# Lineare Algebra WS2017/18

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

18. Juni 2018

# *Inhaltsverzeichnis*

# Kapitel I

# *Grundbegriffe der Linearen Algebra*

## I.1. Logik und Mengen

Wir werden die Grundlagen der Logik und der Mengenlehre kurz ansprechen.

**Überblick (Aussagenlogik)**

Jede mathematisch sinnvolle Aussage ist entweder wahr oder falsch, aber nie beides!

- "$1+1=2$" $\to$ wahr
- "$1+1=3$" $\to$ falsch
- "Es gibt unendlich viele Primzahlen" $\to$ wahr

Man ordnet jeder mathematischen Aussage $A$ einen Wahrheitswert "wahr" oder "falsch" zu. Aussagen lassen sich mit logischen Verknüpfungen zu neuen Aussagen zusammensetzen.

- $\vee \to$ oder
- $\wedge \to$ und
- $\neg \to$ nicht
- $\Rightarrow \to$ impliziert
- $\iff \to$ äquivalent

Sind also $A$ und $B$ zwei Aussagen, so ist auch $A \vee B$, $A \wedge B$, $\neg A$, $A \Rightarrow B$ und $A \iff B$ Aussagen. Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist eindeutig bestimmt durch die Wahrheitswerte ihrer Einzelaussagen.

- $\neg(1+1=3) \to$ wahr
- "2 ist ungerade" $\Rightarrow$ "3 ist gerade" $\to$ wahr
- "2 ist gerade" $\Rightarrow$ "Es gibt unendlich viele Primzahlen" $\to$ wahr

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $\neg A$ | $A \Rightarrow B$ | $A \iff B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | f | w | w |
| w | f | w | f | f | f | f |
| f | w | w | f | w | w | f |
| f | f | f | f | w | w | w |

**Überblick (Prädikatenlogik)**
Wir werden die Quantoren

- $\forall$ (Allquantor, "für alle") und
- $\exists$ (Existenzquantor, "es gibt") verwenden.

Ist $P(x)$ eine Aussage, deren Wahrheitswert von einem unbestimmten $x$ abhängt, so ist
$\forall x : P(x)$ genau dann wahr, wenn $P(x)$ für alle $x$ wahr ist,
$\exists x : P(x)$ genau dann wahr, wenn $P(x)$ für mindestens ein $x$ wahr ist.

Insbesondere ist $\neg\forall x : P(x)$ genau dann wahr, wenn $\exists x : \neg P(x)$ wahr ist.
Analog ist $\neg\exists x : P(x)$ genau dann wahr, wenn $\forall x : \neg P(x)$ wahr ist.

**Überblick (Beweise)**
Unter einem Beweis verstehen wir die lückenlose Herleitung einer mathematischen Aussage aus einer Menge von Axiomen, Voraussetzungen und schon früher bewiesenen Aussagen.
Einige Beweismethoden:

- **Widerspruchsbeweis**
  Man nimmt an, dass eine zu beweisende Aussage $A$ falsch sei und leitet daraus ab, dass eine andere Aussage sowohl falsch als auch wahr ist. Formal nutzt man die Gültigkeit der Aussage $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B) \Rightarrow A$.
- **Kontraposition**
  Ist eine Aussage $A \Rightarrow B$ zu beweisen, kann man stattdessen die Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ beweisen.
- **vollständige Induktion**
  Will man eine Aussage $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen zeigen, so genügt es, zu zeigen, dass $P(1)$ gilt und dass unter der Induktionsbehauptung $P(n)$ stets auch $P(n+1)$ gilt (Induktionschritt). Dann gilt $P(n)$ für alle $n$.
  Es gilt also das Induktionsschema: $P(1) \wedge \forall n : (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall n : P(n)$.

**Überblick (Mengenlehre)**
Jede Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen. Eine Menge enthält also solche Objekte, die Elemente der Menge. Die Menge ist durch ihre Elemente vollständig bestimmt. Diese Objekte können für uns verschiedene mathematische Objekte, wie Zahlen, Funktionen oder andere Mengen sein. Man schreibt $x \in M$ bzw. $x \notin M$, wenn x ein bzw. kein Element der Menge ist.

Ist $P(x)$ ein Prädikat, so bezeichnet man eine Menge mit $X := \{x \mid P(x)\}$. Hierbei muss man vorsichtig sein, denn nicht immer lassen sich alle $x$ für die $P(x)$ gilt, widerspruchsfrei zu einer Menge zusammenfassen.

■ **Beispiel I.1.5 (endliche Mengen)**
Eine Menge heißt endlich, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält. Endliche Mengen notiert man oft in aufzählender Form: $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Hierbei ist die Reihenfolge der Elemente nicht relevant, auch nicht die Häufigkeit eines Elements.
Sind die Elemente paarweise verschieden, dann ist die Anzahl der Elemente die Mächtigkeit (oder Kardinalität) der Menge, die wir mit $|M|$ bezeichnen.

■ **Beispiel I.1.6 (unendliche Mengen)**

- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- Menge der natürlichen Zahlen mit der 0: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} := \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$
- Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl}\}$

Ist $M$ eine Menge, so gilt $|M| = \infty$

■ **Beispiel I.1.7 (leere Menge)**
Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente hat, die leere Menge $0 := \{\}$.

**Definition I.1.8 (Teilmenge)**
Sind $X$ und $Y$ zwei Mengen, so heißt $X$ eine Teilmenge von $Y$, wenn jedes Element von $X$ auch Element von $Y$ ist, dass heißt wenn für alle $x$ $(x \in X \Rightarrow x \in Y)$ gilt.

Da eine Menge durch ihre Elemente bestimmt ist, gilt $X = Y \Rightarrow (X \subset Y) \wedge (Y \subset X)$. Will man Mengengleichheit beweisen, so genügt es, die beiden Inklusionen $X \subset Y$ und $Y \subset X$ zu beweisen.

Ist $X$ eine Menge und $P(x)$ ein Prädikat, so bezeichnet man mit $Y := \{x \in X \mid P(x)\}$ die Teilmenge von $X$, die das Prädikat $P(x)$ erfüllen.

**Definition I.1.9 (Mengenoperationen)**
Seien $X$ und $Y$ Mengen. Man definiert daraus weitere Mengen wie folgt (Mengenoperationen):

- $X \cup Y := \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$
- $X \cap Y := \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$
- $X \backslash Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$
- $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$
- $\mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subset X\}$

Neben den offensichtlichen Mengengesetzen, wie dem Kommutativgesetz, gibt es auch weniger offensichtliche Gesetze, wie die Gesetze von DE MORGAN: Für $X_1, X_2 \subset X$ gilt:

- $X \backslash (X_1 \cup X_2) = (X \backslash X_1) \cap (X \backslash X_2)$
- $X \backslash (X_1 \cap X_2) = (X \backslash X_1) \cup (X \backslash X_2)$

Sind $X$ und $Y$ endliche Mengen, so gilt:

- $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$
- $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

# I.2. Abbildungen

**Überblick (Abbildungen)**

Eine Abbildung $f$ von eine Menge $X$ in einer Menge $Y$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ auf eindeutige Weise genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Man schreibt dies als

$$f : \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto y \end{cases}$$

oder $f : X \to Y, x \mapsto y$ oder noch einfacher $f : X \to Y$. Dabei heißt $X$ die Definitionsmenge und $Y$ die Zielmenge von $f$. Zwei Abbildungen heißen gleich, wenn ihre Definitionsmengen und Zielmengen gleich sind und sie jedem $x \in X$ das selbe Element $y \in Y$ zuordnen. Die Abbildungen von $X$ nach $Y$ bilden wieder eine Menge, welche wir mit $\mathrm{Abb}(X, Y)$ bezeichnen.

■ **Beispiel I.2.2**

- Abbildungen mit Zielmenge $\mathbb{R}$ nennt man Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- Abbildungen mit Zielmenge $\subset$ Definitionsmenge: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\leq 0}, x \mapsto x^2$
  $\to$ Diese Abbildungen sind verschieden, da sie nicht die selbe Zielmenge haben.
- $f : \{0, 1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
- $f : \{0, 1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$
  $\to$ Diese Funktionen sind gleich. Sie haben die gleichen Definitions- und Zielmengen und sie ordnen jedem Element der Definitionsmenge das gleiche Element der Zielmenge zu.

■ **Beispiel I.2.3**

- auf jeder Menge $X$ gibt es die identische Abbildung (Identität)
  $\mathrm{id} : X \to X, x \mapsto x$
- allgemein kann man zu jeder Teilmenge $A \subset X$ die Inklusionsabbildung zuordnen $\iota_A : A \to X, x \mapsto x$
- zu je zwei Mengen $X$ und $Y$ und einem festen $y_0 \in Y$ gibt es die konstante Abbildung $c_{y_0} : X \to Y x \mapsto y_0$
- zu jder Menge $X$ und Teilmenge $A \subset X$ definiert man die charakteristische Funktion
  $\chi_A : X \to \mathbb{R}, \begin{cases} x \mapsto 1 & (x \in A) \\ x \mapsto 0 & (x \notin A) \end{cases}$
- zu jeder Menge $X$ gibt es die Abbildung
  $f : X \times X \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \delta_{x,y} \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases}$

■ **Beispiel I.2.4 (Eigenschaften von Funktionen)**

- injektiv: Zuordnung ist eindeutig: $F(m_1) = F(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$
  Bsp: $x^2$ ist nicht injektiv, da $F(-2) = F(2) = 4$

- surjektiv: $F(M) = N$ $(\forall n \in N\ \exists m \in M \mid F(m) = n)$
  Bsp: $\sin(x)$ ist nicht surjektiv, da es kein $x$ für $y = 27$ gibt
- bijektiv: injektiv und surjektiv

■ **Beispiel I.2.5**

- Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist stets bijektiv.
- Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist die Inklusionsabbildung $\iota_A : A \to X$ injektiv, aber im Allgemeinen nicht surjektiv.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x \mapsto x^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$ ist bijektiv.

**Definition I.2.6 (Einschränkung)**
Sei $f : x \mapsto y$ eine Abbildung. Für $A \subset X$ definiert man die Einschränkung/Restrikton von $f$ auf $A$ als die Abbildung

$$f|_A : \begin{cases} A \to Y \\ a \mapsto f(a) \end{cases}$$

Das Bild von $A$ unter $f$ ist $f(A) := \{f(a) : a \in A\}$.
Das Urbild einer Menge $B \subset Y$ unter $f$ ist $f^{-1} := \{x \in X : f(x) \in B\}$.
Man nennt $\mathrm{Im}(f) := f(X)$ das Bild von $f$.

▶ **Bemerkung I.2.7**
Man ordnet der Abbildung $f : X \to Y$ auch die Abbildungen $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ und $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ auf den Potenzmengen zu. Man benutzt hier das gleiche Symbol $f(\dots)$ sowohl für die Abbildung $f : X \to Y$ als auch für $f : P(X) \to P(Y)$, was unvorsichtig ist, aber keine Probleme bereiten sollte.
In anderen Vorlesungen wird für $y \in Y$ auch $f^{-1}(y)$ statt $f^{-1}(\{y\})$ geschrieben.

▶ **Bemerkung I.2.8**
Genau dann ist $f : X \to Y$ surjektiv, wenn $\mathrm{Im}(f) = Y$

$$\text{Genau dann ist } f : X \to Y \begin{cases} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{cases} \text{, wenn } |f^{-1}(\{y\})| = \begin{cases} \leq 1 \\ \geq 1 \\ = 1 \end{cases} \qquad \forall y \in Y$$

**Definition I.2.9 (Komposition)**
Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, so ist die Komposition $g \circ f$ die Abbildung

$$g \circ f := \begin{cases} X \to Z \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Man kann die Komposition auffassen als eine Abbildung $\circ : \mathrm{Abb}(Y, Z) \times \mathrm{Abb}(X, Y) \to \mathrm{Abb}(X, Z)$.

**Satz I.2.10**
Die Abbildung von Kompositionen ist assoziativ, d.h. es gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

.

*Beweis.* Sowohl $h \circ (g \circ f)$ als auch $(h \circ g) \circ f$ haben die Definitionsmenge $X$ und die Zielmenge $W$ und für jedes $x \in X$ ist $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$. □

**Definition I.2.11 (Umkehrabbildung)**
Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x_y \in X$ mit $f(x_y) = y$ (Bemerkung I.2.7), durch

$$f^{-1} : \begin{cases} Y \to X \\ y \mapsto x_y \end{cases}$$

wird also eine Abbildung definiert, die Umkehrabbildung zu $f$.

**Satz I.2.12**
Ist die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv, so gelten

$$f^{-1} \circ f = id_x$$
$$f \circ f^{-1} = id_y$$

*Beweis.* Es ist $f^{-1} \in \mathrm{Abb}(X, X)$ und $f \circ f^{-1} \in \mathrm{Abb}(Y, Y)$. Für $y \in Y$ ist $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(y)) = y = \mathrm{id}_Y$. Für $x \in X$ ist deshalb $f((f^{-1} \circ f)(x)) = (f \circ (f^{-1} \circ f))(x) \overset{Satz\ I.2.10}{=} ((f \circ f^{-1}) \circ f)(x) = (\mathrm{id}_Y \circ f)(x) = f(x)$. Da $f$ injektiv, folgt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$. □

▶ **Bemerkung I.2.13**
Achtung, wir verwenden hier das selbe Symbol $f^{-1}$ für zwei verschiedene Dinge: Die Abbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ aus Definition I.2.6 existiert für jede Abbildung $f : X \to Y$, aber die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ aus Satz I.2.10 existiert nur für bijektive Abbildungen $f : X \to Y$.

