Stochastik SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Anita Behme

1. April 2019

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Literatur

- *Georgii*: Stochastik (5. Auflage)
- *Schilling*: Wahrscheinlichkeit (1. Auflage)
- *Bauer*: Wahrscheinlichkeitstheorie (5. Auflage) (sehr maßtheoretisch!)

Ohne Maßtheorie!

- *Krengel*: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
- *Dehling & Haupt*: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Was ist Stochastik?

Altgriechisch Stochastikos ($\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\grave{o}\zeta$) und bedeutet sinngemäß “scharfsinning in Vermuten”.
Fragestellung insbesondere aus Glückspiel, Versicherung-/Finanzmathematik, überall da wo Zufall/ Risiko / Chance auftauchen.
Was ist Stochastik?

- Beschreibt zufällige Phänomene in einer exakten Spache!
  Beispiel: “Beim Würfeln erscheint jedes sechste Mal (im Schnitt) eine 6.” $\longrightarrow$ Gesetz der großen Zahlen ($\nearrow$ später)

- Lässt sich mathematische Stochastik in zwei Teilgebiete unterteilen
  Wahrscheinlichkeitstheorie (W-Theorie) & Statistik

  - *W-Theorie*: Beschreibt und untersucht konkret gegebene Zufallssituationen.

  - *Statistik*: Zieht Schlussfolgerungen aus Beobachtungen.

  Statistik benötigt Modelle der W-Theorie und W-Theorie benötigt die Bestätigung der Modelle durch Statistik.

In diesem Semester konzentrieren wir uns nur auf die Wahrscheinlichkeitstheorie!

Kapitel I

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Wahrscheinlichkeitsräume

Ergebnisraum

Welche der möglichen Ausgänge eines zufälligen Geschehens interessieren uns?
Würfeln? Augenzahl, nicht die Lage und die Fallhöhe

Definition 1.1 (Ergebnisraum)
Die Menge der relevanten Ergebnisse eines Zufallsgeschehens nennen wir Ergebnisraum und bezeichnen diesen mit Ω.

■ **Beispiel**

- Würfeln: $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$
- Wartezeiten: $\Omega = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ (überabzählbar!)

Ereignisse

Oft interessieren wir uns gar nicht für das konkrete Ergenis des Zufallsexperiments, sondern nur für das Eintreten gewisser Ereignisse.

■ **Beispiel**

- Würfeln: Zahl ist ≥ 3
- Wartezeit: Wartezeit ≤ 5 Minuten

$\longrightarrow$ Teilmenge des Ereignisraums, also Element der Potenzmenge $\mathscr{P}(\Omega)$, denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann, d.h. welche messbar (mb) sind.

Definition 1.2 (Ereignisraum, messbarer Raum)
Sei $\Omega \neq \varnothing$ ein Ergebnisraum und $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra auf Ω, d.h. eine Familie von Teilmenge von Ω, sodass

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^C \in \mathscr{F}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} \in \mathscr{F}$

Dann heißt $(\Omega, \mathscr{F})$ Ereignisraum bzw. messbarer Raum.

Wahrscheinlichkeiten

Ordne Ereignisse Wahrscheinlichkeiten zu mittels der Abbildung

$$\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$$

sodass

$$\text{Normierung } \mathbb{P}(\Omega) = 1 \tag{N}$$

$$\sigma\text{-Additivität für paarweise disjunkte Ereignisse} \tag{A}$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F} \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{1 \geq 1} \mathbb{P}(A_i)$$

N, A und die Nichtnegativität von $\mathbb{P}$ werden als Kolmogorovsche Axiome bezeichnet (nach Kolomogorov: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, 1933)

Definition 1.3 (Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeitsverteilung)
Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein Ereignisraum und $\mathbb{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$ eine Abbildung mit Eigenschaften N und A. Dann heißt $\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmaß oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Aus der Definition folgen direkt:

Satz 1.4 (Rechenregeln für W-Maße)
Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß, Ereignissen $(\Omega, \mathscr{F}), A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathscr{F}$. Dann gelten:

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
2. endlich σ-Additivität: $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ und insbesondere $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C) = 1$
3. Monotonie: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. σ-Subadditivität:
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{1 \geq 1} \mathbb{P}(A_i)$$
5. σ-Stetigkeit: Wenn $A_n \uparrow A$ (d.h. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ und $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i)$) oder $A_n \downarrow A$, so gilt:
$$\mathbb{P}(A_n) \longrightarrow \mathbb{P}(A), n \to \infty$$

Beweis. MINT bzw Schillings Buch Kapitel 3! □

■ **Beispiel 1.5**
Für ein beliebigen Ereignisraum $(\Omega, \mathscr{F})$ $(\Omega \neq \varnothing)$ und eine beliebiges Element $\zeta \in \Omega$ definiere

$$\delta_\zeta(A := \begin{cases} 1 & \zeta \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine (degeneriertes) W-Maß auf $(\Omega, \mathscr{F})$, welches wir als DIRAC-Maß oder DIRAC-Verteilung bezeichnen.

■ **Beispiel 1.6**

Würfeln mit fairen, 6-(gleich)seitigen Würfel mit Ergebnismenge $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ und Ereignisraum $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ setzen wir als Symmetriegründen

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{6}.$$

(Wobei $\#A$ oder auch $|A|$ die Kardinalität von A ist.) Das definiert ein W-Maß.

■ **Beispiel 1.7**

Wartezeit an der Bushaltestelle mit Ergebnisraum $\Omega = \mathbb{R}_+$ und Ereignisraum BORELsche σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) = \mathscr{F}$. Eine mögliches W-Maß können wir dann durch

$$\mathbb{P}(A) = \int_A \lambda e^{-\lambda x} dx$$

für einen Parameter $\lambda > 0$ festlegen. (Offenbar gelte $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und die σ-Additivität aufgrund der Additivität des Integrals.) Wir bezeichnen diese Maß als Exponentialverteilung. (Warum gerade dieses Maß für Wartezeiten gut geeignet ist $\nearrow$ später)

Kapitel II

Test

Anhang