb{C}^n aus Eigenvektoren von A . Die Transformationsmatrix $S = T_{\mathcal{E}}^B$ hat als Spalten die Elemente von B und somit ist S nach Satz 5.8 unitär. Nach Satz 5.2 ist $|\lambda| = 1$ für alle Eigenwerte von f_A . \square

► Bemerkung 5.12

Dies (Theorem 5.9) gilt nicht im Fall $K = \mathbb{R}$. Man kann aber auch orthogonale Endomorphismen immer “fast diagonalisieren“.

6. Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f \in \text{End}_K(V)$.

Definition 6.1 (selbstadjungiert)

f ist selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Satz 6.2

Sei B eine Orthonormalbasis von V . Genau dann ist f selbstadjungiert, wenn $M_B(f)$ hermitesch ist.

Beweis. Seien $A = M_B(f)$, $v = \Phi_B(x)$, $w = \Phi_B(y)$. Es ist

$$\begin{aligned} \langle f(v), w \rangle &= (Ax)^t \bar{y} = x^t A^t \bar{y} \\ \langle v, f(w) \rangle &= x^t \overline{Ay} = x^t \bar{A} \bar{y} \end{aligned}$$

Somit ist $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$ genau dann, wenn $A^t = \bar{A}$, d.h. $A = A^*$, also A hermitesch. \square

Lemma 6.3

Ist f selbstadjungiert und λ ein Eigenwert von f , so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. Ist $0 \neq x \in V$ mit $f(x) = \lambda x$, so ist

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle f(x), x \rangle = \langle x, f(x) \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

und mit $\langle x, x \rangle \neq 0$ folgt $\lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Satz 6.4

Ist f selbstadjungiert, so ist $\chi_f \in \mathbb{R}[t]$ und χ_f zerfällt über \mathbb{R} in Linearfaktoren.

Beweis. Sei B eine Orthonormalbasis von V . Nach Satz 6.2 ist $A = M_B(f) \in \text{Mat}_n(K) \subseteq \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ hermitesch. Da \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist, ist $\chi_f(t) \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Nach Lemma 6.3 ist aber schon $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Somit zerfällt $\chi_f \chi_A \in \mathbb{R}[t]$ über \mathbb{R} in Linearfaktoren. \square

Theorem 6.5

Ist f selbstadjungiert, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f .

Beweis. Induktion über $n = \dim_K(V)$.

$n = 0$: klar

$n - 1 \rightarrow n$: Nach Satz 6.4 hat f einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Wähle $x_1 \in V$ mit $f(x_1) = \lambda x_1$ und $\|x_1\| = 1$. Sei $W = K \cdot x_1$. Für $y \in W^\perp$ ist

$$\langle x_1, f(y) \rangle = \langle f(x_1), y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle = 0$$

und folglich ist W^\perp f -invariant. Nach Folgerung 4.11 ist $V = W \oplus W^\perp$ und $f|_{W^\perp}$ ist wieder selbstadjungiert. Nach Induktionshypothese hat W^\perp eine Orthonormalbasis (x_1, \dots, x_n) aus Eigenvektoren von $f|_{W^\perp}$. Da $V = W \oplus W^\perp$ und $W \perp W^\perp$ ist (x_1, \dots, x_n) eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f . \square

Folgerung 6.6

Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines euklidischen oder unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

Folgerung 6.7

Ist

- f selbstadjungiert ($K = \mathbb{C}$ oder \mathbb{R})
- f unitär ($K = \mathbb{C}$)

so ist

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

eine Zerlegung von V in paarweise orthogonale Untervektorräume.

Beweis. Nach Theorem 5.9 bzw. Theorem 6.5 existiert eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren. Insbesondere ist f diagonalisierbar, also

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

Zu jedem λ gibt es eine Teilfamilie von B die eine Basis von $\text{Eig}(f, \lambda)$ bildet. Da B eine Orthonormalbasis ist, folgt, dass die Eigenräume paarweise orthogonal sind. \square

► Bemerkung 6.8

Um eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren wie in Theorem 5.9 oder Theorem 6.5 zu bestimmen, kann man entweder wie im Induktionsbeweis vorgehen, oder man bestimmt zunächst Basen B von $\text{Eig}(f, \lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$ und orthonormalisiert diese mit Theorem 4.9 zu Basen B' . Nach Folgerung 6.7 ist $\bigcup B'$ dann eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f .

7. Hauptachsentransformation

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und s eine hermitesche Sesquilinearform auf V .

Satz 7.1

Zu $A \in \text{Mat}_n(K)$ hermitesch gibt es $S \in U_n(K)$ so, dass

$$S^*AS = S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da A hermitesch ist, ist $f_A \in \text{End}_K(K^n)$ selbstadjungiert, es gibt also nach Theorem 6.5 also eine Orthonormalbasis $B = (x_1, \dots, x_n)$ aus Eigenvektoren von f_A . Die Transformationsmatrix $S = T_{\mathcal{E}}^B$ hat x_1, \dots, x_n als Spalten und ist somit nach Satz 5.8 unitär. Nach Lemma 6.3 sind die Eigenvektoren $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reell. \square

Folgerung 7.2

Sei $A \in \text{Mat}_n(K)$ hermitesch. Genau dann ist A positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Beweis. Nach Satz 7.1 existiert $S \in U_n(K)$ mit

$$S^*AS = S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Die Eigenwerte von A sind die Eigenwerte von $S^{-1}AS$ (LAAG 1.5.1.11), also $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Sei $T = \bar{S}$. Genau dann ist A positiv definit, wenn $T^t A \bar{T} = S^*AS = D$ positiv definit ist (Satz 2.8), also wenn $\lambda_i > 0$. \square

Theorem 7.3 (Hauptachsentransformation)

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform s auf V gibt es eine Orthonormalbasis B von V , für die

$$M_B(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Beweis. Sei $B_0 = (x_1, \dots, x_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $A = M_{B_0}(s)$. Da s hermitesch ist, ist auch A hermitesch (Satz 2.13). Nach Satz 7.1 gibt es deshalb $S \in U_n(K)$ mit $S^*AS = D$ eine reelle Diagonalmatrix. Ist nun $f \in \text{End}_K(V)$ mit $M_{B_0}(f) = \bar{S}$, so ist auch $B = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ eine Basis von V mit $T_{B_0}^B = \bar{S}$ unitär. Da $M_{B_0}(f)$ unitär ist, ist auch f unitär. Nach Satz 5.2 ist $f(B_0) = B$ somit auch eine Orthonormalbasis. Nach Satz 2.8 ist

$$M_B(s) = (T_{B_0}^B)^t \cdot M_{B_0}(s) \cdot \overline{T_{B_0}^B} = S^*AS = D$$

\square

■ Beispiel 7.4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, s = s_A, K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow q_s(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

Wie verhält sich $q_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$? Wie sehen die "Höhenlinien"?

$$H_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_s(x) = c\} \quad c \in \mathbb{R}$$

aus?

$$\begin{aligned}\chi_A &= (t-2)^2 - 1 = (t-1)(t-3) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \\ &\Rightarrow B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\Rightarrow M_B(s) = \text{diag}(3, 1)\end{aligned}$$

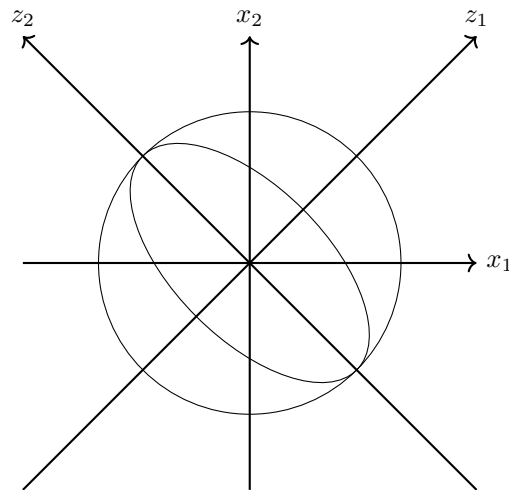
Im neuen Koordinatensystem $z = \Phi_B^{-1}(x)$ ist dann

$$q_s(z) = 3z_1^2 + z_2^2$$

Mit $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_2 = 1$ erhält man "Höhenlinien" der Form

$$\left(\frac{z_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{a_2} \right)^2 = c$$

was für $c > 0$ eine Ellipse beschreibt.



Folgerung 7.5

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform s auf V gibt es eine Basis B von V , für die

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{r_+(s)} & & \\ & -\mathbb{1}_{r_-(s)} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $r_+(s) + r_-(s) \leq n$.

Beweis. Sei $B_0 = (x_1, \dots, x_n)$ eine Orthonormalbasis von V mit $A = M_{B_0}(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Setze

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i \neq 0 \\ 1 & \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Sei $x'_i = \mu_i \cdot x_i$ und $B' = (x'_1, \dots, x'_n)$. Dann ist $M_B(s) = S^t A \bar{S}$ mit $S = T_{B_0}^{B'} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ also $M_{B'}(s) = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ mit $\lambda'_i = \mu_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\mu_i} = \mu_i^2 \lambda_i \in \{0, 1, -1\}$. Durch Permutation der Elemente von B' erhält man die gewünschte Basis B . \square

Definition 7.6 (Ausartungsraum)

Der Ausartungsraum von s ist

$$V_0 = \{x \in V \mid s(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\}$$

Lemma 7.7

V_0 ist ein Untervektorraum von V .

Beweis. Klar aus Linearität im ersten Argument. \square

Lemma 7.8

Seien V_+ und V_- Untervektorräume von V mit $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ und s positiv definit auf V_+ , $-s$ positiv definit auf V_- . Dann ist

$$\begin{aligned} \dim_K(V_+) &= \max\{\dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, s \text{ positiv definit auf } W\} \\ \dim_K(V_-) &= \max\{\dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, -s \text{ positiv definit auf } W\} \end{aligned}$$

Beweis. Beweis nur für V_+ , analog für V_- .

\leq : klar

\geq : Ist $W \leq V$ Untervektorraum mit $s(x, x) > 0 \quad \forall x \in W \setminus \{0\}$, so ist $W \cap (V_- \oplus V_0) = \{0\}$. Ist $x = y + z$ mit $y \in V_-$, $z \in V_0$, so ist $s(x, x) = s(y + z, y + z) = \underbrace{s(y, y)}_{\leq 0} + \underbrace{s(y, z) + s(z, y) + s(z, z)}_{=0} \leq 0 \Rightarrow \dim_K(W) \leq$

$$\dim_K(V) - \dim_K(V_-) - \dim_K(V_0) = \dim_K(V_+).$$

\square

Theorem 7.9 (Trägheitssatz von Sylvester)

Für eine hermitesche Sesquilinearform s auf V sind die Zahlen $r_+(s)$, $r_-(s)$ aus Folgerung 7.5 eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei B eine Basis von V wie in Folgerung 7.5, $B = (x_1, \dots, x_n)$. Definiere

$$\begin{aligned} V_+ &= \text{span}_K(x_1, \dots, x_{r_+(s)}) \\ V_- &= \text{span}_K(x_{r_+(s)+1}, \dots, x_{r_+(s)+r_-(s)}) \\ V'_0 &= \text{span}_K(x_{r_+(s)+r_-(s)+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Dann ist s positiv definit auf V_+ , $-s$ positiv definit auf V_- und $V = V_+ \oplus V_- \oplus V'_0$. Es gilt $V'_0 = V_0$

\subseteq : klar

\supseteq : Ist $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in V_0$, so ist $0 = s(x, x_i) = \lambda_i \cdot s(x_i, x_i)$ für $i = 1, \dots, n$ also $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, r_+(s) + r_-(s)$, d.h. $x \in V'_0$. Nach Lemma 7.8 ist $r_+(s) = \dim_K(V_+)$ nur von s abhängig, analog für $r_-(s)$. \square

Definition 7.10 (Signatur)

Die Signatur von s ist das Tripel

$$(r_+(s), r_-(s), r_0(s))$$

wobei $r_0(s) = \dim_K(V_0)$.

Folgerung 7.11

Ist s eine hermitesche Form auf V und B eine Basis von V , so ist die Zahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte von $M_B(s)$ gleich $r_+(s)$ bzw. $r_-(s)$, insbesondere also unabhängig von B .

Beweis. Sei $A = M_B(s)$. Nach Satz 7.1 gibt es $S \in U_n(K)$ mit S^*AS eine reelle Diagonalmatrix. Da $S^* = S^{-1}$ haben A und S^*AS die selben Eigenwerte. Bringt man S^*AS nun in die Form in Folgerung 7.5, so ändern sich die Vorzeichen der Diagonale nicht mehr. \square

8. Quadriken

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Definition 8.1 (Quadrik)

Eine Quadrik ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^n mit

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x + 2b^t x + c = 0\}$$

mit $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, $b^t \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

► Bemerkung 8.2

- $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0\}$ also Q ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in x_1, \dots, x_n
- Q bestimmt A, b, c nicht eindeutig, da $Q(A, b, c) = Q(\lambda A, \lambda b, \lambda c)$
- Man kann A, b, c so normieren, dass $c = 0$ oder $c = 1$

► Bemerkung 8.3

Seien A, b, c wie in Definition 8.1, so schreiben wir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\}$. Wir schreiben (A, b) für

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n, n+1}(\mathbb{R})$$

Es gilt $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(A, b) \leq \text{rk}(\tilde{A})$.

► Bemerkung 8.4 (Wiederholung)

Seien V, W K -Vektorräume. $f : V \rightarrow W$ heißt affin, wenn $\exists g \in \text{Hom}_K(V, W)$ mit $f(v) = g(v) + w_0$ $\forall v \in V$. Ist f affin und bijektiv, so ist f^{-1} affin, d.h. $\text{Aff}_K(V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ affin und bijektiv}\}$. Im Fall von $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$ ist

$$\text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{f = \tau_z \circ f_T \mid T \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}^n\}$$

mit $f_T(x) = Tx$ und $\tau_z(x) = x + z$.

