Analysis 1. Semester (WS2017/18)

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht
Kursassistenz: Moritz Schönherr

Stand: 1. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen der Mathematik **1**

1 Grundbegriffe aus Mengelehre und Logik **3**

2 Aufbau einer mathematischen Theorie **7**
2.0.1 Relationen und Funktionen 7
2.0.2 Bemerkungen zum Fundament der Mathematik 10

II Zahlenbereiche **13**

3 Natürliche Zahlen **15**

4 Ganze und rationale Zahlen **19**

5 Reelle Zahlen **23**
5.1 Struktur von archimedisch angeordneten Körper (allg.) 23

6 Komplexe Zahlen(Überblick) **25**

III Metrische Räume und Konvergenz **27**

7 Grundlegen Ungleichungen **29**

8 Metrische Räume **31**

9 Konvergenz **33**

10 Vollständigkeit **35**

11 Kompaktheit **37**

12 Reihen **39**

IV Funktionen und Stetigkeit **41**

13 Funktionen **43**

Literatur

- Forster: Analysis 1 + 2, Vieweg
- Königsberger: Analysis 1 + 2, Springer
- Hildebrandt: Analysis 1 + 2, Springer
- Walter: Analysis 1 + 2, Springer
- Escher/Amann: Analysis 1 + 2, Birkhäuser
- Ebbinghaus: Einfühung in die Mengenlehre, BI-Wissenschaftsverlag
- Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teubner 1996
- Springer-Taschenbuch der Mathematik, Springer 2012

Teil I

Grundlagen der Mathematik

Kapitel 1

Grundbegriffe aus Mengelehre und Logik

Mengenlehre: Universalität von Aussagen
Logik: Regeln des Folgerns, wahre/falsche Aussagen

Definition 1.1 (Definition Aussage)
Sachverhalt, dem man entweder den Wahrheitswert "wahröder "falschßuordnen kann, aber nichts anders.

Beispiele:

Beispiel

5 ist eine Quadratzahl $\rightarrow$ falsch (Aussage)

Die Elbe fließt durch Dresden $\rightarrow$ wahr (Aussage)

Mathematik ist rot $\rightarrow$??? (keine Aussage)

Definition 1.2 (Menge)
Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen.
(Cantor, 1877)

Beispiele:
- $M_1 :=$ Menge aller Städte in Deutschland
- $M_2 := \{1; 2; 3\}$

Für ein Objekt m und eine Menge M gilt stets $m \in M$ oder $m \notin M$
Für die Mengen M und N gilt $M = N$, falls dieselben Elemente enthalten sind $\{1; 2; 3\} = \{3; 2; 1\} = \{1; 2; 2; 3\}$

- $N \subseteq M$, falls $n \in M$ für jedes $n \in N$
- $N \subset M$, falls zusätzlich $M \neq N$

Definition 1.3 (Aussageform)
Sachverhalt mit Variablen, der durch geeignete Ersetzung der Variablen zur Aussage wird.

Beispiel 1.4

- $A(X) :=$ *Die Elbe fließt durch X*
- $B(X; Y; Z) := X + Y = Z$
- *aber* $A(Dresden), B(2; 3; 4)$ *sind Aussagen,* $A(Mathematik)$ *ist keine Aussage*
- $A(X)$ *ist eine Aussage fü jedes* $X \in M_1 \rightarrow$ *Generalisierung von Aussagen durch Mengen*

Bildung und Verknüpfung von Aussagen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Beispiel 1.5

- *¬(3 ist gerade) → w*
- *(4 ist gerade) ∧ (4 ist Primzahl) → f*
- *(3 ist gerade) ∨ (3 ist Primzahl) → w*
- *(3 ist gerade) ⇒ (Mond ist Würfel) → w*
- *(Die Sonne ist heiß) ⇒ (es gibt Primzahlen) → w*

Auschließendes oder: (entweder A oder B) wird realisiert durch $\neg(A \iff B)$.
Aussageform $A(X)$ sei für jedes $X \in M$ Aussage: neue Aussage mittels Quantoren

- $\forall$: "für alle"
- $\exists$: ës existiert"

Beispiel 1.6
$\forall n \in \mathbb{N} : n$ *ist gerade* $\rightarrow f$
$\exists n \in \mathbb{N} : n$ *ist gerade* $\rightarrow w$

Definition 1.7 (Tautologie bzw. Kontraduktion/Widerspruch)
Zusammengesetzte Aussage, die unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Teilaussagen stest wahr bzw. falsch ist.

Beispiel 1.8

- *Tautologie (immer wahr):* $(A) \vee (\neg A), \neg(A \wedge (\neg A)), (A \wedge B) \Rightarrow A$
- *Widerspruch (immer falsch):* $A \wedge (\neg A), A \iff \neg A$
- *besondere Tautologie:* $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Satz 1.9 (Morgansche Regeln)
Folgende Aussagen sind Tautologien:

- $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$

Bildung von Mengen Seien M und N Mengen

- Aufzählung der Elemente: $\{1; 2; 3\}$
- mittels Eigenschaften: $\{X \in M \mid A(X)\}$
- $\emptyset :=$ Menge, die keine Elemente enthält
  - leere Menge ist immer Teilmenge jeder Menge M
  - **Warnung:** $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- Verknüpfung von Mengen wie bei Aussagen

Definition 1.10 (Mengensystem)
Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ ist eine Menge, bestehend aus anderen Mengen.