**Definition I.2.14 (Familie)**
Seien $I$ und $X$ Mengen. Eine Abbildung $x : I \to X, i \mapsto x_i$ nennt man Familie von Elementen von $X$ mit einer Indexmenge I (oder I-Tupel von Elementen von $X$) und schreibt diese auch als $(x_i)_{i \in I}$. Im Fall $I = \{1, 2, ..., n\}$ identifiziert man die I-Tupel auch mit den n-Tupeln aus Definition I.1.8. Ist $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge $X$, so ist

- $\bigcup X_i = \{x \in X \mid \exists i \in I(x \in X)\}$
- $\bigcap X_i = \{x \in X \mid \forall i \in I(x \in X)\}$
- $\prod X_i = \{f \in \mathrm{Abb}(I, X) \mid \forall i \in I(f(i) \in X_i)\}$

Die Elemente von $\prod X_i$ schreibt man in der Regel als Familien $(x_i)_{i \in I}$.

■ **Beispiel I.2.15**
Eine Folge ist eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ mit der Indexmenge $\mathbb{N}_0$.

**Definition I.2.16 (Graph)**
Der Graph einer Abbildung $f : X \to Y$ ist die Menge

$$\Gamma f : \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

▶ **Bemerkung I.2.17 (Formal korrekte Definition einer Abbildung)**
Eine Abbildung $f$ ist ein Tripel $(X, Y, \Gamma)$, wobei $\Gamma \subset X \times Y \quad \forall x \in X$ genau ein Paar $(x, y)$ mit $y \in Y$ enthält. Die Abbildungsvorschrift schickt dann $x \in X$ auf das eindeutig bestimmte $y \in Y$ mit $(x, y) \in \Gamma$. Es ist dann $\Gamma = \Gamma_f$.

▶ **Bemerkung I.2.18**
In anderen Vorlesungen wird die Zielmenge nicht immer als Teil der Definition einer Abbildung aufgefasst, d.h. man betrachtet zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$ mit gleicher Definitionsmenge dann als gleich, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$. Dies ist gleichbedeutend mit $\Gamma_f = \Gamma_g$. So würde man dann zum Beispiel $f_1$ und $f_2$ aus Beispiel I.2.2 als gleich auffassen.

# I.3. Gruppen

**Definition I.3.1 ((Halb-)Gruppe)**
Sei $G$ eine Menge. Eine (innere, zweistellige) Verknüpfung auf $G$ ist eine Abbildung $* : G \times G \to G, (x, y) \mapsto x * y$. Das Paar $(G, *)$ ist eine Halbgruppe, wenn das folgende Axiom erfüllt ist:
(G1) Für $x, y, z \in G$ ist $(x * y) * z = x * (y * z)$.
Eine Halbgruppe $(G, *)$ ist ein Monoid, wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt:
(G2) Es gibt ein Element $e \in G$, welches für alle $x \in G$ die Gleichung $x * e = e * x = x$ erfüllt.
Dieses Element heißt dann neutrales Element der Verknüpfung $*$.

**Beispiel I.3.2**

- Für jede Menge $X$ ist $(\mathrm{Abb}(X, Y), \circ)$ eine Halbgruppe (Satz I.2.10) mit dem neutralen Element $\mathrm{id}_x$, also ein Monoid.
- $\mathbb{N}$ bildet mit der Addition eine Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$, aber kein Monoid, da die 0 nicht in Fehm's Definition der natürlichen Zahlen gehörte
- $\mathbb{N}_0$ bildet mit der Addition ein Monoid $(\mathbb{N}_0, +)$
- $\mathbb{N}$ bildet mit der Multiplikation ein Monoid $(\mathbb{N}, \cdot)$
- $\mathbb{Z}$ bildet mit der Multiplikation ein Monoid $(\mathbb{Z}, \cdot)$

**Satz I.3.3 (Eindeutigkeit des neutralen Elements)**
Ein Monoid $(G, *)$ hat genau ein neutrales Element.

*Beweis.* Nach Definition besitzt $(G, *)$ mindestens ein neutrales Element. Seien $e_1, e_2 \in G$ neutrale Elemente. Dann ist $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$. Damit besitzt $(G, *)$ höchstens ein neutrales Element, also genau ein neutrales Element. □

**Definition I.3.4 (abelsche Gruppe)**
Eine Gruppe ist ein Monoid $(G, *)$ mit dem neutralen Element $e$, in dem zusätzlich das folgende Axiom gilt:
(G3) Für jedes $x \in G$ gibt es ein $x' \in G$ mit $x' * x = x * x' = e$.
Gilt weiterhin
(G4) Für alle $x, y \in G$ gilt $x * y = y * x$, so heißt diese Gruppe abelsch.

Ein $x'$ heißt inverses Element zu $x$.

**Beispiel I.3.5**

- $\mathbb{N}_0$ bildet mit der Addition keine Gruppe $(\mathbb{N}_0, +)$
- $\mathbb{Z}$ bildet mit der Addition eine abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$
- Auch $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist keine Gruppe, aber $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ schon

**Satz I.3.6 (Eindeutigkeit des Inversen)**
Ist $(G, *)$ eine Gruppe, so hat jedes $x \in G$ genau ein inverses Element.

*Beweis.* Nach Definition hat jedes $x \in G$ mindestens ein Inverses. Seien $x', x'' \in G$ inverse Elemente zu $x$. Dann ist $x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$. Es gibt also genau ein Inverses zu $x$. □

■ **Beispiel I.3.7**

- Eine triviale Gruppe besteht nur aus ihrem neutralen Element. Tatsächlich ist $G = \{e\}$ mit $e * e = e$ eine Gruppe.
- Sei $X$ eine Menge. Die Menge $\mathrm{Sym}(X) := \{f \in \mathrm{Abb}(X, X) \mid f \text{ ist bijektiv}\}$ der Permutationen von $X$ bildet mit der Komposition eine Gruppe $(\mathrm{Sym}(X), \circ)$, die symmetrische Gruppe auf $X$. Für $n \in \mathbb{N}$ schreibt man $S_n := \mathrm{Sym}(\{1, 2, ..., n\})$. Für $n \geq 3$ ist $S_n$ nicht abelsch.

▶ **Bemerkung I.3.8**
Häufig benutzte Notationen für die Gruppenverknüpfung $\cdot$:

- In der multiplikativen Notation schreibt man $\cdot$ statt $*$ (oft auch $xy$ statt $x \cdot y$), bezeichnet das neutrale Element mit 1 oder $1_G$ und das Inverse zu $x$ mit $x^{-1}$.
- In der additiven Notation schreibt man $+$ für $*$, bezeichnet das neutrale Element mit 0 oder $0_G$ und das Inverse zu $x$ mit $-x$. Die additive Notation wird nur verwendet, wenn die Gruppe abelsch ist.

In abelschen Gruppen notiert man Ausdrücke auch mit dem Summen- und Produktzeichen.

**Satz I.3.9**
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Für $x, y \in G$ gelten

$$(x^{-1})^{-1} = x$$
$$(xy)^{-1} = x^{-1} \cdot x^{-1}$$

*Beweis.* Nach Definition erfüllt $z = x$ die Identitäten $x^{-1}z = zx^{-1} = 1$ und somit ist $(x^{-1})^{-1} = z = x$. Ebenso ist $(y^{-1}x^{-1}) \cdot (xy) = y^{-1}(x^{-1}x)y = 1$ und $(xy) \cdot (x^{-1}y^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = 1$, also $y^{-1}x^{-1} = (xy)^{-1}$. □

**Satz I.3.10**
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Für $a, b \in G$ haben die Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ eindeutige Lösungen in $G$, nämlich $x = a^{-1} \cdot b$ und $y = b \cdot a^{-1}$. Insbesondere gelten die folgenden Kürzungsregeln: $ax = ay \Rightarrow x = y$ und $xa = ya \Rightarrow x = y$.

*Beweis.* Es ist $a \cdot a^{-1} \cdot b = 1b = b$, also ist $x = a^{-1} \cdot b$ eine Lösung. Ist umgekehrt $ax = b$ mit $x \in G$, so ist $a^{-1} \cdot b = a^{-1} \cdot ax = 1x = x$ die Lösung und somit eindeutig. Für die zweite Gleichung argumentiert man analog. Den "Insbesondere"-Fall erhält man durch Einsetzen von $b = ay$ bzw. $b = xa$. □

▶ **Bemerkung I.3.11**

Wenn aus dem Kontext klar ist, welche Verknüpfung gemeint ist, schreibt man auch einfach $G$ anstatt $(G, \cdot)$ bzw. $(G, +)$. Eine Gruppe $G$ heißt endlich, wenn die Menge $G$ endlich ist. Die Mächtigkeit $|G|$ von $G$ nennt man dann die Ordnung von $G$. Eine endliche Gruppe kann durch ihre Verknüpfungstafel vollständig beschrieben werden.

■ **Beispiel I.3.12**

- die triviale Gruppe $G = \{e\}$

| $\cdot$ | $e$ |
|---|---|
| $e$ | $e$ |

- die Gruppe $\mu_2 = \{1, -1\}$ der Ordnung 2

| $\cdot$ | $1$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $-1$ |
| $-1$ | $-1$ | $1$ |

- die Gruppe $S_2 = \mathrm{Sym}(\{1, 2\}) = \{id_{\{1,2\}}, f\}$, wobei $f(1) = 2$ und $f(2) = 1$

| $\circ$ | $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ | $f$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ | $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $\mathrm{id}_{\{1,2\}}$ |

**Definition I.3.13 (Untergruppe)**

Eine Untergruppe einer Gruppe $(G, \cdot)$ ist eine nichtleere Teilmenge $H \subset G$, für die gilt:
(UG1) Für alle $x, y \in H$ ist $x \cdot y \in H$ (Abgeschlossenheit unter Multiplikation).
(UG2) Für alle $x \in H$ ist $x^{-1} \in H$ (Abgeschlossenheit unter Inversen).

**Satz I.3.14**

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq H \subset G$. Genau dann ist $H$ eine Untergruppe von $G$, wenn sich die Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$ zu einer Abbildung $\cdot_H : H \times H \to H$ einschränken lässt (d.h. $\cdot|_{H\times H} = \iota_H \circ \cdot_H$, wobei $\iota_H \cdot \cdot_H \to G$ die Inklusionsabbildung ist) und $(H, \cdot_H)$ eine Gruppe ist.

*Beweis.* $\Rightarrow$: Sei $H$ eine Untergruppe von $G$. Nach (UG1) ist $\mathrm{Im}(\cdot|_{H\times H}) \subset H$ und somit lässt sich $\cdot$ zu einer Abbildung $\cdot_H : H \times H \; toH$ einschränken. Wir betrachten jetzt $H$ mit dieser Verknüpfung. Da $G$ (G1) erfüllt, erfüllt auch H (G1). Da $H \neq \emptyset$ existiert ein $x \in H$. Nach (UG1) und (UG2) ist $x \cdot x^{-1} = e \in H$. Da $e_G \cdot y = y \cdot e_G = y$ für alle $y \in G$, insbesondere auch für alle $y \in H$ (G2). Wegen (UG2) erfüllt $H$ auch das Axiom (G3). $H$ ist somit eine Gruppe.
$\Leftarrow$: Sei nun umgekehrt $(H, \cdot_H)$ eine Gruppe. Für $x, y \in H$ ist dann $xy = x \cdot_H y \in H$, also erfüllt $H$ (UG1). Aus $e_H \cdot e_H = e_H = e_H \cdot e_G$ folgt $e_H = e_G$. Ist also $x'$ das Inverse zu $x$ aus der Gruppe $H$, so ist $x'x = xx' = e_G = e_H$, also $x^{-1} = x' \in H$ und somit erfüllt $H$ auch (UG2). Wir haben gezeigt, dass $H$ eine Untergruppe von $G$ ist. □

▶ **Bemerkung I.3.15**
Wir nennen nicht nur die Menge $H$ eine Untergruppe von $G$, sondern auch die Gruppe $(H, \cdot_H)$. Wir schreiben $H \leq G$.

■ **Beispiel I.3.16**

- Jede Gruppe $G$ hat die triviale Untergruppe $H = \{e_G\}$ und $H = G$
- Ist $H \leq G$ und $K \leq H$, so ist $K \leq G$ (Transitivität)
- Unter Addition ist $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ eine Kette von Untergruppen
- Unter Multiplikation ist $\mu_2 \leq \mathbb{Q}^+ \leq \mathbb{R}^+$ eine Kette von Untergruppen
- Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n\mathbb{Z} := \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}$

**Lemma I.3.17**
Ist $G$ eine Gruppe und $(H_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen von $G$, so ist auch $H := \bigcap H_i$ eine Untergruppe von $G$.

*Beweis.* Wir haben 3 Dinge zu zeigen

- $H \neq \emptyset$ : Für jedes $i \in I$ ist $e_G \in H$, also auch $e_G \in \bigcap H_i = H$
- (UG1): Seien $x, y \in H$. Für jedes $i \in I$ ist $x, y \in H_i$, somit $xy \in H_i$, da $H_i \leq G$. Folglich ist $xy \in \bigcap H_i = H$.
- (UG2): Sei $x \in H$. Für jedes $i \in I$ ist $x \in H_i$, somit $x^{-1} \in H_i$, da $H_i \leq G$. Folglich ist $x^{-1} \in \bigcap H_i = H$.

