

# Wichtige Methoden der Analysis

H. HAUSTEIN, P. LEHMANN

23. Juli 2018

## 1 Wichtige Ungleichungen

1. geometrisches/arithmetisches Mittel

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

2. BERNOULLI-Ungleichung

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad \forall x \geq -1, \alpha > 1$$
$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x \quad \forall x \geq -1, 0 < \alpha < 1$$

3. YOUN'sche Ungleichung:  $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b \geq 0$$

4. HÖLDER'sche Ungleichung:  $p, q \in \mathbb{R}, p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

5. MINKOWSKI-Ungleichung:  $p \in \mathbb{R}, p > 1$

$$\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

## 2 Grenzwerte berechnen

1. Kann man die Grenze in die Funktion einsetzen und ausrechnen, ohne dass es zu Problemen kommt?
2. Geschicktes Ausklammern im Nenner, dann kürzen im Zähler.
3. Regel von L'HOSPITAL (mehrfach) verwenden, klappt aber nur, wenn Zähler und Nenner differenzierbar sind:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### 3 Reihen

1. Cauchy Kriterium: untersuche Differenz von aufeinanderfolgenden Partialsummen, müssen kleiner als  $\epsilon$  sein (Konvergenz für Folgen eigentlich)
2. eines (oder mehrere) der folgenden Kriterien prüfen:
  - Majorantenkriterium  $\|x_k\| \leq \alpha_k \forall k \geq k_0, \sum_k \alpha_k$  konvergent  $\Rightarrow \sum_k \|x_k\|$  konvergent
  - Quotientenkriterium  $\frac{\|x_{k+1}\|}{\|x_k\|} \leq q < 1 \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sum_k \|x_k\|$  konvergiert
  - Wurzelkriterium  $\sqrt[k]{\|x_k\|} \leq q < 1 \forall k \geq k_0 \Rightarrow \sum_k \|x_k\|$  konvergiert
3. Konvergenzradius Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  dann

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \text{ wobei } 0 = \frac{1}{\infty}, \frac{1}{0} = \infty$$

- $|z - z_0| < R \Rightarrow$  absolut konvergent
- $|z - z_0| > R \Rightarrow$  divergent
- $|z - z_0| = R \Rightarrow$  keine Aussage,  $z$  bestimmen (Fallunterscheidung!), in Reihe einsetzen und obige Kriterien testen

### 4 Stetigkeit

1. wenn funktioniert, Rechenregeln und Beispiele aus Vorlesung (elementare Funktionen sind stetig)
2. Summen, Produkte, Komposition, Skalarmultiplikation von/mit stetigen Funktionen sind wieder stetig
3. wenn Rechenregel nicht funktionieren, dann über Folgenstetigkeit argumentieren

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \forall \text{ Folgen } x_n \rightarrow x_0 \text{ in } D$$

### 5 Partialbruchzerlegung

1. Bestimmung der Nullstellen des Nenner-Polynoms
2. Umschreiben des Polynoms (mit 3 Nullstellen  $n_1, n_2, n_3$ ):

$$\frac{f}{(x - n_1)(x - n_2)(x - n_3)} = \frac{A}{x - n_1} + \frac{B}{x - n_2} + \frac{C}{x - n_3}$$

3. kommt eine Nullstelle doppelt vor, so ergibt sich

$$\frac{f}{(x - n_1)^2} = \frac{A}{x - n_1} + \frac{B}{(x - n_1)^2}$$

4. bei komplexen Nullstellen:

$$\frac{A}{a - ib - z} + \frac{B}{a + ib - z} \text{ in die Form } \frac{C + Dz}{(a - z)^2 + b^2}$$

5. Multiplikation beider Seiten mit  $x - n_1$ , Kürzen auf der linken Seite nicht vergessen!
6. Einsetzen:  $x = n_1$ , Brüche mit  $B$  und  $C$  werden zu 0, linke Seite =  $A$
7. diesem Schritt mit  $n_2$  und  $n_3$  wiederholen

## 6 Ableitung

### 6.1 (normale) Ableitung

1. Rechenregeln verwenden:

$$\begin{aligned}(f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (cf)' &= c \cdot f' \\ (x^n)' &= nx^{n-1} \\ (fg)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ f(g(x))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ (\ln f)' &= \frac{f'}{f}\end{aligned}$$

2. bei mehrdimensionalen Funktionen: komponentenweise ableiten
3. affin lineare Funktionen sind diffbar  $Ax + b$  (folgt aus Definition diffbar Kap. 17)

### 6.2 Richtungsableitung und partielle Ableitung

1. Berechnung der Richtungsableitung von  $f$  in  $x$  in Richtung  $v$ :

$$D_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

2. bei partieller Ableitung: Behandeln aller Variablen, die nicht abzuleiten sind, als Konstanten

## 7 Integration

### 7.1 partielle Integration

$$\int f' \cdot g \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f \cdot g' \, dx$$

Beispiel:

$$\int x \cdot \ln(x) \, dx$$

$$\begin{array}{ll} f'(x) = x & g(x) = \ln(x) \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 & g(x)' = \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln(x) \, dx &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

## 7.2 Integration durch Substitution

$$\int f(x) \, dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \, dt = F(\phi(x))$$

**Beispiel:** Mit der Substitution  $x = t - 1$ ,  $dx = dt$  ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} \, dt = \int \frac{1}{t^2 + 1} \, dt = \arctan(t) \\ &= \arctan(x+1) \end{aligned}$$

## 8 Extremwerte

### 8.1 ohne Nebenbedingung

1. alle partiellen Ableitungen Null setzen, das resultierende Gleichungssystem lösen  $\rightarrow$  Kandidaten für Extremstellen
2. HESSE-Matrix aufstellen

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

3. jeden Kandidaten in die HESSE-Matrix einsetzen, Definitheit ausrechnen
  - $\det(A) < 0 \Leftrightarrow$  indefinit
  - $\det(A) > 0, a_{11} < 0 \Leftrightarrow$  negativ definit (Maximum)
  - $\det(-A) > 0, a_{11} > 0 \Leftrightarrow$  positiv definit (Minimum)

### 8.2 mit Nebenbedingung, Lagrange-Multiplikatoren

1. Voraussetzungen prüfen:

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \text{ stetig, differenzierbar} \\ g : D &\rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ stetig, differenzierbar} \\ \text{rang}(g') &= m \end{aligned}$$

2. Gleichungssystem lösen

$$\begin{aligned} f'(x) + \lambda^T g'(x) &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

3. Lösung(en) sind Kandidaten für Extremalstellen!