- $\bigcup M := \{X \mid \exists M \in \mathcal{M} : X \in M\}$ *(Vereinigung aller Mengen in $\mathcal{M}$)*
- $\bigcap M := \{X \mid \forall M \in \mathcal{M} : X \in M\}$ *(Durchschnitt aller Mengen in $\mathcal{M}$)*

Definition 1.11 (Potenzmenge)
Die Potenzmenge $\mathcal{P}$ enthält alle Teilmengen einer Menge M.
$\mathcal{P}(X) := \{\tilde{M} \mid \tilde{M} \subset M\}$

Beispiel:

- $M_3 := \{1; 3; 5\}$
  $\rightarrow \mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1; 3\}, \{1; 5\}, \{3; 5\}, \{1; 3; 5\}\}$

Satz (de Morgansche Regeln für Mengen):

- $(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N^C$
- $(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N^C$

Definition 1.12 (Kartesisches Produkt)
$M \times N := \{m, n \mid m \in M \wedge n \in N\}$
(m, n) *heißt geordnetes Paar (Reihenfolge wichtig!)*
allgemeiner: $M_1 \times ... \times M_k := \{(m_1, ..., m_k) \mid m_j \in M_j, j = 1, .., k\}$
$M^k := M \times ... \times M := \{(m_1, ..., m_k) \mid m_j \in M_j, j = 1, .., k\}$

Satz 1.13 (Auswahlaxiom)
Sei $\mathcal{M}$ *ein Mengensystem nichtleerer paarweise disjunkter Mengen* M.

- *Es existiert eine Auswahlmenge* $\tilde{M}$, *die mit jedem* $M \in \mathcal{M}$ *genau 1 Element gemeinsam hat.*
- *beachte: Die Auswahl ist nicht konstruktiv!*

Kapitel 2

Aufbau einer mathematischen Theorie

Axiome $\rightarrow$ Beweise $\rightarrow$ Sätze ("neue"wahre Aussagen)
$\rightarrow$ ergibt Ansammlung (Menge) wahrer Aussagen

Formulierung mathematischer Aussagen

- typische Form eines mathematischen Satzes: "Wenn A gilt, dann gilt auch B."
- formal: $A \Rightarrow B$ bzw. $A(X) \Rightarrow B(X)$ ist stets wahr (insbesondere falls A wahr ist)

Beispiel

- $X \in \mathbb{N}$ und ist durch 4 teilbar $\Rightarrow X$ ist durch 2 teilbar
- beachte: Implikation auch wahr, falls $X = 5$ oder $X = 6$, dieser Fall ist aber uninteressant
- genauer meint man sogar $A \wedge C \Rightarrow B$, wobei C aus allen bekannten wahren Aussagen besteht
- man sagt: B ist **notwendig** für A, da A nur wahr sein kann, wenn B wahr ist
- man sagt: A ist **hinreichend** für B, da B stets wahr ist, wenn A wahr ist

Mathematische Beweise

- **direkter Beweis:** finde Zwischenaussagen $A_1, ..., A_k$, sodass für A auch wahr:
  $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge ... \wedge (A_k \Rightarrow B)$
- Beispiel: Zeige $x > 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$
  $(x > 2) \Rightarrow (x - 2 > 0) \wedge (x - 1 > 0) \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 1) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$
- **indirekter Beweis:** auf Grundlage der Tautologie $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ führt man direkten Beweis $\neg B \Rightarrow \neg A$ (das heißt angenommen B falsch, dann auch A falsch)
- praktisch formuliert man das auch so: $(A \wedge \neg B) \Rightarrow ... \Rightarrow (A \wedge \neg A)$
- Beispiel: Zeige $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ sei wahr
  $\neg B \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \neg A$

2.0.1 Relationen und Funktionen

Definition 2.1 (Relation)
Seien M und N Mengen. Dann ist jede Teilmenge R von $M \times N$ eine Relation.
$(x, y) \in R$ heißt: x und y stehen in Relation zueinander

Beispiele

Beispiel
M ist die Menge aller Menschen. Die Liebesbeziehung x liebt y sieht als geordnetes Paar geschrieben so aus: (x, y). Das heißt die Menge der Liebespaare ist das: $L := \{(x, y) \mid x \text{ liebt } y\}$. Und es gilt: $L \subset M \times M$.