□

**Satz I.3.18**
Ist $G$ eine Gruppe und $X \subset G$. so gibt es eine eindeutig bestimmte kleinste Untergruppe $H$ von $G$, die $X$ enthält, d.h. $H$ enthält $X$ und ist $H'$ eine weitere Untergruppe von $G$, die $X$ enthält, so ist $H \subset H'$.

*Beweis.* Sei $\mathcal{H}$ die Menge aller Untergruppen von $G$, die $X$ enthalten. Nach Lemma I.3.17 ist $H := \bigcap \mathcal{H} := \bigcap H$ eine Untergruppe von $G$. Da $X \subset H'$ für jedes $H' \in \mathcal{H}$ ist auch $X \subset H$. Nach Definition ist $H$ in jedem $H' \leq G$ mit $X \subset H'$ enhalten. □

**Definition I.3.19 (erzeugte Untergruppe)**
Ist $G$ eine Gruppe und $X \leq G$, so nennt man diese kleinste Untergruppe von $G$, die $X$ enthält, die von $X$ erzeugte Untergruppe von $G$ und bezeichnet diese mit $\langle X \rangle$, falls $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ enthält auch mit $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$. Gibt es eine endliche Menge $X \subset G$ mit $G = \langle X \rangle$, so nennt man $G$ endlich erzeugt.

■ **Beispiel I.3.20**

- Die leere Menge $X = \emptyset \leq G$ erzeugt stets die triviale Untergruppe $\langle \emptyset \rangle = \{e\} \leq G$
- Jede endliche Gruppe $G$ ist endlich erzeugt $G = \langle G \rangle$
- Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle \leq \mathbb{Z}$. Nach Beispiel I.3.16 ist $n \in n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. Ist $H \leq \mathbb{Z}$ mit $n \in H$, so ist auch $kn = nk = n + n + ... + n \in H$ und somit auch $n\mathbb{Z} \leq H$.

# I.4. Ringe

**Definition I.4.1 (Ring)**
Ein Ring ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge $R$, einer Verknüpfung $+ : R \times R \to R$ (Addition) und einer anderen Verknüpfung $\cdot : R \times R \to R$ (Multiplikation), sodass diese zusammen die folgenden Axiome erfüllen:
(R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(R2) $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.
(R3) Für $a, x, y \in R$ gelten die Distributivgesetze $a(x + y) = ax + ay$ und $(x + y)a = xa + ya$.
Ein Ring heißt kommutativ, wenn $xy = yx$ für alle $x, y \in R$.
Ein neutrales Element der Multiplikation heißt Einselement von $R$.
Ein Unterring eines Rings $(R, +, \cdot)$ ist eine Teilmenge, die mit der geeigneten Einschränkung von Addition und Multiplikation wieder ein Ring ist.

▶ **Bemerkung I.4.2**
Hat ein Ring ein Einselement, so ist dieses eindeutig bestimmt. Notationelle Konfektionen: Das neutrale Element der Addition wird häufig mit 0 bezeichnet; die Multiplikation wird nicht immer notiert; Multiplikation bindet stärker als die Addition.
Wenn die Verknüpfungen aus dem Kontext klar sind, schreibt ma $R$ statt $(R, +, \cdot)$.

■ **Beispiel I.4.3**

- Der Nullring ist $R = \{0\}$ mit den einzig möglichen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $R$. Der Nullring ist sogar kommutativ und hat ein Einselement, nämlich die 0.
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement 1, ebenso $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
- $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring, aber ohne Einselement.

▶ **Bemerkung I.4.4**
Ist $R$ ein Ring, dann gelten die folgenden Aussagen für $x, y \in R$

- $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
- $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -xy$
- $(-x) \cdot (-y) = xy$

▶ **Bemerkung I.4.5**
Wir führen eine wichtige Klasse endlicher Ringe ein. Hierfür erinnern wir uns an eine der Grundlagen der Arithmetik in $\mathbb{Z}$.

**Theorem I.4.6**
Sei $b \neq 0 \in \mathbb{Z}$. Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$ ($r$ ist "Rest"), mit $a = qb + r$ und $0 \leq r < |b|$.

*Beweis.* Existenz und Eindeutigkeit

- Existenz: oBdA nehmen wir an, dass $b > 0$ (denn ist $a = qb + r$, so ist auch $a = (-q)(-b) + r$). Sei $q \in \mathbb{Z}$

die größte Zahl mit $q \leq \frac{a}{b}$, und sei $r = a - qb \in \mathbb{Z}$. Dann ist $a \leq \frac{a}{b} - q < 1$, woraus $0 \leq r < b$ folgt.

- Eindeutigkeit: Sei $a = qb + r = q'b + r'$ mit $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r, r' < |b|$. Dann ist $(q - q')b = r - r'$ und $|r - r'| < |b|$. Da $q - q' \in \mathbb{Z}$ ist, folgt $r - r' = 0$ und daraus wegen $b \neq 0$, dann $q - q' = 0$. □

■ **Beispiel I.4.7 (Restklassenring)**
Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$. Für $a \in \mathbb{Z}$ sei $\overline{a} := a + n\mathbb{Z} := \{a + nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ die Restklasse von "$a$ mod $n$".
Für $a, a' \in \mathbb{Z}$ sind äquivalent:

- $a + n\mathbb{Z} = a' + n\mathbb{Z}$
- $a' \in a + n\mathbb{Z}$
- $n$ teilt $a' - a$ (in Zeichen $n|a' - a$), d.h. $a' = a + nk$ für $k \in \mathbb{Z}$

*Beweis.*
- 1) ⇒ 2): klar, denn $0 \in \mathbb{Z}$
- 2) ⇒ 3): $a' \in a + n\mathbb{Z} \Rightarrow a' = a + nk$ mit $k \in \mathbb{Z}$
- 3) ⇒ 1): $a' = a + nk$ mit $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + n\mathbb{Z} = \{a + nk + nx \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{a + n(k + x) \mid x \in \mathbb{Z}\} = a + n\mathbb{Z}$

Insbesondere besteht $a + n\mathbb{Z}$ nur aus den ganzen Zahlen, die bei der Division durch $n$ den selben Rest lassen wie $a$. □

Aus Theorem I.4.6 folgt weiter, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}$ eine Menge der Mächtigkeit n ist (sprich: "$\mathbb{Z}$ mod $n\mathbb{Z}$").

Wir definieren Verknüpfungen auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ durch $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$, $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{ab}$ $a, b \in \mathbb{Z}$. Hierbei muss man zeigen, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind, also nicht von den gewählten Vertretern $a, b$ der Restklassen $\overline{a}$ und $\overline{b}$ abhängen. Ist etwa $\overline{a} = \overline{a'}$ und $\overline{b} = \overline{b'}$, also $a' = a + nk_1$ und $b' = b + nk_2$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, so ist
$a' + b' = a + b + n(k_1 + k_2)$, also $\overline{a' + b'} = \overline{a + b}$
$a' \cdot b' = ab + n(bk_1 + ak_2 + nk_1k_2)$, also $\overline{a'b'} = \overline{ab}$
Man prüft nun leicht nach, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit diesen Verknüpfungen ein kommutativer Ring mit Einselement ist, da dies auch für $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gilt. Das neutrale Element der Addition ist $\overline{0}$, das Einselement ist $\overline{1}$.

■ **Beispiel I.4.8**
Im Fall $n = 2$ ergeben sich die folgenden Verknüpfungstafeln für $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$

| $+$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2} = \overline{0}$ |

| $\cdot$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |

**Definition I.4.9 (Charakteristik)**
Sei $R$ ein Ring mit Einselement. Man definiert die Charakteristik von $R$ als die kleinste natürliche Zahl $n$ mit $1 + 1 + ... + 1 = 0$, falls so ein $n$ existiert, andernfalls ist die Charakteristik 0.

**Definition I.4.10 (Nullteiler)**
Sei $R$ ein Ring mit Einselement. Ein $0 \neq x \in R$ ist ein Nullteiler von $R$, wenn er ein $0 \neq y \in R$ mit $xy = 0$ oder $yx = 0$ gibt. Ein Ring ohne Nullteiler ist nullteilerfrei.

**Definition I.4.11 (Einheit)**
Sei $R$ ein Ring mit Einselement. Ein $x \in R$ heißt invertierbar (oder Einheit von $R$), wenn es ein $x' \in R$ mit $xx' = x'x = 1$ gibt. Wir bezeichnen die invertierten Elemente von $R$ mit $R^\times$.

**Beispiel I.4.12**

- reelle Zahlen sind ein nullteilerfreier Ring der Charakteristik 0 mit $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $\mathbb{Z}$ ist ein nullteilerfreier Ring der Charakteristik 0 mit $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein Ring der Charakteristik $n$. Ist $n$ keine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}$ nicht nullteilerfrei.

**Satz I.4.13**
Sei $R$ ein Ring mit Einselement.

- Ist $x \in R$ invertierbar, so ist $x$ kein Nullteiler in $R$.
- Die invertierbaren Elemente von $R$ bilden mit der Multiplikation eine Gruppe.

*Beweis.*

- Ist $xx' = x'x = 1$ und $xy = 0$ mit $x', y \in R$, so ist $0 = x' \cdot 0 = x \cdot xy = 1 \cdot y = y$, aber $y \neq 0$ für Nullteiler
- Sind $x, y \in R^\times$, also $xx' = x'x = yy' = y'y = 1$. Dann ist $(xy)(y'x') = x \cdot 1 \cdot x' = 1$ und $(y'x')(xy) = y' \cdot 1 \cdot y = 1$, somit $R^\times$ abgeschlossen unter der Multiplikation. Da $1 \cdot 1 = 1$ gilt, ist auch $1 \in R^\times$. Nach Definition von $R^\times$ hat jedes $x \in R^\times$ ein Inverses $x' \in R^\times$. □

# I.5. Körper

**Definition I.5.1 (Körper)**
Ein Körper ist ein kommutativer Ring $(K, +, \cdot)$ mit Einselement $1 \neq 0$, in dem jedes Element $x \neq x \in K$ invertierbar ist.

▶ **Bemerkung I.5.2**
Nach Satz I.4.13 ist ein Körper ist stets nullteilerfrei und $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. Ein Körper ist also ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge $K$ und 2 Verknüpfungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$, für die gelten:
(K1): $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe
(K2): $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe, deren neutrales Element wir mit 1 bezeichnen
(K3): Es gelten die Distributivgesetze.

▶ **Bemerkung I.5.3**
Sei $K$ ein Körper und $a, x, y \in K$. Ist $ax = ay$ und $a \neq 0$, so ist $x = y$.

**Definition I.5.4 (Teilkörper)**
Ein Teilkörper eines Körpers $(K, +, \cdot)$ ist die Teilemenge $L \subset K$, die mit der geeigneten Einschränkung von Addition und Multiplikation wieder ein Körper ist.

■ **Beispiel I.5.5**

- Der Nullring ist kein Körper.
- Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist ein Teilkörper des Körpers $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper

■ **Beispiel I.5.6 (Komplexe Zahlen)**
Wir definieren die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und darauf Verknüpfungen wie folgt: Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ ist:

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Wie man nachprüfen kann, ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper, genannt Körper der komplexen Zahlen. Da $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ und $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$, können wir $\mathbb{R}$ durch "$x = (x, 0)$" mit dem Teilkörper $\mathbb{R} \times \{0\}$ von $\mathbb{C}$ identifizieren.
Die imaginäre Einheit $i = (0, 1)$ erfüllt $i^2 = -1$ und jedes $z \in \mathbb{C}$ kann eindeutig geschrieben werden als $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

**Lemma I.5.7**
Sei $a \in \mathbb{Z}$ und sei $p$ eine Primzahl, die $a$ nicht teilt. Dann gibt es $b, k \in \mathbb{Z}$ mit $ab + kp = 1$.

*Beweis.* Sei $n \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl der Form $n = ab + kp$. Angenommen, $n \geq 2$. Schreibe $a = qp + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < p$ (??). Aus der Nichtteilbarkeit von $a$ folgt $r \neq 0$, also $r \in \mathbb{N}$. Wegen $r = a \cdot 1 - qp$ ist $n \leq r$. Da $p$ Primzahl ist und $2 \leq n \leq r < p$, gilt $n$ teilt nicht $p$. Schreibe $p = c \cdot n + m$ mit $c, m \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq m < n$ (??). Aus $n$ teilt nicht $p$ folgt $m \neq 0$, also $m \in \mathbb{N}$. Da $m = p - cn = -abc + (1 - kc)p$, ist $m < n$ ein

Widerspruch zur Minimalität von $n$. Die Annahme $n \geq 2$ war somit falsch. Es gilt $n = 1$. □

■ **Beispiel I.5.8 (Endliche Primkörper)**
Für jede Primzahl $p$ ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper. Ist $\overline{a} \neq \overline{0}$, so gilt $p$ teilt nicht $a$ und somit gibt es nach Lemma I.5.7 $b, k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} ab + kp &= 1 \\ \overline{(ab + kp)} = \overline{1} &= \overline{(ab)} = \overline{a} \cdot \overline{b} \end{aligned}$$

und somit ist $\overline{a}$ invertierbar in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Somit sind für $n \in \mathbb{N}$ äquivalent:

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein Körper
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei
- $n$ ist Primzahl

*Beweis.*
- 1 ⇒ 2: Satz I.4.13
- 2 ⇒ 3: Beispiel I.4.12
- 3 ⇒ 1: gegeben

Insbesondere ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nullteilerfrei, d.h. aus $p|ab$ folgt $p|a$ oder $p|b$. □

▶ **Bemerkung I.5.9**
Ist $K$ ein Körper und $a, b \in K$, $b \neq 0$, so schreiben wir $\frac{a}{b}$ für $ab^{-1} = b^{-1}a$. Es gelten die bekannten Rechenregeln für Brüche (vgl. Satz I.3.10):

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2} \\ \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \end{aligned}$$

# I.6. Polynome

In diesem Abschnitt sei $R$ ein kommutativer Ring mit Einselement.