Lemma 8.5

Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik, so ist $f(Q)$ eine Quadrik, für $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. $f = \tau_z \circ f_T$ mit $T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Schreibe $S = T^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $\tilde{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $\tilde{S}\tilde{x} = \tilde{S}x$.

$$\begin{aligned} f_T(Q) &= \{Tx \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\tilde{S}\tilde{y})^t \tilde{A} \tilde{S}\tilde{y} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{\tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S}}_{\begin{pmatrix} S^t A S & S^t b \\ b^t S & c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\} \end{aligned}$$

Jetzt für τ_z . Sei $U_z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $U_z \tilde{x} = \tilde{\tau}_z(x)$. Man folgert analog, dass

$$\tau_z(Q) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{U_z^t \tilde{A} U_z}_{\begin{pmatrix} A & Az + b \\ z^t A + b & z^t A z + b^t z + z^t b + c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\} \quad \square$$

Definition 8.6 (Typen von Quadriken)

Sei Q gegeben durch (A, b, c) wie in Definition 8.1. Q heißt

- vom kegeligen Typ, wenn $\text{rk}(A) = \text{rk}(A, b) = \text{rk}(\tilde{A})$
- eine Mittelpunktsquadratik, wenn $\text{rk}(A) = \text{rk}(A, b) < \text{rk}(\tilde{A})$
- vom parabolischen Typ, wenn $\text{rk}(A) < \text{rk}(A, b)$
- ausgeartet, wenn $\det(\tilde{A}) = 0$

Lemma 8.7

Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik, $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Von dem Typ, von dem Q ist, ist auch $f(Q)$.

Beweis. $f = f_{S^{-1}}$, $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Da \tilde{S} invertierbar ist, ist $\text{rk}(\tilde{A}) = \text{rk}(\tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S})$, analog auch $\text{rk}(S^t A S) = \text{rk}(A)$.

$(S^t A S, S^t b) = S^t(A, b) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(S^t A S, S^t b) = \text{rk}(A, b)$. Für $f = \tau_z$ analog. \square

Definition 8.8 (Isometrie)

Eine Isometrie des \mathbb{R}^n ist $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f(x) = Ax + b$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ist orthogonal.

► Bemerkung 8.9

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie genau dann, wenn $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 8.10 (Klassifikation der Quadriken bis auf Isometrien)

Sei Q eine Quadrik. Es gibt eine Isometrie $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ mit $f(Q)$, die eine der folgenden Formen annimmt:

- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 = 0 \right\} \quad k \geq r - k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r - k, r < n$

mit $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $0 \leq k \leq r \leq n$

Beweis. Sei Q gegeben durch (A, b, c) . Nach Satz 7.1 gibt es eine orthogonale Matrix $S \in O_n$ mit $S^t S A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Indem wir Q durch $f_{S^{-1}}(Q)$ ersetzen, können wir also ohne Einschränkung annehmen, dass $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ohne Einschränkung ist weiter $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ und $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r < 0$ und $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0$. Dann ist (e_{r+1}, \dots, e_n) eine Orthonormalbasis des Ausartungsraums V_0 von s_A .

Wenn wir Q durch $\tau_z(Q)$ ersetzen, wird b durch $Az + b$ ersetzt, wir können deshalb ohne Einschränkung annehmen, dass $b \in V_0$. Ist $n > r$, also $V_0 \neq \{0\}$, so können wir eine Orthonormalbasis (v_{r+1}, \dots, v_n) von V_0 mit $b \in \text{span}_{\mathbb{R}}(v_{r+1})$ wählen.

Indem wir Q durch $f_{S^{-1}}(Q)$ mit $S = (e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $b = \mu \cdot e_{r+1}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

Ist nun $\text{rk}(A) = \text{rk}(A, b)$, so gibt es z mit $Az = -b$, und indem wir Q durch $\tau_z(Q)$ ersetzen, können wir annehmen, dass $b = 0$.

- Im Fall $c = 0$ setzt man $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ und ersetzt gegebenenfalls (A, b, c) mit $(-A, -b, -c)$, um Form 1 zu erhalten.
- Im Fall $c \neq 0$ ersetzt man (A, b, c) durch $(-\frac{1}{c}A, -\frac{1}{c}b, -1)$ und setzt dann $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$, um Form 2 zu erhalten.
- Ist $\text{rk}(A) < \text{rk}(A, b)$, so ist insbesondere $r < n$ und $\mu \neq 0$. Nun ersetzen wir Q durch $\tau_z(Q)$ mit $z = -\frac{c}{2\mu} \cdot e_{r+1}$ und können somit auch wieder $c = 0$ annehmen. Ersetzt man $(A, b, 0)$ durch $(-\frac{1}{\mu}A, -1, 0)$ und setzt wieder $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$, so erhält man Form 3. (Ist $k < r - k$, so ersetzt man weiter Q durch $f_{-1_n}(Q)$ und $(A, b, 0)$ durch $(-A, -b, 0)$.) \square

Folgerung 8.11

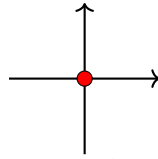
Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik. Es gibt eine invertierbare affine Abbildung $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ für die $f(Q)$ eine der folgenden 3 Formen annimmt:

- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^r x_i^2 = 0 \right\} \quad k \geq r - k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^r x_i^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^r x_i^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r - k, r < n$

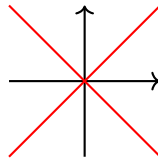
■ Beispiel 8.12

$Q \subseteq \mathbb{R}^2$

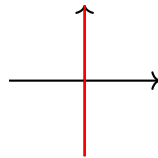
- $k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 0 \right\}$



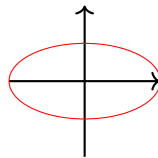
- $k = 1, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 0 \right\}$



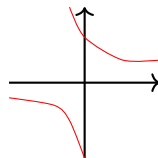
- $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 = 0 \right\}$



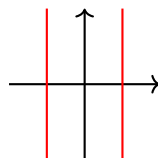
- $k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\}$



- $k = 1, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\}$



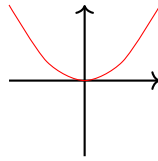
- $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 = 1 \right\}$



- $k = 0, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid - \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\} = \emptyset$

- $k = 0, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid - \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\} = \emptyset$

$$\bullet \quad k=1, r=1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1} \right)^2 - 2x_2 = 0 \right\}$$



► **Bemerkung 8.13**

- Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Quadrik, $U \subseteq V$ affiner Untervektorraum, so ist $Q \cap U$ eine Quadrik in dem Sinne, dass $\exists f$ Isometrie : $f(U) = \mathbb{R}^k$ und $f(Q \cap U)$ ist eine Quadrik.
- Ebene Quadriken sind im wesentlichen Kegelschnitte, $Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$, außer 2c und 2d in Beispiel 8.12

► **Bemerkung 8.14**

Die Situation wird deutlich übersichtlicher, wenn man den affinen Raum \mathbb{R}^n durch Hinzunahme von Punkten im Unendlichen zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ vervollständigt und den Abschluss der Quadriken darin betrachtet. Es stellt sich dann heraus, dass vom projektiven Standpunkt aus die meisten ebenen Quadriken ähnlich aussehen. (Siehe Vorlesung *Elementare Algebraische Geometrie*)

Kapitel III

Dualität

1. Das Lemma von Zorn

Sei K ein Körper und U, V, W seien K -Vektorräume. Zudem sei X eine Menge.

Definition 1.1 (Relation)

Eine Relation ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Man schreibt $(x, x') \in R$ als xRx' . R heißt

- reflexiv, wenn $\forall x \in X: xRx$
- transitiv, wenn $\forall x, y, z \in X: xRy$ und $yRz \Rightarrow xRz$
- symmetrisch, wenn $\forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$
- antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in X: xRy$ und $yRx \Rightarrow y = x$
- total, wenn $\forall x, y \in X: (x, y) \notin R \Rightarrow (y, x) \in R$

■ Beispiel 1.2 (Äquivalenzrelation)

Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation. Wir haben schon verschiedene Äquivalenzrelationen kennengelernt: Isomorphie von K -Vektorräumen und Ähnlichkeit von Matrizen.

Definition 1.3 (Halbordnung)

Eine Halbordnung (oder partielle Ordnung) ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation \leq . Eine totale Halbordnung heißt Totalordnung oder lineare Ordnung. Man schreibt $x < y$ für $x \leq y \wedge x \neq y$.

■ Beispiel 1.4

1. Die natürliche Ordnung \leq auf $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ und \mathbb{N} ist eine \mathbb{Z} Totalordnung.
2. Teilbarkeit $|$ ist eine Halbordnung auf \mathbb{N} , aber Teilbarkeit ist keine Halbordnung auf \mathbb{Z} , da $1|-1$ und $-1|1$, aber $1 \neq -1$!
3. $\mathcal{P}(X)$ ist die Potenzmenge. " \subseteq " ist eine Halbordnung auf \mathcal{P} , aber für $|X| > 1$ ist " \subseteq " keine Totalordnung.
4. Sei (X, \leq) eine Halbordnung, sei $Y \subseteq X$, so ist $(Y, \subseteq|_Y)$ eine Halbordnung.

Definition 1.5 (Kette)

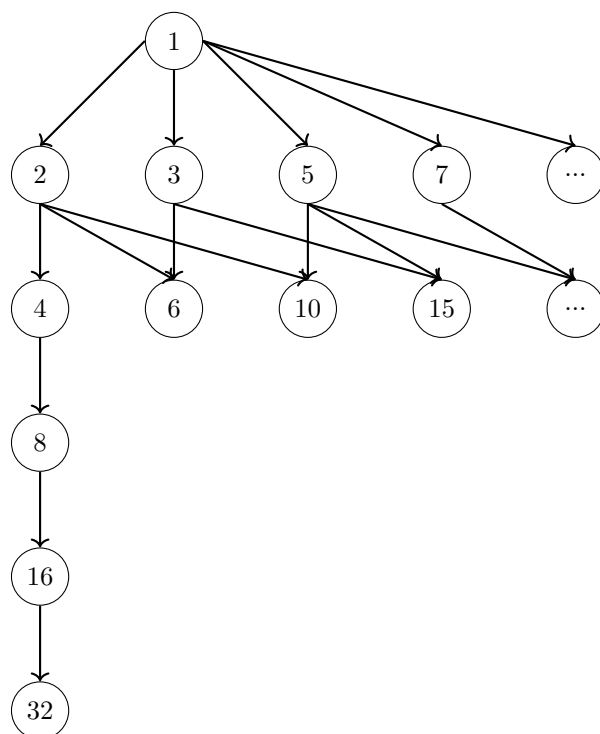
Sei (X, \leq) eine Halbordnung, $Y \subseteq X$. Y heißt Kette, wenn $(Y, \leq|_Y)$ total ist.

$x \in Y$ heißt ein minimales Element von Y , wenn $\forall x' \in Y: x < x'$.

$x \in Y$ heißt untere Schranke von Y , wenn $\forall y \in Y: y \geq x$.

$x \in Y$ heißt kleinstes Element von Y , wenn x untere Schranke von Y ist.

Analog: maximales Element, obere Schranke, größtes Element.



$Y = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Kette

► Bemerkung 1.6

- Hat Y ein kleinstes Element, so ist dies eindeutig bestimmt. Ein kleinstes Element ist minimal.
- Jede endliche Halbordnung hat minimale Elemente. Jede endliche Totalordnung hat ein kleinstes Element. Analog für maximale Elemente und größtes Element.

■ Beispiel 1.7

(\mathbb{N}, \leq) hat als kleinstes Element die 1, aber kein größtes Element oder maximale Elemente.

■ Beispiel 1.8

$V = \mathbb{R}^3$, \mathfrak{X} die Menge der Untervektorräume des \mathbb{R}^3 . (\mathfrak{X}, \leq) ist eine Halbordnung auf $Y \subseteq X$ mit $Y = \{U \in \mathfrak{X} \mid \dim_{\mathbb{R}}(U) \leq 2\}$.

- Y hat ein kleinstes Element: $\{0\}$.
- Es gibt unendlich viele maximale Elemente in Y , nämlich die Untervektorräume von V , die die Dimension 2 haben. Es gibt also kein größtes Element.
- V ist die obere Schranke von Y .

Theorem 1.9 (Das Lemma von Zorn)

Sei (X, \leq) eine Halbordnung, die nicht leer ist. Wenn jede Kette eine obere Schranke hat, dann hat X ein maximales Element.

Beweis. Das Lemma von Zorn hat axiomatischen Charakter - es ist äquivalent zum Auswahlaxiom, seine Gültigkeit ist somit abhängig von unseren grundlegenden mengentheoretischen Annahmen. Für einen Beweis des Lemmas von Zorn aus dem Auswahlaxiom siehe die Vorlesung *Mengenlehre*. Wir zeigen hier zumindest die andere Richtung, nämlich dass das Auswahlaxiom aus dem Lemma von Zorn folgt. \square

Folgerung 1.10 (Auswahlaxiom)

Zu jeder Familie (x_i) , nicht leer, gibt es eine Auswahlfunktion, das heißt eine Abbildung:

$$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \text{ mit } f(i) \in X_i \quad \forall i$$

Beweis. Sei \mathcal{F} die Menge der Paare (J, f) bestehend aus einer Teilmenge $J \subseteq I$ und einer Abbildung $f : J \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i \quad \forall i \in J$. Definieren wir $(J, f) \leq (J', f') \iff J \subseteq J'$ und $f'|_J = f$, so ist \leq eine Halbordnung auf \mathcal{F} . Da $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{F}$ ist \mathcal{F} nichtleer. Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine nichtleere Kette, so wird auf $J' := \bigcup_{(J, f) \in \mathcal{G}} J$ durch $f'(j) = f(j)$ falls $(J, f) \in \mathcal{G}$ und $j \in J$ eine wohldefinierte Abbildung $f' : J' \rightarrow \bigcup_{i \in J} X_i$ mit $f'(i) \in X_i \quad \forall i \in J'$ gegeben. Das Paar (J', f') ist eine obere Schranke der Kette \mathcal{G} . Nach dem Lemma von Zorn besitzt \mathcal{F} ein maximales Element (J, f) . Wir behaupten, dass $J = I$. Andernfalls nehmen wir ein $i' \in I \setminus J$ und ein $x' \in X_{i'}$ und definieren $J' := J \cup \{i'\}$ und $f' : J' \rightarrow \bigcup_{i \in J'} X_i, j \mapsto \begin{cases} f(j) & j \in J \\ x' & j = i' \end{cases}$. Dann ist $(J', f') \in \mathcal{F}$ und $(J, f) < (J', f')$ im Widerspruch zur Maximalität von (J, f) . \square

Folgerung 1.11 (Basisergänzungssatz)

Sei V ein K -Vektorraum. Jede linear unabhängige Teilmenge $X_0 \subseteq V$ ist in einer Basis von V enthalten.