Die Relation $R \subset M \times N$ heißt **Ordnungsrelation** (kurz. Ordnung) auf M, falls für alle $a, b, c \in M$ gilt:

- $(a, a) \in R$ (reflexiv)
- $(a, b), (b, a) \in R$ (antisymetrisch)
- $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitiv)
- z.B. $R = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) \mid X \subset Y\}$

Eine Ordnungsrelation heißt **Totalordnung**, wenn zusätzlich gilt: $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Beispiel
Seien m, n und o natürliche Zahlen, dann ist $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$ eine Totalordnung, da

- $m \leq m$ (reflexiv)
- $(m \leq n \wedge n \leq m) \Rightarrow m = n$ (antisymetrisch)
- $(m \leq n \wedge n \leq o) \Rightarrow m \leq o$ (transitiv)
- $m \leq n \vee n \leq m$ (total)

Eine Relation auf M heißt **Äquivalenzrelation**, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:

- $(a, a) \in R$ (reflexiv)
- $(a, b), (b, a) \in R$ (symetrisch)
- $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitiv)

Obwohl Ordnungs- und Äquivalenzrelation die gleichen Eigenschaften haben, haben sie unterschiedliche Zwecke: Ordnungsrelationen ordnen Elemente in einer Menge (z.B. das Zeichen $\leq$ ordnet die Menge der natürlichen Zahlen), während Äquivalenzrelationen eine Menge in disjunkte Teilmengen (Äquivalenzklassen) ohne Rest aufteilen.

Wenn R eine Ordnung auf M ist, so wird häufig geschrieben:
$a \leq b$ bzw. $a \geq b$ falls $(a, b) \in \mathbb{R}$
$a < b$ bzw. $a > b$ falls zusätzlich $a \neq b$

Definition 2.2 (Abbildung/Funktion)
Eine Funktion F von M nach N (kurz: $F : M \to N$), ist eine Vorschrift, die jedem Argument/Urbild $m \in M$ genau einen Wert/Bild $F(m) \in N$ zuordnet.
$D(F) := M$ heißt Definitionsbereich/Urbildmenge
N heißt Zielbild
$F(M') := \{n \in N \mid n = F(m) \text{ für ein } m \in M'\}$ ist Bild von $M' \subset M$
$F^{-1}(N') := \{m \in M \mid n = F(m) \text{ für ein } N'\}$ ist Urbild von $N' \subset N$
$R(F) := F(M)$ heißt Wertebereich/Bildmenge
$graph(F) := \{(m, n) \in M \times N \mid n = F(m)\}$ heißt Graph von F
$F_{|M'}$ ist Einschränkung von F auf $M' \subset M$

Unterschied Zielmenge und Wertebereich: $f(x) = \sin(x)$:
Zielmenge: $\mathbb{R}$
Wertebereich: $[-1; 1]$

Funktionen F und G sind gleich, wenn
- $D(F) = D(G)$
- $F(m) = G(m) \quad \forall m \in D(F)$

Manchmal wird auch die vereinfachende Schreibweise benutzt:

- $F : M \to N$, obwohl $D(F) \subsetneq M$ (z.B. $\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Probleme bei $\frac{\pi}{2}$)

- gelegentlich spricht man auch von "Funktion $F(m)$ßtatt Funktion F

Definition 2.3 (Komposition/Verknüpfung)
Die Funktionen $F : M \to N$ und $G : N \to P$ sind verknüpft, wenn
$F \circ G : M \to P$ *mit* $(F \circ G)(m) := G(F(m))$

Eigenschaften von Funktionen:

- injektiv: Zuordnung ist eineindeutig $\to F(m_1) = F(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$
- Beispiel: x^2 ist nicht injektiv, da $F(2) = F(-2) = 4$
- surjektiv: $F(M) = N \quad \forall n \in N\ \exists m \in M : F(m) = n$
- Beispiel: $\sin(x)$ ist nicht surjektiv, da es kein x für $y = 27$ gibt
- bijektiv: injektiv und surjektiv

Für bijektive Abbildung $F : M \mapsto N$ ist Umkehrabbildung/inverse Abbildung $F^{-1} : N \mapsto M$ definiert durch: $F^{-1}(n) = m \iff F(m) = n$
Hinweis: Die Notation $F^{-1}(N')$ für Urbild bedeutet nicht, dass die inverse Abbildung F^{-1} existiert.

Satz 2.4
Sei $F : M \to N$ surjektiv. Dann existiert die Abbildung $G : N \to M$, sodass $F \circ G = id_N$ (d.h. $F(G(n)) = n \quad \forall n \in N$)

Definition 2.5 (Rechenoperation/Verknüpfung)
Eine Rechenoperation auf einer Menge M ist die Abbildung $* : M \times M \to M$ d.h. $(m, n) \in M$ wird das Ergbnis $m * n \in M$ zugeordnet.

Eigenschaften von Rechenoperationen:
- hat neutrales Element $e \in M : m * e = m$
- ist kommutativ $m * n = n * m$

- ist assotiativ $k * (m * n) = (k * m) * n$
- hat ein inverses Element $m' \in M$ zu $m \in M : m * m' = e$

e ist stets eindeutig, m' ist eindeutig, wenn die Operation $*$ assoziativ ist.