▶ **Bemerkung I.6.1**
Unter einem Polynom in der "Unbekannte" $x$ versteht man einen Ausdruck der Form $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ mit $a_0, ..., a_n \in R$. Fasst man $x$ als ein beliebiges Element von $R$ auf, gelten einige offensichtliche Rechenregeln:
Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_kx^k$ so ist

- $f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)x^k$
- $f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_kx^k$ mit $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}$

Dies motiviert die folgende präzise Definition für den Ring der Polynome über $R$ in einer "Unbestimmten" $x$.

**Definition I.6.2 (Polynom)**
Sei $R[X]$ die Menge der Folgen in $R$ (siehe Bemerkung I.2.13), die fast überall 0 sind, also

$$R[X] := \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \mid \forall k(a_k \in R) \wedge \exists n_0 : \forall k > n_0(a_k = 0)\}$$

Wir definieren Addition und Multiplikation auf $R[X]$:

- $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} + (b_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$
- $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}$

Mit diesen Verknüpfungen wird $R[X]$ zu einem kommutativen Ring mit Einselement. Diesen Ring nennt man Polynomring (in einer Variablen $X$) über $R$. Ein $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in R[X]$ heißt Polynom mit den Koeffizienten $a_0, ..., a_n$. Wenn wir $a \in R$ mit der Folge $(a, 0, 0, ..., 0) := (a, \delta_{k,0})_{k\in\mathbb{N}_0}$ identifizieren, wird $R$ zu einem Unterrring von $R[X]$.

Definiert man $X$ als die Folge $(0, 1, 0, .., 0) := (\delta_{k,1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ (die Folge hat an der $k$-ten Stelle eine 1, sonst nur Nullen). Jedes $f(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_k = 0$ für $k > n_0$ lässt sich eindeutig schreiben als $f(X) = \sum_{k=0}^{n_0} a_kX^k$. Alternativ schreiben wir auch $f = \sum_{k\geq 0} a_kX^k$ mit dem Verständnis, dass diese unendliche Summe nur endlich von 0 verschiedene Summanden enthält.

Sei $0 \neq f(X) = \sum_{k\geq 0} a_kX^k \in R[X]$. Der Grad von $f$ ist das größte $k$ mit $a_k \neq 0$, geschrieben $\deg(f) := max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \neq 0\}$. Man definiert den Grad des Nullpolynoms als $\deg(0) = -\infty$, wobei $-\infty < k\forall k \in \mathbb{N}_0$ gelten soll. Man nennt $a_0$ den konstanten Term und $a_{\deg(f)}$ den Leitkoeffizienten von $f$. Hat $f$ den Grad 0, 1 oder 2, so nennt man $f$ konstant, linear bzw. quadratisch.

■ **Beispiel I.6.3**
Das lineare Polynom $f(X) = X - 2 \in R[X]$ hat den Leitkoeffizient 1 und den konstanten Term $-2$.

**Satz I.6.4**
Seien $f, g \in R[X]$

- Es ist $\deg(f+g) \leq max\{\deg(f), \deg(g)\}$.
- Es ist $\deg(f \cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g)$.
- Ist $R$ nullteilerfrei, so ist $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$ und auch $R[X]$ ist nullteilerfrei.

*Beweis.*
- offenbar
- Ist $\deg(f) = n$ und $\deg(g) = m$, $f = \sum_{i \geq 0} f_i X^i$, $g = \sum_{j \geq 0} g_j X^j$, so ist auch $h = fg = \sum_{k \geq 0} h_k X^k$ mit $h_k = \sum_{i+j=k} f_i \cdot g_j$ für alle $k \geq 0$. Ist $k > n+m$ und $i+j = k$, so ist $i > n$ oder $j > m$, somit $f_i = 0$ oder $g_j = 0$ und somit $h_k = 0$. Folglich ist $\deg(h) \leq n+m$.
- Ist $f = 0$ oder $g = 0$, so ist die Aussage klar, wir nehmen als $n, m \geq 0$ an. Nach b) ist $\deg(h) \leq n+m$ und $h_{m+n} = \sum_{i+j=n+m} f_i g_j = f_n g_m$. Ist $R$ nullteilerfrei, so folgt aus $f_n \neq 0$ und $g_m \neq 0$ schon $f_n g_m \neq 0$, und somit $\deg(h) = n+m$. □

**Theorem I.6.5 (Polynomdivision)**
Sei $K$ ein Körper und sei $0 \neq g \in K[X]$. Für jedes Polynom $f \in K[X]$ gibt es eindeutig bestimmte $g, h, r \in K[X]$ mit $f = gh + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$.

*Beweis.* Existenz und Eindeutigkeit

- Existenz: Sei $n = \deg(f)$, $m = \deg(g)$, $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $g = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$
  Induktion nach $n$ bei festem $g$.
  IA: Ist $n < m$, so wählt man $h = 0$ und $r = f$.
  IB: Wir nehmen an, dass die Aussage für alle Polynome vom Grad kleiner als $n$ gilt.
  IS: Ist $n \geq m$, so betrachtet man $f_1 = f - \frac{a_n}{b_m} \cdot X^{n-m} \cdot g(X)$. Da $\frac{a_n}{b_m} \cdot X^{n-m} \cdot g(X)$ ein Polynom vom Grad $n - m + \deg(g) = n$ mit Leitkoeffizient $\frac{a_n}{b_m} \cdot b_m = a_n$ ist, ist $\deg(f_1) < n$. Nach IB gibt es also $h_1, r_1 \in K[X]$ mit $f_1 = gh_1 + r_1$ und $\deg(r) < \deg(g)$. Somit ist $f(X) = f_1(X) + \frac{a_n}{b_m} \cdot X^{n-m} \cdot g(X) = gh + r$ mit $h(X) = h_1(X) + \frac{a_n}{b_m} \cdot X^{n-m}, r = r_1$.
- Eindeutigkeit: Sei $n = \deg(f), m = \deg(g)$. Ist $f = gh + r = gh' + r'$ und $\deg(r), \deg(r') < m$, so ist $(h - h')g = r' - r$ und $\deg(r' - r) < m$. Da $\deg(h - h') = \deg(h' - h) + m$ muss $\deg(h - h') < 0$, also $h' - h = 0$ sein. Somit $h' = h$ und $r' = r$. □

► **Bemerkung I.6.6**
Der Existenzbeweis durch Induktion liefert uns ein konstruktives Verfahren, diese sogenannte Polynomdivision durchzuführen.

■ **Beispiel**
in $\mathbb{Q}[X]$: $(x^3 + x^2 + 1) : (x^2 + 1) = x + 1$ Rest $-x$

**Definition I.6.7 (Nullstelle)**
?? Sei $f(X) = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert man die Auswertung von $f$ in $\lambda$ $f(\lambda) = \sum_{k\geq 0} a_k \lambda^k \in \mathbb{R}$. Das Polynom $f$ liefert auf diese Weise eine Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\lambda \mapsto f(\lambda)$. Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(\lambda) = 0$ ist eine Nullstelle von $f$.

**Lemma I.6.8**
Für $f, g \in \mathbb{R}[X]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$i ist

$$(f+g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$$
$$(fg)(\lambda) = f(\lambda) \cdot g(\lambda)$$

*Beweis.* Ist $f = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ und $g = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$, so ist

$$\begin{aligned} f(\lambda) + g(\lambda) &= \sum_{k\geq 0} a_k \lambda^k + \sum_{k\geq 0} b_k \lambda^k \\ &= \sum_{k\geq 0} (a_k + b_k)\lambda^k \\ &= (f+g)(\lambda) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(\lambda) \cdot g(\lambda) &= \sum_{k\geq 0} a_k \lambda^k \cdot \sum_{k\geq 0} b_k \lambda^k \\ &= \sum_{k\geq 0} \sum_{i+j=k} (a_i + b_j)\lambda^k \\ &= (fg)(\lambda) \end{aligned}$$

□

**Satz I.6.9**
Ist $K$ ein Körper und $\lambda \in K$ eine Nullstelle von $f \in K[X]$ so gibt es ein eindeutig bestimmtes $h \in K[X]$ mit $f(X) = (X - \lambda) \cdot h(x)$.

*Beweis.* Nach Theorem I.6.5 gibt es gibt $h, r \in K[X]$ mit $f(X) = (X-\lambda)\cdot h(x) + r(x)$ und $\deg(r) < \deg(X-\lambda) = 1$, also $r \in K$. Da $\lambda$ Nullstelle von $f$ ist, gilt $0 = f(\lambda) = (\lambda - \lambda) \cdot h(\lambda) + r(\lambda) = r(\lambda)$ nach Lemma I.6.8. Hieraus folgt $r = 0$. Eindeutigkeit folgt aus Eindeutigkeit in Theorem I.6.5. □

**Folgerung I.6.10**
Sei $K$ ein Körper. Ein Polynom $0 \neq f \in K[X]$ hat höchstens $\deg(f)$ viele Nullstellen.

*Beweis.* Induktion nach $\deg(f) = n$
Ist $n = 0$, so ist $f \in K^\times$ und hat somit keine Nullstellen.
Ist $n > 0$ und hat f eine Nullstelle $\lambda \in K$, so ist $f(X) = (X - \lambda) * h(x)$ mit $h(x) \in K[X]$ und $\deg(f) = \deg(X - \lambda) + \deg(h) = n - 1$. Nach IV besitzt $h$ höchstens $\deg(h) = n - 1$ viele Nullstellen. Ist $\lambda'$ eine Nullstelle von $f$, so ist $0 = f(\lambda') = (\lambda' - \lambda) * h(\lambda')$, also $\lambda' = \lambda$ oder $\lambda'$ ist Nullstelle von $h$. Somit hat $f$ höchstens $n$ viele Nullstellen in $K$. □

**Folgerung I.6.11**
Ist $K$ ein unendlicher Körper, so ist die Abbildung $K[X] \to \mathrm{Abb}(K, K)$ und $f \mapsto \tilde{f}$ injektiv.

*Beweis.* Sind $f, g \in K[X]$ mit $\tilde{f} = \tilde{g}$, also $f(\lambda) = g(\lambda)$ für jedes $\lambda \in K$, so ist jedes $\lambda$ Nullstelle von $h := f - g \in K[X]$. Da $|K| = \infty$ ist, so ist $h = 0$, also $f = g$. □

▶ **Bemerkung I.6.12**

Dieses Korollar besagt uns, dass man über einem unendlichen Körper Polynome als polynomiale Abbildungen auffassen kann. Ist $K$ aber endlich, so ist dies im Allgemeinen nicht richtig. Beispiel: $K = \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$, $f(X) = X$, $g(X) = X^2 \Rightarrow f \neq g$, aber $\tilde{f} = \tilde{g}$.

■ **Beispiel I.6.13**

Sei $f(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$

In $K = \mathbb{R}$ hat $f$ keine Nullstelle: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(\lambda) = \lambda^2 + 1 \geq 1 > 0$.

In $K = \mathbb{C}$ hat $f$ die beiden Nullstellen $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$ und zerfällt dort in Linearfaktoren: $f(X) = (X - i)(X + i)$.

**Satz I.6.14**

Für einen Körper $K$ sind äquivalent:

- Jedes Polynom $f \in K[X]$ mit $\deg(f) > 0$ hat eine Nullstelle in $K$.
- Jedes Polynom $f \in K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren, also $f(X) = a \cdot \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ mit $n = \deg(f), a, \lambda_i \in K$.

*Beweis.*

- $1 \Rightarrow 2$ : Induktion nach $n = \deg(f)$

  Ist $n \leq 0$, so ist nichts zu zeigen.

  Ist $n > 0$, so hat $f$ eine Nullstelle $\lambda_n \in K$, somit $f(X) = (X - \lambda_n) \cdot g(X)$ mit $g(X) \in K[X]$ und $\deg(g) = n - 1$, Nach IV ist $g(X) = a \cdot \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Nach Satz I.6.9 ist $f(X) = a \cdot \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.
- $2 \Rightarrow 1$ : Sei $f \in K[X]$ mit $n = \deg(f) > 0$. Damit gilt $f(X) = a \cdot \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Da $n > 0$, hat $f$ z.B. die Nullstelle $\lambda_1$. □

**Definition I.6.15 (algebraisch abgeschlossen)**

Ein Körper $K$ heißt algebraisch abgeschlossen, wenn er eine der äquivalenten Bedingungen erfüllt.

**Theorem I.6.16 (Fundamentalsatz der Algebra)**

Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

▶ **Bemerkung I.6.17**

Wir werden das Theorem zwar benutzen, aber nicht beweisen.