Beweis. Sei $\mathfrak{X} = \{X \subseteq V \mid X \text{ ist linear unabhängig, } X_0 \subseteq X\}$ geordnet durch Inklusion. Dann ist $X_0 \in \mathfrak{X}$, also $\mathfrak{X} \neq \emptyset$. Ist \mathcal{Y} eine nichtleere Kette in \mathfrak{X} , so ist auch $Y = \bigcup \mathcal{Y} \subseteq V$ linear unabhängig. Sind $y_1, \dots, y_n \in Y$ paarweise verschieden, so gibt es $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{Y}$ mit $y_i \in Y_i$ für $i = 1, \dots, n$. Da \mathcal{Y} total geordnet ist, besitzt $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ ein größtes Element, o.E. Y_1 . Also sind $y_1, \dots, y_n \in Y_1$ und somit linear unabhängig. Folglich ist $Y_1 \in \mathfrak{X}$ eine obere Schranke von \mathcal{Y} . Nach dem Lemma von Zorn besitzt \mathfrak{X} ein maximales Element X . Das heißt, X ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V , nach LAAG1 II.3.5 also eine Basis von V . \square

2. Der Dualraum

Sei V ein K -Vektorraum.

Definition 2.1 (Dualraum)

Der Dualraum zu V ist der K -Vektorraum

$$V^* = \text{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \rightarrow K \text{ linear}\}$$

Die Elemente von V^* heißen Linearformen auf V .

■ Beispiel 2.2

Ist $V = K^n = \text{Mat}_{n \times 1}(K)$, so wird $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ durch $\text{Mat}_{1 \times n}(K) \cong K^n$. Wir können also die Elemente von V als Spaltenvektoren und die Linearformen auf V als Zeilenvektoren auffassen.

Lemma 2.3

Ist $B = (x_i)_{i \in I}$ eine Basis von V , so gibt es zu jedem $i \in I$ genau $x_i^* \in V^*$ mit

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \in I$$

Beweis. Siehe LAAG1 III.5.1, angewandt auf die Familie $(y_j)_{j \in I}$, $y_j \delta_{i,j}$ in $W = K$. □

Satz 2.4

Ist $B = (x_i)_{i \in I}$ eine Basis von V , so ist $B^* = (x_i^*)_{i \in I}$ linear unabhängig. Ist I endlich, so ist B^* eine Basis von V^* .

Beweis. Ist $\varphi = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^*$, $\lambda_i \in K$, fast alle gleich 0, so ist $\varphi(x_j) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^*(x_j) = \lambda_j$ für jedes $j \in I$. Ist also $\varphi = 0$, so ist $\lambda_j = \varphi(x_j) = 0 \quad \forall j \in I$, B^* ist somit linear unabhängig.

Ist zudem I endlich und $\psi \in V^*$, so ist $\psi = \psi' = \sum_{i \in I} \psi(x_i) x_i^*$, denn $\psi'(x_j) = \sum_{i \in I} \psi(x_i) x_i^*(x_j) = \psi(x_i) \quad \forall j \in I$, und somit ist B^* ein Erzeugendensystem von V^* . □

Definition 2.5 (duale Basis)

Ist $B = (x_i)_{i \in I}$ eine endliche Basis von V , so nennt man $B^* = (x_i^*)_{i \in I}$ die zu B duale Basis.

Folgerung 2.6

Zu jeder Basis B von V gibt es einen eindeutig bestimmten Monomorphismus

$$f_V : V \rightarrow V^* \text{ mit } f(B) = B^*$$

Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist dieser ein Isomorphismus.

Folgerung 2.7

Zu jedem $0 \neq x \in V$ gibt es eine Linearform $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(x) = 1$.

Beweis. Ergänze $x_1 = x$ zu einer Basis $(x_i)_{i \in I}$ von V (Folgerung 1.11) und $\varphi = x_1^*$. □

■ Beispiel 2.8

Ist $V = K^n$ mit Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$, so können wir V^* mit dem Vektorraum der Zeilen-

vektoren identifizieren, und dann ist

$$e_i^* = e_i^t$$

Definition 2.9 (Bidualraum)

Der Bidualraum zu V ist der K -Vektorraum

$$V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}_K(V^*, K)$$

Satz 2.10

Die kanonische Abbildung

$$\iota : \begin{cases} V \rightarrow V^{**} \\ x \rightarrow \iota_x \end{cases} \quad \text{wobei } \iota_x(\varphi) = \varphi(x)$$

ist ein Monomorphismus. Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist ι ein Isomorphismus.

Beweis. • $\iota_x \in V^{**}$:

- $\iota_x(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \iota_x(\varphi) + \iota_x(\psi)$
- $\iota_x(\lambda\varphi) = (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\iota_x(\varphi)$

• ι linear:

- $\iota_{x+y}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \iota_x(\varphi) + \iota_y(\varphi) = (\iota_x + \iota_y)(\varphi)$
- $\iota_{\lambda x}(\varphi) = \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = (\lambda\iota_x)(\varphi)$

• ι injektiv: Sei $0 \neq x \in V$. Nach Folgerung 2.7 existiert $\varphi \in V^*$ mit $\iota_x(\varphi) = \varphi(x) = 1 \neq 0$. Somit ist $\iota_x \neq 0$.

• Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist $V \stackrel{2.6}{\cong} V^* \stackrel{2.6}{\cong} V^{**}$, insbesondere $\dim_K(V) = \dim_K(V^{**})$. Der Monomorphismus ι ist somit ein Isomorphismus. \square

► Bemerkung 2.11

Sei $\dim_K(V) < \infty$. Im Gegensatz zu den Isomorphismen $V \rightarrow V^*$, die von der Wahl der Basis B abhängen, ist der Isomorphismus $\iota : V \rightarrow V^{**}$ kanonisch (von der Wahl der Basis B unabhängig).

Die Voraussetzung, dass $\dim_K(V) < \infty$ ist hier essentiell: Für $\dim_K(V) = \infty$ ist ι nicht surjektiv.

Definition 2.12 (Annulator)

Für eine Teilmenge $U \subseteq V$ bezeichne

$$U^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in U\}$$

den Annulator von U .

Lemma 2.13

U^0 ist ein Untervektorraum von V^* .

Beweis. Klar. \square

Satz 2.14

Ist $\dim_K(V) < \infty$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist

$$\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(U^0)$$

Beweis. Ergänze eine Basis (x_1, \dots, x_r) von U zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V . Dann ist $B^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$ eine Basis von V^* . Sei $C = (x_{r+1}^*, \dots, x_n^*)$. Dann ist C eine Basis von U^0 :

- B^* ist Basis $\Rightarrow C$ ist linear unabhängig.
- $C \subseteq U^0$: Für $1 \leq j \leq r < i \leq n$ ist $x_i^*(x_j) = \delta_{ij} = 0$.
- $U^0 \subseteq \text{span}_K(C)$: Ist $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^* \in U^0$, so $0 = \varphi(x_j) = \lambda_j$ für alle $j \leq r$, also $\varphi \in \text{span}_K(x_{r+1}^*, \dots, x_n^*)$. □

Folgerung 2.15

Ist $\dim_K(V) < \infty$ und $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist

$$\iota(U) = U^{00}$$

Beweis. Es ist klar, dass $\iota(U) \leq U^{00}$.

Für $\varphi \in U^0$ und $x \in U$ ist $\iota_x(\varphi) = \varphi(x) = 0$. Mit Satz 2.14 ist

$$\begin{aligned} \dim_K(U^{00}) &= \dim_K(V^*) - \dim_K(U^0) \\ &= \dim_K(V^*) - (\dim_K(V) - \dim_K(U)) \\ &\stackrel{2.6}{=} \dim_K(U) \end{aligned}$$

und da ι injektiv ist, folgt $\iota(U) = U^{00}$. □

3. Die duale Abbildung

Sei $f \in \text{Hom}_K(V, W)$.

► **Bemerkung 3.1**

Ist $\varphi \in W^* = \text{Hom}_K(W, K)$ eine Linearform auf W , so ist $\varphi \circ f \in \text{Hom}_K(V, K) = V^*$ eine Linearform auf V .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow f^*(\varphi) & \downarrow \varphi \\ & & K \end{array}$$

Definition 3.2 (duale Abbildung)

Die zu f duale Abbildung ist

$$f^* : \begin{cases} W^* \rightarrow V^* \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{cases}$$

Lemma 3.3

Es ist $f^* \in \text{Hom}_K(W^*, V^*)$.

Beweis. Sind $\varphi, \psi \in W^*$ und $\lambda \in K$ ist

$$\begin{aligned} f^*(\varphi + \psi) &= (\varphi + \psi) \circ f \\ &= \varphi \circ f + \psi \circ f \\ &= f^*(\varphi) + f^*(\psi) \\ f^*(\lambda\varphi) &= (\lambda\varphi) \circ f \\ &= \lambda \cdot (\varphi \circ f) \\ &= \lambda \cdot f^*(\varphi) \end{aligned}$$

□

Satz 3.4

Sind $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $C = (y_1, \dots, y_m)$ Basen von V bzw. W , so ist

$$M_{B^*}^{C^*}(f^*) = (M_C^B(f))^t$$

Beweis. Sei $A = M_C^B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = M_{B^*}^{C^*}(f^*) = (b_{ji})_{j,i}$. Dann ist $f(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$, also $a_{ji} = y_i^*(f(x_j)) = f^*(y_i^*)(x_j)$ und $f^*(y_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ji}x_j^*$, also $b_{ji} = f^*(y_i^*)(x_j) = a_{ij}$. □

Folgerung 3.5

Sind V und W endlichdimensional, und identifizieren wir $V = V^{**}$ und $W = W^{**}$, so ist $f = f^{**}$, das heißt $\iota \circ f = f^{**} \circ \iota$.

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{f} & W \\
\downarrow \iota_V \cong & & \downarrow \iota_W \cong \\
V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**}
\end{array}$$

Beweis. Seien B und C Basen von V bzw. W . Unter der Identifizierung ist $B^{**} = B$ und $C = C^{**}$, das heißt $\iota(x_i) = x_i^{**}$ bzw. $\iota(y_j) = y_j^{**}$, denn $\iota(x_i)(x_j^*) = x_j^*(x_i) = \delta_{ij} = x_i^{**}(x_j^*) \quad \forall i, j$ und somit

$$M_C^B(f^{**}) \stackrel{3.4}{=} \left(M_{B^*}^{C^*}(f^*) \right)^t \stackrel{3.4}{=} \left(M_C^B(f) \right)^{tt} = M_C^B(f)$$

Also $f^{**} = f$. □

Folgerung 3.6

Sind V, W endlichdimensional, so liefert die Abbildung $f \mapsto f^*$ einen Isomorphismus von K -Vektorräumen.

$$\text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(W^*, V^*)$$

Beweis. Sind $f, g \in \text{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \in K, \varphi \in W^*$, so ist

$$\begin{aligned}
(f+g)^*(\varphi) &= \varphi \circ (f+g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g = f^*(\varphi) + g^*(\varphi) = (f^* + g^*)(\varphi) \\
(\lambda f)^*(\varphi) &= \varphi \circ (\lambda f) = \lambda \cdot (\varphi \circ f) = \lambda \circ f^*(\varphi) = (\lambda f^*)(\varphi)
\end{aligned}$$

Die Abbildung ist somit linear. Nach Folgerung 3.5 ist sie injektiv. Da

$$\begin{aligned}
\dim_K(V, W) &= \dim_K(V) \cdot \dim_K(W) \\
&= \dim_K(V^*) \cdot \dim_K(W^*) \\
&= \dim_K(\text{Hom}_K(W^*, V^*))
\end{aligned}$$

ist sie auch ein Isomorphismus. □

Satz 3.7

Sind V, W endlichdimensional so ist

$$\begin{aligned}
\text{Im}(f^*) &= \text{Ker}(f)^0 \\
\text{Ker}(f^*) &= \text{Im}(f)^0
\end{aligned}$$

Beweis. • $\text{Im}(f^*) \subseteq \text{Ker}(f)^0$: Ist $\varphi \in W^*, x \in \text{Ker}(f)$, so ist

$$f^*(\varphi)(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(0) = 0$$

- $\text{Ker}(f)^0 \subseteq \text{Im}(f^*)$: Sei $\varphi \in \text{Ker}(f)^0$. Setze eine Basis (x_1, \dots, x_r) von $\text{Ker}(f)$ zu einer Basis (x_1, \dots, x_n) von V fort. Dann sind $f(x_{r+1}), \dots, f(x_n)$ linear unabhängig nach der Kern-Bild-Formel (LAAG 1 III.7.13), es gibt also $\psi \in W^*$ mit

$$\psi(f(x_i)) = \varphi(x_i) \quad \forall i$$

Es folgt

$$f^*(\psi)(x_i) = \psi(f(x_i)) = \varphi(x_i) \quad \forall i$$

also $\varphi = f^*(\psi)$.

- Mit der Identifizierung $V = V^{**}$ ist

$$\operatorname{Im}(f)^0 \stackrel{3.5}{=} \operatorname{Im}(f^{**})^0 = \operatorname{Ker}(f^*)^{00} \stackrel{2.15}{=} \operatorname{Ker}(f^*)$$

□

Folgerung 3.8

Sind V, W endlichdimensional, so ist

$$\operatorname{rk}(f) = \operatorname{rk}(f^*)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}(f) &= \dim_K(\operatorname{Im}(f)) \\ &\stackrel{2.14}{=} \dim_K(W) - \dim_K(\operatorname{Im}(f)^0) \\ &\stackrel{LAAG1.III.7.13}{=} \dim_K(W^*) - \dim_K(\operatorname{Ker}(f^*)) \\ &= \operatorname{rk}(f^*) \end{aligned}$$

□

Folgerung 3.9

Ist $\dim_K(V) < \infty$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so lässt sich jede Linearform auf U zu einer Linearform auf V fortsetzen.