Beispiele:

- Addition $+$: $(m, n) \mapsto m + n$ Summe, neutrales Element heißt Nullelement, inverses Element $-m$
- Multiplikation $\cdot$: $(m, n) \mapsto m \cdot n$ Produkt, neutrales Element Eins, inverses Element m^{-1}

Addition und Multiplikation sind distributiv, falls $k(m + n) = k \cdot m + k \cdot n$

Definition 2.6 (Körper)
Eine Menge M ist ein Körper K, wenn man auf K eine Addition und eine Multiplikation mit folgenden Eigenschaften durchführen kann:

- *es gibt neutrale Elemente 0 und $1 \in K$*
- *Addition und Multiplikation sind jeweils kommutativ und assoziativ*
- *Addition und Multiplikation sind distributiv*
- *es gibt Inverse $-k$ und $k^{-1} \in K$*
  $\rightarrow$ die reellen Zahlen sind ein solcher Körper

Eine Menge M habe die Ordnung "$\leq$" und diese erlaubt die Addition und Multiplikation, wenn

- $a \leq b \iff a + c \leq b + c$
- $a \leq b \iff a \cdot c \leq b \cdot c \quad c > 0$
  $\rightarrow$ Man kann die Gleichungen in gewohnter Weise umformen.

Ein Körper K heißt angeordnet, wenn er eine Totalordnung besitzt, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist.

Isomorphismus bezüglich einer Struktur ist die bijektive Abbildung $I : M_1 \mapsto M_2$, die die vorhandene Struktur auf M_1 und M_2 erhält, z.B.

- Ordnung $\leq_1$ auf M_1, falls $a \leq_1 b \iff I(a) \leq_2 I(b)$
- Abbildung $F_i : M_i \rightarrow M_i$, falls $I(F_1(a)) = F_2(I(a))$
- Rechenoperation $*_i : M_i \times M_i \rightarrow M_i$, falls $I(a *_1 b) = I(a) *_2 I(b)$
- spezielles Element $a_i \in M_i$, falls $I(a_1) = a_2$

Ës gibt 2 verschiedene Arten von reellen Zahlen, meine und Prof. Schurichts. Wenn wir einen Isomorphismus finden, dann bedeutet das, dass unsere Zahlen strukturell die selben sind."

Beispiele: $M_1 = \mathbb{N}$ und $M_2 = \{\text{gerade Zahlen}\}$, jeweils mit Addition, Multiplikation und Ordnung
$\rightarrow I : M_2 \rightarrow M_2$ mit $I(k) = 2k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
$\rightarrow$ Isomorphismus, der die Addition, Ordnung und die Null, aber nicht die Multiplikation erhält

2.0.2 Bemerkungen zum Fundament der Mathematik

Forderungen an eine mathematische Theorie:

- widerspruchsfrei: Satz und Negation nicht gleichzeitig herleitbar
- vollständig: alle Aussagen innerhalb der Theorie sind als wahr oder falsch beweisbar

zwei Unvollständigkeitssätze:
- jedes System ist nicht gleichzeitig widerspruchsfrei und vollständig
- in einem System kann man nicht die eigene Widerspruchsfreiheit zeigen

Teil II

Zahlenbereiche

Kapitel 3

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N}$ sei diejenige Menge, die die **Peano-Axiome** erfüllt, das heißt

- $\mathbb{N}$ sei induktiv, d.h. es existiert ein Nullelement und eine injektive Abbildung $\mathbb{N} to \mathbb{N}$ mit $\nu(n) \neq 0 \quad \forall n$
- Falls $N \subset \mathbb{N}$ induktiv in $\mathbb{N}$ (0, $\nu(n) \in N$ falls $n \in N \Rightarrow N = \mathbb{N}$

$\rightarrow$ $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Menge

Nach der Mengenlehre ZF (Zermelo-Fraenkel) existiert eine solche Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Mit den üblichen Symbolen hat man:

- $0 := \emptyset$
- $1 := \nu(0) := \{\emptyset\}$
- $2 := \nu(1) := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 := \nu(2) := \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Damit ergibt sich in gewohnter Weise $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$
anschauliche Notation $\nu(n) = n + 1$ (beachte: noch keine Addition definiert!)

Theorem 3.1 *Falls $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}'$ die Peano-Axiome erfüllen, sind sie isomorph bezüglich Nachfolgerbildung und Nullelement. Das heißt alle solche $\mathbb{N}'$ sind strukturell gleich und können mit obigem $\mathbb{N}$ identifiziert werden.*

Satz 3.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)
Sei $\{A_n \mid n \in N\}$ eine Menge von Aussagen A_n mit der Eigenschaft:

IA: A_0 ist wahr

IS: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \Rightarrow A_{n+1}$

A_n ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

Lemma 3.3
Es gilt:

1. $\nu(n) \cup \{0\} = \mathbb{N}$
2. $\nu(n) \neq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Satz 3.4
(rekursive Definition/Rekursion) Sei B eine Menge und $b \in B$. Sei F eine Abbildung mit $F : B \times \mathbb{N} \mapsto B$. Dann liefert nach Vorschrift: $f(0) := b$ und $f(n+1) = F(f(n), n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \mapsto B$. Das heißt eine solche Abbildung exstiert und ist eindeutig.