# Kapitel II

# *Vektorräume*

## II.1. Definition und Beispiele

In diesem Kapitel sei $K$ ein Körper.

■ **Beispiel II.1.1**

Ist $K = \mathbb{R}$, so haben wir für $K^3 = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ eine geometrische Anschauung, nämlich den euklidischen Raum. Welche algebraische Struktur können wir hierauf sinnvollerweise definieren?

**Definition II.1.2 (Vektorraum)**

Ein $K$-Vektorraum (auch Vektorraum über $K$) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge $V$, einer Verknüpfung $+ : V \times V \to V$, genannt Addition, und einer Abbildung $\cdot : K \times V \to V$, genannt Skalarmultiplikation, für die gelten:

(V1): $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

(V2): Addition und Skalarmultiplikation sind verträglich:

- $\lambda(x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$
- $(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$
- $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$
- $1 \cdot x = x$

▶ **Bemerkung II.1.3**

Wir haben sowohl im Körper $K$ als auch im Vektorraum $V$ eine Addition definiert, die wir mit dem selben Symbol + notieren. Ebenso benutzen wir das Symbol $\cdot$ sowohl für die Multiplikation im Körper $K$ als auch für die Skalarmultiplikation. Zur Unterscheidung nennt man die Elemente von $V$ Vektoren und die Elemente von $K$ Skalare. Wir werden bald auch den Nullvektor mit 0 bezeichnen, also mit dem selben Symbol wie das neutrale Element im Körper $K$. Auch für Vektorräume gibt es notationelle Konvektionen: So bindet die Skalarmultiplikation stärker als die Addition und wird manchmal nicht notiert.

■ **Beispiel II.1.4**

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $V = K^n := \prod_{i=1}^{n} K = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1, x_2, .., x_n \in K\}$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda \cdot x_1, ..., \lambda \cdot x_n)$ ein $K$-Vektorraum, genannt der ($n$-dimensionale) Standardraum über $K$.

Insbesondere (Spezialfall $n = 1$) ist $K$ ein $K$-Vektorraum.

Für $n = 0$ definiert man $K^0$ als Nullraum $V = \{0\}$, der einzig möglichen Addition und Skalarmultiplikation einen $K$-Vektorraum bildet.

**Satz II.1.5**
ist $V$ ein $K$-Vektorraum, so gelten für $\lambda \in K$ und $x \in V$:

- $0 \cdot x = 0$
- $\lambda \cdot 0 = 0$
- $(-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -\lambda \cdot x$. Insbesondere $(-1)x = -x$
- Ist $\lambda \cdot x = 0$, so ist $\lambda = 0$ oder $x = 0$

*Beweis.*
- Es ist $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, woraus $0 = 0 \cdot x$
- Es ist $\lambda \cdot 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda \cdot 0 + 0 \cdot \lambda$, woraus $0 = \lambda \cdot 0$
- Es ist $\lambda \cdot x + (-\lambda \cdot x) = (\lambda + (-\lambda)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$, also $(-\lambda)x = -(\lambda x)$
- Ist $\lambda \cdot x = 0$ und $\lambda \neq 0$, so ist $0 = \lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot x = 1 \cdot x = x$ □

■ **Beispiel II.1.6**
- Schränkt man die Multiplikation im Polynomring $K[X] \times K[X] \to K[X]$ zu einer Abbildung $K \times K[X] \to K[X]$ ein, so wird $K[X]$ mit dieser Skalarmultiplikation zu einem $K$-Vektorraum. Die Skalarmultiplikation ist also gegen $\lambda \cdot \sum_{k \geq 0} a_k \cdot X^k = \sum_{k \geq 0} \lambda \cdot a_k \cdot X^k$ ersetzt wurden.
- Schränkt man die komplexe Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu einer Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein, so wird $\mathbb{C}$ mit dieser Skalarmultiplikation zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Skalarmultiplikation ist gegeben durch $\lambda(x + iy) = \lambda \cdot x + i \cdot \lambda \cdot y$.
- Verallgemeinerung von 1 und 2: Ist der Körper $K$ ein Unterring eines kommutativen Rings $R$ mit Einselement $1_K \in K$, so wird $R$ durch Einschränkung der Multiplikation $R \times R \to R$ zu einer Abbildung $K \times R \to R$ zu einem $K$-Vektorraum.
- Ist $X$ eine Menge, so wird die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(X, K)$ durch punktweise Addition $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und die Skalarmultiplikation $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ zu einem $K$-Vektorraum. Im Spezialfall $X = \{1, 2, ..., n\}$ erhält man den Standardraum $K^n$.

**Definition II.1.7 (Untervektorraum)**
Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Ein Untervektorraum (Untervektorraum) von $V$ ist eine nichtleere Teilmenge $W \subseteq V$ mit:
(UV1): Für $x, y \in W$ ist $x + y \in W$.
(UV2): Für $x \in W$ und $\lambda \in K$ ist $\lambda \cdot x \in W$.

**Satz II.1.8**
Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $W \subseteq V$. Genau dann ist $W$ ein Untervektorraum von $V$, wenn $W$ mit geeigneter Einschränkung der Addition und Skalarmultiplikation wieder ein $K$-Vektorraum ist.

*Beweis.*
- $\Rightarrow$: Lassen sich $+: V \times V \to V$ und $\cdot: K \times V \to V$ einschränken zur Abbildung $+_w: W \times W \to W$, $\cdot_w: K \times W \to W$ so gilt für $x, y \in W$ und $\lambda \in K$: $x + y = x +_w y \in W$ und $\lambda \cdot x = \lambda \cdot_w x \in W$. Ist $(W, +_w, \cdot_w)$ ein $K$-Vektorraum, so ist insbesondere $W$ nicht leer. Somit ist $W$ ein Untervektorraum.
- $\Leftarrow$: Nach (UV1) und (UV2) lassen sich $+$ und $\cdot$ einschränken zu Abbildungen $+_w: W \times W \to W$ und $\cdot_w: K \times W \to W$. Nach (UV1) ist abgeschlossen und unter der Addition und für $x \in W$ ist auch $-x =$

$(-1)x \in W$ nach (UV2), $W$ ist somit Untergruppe von $(V,+)$. Insbesondere ist $(W,+)$ eine abelsche Gruppe (Satz I.I.3.14), erfüllt also (V1). Die Verträglichkeit (V2) ist für $\lambda, \mu \in K$ und $x, y \in W$ gegeben, da sie auch für $x, y \in V$ erfüllt ist. Somit ist $(W, +_w, \cdot_w)$ ein $K$-Vektorraum. □

■ **Beispiel II.1.9**

- Jeder $K$-Vektorraum hat triviale Untervektorraum $W = \{0\}$ und $W = V$
- Ist $V$ ein $K$-Vektorraum und $x \in V$, so ist $W = K \cdot x = \{\lambda \cdot x \mid \lambda \in K\}$ ein Untervektorraum von $V$. Insbesondere besitzt z.B. der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ unendlich viele Untervektorraum, nämlich alle Ursprungsgeraden. Hieran sehen wir auch, dass die Vereinigung zweier Untervektorraum im Allgemeinen kein Untervektorraum ist. $\mathbb{R} \cdot (1,0) \cup \mathbb{R} \cdot (1,0) \subseteq \mathbb{R}^2$ verletzt (UV1).
- Der $K$-Vektorraum $K[X]$ hat unter anderem die folgenden Untervektorraum:
  - Den Raum $K$ der konstanten Polynome
  - Den Raum $K[X]_{\leq 1} = \{aX + b \mid a, b \in K\}$ der linearen (oder konstanten) Polynome
  - allgemeiner den Raum $K[X]_{\leq n} = \{f \in K[X] \mid \deg(f) \leq n\}$ der Polynome von höchstens Grad $n$
- In der Analysis werden Sie verschiedene Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kennenlernen, etwa den Raum $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen und den Raum $\mathcal{C}^{-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen. Die Menge der Polynomfunktionen $\{\tilde{f} \mid \tilde{f} \in \mathbb{R}[X]\}$ (vgl. ??) bildet einen Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}^{-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

**Lemma II.1.10**
Ist $V$ ein Vektorraum und $(W_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorraum von $V$, so ist auch $W = \bigcap W_i$ ein Untervektorraum von $V$.

*Beweis.* Da $0 \in W_i$ ist auch $0 \in W$, insbesondere $W \neq \emptyset$.

- (UV1): Sind $x, y \in W$, so ist auch $x, y \in W_i$ und deshalb $x + y \in \bigcap W_i = W$.
- (UV2): Ist $x \in W$ und $\lambda \in K$, so ist auch $x \in W_i$ und somit $\lambda x \in \bigcap W_i = W$. □

**Satz II.1.11**
Ist $V$ ein $K$-Vektorraum und $X \subseteq V$, so gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten Untervektorraum $W$ von $V$ mit $X \subseteq W$.

*Beweis.* Sei $\mathcal{V}$ die Menge aller Untervektorraum von $X$, die $X$ enthalten. Sei $W = \bigcap \mathcal{V}$. Damit ist $W$ ein Untervektorraum (Lemma II.1.10) von $V$ der $X$ enthält. □

**Definition II.1.12 (Erzeugendensystem)**
Ist $V$ ein $K$-Vektorraum und $X \subseteq V$, so nennt man den kleinsten Untervektorraum von $V$, der $X$ enthält den von $X$ erzeugten Untervektorraum von $V$ und bezeichnet diesen mit $\langle X \rangle$. Eine Mengen $X \subseteq V$ mit $\langle X \rangle = V$ heißt Erzeugendensystem von $V$. Der Vektorraum $V$ heißt endlich erzeugt, wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

# II.2. Linearkombinationen

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum.

**Definition II.2.1 (Linearkombination)**

- Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Ein $x \in V$ ist eine Linearkombination eines $n$-Tupels $(x_1, ..., x_n)$ von Elementen von $V$, wenn es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ gibt mit $x = \lambda_1 \cdot x_1, ..., \lambda_n \cdot x_n$. Der Nullvektor ist stets eine Linearkombination von $(x_1, ..., x_n)$ auch wenn $n = 0$.
- Ein $x \in V$ ist eine Linearkombination einer Familie $(x_i)$ von Elementen von $V$, wenn es $n \in \mathbb{N}_0$ und $i_1, ..., i_n \in I$ gibt, für die $x$ Linearkombination von $(x \cdot i_1, ..., x \cdot i_n)$ ist.
- Die Menge aller $x \in V$, die Linearkombination von $\mathcal{F} = (x_i)$ sind, wird mit $\text{span}_K(\mathcal{F})$ bezeichnet.

▶ **Bemerkung II.2.2**

- Offenbar hängt die Menge der Linearkombinationen von $(x_1, ..., x_n)$ nicht von der Reihenfolge der $x_i$ ab. Wegen (V2)(ii) hängt sie sogar nur von der Menge $\{x_1, ..., x_n\}$ ab.
- Deshalb stimmt 2. für endliche Familien $(x_1, ..., x_n)$ mit 1. überein.
- Auch die Menge der Linearkombinationen einer Familie $\mathcal{F} = (x_1, ..., x_n)$ hängt nur von der Menge $X = \{x_i \mid i \in I\}$ ab. Man sagt deshalb auch, $x$ ist Linearkombination von $X$ und schreibt $\text{span}_K(X) = \text{span}_K(\mathcal{F})$, also $\text{span}_K(X) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot n_i \mid n \in \mathbb{N}_0, x_i \in X, \lambda_1, ..., \lambda_n \in K\}$. Nach Definition in $0 \in \text{span}_K(X)$ auch für $X = \emptyset$.
- Wie schon bei Polynomen schreibt man hier gerne formal unendliche Summen $x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i$, bei denen nur endlich viele $\lambda_i$ von 0 verschieden sind.

**Lemma II.2.3**
Für jede Teilmenge $X \subseteq V$ ist $\text{span}_K(X)$ ein Untervektorraum von $V$.

*Beweis.*
- Sei $W = \text{span}_K(X)$. Nach Definition ist $0 \in W$, insbesondere $W \neq \emptyset$
- (UV1): Sind $x, y \in W$, also $x = \lambda_1 \cdot x + ... + \lambda_n \cdot x_n$ und $y = \mu_1 \cdot x + ... + \mu_n \cdot x_n$, so ist $x + y = (\lambda_1 + \mu_1)x_1 + ... + (\lambda_n + \mu_n)x_n \in W$
- (UV2): Ist $\lambda \in K$ und $x \in W$, so ist $\lambda x = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot \lambda_i)x_i \in W$ □

**Satz II.2.4**
Für jede Teilmenge $X \subseteq V$ ist $\text{span}_K(X) = \langle X \rangle$.

*Beweis.*
- $\text{span}_K(X)$ ist Untervektorraum von $V$, der wegen $x = x \cdot 1$ die Menge $X$ enthält, und $\langle X \rangle$ ist der kleinste solche.
- Ist $W \subseteq V$ ein Untervektorraum von $V$, der $X$ enthält, so enthält er auch wegen (UV2) alle Elemente der Form $\lambda \cdot x$, und wegen (UV1) dann auch alle Linearkombinationen aus $X$. Insbesondere gilt dies auch für $W = \langle X \rangle$ □

▶ **Bemerkung II.2.5**

Wir erhalten $\text{span}_K(X) = \langle X \rangle$ auf 2 verschiedenen Wegen. Erstens "von oben" als Schnitt über alle Untervektorraum von $V$, die $X$ enthalten und zweitens "von unten" als Menge der Linearkombinationen. Man nennt $\text{span}_K(X)$ auch den von $X$ aufgespannten Untervektorraum oder die lineare Hülle von $X$.