Beweis. Ist $f : U \rightarrow V$ die Inklusionsabbildung, so ist $f^* : V^* \rightarrow U^*$, $\varphi \mapsto \varphi|_U$ und

$$\operatorname{rk}(f^*) = \operatorname{rk}(f) = \dim_K(U) = \dim_K(U^*)$$

f^* ist somit surjektiv.

□

► Bemerkung 3.10

Folgerung 3.9 gilt auch ohne die Voraussetzung $\dim_K(V) < \infty$, siehe Übung.

► Bemerkung 3.11

Ein homogenes lineares Gleichungssystem $Ax = 0$ hat als Lösungsraum $L(A, 0) \subseteq K^n$ ein Untervektorraum des K^n . Unter der Identifizierung $K^n = (K^n)^{**}$ ist $L(A, 0)$ der Annulator der Linearformen beschrieben durch die Zeilen $a_1, \dots, a_m \in (K^n)^*$ von A . Wir wollen umgekehrt zu einem Untervektorraum $W \subseteq K^n$ ein $A = (a_1, \dots, a_m) \in \operatorname{Mat}_{n \times m}(K)$ mit $W = L(A, 0)$ finden. Ist $W = \operatorname{span}_K(b_1, \dots, b_r)$, so ist $W = \operatorname{Im}(f_B)$ mit $B = (b_1, \dots, b_r) \in \operatorname{Mat}_{n \times r}(K)$.
 $\Rightarrow W \stackrel{3.7}{=} \operatorname{Ker}(f_B^*)^0$ und $M_{\mathcal{E}^t}(f_B^*) = B^t$. Wenn man also eine Basis (a_1, \dots, a_s) von $L(B^t, 0)$ bestimmt und daraus eine Matrix $A = (a_1^t, \dots, a_s^t) \in \operatorname{Mat}_{s \times n}(K)$ bildet, so ist $W = L(A, 0)$.

4. Die adjungierte Abbildung

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und V ein endlichdimensionaler unitärer K -Vektorraum.

Definition 4.1 (weitere Skalarmultiplikation)

Wir definieren auf V eine Skalarmultiplikation

$$\lambda * x = \bar{\lambda} \cdot x$$

und schreiben $\bar{V} = (V, +, *)$.

Lemma 4.2

\bar{V} ist ein K -Vektorraum und $\text{End}_K(V) = \text{End}_K(\bar{V})$.

Beweis. Mit LAAG1 VI.1.7 nachprüfen, zum Beispiel:

- $\lambda * (x + y) = \bar{\lambda} \cdot (x + y) = \bar{\lambda}x + \bar{\lambda}y = \lambda * x + \lambda * y$
- $\lambda * (\mu * x) = \bar{\lambda}(\bar{\mu} \cdot x) = \overline{\lambda\mu}x = (\lambda\mu) * x$

□

Weiterhin sei: $f \in \text{End}_K(V)$, $x \in V$, $\lambda \in K$

$$\Rightarrow f(\lambda * x) = f(\bar{\lambda}x) = \bar{\lambda} f(x)$$

$$\Rightarrow f \in \text{End}_K(\bar{V}).$$

Umgekehrt sei $g \in \text{End}_K(\bar{V})$, $x \in V$, $\lambda \in K$

$$\Rightarrow g(\lambda \cdot x) = g(\bar{\lambda} * x) = \bar{\lambda} g(x)$$

$$\Rightarrow g \in \text{End}_K(V).$$

Lemma 4.3

Für $y \in V$ ist

$$\Phi_y : \begin{cases} V \rightarrow K \\ x \mapsto \langle x, y \rangle \end{cases}$$

eine Linearform auf V .

Die Abbildung $y \mapsto \Phi_y$ liefert einen Isomorphismus $\Phi : \bar{V} \rightarrow V^*$.

Beweis. • $\Phi_y \in V^*$: Linearität in ersten Argument.

- $\Phi \in \text{Hom}_K(\bar{V}, V^*)$: Für $y, y' \in V$, $\lambda \in K$, $x \in V$ ist
 - $\Phi_{y+y'}(x) = \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle = \Phi_y(x) + \Phi_{y'}(x)$
 - $\Phi_{\lambda * y}(x) = \langle x, \lambda * x \rangle = \langle x, \bar{\lambda}y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle = \lambda \Phi_y(x)$

- Φ injektiv: Skalarprodukt ist nicht ausgeartet.

- Da $\dim_K(\bar{V}) = \dim_K(V) = \dim_K(V^*)$ ist Φ somit ein Isomorphismus.

□

Satz 4.4

Zu $f \in \text{End}_K(V)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $f^{adj} \in \text{End}_K(V)$ mit

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit sind zu zeigen.

- Existenz:

$$\begin{array}{ccc} \overline{V} & \xleftarrow{f} & \overline{V} \\ & f^{adj} & \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ V^* & \xleftarrow{f^*} & V^* \end{array}$$

Für $f^{adj} = \Phi^{-1} \circ f^* \circ \Phi \in \text{End}_K(\overline{V}) = \text{End}_K(V)$ ist

$$\Phi_y \circ = (f^* \circ \Phi)(y) = (\Phi \circ f^{adj})(y) = \Phi_{f^{adj}(y)}$$

also

$$\langle f(x), y \rangle = (\Phi_y \circ f)(x) = \Phi_{f^{adj}(y)}(x) = \langle x, f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

- Eindeutigkeit: Erfüllen f_1, f_2 für Gleichung

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

so ist

$$0 = \langle x, f_1(y) \rangle - \langle x, f_2(y) \rangle = \langle x, f_1(y) - f_2(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht ausgeartet ist, folgt daraus, dass $f_1 = f_2$. □

Definition 4.5 (adjungierter Endomorphismus)

Die Abbildung f^{adj} heißt der zu f adjungierte Endomorphismus.

■ Beispiel 4.6

- Ist f selbstadjungiert, so ist $f^{adj} = f$.
- Ist f unitär, so ist $f \in \text{Aut}_K(V)$ und

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

also $f^{adj} = f^{-1}$.

Lemma 4.7

Ist B eine Orthonormalbasis von V , so ist

$$M_B(f^{adj}) = M_B(f^*)$$

Beweis. Ist $A = M_B(f)$ und $B = M_B(f^{adj})$, $v = \Phi_B(x)$, $w = \Phi_B(y)$, so ist

$$\begin{aligned} (Ax)^t \bar{y} &= \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^{adj}(w) \rangle \\ x^t A^t \bar{y} &= x^t \bar{B} \bar{y} \\ \Rightarrow B &= \overline{A^t} = A^* \end{aligned}$$

□

Lemma 4.8

Für $f, g \in \text{End}_K(V)$ und $\lambda, \mu \in K$ ist

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)^{adj} &= \bar{\lambda} f^{adj} + \bar{\mu} g^{adj} \\ (f^{adj})^{adj} &= f \end{aligned}$$

Beweis. Für $x, y \in V$ ist

$$\begin{aligned} \langle (\lambda f + \mu g)(x), y \rangle &= \lambda \langle f(x), y \rangle + \mu \langle g(x), y \rangle \\ &= \lambda \langle x, f^{adj}(y) \rangle + \mu \langle x, g^{adj}(y) \rangle \\ &= \langle x, (\bar{\lambda} f^{adj} + \bar{\mu} g^{adj})(y) \rangle \end{aligned}$$

und

$$\langle f^{adj}(x), y \rangle = \overline{\langle y, f^{adj}(y) \rangle} = \overline{\langle f(y), x \rangle} = \langle x, f(y) \rangle$$

□

5. Der Spektralsatz

Sei V ein endlichdimensionaler unitärer K -Vektorraum und $f \in \text{End}_K(V)$.

Definition 5.1 (normaler Endomorphismus, normale Matrix)

Der Endomorphismus f heißt normal, wenn

$$f \circ f^{adj} = f^{adj} \circ f$$

Entsprechend heißt $A \in \text{Mat}_n(K)$ normal, wenn

$$AA^* = A^*A$$

Mathematica/WolframAlpha-Befehle (normale Matrix)

Ob eine Matrix A normal ist, beantwortet folgende Funktion für Mathematica bzw. WolframAlpha:

`NormalMatrixQ[A]`

■ Beispiel 5.2

- Ist f selbstadjungiert, so ist $f^{adj} = f$, insbesondere ist f normal.
- Ist f unitär, so ist $f^{adj} = f^{-1}$, insbesondere ist f normal.

Lemma 5.3

Genau dann ist $f \in \text{End}_K(V)$ normal, wenn

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle f^{adj}(x), f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Beweis. • Hinrichtung: Ist f normal, so ist

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \langle x, (f^{adj} \circ f)(y) \rangle \\ &= \langle x, (f \circ f^{adj})(y) \rangle \\ &= \langle f^{adj}(x), f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V \end{aligned}$$

- Rückrichtung: Ist umgekehrt $\langle f^{adj}(x), f^{adj}(y) \rangle$, so ist

$$\begin{aligned} \langle x, (f^{adj} \circ f)(y) \rangle &= \langle x, (f \circ f^{adj})(y) \rangle \\ 0 &= \langle x, (f^{adj} \circ f - f \circ f^{adj})(y) \rangle \\ f^{adj} \circ f &= f \circ f^{adj} \end{aligned}$$

□

Lemma 5.4

Ist f normal, ist ist

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^{adj})$$

Beweis. Nach Lemma 5.3 ist

$$\|f(x)\| = \|f^{adj}(x)\| \quad \forall x \in V$$

Insbesondere gilt

$$f(x) = 0 \iff f^{adj}(x) = 0 \quad \square$$

Lemma 5.5

?? Ist f normal, so ist

$$\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Eig}(f^{adj}, \bar{\lambda}) \quad \forall \lambda \in K$$

Beweis. Da $(\lambda \cdot \text{id} - f)^{adj} \stackrel{4.8}{=} \bar{\lambda} \cdot \text{id} - f^{adj}$ ist auch $\lambda \cdot \text{id} - f$ normal. Somit ist

$$\begin{aligned} \text{Eig}(f, \lambda) &= \text{Ker}(\lambda \text{id} - f) \\ &\stackrel{5.4}{=} \text{Ker}((\lambda \text{id} - f)^{adj}) \\ &= \text{Ker}(\bar{\lambda} \text{id} - f^{adj}) \\ &= \text{Eig}(f^{adj}, \bar{\lambda}) \end{aligned} \quad \square$$

Theorem 5.6 (Spektralsatz)

Sei $f \in \text{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, für den χ_f in Linearfaktoren zerfällt. Genau dann besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f , wenn f normal ist.

Beweis. • Hinrichtung: Ist B eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f , so ist $A = M_B(f)$ eine Diagonalmatrix. Dann ist auch $M_B(f^{adj}) \stackrel{4.7}{=} A^*$ eine Diagonalmatrix und $AA^* = A^*A$. Somit ist f normal.

• Rückrichtung: Sei f normal und $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$. Beweis nach Induktion nach $n = \dim_K(V)$.

$n = 0$: klar

$n - 1 \rightarrow n$: Wähle Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 , o.E. $\|x_1\| = 1$. Sei $U = K \cdot x_1$. Nach ?? ist $f^{adj}(x_1) = \bar{\lambda}_1 x_1$, insbesondere ist U f -invariant und f^{adj} -invariant. Für $x \in U^\perp$ ist

$$\langle f(x), x_1 \rangle = \langle x, f^{adj}(x_1) \rangle = \langle x, \bar{\lambda}_1 x_1 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle x, x_1 \rangle = 0$$

also $f(x) \in U^\perp$ und

$$\langle f^{adj}(x), x_1 \rangle = \langle x, f(x_1) \rangle = \langle x, \lambda_1 x_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, x_1 \rangle = 0$$

also $f^{adj}(x) \in U^\perp$. Somit ist $V = U \oplus U^\perp$ eine Zerlegung in Untervektorräume, die sowohl f -invariant als auch f^{adj} -invariant sind. Insbesondere ist $f^{adj}|_{U^\perp} = (f|_{U^\perp})^{adj}$, woraus folgt, dass auch $f|_{U^\perp}$ normal ist:

$$f|_{U^\perp} \circ (f|_{U^\perp})^{adj} = f \circ f^{adj}|_{U^\perp} = f^{adj} \circ f|_{U^\perp} = f^{adj}|_{U^\perp} \circ f|_{U^\perp} = (f|_{U^\perp})^{adj} \circ f|_{U^\perp}$$

Außerdem zerfällt auch $\chi_{f|_{U^\perp}} = \prod_{i=2}^n (t - \lambda_i)$ in Linearfaktoren. Nach Induktionshypothese existiert eine Orthonormalbasis (x_2, \dots, x_n) von U^\perp bestehend aus Eigenvektoren von $f|_{U^\perp}$ und (x_1, \dots, x_n) ist dann eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f . \square

Folgerung 5.7

Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Genau dann gibt es $S \in U_n$ mit $S^*AS = D$ eine Diagonalmatrix, wenn A normal ist.

► Bemerkung 5.8

Theorem 5.6 ist eine gemeinsame Verallgemeinerung von Theorem II.5.9 und Theorem II.6.5

6. Tensorprodukte

Definition 6.1 (bilineare Abbildung)

Eine Abbildung $\xi : V \times W \rightarrow U$ ist bilinear, wenn für jedes $v \in V$ die Abbildung

$$\begin{cases} W \rightarrow U \\ w \mapsto \xi(v, w) \end{cases}$$

und für jedes $w \in W$ die Abbildung

$$\begin{cases} V \rightarrow U \\ v \mapsto \xi(v, w) \end{cases}$$

linear sind.