Rechenoperationen:
- Definition Addition '+': $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ durch $n+0 := n$, $n+\nu(m) := \nu(n+m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$
- Definition Multiplikation '·': $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ durch $n \cdot 0 := 0$, $n \cdot \nu(m) := n \cdot m + n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ sind beide Definitionen rekursiv und eindeutig definiert.
$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n + 1 = n + \nu(0) = \nu(n + 0) = \nu(n)$

Satz: Addition und Multiplikation haben folgende Eigenschaften:
- es existiert jeweils ein neutrales Element
- kommutativ
- assoziativ
- distributiv

Es gilt $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$:
- $m \neq 0 \Rightarrow m + n \neq 0$
- $m \cdot n = 0 \Rightarrow n = 0$ oder $m = 0$
- $m + k = n + k \Rightarrow m = n$ (Kürzungsregel der Addition)
- $m \cdot k = n \cdot k \Rightarrow m = n$ (Kürzungsregel der Multiplikation)

Ordnung auf $\mathbb{N}$: Relation $R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$
wobei $m \leq n \iff n = m + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

Satz 3.5
Es gilt auf $\mathbb{N}$:

- *$m \leq n \Rightarrow \exists! k \in \mathbb{N} : n = m + k$, nenne $n - m := k$ (Differenz)*
- *Relation R (bzw. $\leq$) ist eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$*
- *Ordnung $\leq$ ist verträglich mit der Addition und Multiplikation*

Beweis

Sei $n = m + k = m + k' \Rightarrow k = k'$

Sei $n = n + 0 \Rightarrow n \leq n \Rightarrow$ *reflexiv*
sei $k \leq m, m \leq n \Rightarrow \exists l, j : m = k + l, n = m + j = (k + l) + j = k + (l + j) \Rightarrow k \leq n \Rightarrow$ *transitiv*
sei nun $m \leq nundn \leq m \Rightarrow n = m + j = n + l + j \Rightarrow 0 = l + j \Rightarrow j = 0 \Rightarrow n = m \Rightarrow$ *antisymmetrisch*
Totalordnung, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n$ *oder* $n \leq m$
IA: $m = 0$ *wegen* $0 = n + 0$ *folgt* $0 \leq n \forall n$
IS: gelte $m \leq n$ *oder* $n \leq m$ *mit festem* m *und* $\forall n \in \mathbb{N}$, *dann*
falls $n \leq m \Rightarrow n \leq m + 1$
falls $m < n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m + (k + 1) = (m+)1 + k \Rightarrow m + 1 \leq n$
$m \leq n$ *oder* $n \leq m$ *gilt für* $m + 1$ *und* $\forall n \in \mathbb{N}$, *also* $\forall n, m \in \mathbb{N}$

sei $m \leq n \Rightarrow \exists j : n = m + j \Rightarrow n + k = m + j + k \Rightarrow m + k \leq n + k$ ■

Kapitel 4

Ganze und rationale Zahlen

Frage: Existiert eine natürliche Zahl x mit $n = n' + x$ für ein gegebenes n und n'?
Antwort: Das geht nur falls $n \leq n'$, dann ist $x = n - n'$
Ziel: Zahlenbereichserweiterung, sodass die Gleichung immer lösbar ist. Ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine neue Zahl als Lösung zu. Gewisse Paare liefern die gleiche Lösung, z.B. $(6, 4), (5, 3), (7, 5)$. Diese müssen mittels Relation identifiziert werden.

$$\mathbb{Q} := \{(n_1, n_1'), (n_2, n_2') \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid n_1 + n_2' = n_1' + n_2\}$$

Definition 4.1
$\mathbb{Q}$ ist die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Beispiel
$(5, 3) \sim (6, 4) \sim (7, 5)$ *bzw.* $(5 - 3) \sim (6 - 4) \sim (7 - 5)$
$(3, 6) \sim (5, 8)$ *bzw.* $(3 - 6) \sim (5 - 8)$

Beweis
offenbar $((n, n'), (n, n')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ *reflexiv*
falls $((n_1, n_1'), (n_2, n_2')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (n_2, n_2'), (n_1, n_1')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ *symmetrisch*
sei $((n_1, n_1'), (n_2, n_2')) \in \mathbb{Q}$ *und* $((n_2, n_2'), (n_3, n_3')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow n_1 + n_2' = n_1' + n_2, n_2 + n_3' = n_2' + n_3 \Rightarrow n_1 + n_3' = n_1' + n_3 \Rightarrow ((n_1, n_1'), (n_3, n_3')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ *transitiv.* ■

setze $\overline{\mathbb{Z}} := \{[(n, n')] \mid n, n' \in \mathbb{N}\}$ Menge der ganzen Zahlen, [ganze Zahl]
Kurzschreibweise: $\overline{m} := [(m, m')]$ oder $\overline{n} := [(n, n')]$

Satz 4.2
Sei $[(n, n')] \in \overline{\mathbb{Z}}$. Dann existiert eindeutig $n* \in \mathbb{N}$ mit $(n*, 0) \in [(n, n')]$, falls $n \geq n'$ bzw. $(0, n*) \in [(n, n')]$ falls $n < n'$.

