Zusammenfassung Analysis SS2018

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht
Kursassistenz: Moritz Schönherr

23. Juli 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Differentiation

1. Wiederholung und Motivation

Sei K^n n-dim. VR über Körper mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.

- Elemente sind alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ mit $x_1, \dots, x_n \in K$.
- Standardbasis ist $\{e_1, \dots, e_n\}$
- alle Normen auf K^n sind äquivalent $\Rightarrow$ Konvergenz unabhängig von der Norm, verwende in der Regel euklidische Norm
- Skalarprodukt
  - $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j$ in $\mathbb{R}^n$
  - $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{x}_j \cdot y_j$ in $\mathbb{C}^n$
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung ($|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in K^n$)

1.1. Lineare Abbildungen

Eine lineare Abbildung ist homogen und additiv

- Lineare Abbildung $A : K^n \to K^m$ ist darstellbar durch $m\times n$-Matrizen bezüglich der Standardbasis
  - lineare Abbildung ist stetig auf endlich-dimensionalen Räumen (unabhängig von der Norm)
  - transponierte Matrix: $A^T \in K^{n\times m}$
  - $x^T \cdot y = \langle x, y\rangle$
  - $x \cdot y^T = x \otimes y$, sogenanntes Tensorprodukt
- $L(K^n, K^m) = \{A : K^n \to K^m \mid \; A \text{ linear}\}$ (Menge der linearen Abbildung, ist normierter Raum)
  - $\|A\| = \sup\{|Ax| \mid |x| \leq 1\}$ (Operatornorm, $\|A\|$ hängt i.A. von Normen auf K^n, K^m ab)
  - in der Regel wird euklidische Norm verwendet: $|A| = \sqrt{\sum_{k,l} |a_{kl}|^2}$
  - $L(K^n, K^m)$ ist isomorph zu $K^{m\times n}$ als VR
    $\Rightarrow L(K^n, K^m)$ ist $m \cdot n$-dim. VR
  - Es gilt:

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x| \text{ und } |Ax| \leq |A| \cdot |x|$$

- Abbildung $\tilde{f} : K^n \to K^m$ heißt affin linear, falls $\tilde{f}(x) = Ax + a$ für lineare Abbildung $A : K^n \to K^m, a \in K^m$

1.2. Landau-Symbole

Definition (Landau-Symbole)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, $g : D \subset K^n \to K$, $x_0 \in \overline{D}$. Dann:

- $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_o$ gdw. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$ gdw. $\exists \delta > 0, c \geq 0 : \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq c \; \forall x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$

Definition (Anschmiegen)
$f(x) + \underbrace{f(x_0) + A(x - x_0)}_{\tilde{A}(x)} = o(|x - x_0|)$,
d.h. die Abweichung wird schneller klein als $|x - x_0|$!

Satz 1.1 (Rechenregeln für Landau-Symbole)
Für $r_k, \tilde{r}_l, R_l : D \subset K^n \to K^m, x_0 \in D, k, l \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} r_k(x) &= o(|x - x_0|^k) \\ \tilde{r}_l &= o(|x - x_0|^l) \\ R_l(x) &= \mathcal{O}(|x - x_0|^l) \end{aligned}$$

für $x \to x_0$

1. $r_k(x) = o(|x - x_0|^j) = \mathcal{O}(|x - x_0|^j) \quad j \leq k$
   $R_l(x) = o(|x - x_0|^j) = \mathcal{O}(|x - x_0|^j) \quad j < l$
2. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^j} = o(|x - x_0|^{k-j}) \quad j \leq k$
   $\frac{R_l(x)}{|x-x_0|^j} = \mathcal{O}(|x - x_0|^{l-j}) = o(|x - x_0|^{l-j-1}) \quad j \leq l$
3. $r_k(x) \pm \tilde{r}_l(x) = o(|x - x_0|^k) \quad k \leq l$
4. $r_k(x) \cdot \tilde{r}_l(x) = o(|x - x_0|^{k+l}), r_k(x) \cdot R_l(x) = o(|x - x_0|^{k+l})$

Beweisidee. Sei $\frac{|R_l(x)|}{|x-x_0|^l} \leq c$ nahe x_0, d.h. auf $(B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ für ein $\delta > 0$

1. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^j} = \frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} |x - x_0|^{k-j} \to 0$, folgl. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^\delta}$ auch beschränkt nahe x_0
   $\frac{R_l(x)}{|x-x_0|^j} = \frac{R_l(x)}{|x-x_0|^l} |x - x_0|^{l-j} \to 0$, Rest wie oben
2. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^j |x-x_0|^{k-j}} = \frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} \to 0$
   $\frac{R_l(x)}{|x-x_0|^j |x-x_0|^{l-j}} = \frac{R_l(x)}{|x-x_0|^l} \leq c$ nahe x_0, Rest wie oben
3. $\frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} \pm \frac{\tilde{r}_l(x)}{|x-x_0|^k} \overset{(2)}{=} o(1) \pm \underbrace{o(|x - x_0|^{l-k})}_{o(1)} \to 0$
4. $\frac{r_k(x) \cdot \tilde{r}_l(x)}{|x-x_0|^{k+l}} = \frac{r_k(x)}{|x-x_0|^k} \cdot \frac{\tilde{r}_l(x)}{|x-x_0|^l} \to 0$
   $\frac{|r_k(x) \cdot R_l(x)|}{|x-x_0|^{k+l}} = \frac{|r_k(x)|}{|x-x_0|^k} \cdot \frac{|R_l(x)|}{|x-x_0|^l} \to 0$ □

■ **Beispiel 1.2**
- offenbar in K^n: $|x - x_0|^k = \mathcal{O}(|x - x_0|^k) = o(|x - x_0|^{k-1})$, $x \to x_0$
- in $\mathbb{R}$ gilt für $x \to 0$:
  - $x^5 = o(|x|^4)$, $x^5 = o(|x|)$, $x^5 = \mathcal{O}(|x|^5)$, $x^5 = \mathcal{O}(|x|^3)$
  - $e^x = \mathcal{O}(1) = 3 + \mathcal{O}(1)$, $e^x = 1 + o(1) \neq 2 + o(1)$
  - $\sin(x) = \mathcal{O}(|x|)$, $\sin(x) = o(1)$, $x^3 \cdot \sin(x) = o(|x|^3)$, $e^x \cdot \sin(x) = o(1)$
  - $(1 - \cos(x))x^2 = \mathcal{O}(|x|^2)x^2 = o(|x|^3)$
  - $\frac{1}{o(1)+\cos(x)} = e^x + o(1) = 1 + o(1)$

2. Ableitung

Definition (differenzierbar, Ableitung)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to K^m$, D offen, heißt differenzierbar in $x \in D$, falls es lineare Abbildung $A \in L(K^n, K^m)$ gibt mit

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|), x \to x_0} \tag{1}$$

$$\text{mit } A(x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{2}$$

Abbildung A heißt dann Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bzw. $\mathrm{D}f(x_0)$ bezeichnet.

▶ **Bemerkung**
Affin lineare Abbildung $\tilde{A}(x) := f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ approximiert die Funktion f in der Nähe von x_0 und heißt Linearisierung von f in x_0 (man nennt Gleichung (1) auch Approximation 1. Ordnung von f in der Nähe von x_0).

Folgerung 2.1 (Wann ist f diffbar?)
$f : D \subset K^n \to K^m, D$ offen, $x_0 \in D$. Für jedes $A \in L(K^n, K^m)$ sei $D \to K^m$ zugeh. Restfkt. gegeben durch

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r_a(x) \quad \forall x \in D \tag{3}$$

Dann:

$$\begin{aligned} f \text{ ist diffbar in } x_0 \text{ mit Abl.} A &\Leftrightarrow \exists A \in L(K^n, K^m) : r_A(x) = o(|x - x_0|) x \to x_0 \\ &\text{d.h. } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{r_A(x)}{|x - x_0|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists A \in L(K^n, K^m) : \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{r_A(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{(x - x_0)} = 0 \end{aligned}$$

Definition 2.2 (diffbar auf D, stetig diffbar)
- falls f difbar in allen $x_0 \in D$, heißt f diffbar auf D
- $f^{'} : D \to L(K^n, K^m)(\cong K^{m \times n})$ Abl. von f (matrixwertig)
- f stetig diffbar bzw. C^1-Fkt., wenn $f^{'}$ stetig auf D
  $C^1(D, K^m) = \{f : D \to K^m \mid f \text{ stetig diffbar auf } D\} = C^1(D)$

Satz 2.3
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann:

1) f ist stetig in x_0
2) Die Ableitung $f'(x_0)$ ist eindeutig bestimmt.

Beweisidee. 1. Sei $A, \tilde{A} \in L(K^n, K^m)$ Ableitungen von f in x_0, betrachte $x = x_0 + ty$, wobei $y \in K^n$ mit $|y| = 1$ fest, $t \in \mathbb{R}_{>0}$ (offenbar $|x - x_0| = t$)
$\Rightarrow (A - \tilde{A})(ty) = o(|ty|) \Rightarrow (A - \tilde{A})(y) = \frac{o(t)}{t} \to 0$
$\Rightarrow (A - \tilde{A})(y) = 0 \Rightarrow A - \tilde{A} = 0 \Rightarrow A = \tilde{A} \Rightarrow$ Behauptung

2. $\lim f(x) = 1 = \lim \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)\big) = f(x_0) \Rightarrow$ Behauptung □

2.1. Spezialfälle für $K = \mathbb{R}$

1) $m = 1$: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$f'(x_0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ Zeilenvektor, $f'(x_0)$ betrachtet als Vektor im $\mathbb{R}^n$ auch Gradient genannt.

Offenbar gilt $f'(x_0) \cdot y = \langle f'(x_0), y\rangle \ \forall y \in \mathbb{R}^n$ (Matrizenmultiplikation = Skalarprodukt)
$\Rightarrow$?? hat die Form

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \langle f'(x_0), x - x_0\rangle}_{\text{affin lineare Funktion: } \tilde{A}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ (in } x)} + o\big(|x - x_0|\big) \tag{4}$$

Graph von f ist Fläche im $\mathbb{R}^{n\times 1}$, genannt Tangentialebene vom Graphen von f in $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

2) $n = 1$: $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
f (bzw. Bild $f[D]$) ist Kurve im $\mathbb{R}^n$ ($\cong \mathbb{R}^{m\times 1}$). ?? kann man schreiben als

$$f(x_0 + t) = \underbrace{f(x_0) + t \cdot f'(x_0)}_{\text{Affin lineare Abb. } \tilde{A}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m \text{ (in } t)} + o(t), t \to 0, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}}_{\text{Differenzenquotient von } f \text{ in } x_0} = f'(x_0) + o(1), t \to 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}}_{\text{Differentialquotient}} = f(x_0) \tag{5}$$

beachte:

- f differenzierbar (diffbar) in $x_0 \Leftrightarrow$ Differentialquotient existiert in x_0
- Gleichung (5) nicht erklärt im Fall von $n > 1$

Interpretation für $m > 1$:
$f'(x_0)$ heißt Tangentenvektor an die Kurve in $f(x_0)$. Falls f nicht diffbar in x_0 bzw. x_0 Randpunkt in D und ist $f(x_0)$ definiert, so betrachtet man in Gleichung (5) auch einseitige Grenzwerte (vgl. ??).

$\lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = f'_r(x_0)$ heißt rechtsseitige Ableitung von f in x_0 (falls existent), analog ist $\lim\limits_{t\uparrow 0}$ die linksseitige Ableitung $f'_l(x_0)$.

3) $n = m = 1$: $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. Schule)
$f'(x_0) \in \mathbb{R}$ ist Zahl und Gleichung (5) gilt (da Spezialfall von Punkt 2)).

Beobachtung: Punkt 2) gilt allgemein für $n = 1$, nicht für $n > 1$!

Folgerung 2.4
Sei $f : D \subset K \to K^n$, D offen. Dann:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist differenzierbar in } x_0 \in D \text{ mit Ableitung } f'(x_0) \in L(K, K^m) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists f'(x_0) \in L(K, K^m) : \lim_{y\to 0} \frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{y} = f'(x_0) \\ & \text{alternativ: } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \end{aligned} \tag{6}$$

2.2. Einfache Beispiele für Ableitungen

■ **Beispiel 2.5 (affin lineare Funktionen)**
Sei $f : K^n \to K^m$ affin linear, d.h.

$$f(x) = A \cdot x + a \quad \forall x \in K^n, \text{ mit } A \in L(K^n, K^m),\ a \in K^m \text{ fest}$$

Dann gilt für beliebiges $x_0 \in K^n$:

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cdot x_0 + a + A(x - x_0) \\ &= f(x_0) + A(x - x_0) \\ \overset{(1)}{\Longrightarrow}\ & f \text{ ist diffbar in } x_0 \text{ mit } f'(x_0) = A \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für konstante Funktionen $f'(x_0) = 0$

■ **Beispiel 2.6 (quadratische Funktion)**
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2$
für beliebiges x_0 gilt:

$$\begin{aligned} |x - x_0|^2 &= \langle x - x_0, x - x_0 \rangle \\ &= |x|^2 - |x_0|^2 - 2\langle x_0, x - x_0 \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + 2\langle \underbrace{2x_0}_{\text{Ableitung}}, x - x_0 \rangle + \underbrace{|x - x_0|^2}_{o(|x-x_0|)}$

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = 2x_0$, offenbar ist f' stetig, also $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$

■ **Beispiel 2.7 (Funktionen mit höherem Exponent)**
Sei $f : K \to K$, $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$.

$k = 0$: $f(x) = 1\ \forall x \Rightarrow f'(x_0) = 0\ \forall x_0 \in \mathbb{C}$ (vgl. Beispiel 2.5)

$k \geq 1$: Es gilt

$$\begin{aligned} (x_0 + y)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x_0^{k-j} \cdot y^j = x_0^k + k \cdot x_0^{k-1} \cdot y + o(y),\ y \to 0 \\ \Rightarrow\ f(x_0 + y) &= f(x_0) + k \cdot x_0^{k-1} \cdot y + o(y), y \to 0 \\ \overset{(1)}{\Longrightarrow}\ \ f'(x_0) &= k \cdot x_0^{k-1} \end{aligned}$$

<u>beachte:</u> gilt in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$.

■ **Beispiel 2.8 (Exponentialfunktion)**
$f : K \to K$ mit $f(x) = e^x$
mit Differentialquotient $\Rightarrow f$ ist differenzierbar mit $f'(x_0) = e^{x_0} \Rightarrow f \in C^1(K)$

■ **Beispiel 2.9 (Betragsfunktion)**
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$
f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn angenommen, $f'(x_0) \in \mathbb{R}^n$ existiert und fixiere $y \in \mathbb{R}^n$, $|y| = 1$
$\Rightarrow |ty| = 0 + \langle f'(0), ty \rangle + o(|t|)$, $t \to 0$
$\Rightarrow t \neq 0 \Rightarrow \frac{|t|}{t} = \langle f'(0), y \rangle + \frac{o(t)}{t} \Rightarrow \pm 1 = \text{feste Zahl in } \mathbb{R}_+ \to 0 \Rightarrow \lightning \Rightarrow$ Behauptung

<u>Folglich:</u> f stetig in $x_0 \not\Rightarrow f$ differenzierbar in x_0, das heißt Umkehrung von Satz 2.3 gilt nicht!

Satz 2.10 (Rechenregeln)
Sei $D \in K^n$ offen, $f, g : D \to K^m$, $\lambda : D \to K$ diffbar in $x_0 \in D$
$\Rightarrow (f \pm g) : D \to K^m, (\lambda \cdot f) : D \to K^m, (f \cdot g) : D \to K$ sind diffbar in $x_0 \in D$ und $\frac{1}{\lambda} : D \to K$ ist diffbar in x_0, falls $\lambda(x_0) \neq 0$ mit

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \in K^{m \times 1}$

b) $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot \lambda'(x_0) \in K^{m \times n}$

c) $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)^\mathsf{T} \cdot g'(x_0) + g(x_0)^\mathsf{T} \cdot f'(x_0) \in K^{m \times n}$

d) $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\mu'(x_0) \cdot \lambda(x_0) - \mu(x_0) \cdot \lambda'(x_0)}{(\lambda(x_0))^2}$

Beweisidee.