Wir definieren

$$\text{Bil}_K(V, W, U) = \{\xi \in \text{Abb}(V \times W, U) \mid \xi \text{ bilinear}\}$$

■ Beispiel 6.2

Seien $V = W = K[t]_{\leq d}$, $U = K[t]_{\leq 2d}$. Die Abbildung

$$\xi : \begin{cases} V \times W \rightarrow U \\ (f, g) \mapsto fg \end{cases} \quad \text{ist bilinear}$$

Wir sehen, dass $\text{Im}(\xi)$ im Allgemeinen kein Untervektorraum von U ist. Ist zum Beispiel $K = \mathbb{Q}$, $d = 1$, so liegen $t^2 = \xi(t, t)$ und $-2 = \xi(-2, 1)$ im $\text{Im}(\xi)$ nicht jedoch $t^2 - 2$, denn wäre $t^2 - 2 = fg$ mit $f, g \in \mathbb{Q}[t]$ linear, so hätte $t^2 - 2$ eine Nullstelle in \mathbb{Q} , aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Lemma 6.3

$\text{Bil}_K(V, W, U)$ bildet einen Untervektorraum des K -Vektorraum $\text{Abb}(V \times W, U)$.

Beweis. klar, zum Beispiel

$$(\xi + \xi')(\lambda v, w) = \xi(\lambda v, w) + \xi'(\lambda v, w) = \lambda \xi(v, w) + \lambda \xi'(v, w) = \lambda(\xi + \xi')(v, w)$$

□

Lemma 6.4

Ist $\xi \in \text{Bil}_K(V, W, U)$ und $f \in \text{Hom}_K(U, U')$ für einen K -Vektorraum, so ist

$$f \circ \xi \in \text{Bil}_K(V, W, U')$$

Beweis. klar, zum Beispiel

$$(f \circ \xi)(\lambda v, w) = f(\xi(\lambda v, w)) = f(\lambda \xi(v, w)) = \lambda \cdot (f \circ \xi)(v, w)$$

□

Lemma 6.5

Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W . Zu jeder Familie $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ in U gibt es genau ein $\xi \in \text{Bil}_K(V, W, U)$ mit

$$\xi(v_i, w_j) = u_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J$$

Beweis. • Eindeutigkeit: Ist ξ bilinear, $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, $w = \sum_{j \in J} \mu_j w_j$ so ist

$$\begin{aligned} \xi(v, w) &= \xi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i, \sum_{j \in J} \mu_j w_j\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \xi\left(v_i, \sum_{j \in J} \mu_j w_j\right) \\ &= \sum_{i, j} \lambda_i \mu_j u_{ij} \end{aligned} \tag{1}$$

durch die Familie $(u_{ij})_{i, j}$ bestimmt.

• Existenz: Wird ξ durch (1) definiert, so ist ξ bilinear: Für festes $w = \sum_{j \in J} \mu_j w_j$ ist

$$\begin{cases} V & \rightarrow U \\ v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i & \mapsto \xi(v, w) = \sum_{i \in I} \lambda_i \left(\sum_{j \in J} \mu_j u_{ij} \right) \end{cases}$$

linear (LAAG1 III.5.1), analog für festes v . □

Definition 6.6 (Tensorprodukt)

Ein Tensorprodukt von V und W ist ein Paar (T, τ) bestehend aus einem K -Vektorraum T und einer bilinearen Abbildung $\tau \in \text{Bil}_K(V, W, T)$ welche die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Ist U ein weiterer K -Vektorraum und $\xi \in \text{Bil}_K(V, W, U)$ so gibt es genau ein $\xi_{\otimes} \in \text{Hom}_K(T, U)$ mit $\xi = \xi_{\otimes} \circ \tau$.

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \xi & \downarrow \xi_{\otimes} \\ & & U \end{array}$$

Anmerkung

Sind V und W zwei Vektorräume und K ein gemeinsamer Körper, so kann man das Tensorprodukt $V \otimes W$, was auch ein Vektorraum ist, wie folgt konstruieren: Wenn $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $C = (c_1, \dots, c_m)$ eine Basis von W ist, dann ist $V \otimes W$ ein Vektorraum, genannt *Tensorprodukt*, in dem es eine Basis gibt, die auf eindeutige Weise mit den geordneten Paaren des kartesischen Produkts

$$B \times C = \{(b_i, c_j)\}$$

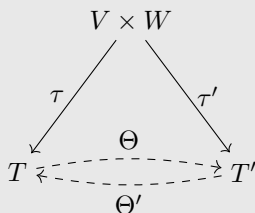
der Basen der Ausgangsräume identifiziert werden kann. Die Dimension von $V \otimes W$ ist dann das Produkt der Dimensionen von V und W . Ein Element der Basis von $V \otimes W$, das dem Paar (b_i, c_j) entspricht, wird als $b_i \otimes c_j$ notiert, das \otimes hat also keine tiefere Bedeutung. Ein Element des Tensorproduktes $V \otimes W$ hat dann die Gestalt:

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} \cdot (b_i \otimes c_j)$$

mit $\lambda_{ij} \in K$.

Lemma 6.7

Sind (T, τ) und (T', τ') Tensorprodukte von V und W , so gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\Theta : T \rightarrow T'$ mit $\tau' = \Theta \circ \tau$.



Beweis. Da (T, τ) die universelle Eigenschaft erfüllt, gibt es ein eindeutig bestimmtes $\Theta = (\tau')_{\otimes} \in \text{Hom}_K(T, T')$ mit $\tau' = \Theta \circ \tau$. Analog gibt es $\Theta' \in \text{Hom}_K(T', T)$ mit $\tau = \Theta' \circ \tau'$. Es folgt, dass $\tau = \Theta' \circ \tau' = \Theta' \circ \Theta \circ \tau$. Da auch $\tau = \text{id}_T \circ \tau$ liefert die Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von (T, τ) , für $U = T$, $\xi = \tau$, dass $\Theta \circ \Theta' = \text{id}_T$. Analog sieht man, dass $\Theta \circ \Theta' = \text{id}_{T'}$. Somit ist Θ ein Isomorphismus. \square

Definition 6.8 (Vektorraum mit Basis X)

Sei X eine Menge. Der K -Vektorraum mit Basis X ist der Untervektorraum $V = \text{span}_K((\delta_x)_{x \in X})$

des K -Vektorraum $\text{Abb}(X, K)$ mit $\delta_x(y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$

Lemma 6.9

Sei X eine Menge und V der K -Vektorraum mit Basis X . Dann ist V ein K -Vektorraum und $(\delta_x)_{x \in X}$ ist eine Basis von V .

Beweis. Zu zeigen ist nur, dass $(\delta_x)_{x \in X}$ linear unabhängig ist. Ist $f = \sum_{x \in X} \lambda_x \delta_x$, $\lambda_x \in K$, fast alle gleich 0, und $f = 0$, so ist $\lambda_x = f(x) = 0$ für jedes $x \in X$. \square

Lemma 6.10

Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(w_j)_{j \in J}$ eine Basis von W . Sei T der K -Vektorraum mit der Basis $I \times J$ (im Sinne von Definition 6.8) und $\tau : V \times W \rightarrow T$ die bilineare Abbildung gegeben durch $(v_i, w_j) \mapsto \delta_{i,j}$, vergleiche Lemma 6.5. Dann ist (T, τ) ein Tensorprodukt von V und W .

Beweis. Wir schreiben $v_i \otimes w_j$ für $\delta_{i,j}$. Sei U ein weiterer K -Vektorraum und $\xi \in \text{Bil}_K(V, W, U)$. Da $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von T ist, gibt es genau ein $\xi_\otimes \in \text{Hom}_K(T, U)$ mit $\xi_\otimes(v_i \otimes w_j) = \xi(v_i, w_j)$ für alle i, j , also mit $\xi_\otimes \circ \tau = \xi$ nach Lemma 6.5. Die universelle Eigenschaft ist somit erfüllt. \square

Satz 6.11

Es gibt ein bis auf Isomorphie (im Sinne von Lemma 6.7) eindeutig bestimmtes Tensorprodukt

$$(V \otimes_K W, \otimes)$$

von V und W . Sind V und W endlichdimensional, so ist

$$\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$$

Beweis. Lemma 6.10 und Lemma 6.7 \square

■ Beispiel 6.12

Durch die Wahl der Standardbasis erhält man einen kanonischen Isomorphismus $K^m \otimes_K K^n \cong \text{Mat}_{m \times n}(K)$.

■ Beispiel 6.13

Ist V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Basis (x_1, \dots, x_n) , so ist $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ ein \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension $2n$ mit Basis $(1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n, i \otimes x_1, \dots, i \otimes x_n)$. Durch $\lambda \cdot z \otimes x = (\lambda z) \otimes x$ für $\lambda, z \in \mathbb{C}, x \in V$ wird $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ zu einem \mathbb{C} -Vektorraum der Dimension n , $V_{\mathbb{C}}$, genannt die Komplexifizierung von V .

Satz 6.14

Sei $V \otimes_K W$ ein Tensorprodukt von V und W . Für jeden weiteren K -Vektorraum U liefert die Abbildung $\xi \rightarrow \xi_\otimes$ ein Isomorphismus

$$\text{Bil}_K(V, W, U) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_K(V \otimes_K W, U)$$

Beweis. Diese Abbildung heiße Λ .

- Λ ist linear: klar aus Eindeutigkeitsaussage, z.B.

$$(\xi_\otimes + \xi'_\otimes) \circ \otimes = \xi_\otimes \circ \otimes + \xi'_\otimes \circ \otimes = \xi + \xi' = (\xi + \xi')_\otimes \circ \otimes$$

und somit $\xi_\otimes + \xi'_\otimes = (\xi + \xi')_\otimes$.

- Λ ist injektiv: Ist $\xi \neq 0$, so wegen $\xi = \xi_\otimes \circ \otimes$ auch $\xi_\otimes \neq 0$.
- Λ ist surjektiv: Ist $f \in \text{Hom}_K(V \otimes_K W, U)$, so ist $\xi = f \circ \otimes$ bilinear, die universelle Eigenschaft liefert somit $f = \xi_\otimes \in \text{Im}(\Lambda)$. \square

Folgerung 6.15

Sind V und W endlichdimensional, so ist

$$V \otimes_K W \cong \text{Bil}_K(V, W, K)^*$$

Beweis. Es ist $\dim_K(V \otimes_K W) < \infty$ und deshalb

$$V \otimes_K W \cong (V \otimes_K W)^{**} \stackrel{6.14}{\cong} \text{Bil}_K(V, W, K)$$

□

► Bemerkung 6.16

Während obige Konstruktion des Tensorprodukts von der Wahl (und Existenz) von Basen abhängt, ist die folgende Konstruktion “basisfrei“:

Sei T_1 der K -Vektorraum mit Basis $V \times W$ und T_0 der Untervektorraum von T_1 erzeugt von Elementen der Form:

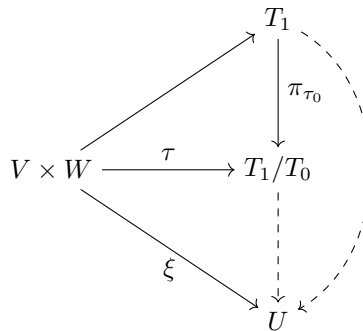
$$\delta_{v+v',w} - \delta_{v,w} - \delta_{v',w}$$

$$\delta_{v,w+w'} - \delta_{v,w} - \delta_{v,w'}$$

$$\delta_{\lambda v,w} - \lambda \cdot \delta_{v,w}$$

$$\delta_{v,\lambda w} - \lambda \cdot \delta_{v,w}$$

mit $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\lambda \in K$. Sei weiter $T = T_1/T_0$ und $\tau : V \times W \rightarrow T$ gegeben durch $(v, w) \mapsto \delta_{v,w} + T_0$. Dann ist (T, τ) ein Tensorprodukt von V und W .

**► Bemerkung 6.17**

Analog kann man für $k \geq 2$ und die K -Vektorräume V_1, \dots, V_k k -lineare Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow U$ definieren und erhält dann Tensorprodukte $V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_k$.

Kapitel IV

Moduln

In diesem ganzen Kapitel sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.

1. Moduln

Definition 1.1

Ein R -Modul ist ein Tripel $(M, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge M , einer Verknüpfung $+: M \times M \rightarrow M$ und der Abbildung $\cdot: R \times M \rightarrow M$ (Skalarmultiplikation) für die gelten:

- (M1): $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- (M2): Addition und Skalarmultiplikation sind verträglich. Für alle $x, y \in M$ und $a, b \in R$ gelten

$$1. \quad a(x + y) = ax + ay$$

$$2. \quad (a + b)x = ax + bx$$

$$3. \quad a \cdot bx = ab \cdot x$$

$$4. \quad 1 \cdot x = x$$

■ Beispiel 1.2

1. Ist $R = K$ ein Körper, so sind die R -Moduln genau die K -Vektorräume.
2. Ist $R = \mathbb{Z}$, so sind die R -Moduln genau die abelschen Gruppen mit der einzig möglichen Skalarmultiplikation

$$\mathbb{Z} \times A \rightarrow A, (k, a) \mapsto ka = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k\text{-mal}} a = \underbrace{a + \dots + a}_{k\text{-mal}}$$

vergleiche Laag 1 III.2.3

3. Jedes Ideal $M \subseteq R$ ist ein R -Modul mit Einschränkung der Multiplikation als Skalarmultiplikation.
4. Ist K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $f \in \text{End}_K(V)$, so wird V durch $P(t) \cdot x := P(f)(x)$ zu einem Modul über dem Ring $R = K[t]$, siehe auch V.5.2

► Bemerkung 1.3

Sei M ein R -Modul. Wie für Vektorräume (LAAG 1 II.1.5) überzeugt man sich leicht, dass $0x = 0$, $a0 = 0$, $(-a)x = a(-x) = -ax$ für alle $a \in R$, $x \in M$.

Im Gegensatz zu Vektorräumen folgt aber aus $ax = 0$ nicht, dass $a = 0$ oder $x = 0$, siehe zum

Beispiel das \mathbb{Z} -Modul $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Es ist

$$n \cdot \bar{1} = \bar{n} = \bar{0} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

aber $0 \neq n \in \mathbb{Z}$.