Beweis
$n \geq n' \Rightarrow \exists! n* \in \mathbb{N} : n = n' + n* \Rightarrow (n*, 0) \sim (n, n')$
$n < n' \Rightarrow \exists! n* \in \mathbb{N} : n + n* = n' \Rightarrow (0, n*) \sim (n, n')$ ■

Frage: Was hat $\overline{\mathbb{Z}}$ mit $\mathbb{Z}$ zu tun?
Antwort: identifiziere $(n, 0)$ bzw. $(n-0)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und identifiziere $(0, n)$ bzw. $(0-n)$ mit Symbol $-n$
$\Rightarrow$ ganze Zahlen kann man eindeutig den Elementen folgender Mengen zuordnen: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Rechenoperationen auf $\overline{\mathbb{Z}}$:

- Addition: $\overline{m} + \overline{n} = [(m, m')] + [(n, n')] = [(m + n, m' + n')]$
- Multiplikation: $\overline{m} \cdot \overline{n} = [(m, m')] \cdot [(n, n')] = [(mn + m'n', mn' + m'n)]$

Satz 4.3
Addition und Multiplikation sind eindeutig definiert, d.h. unabhängig von Repräsentant bezüglich $\mathbb{Q}$

Beweis
Sei $(m_1, m_1') \sim (m_2, m_2'), (n_1, n_1') \sim (n_2, n_2')$
$\Rightarrow m_1 + m_2' = m_1' + m_2, n_1 + n_2' = n_1' + n_2$
$\Rightarrow m_1 + n_1 + m_2' + n_2' = m_1' + n_1' + m_2 + n_2$
$\Rightarrow (m_1, m_1') + (n_1, n_1') \sim (m_2, m_2') + (n_2, n_2')$ ■

Satz 4.4
Für Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ gilt $\forall\, \overline{m}, \overline{n} \in \overline{\mathbb{Z}}$:

1. *es existiert eine neutrales Element:* $0 := [(0, 0)]$, $1 := [(1, 0)]$
2. *jeweils kommutativ, assoziativ und gemeinsam distributiv*
3. $-\overline{n} := [(n', n)] \in \mathbb{Z}$ *ist invers bezüglich der Addition zu* $[(n, n')] = \overline{n}$
4. $(-1) \cdot \overline{n} = -\overline{n}$
5. $\overline{m} \cdot \overline{n} = 0 \iff \overline{m} = 0 \vee \overline{n} = 0$

Beweis
zu 1) offenbar $\overline{n} + 0 = 0 + \overline{n} = \overline{n}$ *und* $\overline{n} \cdot 1 = 1 \cdot \overline{n} = \overline{n}$

zu 2) Fleißarbeit → SeSt

zu 3) offenbar $\overline{n} + (-\overline{n}) = (-\overline{n}) + \overline{n} = [(n + n', m + m')] = 0$

zu 4) $(-1) \cdot \overline{n} = [(0, 1)] \cdot [n, n'] = [n', n] = -\overline{n}$

zu 5) ÜA ■

Satz 4.5
Für $\overline{m}, \overline{n} \in \mathbb{Z}$ hat die Gleichung $\overline{m} = \overline{n} + \overline{x}$ die Lösung $\overline{x} = \overline{m} + (-\overline{n})$.

Ordnung auf $\overline{\mathbb{Z}}$: betrachte Relation $R := \{(\overline{m}, \overline{n}) \in \overline{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathbb{Z}} \mid \overline{m} \leq \overline{n}\}$

Satz 4.6
R ist Totalordnung auf $\mathbb{Z}$ und verträglich mit Addition und Multiplikation

Ordnung verträglich mit Addition: $\overline{n} < 0 \iff 0 = \overline{n} + (-\overline{n}) < -\overline{n} = (-1) \cdot \overline{n}$

beachte: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

Satz 4.7
$\mathbb{Z}$ und $\overline{\mathbb{Z}}$ sind isomorph bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung.

Beweis
betrachte Abbildung $I : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Z}}$ mit $I(k) := [(k, 0)]$ und $I(-k) := [(0, k)] \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ÜA ■

Notation: verwende stets $\mathbb{Z}$, schreibe $m, n, ...$ statt $\overline{m}, \overline{n}, ...$ für ganze Zahlen in $\mathbb{Z}$

Frage: Existiert eine ganze Zahl mit $n = n' \cdot x$ für $n, n' \in \mathbb{Z}, n' \neq 0$
Antwort: im Allgemeinen nicht **Ziel:** Zahlbereichserweiterung analog zu $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ neue Zahl x zu
schreibe (n, n') auch als $\frac{n}{n'}$ oder $n : n'$
identifiziere Paare wie z.B. $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$ durch Relation
$\mathbb{Q} := (\frac{n_1}{n_2'}, \frac{n_2}{n_2'}) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \mid n_1 n_2' = n_1' n_2$
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$

setze $\mathbb{Q} := [\frac{n}{n'}] \mid (n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ Menge der rationalen Zahlen
beachte: unendlich viele Symbole $\frac{n}{n'}$ für gleiche Zahl $[\frac{n}{n'}]$
wir schreiben später $\frac{n}{n'}$ für die Zahl $[\frac{n}{n'}]$
offenbar gilt die Kürzungsregel: $[\frac{n}{n'}] = [\frac{kn}{kn'}] \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$