1. nutze Definition diffbar.
2. nutze a) für $g = \lambda$
3. analog zu b)
4. zeige $\left(\frac{1}{\lambda}\right)'(x_0) = -\frac{\lambda'(x_0)}{\lambda(x_0)^2}$, Rest folgt mit $f = \mu$. □

Beispiel 2.11
Sei $f : D \in K^n \to K^m$, $c \in K$, f diffbar in $x_0 \in D$
$\xRightarrow{2.10\ b)} (c \cdot f) = c \cdot f'(x_0)$ (da c konst. Funktion $D \to K$)

Beispiel 2.12 (Polynom)
Sei $f : K \to K$, Polynom $f(x) = \sum\limits_{l=0}^{k} a_l x^l$

$\Rightarrow f$ diffbar $\forall x_0 \in K$ mit $f'(x_0) = \sum\limits_{l=1}^{k} l a_l x_0^{l-1}$

Beispiel 2.13
Sei $f = \frac{f_1}{f_2}$ rationale Funktion auf $\mathbb{R}$ (d.h. $f_1, f_2 : K \to K$ Polynom)
$\Rightarrow f$ ist diffbar auf $K \setminus \{\text{Nullstellen von } f_2\}$

Beispiel 2.14 (Sinus und Cosinus)
$\sin, \cos : K \to K$ ($\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) $\forall x_0 \in K$.

Denn:
$$\frac{\sin y}{y} = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2iy} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{iy} - 1}{iy} + \frac{e^{-iy} - 1}{-iy}\right) \xrightarrow{y \to 0} 1,$$
nutze exp Definition für sin, Differentialquotient und Additionstheoreme. Analog für den Kosinus.

2.3. Rechenregeln

Definition
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen.

Falls f diffbar in allen $x_0 \in D$, dann heißt f differenzierbar auf D und Funktion $f' : D \to L(K^n, K^m)$ heißt Ableitung von f.

Ist zusätzlich Funktion $f' : D \to L(K^n, K^m)$ stetig, dann heißt Funktion f stetig differenzierbar (auf D) bzw. C^1-Funktion (auf D).

$C^1(D, K^m) := \{f : D \to K^m \mid f \text{ stetig diffbar auf } D\}$

Beispiel 2.15

a) $f(x) = x^k$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$
$\Rightarrow f'(x) = k \cdot x^{k-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ offenbar stetige Funktion
$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

b) $f(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow f'(x) = e^x$ $\forall x \in \mathbb{C}$ stetig
$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

c) $f(x) = |x|^2$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow f(x) = 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, offenbar stetig
$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Beispiel 2.16
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\forall x \neq 0$.

Wegen

$$\frac{|x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}|}{|x|} \leq |x| \xrightarrow{x \neq 0} 0$$

folgt

$$\begin{aligned} & f(x) = o(|x|), x \to 0 \\ \Rightarrow\ & f(x) = f(0) + 0 \cdot (x - 0) + o(|x - 0|), x \to 0 \\ \Rightarrow\ & f \text{ diffbar in } x = 0 \text{ mit } f'(0) = 0 \end{aligned}$$

Rechenregeln liefern $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

Für $x_k := \frac{1}{k\pi}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \to \infty} 2x_k \cdot \sin \frac{1}{x_k} = 0, \ \lim_{k \to \infty} \cos \frac{1}{x_k} = \pm 1 \\ \Rightarrow\ & \lim_{x \to 0} f'(x) \text{ existiert nicht} \\ \Rightarrow\ & f \notin C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

d.h. Ableitung einer stetigen Funktion muss nicht stetig sein.

Folgerung 2.17
Seien λ, $\mu : D \to K$ diffbar in x_0, D offen und $\lambda(x_0) \neq 0$
$\Rightarrow \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) : D \to K$ diffbar in x_0 mit

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\lambda(x_0) \cdot \mu'(x_0) - \mu(x_0) \cdot \lambda'(x_0)}{\lambda(x_0)^2} \in K^{1 \times n}$$

Beweisidee (Folgerung 2.17). Setzte in Satz 2.10 $f = \mu$ (d.h. $m = 1$) und betr. Produkt $\frac{1}{\lambda} \cdot \mu$. □

Satz 2.18 (Kettenregel)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, $g : \tilde{D} \subset K^m \to K^l$, $D, \tilde{D}$ offen, f diffbar in $x_0 \in D$, g diffbar in $f(x_0) \in \tilde{D}$
$\Rightarrow g \circ f : D \to K^l$ diffbar in x_0 mit $(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ $(\in K^{l \times n})$

Beweisidee.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(|f(x) - f(x_0)|) \\ &= (g \circ f)(x_0) + g'(f(x_0)) \cdot f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \end{aligned} \tag{7}$$

$\Rightarrow$ Behauptung □

- **Beispiel 2.19 (x im Exponenten)**
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R}_{\geq 0}, a \neq 1)$. Offenbar $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}$
$\Rightarrow f(x) = g(h(x))$ mit $g(y) = e^y$, $h(x) = x \cdot \ln a \Rightarrow g'(y) = e^y$, $h'(x) = \ln a \Rightarrow f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

- **Beispiel 2.20 (Logarithmus)**
$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $a \neq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$
mit $y = \log_a x$, $y_0 = \log_a x_0$ ist $x - x_0 = a^y - a^{y_0}$
Differentialquotient $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, also $f \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$

  Spezialfall: $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\forall x > 0$

■ **Beispiel 2.21**
Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$ $(r \in \mathbb{R})$

Wegen $x^r = e^{r \cdot \ln x}$ liefert Kettenregeln (analog zu Beispiel 2.19)

$$f'(x_0) = \frac{r \cdot e^{r \cdot \ln x_0}}{x_0} = \frac{r \cdot x_0^r}{x_0} = r \cdot x_0^{r-1} \quad \forall x_0 > 0$$

Spezialfall: $f(x) = \frac{1}{x^k} \Rightarrow f'(x) = -\frac{k}{x^{k+1}}$

Zu Beispiel 2.16:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

■ **Beispiel 2.22 (Tangens und Cotangens)**
$\tan : K \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to K$, $\cot : K \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to K$

$$\begin{aligned}
\xRightarrow{\text{Quotientenregel}} \tan'(x_0) &= \frac{\sin'(x_0)\cos(x_0) - \cos(x_0) \cdot \sin(x_0)}{(\cos(x_0))^2} \\
&= \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)} \qquad \forall x_0 \in \text{ Definitionsbereich} \\
\cot'(x_0) &= -\frac{1}{\sin^2(x_0)} \qquad \forall x_0 \in \text{ Definitionsbereich}
\end{aligned}$$

Satz 2.23 (Reduktion auf skalare Funktionen)
Sei $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x_0 \in D$. Dann gilt:

$$f \text{ diffbar in } x_0 \Leftrightarrow \text{alle } f_j \text{ diffbar in } x_0 \ \forall j = 1, \dots, m$$

Im Fall der Differenzierbarkeit hat man:

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} \in K^{m \times n} \tag{8}$$

▶ **Bemerkung 2.24**
Mit Satz 2.23 kann man die Berechnungen der Ableitungen stets auf skalare Funktionen $f : D \subset K^n \to K$ zurückführen. Die Matrix in Gleichung (8) besteht aus m Zeilen $f_j'(x_0) \in K^{1 \times m}$.

■ **Beispiel 2.25**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos(2\pi t) \\ t \cdot \sin(2\pi t) \end{pmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) - t \cdot \sin(2\pi t) \cdot 2\pi \\ \sin(2\pi t) + t \cdot \cos(2\pi t) \cdot 2\pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1},$$

und $f'(0) = \binom{1}{0}$, $f'(1) = \binom{1}{2\pi}$.

Lemma 2.26
Sei $f = (f_1, f_2) : D \subset K^n \to K^k \times K^l$, D offen, $x_0 \in D$.

Funktion f ist diffbar in x_0 genau dann, wenn $f_1 : D \to K^k$ und $f_2 : D \to K^l$ diffbar in x_0.

Im Falle der Differenzierbarkeit gilt

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \end{pmatrix} \in K^{(k+l)\times n} \tag{9}$$

<u>Hinweis:</u> Da $K^k \times K^l$ mit K^{k+l} identifiziert werden kann, kann man f auch als Abbildung von D nach K^{k+l} ansehen. Dementsprechend kann die Matrix in Gleichung (9) der Form

$$\begin{pmatrix} (k \times n) \text{ Matrix} \\ (l \times n) \text{ Matrix} \end{pmatrix}$$

auch als $((k+l) \times n)$-Matrix aufgefasst werden.

Beweisidee.

„$\Rightarrow$“ Man hat

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x) \cdot (x - x_0), \;\; R(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0 \tag{10}$$

da $f'(x_0),\ R(x) \in L(K^n, K^k \times K^l)$

$$\Rightarrow \;\; f'(x_0) = (A_1, A_2), \;\; R(x) = \big(R_1(x), R_2(x)\big)\big)$$

mit $A_1, R_1(x) \in L(K^n, K^k)$, $A_2, R(x) \in L(K^n, K^l)$

$$\overset{(10)}{\Longrightarrow} \;\; f_j(x) = f_j(x_0) + A_j \cdot (x - x_0) + R_j(x)(x - x_0), \;\; R_j(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0 \tag{11}$$

$$\Rightarrow \qquad f_j \text{ ist diffbar in } x_0 \text{ mit } f_j'(x_0) = A_j,\ j = 1, 2$$

$\Rightarrow$ Behauptung

„$\Leftarrow$“ (es gilt auch (11) mit $A_j = f_j'(x_0)$)

Setzte

$$A = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix}, \;\; R(x) = \begin{pmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(11)}{\Longrightarrow} A, R(x) \in L(K^n, K^k \times K^l)$$

$$\xrightarrow{\text{mit } A_j = f_j'(x_0)} f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x)(x - x_0), R(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

$\Rightarrow f$ diffbar in x_0 und (9) gilt. □

Beweisidee (Satz 2.23). Mehrfache Anwendung von Lemma 2.26 (z.B. mit $k = 1, l = m - j$ für $j = 1, \ldots, m - 1$) □

3. Richtungsableitung und partielle Ableitung

Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$.

Ziel: Zurückführung der Berechnung der Ableitung $f(x)$ auf die Berechnung der Ableitung für Funktionen $\tilde{f} : \tilde{D} \subset K \to K$

- Reduktionssatz $\Rightarrow$ man kann sich bereits auf $m = 1$ einschränken
- für Berechnung der Ableitung von f ist neben den Rechen- und Kettenregeln auch der Differentialquotient verfügbar

Idee: Betrachte f auf Geraden $t \to x+t\cdot z$ durch $x \Rightarrow$ skalares Argument t, $t \in K \Rightarrow$ Differentialquotient.

Spezialfall: $z = e_j \Rightarrow$ Partielle Ableitung

Definition (Richtungsableitung)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$, $z \in K^n$.

Falls $a \in L(K, K^m)$ ($\cong K^m$) existiert mit

$$f(x + t \cdot z) = f(x) + t \cdot a + o(t),\ t \to 0,\ t \in K, \tag{1}$$

dann heißt f diffbar in x in Richtung z und $D_z f(x) := a$ heißt Richtungsableitung von f in x in Richtung z

Satz 3.1
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$, $z \in K^n$. Dann:

$$f \text{ diffbar in } x \text{ in Richtung } z \text{ mit } D_z f(x) \in L(K, K^m) \iff \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tz) - f(x)}{t} = a \text{ existiert und } D_z f(x) = a$$

Satz 3.2
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar in $x \in D$.
$\Rightarrow$ Richtungsableitung $D_z f(x)$ existiert $\forall z \in K^n$ und

$$D_z f(x) = f'(x) \cdot z$$

Beweisidee. Definition Ableitung mit $f(y) = f(x)...$, $y = x + tz$, Ausrechnen, Behauptung □

3.1. Anwendung: Eigenschaften des Gradienten

Definition (Niveaumenge)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f diffbar in $x \in D$. $N_C := \{x \in D \mid f(x) = C\}$ heißt Niveaumenge von f für $x \in \mathbb{R}$.

Definition (Tangentialvektor)
Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \to N_C$ $(\delta > 0)$ Kurve mit $\gamma(0) = 0$, γ diffbar in 0.

Ein $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $z = \gamma'(0)$ für eine derartige Kurve γ heißt Tangentialvektor an N_C in x.

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(\gamma(t)) = c \\ \varphi'(0) &= f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0 \\ D_{\gamma'(0)} f(x) &= \langle f'(x), \gamma'(0) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Satz 3.3 (Eigenschaften des Gradienten)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f diffbar in $x \in D$. Dann:

1) Gradient $f'(x)$ steht senkrecht auf der Niveaumenge $N_{f(x)}$, d.h. $\langle f'(x), z\rangle = 0\ \forall$ Tangentialvektoren z an $N_{f(x)}$ in x
2) Richtungsableitung $D_z f(x) = 0\ \forall$ Tangentialvektoren z an $N_{f(x)}$ in x
3) Gradient $f(x)$ zeigt in Richtung des steilsten Anstieges von f in x und $|f'(x)|$ ist der steilste Anstieg, d.h. falls $f'(x) \neq 0$ gilt für Richtung $\tilde{z} := \frac{f'(x)}{|f'(x)|}$

$$D_{\tilde{z}} f(x) = \max\{D_z f(x) \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |z| = 1\} = |f(x)|$$

Beweisidee.
1) klar, siehe Definition Tangentialvektor
2) analog oben
3) für $|z| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_z f(x) &= \langle f'(x), z\rangle = |f'(x)|\langle \tilde{z}, z\rangle \\ &\leq |f'(x)||\tilde{z}||z| = |f'(x)| = \frac{\langle f'(x), f'(x)\rangle}{|f'(x)|} = \langle f'(x), \tilde{z}\rangle = D_{\tilde{z}} f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung □

Definition (partielle Ableitung)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$ (nicht notwendigerweise diffbar in x).

Falls Richtungsableitung $D_{e_j} f(x)$ existiert, heißt f partiell diffbar bezüglich x_j im Punkt x und $D_{e_j} f(x)$ heißt partielle Ableitung von f bezüglich x_j in x.

▶ **Bemerkung 3.4**
Zur Berechnung von $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ differenziert man skalare Funktionen
$x_j \to f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ (d.h. alle x_k mit $k \neq j$ werden als Parameter angesehen).

Folgerung 3.5
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar in $x \in D$

$$\Rightarrow \quad D_z f(x) = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \quad \forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}$$

Beweisidee. Definition $D_z f(x) = f'(x)z$, z zerteilen als Summe $z_j \cdot e_j$, f' reinziehen, zusammenfassen □

Theorem 3.6 (Vollständige Reduktion)
Sei $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar in $x \in D$. Dann:

$$f'(x) \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} \overset{(b)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix} \overset{(c)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x) \end{pmatrix}}_{\underline{\text{Jacobi-Matrix}}} \in K^{m \times n}$$

Beweisidee.
zu a) Reduktion auf skalare Funktionen
zu b) Benutze $f'(x) \cdot z = D_z f(x)$
zu c) $f_j'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_j(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f_j(x)\right)$, sonst analog zu b) □

3.2. $\mathbb{R}$-differenzierbar und $\mathbb{C}$-differenzierbar

Jede $\mathbb{C}$-diffbare Funktion $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ist auch $\mathbb{R}$-diffbar. Die Umkehrung gilt i.A. nicht!

Definition ($\mathbb{R}$-differenzierbar)
$f : D \subset X \to Y$, D offen, $(X, Y) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ bzw. $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^m)$ oder $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ heißt $\mathbb{R}$-diffbar in $z_0 \in D$, falls Ableitung $A : X \to Y$ $\mathbb{R}$-linear ist.

Satz 3.7
Sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, D offen, $z_0 \in D$. Dann:

$$f \ \mathbb{C}\text{-diffbar in } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \ \mathbb{R}\text{-diffbar in } z_0 \text{ mit } f_x(z) = -i f_y(z_0)$$

Beweisidee.
„$\Rightarrow$“ vgl. oben

„$\Leftarrow$“ $z = x + iy$, Zerteilen in Real- und Imaginärteil

3.3. Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Definition (Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen)
Falls $\mathbb{R}$-diffbar in z_0 ist

$$f_x(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0), \qquad f_y(z_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$$

folglich

$$f \text{ ist } \mathbb{C}\text{-diffbar} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned}}_{\underline{\text{Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen}}}$$

4. Mittelwertsatz und Anwendung

Definition (Maximum, Minimum)
Wir sagen, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitzt Minimum bzw. Maximum auf D, falls eine Minimalstelle bzw. Maximalstelle $x_0 \in D$ existiert mit

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad f(x) \geq f(x) \qquad \forall x \in D \tag{1}$$

f hat ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum in $x_0 \in D$ falls

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x_0) \leq f(x) \qquad f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in B_\varepsilon(x_0 \cap D) \tag{2}$$

Hat man in (1) bzw. (2) für x und x_0 „<“ bzw. „>“, so sagt man strenges (lokales) Minimum bzw. Maximum.