Definition 1.4 (Homomorphismus von R -Moduln)

Seien M, M' R -Moduln. Eine Abbildung $f : M \rightarrow M'$ ein Homomorphismus von R -Moduln (oder R -Homomorphismus oder R -linear), wenn

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(ax) &= a \cdot f(x) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Menge der R -Homomorphismen $f : M \rightarrow M'$ mit $\text{Hom}_R(M, M')$. Wie üblich definiert man den Kern eines R -Homomorphismus, sowie die Begriffe Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, Endomorphismus und Automorphismus von R -Moduln.

■ Beispiel 1.5

- Ist $R = K$, so sind die R -Homomorphismen genau die lineare Abbildungen.
- Ist $R = \mathbb{Z}$, so sind die R -Homomorphismen genau die Gruppenhomomorphismen.

■ Beispiel 1.6

Für jedes $a \in R$ ist die Abbildung

$$\begin{cases} M \rightarrow M \\ x \mapsto ax \end{cases}$$

einen Endomorphismus von M .

Definition 1.7 (Unterm modul, Erzeugendensystem)

Ein Unterm modul ist eine nichtleere Teilmenge $N \subseteq M$, für die gilt:

- Sind $x, y \in N$, so ist auch $x + y \in N$.
- Ist $a \in R$ und $x \in N$, so ist auch $ax \in N$.

Für eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ ist

$$\sum_{i \in I} Rx_i = \left\{ \sum_{i \in I} ax_i \mid a \in R, \text{ fast alle gleich } 0 \right\}$$

der von $(x_i)_{i \in I}$ erzeugte Unterm modul von M . Ist $\sum_{i \in I} Rx_i = M$, so ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von M . Der R -Modul M ist endlich erzeugt, wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

► Bemerkung 1.8

Wieder ist der Kern eines R -Homomorphismus $f : M \rightarrow M'$ ein Unterm modul von M . Leicht sieht man auch hier, dass $\sum_{i \in I} Rx_i$ ein Unterm modul von M ist, und zwar der kleinste, der alle x_i enthält.

■ **Beispiel 1.9**

- Ist $R = K$ ein Körper, so sind die Untermoduln von M genau die Untervektorräume.
- Ist $R = \mathbb{Z}$, so sind die Untermoduln von M genau die Untergruppen und der von einer Familie erzeugte Untermodul ist genau gleich der davon erzeugten Untergruppe.
Ist zum Beispiel $M = \mathbb{Z}$, so sind alle $n\mathbb{Z}$ Untermoduln von M .

Definition 1.10 (freie Familie, Basis)

Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ in M ist frei oder (R -linear unabhängig), wenn es keine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ von Elementen von R , fast alle gleich 0, aber nicht alle gleich 0, mit $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ gibt.

Ein freies Erzeugendensystem heißt Basis. Besitzt M eine Basis, so nennt man M frei.

Satz 1.11

Seien M, M' R -Moduln, $(x_i)_{i \in I}$ eine Basis von M und $(y_i)_{i \in I}$ eine Familie in M' . Dann gibt es genau eine R -lineare Abbildung $f : M \rightarrow M'$ mit $f(x_i) = y_i$ für alle i .

Beweis. klar, siehe LAAG 1 III.5.1 □

■ **Beispiel 1.12**

- Für $n \in \mathbb{N}$ ist $M = R^n$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein endlich erzeugter freier R -Modul mit der üblichen Standardbasis.
- Allerdings ist zum Beispiel der \mathbb{Z} -Modul $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zwar endlich erzeugt aber nicht frei. Für $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $n\bar{a} = \bar{0}$, also \bar{a} linear abhängig.

Definition 1.13 (Summen von Moduln)

Die Summe einer Familie $(N_i)_{i \in I}$ von Untermoduln von M ist

$$\sum_{i \in I} N_i = \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in N_i, \text{ fast alle gleich } 0 \right\}$$

Lässt sich jedes $x \in \sum_{i \in I} N_i$ eindeutig als $\sum_{i \in I} x_i$ mit $x_i \in N_i$ schreiben, so nennt man die Summe direkt und schreibt dafür auch $\bigoplus_{i \in I} N_i$.

Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R -Moduln, so definiert man deren (externe) direkte Summe als das R -Modul

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

► **Bemerkung 1.14**

Wie auch für Vektorräume ist eine externe direkte Summe eine direkte Summe der entsprechenden Untermoduln und ist $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$, so ist M isomorph zur externen direkten Summe der N_i .

Definition 1.15 (Torsionsmodul)

Für $a \in R$ definiert man den a -Torsionsmodul von M als

$$M[a] := \{x \in M \mid ax = 0\}$$

Die Elemente des Torsionsmoduls

$$M_{tor} := \bigcup_{0 \neq a \in R} M[a] = \{x \in M \mid ax = 0 \text{ für ein } a \in R \setminus \{0\}\}$$

nennt man die Torsionselemente von M .

Satz 1.16

Für $a \in R$ ist $M[a]$ ein Untermodul von M . Ist R nullteilerfrei, so ist auch M_{tor} ein Untermodul von M .

Beweis. $M[a]$ ist der Kern des Endomorphismus $x \mapsto ax$ (Beispiel 1.6), somit ein Untermodul (Bemerkung 1.8). Seien $a, b \in R \setminus \{0\}$ und $x \in M[a]$, $y \in M[b]$. Ist R nullteilerfrei so ist $ab \neq 0$ und

$$(ab) \cdot (x + y) = b \cdot \underbrace{ax}_{=0} + a \cdot \underbrace{by}_{=0} = 0$$

also $x + y \in M[ab] \subseteq M_{tor}$. Somit ist M_{tor} in diesem Fall ein Untermodul von M . □

■ Beispiel 1.17

Sei $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dann ist $M_{tor} = M = M[n]$.

2. Teilbarkeit

Definition 2.1 (Teilbarkeit)

Seien $a, b \in R$.

1. a teilt b (in Zeichen $a \mid b$): Es existiert $x \in R$ mit $b = ax$.
2. a und b sind assoziiert (in Zeichen $a \sim b$): Es existiert $x \in R^\times$ mit $b = ax$.

Mathematica/WolframAlpha-Befehle (Teiler)

Möchte man mit Mathematica bzw. WolframAlpha überprüfen, ob n von m geteilt wird, also $m \mid n$ (!), kann man folgende Funktion aufrufen:

`Divisible[n,m]`

Eine Liste der Teiler einer Zahl x erhält man mit

`Divisors[x]`

Lemma 2.2

Für $a, b, c, d \in R$ gelten

1. $a \mid a$
2. $a \mid b$ und $b \mid c \Rightarrow a \mid c$
3. $a \mid b$ und $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$
4. $a \mid b$ und $c \mid d \Rightarrow (ac) \mid (bd)$

Beweis. klar □

Lemma 2.3

Für $a, b, c, d \in R$ gelten

1. $a \sim a$
2. $a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$
3. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
4. $a \sim b$ und $c \sim d \Rightarrow (ac) \sim (bd)$

Beweis. klar, da (R^\times, \cdot) eine Gruppe ist. □

► Bemerkung 2.4

Teilbarkeit auf R ist insbesondere eine Präordnung, das heißt reflexiv und transitiv, und Assoziiertheit ist eine Äquivalenzrelation.

Lemma 2.5

Sei R nullteilerfrei und seien $a, b \in R$. Genau dann ist $a \sim b$, wenn $a \mid b$ und $b \mid a$.

Beweis. • Hinrichtung: $b = ax$ mit $x \in R^\times \Rightarrow a = bx^{-1}$.

- Rückrichtung: $b = ax, a = by$ mit $x, y \in R^\times$

$$\begin{aligned} a &= by = axy \\ a(1 - xy) &= 0 \end{aligned}$$

Also $a = 0$ und damit $b = 0$ oder $xy = 1$, also $x, y \in R^\times$. In beiden Fällen folgt $a \sim b$. \square

■ Beispiel

Offenbar $2 \mid -2$ und $-2 \mid 2$. Es gilt $2 \sim -2$ und $-2 \sim 2$.

Satz 2.6

Sei R nullteilerfrei. Mit $[a] := \{a' \in R \mid a \sim a'\}$ wird durch $[a][b] \iff a \mid b$ eine wohldefinierte Halbordnung auf $R/\sim := \{[a] \mid a \in R\}$ gegeben.

Beweis. • wohldefiniert: $a \mid b, a \sim a', b \sim b' \Rightarrow a' \mid b'$: $ax = b, au = a', bv = b$ mit $x \in R$ und $u, v \in R^\times$

$$b' = bv = axv = a' \underbrace{u^{-1}vx}_{\in R}$$

also $a' \mid b'$.

- reflexiv: klar
- transitiv: aus Transitivität von \mid
- antisymmetrisch: Lemma 2.5

 \square **Definition 2.7 (größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches)**

Seien $a, b \in R$. Ein $c \in R$ ist ein größter gemeinsamer Teiler von a und b in Zeichen $c = \text{ggT}(a, b)$, wenn gilt: $c \mid a$ und $c \mid b$ und ist $d \in R$ mit $d \mid a$ und $d \mid b$, so auch $d \mid c$.

Ein $c \in R$ ist ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b , in Zeichen $c = \text{kgV}(a, b)$, wenn gilt: $a \mid c$ und $b \mid c$ und ist $d \in R$ mit $a \mid d$ und $b \mid d$, so ist $c \mid d$.

Mathematica/WolframAlpha-Befehle (ggT und kgV)

Die Funktionen für den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache in Mathematica bzw. WolframAlpha sind

`GCD[6,12,4,32]`

`LCM[6,12,4,32]`

► Bemerkung 2.8

Wenn ggT und kgV in einem nullteilerfreien Ring R existieren, sind sie eindeutig bestimmt, aber nur bis auf Assoziiertheit (Lemma 2.5).

Definition 2.9 (Primzahl, irreduzibel)

Sei $x \in R$.

- x ist prim $\iff x \notin R^\times \cup \{0\}$ und $\forall a, b \in R$ gilt $x \mid (ab) \Rightarrow x \mid a \vee x \mid b$.
- x ist irreduzibel $\iff x \notin R^\times \cup \{0\}$ und $\forall a, b \in R$ gilt $x = ab \Rightarrow a \in R^\times \vee b \in R^\times$.

► Bemerkung 2.10

Leicht sieht man: Ist $p \in R$ prim und $a_1, \dots, a_n \in R$ mit $p \mid (a_1 \dots a_n)$, so gilt $p \mid a_i$ für ein i .

■ Beispiel 2.11

- In $R = \mathbb{Z}$ gilt: p prim $\iff p$ irreduzibel
- Sei $f \in R = \mathbb{Q}[t]$.
 - $\deg(f) = 1 \Rightarrow f \sim (t - a)$ ist irreduzibel und prim (denn $(t - a) \mid g \iff g(a) = 0$)
 - $\deg(f) = 2$: $f = t^2 - 1$ ist nicht irreduzibel, $t^2 - 2$ ist irreduzibel

Satz 2.12

Sei R nullteilerfrei und $0 \neq p \in R \setminus R^\times$. Ist p prim, so ist es auch irreduzibel.

Beweis. Sei $p = ab$ mit $a, b \in R$. Da insbesondere $p \mid ab$ und p prim ist, folgt $p \mid a$ oder $p \mid b$. Sei ohne Einschränkung $p \mid a$, das heißt $a = pa'$ mit $a' \in R$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow p &= ab = pa'b \\ \Rightarrow p(1 - ab) &= 0 \\ \Rightarrow a'b &= 1, \text{ insbesondere } b \in R^\times \end{aligned}$$

Somit ist p irreduzibel. □

► Bemerkung 2.13

Erinnerung: Ein Ideal von R ist eine Untergruppe $I \subseteq (R, +)$ mit

$$a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I$$

also genau ein Untermodul des R -Moduls R .

Definition 2.14 (erzeugtes Ideal, Hauptideal)

Sei $A \subseteq R$. Das von A erzeugte Ideal mit

$$\langle A \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \mid n \in \mathbb{N}_0, a_1, \dots, a_n \in A, r_1, \dots, r_n \in R \right\}$$

Ist $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, so schreibt man auch (a_1, \dots, a_n) für $\langle A \rangle$. Ein Ideal der Form $I = (a)$ ist ein Hauptideal.

► Bemerkung 2.15

Das von A erzeugte Ideal $\langle A \rangle$ ist gleich dem von A erzeugten Untermodul des R -Moduls R , und ist das kleinste Ideal von R , das A enthält.

► Bemerkung 2.16

Für $a \in R$ ist $(a) = Ra$ und für $a, b \in R$ sind äquivalent:

1. $a \mid b$
2. $b \in (a)$
3. $(b) \subseteq (a)$

Für R nullteilerfrei sind zudem äquivalent:

1. $a \sim b$
2. $(a) = (b)$

■ Beispiel 2.17

Jeder Ring hat die Ideale $(0) = \{0\}$ und $(1) = R$. Für jedes $a \in R^\times$ ist $(a) = (1)$, ist R also ein Körper, so hat R keine weiteren Ideale.

■ Beispiel 2.18

In $R = \mathbb{Z}$: Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $(n) = \mathbb{Z} \cdot n = n\mathbb{Z}$.

3. Hauptidealringe

Sei R nullteilerfrei.

Definition 3.1 (Hauptidealring)

Ein Ring R ist ein Hauptidealring, wenn R nullteilerfrei ist und jedes Ideal von R ein Hauptideal ist.

■ **Beispiel 3.2**

Ist $R = K$ ein Körper, so hat R nur die Ideale (0) und (1) , und somit ist R ein Hauptidealring.

Definition 3.3 (euklidische Gradfunktion)

Eine euklidische Gradfunktion auf R ist eine Abbildung $\delta : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ für die gilt:

Für jedes $a \in R$ und $0 \neq b \in R$ gibt es $q, r \in R$ mit $a = bq + r$, wobei $r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(b)$.

Ein nullteilerfreier Ring R ist euklidisch, wenn es eine euklidische Gradfunktion auf R gibt.