■ **Beispiel II.2.6**

- Sei $V = K^n$ der Standardraum. Für $i = 1, ..., n$ sei $e_i = (\delta_{i,1}, ..., \delta_{i,n})$, also $e_1 = (1, 0, ...0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 1)$. Für $x = (x_1, ..., x_n) \in V$ ist $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_1$, folglich $\text{span}_K(e_1, .., e_n) = V$. Insbesondere ist $K^n$ eindeutig erzeugt. Man nennt $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis des Standardraums $K^n$.

- Sei $V = K[X]$ Polynomring über $K$. Da $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X^i$ ist $\text{span}_K((X^i)_{i \in I}) = K[X]$. Genauer ist $\text{span}_K(1, X, X^2, ..., X^n) = K[X]_{\leq n}$. Tatsächlich ist der $K$-Vektorraum $K[X]$ nicht endlich erzeugt. Sind $f_1, ..., f_r \in K[X]$ und ist $d = \max\{\deg(f_1), ..., \deg(f_r)\}$, so sind $f_1, ..., f_r \in K[X]_{\leq d}$ und somit $\text{span}_K(f_1, ..., f_r) \subseteq K[X]_{\leq d}$, aber es gibt Polynome, deren Grad größer $d$ ist.

- Für $x \in V$ ist $\langle x \rangle = \text{span}_K(x) = K \cdot x$. Im Fall $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$ ist dies eine Ursprungsgerade.

- Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist $\text{span}_{\mathbb{R}}(1) = \mathbb{R} \cdot 1 = \mathbb{R}$, aber im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist $\text{span}_{\mathbb{C}}(1) = \mathbb{C} \cdot 1 = \mathbb{C}$

**Definition II.2.7 (linear (un)abhängig)**

- Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Ein $n$-Tupel $(x_1, ..., x_n)$ von Elementen von $V$ ist linear abhängig, wenn es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ gibt, die nicht alle 0 sind und $\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_n \cdot x_n = 0$ (*) erfüllen. Andernfalls heißt das Tupel linear unabhängig.

- Eine Familie $(x_i)$ von Elementen von $V$ ist linear abhängig, wenn es $n \in \mathbb{N}_0$ und paarweise verschiedene $i_1, ..., i_n \in I$ gibt, für die $(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ linear abhängig ist. Andernfalls linear unabhängig.

▶ **Bemerkung II.2.8**

- Offenbar hängt die Bedingung (*) nicht von der Reihenfolge der $x_1, ..., x_n$ ab und ist $(x_1, ..., x_k)$ linear abhängig für ein $k \leq n$, so ist auch $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig. Deshalb stimmt die 2. Definition für endliche Familien mit der 1. überein und $(x_i)$ ist genau dann linear abhängig, wenn es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gibt, für die $(x_j)$ linear abhängig ist.

- Eine Familie ist genau dann linear unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ und für jede Wahl an Skalaren $(\lambda_i)_{i \in J}$ aus $\sum \lambda_i \cdot x_i = 0$ schon $\lambda_i = 0$ folgt, also wenn sich der Nullvektor nur trivial linear kombinieren lässt.

**Satz II.2.9**

Genau dann ist $(x_i)$ linear abhängig, wenn es $i_0 \in I$ gibt mit $x_{i_0} \in \text{span}_K((x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})$. In diesem Fall ist $\text{span}_K((x_i)_{i \in I}) = \text{span}_K((x_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})$.

*Beweis.* Es reicht, die Aussage für $I = \{1, ..., n\}$ zu beweisen.

- Hinrichtung: Ist $(x_1, ..., x_n)$ linear anhängig, so existieren $\lambda_1, ..., \lambda_n$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0$. oBdA. sei $\lambda_n \neq 0$. Dann ist $x_n = \lambda_n^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n^{-1} \cdot \lambda_i \cdot x_i \in \text{span}_K(x_1, ..., x_n)$.
- Rückrichtung: oBdA. $i_0 = n$, also $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot x_i$. Mit $\lambda_n = -1$ ist $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0$, was zeigt, dass $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig ist.
  Sei nun $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot x_i \in \text{span}_K(x_1, ..., x_{n-1})$. Wir zeigen, dass $\text{span}_K(x_1, ..., x_{n-1}) = \text{span}_K(x_1, ..., x_n)$
  - klar, da bei mehr Elementen die Anzahl der Linearkombinationen nicht abnimmt
  - Ist $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot x_i \in \text{span}_K(x_1, ..., x_n)$, so ist $y = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i + \mu_n \cdot \lambda_i \cdot x_i \in \text{span}_K(x_1, ..., x_n)$ □

**Satz II.2.10**
Genau dann ist $(x_i)$ linear unabhängig, wenn sich jedes $x \in \text{span}_K((x_i))$ in eindeutiger Weise als Linearkombination der $(x_i)$ schreiben lässt, d.h. $x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i = \sum_{i \in I} \lambda_i' \cdot x_i$, so ist $\lambda_i = \lambda_i'$

*Beweis.* Es reicht, die Aussage für $I = \{1, ..., n\}$ zu beweisen.

- Hinrichtung: Ist $(x_, ..., x_n)$ linear unabhängig und $x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i = \sum_{i \in I} \lambda_i' \cdot x_i$, so folgt daraus $\sum_{i \in I} (\lambda_i - \lambda_i') x_i = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der $x_i$, dass $\lambda_i = \lambda_i' = 0$

- Rückrichtung: Lässt sich jedes $x \in \text{span}_K(x_1, ..., x_n)$ in eindeutiger Weise als Linearkombination der $x_i$ schreiben, so gilt dies insbesondere für $x = 0$. Ist also $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0$, so folgt schon $\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i = 0$ schon $\lambda_i = 0$ □

■ **Beispiel II.2.11**

- Die Standardbasis $(e_1, ..., e_n)$ des $K^n$ ist linear unabhängig. Es ist $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$
- Im $K$-Vektorraum $K[X]$ sind die Monome $(X^i)$ linear unabhängig.
- Ein einzelner Vektor $x \in V$ ist genau dann linear abhängig, wenn $x = 0$.
- Ein Paar $(x_1, x_2)$ von Elementen von $V$ ist linear abhängig, wenn es ein skalares Vielfaches des anderen ist, also z.B. $x_1 = \lambda \cdot x_2$.
- Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sind die beiden Vektoren $(1, 2)$ und $(2, 1)$ linear unabhängig.
  Im $\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}$-Vektorraum $(\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})^2$ sind diese Vektoren linear unabhängig, da $x_1 + x_2 = (1, 2) + (2, 1) = (3, 3) = (0, 0) = 0$.
- Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist $(1, i)$ linear unabhängig, aber im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist $(1, i)$ linear abhängig, denn $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0$ für $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = i$.

▶ **Bemerkung II.2.12**

- Ist $x_{i_0} = 0$, ist $(x_i)$ linear abhängig: $1 \cdot x_{i_0} = 0$
- Gibt es $i, j \in I$ mit $i \neq j$, aber $x_i = x_j$, so ist $(x_i)$ linear abhängig: $x_i - x_j = 0$
- Dennoch sagt man auch "die Teilmenge $X \subseteq V$ ist linear abhängig" und meint damit, dass die Familie $(x_x)_{x \in X}$ linear abhängig ist, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, $x_1, ..., x_n \in X$ paarweise verschieden, mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0$.

# II.3. Basis und Dimension

**Definition II.3.1 (Basis)**
Eine Familie $(x_i)$ von Elementen von $V$ ist eine Basis von $V$, wenn gilt:
(B1): Die Familie ist linear unabhängig.
(B2): Die Familie erzeugt $V$, also $\operatorname{span}_K(x_i) = V$.

▶ **Bemerkung II.3.2**
Kurz gesagt ist eine Basis ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

**Satz II.3.3**
Sei $(x_i)$ eine Familie von Elementen von $V$. Genau dann ist $(x_i)$ eine Basis von $V$, wenn sich jedes $x \in V$ auf eindeutige Weise als Linearkombination der $(x_i)$ schreiben lässt.

*Beweis.* Dies folgt sofort aus II.2.10 □

■ **Beispiel II.3.4**

- Die leere Familie ist eine Basis des Nullraums.
- Die Standardbasis $(e_1, ..., e_n)$ ist eine Basis des Standardraums.
- Die Monome $(X^i)$ bilden eine Basis des $K$-Vektorraum $K[X]$.
- Die Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $(1, i)$, eine Basis des $\mathbb{C}$- Vektorraum $\mathbb{C}$ ist gegeben durch $(1)$
- Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ hat viele weitere Basen.

**Satz II.3.5**
?? Für eine Familie $(x_i)$ von Elementen von $V$ sind äquivalent:

- $B$ ist eine Basis von $V$.
- $B$ ist ein minimales Erzeugendensystem.
- $B$ ist maximal linear unabhängig, d.h. $B$ ist linear unabhängig, aber wenn Elemente zur Basis hinzugefügt werden, ist diese nicht mehr linear unabhängig.

*Beweis.*

- $1 \Rightarrow 2$: Sei $B$ eine Basis von $V$ und $J$ eine echte Teilmenge von $I$. Nach Definition ist $B$ ein Erzeugendensystem. Wähle $i_0 \in I \backslash J$. Da $(x_i)$ linear unabhängig ist, ist $x_{i_0}$ keine Element $\operatorname{span}_K((x_i)_{i \in I \backslash \{i_0\}}) \supseteq \operatorname{span}_K((x_i)_{i \in J})$ ( II.2.9). Insbesondere ist $(x_i)_{i \in J}$ kein Erzeugendensystem von $V$.
- $2 \Rightarrow 3$: Sei $B$ ein minimales Erzeugendensystem und $(x_i)_{i \in J}$ eine Familie mit $J$ echter Obermenge von $I$. Wäre $(x_i)$ linear abhängig, so gäbe es ein $i_0$ mit $\operatorname{span}_K((x_i)_{i \in I \backslash \{i_0\}}) = \operatorname{span}_K((x_i)_{i \in I}) = V$ im Widerspruch zur Minimalität von $B$. Also ist $B = (x_i)$ linear unabhängig. Wähle $j_0 \in J \backslash I$. Dann ist $x_{j_0} \in V = \operatorname{span}_K(x_i) \leq \operatorname{span}_K((x_i)_{i \in J \backslash \{j_0\}})$ und somit ist $(x_i)_{i \in J}$ linear abhängig nach II.2.9.
- $3 \Rightarrow 1$: Sei $B$ nun maximal linear unabhängig. Angenommen $B$ wäre kein Erzeugendensystem. Dann gibt es ein $x \in V \backslash \operatorname{span}_K(x_i)$. Definiere $J = I \cup \{j_0\}$ mit $j_0 \notin I$ und $x_{j_0} := x$. Aufgrund der Maximalität von $B$ ist $(x_i)$ linear abhängig, es gibt als Skalare $\lambda$, $(\lambda_i)$, nicht alle gleich 0, mit $\lambda \cdot x + \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i = 0$. Da $(x_i)$ linear abhängig ist, muss $\lambda \neq 0$ sein, woraus der Widerspruch $x = \lambda^{-1} \cdot \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i \in \operatorname{span}_K(x_i)$.

Somit ist $B$ ein Erzeugendensystem. □

**Theorem II.3.6 (Basisauswahlsatz)**
Jedes endliche Erzeugendensystem von $V$ besitzt eine Basis als Teilfamilie: Ist $(x_i)$ ein endliches Erzeugendensystem von $V$, so gibt es eine Teilmenge $J \subseteq I$, für die $(x_i)_{i\in J}$ eine Basis von $V$ ist.

*Beweis.* Sei $(x_i)$ ein endliches Erzeugendensystem von $V$. Definiere $\mathcal{J} := \{J \subseteq I \mid (x_i)_{i\in J} \text{ J ist Erzeugendensystem von } V\}$. Da $I$ endlich ist, ist auch $\mathcal{J}$ endlich. Da $(x_i)$ Erzeugendensystem ist, ist $I \in J$, insbesondere $\mathcal{J} \neq \emptyset$. Es gibt deshalb ein bezüglich Inklusion minimales $J_0 \in \mathcal{J}$, d.h. $J_1 \in \mathcal{J}$ so gilt nicht $J_1 \subsetneq J_0$. Deshalb ist $(x_i)_{i\in J_0}$ eine Basis von $V$ (??). □

**Folgerung II.3.7**
Jeder endlich erzeugte $K$-Vektorraum besitzt eine endliche Basis.

▶ **Bemerkung II.3.8**
Der Beweis von Theorem II.3.6 liefert ein konstruktives Verfahren: Ist $(x_1, ..., x_n)$ ein endliches Erzeugendensystem von $V$, so prüfe man, ob es ein $i_0$ mit $x_{i_0} \in \text{span}_K((x_i)_{i\neq i_0})$ gibt. Falls Nein, ist $(x_1, ..., x_n)$ eine Basis von $V$. Falls Ja, macht man mit $(x_1, ..., x_{i_{0-1}}, x_{i_{0+1}}, ..., x_n)$ weiter.

▶ **Bemerkung II.3.9**
Man kann jedoch zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Die Gültigkeit der Aussage hängt jedoch von bestimmten mengentheoretischen Axiomen ab, auf die wir an dieser Stelle nicht eingehen werden. Siehe dazu LAAG 2. Semester.