Theorem 4.1 (notwendige Optimalitätsbedingung)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f sei diffbar in $x \in D$ und habe lokales Minimum bzw. Maximum in x_0. Dann:

$$f'(x_0) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^{1\times n}) \tag{3}$$

Beweisidee. Für Minimum (Maximum analog) fixiere beliebiges $z \in \mathbb{R}^n$.

D offen
$\Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : x_0 + t \cdot z \in D \ \forall t \in (-\delta, \delta)$

f diffbar in x_0, Minimum in x_0

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow && 0 \leq f(x_0 + t\cdot z) - f(x_0) = t \cdot f'(z_0)\cdot z + o(t),\ t \to 0 \qquad \Big| \cdot \tfrac{1}{t}\\
&\xRightarrow{t>0} && 0 \leq f'(x_0)\cdot z + o(1)\\
\text{(diff. } f \text{ im Pkt. } x_0) &\xRightarrow{t\to 0} && 0 \leq f'(x_0)\cdot z \ \forall z \in \mathbb{R}^n\\
&\xRightarrow{\pm z} && f'(x_0)\cdot z = 0 \ \forall z \in \mathbb{R}^n\\
&\Rightarrow && f'(x_0) = 0
\end{aligned}$$

□

Einfache, aber wichtige Anwendung:

Satz 4.2 (Satz von Rolle)
Sei $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $-\infty < a < b < \infty$, f diffbar auf (a,b) und $f(a) = f(b)$.
$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f(\xi) = 0$

Beweisidee. f stetig, $[a,b]$ kompakt
$\xRightarrow{\text{Weierstrass}} \exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \forall x$

- Angenommen, $f(x_1) = f(x_2) = f(a) \Rightarrow f$ konstante Funktion $\Rightarrow f'(\xi) = 0 \ \forall \xi \in (a,b)$
- Andernfalls sei $f(x_1) < f(a) \Rightarrow \xi := x_1 \in (a,b) \xRightarrow{\text{Theorem 4.1}} f'(\xi) = 0$
- analog $f(x_2) > f(a)$ □

Definition (abgeschlossenes, offenes Segment)
Setze für $x, y \in K^n$

- $[x,y] := \{x + t(y-x) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$ abgeschlossenes Segment (abgeschlossene Verbindungsstrecke)
- $(x,y) := \{x + t(y-x) \in \mathbb{R}^n \mid t \in (0,1)\}$ offenes Segment (offene Verbindungsstrecke)

Theorem 4.3 (Mittelwertsatz)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f diffbar auf D und seien $x, y \in D$ mit $[x, y] \subset D$. Dann

$$\exists \xi \in (x, y) : f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x) \tag{4}$$

▶ **Bemerkung 4.4**

- Für $n = 1$ schreibt man (4) auch als $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ falls $x \neq y$.
- Der Mittelwertsatz (MWS) gilt <u>nicht</u> für $\mathbb{C}$ oder $m \neq 1$.
- Theorem 4.3 gilt bereits für $D \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, f stetig auf $[x, y] \subset D$, f diffbar auf $(x, y) \subset \operatorname{int} D$.

Beweisidee. Kontruiere eine Fkt. aus f, sd diese EGS von Satz von Rolle erfüllt, Ableitung von f berechnen mit Kettenregel einsetzen in Satz von Rolle und fertig. Setzte $\varphi(t) = f(x + t(y - x)) - \big(f(y) - f(x)\big)t \ \forall t \in [0, 1]$

$\xRightarrow{f \text{ diffbar}} \quad \varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi(0) = \varphi(1) = f(x)$

φ diffbar auf $(0, 1)$ (verwende Kettenregel) mit

$$\varphi'(t) = f'(x + t(y - x)) \cdot (y - x) - \big(f(y) - f(x)\big) \tag{5}$$

$$\xRightarrow{\text{Satz von Rolle}} \quad f(y) - f(x) = f'\big(\underbrace{x + \tau(y - x)}_{=:\xi \in (x,y)}\big) \cdot (y - x)$$

$\Rightarrow$ Behauptung ☐

Frage: Der MWS gilt für $m = 1$. Was ist bei $m > 1$?

Folgerung 4.5
Sei $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, diffbar auf D, $[x, y] \subset D$. Dann

$$\exists \xi_1, \dots, \xi_m \in (x, y) : f(y) - f(x) = \begin{pmatrix} f_1'(\xi_1) \\ \vdots \\ f_m'(\xi_m) \end{pmatrix} \cdot (y - x) \tag{6}$$

Beweisidee. Gleichung (6) ist äquivlanet zu m skalaren Gleichungen

$$f_j(y) - f_j(x) = f_j'(\xi_j) \cdot (y - x), \quad j = 1, \dots, m$$

und diese Folgen direkt aus Theorem 4.3 für $f_j : D \to \mathbb{R}$. ☐

Frage: Ist in MWS auch $\xi_1 = \ldots = \xi_m$ möglich? Im Allgemeinen nein.

■ **Beispiel 4.6**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \binom{\cos x}{\sin x} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Angenommen, $\exists \xi \in (0, 2\pi) : f(2\pi) - f(0) = f'(\xi) \cdot (2\pi - 0) = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = f'(\xi) = \binom{-\sin \xi}{\cos \xi}$, d.h. $\sin \xi = \cos \xi = 0$

$\Rightarrow \quad \lightning$

$\Rightarrow \quad \xi_1 = \xi_2$ in MWS ist nicht möglich.

Theorem 4.7 (Schrankensatz)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar auf D. Seien $x, y \in D$, $[x, y] \subset D$. Dann

$$\exists \xi \in (x, y) : |f(y) - f(x)| \leq |f'(\xi)(y - x)| \leq \|f'(\xi)\| \cdot |y - x| \tag{7}$$

beachte: Theorem 4.7 gilt auch für $K = \mathbb{C}$.

Beweisidee. Setze Normalenvektor v besteht aus der Differenz der Fktwerte. Konstruiere φ als Fkt des Realteils des Skalarprod. von Abl. von f und v. Leite φ ab und nutze MWS und damit folgt die Beh.
Def. Sei $f(x) \neq f(y)$ (sonst klar). Setzte $v := \frac{f(y)-f(x)}{|f(y)-f(x)|} \in K^m$, offenbar $|v| = 1$.

Betrachte $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := \mathfrak{Re}\langle f(x + t(y-x)), v\rangle$ Da f diffbar, gilt

$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$

$$\langle f(x+s(y-x)), v\rangle = \langle f(x+t(y-x)), v\rangle + \langle f'(x+t(y-x)) \cdot (s-t)(y-x), v\rangle + \underbrace{o(|s-t| \cdot |y-x|)}_{=o(|s-t|)}, \ s \to t$$

und damit ist auch φ diffbar auf $(0,1)$ mit

$$\varphi'(t) = \mathfrak{Re}\langle f'(x+t(y-x)) \cdot (y-x), v\rangle \quad \forall t \in (0,1)$$

MWS liefert: $\exists \tau \in (0,1) : \underbrace{\varphi(1) - \varphi(0)}_{=\mathfrak{Re}\langle f(y)-f(x), v\rangle} = \varphi(\tau) \cdot (1-0)$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\xi = x+\tau(y-x)} |f(y)-f(x)| &= \mathfrak{Re}\langle f(y)-f(x), v\rangle = \varphi(1) - \varphi(0) = \mathfrak{Re}\langle f'(\xi)\cdot(y-x), v\rangle \\ &\leq |\langle f'(\xi)\cdot(y-x), v\rangle| \overset{\star}{\leq} |f'(\xi)\cdot(y-x)| \cdot \underbrace{|v|}_{=1} \\ &\leq \|f'(\xi)\| \cdot |y-x| \end{aligned}$$

$\star$: Cauchy-Schwarz

□

bekanntlich: $f(x) = \text{const} \ \forall x \Rightarrow f'(x) = 0$

Satz 4.8
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, und zusammenhängend.

$$f \text{ diffbar auf } D \text{ mit } f'(x) = 0 \ \forall x \in D \quad \Rightarrow \quad f(x) = \text{const} \ \forall x \in D.$$

Beweisidee.

1.
   - D offen, zusammenhängend, K^n normierter Raum $\xRightarrow{\text{Satz 15.8}}$ D bogenzusammenhängend
   - Wähle nun $x, y \in D \Rightarrow \exists \varphi : [0,1] \to D$ stetig, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$
   - D offen $\Rightarrow \forall t \in [0,1]$ existiert $r(t) > 0 : B_{r(t)}(\varphi(t)) \subset D$
   - Nach ?? ist $\varphi([0,1])$ kompakt und $\{B_{r(t)}(\varphi(t)) \mid t \in [0,1]\}$ ist offene Überdeckung von $\varphi([0,1])$ $\Rightarrow$ existiert endliche Überdeckung, d.h. $\exists t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ mit $\varphi([0,1]) \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} B_{r(t_i)}(\varphi(t_i))$.
2. Falls wir noch zeigen, dass f konstant ist auf jeder Kugel $B_r(z) \subset D$ ist, dann wäre $f(x) = f(y)$ $\xRightarrow{x,y \text{ bel.}}$ Behauptung.
3. Sei $B_r(z) \subset D$, $x, y \in B_r(z)$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\text{Schrankensatz}} \quad & |f(y)-f(x)| \leq \underbrace{\|f'(\xi)\|}_{=0} \cdot |y-x| = 0 \\ \Rightarrow \quad & f(x) = f(y) \\ \xRightarrow{x,y \text{ bel.}} \quad & f \text{ konst. auf } B_r(z) \end{aligned}$$

□

■ **Beispiel 4.9**
Sei $f : D = (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$ diffbar, sei $f'(x) = 0$ auf D
$\xRightarrow{\text{Satz 4.8}}$ $f(x) = \text{const}$ auf $(0,1)$ und $(2,3)$, aber auf jedem Intervall kann die Konstante anders sein.

Theorem 4.10
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$.

Falls partielle Ableitung $f_{x_j}(y)$, $j = 1, \dots, n$ für alle $y \in B_r(x) \subset D$ für ein $r > 0$ existierten und falls $y \to f_{x_j}(y)$ stetig in x für $j = 1, \dots, n$
$\Rightarrow$ f ist differentierbar in x mit $f'(x) = \big(f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)\big) \in K^{m\times n}$

Beweisidee. Fixiere $y = (y_1, \dots, y_n) \in B_r(0)$.

Betrachte die Eckpunkt eines Quaders in D: $a_0 = x, a_k := a_{k-1} + y_k e_k$ für $k = 1, \dots, n$
$\Rightarrow a_n = x + y$.

Offenbar $\varphi_k(t) = f(a_{k-1} + te_k y_k) - f(a_{k-1}) - tf_{x_k}(a_{k-1})y_k$ stetig auf $[0, 1]$, diffbar auf $(0, 1)$ mit

$$\varphi'_k(t) = f_{x_k}(a_{k-1} + te_k y_k)y_k - f_{x_k}(a_{k-1})y_k$$

$$\xRightarrow{\text{Theorem 4.7}} |\varphi_k(1) - \varphi_k(0)| = |f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(a_{k+1})y_k| \leq \sup_{t\in(0,1)} |\varphi'_k(\xi)|,\ k = 1, \dots, n$$

Es gilt mit $A := \big(f_1(x), \dots, x_{x_n}(x)\big)$:

$$\begin{aligned}
|f(x+y) - f(x) - Ay| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(x)y_k\right| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(x)y_k| \\
&\underset{\text{Def. } \varphi_k}{\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq}} \sum |\varphi_k(1) - \varphi_k(0)| + |f_{x_k}(a_{k-1})y_k - f_{x_k}(x)y_k| \\
&\leq |y| \sum \sup_{t\in(0,1)} |f_{x_k}(a_{k-1} + t\cdot e_k y_k) - f_{x_k}(a_{k-1})| + |f_{x_k}(a_{k-1}) - f_{x_k}(x)| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl}}{\leq} |y| \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sup |f_{x_k}(a_{k-1} + te_k y_k) - f_{x_k}(x)| + 2|f_{x_k}\ (a_{k-1}) - f_{x_k}(x)|}_{=:\rho(y)\xrightarrow{y\to 0}0,\text{ da part. Ableitung } f_{x_k} \text{ stetig in } x}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $f(x+y) = f(y) + Ay + R(y)$ mit $\frac{|R(y)|}{y} \leq \rho(y) \xrightarrow{y\to 0} 0$ (d.h. $R(y) = o(|y|)$)
$\overset{??}{\Leftrightarrow}$ f ist diffbar in x mit $f'(x) = A$ □

4.1. Anwendung des Mittelwertsatzes in $\mathbb{R}$

Satz 4.11 (Monotonie)
Sei $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar, dann gilt:

i) $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ monoton wachsend (monoton fallend)

ii) $f'(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend (fallend)

iii) $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ konst.

▶ **Bemerkung 4.12**
In ii) gilt die Rückrichtung nicht! (Betr. $f(x) = x^3$ und $f'(0) = 0$)

Beweisidee (jeweils für wachsend, fallend analog). Sei $x, y \in (a, b)$ mit $x < y$.
„$\Rightarrow$“ in i), ii), iii)

Nach Theorem 4.3 $\exists \xi \in (a, b) : f(y) - (x) = f'(\xi)(y - x) \geqq 0 \xRightarrow{x,\,y \text{ bel.}}$ Behauptung

„$\Leftarrow$“ in i), iii)

$0 \overset{\leq}{=} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \xrightarrow{y\to x} f'(x) \Rightarrow$ Behauptung □

Satz 4.13 (Zwischenwertsatz für Ableitungen)
Sei $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar, $a < x_1 < x_2 < b$. Dann

$$f'(x_1) < \gamma < f'(x_2) \;\Rightarrow\; \exists \tilde{x} \in (x_1, x_2) : f'(\tilde{x}) = \gamma$$

(analog $f(x_2) < \gamma < f(x_1)$)

Beweisidee. Sei $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - \gamma x$ ist diffbar auf (a,b)

$\xRightarrow{\text{Weierstraß}}$ $\exists \tilde{x} \in [x_1, x_2]$ mit $g(\tilde{x}) \le g(x)\ \forall x \in [x_1, x_2]$

Angenommen, $\tilde{x} = x_1$

$\Rightarrow\ 0 \le \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \xrightarrow{x \to x_1} g'(x_1) = f'(x_1) - \gamma < 0$

$\Rightarrow\ \lightning$(für Minimum: $f'(x) \ge 0$)

$\Rightarrow\ x_1 < \tilde{x}$, analog $\tilde{x} < x_2$

$\xRightarrow{\text{Theorem 4.1}}$ $0 = g'(\tilde{x}) = f'(\tilde{x}) - \gamma \Rightarrow$ Behauptung □

Betrachte nun „unbestimme Grenzwerte“ $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(x)}{g(x)}$ der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, wie z.B. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Satz 4.14 (Regeln von de l'Hospital)
Seien $f, g : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ und entwender

i) $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \downarrow 0} g(x) = 0$, oder

ii) $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = \infty$

Dann gilt:

$$\text{Falls } \lim_{y \downarrow a} \frac{f'(y)}{g'(y)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ ex.} \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \downarrow a} \frac{f(y)}{g(y)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ ex. und } \lim_{y \downarrow a} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} \tag{8}$$

(Analoge Aussagen für $x \uparrow b$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$)

▶ **Bemerkung 4.15**

1) Analogie zu S. 9.34 Satz von Stolz

2) Grenzwerte Form $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, $\infty - \infty$ angewendet werden, mit folg. Identitäten:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}} \qquad \alpha^\beta = e^{\beta \cdot \ln \alpha} \qquad \alpha - \beta = \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Beweisidee.

zu i) Mit $f(a) := 0$, $g(a) := 0$ sind f, g stetig auf $[a, b)$

$\overset{??}{\Rightarrow}$ $\forall x \in (a,b)\ \exists \xi = \xi(x) \in (a,x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Wegen $\xi(x) \to a$ für $x \to a$ folgt die Behauptung

zu ii) Sei $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \gamma \in \mathbb{R}$ ($\gamma = \pm\infty$ ähnlich)

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ auf (a,b). Sei $\varepsilon > 0$ fest

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \gamma \right| < \varepsilon\ \forall \xi \in (a, a+\delta)$ und

$$\left| \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} - \gamma \right| \underset{\exists \xi \in (a, a+\delta)}{\overset{??}{\le}} \underbrace{\left| \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right|}_{=0} + \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \gamma \right| < \varepsilon \quad \forall x, y \in (a, a+\delta),\ g(x) \neq g(y)$$

Fixiere $y \in (a, a+\delta)$, dann $f(x) \neq f(y)$, $g(x) \neq g(y)$ $\forall x \in (a, a+\delta_1)$ für ein $0 < \delta_1 < \delta$ und

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}}_{\xrightarrow{x\downarrow a} 1}$$

$\Rightarrow \ \exists \delta_2 > 0 : \delta_2 < \delta_1$ und $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a+\delta_2)$

$\Rightarrow \ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \gamma\right| \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} - \gamma\right| < 2\varepsilon \quad \forall x \in (a, a+\delta_2)$

$\xRightarrow{\varepsilon > 0 \text{ beliebig}}$ Behauptung

andere Fälle:
- $x \uparrow b$ analog
- $x \to +\infty$ mittels Transformation $x = \frac{1}{y}$ auf $y \downarrow 0$ zurückführen
- $x \to -\infty$ analog □

■ Beispiel 4.16

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, denn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

■ Beispiel 4.17

$\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$, denn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

■ Beispiel 4.18

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-2\cos x}{x^2} = 1$, denn es ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2-2\cos x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x}{2x} \overset{\text{Beispiel 4.16}}{=} 1.$

beachte: Satz 4.14 wird in Wahrheit zweimal angewendet.