Rechenoperationen auf $\mathbb{Q}$:

- Addition: $[\frac{m}{m'}] + [\frac{n}{n'}] := [\frac{mn' + m'n}{m'n'}]$
- Multiplikation: $[\frac{m}{m'}] \cdot [\frac{n}{n'}] := [\frac{mn}{m'n'}]$

Satz 4.8
Mit Addition und Multiplikation ist $\mathbb{Q}$ *ein Körper mit*
neutralen Elementen: $0 = [\frac{0_\mathbb{Z}}{1_\mathbb{Z}}] = [\frac{0_\mathbb{Z}}{n_\mathbb{Z}}], 1 := [\frac{1_\mathbb{Z}}{1_\mathbb{Z}}] = [\frac{n}{n}] \neq 0$
inversen Elementen: $-[\frac{n}{n'}] = [\frac{-n}{n}], [\frac{n}{n'}]^{-1} = [\frac{n'}{n}]$

Ordnung auf $\mathbb{Q}$: für $[\frac{n}{n'}] \in \mathbb{Q}$ kann man stets $n' > 0$ annehmen
Realtion: $R := \{([\frac{m}{m'}], [\frac{n}{n'}]) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid mn' \leq m'n, m', n' > 0\}$ gibt Ordnung $\leq$

Satz 4.9
$\mathbb{Q}$ *ist ein angeordneter Körper (d.h.* $\leq$ *ist eine Totalordnung undv erträglich mit Addition und Multiplikation).*

Notation: schreibe vereinfacht nur noch $\frac{n}{n'}$ für die Zahl $[\frac{n}{n'}] \in \mathbb{Q}$ und verwende auch Symbole $p, q, ...$ für Elemente aus $\mathbb{Q}$

Gleichung $p \cdot x = q$ hat stets eindeutige Lösung: $x = q \cdot p^{-1}$ $(p, q \in \mathbb{Q}, p \neq 0)$

Frage: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$? **Antwort:** Sei $\mathbb{Z}_\mathbb{Q} := \frac{n}{1} \in \mathbb{Q} \mid n\mathbb{Z}, I : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\mathbb{Q}$ mit $I(n) = \frac{n}{1}$
$\Rightarrow I$ ist Isomorphismus bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung.
In diesem Sinn: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Folgerung 4.10
Körper $\mathbb{Q}$ *ist archimedisch angeordnet, d.h. für alle* $q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} : q <_\mathbb{Q} n.$

Beweis
Sei $q = [\frac{k}{k'}]$ *mit* $k' > 0$
$n := 0$ *falls* $k < 0 \Rightarrow q = [\frac{k}{k'}] < [\frac{0}{k'}] = 0 = n$
$n := k + 1$ *falls* $k \geq 0 \Rightarrow q = [\frac{k}{k'}] < [\frac{k+1}{k'}] = n$ ■

Kapitel 5

Reelle Zahlen

Frage: Frage: algebraische Gleichung $a_0 + a_1 x + \cdots + a_x^k = 0$ ($a_j \in \mathbb{Z}$)
i.A nur für $k = 1$ lösbar (d.h. lin. Gl.)

Beispiel 5.1
$x^2 - 2 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$. Angenommen es existiert eine Lösung $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, o.B.d.A. höchstens eine der Zahlen m, n gerade $\Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m$ gerade $\overset{m=2k}{\Rightarrow} 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n$ gerade $\Rightarrow \lightning$.

Offenbar $1,4^2 < 2 < 1,5^2,\ 1,41^2 < 2 < 1,42^2,\ \ldots$, falls es $\sqrt{2}$ gibt, kann diese in $\mathbb{Q}$ beliebig genau approximiert werden. Es folgt, dass $\mathbb{Q}$ anscheinend „Lücken“ hat. **Fläche auf dem Einheitskreis** kann durch rationale Zahlen beliebig genau approximiert werden. Falls „Flächenzahl“ π existiert, ist das **nicht** Lösung einer algebraischen Gleichung (Lindemann 1882).

Ziel: Konstruktion eines angeordneten Körpers, der diese Lücken füllt.

5.1 Struktur von archimedisch angeordneten Körper (allg.)

$\mathbb{K}$ sei ein (bel.) Körper mit bel. Elementen $0, 1$ bzw. $0_K, 1_K$.