**Lemma II.3.10 (Austauschlemma)**
Sei $B = (x_1, ..., x_n)$ eine Basis von $V$. Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ und $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i$, so ist für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ mit $\lambda_j \neq 0$ auch $B' = (x_1, ..., x_{j-1}, y, x_{j+1}, ..., x_n)$ eine Basis von $V$.

*Beweis.* oBdA. sei $j = 1$, also $B' = (y, x_2, ..., x_n)$. Wegen $\lambda_1 \neq 0$ ist $x_1 = \lambda_1^{-1} \cdot y - \sum_{i=2}^n \lambda_i \cdot x_i \in \text{span}_K(y, x_2, ..., x_n)$ und somit ist $B'$ ein Erzeugendensystem. Sind $\mu_1, ..., \mu_n \in K$ mit $\mu_1 \cdot y - \sum_{i=2}^n \mu_i \cdot x_i = 0$, so folgt $0 = \mu_1(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i + \sum_{i=2}^n \mu_i \cdot x_i) = \mu_1 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 + \sum_{i=2}^n (\mu_1 \cdot \lambda_i + \mu_i)x_i$ und aus der linearen Unabhängigkeit von $B$ somit $\mu_1 \cdot \lambda_1 = 0$, $\mu_1 \cdot \lambda_2 + \mu_2 = 0$, ..., $\mu_1 \cdot \lambda_n + \mu_n = 0$. Wegen $\lambda_1 \neq 0$ folgt $\mu_1 = 0$ und daraus $\mu_i = 0$. Folglich ist $B'$ linear unabhängig. □

**Theorem II.3.11 (Steinitz'scher Austauschsatz)**
Sei $B = (x_1, ..., x_n)$ eine Basis von $V$ und $\mathcal{F} = (y_1, ..., y_r)$ eine linear unabhängige Familie in $V$. Dann ist $r \leq n$ und es gibt $i_1, ..., i_{n-r} \in \{1, ..., n\}$, für die $B' = (y_1, ..., y_r, x_{i_1}, ..., x_{i_{n-r}})$ eine Basis von $V$ ist.

*Beweis.* Induktion nach $r$
Für $r = 0$ ist nichts zu zeigen.
Sei nun $r \geq 1$ und gelte die Aussage für $(y_1, ..., y_{r-1})$. Insbesondere ist $r - 1 \leq n$ und es gibt $i_1, .., i_{n-(r-1)} \in \{1, ..., n\}$ für die $B' = (y_1, ..., y_r, x_{i_1}, ..., x_{i_{n-(r-1)}})$ eine Basis von $V$ ist. Da $y_r \in V = \text{span}_K(B')$ ist $y_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i \cdot y_1 + \sum_{j=0}^{n-(r-1)} \mu_j \cdot x_{i_j}$. Da $(y_1, ..., y_r)$ linear unabhängig, ist $y_r \notin \text{span}_K(y_1, ..., y_{r-1})$. Folglich gibt es $j_0 \in \{1, ..., n - (r-1)\}$ mit $\mu_{j_0} \neq 0$. Insbesondere ist $n - (r-1) \geq 1$, also $r \leq n$. oBdA. $j_0 = 1$, dann ergibt sich

mit dem Austauschlemma (Lemma II.3.10), dass auch $(y_1, ..., y_{r-1}, y_r, x_{i_2}, ..., x_{i_{n-(r-1)}})$ eine Basis von $V$ ist. □

**Folgerung II.3.12 (Basisergänzungssatz)**
Ist $V$ endlich erzeugt, so lässt sich jede linear unabhängige Familie zu einer Basis ergänzen: Ist $(x_1, ..., x_n)$ linear unabhängig, so gibt es $m \geq n$ und $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_m$ für die $(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m)$ eine Basis von $V$ ist.

*Beweis.* Nach dem Basisauswahlsatz (Theorem II.3.6 und Folgerung II.3.7) besitzt $V$ eine endliche Basis, die Behauptung folgt somit aus dem Steinitz'schen Austauschsatz (Theorem II.3.11). □

**Folgerung II.3.13**
Sind $(x_i)$ und $(x_j)$ Basen von $V$ und ist $I$ endlich, so ist $|I| = |J|$.

*Beweis.* Da $(y_r)$ linear unabhängig ist, ist $|J| \leq |I|$ nach dem Steinitz'schen Austauschsatz (Theorem II.3.11). Insbesondere ist $J$ endlich, also $|I| \leq |J|$ nach dem Austauschsatz (Theorem II.3.11). □

**Folgerung II.3.14**
Ist $V$ endlich erzeugt, so haben alle Basen von $V$ die gleiche Mächtigkeit.

*Beweis.* $V$ besitzt eine endliche Basis (Folgerung II.3.7), deshalb folgt die Behauptung aus Folgerung II.3.13. □

**Definition II.3.15 (Dimension)**
Ist $V$ endlich erzeugt, so ist die Dimension des Vektorraum $V$ die Mächtigkeit $\dim_K(V)$ einer Basis von $V$. Andernfalls sagt man, dass $V$ unendliche Dimensionen hat und schreibt $\dim_K(V) = \infty$.

■ **Beispiel II.3.16**

- $\dim_K(K^n) = n$
- $\dim_K(K[X]) = \infty$
- $\dim_K(K[X]_{\leq n}) = n + 1$
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$
- $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

▶ **Bemerkung II.3.17**

- $V$ ist genau dann endlich erzeugt, wenn $\dim_K(V) < \infty$.
- Mit ?? $\dim_K(V) = \min\{|B| \mid \text{span}_K(B) = V\} = \max\{|B| \mid B \text{ linear unabhängig}\}$

**Satz II.3.18**
Sei $V$ endlich erzeugt und $W \leq V$ ein Untervektorraum.

- Es ist $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$. Insbesondere ist $W$ endlich erzeugt.
- Ist $\dim_K(W) = \dim_K(V)$, so ist auch $W = V$.

*Beweis.*
- Ist $F$ eine linear unabhängige Familie in $W$, so ist auch $F$ linear unabhängig in $V$ und somit $|F| \leq \dim_K(V)$. Insbesondere gibt es eine maximal linear unabhängige Familie $B$ in $W$ und es folgt $\dim_K(W) = |B| \leq \dim_K(V)$.
- Sei $B$ eine Basis von $W$. Dann ist $B$ auch in $V$ linear unabhängig. Ist $\dim_K(W) = \dim_K(V)$, so muss auch $B$ in $V$ maximal linear unabhängig sein. Insbesondere ist $W = \text{span}_K(B) = V$. □

# II.4. Summen von Vektorräumen

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $(W_i)$ eine Familie von Untervektorräumen von $V$.

**Definition II.4.1 (Summe von Vektorräumen)**
Die Summe der $W_i$ ist der Untervektorraum

$$\sum_{i\in I} W_i := \operatorname{span}_K\left(\bigcup W_i\right)$$

Im Fall $I = \{1, ..., n\}$ schreibt man auch $W_1 + ... + W_n$ für $\sum_{i=1}^{n} W_i$.

**Lemma II.4.2**
Es ist $\sum_{i\in I} W_i = \{\sum_{i\in I} x_i \mid x_i \in W_i$, fast alle gleich $0\}$.

*Beweis.*
- " $\supseteq$ ": klar, $\sum x_i \in \operatorname{span}_K(\bigcup W_i)$
- " $\subseteq$ ": Die rechte Seite enthält jedes $W_i$ und ist ein Untervektorraum von $V$:
  Für $x_i, x_i' \in W$, fast alle gleich 0 und $\lambda \in K$ ist $\sum x_i + \sum x_i' = \sum(x_i + x_i')$, $\lambda \cdot \sum x_i = \sum \lambda \cdot x_i \Rightarrow$ Untervektorraum □

**Definition II.4.3 (direkte Summe)**
Ist jedes $x \in \sum W_i$ eindeutig als Summe von $x_i$ mit $x_i \in W_i$ darstellbar, so sagt man, dass $\sum W_i$ die direkte Summe der Untervektorräume $W_i$ ist und schreibt $\oplus W_i$ für $\sum W_i$. Im Fall $I = \{1, ..., n\}$ schreibt man auch $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ für $\oplus W_i$.

■ **Beispiel II.4.4**
Ist $(x_1, ..., x_n)$ eine Basis von $V$, so ist $V = Kx_1 \oplus ... \oplus Kx_n$.

▶ **Bemerkung II.4.5**
Wir wollen uns näher mit dem wichtigen Spezialfall $I = \{1, 2\}$ beschäftigen und schreiben noch mal auf:

- $V = W_1 \oplus W_2$
- $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

**Satz II.4.6**
Sind $W_1, W_2$ Untervektorräume von $V$ mit Basen $(x_i)_{i\in I_1}$ bzw. $(x_i)_{i\in I_2}$, wobei $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, so sind äquivalent:

- $V = W_1 \oplus W_2$
- $(x_i)_{i\in I_1\cap I_2}$ ist eine Basis von $V$

*Beweis.* Sei $I = I_1 \cup I_2$.

- $1 \Rightarrow 2$: Da $\operatorname{span}_K((x_i)_{i\in I_1}) = W_1$ und $\operatorname{span}_K((x_i)_{i\in I_2}) = W_2$ ist $\operatorname{span}_K((x_i)_{i\in I}) = W_1 + W_2 = V$. Ist $\sum \lambda_i x_i = 0$, so ist $\sum_{i\in I_1} \lambda_i x_i = -\sum_{i\in I_2} \lambda_i x_i \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Da $(x_i)_{i\in I_1}$ linear unabhängig ist, ist $\lambda_i = 0$, analog für $i \in I_2$.
- $2 \Rightarrow 1$: $W_1 + W_2 = \operatorname{span}_K((x_i)_{i\in I_1}) + \operatorname{span}_K((x_i)_{i\in I_2}) = \operatorname{span}_K((x_i)_{i\in I}) = V$. Ist $x \in W_1 \cap W_2$, so ist

$x = \sum_{i\in I_1} \lambda_i x_i = \sum_{i\in I_2} \lambda_i x_i$. Somit $0 = \sum_{i\in I_1} \lambda_i x_i - \sum_{i\in I_2} \lambda_i x_i$, woraus wegen $(x_i)_{i\in I}$ linear unabhängig schon $\lambda_i = 0$ folgt. Somit ist $x = 0$. □

**Folgerung II.4.7**
Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist jeder Untervektorraum ein direkter Summand: Ist $W$ ein Untervektorraum von $V$, so gibt es einen Untervektorraum $W'$ von $V$ mit $V = W \oplus W'$ ($W'$ heißt das lineare Komplement von $W$ in $V$). Es ist

$$\dim_K(W') = \dim_K(V) - \dim_K(W)$$

*Beweis.* Sei $(x_1, ..., x_m)$ eine Basis von $W$. Nach dem Basisergänzungssatz lässt sich diese zu einer Basis $(x_1, ..., x_n)$ von $V$ ergänzen. Mit $W' := \text{span}_K(x_{m+1}, ..., x_n)$ ist dann $V = W \oplus W'$. □

▶ **Bemerkung II.4.8**
Ist $\dim_K(V) < \infty$, so folgt aus $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ also insbesondere $\dim_K(W_1 + W_2) = \dim_K(W_1) + \dim_K(W_2)$.

**Theorem II.4.9 (Dimensionsformel)**
Sei $\dim_K(V) < \infty$. Für Untervektorräume $W_1, W_2$ von $V$ gilt:

$$\dim_K(W_1 + W_2) + \dim_K(W_1 \cap W_2) = \dim_K(W_1) + \dim_K(W_2)$$

*Beweis.* Da $\dim_K(V) < \infty$ haben alle Untervektorräume von $V$ Basen. Sei also $B_0 = (X_1, ..., x_n)$ eine Basis von $W_1 \cap W_2$. Nach dem Basisergänzungssatz können wir $B_0$ zu den Basen $B_1 = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_p)$ von $W_1$ und $B_2 = (x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_q)$ von $W_2$ ergänzen. Wir behaupten, dass $B = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_p, z_1, ..., z_q)$ eine Basis von $W_1 + W_2$ ist. Offenbar ist $B$ ein Erzeugendensystem von $W_1 + W_2$. Seien nun $\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu_p, \eta_1, ..., \eta_q \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^p \mu_j y_j + \sum_{k=1}^q \eta_k z_k = 0$. Dann ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^p \mu_j y_j = -\sum_{k=1}^q \eta_k z_k \in W_1 \cap W_2$. Da $\text{span}_K(B_0) = W_1 \cap W_2$ und $B_1$ linear unabhängig ist, ist $\mu_j = 0$. Analog zeigt man auch, dass $\eta_k = 0$. Aus $B_0$ linear unabhängig folgt dann auch, dass $\lambda_i = 0$. Somit ist $B$ linear unabhängig. Wir haben gezeigt, dass $B$ eine Basis von $W_1 + W_2$ ist.
$\Rightarrow \dim_K(W_1) + \dim_K(W_2) = |B_1| + |B_2| = (n+p) + (n-q) = (n+p+q) + n = |B| + |B_0| = \dim_K(W_1 + W_2) + \dim_K(W_1 \cap W_2)$. □

**Definition II.4.10 (externes Produkt)**
Das externe Produkt einer Familie $(V_i)$ von $K$-Vektorräumen ist der $K$-Vektorraum $\prod V_i$ bestehend aus dem kartesischen Produkt der $V_i$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation, $(x_i) + (x_i') := (x_i + x_i')$ und $\lambda(x_i) := (\lambda x_i)$.