■ Beispiel 4.19

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x = e^y \ \forall y \in \mathbb{R}$ mit

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^x = e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)} = e^{\frac{\ln(1+y/x)}{1/x}}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{yx^2}{\left(1+\frac{y}{x}\right)x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{1+\frac{y}{x}} = y$$

(vgl. Satz 13.9)

5. Stammfunktionen

Sei $f : D \subset K^n \to K^{m \times n}$
Frage: Existiert eine Funktion F mit $F' = f$ auf D?

Definition (Stammfunktion, unbestimmtes Integral)
$F : D \subset K^n \to K^m$ heißt Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f auf D, falls F diffbar und $F'(x) = f(x)\ \forall x \in D$

Betrachte zunächst den Spezialfall $n = m = 1$. Sei $f : D \subset K \to K$, D offen. Die Beispiele zur Differentiation liefern folgende Stammfunktionen

für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$:

$f(x)$	Stammfunktion $F(x)$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
e^x	e^x	
x^k	$\frac{1}{k+1}x^{k+1}$	$(k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$

für $K = \mathbb{R}$:

$f(x)$	Stammfunktion $F(x)$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	

Satz 5.1 (partielle Integration)
Seien $f, g : D \subset K \to K$, D Gebiet mit zugehörigen Stammfunktion $F, G : D \to K$.

Falls $f \cdot G : D \to K$ Stammfunktion, dann auch $(F \cdot g) : D \to K$ mit

$$\int F \cdot g \,\mathrm{d}\,x = F(x)G(x) - \int f \cdot G \,\mathrm{d}\,x$$

Satz 5.2 (Integration durch Substitution)
Sei $f : D \subset K \to K$, D Gebiet, mit Stammfunktion $F : D \to K$ und sei $\varphi : D \to D$ diffbar. Dann hat $f(\varphi(.)) \cdot \varphi'(.) : D \to K$ eine Stammfunktion mit

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \,\mathrm{d}\,x = F(\varphi(x))$$

Beweisidee. $F(\varphi(.))$ ist nach der Kettenregel auf D diffbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$ □

Satz 5.3
Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I offenes Intervall, $f(x) \neq 0$ auf I, dann gilt

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}\,x = \ln |f(x)|$$

Kapitel II

Integration

Integration kann betrachtet werden als

- verallgemeinerte Summation, d.h. $\int_\mu f \,\mathrm{d}\, x$ ist Grenzwert von Summen
- lineare Abbildung $\int : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ über $\int_a^b (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\, x = \alpha \int_a^b f \,\mathrm{d}\, x + \beta \int_a^b g \,\mathrm{d}\, x$ Funktionen, d.h. als Grundlage benötigt man ein „Volumen" (Maß) für allgemeine Mengen $M \subset \mathbb{R}$.

  $\mathcal{F}$: Menge der Funktionen

  Wir betrachten Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, welche komponentenweise auf $f : D \subset \mathbb{R} \to K^k$ erweitert werden kann. Benutze $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ für $K = \mathbb{C}$.

  Vgl. Buch: Evans, Lawrence C.; Gariepy, Ronald F.: Measure theory and fine properties of functions

6. Messbarkeit

Wir führen zunächst das LEBESGUE-Maß ein und behandeln dann messbare Mengen und messbare Funktionen.

6.1. Lebesgue-Maß

Definition (Quader, Volumen)
Wir definieren die Menge

$$\mathcal{Q} := \{I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n \mid I_j \subset \mathbb{R} \text{ beschränktes Intervall}\}$$

$\emptyset$ ist auch als beschränktes Intervall zugelassen. $Q \in \mathcal{Q}$ heißt Quader.

Sei $|I_j| :=$ Länge des Intervalls $I_j \subset \mathbb{R}$ (wobei $|\emptyset| = 0$), dann heißt

$$v(Q) := |I_1| \cdot \cdots \cdot |I_n| \quad \text{für } Q = I_1 \times \ldots \times I_n \in \mathbb{Q}$$

Volumen von Q

Definition (Lebesgue-Maß)
Dafür betrachte eine (Mengen-) Funktion $|.| : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit

$$|\mu| = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \;\middle|\; M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,\ Q_j \in \mathcal{Q} \text{ Quader} \right\} \quad \forall M \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

die man LEBEGUE-Maß auf $\mathbb{R}^n$ nennt.

Satz 6.1
Es gilt:

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow |M_1| \leq |M_2|$$

und die Abbildung $\mu \mapsto |\mu|$ ist σ-subadditiv, d.h.

$$\left| \bigcup_{j=1}^{\infty} M_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k|, \quad \text{für } M_j \subset \mathbb{R}^n,\ j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

Beweisidee.
- klar
- Finde Quader Q_{k_j} mit $M_k \subset \bigcup Q_{k_j}$, $\sum v(Q_{k_j}) \leq |M_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Wegen $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} v(Q_{k_j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| + \varepsilon$ folgt

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \right| \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} v(Q_{k_j}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| + \varepsilon$$

□

Definition (Nullmenge)
$N \subset \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge, falls $|N| = 0$. Offenbar gilt:

Folgerung 6.2
Es ist $v(Q) = |Q|\ \forall Q \in \mathcal{Q}$

Damit im folgenden Stets $|Q|$ statt $v(Q)$

Beweisidee. $v(Q) = v(\operatorname{cl} Q)$ und $|Q| = |\operatorname{cl} Q| \Rightarrow Q$ abgeschlossen. Finde neue Quader Q_j mit $Q \subset \bigcup Q_j$ und $\sum v(Q_j) \leq |Q| + \varepsilon$. Da Q kompakt $\Rightarrow$ Überdeckung durch endlich viele Q_j, geeignete Zerlegung von $Q_j \Rightarrow v(Q) \leq \sum v(Q_j) \Rightarrow |Q| \leq v(Q) \leq |Q| + \varepsilon$ □

Definition
Eine Eigenschaft gilt f.ü. auf $M \subset \mathbb{R}^n$, falls eine Nullmenge existiert, sodass die Eigenschaft $\forall x \in M \setminus N$ gilt. Man sagt auch, dass die Eigenschaft für fast alle $x \in M$ gilt.

6.2. Messbare Mengen

Definition (messbar)
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt messbar, falls

$$|\tilde{M}| = |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \setminus M| \quad \forall \tilde{M} \in \mathbb{R}$$

Beim Nachweis der Messbarkeit muss man nur „$\geq$“ prüfen.

Satz 6.3

(a) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ sind messbar

(b) $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar $\Rightarrow M^C = \mathbb{R}^n \setminus M$ messbar

(c) $M_1, M_2, \ldots \subset \mathbb{R}^n$ messbar $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, $\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$ messbar

Beweisidee.
- wegen $|\emptyset| = 0$ und: $|\tilde{M}| \leq |\tilde{M} \setminus \emptyset| = |\tilde{M}|$
- wegen $\tilde{M} \cap M = \tilde{M} \setminus M^C$, $\tilde{M} \setminus M = \tilde{M} \cap M^C \Rightarrow$ Behauptung
- offenbar $M_1 \cap ... \cap M_k$ messbar und $M_1 \cup ... \cup M_k$ messbar, wähle $A = \bigcup M_j \Rightarrow A$ messbar □

Satz 6.4
Es gilt:

(a) alle Quader sind Messbar ($Q \in \mathcal{Q}$)

(b) Offene und abgeschlossene $M \subset \mathbb{R}^n$ sind messbar

(c) alle Nullmengen sind messbar

(d) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $M_0 \subset \mathbb{R}^n$, beide Mengen unterscheiden sich voneinander nur um eine Nullmenge, d.h. $|(M \setminus M_0) \cup (M_0 \setminus M)| = 0$
$\Rightarrow M_0$ messbar.

6.3. Messbare Funktionen

Definition (messbar)
Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt messbar, falls D messbar ist und $f^{-1}(U)$ für jede offene Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ messbar ist.

Definition (charakteristische Funktion)
Für $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\chi_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_\mu = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases}$$

charakteristische Funktion von M.

Definition (Treppenfunktion)
Eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls es $M_1, \ldots, M_k \subset \mathbb{R}^n$ und $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$

gibt mit

$$h(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{\mu_j}(x)$$

Definition (Nullfortsetzung)
Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die Nullfortsetzung $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

■ **Beispiel 6.5**
Folgende Funktionen sind messbar

- Stetige Funktionen auf offenen und abgeschlossenen Mengen, insbesondere konstante Funktionen sind messbar
- Funktionen auf offenen und abgeschlossenen Mengen, die f.ü. mit einer stetigen Funktion übereinstimmen
- tan, cot auf $\mathbb{R}$ (setzte z.b. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cot(k\pi) = 0 \;\forall k$)
- $x \to \sin\frac{1}{x}$ auf $[-1, 1]$ (setzte beliebigen Wert in $x = 0$)
- $\chi_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist für $|\partial M| = 0$ messbar auf $\mathbb{R}$ (dann ist χ auf $\operatorname{int} M$, $\operatorname{ext} M$ stetig)

7. Integral

7.1. Integral für Treppenfunktionen

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbare Treppenfunktion mit

$$h = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{M_j}, \text{d.h. } c_j \in \mathbb{R},\ M_j \subset \mathbb{R} \text{ messbar}$$

Definition (integrierbar, Integral, Integralabbildung)
Sei $M \subset \mathbb{R}$ messbar.

h heißt integrierbar auf M, falls $|M_j \cap M| < \infty\ \forall j : c_j \neq 0$ und

$$\int_M h \,\mathrm{d}\,x := \int_M h(x) \,\mathrm{d}\,x := \sum_{j=1}^{k} c_m |M_j \cap M| \tag{1}$$

heißt (elementares) Integral von h auf M.

Menge der auf M integrierbaren Treppenfunktionen ist $T^1(M)$. $\int_M : T^1(M) \to \mathbb{R}$ mit $h \to \int_M h \,\mathrm{d}\,x$ ist die Integral-Abbildung .

Man verifiziert leicht

Folgerung 7.1
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann gilt:

a) (Linearität) Integralabbildung $\int_M : T^1(M) \to \mathbb{R}$ ist linear

b) (Monotonie) Integral-Abbildung ist monoton auf $T^1(M)$,.d.h

$$h_1 \leq h_2 \text{ auf } M \ \Rightarrow\ \int_M h_1 \,\mathrm{d}\,x \leq \int_M h_2 \,\mathrm{d}\,x$$

c) (Beschränktheit) Es ist $|\int_M h \,\mathrm{d}\,x| \leq \int_M |h| \,\mathrm{d}\,x\ \forall h \in T^1(M)$

d) Für $h \in T^1(M)$ gilt:

$$\int_M |h| \,\mathrm{d}\,x = 0 \ \Leftrightarrow\ h = 0 \text{ f.ü. auf } M$$

Hinweis: $\int_M |h| \,\mathrm{d}\,x$ ist Halbnorm auf dem Vektorraum $T^1(M)$.

7.2. Erweiterung auf messbare Funktionen

sinnvoll:

- Linearität und Monotonie erhalten
- eine gewisse Stetigkeit der Integral-Abbildung

$$h_k \to f \text{ in geeigneter Weise } \ \Rightarrow\ \int_M h_k \,\mathrm{d}\,x \to \int_m f \,\mathrm{d}\,x \tag{2}$$

nach ?? sollte man in (2) eine Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ mit $h_k(x) \to f(x)$ f.ü. auf M betrachten, aber es gibt zu viele konvergente Folgen für einen konsistenten Integralbegriff.

■ **Beispiel 7.2**
Betrachte $f = 0$ auf $\mathbb{R}$, wähle beliebige Folge $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}$, dazu eine Treppenfunktion

$$h_k(x) = \begin{cases} k \cdot \alpha_k & \text{auf } (0, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar konvergiert h_k gegen 0 f.ü. auf $\mathbb{R}$ und man hat $h_k \to 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}$ und $\int_{\mathbb{R}} h_k \,\mathrm{d}\, x = \alpha_k$

$\Rightarrow$ je nach Wahl der Folge α_n liegt ganz unterschiedliches Konvergenzverhalten der Folge $\int_{\mathbb{R}} h_k \,\mathrm{d}\, x$ vor

$\Rightarrow$ kein eindeutiger Grenzwert in (2) möglich

$\Rightarrow$ stärkerer Konvergenzbegriff in (2) nötig

man definiert: $h_k \to f$ genau dann wenn (gdw.) $\int_M |h_k - f| \,\mathrm{d}\, x \to 0$
$\Rightarrow$ Integralabbildung stetig bezüglich dieser Konvergenz.

Wegen $\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x \leq \int_m |h_k - f| \,\mathrm{d}\, x + \int_M |h_l - f| \,\mathrm{d}\, x$ müsste $\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x$ klein sein $\forall h, l$ groß.

7.3. Lebesgue-Integral

Definition (L^1-Chauchy-Folge, Lebesgue-Integral)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, Folge $\{h_k\}$ in $T^1(M)$ heißt L^1-Cauchy-Folge (kurz $L1$-CF), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x < \varepsilon \quad \forall h, l > k_0$$

Messbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt integrierbar auf $M \subset D$, falls Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ in $T^1(M)$ existiert mit $\{h_k\}$ ist $L1$-CF auf M und $H_k \to f$ f.ü. auf M. (4)

Für integrierbare Funktion f heißt eine solche Folge $\{h_k\}$ zugehörige L^1-CF auf M.

Formel (3) unbekannt

Wegen

$$\left| \int_M h_k \,\mathrm{d}\, x - \int_M h_l \,\mathrm{d}\, x \right| = \left| \int_M (h_k - h_l) \,\mathrm{d}\, x \right| \overset{\text{Folgerung 7.1}}{\leq} \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\, x \tag{5}$$

ist $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\, x\}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und somit konvergent.

Der Grenzwert

$$\int_m f \,\mathrm{d}\, x := \int_M f(x) \,\mathrm{d}\, x := \lim_{k \to \infty} \int_M h_k \,\mathrm{d}\, x \tag{6}$$

heißt (Lebesgue)-Integral von f auf M.

Hinweis: Integrale unter dem Grenzwert in (6) sind elementare Integrale gemäß (1).

Definition (Menge der integrierbaren Funktionen)
Menge der auf M integrierbaren Funktionen ist

$$L^1(M) := \left\{ f : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ integierbar auf } M \right\}$$

Satz 7.3
Definition des Integrals in (6) ist unabhängig von der speziellen Wahl einer L^1-CF $\{h_k\}$ zu f.

Vgl. Integral $\int_M h \,\mathrm{d}\, x$ einer Treppenfunktion gemäß (1) mit dem in (6):

Offenbar ist konstante Folge $\{h_k\}$ mit $h_k = h \ \forall k$ L^1-CF zu h

$\xRightarrow[(6)]{\text{Satz 7.3}}$ Integral $\int_M h \,\mathrm{d}\,x$ in (6) stimmt mit elementarem Integral in (1) überein.

Folgerung 7.4

Für eine Treppenfunktion stimmt das in (1) definierte elementare Integral mit dem in (6) definierte Integral überein. Insbesondere ist der vor (1) eingeführte Begriff integrierbar mit dem in (4) identisch

$\Rightarrow$ wichtige Identität (1) mit Treppenfunktion χ_M für $|M| < \infty$:

$$|M| = \int_M 1 \,\mathrm{d}\,x = \int_M \mathrm{d}\,x \quad \forall M \in \mathbb{R},\ M \text{ messbar},$$

d.h. das Integral liefert Maß für messbare Mengen.

Beweisidee (Satz 7.3). beachte: alle Integrale im Beweis sind elementare Integrale gemäß (1).