■ **Beispiel 3.4**

1. Auf $R = \mathbb{Z}$ ist der Absolutbetrag

$$\delta(x) = |x|$$

eine euklidische Gradfunktion. (LAAG 1 I.4.6)

2. Auf $R = K[t]$, K ein Körper, ist der Grad

$$\delta(f) = \deg(f)$$

eine euklidische Gradfunktion. (LAAG 1 I.6.5)

3. $R = K$ ein Körper ist

$$\delta(x) = 0$$

eine euklidische Gradfunktion, da man in einem Körper jedes Element durch jedes Element (Ausnahme: 0) teilen kann.

Lemma 3.5

Sei $\delta : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine euklidische Gradfunktion und $(0) \neq \trianglelefteq R$ ein Ideal. Ist $0 \neq a \in I$ mit $\delta(a) = \min\{\delta(b) \mid 0 \neq b \in I\}$, so ist $I = (a)$.

Beweis. • “ \supseteq ”: $a \in I \Rightarrow (a) \subset I$

- “ \subseteq ”: Sei $0 \neq b \in I$. Schreibe $b = qa + r$ mit $q, r \in R$ und $r = 0$ oder $\delta(r) < \delta(a)$. Da $r = \underbrace{b}_{\in I} - q \underbrace{a}_{\in I} \in I$ folgt wegen der Minimalität von $\delta(a)$, dass $r = 0$, also $b \in (a)$. \square

Satz 3.6

Ist R euklidisch, so ist R ein Hauptidealring.

Beweis. Sei $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Ist $I = (0)$, so ist I ein Hauptideal. Andernfalls existiert ein $0 \neq a \in I$ mit $\delta(a)$

minimal. Nach Lemma 3.5 ist $I = (a)$ ein Hauptideal. \square

Folgerung 3.7

Die Ringe \mathbb{Z} und $K[t]$, K ein Körper, sind Hauptidealringe.

Lemma 3.8 (Lemma von Bézout)

Sei R ein Hauptidealring und $a, b \in R$. Es existiert ein $c \in R$ mit $c = \text{ggT}(a, b)$ und $(c) = (a, b)$. Insbesondere gibt es $x, y \in R$ mit $c = ax + by$ und $\text{ggT}(x, y) = 1$.

Beweis. R Hauptidealring $\Rightarrow \exists c \in R$ mit $(c) = (a, b)$, insbesondere $c = ax + by$ mit $x, y \in R$.

- $c = \text{ggT}(a, b)$: $a, b \in (c) \Rightarrow c \mid a$ und $c \mid b$. Ist $d \in R$ mit $d \mid a$ und $d \mid b$, so ist $d \mid (ax + by) = c$
- $\text{ggT}(x, y) = 1$: Ist $d \in R$ mit $d \mid x$ und $d \mid y$, so gelten $(cd) \mid (ax)$ und $(cd) \mid (by) \Rightarrow (cd) \mid (ax + by) = c \Rightarrow d \in R^\times$, also $d \sim 1$. \square

Satz 3.9

Sei R ein Hauptidealring, $p \in R$. Ist p irreduzibel, so auch prim.

Beweis. Seien $a, b \in R$ mit $p \mid (ab)$. Angenommen $p \nmid a$. Da p irreduzibel ist, ist $\text{ggT}(p, a) = 1$, also $1 = px + ay$ mit $x, y \in R$ nach Lemma 3.8. Also $p \mid (pbx + aby) = b$. \square

4. Faktorielle Ringe

Sei R nullteilerfrei.

Definition 4.1 (faktorielle Ringe)

R ist faktoriell \iff jedes $0 \neq x \in R \setminus R^\times$ ist ein Produkt von Primelementen.

Lemma 4.2

Sei R faktoriell und $x \in R$. Ist x irreduzibel, so auch prim.

Beweis. Sei x irreduzibel, insbesondere $0 \neq x \in R \setminus R^\times$. Da R faktoriell, ist $x = p_1 \cdot \dots \cdot p_n$ mit $p_1, \dots, p_n \in R$ prim. Da x irreduzibel ist und $p_i \notin R^\times$ ist $n = 1$ und somit $x = p_1$ prim. \square

Lemma 4.3

Sei R ein Hauptidealring und

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$$

eine Kette von Idealen in R . Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $I_n = I_m$ für alle $m \geq n$.

Beweis. Behauptung: $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ist wieder ein Ideal von R .

Beweis: schon in den Übungen zum Teil behandelt, aber hier noch mal kurz bewiesen

- $i \in I, r \in R \Rightarrow x \in I_n$ für ein $n \xrightarrow{I_n \subseteq I} rx \in I_n \subseteq I$
- $x, y \in I \Rightarrow x \in I_n, y \in I_m$ mit $n, m \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{Kette}} x + y \in I_k \subseteq I$ mit $k = \max\{n, m\}$

Da R Hauptidealring ist, ist somit $I = (x)$ für ein $x \in R$. Mit $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ folgt $x \in I_n$ für ein n , und somit $(x) \subseteq I_n \subseteq I_m \subseteq I = (x)$, für $m \geq n$, also $I_n = I_m$. \square

Satz 4.4

Ist R ein Hauptidealring, so ist R faktoriell.

Beweis. Sei $X := \{a \in R \mid a \text{ ist Produkt von Primelementen}\} \cup \{0\} \cup R^\times$. Zu zeigen ist $X = R$. Angenommen, es gebe $a \in R \setminus X$. Da nicht prim ist, insbesondere nicht irreduzibel (Satz 3.9), ist $a = a_1 \cdot a'_1$ mit $a_1, a'_1 \in R \setminus R^\times$. Wären a_1 und a'_1 in X , so auch a , also ohne Einschränkung $a_1 \notin X$. Führt man nun mit a_1 so fort, erhält man eine Folge a_1, a_2, \dots von Elementen von $R \setminus X$ mit $a_{i+1} \mid a_i$ und $a_{i+1} \not\sim a_i$ für alle i . Die entsprechenden Hauptideale bilden eine Kette

$$(a) \subsetneq (a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq \dots$$

im Widerspruch zu Lemma 4.3. Somit ist $X = R$, also R faktoriell. \square

Anmerkung

Es gilt also euklidisch \Rightarrow Hauptidealring \Rightarrow faktoriell.

Lemma 4.5

Sind $p_1, \dots, p_r \in R$ prim, $q_1, \dots, q_s \in R$ irreduzibel mit

$$\prod_{i=1}^r p_i = \prod_{j=1}^s q_j$$

ist $r = s$ und nach Umnummerierung ist

$$p_i \sim q_i \quad \forall i$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung unter der schwächeren Annahme

$$\prod_{i=1}^r p_i \sim \prod_{j=1}^s q_j$$

durch Induktion nach r .

$r = 0$: $1 \sim \prod_{j=1}^s q_j \Rightarrow q_j \in R^\times \forall j \xrightarrow{q_j \text{ irred.}} s = 0$

$r - 1 \rightarrow r$: $p_1 \mid \prod_{i=1}^r p_i \sim \prod_{j=1}^s q_j \xrightarrow{p_1 \text{ prim}} p_1 \mid q_j$ für ein j . Nach Umnummerierung ist $j = 1$. Da q_1 irreduzibel und $p_1 \notin R^\times$ ist $p_1 \sim q_1$, also $q_1 = p_1 \cdot u$ mit $u \in R^\times$. Es folgt

$$p_1 \cdot \left(\prod_{i=2}^r p_i - u \cdot \prod_{j=2}^s q_j \right) = 0$$

$$\prod_{i=2}^r p_i = u \cdot \prod_{j=2}^s q_j \sim \prod_{j=2}^s q_j$$

Nach Induktionshypothese ist $r - 1 = s - 1$, und nach Umnummerierung ist $p_i \sim q_i$ für $i = 2, \dots, r$. \square

Satz 4.6

Ist R faktoriell, so lässt sich jedes $0 \neq x \in R \setminus R^\times$ auf eindeutige Weise (bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit) als Produkt von Primelementen schreiben.

Beweis. Sei $x = \prod_{i=1}^r p_i = \prod_{j=1}^s q_j$ mit p_i, q_j prim. Da die q_j nach Satz 2.12 irreduzibel sind, folgt $r = s$ und $p_i \sim q_i$ für alle i aus Lemma 4.5. \square

Folgerung 4.7

Sei R faktoriell und enthalte $\mathcal{P} \subseteq R$ für jede Äquivalenzklasse assoziierter Primelemente genau einen Vertreter. Dann lässt sich jedes $0 \neq a \in R$ als

$$a = \varepsilon \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\mu(p)}$$

mit eindeutig bestimmten $\varepsilon \in R^\times$ und $\mu(p) \in \mathbb{N}_0$, fast alle gleich 0, schreiben.

■ Beispiel 4.8

1. Jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich eindeutig als

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p}$$

schreiben, wobei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen ist (Hauptsatz der Arithmetik).

2. Bezeichnet \mathcal{M} die Menge der normierten irreduziblen Polynome in $K[t]$ (K Körper), so lässt sich jedes $0 \neq f \in K[t]$ eindeutig als

$$f = c \cdot \prod_{P \in \mathcal{M}} P^{n_P}$$

mit $c \in K^\times$ und $n_P \in \mathbb{N}_0$, fast alle gleich 0, schreiben.

5. Quotienten von Ringen und Moduln

Seien M und M' zwei R -Moduln und $N \subseteq M$ ein Untermodul.

Definition 5.1 (Quotientenmodul)

Für $x \in M$ schreiben wir

$$x + N := \{x + y \mid y \in N\}$$

Der Quotientenmodul (oder Faktormodul) von M modulo N ist

$$M/N := \{x + N \mid x \in M\}$$

zusammen mit der Addition

$$(x + N) + (y + N) := (x + y) + N \quad (x, y \in M)$$

und der Skalarmultiplikation

$$r \cdot (x + N) := rx + N \quad (x \in M, r \in R)$$

Sei $\pi_N : M \rightarrow M/N$ die Abbildung gegeben durch $x \mapsto x + N$.

Lemma 5.2

Addition und Skalarmultiplikation sind wohldefiniert und machen M/N zu einem R -Modul. Die Abbildung $\pi_N : M \rightarrow M/N$ ist ein R -Epimorphismus mit Kern

$$\text{Ker}(\pi_N) = N$$

Beweis. • wohldefiniert: wie in LAAG 1 III.7.5

• M/N ist R -Modul: wie in LAAG 1 III.7.7 □

► Bemerkung 5.3

Durch $x \sim_N x' \iff x - x' \in N$ wird eine Äquivalenzrelation \sim_N auf M definiert, und $x + N$ ist eine \sim_N -Äquivalenzklasse $[x]_{\sim_N} = \{y \in M \mid x \sim_N y\}$.

Satz 5.4 (Homomorphiesatz für Moduln)

Sei $f \in \text{Hom}_K(M, M')$ und $N \subseteq M$ ein Untermodul mit $N \subseteq \text{Ker}(f)$. Dann gibt es genau ein $\bar{f} \in \text{Hom}_K(M/N, M')$ mit $f = \bar{f} \circ \pi_N$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ & \searrow \pi_N & \nearrow \bar{f} \\ & M/N & \end{array}$$

Beweis. Analog zu LAAG 1 III.7.9. Man zeigt, dass jedes $\bar{f} \in \text{Hom}_K(M/N, M')$

$$\bar{f}(x + N) = f(x) \quad (x \in M)$$

erfüllen muss, und dass dies wiederum eine wohldefinierte Abbildung liefert. \square

Lemma 5.5

Durch $U \mapsto \pi_N(U)$ wird eine Bijektion gegeben zwischen

- den Untermoduln von M , die N enthalten
- den Untermoduln von M/N .

Beweis. Sei \mathcal{U} die Menge der Untermoduln von M , die N enthalten, $\bar{\mathcal{U}}$ die Menge der Untermoduln von M/N .

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \pi_N(U) \in \bar{\mathcal{U}}$: klar, da π_N ein Homomorphismus ist
- $\bar{U} \in \bar{\mathcal{U}} \Rightarrow \pi_N^{-1}(\bar{U}) \in \mathcal{U}$: klar, da π_N ein Homomorphismus ist und $N = \text{Ker}(\pi_N) = \pi_N^{-1}(\{0\}) \subseteq \pi_N^{-1}(\bar{U})$
- $\bar{U} \in \bar{\mathcal{U}} \Rightarrow \pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$: klar, da π_N surjektiv
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = U$:

$$\begin{aligned} \pi_N^{-1}(\pi_N(U)) &= \bigcup_{x \in U} \pi_N^{-1}(\pi_N(x)) \\ &= \bigcup_{x \in U} \pi_N^{-1}(x + N) \\ &= \bigcup_{x \in U} (x + N) \\ &= U + N = U \end{aligned}$$

\square

► Bemerkung 5.6

Das Ideal $I \trianglelefteq R$ ist ein Untermodul des R -Moduls R , somit haben wir ein R -Modul R/I definiert. Man kann R/I mit einer Ringstruktur ausstatten.

Definition 5.7 (Quotientenring)

Sei $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Für $x \in R$ schreiben wir

$$x + I = \{x + a \mid a \in I\}$$

Dann ist

$$R/I = \{x + I \mid x \in R\}$$

der Quotientenring von R modulo I mit Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} (x + I) + (x' + I) &= (x + x') + I \quad \forall x, x' \in R \\ (x + I) \cdot (x' + I) &= (x \cdot x') + I \quad \forall x, x' \in R \end{aligned}$$

Und wieder $\pi_I : R \rightarrow R/I$ mit $x \mapsto x + I$.

