Wichtige Methoden der Analysis

H. Haustein, P. Lehmann

23. Juli 2018

1 Grenzwerte berechnen

1. Kann man die Grenze in die Funktion einsetzen und ausrechnen, ohne dass es zu Problemen kommt?

2. Geschicktes Ausklammern im Nenner, dann kürzen im Zähler.

3. Regel von l'Hospital (mehrfach) verwenden, klappt aber nur, wenn Zähler und Nenner differenzierbar sind:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2 Stetigkeit

3 Partialbruchzerlegung

1. Bestimmung der Nullstellen des Nenner-Polynoms

2. Umschreiben des Polynoms (mit 3 Nullstellen n_1, n_2, n_3):

$$\frac{f}{(x-n_1)(x-n_2)(x-n_3)}=\frac{A}{x-n_1}+\frac{B}{x-n_2}+\frac{C}{x-n_3}$$

3. kommt eine Nullstelle doppelt vor, so ergibt sich

$$\frac{f}{(x-n_1)^2}=\frac{A}{x-n_1}+\frac{B}{(x-n_1)^2}$$

4. bei komplexen Nullstellen:

$$\frac{A}{a-ib-z}+\frac{B}{a+ib-z}\text{ in die Form }\frac{C+Dz}{(a-z)^2+b^2}$$

5. Multiplikation beider Seiten mit $x-n_1$, Kürzen auf der linken Seite nicht vergessen!

6. Einsetzen: $x=n_1$, Brüche mit B und C werden zu 0, linke Seite $=A$

7. diesem Schritt mit n_2 und n_3 wiederholen

4 Ableitung

4.1 (normale) Ableitung

1. Rechenregeln verwenden:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)' &= f' \pm g' \\
(cf)' &= c \cdot f' \\
(x^n)' &= nx^{n-1} \\
(fg)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\
f(g(x))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
(\ln f)' &= \frac{f'}{f}
\end{aligned}$$

2. bei mehrdimensionalen Funktionen: komponentenweise ableiten

4.2 Richtungsableitung und partielle Ableitung

1. Berechnung der Richtungsableitung von f in x in Richtung v:

$$\mathrm{D}_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

2. bei partieller Ableitung: Behandeln aller Variablen, die nicht abzuleiten sind, als Konstanten

5 Integration

5.1 partielle Integration

$$\int f' \cdot g \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f \cdot g' \, \mathrm{d}x$$

Beispiel:

$$\int x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x & \qquad g(x) &= \ln(x) \\
f(x) &= \frac{1}{2}x^2 & \qquad g(x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x \, \mathrm{d} \\
&= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2
\end{aligned}$$

5.2 Integration durch Substitution

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\phi(x))$$

Beispiel: Mit der Substitution $x = t - 1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ ist

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan(t)\\ = \arctan(x+1)\end{aligned}$$

6 Extremwerte

6.1 ohne Nebenbedingung

1. alle partiellen Ableitungen Null setzen, das resultierende Gleichungssystem lösen → Kandidaten für Extremstellen

2. HESSE-Matrix aufstellen

$$\mathrm{Hess}(f) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

3. jeden Kandidaten in die HESSE-Matrix einsetzen, Definitheit ausrechnen

- $\det(A) < 0 \Leftrightarrow$ indefinit
- $\det(A) > 0, a_1 < 0 \Leftrightarrow$ negativ definit (Maximum)
- $\det(-A) > 0, a_1 > 0 \Leftrightarrow$ positiv definit (Minimum)

6.2 mit Nebenbedingung, Lagrange-Multiplikatoren

1. Voraussetzungen prüfen:

$$\begin{aligned}&f : D \subseteq R^n \to R, \text{ stetig, differenzierbar}\\ &g : D \to R^m, \text{ stetig, differenzierbar}\\ &\mathrm{rang}(g') = m\end{aligned}$$

2. Gleichungssystem lösen

$$\begin{aligned}f'(x) + \lambda^T g'(x) &= 0\\ g(x) &= 0\end{aligned}$$

3. Lösung(en) sind Kandidaten für Extremalstellen!