- Sei $f : M \subset \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und seien $\{h_k\}$, $\{\tilde{h}_k\}$ zugehörigen L^1-CF in $T^1(M)$.

  $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0$ mit

  $$\int_M |(h_k + \tilde{h}_k) - (h_l + \tilde{h}_l)| \,\mathrm{d}\,x \le \int_M |h_k - h_l| + |\tilde{h}_k - \tilde{h}_l| \,\mathrm{d}\,x < \varepsilon \quad \forall k, l \ge k_0$$

  $\Rightarrow$ $\{h_k - \tilde{h}_k\}$ ist L^1-CF mit $(h_k - \tilde{h}_k) \to 0$ f.ü. auf M.

  Da $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\,x\}$, $\{\int_M \tilde{h}_k \,\mathrm{d}\,x\}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren, bleibt zu zeigen: $\{h_k\}$ ist L^1-CF in $T^1(M)$ mit $h_k \to 0$ f.ü. auf M

  $$\Rightarrow \int_M h_k \,\mathrm{d}\,x \xrightarrow{k\to\infty} 0 \tag{7}$$

  Da Konvergenz von $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\,x\}$ bereits bekannt ist, reicht es, den Grenzwert für eine Teilfolge (TF) zu zeigen.

- Wähle TF derart, dass $\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\,x \le \frac{1}{2^l}\ \forall k \ge l$

  Fixiere $l \in \mathbb{N}$ und definiere $M_l := \{x \in M \mid h_l(x) \ne 0\}$, offenbar ist M messbar mit $|M_l| < \infty$.

  Sei nun $\varepsilon_l := \frac{1}{2^l \cdot |M_l|}$ falls $|M_l| > 0$ und $\varepsilon_l = 1$ falls $|M_l| = 0$.

  Weiterhin sei $M_{l,k} := \{x \in M_l \mid |h_k(x)| > \varepsilon_l\}$, und für $k > l$ folgt

  $$\begin{aligned}
  \left|\int_M h_k \,\mathrm{d}\,x\right| &\le \int_M |h_k| \,\mathrm{d}\,x = \int_{M_l} |h_k| \,\mathrm{d}\,x + \int_{M\setminus M_l} |h_k| \,\mathrm{d}\,x \\
  &\le \int_{M\setminus M_{l,k}} |h_k| \,\mathrm{d}\,x + \int_{M_{l,k}} |h_k| \,\mathrm{d}\,x + \int_{M\setminus M_l} |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\,x + \underbrace{\int_{M\setminus M_l} |h_l| \,\mathrm{d}\,x}_{=0} \\
  &\le \varepsilon_l |M_l| + \int_{M_{l,k}} |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\,x + \int_{M_{l,k}} |h_l| \,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2^l} \\
  &\le \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^l} + c_l \cdot |M_{l,k}| + \frac{1}{2^l}
  \end{aligned}$$

  mit $c_l := \sup_{x\in M} |h_l(x)|$, $\exists k_l > l$ mit ?? folgt $|\{x \in M_l \mid |h_k(x)| > \varepsilon_l\}| \le \frac{1}{2^l \cdot (c_l + 1)}\ \forall k > k_l$

  $$\Rightarrow \left|\int_M h_k \,\mathrm{d}\,x\right| \le \frac{4}{2^l}\ \forall k > k_l$$

  $$\xRightarrow[\text{beliebig}]{l\in\mathbb{N}} \int_M h_k \,\mathrm{d}\,x \to 0$$

$\square$

Satz 7.5 (Rechenregeln)
Seien f, g integrierbar auf $M \subset \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Dann

a) (Linearität) $f \pm g$, cf sind integrierbar auf M mit

$$\int_M f \pm g \,\mathrm{d}\,x = \int_M f \,\mathrm{d}\,x + \int_M g \,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_M cf \,\mathrm{d}\,x = c \int_M f \,\mathrm{d}\,x$$

b) Sei $\tilde{M} \subset \mathbb{M}$ messbar
$\Rightarrow$ $f\chi_{\tilde{M}}$ ist integrierbar auf M und f ist integrierbar auf $\tilde{M}$ mit

$$\int_M f \cdot \chi_{\tilde{M}} \,\mathrm{d}\,x = \int_{\tilde{M}} f \,\mathrm{d}\,x$$

c) Sei $M = M_1 \cup M_2$ für M_1, M_2 disjunkt und messbar
$\Rightarrow$ f ist integrierbar auf M_1 und M_2 mit

$$\int_M f \,\mathrm{d}\,x = \int_{M_1} f \,\mathrm{d}\,x + \int_{M_2} f \,\mathrm{d}\,x$$

d) Sei $f = \tilde{f}$ f.ü. auf M
$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ ist integrierbar auf M mit

$$\int_M f \,\mathrm{d}\,x = \int_M \tilde{f} \,\mathrm{d}\,x$$

e) Die Nullfortsetung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ von f (vgl. ??) ist auf jeder messbaren Menge $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar mit

$$\int_{M \cap \tilde{M}} f \,\mathrm{d}\,x = \int_{\tilde{M}} \overline{f} \,\mathrm{d}\,x$$

Aussage d) bedeutet, dass eine Änderung der Funktionswerte von f auf einer Nullmenge das Integral nicht verändert.

Beweisidee. Seien $\{h_k\}$ und $\{\tilde{h}_k\}$ aus $T^1(\mathbb{R})^n$ L^1-CF zu f und g.

zu a) Es ist $h_k + \tilde{h}_k \to f + g$ f.ü. auf M.
Wegen

$$\int_M |(h_k + \tilde{h}_k) - (h_l + \tilde{h}_l)| \,\mathrm{d}\,x \leq \underbrace{\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\,x}_{=L^1\text{-CF}, \, < \varepsilon} + \underbrace{\int_M |\tilde{h}_k - \tilde{h}_l| \,\mathrm{d}\,x}_{=L^1\text{-CF}, \, < \varepsilon}$$

ist $\{h_k + \tilde{h}_k\}$ L^1-CF zu $f + g$.
$\Rightarrow$ $f + g$ ist integrierbar auf M und Grenzübergang in

$$\int_M h_k + \tilde{h}_k \,\mathrm{d}\,x = \int_M h_k \,\mathrm{d}\,x + \int_M \tilde{h}_k \,\mathrm{d}\,x$$

liefert die Behauptung für $f + g$.
Analog zu cf. Wegen $f - g = f + (-g)$ folgt die letzte Behauptung.

zu b) Offenbar ist $\{\chi_{\tilde{m}h_k}\}$ L^1-CF zu $\chi_{\tilde{M}}f$ und $\{h_k\}$ L^1-CF zu f auf $\tilde{M}$.
Mit

$$\int_M h_k \chi_{\tilde{M}} \,\mathrm{d}\,x = \int_{\tilde{M}} h_k \,\mathrm{d}\,x \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

zu c) Nach b) ist f auf M_1 und M_2 integrierbar. Wegen $f = \chi_{M_1} f + \chi_{M_2} f$ folgt die Behauptung aus a) und b).

zu d) Da $\{h_k\}$ auch L^1-CF zu $\tilde{f}$ ist, folgt die Integrierbarkeit mit dem gleichen Integral.

zu e) Es ist $\{\chi_{M \cap \tilde{M}} h_k\}$ L^1-CF zu f auf $M \cap \tilde{M}$ und auch zu $\overline{f}$ auf $\tilde{M}$. Damit folgt die Behauptung. □

Satz 7.6 (Eigenschaften)
Es gilt

a) (Integierbarkeit) Für $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar gilt:

$$f \text{ integrierbar auf } M \quad \Leftrightarrow \quad |f| \text{ integrierbar auf } M$$

b) (Beschränktheit) Sei f integrierbar auf M, dann

$$\left| \int_M f \,\mathrm{d}\,x \right| \leq \int_M |f| \,\mathrm{d}\,x$$

c) (Monotonie) Seien f, g integrierbar auf M. Dann

$$f \leq g \text{ f.ü. auf } M \quad \Rightarrow \quad \int_M f \,\mathrm{d}\,x \leq \int_M g \,\mathrm{d}\,x$$

d) Sei f integrierbar auf M, dann

$$\int_M |f| \,\mathrm{d}\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ f.ü.}$$

In Analogie zur Treppenfunktion ist $\|f\|_1 := \int_M |f| \,\mathrm{d}\,x$ auf $L^1(M)$ eine Halbnorm, aber keine Norm ($\|f\| = 0 \not\Rightarrow f = 0$). $\|f\|_1$ heißt L^1-Halbnorm von f.

Hinweis: Eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ ist beschränkt, wenn $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$
$\Rightarrow$ Begriff der Beschränktheit in b).

Beweisidee.

zu a) Sei f integrierbar auf M und sei $\{h_k\}$ L^1-CF zu f
$\Rightarrow |h_k| \to |f|$ f.ü. auf M.
Wegen $\int_M ||h_k| - |h_l|| \,\mathrm{d}\,x \overset{Folgerung\ 7.1}{\leq} \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\,x$ ist $\{|h_k|\}$ L^1-CF zu $|f|$ $\quad ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow |f|$ ist integrierbar.
beachte: andere Richtung später

zu b) Für eine L^1-CF $\{h_k\}$ zu f gilt nach Folgerung 7.1 c):

$$\left| \int_M h_k \,\mathrm{d}\,x \right| \leq \int_M |h_k| \,\mathrm{d}\,x$$

Da $\{|h_k|\}$ L^1-CF zu $|f|$ ist, folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

zu c) Nach den Rechenregeln ist $g - f$ integrierbar, wegen $|g - f| = g - f$ f.ü. auf M folgt

$$0 \leq \left| \int_M g - f \,\mathrm{d}\,x \right| \overset{b)}{\leq} \int_M |g - f| \,\mathrm{d}\,x \overset{Satz\ 7.5\ a)}{=} \int_M g \,\mathrm{d}\,x - \int_M f \,\mathrm{d}\,x$$

$\Rightarrow$ Behauptung

zu a) für „$\Leftarrow$“ wähle $f^\pm$ ($f = f^+ - f^-$) jeweils eine monotone Folge von TF $\{h_k^\pm\}$ gemäß ??. Folglich liefert $H_k = h_k^+ - h_k^-$ eine Folge von TF mit $h_k \to f$ f.ü. auf M.
Wegen $|h_k| \leq |f|$ f.ü. auf M ist $\int_M |h_k| \,\mathrm{d}\, x \leq \int_M |f| \,\mathrm{d}\, x$.
Folglich ist die monotone Folge $\int_M |h_k| \,\mathrm{d}\, x$ in $\mathbb{R}$ beschränkt
$\Rightarrow$ konvergent.
Da $h_k^\pm$ jeweils das Vorzeichen wie $f^\pm$ haben und die Folge monoton ist, gilt

$$||h_l| - |h_k|| = |h_l| - |h_k| = |h_l - h_k| \quad \forall l > k$$

und somit auch

$$\int_M |h_l - h_k| \,\mathrm{d}\, x = \int_M |h_l| - |h_k| \,\mathrm{d}\, x = \left| \int_M |h_l| \,\mathrm{d}\, x - \int_M |h_k| \,\mathrm{d}\, x \right| \quad \forall l > k$$

Als konvergente Folge ist $\{\int_M |h_k| \,\mathrm{d}\, x\}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und folglich ist $\{h_k\}$ L^1-CF und sogar L^1-CF zu f
$\Rightarrow$ f integrierbar

zu d) Für $f = 0$ f.ü. auf M ist offenbar $\int_M |f| \,\mathrm{d}\, x = 0$.
Sei nun $\int_M |f| \,\mathrm{d}\, x = 0$, mit $M_k := \{x \in M \mid |f| \geq \frac{1}{k}\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ ist

$$0 = \int_{M \setminus M_k} |f| \,\mathrm{d}\, x + \int_{M_k} |f| \,\mathrm{d}\, x \geq \int_{M \setminus M_k} 0 \,\mathrm{d}\, x + \int_{M_k} \frac{1}{k} \,\mathrm{d}\, x \geq \frac{1}{k} |M_k| \geq 0$$

$\Rightarrow$ $|M_k| = 0$ $\forall k$, wegen $\{f \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$

$\Rightarrow$ $|\{f \neq 0\}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| = 0$

$\Rightarrow$ Behauptung □

Folgerung 7.7
Sei f auf M integrierbar

a) Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha_1 \leq f \leq \alpha_2 \text{ f.ü. auf } M \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 |M| \leq \int_M f \,\mathrm{d}\, x \leq \alpha_2 |M|$$

b) Es gilt $f \geq 0$ f.ü. auf M $\quad \Rightarrow \quad$ $\int_M f \,\mathrm{d}\, x \geq 0$

c) Es gilt: $\tilde{M} \subset M$ messbar, $f \geq 0$ f.ü. auf M
$\Rightarrow \displaystyle\int_{\tilde{M}} f \,\mathrm{d}\, x \leq \int_M f \,\mathrm{d}\, x$
(linkes Integral nach Satz 7.5 b))

Beweisidee.
zu a) Wegen $\int_M \alpha_j \,\mathrm{d}\, x = \alpha_j |M|$ für $|M|$ endlich folgt a) direkt aus der Monotonie des Integrals.
zu b) folgt mit $\alpha_1 = 0$ aus a)
zu c) folgt, da $\chi_{\tilde{M}} \cdot f \leq f$ f.ü. auf M und aus der Monotonie □

In der Vorüberlegung zum Integral wurde eine gewisse Stetigkeit der Integralabbildung angestrebt. Das Integral ist bezüglich der L^1-Halbnorm stetig.

Satz 7.8
Seien $f, f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf $M \subset \mathbb{R}^n$ und sei

$$\lim_{k \to \infty} \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\, x = 0 \quad (\|f_k - f\| \to 0)$$
$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\, x = \int_M f \,\mathrm{d}\, x$$

> Weiterhin gibt es eine Teilfolge $\{f_{k'}\}$ mit $f_{k'} \to f$ f.ü. auf M.

Beweisidee. Aus der Beschränktheit nach Satz 7.6 folgt

$$\left| \int_M f_k \,\mathrm{d}\,x - \int_M f \,\mathrm{d}\,x \right| \leq \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\,x \xrightarrow{k \to 0} 0$$

$\Rightarrow$ 1. Konvergenzaussage

Wähle nun eine TF $\{f_{k_l}\}_l$ mit $\int_M |f_{k_l} - f| \,\mathrm{d}\,x \leq \frac{1}{2^{l+1}}$ $\forall l \in \mathbb{N}$.

Für $\varepsilon > 0$ sei $M_\varepsilon := \{x \in M \mid \limsup_{l\to\infty} |f_{k_l} - f| > \varepsilon\}$

$$\Rightarrow M_\varepsilon \subset \bigcup_{l=j}^{\infty} \{|f_{k_l} - f| > \varepsilon\} \ \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow M_\varepsilon \leq \sum_{l=j}^{\infty} |\{|f_{k_l} - f| > \varepsilon\}| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=j}^{\infty} \int_M |f_{k_l} - f| \,\mathrm{d}\,x \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{1}{2^{l+1}} = \frac{1}{2^j \varepsilon} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow M_\varepsilon = 0 \ \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow f_{k_l} \xrightarrow{l \to \infty} f \text{ f.ü. auf } M$$

□

> **Satz 7.9 (Majorantenkriterium)**
> Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, M messbar, $|f| \leq g$ f.ü. auf M, g integrierbar auf M
> $\Rightarrow$ f integrierbar auf M
>
> Man nennt g auch integrierbare Majorante von f.

> **Lemma 7.10**
> Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar auf M, sei $f \geq 0$ auf M und sei $\{h_k\}$ Folge von Treppenfunktionen mit
>
> $$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq f \quad \text{und} \quad \int_M h_k \,\mathrm{d}\,x \text{ beschränkt} \tag{8}$$
>
> $\Rightarrow$ $\{h_k\}$ ist L^1-CF zu f und falls $\{h_k\} \to f$ f.ü. auf M ist f integrierbar (vgl ??)

Beweisidee. Offenbar sind alle h_k integrierbar und wegen der Monotonie gilt

$$\left| \int_M h_k \,\mathrm{d}\,x - \int_M h_l \,\mathrm{d}\,x \right| = \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}\,x \quad \forall k \geq l$$

Da $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\,x\}$ konvergent ist in $\mathbb{R}$ als monoton beschränkte Folge ist diese CF in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $\{h_k\}$ ist L^1-CF

Falls noch $h_k \to f$ f.ü. $\Rightarrow$ $\{h_k\}$ ist L^1-CF zu f $\Rightarrow$ f ist integrierbar □

Beweisidee (Satz 7.9). (mit f auch $|f|$ mesbbar nach ??)