Satz 5.8

Addition und Multiplikation sind wohldefiniert und machen R/I zu einem kommutativen Ring mit Einselement. π_I ist ein Ringhomomorphismus mit Kern

$$\text{Ker}(\pi_I) = I$$

Beweis. • Addition wohldefiniert: Lemma 5.2

- Multiplikation wohldefiniert: Sind $x, x', y, y' \in R$ mit

$$x + I = x' + I$$

$$y + I = y' + I$$

Dann ist

$$x - x' = a \in I \Rightarrow x = x' + a$$

$$y - y' = b \in I \Rightarrow y = y' + b$$

Also

$$\begin{aligned} xy &= (x' + a)(y' + b) = x'y' + \underbrace{ay' + x'b + ab}_{\in I} \\ &\Rightarrow xy + I = x'y' + I \end{aligned}$$

- R/I ist Ring: R1 bis R3 folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von R .
- R/I ist kommutativ: folgt auch aus den Eigenschaften von R .
- Einselement: $1 + I$
- π_I ist ein Ringhomomorphismus: folgt nach Definition
- $\text{Ker}(\pi_I)$: klar

□

Satz 5.9 (Homomorphiesatz für Ringe)

Sei $\varphi : R \rightarrow R'$ ein Ringhomomorphismus, $I \trianglelefteq R$ ein Ideal mit $I \subseteq \text{Ker}(\varphi)$. Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus mit $\bar{\varphi} : R/I \rightarrow R'$, sodass $\bar{\varphi} \circ \pi_I = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M' \\ & \searrow \pi_I & \nearrow \bar{\varphi} \\ & R/I & \end{array}$$

Beweis. Man sieht, dass

$$\bar{\varphi}(x + I) = \varphi(x) \quad \forall x \in R$$

gelten muss, und das dies auch ein wohldefinierter Ringhomomorphismus ist.

□

■ **Beispiel 5.10**

- $R = \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $n\mathbb{Z}$ ein Ideal.

$$\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}$$

- Sei K ein Körper und sei $a \in K$. Dann ist $K[t] \rightarrow K$, $P \mapsto P(a)$ ist ein Ringepimorphismus. Der Kern $\text{Ker}(\varphi) = (t - a)$, also alle Polynome, die in a eine Nullstelle haben. Es folgt

$$K[t]/(t - a) \cong K$$

☺ \mathbb{Z} ist der Herr der Ringe ☺

■ **Beispiel 5.11**

Sei $0 \neq p \in K[t]$. $K[t]/(p)$ ist ein Ring, aber auch ein $K[t]$ -Modul und damit ein K -Vektorraum.

$$\dim_K (K[t]/(p)) = n = \deg(p)$$

Ist $B = (1, \bar{t}, \dots, \overline{t^{n-1}})$ eine Basis wobei $\bar{x} = \pi_{(p)}(x) \forall x \in K[t]$.

6. Der Elementarteilersatz

Sei R Hauptidealring.

Definition 6.1

Seien $a, b, x, y \in R$. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$E_{ij} = (\delta_{\sigma,i}, \dots, \delta_{\mu,j})_{\sigma,\mu} \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$$

Sei

$$E_{ij}(a, b, x, y) = \mathbb{1}_n - E_{ii} - E_{jj} + aE_{ii} + bE_{ij} + xE_{jj} + yE_{ji}$$

Lemma 6.2

Ist $ax - by \in R^\times$, so ist

$$E_{ij}(a, b, x, y) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Beweis. Folgt aus LAAG1 IV.3.4, da

$$\det(E_{ij}(a, b, x, y)) = ax - by \in R^\times$$

Oder direkt: Das Inverse ist $E_{ij}(xc^{-1}, bc^{-1}, ac^{-1}, -yc^{-1})$, zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xc^{-1} & -bc^{-1} \\ -yc^{-1} & ac^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ax - by)c^{-1} & 0 \\ 0 & (ax - by)c^{-1} \end{pmatrix} \quad \square$$

► Bemerkung 6.3

Multiplikation von $E_{ij}(a, b, x, y)$ von links an A führt eine Zeilenumformung durch: Sind a_1, \dots, a_n die Zeilen von A , so wird a_i durch $aa_i + ba_j$ ersetzt, und gleichzeitig a_j durch $ya_i + xa_j$ ersetzt. Ist $ax - by = 1$, so sind diese Zeilenumformungen invertierbar.

Spezialfälle: elementare Zeilenumformungen von Typ II und III aus Kapitel III (LAAG 1). Warnung: Im Gegensatz dazu sind über einem Ring R die elementaren Zeilenumformungen vom Typ I (Multiplikation mit einem Skalar) nicht immer invertierbar!

Multiplikation mit $E_{ij}(a, b, x, y)$ von rechts führt entsprechende Spaltenumformungen durch.

Theorem 6.4 (Elementarteilersatz für Matrizen, Smith-Normalform)

Sei $A \in \text{Mat}_{m \times n}(R)$. Es gibt $0 \leq r \leq \min\{n, m\}$, $S \in \text{GL}_m(R)$, $T \in \text{GL}_n(R)$ mit

$$SAT = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{0} \in \text{Mat}_{m-r \times n-r}$$

wobei $d_i \in R \setminus \{0\}$ mit $d_i \mid d_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$

Beweis. Induktion nach $\min\{m, n\}$. Für $a \in R$ sei $\delta(a) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Anzahl der Primelemente in der Primfaktorzerlegung von a , mit $\delta(0) := \infty$, und $\delta(A) := \min_{ij} \{\delta(a_{ij})\}$. Wir können annehmen, dass $\delta(A) \leq \delta(SAT)$ für alle $S \in \text{GL}_m(R)$ und $T \in \text{GL}_n(R)$. Durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen erreichen wir, dass $\delta(a_{11}) = \delta(A)$.

- 1. Behauptung: $a_{11} \mid a_{i1}$ für alle i . Gäbe es ein $i \geq 1$ für dass $a_{11} \nmid a_{i1}$, so sei $c = \text{ggT}(a_{11}, a_{i1}) = xa_{11} + ya_{i1}$ mit $\text{ggT}(x, y) = 1$, also $ax - by = 1$ mit $a, b \in R$. Multiplikation mit $E_{1i}(x, y, a, b)$ von links erzeugt an der Position $(1, 1)$ das Element c , und $\delta(c) < \delta(a_{11}) = \delta(A)$, im Widerspruch zur Minimalität von $\delta(A)$. Analog zeigt man, dass $a_{11} \mid a_{1j}$ für alle j . Durch Zeilen- und Spaltenumformungen können wir deshalb nun $a_{i1} = 0$ für alle $i > 1$ und a_{1j} für alle $j > 1$ erreichen.
- 2. Behauptung: $a_{11} \mid a_{ij}$ für alle i, j . Gäbe es $i > 1$ und $j > 1$ mit $a_{11} \nmid a_{ij} := b$, so können wir die j -te Spalte zur ersten Spalte addieren, was a_{11} nicht ändert und $a_{1i} = b$ bewirkt. Wieder können wir Behauptung 1 anwenden und erhalten den Widerspruch, dass $a_{11} \mid b$. Damit ist nach diesem Umformungen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{11} \cdot A' & \end{pmatrix}$$

mit $A' \in \text{Mat}_{(m-1) \times (n-1)}(R)$. Wir wenden nun die Induktionshypothese auf A' an und sind fertig. \square

Mathematica/WolframAlpha-Befehle (Smith-Normalform)

Elementarteiler einer Matrix A lassen sich mit Mathematica mit der Funktion

`SmithDecomposition[A]`

die als einziges Argument eine Matrix braucht. Allerdings ist der Output unformatiert, mit folgenden Befehl sieht das deutlich besser aus:

`MatrixForm/@ ({u,r,v} = SmithDecomposition[A])`

Der Output sind 3 Matrizen, wobei u für S , v für T und r für das Ergebnis von SAT steht.

► Bemerkung 6.5

Man kann zeigen, dass die d_1, \dots, d_r bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt sind. Man nennt sie deshalb Elementarteiler der Matrix A .

■ Beispiel 6.6

Sei $R = \mathbb{Z}$. Bestimme die Elementarteiler der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Anhang

Anhang A: Listen

A.1. Liste der Theoreme

Theorem I.4.8:	11
Theorem I.5.9: Satz von CAYLEY-HAMILTON	14
Theorem I.7.5: JORDAN-Normalform	22
Theorem II.4.9: GRAM-SCHMIDT-Verfahren	33
Theorem II.5.9:	37
Theorem II.6.5:	38
Theorem II.7.3: Hauptachsentransformation	40
Theorem II.7.9: Trägheitssatz von SYLVESTER	42
Theorem II.8.10: Klassifikation der Quadriken bis auf Isometrien	46
Theorem III.1.9: Das Lemma von Zorn	51
Theorem III.5.6: Spektralsatz	62
Theorem IV.6.4: Elementarteilersatz für Matrizen, SMITH-Normalform	87

A.2. Liste der benannten Sätze

Satz I.6.4: Lemma von FITTING	16
Satz I.7.3: Hauptraumzerlegung	21
Satz II.1.4: Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ	25
Satz II.2.8: Transformationsformel	28
Satz II.3.4: Polarisierung	30
Lemma IV.3.8: Lemma von BÉZOUT	78
Satz IV.5.4: Homomorphiesatz für Moduln	82
Satz IV.5.9: Homomorphiesatz für Ringe	84

A.3. Liste der Mathematica/WolframAlpha-Befehle

☺ für faule Mathematiker ☺

Mathematica/WolframAlpha-Befehle .1:	Eigenwerte und Eigenvektoren	3
Mathematica/WolframAlpha-Befehle .2:	charakteristisches Polynom	5
Mathematica/WolframAlpha-Befehle .3:	Minimalpolynom	14
Mathematica/WolframAlpha-Befehle .4:	symmetrische bzw. hermitesche Matrizen	29
Mathematica/WolframAlpha-Befehle .5:	orthogonale bzw. unitäre Matrizen	36
Mathematica/WolframAlpha-Befehle .6:	normale Matrix	61
Mathematica/WolframAlpha-Befehle .7:	Teiler	73
Mathematica/WolframAlpha-Befehle .8:	ggT und kgV	74
Mathematica/WolframAlpha-Befehle .9:	SMITH-Normalform	87

Index

- Äquivalenzrelation, [48](#)
- JORDAN-Invarianten, [21](#)
- JORDAN-Matrix, [17](#)

- Abbildung
 - bilinear, [63](#)
- Absolutbetrag, [24](#)
- Annulator, [52](#)
- assoziiert, [72](#)
- Ausartungsraum, [41](#)
- ausgeartet, [28](#), [44](#)
- Auswahlfunktion, [50](#)

- Bidualraum, [52](#)
- Bilinearform, [26](#)

- charakteristische Polynom, [4](#)

- definit, [29](#)
- diagonalisierbar, [6](#)
- duale Basis, [51](#)
- Dualraum, [51](#)

- Eigenraum, [2](#)
- Eigenvektor, [2](#)
- Eigenwert, [2](#)
- Elementarteiler, [85](#)
- Endomorphismus
 - adjungierte Endomorphismus, [58](#)
 - normal, [60](#)
 - orthogonal, [34](#)
 - unitär, [34](#)
- euklidische Gradfunktion, [75](#)
- euklidische Norm in \mathbb{C} , [25](#)
- euklidische Norm in \mathbb{R} , [24](#)
- euklidischen, [29](#)

- faktoriell, [77](#)
- Familie
 - frei, [70](#)

- größter gemeinsamer Teiler, [73](#)

- Halbordnung, [48](#)

- Hauptideal, [74](#)
- Hauptidealring, [75](#)
- Hauptraum, [20](#)
- Hauptsatz der Arithmetik, [79](#)
- hermitesch, [28](#)

- Ideal
 - erzeugte Ideal, [74](#)
- invariant, [9](#)
- irreduzibel, [73](#)
- Isometrie, [44](#)

- Kette, [49](#)
 - größtes Element, [49](#)
 - kleinstes Element, [49](#)
 - maximales Element, [49](#)
 - minimales Element, [49](#)
 - obere Schranke, [49](#)
 - untere Schranke, [49](#)
- kleinstes gemeinsames Vielfaches, [73](#)
- komplexe Konjugation, [24](#)
- Komplexifizierung, [66](#)

- lineare Ordnung, [48](#)
- Linearformen, [51](#)

- Matrix
 - normal, [60](#)
 - orthogonal, [35](#)
 - unitär, [35](#)
- Minimalpolynom, [12](#)
- Modul, [68](#)
 - (externe) direkte Summe, [70](#)
 - Automorphismus, [69](#)
 - Basis, [70](#)
 - direkt, [70](#)
 - endlich erzeugt, [69](#)
 - Endomorphismus, [69](#)
 - Epimorphismus, [69](#)
 - Erzeugendensystem, [69](#)
 - frei, [70](#)
 - Homomorphismus, [69](#)
 - Isomorphismus, [69](#)

- Kern, 69
- Monomorphismus, 69
- Summe, 70
- nilpotent, 16
- Nilpotenzklasse, 16
- normiert, 5
- orthogonal, 31
- orthogonale Gruppe, 35
- orthogonale Komplement, 31
- orthogonale Projektion, 32
- orthonormal, 31
- partielle Ordnung, 48
- Präordnung, 72
- prim, 73
- projektiven Raum, 47
- quadratische Form, 29
- Quadrik, 43
 - kegeligen Typ, 44
 - Mittelpunktsquadrik, 44
 - parabolischen Typ, 44
- Quotientenmodul, 80
- Quotientenring, 81
- Relation, 48
 - antisymmetrisch, 48
 - reflexiv, 48
 - symmetrisch, 48
 - total, 48
 - transitiv, 48
- Ring
 - euklidisch, 75
- selbstadjungiert, 37
- semidefinit, 29
- Sesquilinearform, 26
 - darstellende Matrix, 26
- Signatur, 42
- spezielle orthogonale Gruppe, 35
- spezielle unitäre Gruppe, 35
- Standardskalarprodukt in \mathbb{C} , 25
- Standardskalarprodukt in \mathbb{R} , 23
- symmetrisch, 28
- teilt, 6, 72
- Tensorprodukt, 64
- Torsionselemente, 71
- Torsionsmodul, 71
- Totalordnung, 48
- trigonalisierbar, 9
- unitäre Gruppe, 35
- unitären, 29
- universelle Eigenschaft, 64
- Unterm modul, 69
 - erzeugte Unterm modul, 69
- Vektorraum mit Basis X , 65
- Vielfachheit, 7
 - algebraische Vielfachheit, 8
 - geometrische Vielfachheit, 8
- zyklisch, 13