Satz 5.2
Sei $\mathbb{K}$ Körper. Dann gilt $\forall a, b \in \mathbb{K}$:

1) $0, 1, (-a), b^{-1}$ *sind eindeutig bestimmt*

2) $(-0) = 0,\ 1^{-1} = 1$

3) $-(-a) = a,\ (b^{-1})^{-1} = b\ (b \neq 0)$

4) $-(a + b) = (-a) + (-b),\ (a^{-1}b^{-1}) = (a^{-1}b^{-1})\ (a, \neq 0)$

5) $-a = (-1) \cdot a,\ (-a)(-b) = ab,\ a \cdot 0 = 0$

6) $ab = 0 \iff a = 0$ *oder* $b = 0$

7) $a + x = b$ *hat eindeutige Lösung* $x = b + (-a) =: b - a$ *Differenz*
$ax = b$ *hat eindeutige Lösung* $x = a^{-1}b := \frac{b}{a}$ *Quotient*

Beweis
zu 1) *vgl. lin. Algebra*

zu 2) *betrachte* $0 + 0 = 0$ *bzw.* $1 \cdot 1 = 1$

zu 3) $(-a) + a = 0 \overset{komm}{\Rightarrow} a = -(-a)$ *Rest analog*

zu 4) $a + b = ((-a) + (-b)) \Rightarrow$ *Behauptung, Addition und Multiplikation analog*

zu 5) $a \cdot 0 = 0$ *vgl. lin. Algebra*
$1a + (-1)a = 0 \Leftrightarrow (1 - 1)a = 0 \Rightarrow (-1)a = -1,\ (-a)(-b) = (-1)(-a)b \overset{3,5}{=} ab$

zu 6) *(*$\Leftarrow$*): nach 5)*
($\Rightarrow$*) sei* $a \neq 0$ *(sonst klar)* $\Rightarrow 0 = a^{-1} \cdot 0 \overset{ab=0}{=} a^{-1}ab = b \Rightarrow$ *Beh.*

zu 7) $a + x = b \Leftrightarrow x = (-a) + a \neq x = (-a) + b$*, für* $ax = b$ *analog* ∎

Setze für alle $a, \dots a_k \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Vielfache $n \cdot a$ (kein Produkt in $\mathbb{K}$!)

Potenzen $a^n = \prod_{k=1}^{n} a_k$für $n \in N_{\geq 1}$ damit $(-n)a := n(-a)$, $0_{\mathbb{N}}a = 0_{\mathbb{N}}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
$a^{-n} = (a^{-}1)^n$, $a^{0_{\mathbb{N}}} := 1_{\mathbb{K}}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, a \neq 0$
beachte : $0^0 = (0_{\mathbb{N}})^{0_{\mathbb{N}}}$ <u>nicht</u> definiert!

Rechenregeln $\forall\, a, b \in \mathbb{K}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ (sofern Potenz definiert)

Kapitel 6

Komplexe Zahlen(Überblick)

Problem: $x^2 = -1$ keine Lösung in $\mathbb{R} \Rightarrow$ Körpererweiterung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Betrachte Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

mit Addition und Multiplikation:

$(x, x^{'}) + (y, y^{'}) = (x + y, x^{'} + y^{'})$
$(x, x^{'}) \cdot (y, y^{'}) = (xy - x^{'}y^{'}, xy^{'} + x^{'}y)$

$\mathbb{C}$ ist ein Körper mit (vgl. lin Algebra):

$0_{\mathbb{K}} = (0, 0)$, $1_{\mathbb{K}} = (1, 0)$, $-(x, y) = (-x, -y)$ and $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$
mit imaginärer Einheit $\iota = (0, 1)$
$z = x + \iota y$ statt $z = (x, y)$ mit $x := \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z, $y := \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z
komplexe Zahl $z = x + \iota y$ wird mit reeller Zahl $x \in \mathbb{R}$ identifiziert
offenbar $\iota^2 = (-1, 0) = -1$, d.h. $z = \iota \in \mathbb{C}$ und löst die Gleichung $z^2 = -1$ (nicht eindeutig, auch $(-\iota)^2 = -1$)
Betrag $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (ist Betrag/Länge des Vektors (x, y))
es gilt:

a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \mathrm{Im}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2\iota}$
b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
c) $|z| = 0 \iff z = 0$
d) $|\overline{z}| = |z|$
e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
f) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecks-Ungleichung: Mikoswski-Ungleichung)

Beweis
SeSt ∎

Teil III

Metrische Räume und Konvergenz

Kapitel 7

Grundlegen Ungleichungen

Satz 7.1 (Geometrisches und arithmetisches Mittel)
Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{x_1, \dots, x_n}}_{\text{geoemtrisches Mittel}} = \underbrace{\tfrac{x_1, \dots, x_n}{n}}_{\text{arithmetisches Mittel}}$$

Gleichheit gdw $x_1 = \dots = x_n$.

Beweis
Zeige zunächst mit vollständiger Induktion

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n \tag{7.1}$$

■

Kapitel 8

Metrische Räume

Kapitel 9

Konvergenz

Kapitel 10

Vollständigkeit

Kapitel 11

Kompaktheit

Kapitel 12

Reihen

Teil IV

Funktionen und Stetigkeit

Kapitel 13

Funktionen