Es existiert eine Folge $\{h_k\}$ von Treppenfunktionen mit

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \ldots \leq |f| \leq g$$

auf M und $\{h_k\} \to |f|$ f.ü. auf M.

Da $\{\int_M h_k \,\mathrm{d}\,x\}$ beschränkt ist in $\mathbb{R}$ da g integrierbar ist

$$\xRightarrow{\text{Lemma 7.10}} \{h_k\} \text{ ist } L^1\text{-CF zu } |f|$$

$$\Rightarrow |f| \text{ integrierbar}$$

$$\xRightarrow{\text{Satz 7.6}} f \text{ integrierbar auf } M$$

□

Folgerung 7.11
Seien $f,\, g : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $|M|$ endlich. Dann

a) Falls f beschränkt ist auf M, dann ist f integrierbar auf M

b) Sei f beschränkt und g integrierbar auf M
$\Rightarrow$ $f \cdot g$ ist integrierbar auf M

Hinweis: Folglich sind stetige Funktionen auf kompaktem M integrierbar (vgl. Theorem von Weierstraß)

Beweisidee. Sei $|f| \leq \alpha$ auf M für $\alpha \in \mathbb{Q}$
zu a) $\Rightarrow$ konstante Funktion $f_1 = \alpha$ ist integrierbare Majorante von $|f|$
zu b) Mit $f_2 = \alpha \cdot |g|$ ist f_2 integrierbare Majorante zu $|f \cdot g|$ $\xRightarrow[\text{kriterium}]{\text{Majoranten-}}$ Behauptung □

7.4. Grenzwertsätze

$\int_M f_k \,\mathrm{d}\, x \overset{?}{\to} \int_M f \,\mathrm{d}\, x$ Vertauschbarkeit von Integration und Grenzübergang ist zentrale Frage $\to$ grundlegende Grenzwertsätze $\int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\, x \to 0$

Theorem 7.12 (Lemma von Fatou)
Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ integrierbar auf $M \subset D$ $\forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f(x) := \liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ $\forall x \in M$ ist integrierbar auf M und

$$\left(\int_M f \,\mathrm{d}\, x =\right) \int_M \liminf_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\, x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\, x,$$

falls der Grenzwert rechts existiert.

Keine Gleichheit hat man z.B. für $\{h_k\}$ aus Beispiel 7.2 mit $\alpha_k = 1$ $\forall k$

$$h_k = \begin{cases} h \cdot \alpha_k & x \in \left[0, \frac{1}{k}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann

$$\int_M \liminf_{k\to\infty} h_k \,\mathrm{d}\, x = \int_M 0 \,\mathrm{d}\, x = 0 < \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_k \,\mathrm{d}\, x = 1$$

Theorem 7.13 (Monotone Konvergenz)
Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf $M \subset D$ $\forall k \in \mathbb{N}$ mit $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ f.ü. auf M
$\Rightarrow f$ ist integrierbar auf M und

$$\left(\int_M f \,\mathrm{d}\, x =\right) \int_M \lim_{k\to\infty} f_k(x) \,\mathrm{d}\, x = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\, x$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

▶ **Bemerkung 7.14**
Theorem 7.13 bleibt richtig, falls man $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ f.ü. auf M hat.

Ferner ist wegen der Monotonie die Beschränktheit der Folge $\{\int_M f_k \,\mathrm{d}\, x\}$ für die Existenz des Grenzwertes ausreichend.

Beweisidee (Theorem 7.13). Nach Theorem 7.12 ist $f - f_1 = \lim\limits_{k\to\infty} f_k - f_1$ integrierbar auf M und damit auch $f = (f - f_1) + f_1$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \int_M f - f_1 \,\mathrm{d}\,x &\leq \lim_{k\to\infty} \int_M f_k - f_1 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\,x - \int_M f_1 \,\mathrm{d}\,x \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \int_M f \,\mathrm{d}\,x - \int_M f_1 \,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_M f - f_1 \,\mathrm{d}\,x
\end{aligned}
$$

□

Theorem 7.15 (Majorisierte Konvergenz)
Seien $f_k, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar für $k \in \mathbb{N}$ und sei g integrierbar auf $M \subset D$ mit $|f_k| \leq g$ f.ü. auf M $\forall k \in \mathbb{N}$ und $f_k \to: f$ f.ü. auf M

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\,x = 0 \tag{9}$$

und

$$\left(\int_M f \,\mathrm{d}\,x = \right) \int_M \lim_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\,x = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\,x,$$

wobei alle Integrale existieren.

Beweisidee. Nach dem Majorantenkriterium sind alle f_k f.ü. integrierbar auf M.

Nach Theorem 7.12 gilt:

$$\int_M 2g \,\mathrm{d}\,x = \int_M \liminf_{k\to\infty} |2g - |f_k - f|| \,\mathrm{d}\,x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_M 2g - |f_k - f| \,\mathrm{d}\,x$$

$\Rightarrow 0 = \liminf\limits_{k\to\infty} - \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}\,x \Rightarrow (9) \xRightarrow{\text{Satz 7.8}}$ Behauptung □

Folgerung 7.16
Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf M $\forall k \in \mathbb{N}$. Sei $|M| < \infty$ und konvergieren die $f_k \to: f$ gleichmäßig auf M
$\Rightarrow f$ ist integrierbar auf M und $\int_M f \,\mathrm{d}\,x = \lim\limits_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}\,x$

Beweisidee. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_k(x)| \leq |f_{k_0}(x) + 1|$ $\forall x \in \mathbb{M}$, $k > k_0$.

Da $f_{k_0} + 1$ integrierbar auf M folgt die Behauptung aus Theorem 7.15. □

Theorem 7.17 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und zusammenhängend, und sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \quad \exists \xi \in M : \int_M f \,\mathrm{d}\,x = f(\xi) \cdot |M|$$

Beweisidee. Aussage klar für $|M| = 0$, deshalb wähle $|M| > 0$.

Da f stetig auf M kompakt

$$
\begin{aligned}
&\xRightarrow{\text{Weierstrass}} \exists \text{ Minimalstelle } x_1 \in M, \text{ Maximalstelle } x_2 \in M \text{ und } \gamma := \int_M f \,\mathrm{d}\,x \\
&\xRightarrow{\text{Folgerung 7.7}} f(x_1) \leq \tfrac{\gamma}{|M|} \leq f(x_2) \\
&\xRightarrow{\text{Zwischenwertsatz}} \exists \xi \in M : f(\xi) = \frac{\gamma}{|M|} \\
&\Rightarrow \text{Behauptung}
\end{aligned}
$$

□

7.5. Parameterabhängige Integrale

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge von Parametern und sei $f : M \times P \to \mathbb{R}$.

Betrachte parameterabhängige Funktion

$$F(p) := \int_M f(x,p)\,\mathrm{d}\,x \tag{10}$$

Satz 7.18 (Stetigkeit)
Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M \times P \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

- $f(\,\cdot\,,p)$ messbar $\forall p \in P$
- $f(x,\,\cdot\,)$ stetig für fast alle (fa.) $x \in M$

Weiterhin gebe es integrierbare Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ mit

- $|f(x,p)| \leq g(x)$ für fa. $x \in M$

$\Rightarrow$ Integrale in (10) existieren $\forall p \in P$ und F ist stetig auf P.

Beweisidee. $f(\,\cdot\,,p)$ ist integrierbar auf M $\forall p \in P$ nach Satz 7.9.

Fixiere p und $\{p_k\}$ in P mit $p_k \to p$.

Setzte $f_k(x) := f(x,p_k)$

Stetigkeit von $f(x,\,\cdot\,)$ liefert $f_k(x) = f(x,p_k) \xrightarrow{x\to\infty} f(x,p)$ für fa. $x \in M$. $\xRightarrow{\text{Theorem 7.15}}$ $F(p_k) = \int_M f_k(x)\,\mathrm{d}\,x \to \int_M f(x,p)\,\mathrm{d}\,x = F(p)$
$\xRightarrow[\text{beliebig}]{p\in P}$ Behauptung

Satz 7.19 (Differenzierbarkeit)
Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : M \times P \to \mathbb{R}$ mit $f(\,\cdot\,,p)$ integrierbar auf M $\forall p \in P$. und

- $f(x,\,\cdot\,)$ stetig diffbar auf P für fa. $x \in M$

Weiterhin gebe es eine integrierbare Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ mit

- $|f_P(x,p)| \leq g(x)$ für fa. $x \in M$ und $\forall p \in P$

$\Rightarrow$ F aus (10) ist diffbar auf P mit

$$F'(p) = \int_M f_p(x,p)\,\mathrm{d}\,x \tag{11}$$

Hinweis: Das Integral in (11) ist komponentenweise zu verstehen und liefert für jedes $p \in P$ einen Wert im $\mathbb{R}^m$.

Betrachtet man für $p = (p_1,\ldots,p_m) \in \mathbb{R}^n$ nur p_j als Parameter und fixiert andere p_i, dann liefert (11) die partielle ABleitung $F_{p_j}(p) = \int_m f_{p_j}(x,p)\,\mathrm{d}\,x$ für $j = 1,\ldots,m$.

7.6. Riemann-Integral

ebenfalls: Approximation von der zu integrierenden Funktion f durch geeignete Treppenfunktionen

Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $Q \in \mathcal{Q}$ eine beschränkte Funktion. Betrachte die Menge der Treppenfunktionen $T_{\mathcal{Q}}(Q)$, der Form

$$h = \sum_{j=1}^{l} c_j \chi_{Q_j} \quad \text{mit} \quad \bigcup_{j=1}^{l} Q_j = Q,$$

$Q_j \in \mathcal{Q}$ paarweise disjunkt, $c_j \in \mathbb{R}$.

Quader $\{Q_j\}_{j=1,\dots,l}$ werden als Zerlegung zugehörig zu h bezeichnet.

Definition (Feinheit, Riemann-Summe, Riemann-Folge)
Für Quader $Q' = F_1' \times \ldots \times F_n' \in \mathcal{Q}$ mit Intervallen $F_j \subset \mathbb{R}$ heißt $\sigma_{Q'} := \max_j |I_j'|$ ($|I_j'|$ - Intervalllänge) Feinheit von Q' (setzte $\sigma_\emptyset = 0$).

Für $h = \sum_{j=1}^{l} c_j \chi_{Q_j}$ heißt $\sigma_h := \max \sigma_{Q_j}$ Feinheit zur Treppenfunktion h.

Treppenfunktion $h = \sum_{j=1}^{l} c_j \chi_{Q_j} \in T_{\mathcal{Q}}(Q)$ heißt zulässig (Riemann-zulässsig) für f falls $\forall j$ $\exists x_j \in Q_j : c_j = f(x_j)$, d.h. auf jedem Quader Q_j stimmt h mit f in (mindestens) einem Punkt x_j überein.

Zu zulässigen h nennen wir $S(h) := \sum_{j=1}^{l} c_j |Q_j| = \sum_{j=1}^{l} f(x_j) \cdot |Q_j|$ Riemann-Summe zu h.

Folge $\{h_k\}$ zulässiger Treppenfunktionen zu f, deren Feinheit gegen Null geht (d.h. $\sigma_{h_k} \to 0$) heißt Riemann-Folge zu f.

f heißt Riemann-integrierbar (kurz R-integrierbar) auf Q, falls $S \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$S = \lim_{k \to \infty} S(h_k) \tag{12}$$

für alle Riemann-Folgen $\{h_k\}$ zu f.
Grenzwert $\int_Q f(x) \,\mathrm{d}\, x := S$ heißt Riemann-Integral (kurz R-Integral) von f auf Q.

Satz 7.20
Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $Q \in \mathcal{Q}$ abgeschlossen
$\Rightarrow$ f ist (Lebesgue) integrierbar und Riemann-Integrierbar auf Q mit R-$\int_Q f \,\mathrm{d}\, x = \int_Q f \,\mathrm{d}\, x$.

Beweisidee (Satz 7.20). Als stetige Funktion ist f auf Q messbar und beschränkt und somit L-integrierbar.

Fixiere $\varepsilon > 0$ und sei $h = \sum_{j=1}^{l_k} f(x_{k_j}) \chi_{Q_j}$ Riemann-Folge von Treppenfunktionen zu f.

Für $|Q| = 0$ folgt die Behauptung leicht, da $S(h_k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

Sei nun $|Q| > 0$. Da f auf kompakter Menge Q gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{|Q|}$ falls $|x - \tilde{x}| < \delta$.

Da $\sigma_{h_k} \to 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \sigma_{h_k} < \frac{\delta}{\sqrt{n}} \ \forall k \geq k_0$

$\Rightarrow$ $|x - \tilde{x}| < \delta \ \forall x, \tilde{x} \in Q_{k_j}$ falls $k \geq k_0$ und $|f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{|Q|} \ \forall x \in Q_{k_j}$ mit $k \geq k_0$

$\Rightarrow$ $\left| \int_Q f \,\mathrm{d}\, x - \int_Q h_k \,\mathrm{d}\, x \right| \leq \int_Q |f - h_k| \,\mathrm{d}\, x \leq \frac{\varepsilon}{|Q|} \cdot |Q| = \varepsilon \ \forall k \geq k_0$

Da $S(h_k) = \int_Q h_k \,\mathrm{d}\, x$ und $\varepsilon > 0$ beliebig folgt $S(h_k) \to \int_Q f \,\mathrm{d}\, x$.

Für jede Riemann-Folge $\{h_k\}$ zu f ist f R-integrierbar und Behauptung folgt. □

8. Integration auf $\mathbb{R}$

8.1. Integrale konkret ausrechnen

Theorem 8.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und integrierbar auf Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in I$. Dann

a) $\tilde{F} : I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{F}(x) := \int_{x_0}^{x} f(y)\,\mathrm{d}\,y\ \forall x \in I$ ist Stammfunktion von f auf I.

b) Für jede Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ auf F gilt:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \quad \forall a, b \in I$$

Beweisidee.

a Fixiere $x \in I$. Dann gilt für $t \neq 0$

$$\frac{\tilde{F}(x+t) - \tilde{F}(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int_{x_0}^{x+t} f\,\mathrm{d}\,y - \int_{x_0}^{x} f\,\mathrm{d}\,y\right) = \frac{1}{t}\int_{x}^{x+t} f\,\mathrm{d}\,y =: \varphi(t),$$

wobei nach alle Integrale existieren. Mit Mittelwertsatz der Integralrechnung:
$\Rightarrow \forall t \neq 0\ \exists \xi_t \in [x, x+t]$ (bzw. $[x+t, x]$ für $t < 0$): $\varphi(t) = \frac{1}{|t|} f(\xi)|t| = f(\xi_t)$
$\Rightarrow \tilde{F}'(x) = \lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = f(x) \Rightarrow$ Behauptung

b Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt: $F(x) = \tilde{F}(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R} \Rightarrow F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_{x_0}^{b} f\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{a} f\mathrm{d}x = \int_a^b f\mathrm{d}x$

Satz 8.2 (Differenz von Funktionswerten)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, f stetig diffbar, $[x, y] \subset D$. Dann

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^1 f(x + t(y-x))\,\mathrm{d}\,t(y-x)$$

Beweisidee. Sei $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\varphi_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_k(t) := f_K(x + t(y-x))$
$\Rightarrow$ φ_t ist diffbar auf $[0,1]$ mit $\varphi_k'(t) = f'(x + t(y-x)) \cdot (y-x)$
$\Rightarrow$ $f_k(y) - f_k(x) = \varphi_k(1) - \varphi_k(0) = \int_0^1 \varphi_k'(t)\,\mathrm{d}\,t \Rightarrow$ Behauptung □

8.2. Uneigentliche Integrale

Satz 8.3
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig für a, $b \in \mathbb{R}$. Dann

$$f \text{ integrierbar auf } (a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x\downarrow a\\ x\neq a}} \int_a^b |f|\,\mathrm{d}\,x \text{ existiert}$$

Beweisidee. Hinrichtung: Majorisierte Konvergenz, Rückrichtung: Majorisierte Konvergenz □

9. Satz von Fubini und Mehrfachintegrale

Theorem 9.1 (Fubini)
Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $X \times Y$. Dann

a) Für Nullmenge $N \subset Y$ ist $x \to f(x, y)$ integrierbar auf X $\forall y \in Y \setminus N$

b) Jedes $F : Y \to \mathbb{R}$ mit $F(y) := \int_X f(x, y)\,\mathrm{d}\,x$ $\forall y \in Y \setminus N$ ist integrierbar auf Y und

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_Y F(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y$$

Definition (iteriertes Integral, Mehrfachintegral)
Rechte Seite heißt iteriertes Integral bzw. Mehrfachintegral.

