Wichtige Methoden der Linearen Algebra

H. Haustein, P. Lehmann

1. August 2018

1 Basiswechsel

1. Alle Vektoren b_j der alten Basis als Linearkombination mit Vektoren b' der neuen Basis darstellen

$$b_j = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} b'_i$$

2. Matrix zusammenbauen

$$T_{B'}^{B} = M_{B'}^{B}(\mathrm{id}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj} & & a_{nn} \end{array} \right)$$

2 Lineare Gleichungssysteme

2.1 Eliminierungsverfahren nach Gauss

Matrix in Zeilenstufenform bringen mit folgenden Methoden

1. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl
2. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
3. Vertauschung von zwei Zeilen

2.2 Cramer'sche Regel

$$x_i = \frac{\det(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n)}{\det(A)}$$

3 Determinanten

1. Laplace'scher Entwicklungssatz: Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A')$$

2. Determinante einer Diagonalmatrix:

$$\det(D) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

4 Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Das charakteristische Polynom bestimmen

$$\chi = \det(A - \lambda \mathbb{1}_n)$$

2. Das charakteristische Polynom 0 setzen und die λ_i's ausrechnen.

3. Für jedes λ_i die Eigenräume berechnen

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda_i) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i \mathbb{1}_n)$$

4. Die λ_i sind dann die Eigenwerte und die Eigenräume sind alle Vielfachen des Eigenvektors zum Eigenwert λ_i.

5 Diagonalisierung und Trigonalisierung

5.1 Diagonalisierung

1. Die Eigenwerte und dazu die Vielfachheiten ausrechnen. Die Diagonalmatrix besteht dann auf der Hauptdiagonalen aus Eigenwerten mit ihrer Vielfachheit, also

$$D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, ..., \lambda_1}_{\mu(\chi,\lambda_1)}, ..., \underbrace{\lambda_n, ..., \lambda_n}_{\mu(\chi,\lambda_n)})$$

Allerdings ist A nur dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert gilt

$$\dim(\mathrm{Eig}(A, \lambda)) = \mu(\chi, \lambda)$$

2. Will man noch die Transformationsmatrizen S und S^{-1} berechnen, so muss man zu jedem Eigenraum eine Basis finden. Die Vereinigung bildet dann eine Basis B von V.

3. Die Matrix S^{-1} besteht dann aus den Basiselementen von B als Spaltenvektoren, also

$$S^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} b_1 & \dots & b_n \end{array} \right)$$

4. Das Invertieren von S^{-1} gibt dann S und es gilt $SAS^{-1} = D$.

5.2 Trigonalisierung

1. Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen und zu einer Basis von V erweitern

$$S_1^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array} \right)$$

2. Matrix A_2 berechnen

$$A_2 = S_1 A S_1^{-1}$$

3. Den Vorgang mit der noch nicht trigonalisierten Matrix unten links wiederholen,

$$S_2^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 & v_2 & e_3 & \dots & e_n \end{array} \right)$$

6 Jordan-Normalform

7 Gram-Schmidt-Verfahren

8 Smith-Normalform