Satz 9.2 (Satz von Tonelli)
Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ messbar. Dann

$$f \text{ integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y \quad \text{oder} \quad \int_X \left(\int_Y |f(x, y)|\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x$$

existiert.

Beweisidee.

„$\Rightarrow$“ Mit f auch $|f|$ integrierbar und die Behauptung folgt

„$\Leftarrow$“ offenbar f integrierbar auf $X \times Y$, $\{f_k\}$ wachsend, $f_k \to f$, mit Fubini: $\{\int_{X\times Y} f_k \mathrm{d}(x, y)\}$ beschränkte Folge, mit majorisierter Konvergenz folgt f integrierbar

9.1. Integration durch Koordinatentransformation

Definition (Diffeomorphismus, diffeomorph)
Sei $f : U \subset K^n \to V \subset K^m$ bijektiv, wobei U, V offen.

f heißt Diffeomorphismus, falls f und f^{-1} stetig diffbar auf U bzw. V sind.

U und V heißen dann diffeomorph.

Theorem 9.3 (Transformationssatz)
Seien U, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to V$ Diffeomorphismus. Dann

$$f : V \to \mathbb{R} \text{ integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f(\varphi(\,\cdot\,))|\det \varphi'(y)| : U \to \mathbb{R} \text{ integrierbar}$$

und es gilt

$$\int_U f(\varphi(y)) \cdot |\varphi'(y)|\,\mathrm{d}\,y = \int_V f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Beispiel 9.4
Sei $V = B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ Kugel mit Radius $R > 0$.

Zeige: $|B_R(0)| = \int_V 1\,\mathrm{d}(x, y, z) = \frac{4}{3}\pi R^3$

Benutze Kugelkoordinaten (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$) mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(r,\alpha,\beta) := \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\beta \\ r\sin\alpha\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix}$$

Für $(r,\alpha,\beta) \in U : (0,R) \times (-\pi,\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Mit $H := \{(x,0,z) \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ und $\tilde{V} := V \setminus H$ gilt: $|H|_{\mathbb{R}^3} = 0$

$\varphi : U \to \tilde{V}$ diffbar, injektiv, und

$$\varphi'(r,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\cos\beta & -r\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & r\cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Definiere $\varphi'(r,\alpha,\beta) = r^2\cos\beta \neq 0$ auf U

$\xRightarrow{Satz 27.8}$ $\varphi : U \to \tilde{V}$ ist Diffeomorphismus

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |B_R(0)| &= \int_V 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\tilde{V}} 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) + \int_H 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \\
&\overset{(??)}{=} \int_U |\det\varphi'(r,\alpha,\beta)| \,\mathrm{d}\,r \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,\beta + |H| \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\beta \,\mathrm{d}\,\beta \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,r \\
&= \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} [r^2\sin\beta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,r = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} 2r^2 \,\mathrm{d}\,\alpha \,\mathrm{d}\,r = \int_0^R 4\pi r^2 \,\mathrm{d}\,r \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3 \Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

Kapitel III

Differentiation II

10. Höhere Ableitungen und Taylor-scher Satz

Definition (zweite Ableitung)
Betrachte nun $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f diffbar auf D. Falls $g := f' : D \to L(K^n, K^m) =: y_1$ diffbar in $x \in D$ ist, heißt

$$f''(x) := g'(x) \in L(K^n, Y_1) = L\big(K^n, \underbrace{L(K^n, K^m)}_{\cong K^{m\times n}}\big) \tag{1}$$

zweite Ableitung von f in X.

Definition (k-fach differenzierbar)
f heißt k-fach differenzierbar (auf D), falls $f^{(k)}$(x) existiert $\forall x \in D$.

f heißt k-fach stetig diffbar (auf D) oder C^k-Funktion, falls f k-fach diffbar und $f^{(k)} : D \to Y_k$ stetig.

$C^k(D, K^m) := \{f : D \to K^m \mid \text{f } k\text{-fach stetig diffbar auf } D\}$

Speziafall $n = 1$: $f : D \subset K \to K^m$

$f'(x) \in Y_1 = L(K, K^n) \cong K^m$

$f''(x) \in Y_2 = L(K, Y_1) \cong L(K, K^m) \cong K^m$

Allgemein: $f^{(k)}(x) \in Y_k = L(K, Y_{k-1}) \cong L(K, K^m) \cong K^m$, d.h. für $n = 1$ kann $f^{(k)}(x)$ stets als m-Vektor in K^m betrachtet werden.

- **Beispiel 10.1**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f^{(k)}(x)$ existiert $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ mit $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k$, d.h. $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Man schreibt auch $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Räume $\mathbf{Y}_k$: $= L(K^n, Y_{k-1}) \cong K^{m\times n^k}$.

Für $A \in Y_k = L(K^n, Y_{k-1})$ und $y_1, \dots, y_k \in K^n$ gilt:

$$\begin{aligned}
&A \cdot y_1 && \in Y_{k-1} = L(K^n, Y_{k-2}),\\
&(Ay_1) \cdot y_2 && \in Y_{k-2} = L(K^n, Y_{k-3})\\
& && \vdots\\
&(\dots(Ay_1)y_2)\dots\cdot y_k) \in Y_0 && = K^m
\end{aligned}$$

Ausdrücke links sind offebar linear in jedem $y_j \in K^n$ separat, $j = 1\dots, k$

Definition (k-lineare Abbildung)
Betrachte

$$\begin{aligned} X_k &:= L^k(K^n, K^m) \\ &:= \{B : \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{k\text{-fach}} \to K^m \mid y_j \to B(y_1, \ldots, y_k) \text{ linear für jedes } j = 1, \ldots, k\ \} \end{aligned}$$

$B \in X_k$ heißt k-lineare Abbildung . X_k ist Vektorraum.

■ **Beispiel 10.2**
Für 3-lineare Abbildung $B \in L^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mit

$$B(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz \\ (x+y)z \end{pmatrix}$$

ist z.B. nicht linear als Abbildung auf $\mathbb{R}^3$.

Satz 10.3
Für $k \in \mathbb{N}$ ist $I_k : Y_k \to X_k$ mit

$$(I_k A)(y_1, \ldots, y_k) := \big(\ldots\big((Ay_1)y_2\big)\ldots y_k\big) \quad \forall A \in Y_k,\ y_j \in K^n,\ j = 1, \ldots, k \tag{2}$$

ein Isomorphismus bezüglich der Vektorraum-Struktur (also $X_k \cong Y_k$).

Hinweis: Somit kann $f^{(k)}(x)$ auch als Element von X_k betrachtet werden, d.h. $f^{(k)}(x) \in X_k = L^k(K^n, K^m)$

Damit wird z.B. (**??**) zu

$$f'(x+y) \cdot z = f'(x) \cdot z + f''(x) \cdot (y, z) + o(|y|) \cdot z \quad \forall z \in K^n \tag{3}$$

und für $n = 1$ gilt

$$f^{(k)}(x)(y_1, \ldots, y_k) = \underbrace{f^{(k)}(x)}_{\in K^m} \cdot \underbrace{y_1 \cdot \ldots y_k}_{\text{Produkt von Zahlen}} \quad \forall y_j \in K$$

Beweisidee. I_k offenbar linear auf Y_k, I_k injektiv, denn $I_k(A) = 0$ gdw. $A = 0$

Zeige mittels Vollständiger Induktion: $I_,$ surjektiv.

IA: Offenbar ist $X_1 = Y_1$ und $I_1 A = A \Rightarrow I_1$ surjektiv

IS: Sei I_k surjektiv und wähle beliebiges $B \in X_{k+1}$.
Setze $\tilde{B}_{y_1} := B(y_1, \cdot, \ldots, \cdot) \in X_k\ \forall y_1 \in K^n$, $\tilde{B} \in L(K^n, X_k)$

$$\Rightarrow \quad A := I_k^{-1} \tilde{B} \in L(K^n, Y_k) = Y_{k+1} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (I_{k+1}A)(y_1, \ldots, y_{k+1}) &\overset{(2)}{=} \big(\ldots\big((Ay_1)y_2\big)\ldots y_{k+1}\big) = \big(I_K(Ay_1)\big)(y_2, \ldots, y_{k+1}) \\ &\overset{(4)}{=} (\tilde{B}y_1)(y_2, \ldots, y_{k+1}) \qquad = B(y_1, \ldots, y_{k+1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad B = I_{k+1} \cdot A \Rightarrow I_{k+1}$ surjektiv

$\Rightarrow I_k$ Isomorphismus □

Norm: in X_k, Y_k: für $A \in Y_k$ folgt durch rekursive Definition

$$\left(\dots\left(\left(A\frac{y_1}{|y_1|}\right)\frac{y_2}{|y_2|}\right)\dots\frac{y_k}{|y_k|}\right) \leq \|A\|_{Y_k} \quad \forall y_j \in K^n,\ y_j \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad (\dots((Ay_1)y_2)\dots y_k) \leq \|A\|_{Y_k}|y_1||y_2|\dots|y_k| \quad \forall y_1 \dots, y_k \in K^n \tag{5}$$

Norm für $A \in X_k = L^k(K^n, K^m)$:

$$\|A\|_{X_k} := \sup\{|A(y_1,\dots,y_k)| \mid y_j \in K^n,\ |y_j| \leq 1\}$$

Analog zu (5) folgt für $A \in X_k$:

$$|A(y_1,\dots,y_k)| \leq \|A\|_{X_k}|y_1|\cdot\ldots\cdot|y_k| \quad \forall y_j \in K^n \tag{6}$$

Satz 10.4
Mit Isomorphismus $I_k : Y_k \to X_k$ aus Satz 10.3 gilt:

$$\|I_(A)\|_{X_k} = \|A\|_{Y_k} \quad \forall A \in Y_k$$

Beweisidee. Selbststudium / ÜA □

10.1. Partielle Ableitungen

Sei $X = (x_1,\dots,x_k) \in K^n$; d.h. $x_j \in K$, $e_1,\dots,e_k$ die Standard-Einheitsvektoren
Wiederholung: Partielle Ableitung $f_{x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}f(x) = D_{x_j}f(x)$ ist Richtungsableitung $f'(x,e_j) = D_{e_j}f(x) \in L(K,K^m)$.

Definition (partielle Ableitung)
Nenne $f_{x_1}(x),\dots,f_{x_1}(x)$ partielle Ableitung 1. Ordnung von f in X

Für $g : D \to X$ definieren wir die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j}g(x) = g_{x_j}(x) \in L(K,X)$ analog zu ??:

$$g(x+t\cdot e_j) = g(x) + g_{x_j}(x)t + o(t),\ t \to 0,\ t \in K \tag{7}$$

Für $g = f_x : D \to L(K,K^m)$ ist dann $g_{x_j} \in L\big(K, L(K,K^m)\big)$. Für $g = f_{x_j} : D \to L(K,K^m)$ ist dann $g_{x_j} \in L(K,L(K,K^m)) \cong L^2(K,K^m) \cong K^m$ die partielle Ableitung $f_{x_ix_j}(x)$ von f in x nach x_i und x_j.

Andere Notation: $\frac{\partial^2}{\partial x_j x_i}f(x), D_{x_ix_j}f(x),\dots$

Die $f_{x_ix_j}(x)$ heißen partielle Ableitung 2. Ordnung von f in x.

Mittels Rekursion

$$f_{x_{j_1}\dots x_{j_k}}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i}f_{x_{i_1}\dots x_{j_k}} \tag{8}$$

erhält man schrittweise die partielle Ableitung der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ von f in x:

$$f_{x_{j_1}\dots x_{j_k}}(x) = D_{x_{j_1}\dots x_{j_k}}f(x) = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_k}\dots\partial_{x_{j_1}}}f(x) \in L^k(K,K^m)$$

Berechnung durch schrittweises Ableiten von $x_{j_1} \to f(x_1,\dots,xn)$, $x_{j_2} \to f_{x_{j_1}}(x_1,\dots,x_n)$ usw.

■ **Beispiel 10.5**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = y \sin x \; \forall x, y \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y\cos x & f_y(x,y) &= \sin x \\ f_{xx}(x,y) &= -y\sin x & f_{yy}(x,y) &= 0 \\ f_{xy}(x,y) &= \cos x & f_{yx}(x,y) &= \cos x \end{aligned}$$

Beobachtung: $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

Abkürzende Schreibweise:

$$\begin{aligned} f_{x_jx_jx_j}(x) &= \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_j \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^3}{\partial x_j^3} f(x) \\ f_{x_ix_jx_jx_lx_l} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_l^2 \partial x_j^2 \partial x_i} f(x) \end{aligned}$$

Definition (Hesse-Matrix)
Für $m = 1$ (d.h. $f : D \subset \mathbb{R}^n \to K$) ist

$$\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x) & \dots & f_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x) & \dots & f_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix} =: \operatorname{Hess}(f)$$

die HESSE-Matrix , die alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung enthält.

■ **Beispiel 10.6**
Sei $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1x_2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

Folglich

$$f_{x_1}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad f_{x_2}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 \\ x_2 & x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

ist die JACOBI-Matrix sowie

$$\operatorname{Hess}(f_1) = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Hess}(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Anschaulich: alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung bilden eine 3D Matrix.

Theorem 10.7
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $x \in D$. Dann

(a) Falls $f^{(k)}(x)$ existiert, dann existieren alle partiellen Ableitungen der Ordnung k in x und

$$f_{x_{j_1}\dots x_{j_k}}(x) = f^{(k)}(x)(e_{j_k}, \dots, e_{j_1}) \tag{9}$$

(b) Falls alle partiellen Ableitungen $f_{x_{j_1}\dots x_{j_k}}$ der Ordnung k für alle $y \in B_r(x) \subset D$ existieren und falls diese stetig sind
$\Rightarrow$ f ist k-fach diffbar, d.h. $f^{(k)}(x)$ existiert.

Beweisidee. Jeweils mittels vollständiger Induktion nach K ausgeführt:

a) basiert auf Vollst. Reduktion

b) basiert auf Kap. MWS Existenz part. Abl. □

■ **Beispiel 10.8 (nochmal Beispiel 10.6)**
$f^{(2)}(x) = f''(x) \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ existiert $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nach Theorem 10.7 und kann als Vektor von der HESSE-Matrix dargestellt werden:

$$f^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{Hess} f_1 \\ \mathrm{Hess} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Was ist nun $f''(x)(y_1, y_2)$ für (Vektoren) y_1, $y_2 \in \mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned} f''(x)(y_1, y_2) &= f''(x)\left(\binom{y_{11}}{y_{12}}, \binom{y_{21}}{y_{22}}\right) = f^{(2)}(x)(y_{11}e_1 + y_{12}e_2, y_{21}e_1 + y_{22}e_2) \\ &= y_{11}f''(x)(e_1, y_2) + y_{12}f''(x)(e_2, y_2) \qquad \text{Linearität!} \\ &= y_{21}y_{11}f''(x)(e_1, e_1) + y_{12}y_{21}f''(x)(e_2, e_1) + y_{11}y_{22}f''(x)(e_1, e_2) + y_{12}y_{22}f''(x)(e_2, e_2) \\ &\overset{(9)}{=} y_{11}y_{21}f''_{x_1x_1}(x) + y_{12}y_{21}f_{x_1x_2}(x) + y_{21}y_{22}f_{x_2x_1}(x) + y_{12}y_{22}f_{x_2x_2}(x) \ (\in \mathbb{R}^2) \\ &= \begin{pmatrix} \langle(\mathrm{Hess} f_1)(x)y_1, y_2\rangle \\ \langle(\mathrm{Hess} f_2)(x)y_1, y_2\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Folgerung 10.9
Für $f = (x_1, \dots, f_m) : D \subset K^n \to K^m$, D offen, es existieren alle $f^{(2)}(x)$ für $x \in D$. Dann

$$f^{(2)}(x)(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \langle(\mathrm{Hess} f_1)(x)y_1, y_2\rangle \\ \vdots \\ \langle(\mathrm{Hess} f_m)(x)y_1, y_2\rangle \end{pmatrix} \in K^m \ \forall y_1, y_2 \in K^n \tag{10}$$

Frage:: Kann man die Reihenfolge bei partiellen Ableitungen vertauschen? (vgl. Beispiel 10.5)

■ **Beispiel 10.10**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

und folglich

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(,0,)}{t} = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

insbesondere $f_x(0,y) = -y \ \forall y \in \mathbb{R}$, also $f_{xy}(0,0) = -1$

analog $f_y(x,0) = \ \ x \ \forall x \in \mathbb{R}$, also $f_{yx}(0,0) = +1$

Satz 10.11 (Satz von Schwarz)
Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen. Mögen die partiellen Ableitungen f_{x_i}, f_{x_j}, $f_{x_i x_j}$ auf D existieren. Falls $f_{x_i x_j}$ stetig in $x \in D$

$$\Rightarrow \ f_{x_j x_i}(x) \text{ existiert und } f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x) \tag{12}$$

(13) fehlt

Folgerung 10.12
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, f k-fach diffbar (d.h. $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$)
$\Rightarrow$ alle partiellen Ableitung bis Ordnung k existieren und die Reihenfolge kann vertauscht werden.

10.2. Anwendungen

Satz 10.13 (notwendige Integrabilitätsbedingung)
Sei $f = (f_1, \dots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, D Gebiet, f stetig diffbar.

Gebiet: offen, zusammenhängend

Damit f eine Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ besitzt, muss folgende Integrabilitätsbedingung erfüllt sein:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \quad \forall x \in D,\ i,j = 1, \dots, n \tag{13}$$

Beweisidee. f habe Stammfunktion $F \Rightarrow F \in C^2(D)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow F_{x_j}(x) &&= f_j(x) \quad \forall x \in D, j, i \\ &\Rightarrow F_{x_j x_i}(x) &&= \tfrac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) \ \forall x \in D, i, j \\ &\overset{\text{Schwarz}}{\Longrightarrow} F_{x_j x_i}(x) &&= F_{x_i x_j}(x) = \tfrac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \end{aligned}$$

□

■ **Beispiel 10.14**
Vgl. Bsp vom Kapitel Stammfkt. $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha x y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Betrachte die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \alpha x, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = 2x$$

$$\overset{(13)}{\Longrightarrow} \alpha = 2$$

Satz 10.15
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen und konvex, f stetig diffbar. Dann:

a) f konvex $\Leftrightarrow \langle f'(x), y-x\rangle \leq f(y)f(x)\ \forall x, y \in D$

b) falls sogar $f \in C^2(D)$, dann:

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) = (\text{Hess} f)(x) \text{ positiv definit } \forall x \in D$$

Beweisidee. Vgl. Literatur □

10.3. Taylor-scher Satz

Ziel: Bessere Approximation als durch Linearisierung

Verwende allgemeine Polynome $\varphi : K^n \to K$ der Ordnung k, d.h.

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \ldots + \sum_{j_1,\ldots,j_k}^{n} a_{j_1\ldots j_k} x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_k} \tag{14}$$

mit a_0, a_j, $a_{ij} \in K$ gegebene Koeffizienten

Wiederholung: $f \in C(D)$: $f(x+y) = f(x) + o(1)$, $y \to 0$
$f \in C^1(D)$: $f(x+y) = f(x) + f(x)y + o(|y|)$, $y \to 0$

Theorem 10.16 (Taylor-scher Satz)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, k-fach diffbar auf D, $x \in D$. Dann

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) y^j + R_k(y) \quad \text{falls } [x, x+y] \subset D, \tag{15}$$

wobei

$$|R_k(y)| \leq \frac{1}{k!} \left| f^{(k)}(x+\tau y) y^k \right| \leq \frac{1}{k!} \left\| f^{(k)}(x+\tau y) \right\| |y|^k \tag{16}$$

für ein $\tau = \tau(y) \in (0,1)$

Für $K = \mathbb{R}$, $m = 1$ gilt auch

$$R_k(y) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x+\tau y) y^k \tag{17}$$

(LAGRANGE Restglied)

Falls $f \in C^k(D, K^m)$ gilt:

$$R_k(y) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) y^k + o(|y|^k),\ y \to 0 \tag{18}$$

Definition (Taylorpolynom, Taylorentwicklung)
Rechte Seite in (15) ohne Restglied heißt Taylorpolynomvon f in x vom Grad $k-1$.

(15) heißt Taylorentwicklungvon f in x.

Folgerung 10.17 (Taylor-Formel mit partiellen Ableitungen)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, d offen, f k-fach diffbar auf D, $x \in D$, $[c, c+y] \subset D$:

$$f(x+y) = f(x) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} \sum_{j=1}^{n} f_{x_{j_l}\ldots x_{j_1}}(x) y_{j_1} \ldots y_{j_l} + R_k(y), \tag{19}$$

wobei $y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ (d.h $y_j \in K$ Zahlen).

Beweisidee. Benutze (9) □

Beispiel 10.18
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x_1^2 + x_1 x_2 + \sin x_2)$ $(x = (x_1, x_2))$

Taylorentwicklung in $x_0 = (1, \pi)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x+y) = f(x_0) + f'(x_0)y + \frac{1}{2}f''(x_0)y^2 + \frac{1}{3}f'''(x_0)y^3 + o(|y|^3)$$

Offenbar sind

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + \cos x_2 \end{pmatrix} \qquad f''(x) = (\mathrm{Hess} f)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -\sin x_2 \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x_0 + y) &= f(x_0) + f_{x_1}(x_0)y_1 + f_{x_2}(x_0)y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2!}f_{x_1x_1}(x_0)y_1^2 + \frac{2}{2}f_{x_1x_2}(x_0)y_1y_2 + \frac{1}{2}f_{x_2x_2}(x)y_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}f_{x_2x_2x_2}(x_0)y_2^3 + o(|y|^3) \\ &= 1 + \pi + (2+\pi)y_1 + 0 \cdot y_2 + y_1^2 + y_1y_2 + 0 \cdot y_2^2 + \frac{1}{6}y_2^3 + o(|y|^3),\ y \to 0 \end{aligned}$$

$f_{x_1x_2} + f_{x_2x_1} = 2f_{x_1x_2}$

Frage: Falls $f \in C^\infty(D)$ existiert, dann

$$f(x+y) = f(x) * \sum \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)y^k + \cancel{o(|y|^k)} \quad \text{für } k = 1, \dots, n \tag{20}$$

Definition (Taylorreihe)
Rechte Seite in (20) heißt Taylorreihevon f in x.

Beispiel 10.19
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \sin x$ für $x = 0$, dann

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ (-1)^k & \text{für } k = 2l+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (20) hat die folgende Form:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots = \sum (-1)^l \frac{y^{2l+1}}{(2l+1)!} \text{ für } l = 0, \dots, \infty$$

Diese gilt $\forall y \in \mathbb{C}$ (vgl. Definition Sinus in Kap. 13), analog Cosinus

Beispiel 10.20
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Nach Beispiel 10.1: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$

$\overset{(20)}{\Longrightarrow}$ $f(y) = 0)\ \forall y \Rightarrow \lightning$

$\Rightarrow$ (20) gilt nicht für alle $f \in C^\infty(D)$

Wiedeholung: Eine Reihe ist konvergent, falls die Folge der Partialsummen konvergieren, und damit (20) gilt, muss die Reihe auch gegen $f(x+y)$ konvergieren!

Satz 10.21 (Taylorreihe)
Sei $f : D \subset K^n \to K^m$, D offen, $f \in C^\infty(D, K^m)$, $x \in D$, $B_r(x) \subset D$. Falls

$$\lim_{k\to\infty} R_k(y) = 0 \quad \forall y \in B_r(x)$$

$\Rightarrow$ Taylorformel (20) gilt $\forall y \in B_r(x)$ und f heißt analytisch in x.

Beweisidee. Folgt direkt aus Theorem 10.16 □

■ **Beispiel 10.22**
sin, cos, exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind jeweils analytisch in allen $x \in \mathbb{C}$ und (20) gilt jeweils $\forall y \in \mathbb{C}$ (klar für $x = 0$) aus der Definition, für $x \neq 0$ erfolgt der Nachweis als ÜA / Selbststudium.

11. Extremwerte

11.1. Lokale Extrema ohne Nebenbedingung

Definition (definit, semidefinit, indefinit)
$f^{(k)}(x)$ für $k \geq$ heißt positiv definit (negativ definit), falls

$$f^{(k)}(x)y^k > 0\ (< 0) \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und positiv (negativ) semidefinit mit $\geq$ ($\leq$).

$f^{(k)}$ heißt indefinit, falls

$$\exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : f^{(k)}(x)y_1^k < 0 < f^{(k)}(x)y_2^k$$

Satz 11.1 (Hinreichende Extremwertbedingung)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $k \geq 2$ und sei

$$f'(x) = \ldots = f^{(k-1)} = 0$$

Dann:

a) f hat strenges lokales Minimum (Maximum), falls $f^{(k)}(x)$ positiv (negativ) definit

b) f hat weder Minimum noch Maximum, falls $f^{(k)}(x)$ indefinit.

Beweisidee. Taylorscher Satz □

Test Definitheit in Anwendungen: Hesse-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times}$ ist

- positiv (negativ) definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv (negativ)
- indefinit $\Rightarrow$ $\exists$ positive und negative Eigenwerte

Sylvester'sches Definitheitskriterium: Für $n = 2$ gilt

- $\det(A) < 0 \Leftrightarrow$ indefinit
- $\det(A) > 0, a_1 < 0 \Leftrightarrow$ negativ definit (Maximum)
- $\det(-A) > 0, a_1 > 0 \Leftrightarrow$ positiv definit (Minimum)

11.2. Lokale Extrema mit Gleichungsnebenbedingung

Satz 11.2 (Lagrange-Multiplikatorregel, notwendige Bedingung)
Seien $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}^m$ stetig, diffbar, D offen und sei $x \in D$ lokales Extremum von f bezüglich G, d.h.

$$\exists r > 0 : f(x) \underset{\geq}{\leq} f(y) \quad \forall y \in B_r(x)$$

mit $g(y) = 0$.

Falls $g'(x)$ regulär, d.h.

$$\operatorname{rang} g'(x) = m$$

dann

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : f'(x) + \lambda^\mathsf{T} g'(x) = 0$$

Definition (Lagrangescher Multiplikator)
λ oben heißt Lagrangescher Multiplikator

11.3. Globale Extrema mit Abstrakter Nebenbedinung

Frage: Bestimme sogenannte globale Extremalstelle $x_{\min}$, $x_{\max}$.

Strategie:
a) Bestimmte lokale Extrema in D
b) Bestimme globale Extrema auf ∂D
c) Vergleiche Extrema aus a) und b)

12. Inverse und implizite Funktionen

Definition ((lokale) Lösung)
Funktion $\tilde{y} : \tilde{D} \subset K^n \to K^m$ heißt (lokale) Lösung von in x auf $\tilde{D}$ falls

$$f(x, \tilde{y}(x)) = 0 \quad \forall x \in \tilde{D}$$

Theorem 12.1 (Satz über implizite Funktionen)
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^m \times K^m \to K^m$, D offen, f stetig und

a) $f(x_0, y_0) = 0$ für ein $(x_0, y_0) \in D$

b) die partielle Ableitung $f_y : D \to L(K^m, K^n)$ existiert, ist stetig in (x_0, y_0) und $f_y(x_0, y_0)$ ist regulär

Dann:

1) $\exists r, \rho > 0$: $\forall x \in B_r(x_0)$ $\exists! y = \tilde{y} \in B_\rho(y_0)$ mit $f(x, \tilde{y}(x)) = 0$ und $\tilde{y} : B_r(x_0) \to B_\rho(y_0)$ stetig

2) falls zusätzlich $f : D \to K^m$ stetig diffbar
$\Rightarrow$ auch $\tilde{y}$ stetig diffbar auf $B_r(x_0)$ mit

$$\tilde{y}'(x) = -\underbrace{f_y(x, \tilde{y}(x))^{-1}}_{m\times n} \cdot \underbrace{f_x(x, \tilde{y}(x))}_{m\times n} \quad \in K^{m\times n}$$

■ **Beispiel 12.2**
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2(1 - x^2) - y^2$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Offenbar ist

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x(1 - x^2) - 2x^3 = 2x - 4x^3 \\ f_y(x, y) &= -2y \end{aligned}$$

Suche Lösungen von $f(x, y) = 0$

- $y_0 = 0$: $f_y(x_0, 0) = 0$ nicht regulär $\Rightarrow$ Theorem nicht anwendbar
- $y_0 \neq 0$: $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, also regulär.
  Sei $f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ z.B. $(x_0, y_0) = (\frac{1}{3}, \frac{2\cdot\sqrt{2}}{9})$ ist Nullstelle von f
  $\Rightarrow \exists r, \rho > 0$, Funktion $\tilde{y} : f(x, \tilde{y}(x)) = 0$ $\forall x \in B_r(\frac{1}{3})$
  $\tilde{y}(\frac{1}{3}) = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{9}$ und $\tilde{y}(x)$ ist einzige Lösung um $B_\rho(\frac{2\sqrt{2}}{9})$
  $$\begin{aligned} \tilde{y}'\left(\frac{1}{3}\right) &= -f_y\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{9}\right)^{-1} \cdot f_x\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{9}\right) \\ &= -\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{27}\right) = \frac{7}{6\sqrt{2}} \approx 0,8 \end{aligned}$$
- $y_0 = 0$, $x_0 = 1$: hier ist $f_x(1, 0) = -2$, also regulär
  $\Rightarrow \exists$ lokale Lösung $\tilde{x}(y)$: $f(\tilde{x}(y), y) = 0$ $\forall y \in B_{\tilde{r}}(0)$ und $\tilde{x}'(0) = 0$
- $y_0 = 0$, $x_0 = 0$: $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ nicht regulär
  $\Rightarrow$ in keiner Variante Anwendbar.

Theorem 12.3 (Satz über inverse Funktionen)
Sei $f : U \subset K^n \to K^n$, U offen, f stetig diffbar, $f'(x)$ regulär für ein $x_0 \in U$
$\Rightarrow$ Es existiert eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von x_0, sodass $V_0 := f(U_0)$ offene Umgebung von $y_0 := f(x_0)$ ist, und die auf U_0 eingeschränkte Abbildung $f : U_0 \to V_0$ ist Diffeomorphismus.

Beweisidee. benutze $\tilde{f} : D \times K^n \to K^n$ und $\tilde{f}(x) = f(x) - y \Rightarrow$, $\tilde{f}$ stetig und stetig diffbar $\Rightarrow$ Satz über implizite Funktionen $\Rightarrow f'$ stetig diffbar $\Rightarrow f$ ist Diffeomorphismus □

Satz 12.4 (Ableitung der inversen Funktion)
Sei $f : D \subset K^n \to K^n$, D offen, f injektiv und diffbar, f^{-1} diffbar in $y \in \operatorname{int} f(D)$

$$\Rightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = f'\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}$$

(bzw. $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$ falls $y = f(x)$)

Spezialfall$n = m = 1$: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Beweisidee. benutze $f(f^{-1}(y)) = y$ und $f^{-1}(f(x)) = x$, Kettenregel, $f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = \text{id}$, andere Gleichung analog, gleichsetzen, Behauptung □

Satz 12.5
Sei $f : D \subset K^n \to K^n$, D offen, f stetig diffbar, $f'(x)$ regulär $\forall x \in D$

(a) (Satz über offene Abbildungen) $f(D)$ ist offen

(b) (Diffeomorphiesatz) f injektiv $\Rightarrow f : D \to f(D)$ ist Diffeomorphismus

Beweisidee.

(a) $M \subseteq D$ offen, $y_0 \in f(M) \Rightarrow \exists x_0 \in M : y_0 = f(x_0) \Rightarrow$ Satz über inverse Funktionen $\Rightarrow \exists V_0 \subseteq f(M)$ von $y_0 \Rightarrow$ Behauptung

(b) offenbar $\exists f^{-1} : f(D) \to D \Rightarrow$ Satz über inverse Funktionen $\Rightarrow f^{-1}$ stetig diffbar $\Rightarrow$ Behauptung □

13. Funktionsfolgen

Betrachte $f_k : D \subset K^n \to K^m$, D offen, f_k diffbar für $k \in \mathbb{N}$
Frage: Wann konvergiert $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen diffbare Funktion f mit $f_k' \to f'$

Satz 13.1 (Differentiation bei Funktionsfolgen)
Sei $f_k : D \subset K^n \to K^m$, D offen, beschränkt, f_k diffbar $\forall k$ und

(a) $f_k' \to: g$ gleichmäßig auf $B_r(x) \subset D$

(b) $\{f_k(x_0)\}_k$ konvergiert für ein $x_0 \in B_r(x)$

$\Rightarrow$ $f_k \to: f$ gleichmäßig auf $B_r(x)$ und f ist diffbar auf $B_r(x)$ mit

$$f_k'(y) \to f'(y) \quad \forall y \in B_r(x)$$

13.1. Anwendung auf Potenzreihen

Sei $f : B_R(x_0) \subset K \to K$ gegeben durch eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

Wiederholung: $R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

Satz 13.2
Sei $f : B_r(x_0) \subset K \to K$ Potenzreihe
$\Rightarrow$ f ist diffbar auf $B_r(x_0)$ mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in B_r(x_0)$$