**Definition II.4.11 (externe Summe)**
Die externe Summe einer Familie $(V_i)$ von $K$-Vektorräumen ist der Untervektorraum $\oplus V_i := \{(x_i) \in \prod V_i \mid x_i = 0; \text{ für fast alle } i\}$ des $K$-Vektorraum $\prod V_i$.

▶ **Bemerkung II.4.12**
Man prüft sofort nach, dass $\prod V_i$ ein $K$-Vektorraum ist und $\oplus V_i$ ein Untervektorraum davon ist. Für endliche Indexmengen ist $\prod V_i = \oplus V_i$, z.B. $K^n = \prod_{i=1}^n K = \oplus K$.

**Lemma II.4.13**
Sei $(V_i)$ eine Familie von $K$-Vektorräumen und sei $V = \oplus V_i$. Für jedes $j \in I$ ist $\tilde{V}_j := V \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} \{0\}$ ein Untervektorraum von $V$ und $V = \oplus \tilde{V}_j$

*Beweis.* Ist $x = (x_i) \in V$ mit $x_i \in V_i$, fast alle $x_i = 0$, so ist $x = \sum \tilde{x}_i$ mit $\tilde{x} := (x_i \delta_{ij}) \in \tilde{V}_j$. Somit ist $V = \sum \tilde{V}_i$. Die Gleichung $\tilde{V}_i \cap \sum_{j \neq i} \tilde{V}_j = \{0\}$ folgt aus Definition der $\tilde{V}_i$. □

# Kapitel III

# *Lineare Abbildungen*

## III.1. Matrizen

Sei $K$ ein Körper.

**Definition III.1.1 (Matrix)**
Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Eine $m \times n$-Matrix über $K$ ist ein rechteckiges Schema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Man schreibt dies auch als $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n\ j=1,\dots,m}$ oder $A = (a_{ij})_{i,j}$, wenn $m$ und $n$ aus dem Kontext hervorgehen. Die $a_{ij}$ heißen die Koeffizienten der Matrix $A$ und wir definieren $A_{i,j} = a_{ij}$. Die Menge der $m \times n$-Matrizen über $K$ wird mit $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ oder $K^{m\times n}$ bezeichnet. Man nennt das Paar $(m, n)$ auch den Typ von $A$. Ist $m = n$, so spricht man von quadratischen Matrizen und schreibt $\mathrm{Mat}_n(K)$. Zu einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ definiert man die zu $A$ transponierte Matrix $A^t := (a_{ij})_{j,i} \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$.

■ **Beispiel III.1.2**

- Die Nullmatrix ist $0 = (0)_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.
- Für $k, l \in \{1, \dots, n\}$ ist die $(k, l)$-Basismatrix gegeben durch $E_{kl} = (\delta_{jk}\delta_{jl}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.
- Die Einheitsmatrix ist $1_n = (\delta_{ii}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$.
- Für $a_i, \dots, a_n \in K$ definiert man eine Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) = (\delta_{ij} \cdot a_i)$.
- Für eine Permutation $\sigma \in S_n$ definiert man die Permutationsmatrix $P_\sigma := (\delta_{\sigma(i),j})$.
- Für $a_1, \dots, a_n$ definiert man einen Zeilenvektor $(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Mat}_{1\times n}(K)$ bzw. einen Spaltenvektor $(a_1, \dots, a_n)^t$.

**Definition III.1.3 (Addition und Skalarmultiplikation)**
Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ desselben Typs und $\lambda \in K$. Man definiert auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ eine koeffizientenweise Addition und Skalarmultiplikation.

**Satz III.1.4**
$(\mathrm{Mat}_{m\times n}, +, \cdot)$ ist ein $K$-VR der Dimension $\dim_K(\mathrm{Mat}_{m\times n}) = n \cdot m$ mit Basismatrix als Basis.

*Beweis.* Dies ist klar, weil wir $\mathrm{Mat}_{m\times n}$ mit dem Standardraum $K^{mn}$ identifizieren können. Wir haben die Elemente nur als $m \times n$-Matrix statt als $mn$-Tupel geschrieben. □

**Definition III.1.5 (Matrizenmultiplikation)**
Seien $m, n, r \in \mathbb{N}_0$. Sind $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $B = (b_{jk}) \in \mathrm{Mat}_{n\times r}(K)$ so definieren wir die Matrizenmultiplikation $C = AB$ als die Matrix $C = (c_{ik}) \in \mathrm{Mat}_{m\times r}(K)$ mit $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$. Kurz geschrieben "Zeile · Spalte".

■ **Beispiel III.1.6**

- Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist $0 \cdot A = 0$ und $1 \cdot A = A$.
- Für $\sigma \in S_n$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n\times r}(K)$ geht $P_\sigma \cdot A$ aus $A$ durch Permutation der Zeilen hervor.

**Lemma III.1.7**
Für $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $B = (b_{jk}) \in \mathrm{Mat}_{n\times r}(K)$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$$

*Beweis.* Schreibe $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$. Dann ist $A(\lambda B) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \lambda b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} \cdot b_{jk} = (\lambda A)B = \lambda \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \lambda(AB)$. □

**Lemma III.1.8**
Matrizenmultiplikation ist assoziativ:

$$A(BC) = (AB)C$$

*Beweis.* Sei $D = BC \in \mathrm{Mat}_{n\times s}(K)$, $E = AB \in \mathrm{Mat}_{m\times r}(K)$. Schreibe $A = (a_{ij})$ usw. Für $i, l$ ist $(AD) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \sum_{k=1}^{r} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}$.
$(EC) = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}$. Also ist $AD = EC$. □

**Lemma III.1.9**
Für $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ und $A, A' \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $B, B' \in \mathrm{Mat}_{n\times r}(K)$ ist

$$(A + A')B = AB + A'B$$
$$A(B' + B) = AB' + AB$$

*Beweis.* Schreibe $A = (a_{ij})$ etc. Dann ist $(A + A')B = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + a'ij) b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} + b_{jk} = (AB + A'B)$. Rest analog. □

**Satz III.1.10**
Mit der Matrizenmultiplikation wird $\mathrm{Mat}_n(K)$ zu einem Ring mit Einselement 1.

*Beweis.* Die vorherigen Sätze und Lemmas. □

■ **Beispiel III.1.11**

- Für $n = 1$ können wir dem Ring $\mathrm{Mat}_n(K)$ mit $K$ identifizieren, der Ring ist also ein Körper, insbesondere ist er kommutativ.
- Für $n \geq 2$ ist $\mathrm{Mat}_n(K)$ nicht kommutativ.

**Definition III.1.12 (invertierbar)**
Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt invertierbar oder regulär, wenn sie im Ring $\mathrm{Mat}_n(K)$ invertierbar ist, sonst singulär. Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K) = \mathrm{Mat}_n(K)^\times$ der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen heißt allgemeine Gruppe.

■ **Beispiel III.1.13**
Sei $n = 2$. Zu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K)$$

definiert man

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K)$$

Man prüft nach, dass $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = (ad - bc) \cdot 1_2$. Definiert man nun $\det(A) = ad - bc$ so sieht man: Ist $\det(A) \neq 0$, so ist $A$ invertierbar mit $A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \tilde{A}$. Ist $\det(A) = 0$ so $A$ ist Nullteiler und somit nicht invertierbar.

**Lemma III.1.14**
Für $A, A_1, A_2 \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ und $B = \mathrm{Mat}_{n\times r}(K)$ ist

- $(A^t)^t = A$
- $(A_1 + A_2)^t = A_1^t + A_2^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$

*Beweis.* Übung □

**Satz III.1.15**
Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist $A^t \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

*Beweis.* Aus $AA^{-1} = 1$ folgt, dass $(A^{-1})^t A^t = 1_n^t = 1_n$. Somit ist $(A^{-1})^t$ das Inverse zu $A^t$. □

# III.2. Homomorphismen von Gruppen

Seien $G, H$ zwei multiplikativ geschriebene Gruppen.

**Definition III.2.1 (Gruppenhomomorphismus)**
Eine Abbildung $f : G \to H$ ist ein Gruppenhomomorphismus, wenn gilt:
(GH): $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$
Die Menge der Homomorphismen $f : G \to H$ bezeichnet man mit $\mathrm{Hom}(G, H)$.

▶ **Bemerkung III.2.2**
Ein Gruppenhomomorphismus ist also eine Abbildung, welche mit der Verknüpfung, also der Struktur der Gruppe, verträglich ist. Man beachte: für additiv geschrieben Gruppen lautet die Bedingung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

■ **Beispiel III.2.3**

- $id_G : G \to G$
- $c_1 : G \to H$ mit $x \mapsto 1_H$
- $G_0 \leq G$ Untergruppe, $\iota : G_0 \to G$
- $(A, +)$ abelsche Gruppe, $k \in \mathbb{Z}$, $A \to A$ mit $a \mapsto ka$
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$ mit $\overline{a} \mapsto a + n\mathbb{Z}$
- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ mit $x \mapsto e^x$
- $Mat_n(K) \to Mat_n(K)$ mit $A \mapsto A^t$
- $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^\times$ mit $z \mapsto |z|$

**Satz III.2.4**
Sei $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Dann gilt:

- $f(1_G) \to 1_H$
- Für $x \in G$ ist $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.
- Für $x_1, ..., x_n \in G$ ist $f(x_1, ..., x_n) = f(x_1) \cdot ... \cdot f(x_n)$.
- Ist $G_0 \leq G$, so ist $f(G_0) \leq H$.
- Ist $H_0 \leq H$, so ist $f^{-1}(H_0) \leq G$.

*Beweis.*

- $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) \Rightarrow$ kürzen, weil $H$ Gruppe $\Rightarrow 1 = f(1)$
- $f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(1) = 1$
- Induktion nach $n$
- $x, y \in G_0 \Rightarrow f(x) \cdot f(y) = f(xy) \in f(G_0)$, $f^{-1}(x) = f(x^{-1}) \in f(G_0)$
- $x, y \in f^{-1}(H_0) \Rightarrow f(x) \cdot f(y) = f(xy) \in H_0 \Rightarrow xy \in f^{-1}(H_0)$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \in H_0 \Rightarrow x^{-1} \in f^{-1}(H_0)$, $f(1) = 1 \in H_0 \Rightarrow 1 \in f^{-1}(H_0)$, insbesondere $f^{-1}(H_0) \neq \emptyset$ □

**Satz III.2.5**
Seien $G_1, G_2, G_3$ Gruppen. Sind $f_1 : G_1 \to G_2$, $f_2 : G_2 \to G_3$ Homomorphismen, so ist auch $f_2 \circ f_1 : G_1 \to G_3$.

*Beweis.* Für $x, y \in G_1$ ist $(f_2 \circ f_1)(xy) = f_2(f_1(xy)) = f_2(f_1(x) \cdot f_1(y)) = f_2(f_1(x)) \cdot f_2(f_1(y)) = (f_2 \circ f_1)(x) \cdot (f_2 \circ f_1)(y)$ □

**Definition III.2.6 (Arten von Homomorphismen)**
Ein Homomorphismus ist
ein Monomorphismus, wenn $f$ injektiv ist,
ein Epimorphismus, wenn $f$ surjektiv ist,
ein Isomorphismus, wenn $f$ bijektiv ist. Die Gruppen $G$ und $H$ heißen isomorph, in Zeichen $G \cong H$, wenn es einen Isomorphismus $G \to H$ gibt.

**Lemma III.2.7**
Ist $f : G \to H$ ein Isomorphismus, so ist auch $f^{-1} : H \to G$ ein Isomorphismus.

*Beweis.* Da $f^{-1}$ wieder bijektiv ist, müssen wir nur zeigen, dass $f^{-1}$ ein Homomorphismus ist. Seien $x, y \in H$. Dann ist $f(f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) \cdot f(f^{-1}(y)) = xy$, somit $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)$. □

**Satz III.2.8**
Sei $f : G \to H$ ein Homomorphismus. Genau dann ist $f$ ein Isomorphismus, wenn es einen Homomorphismus $f' : H \to G$ mit $f' \circ f = \mathrm{id}_G$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_H$ gibt.

*Beweis.* Ist $f$ ein Isomorphismus, so erfüllt $f' := f^{-1}$ das Gewünschte. Ist umgekehrt $f'$ wie angegeben, so muss $f$ bijektiv sein:

- $f' \circ f = \mathrm{id}_G$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv
- $f \circ f' = \mathrm{id}_H$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv □

**Folgerung III.2.9**
Isomorphie von Gruppen ist eine Äquivalenzrelation: Sind $G, G_1, G_2, G_3$ Gruppen, so gilt:

- $G \cong G$ (Reflexivität)
- Ist $G_1 \cong G_2$, so ist auch $G_2 \cong G_1$ (Symmetrie)
- Ist $G_1 \cong G_2$ und $G_2 \cong G_3$, dann ist auch $G_1 \cong G_3$ (Transitivität)

*Beweis.*
- $\mathrm{id}_G$ ist ein Isomorphismus
- Lemma III.2.7
- III.2.8 und A18 □

▶ **Bemerkung III.2.10**
Der letzte Satz erklärt die Bedeutung des Isomorphismus: Eine mit der Struktur verträgliche Abbildung, die eine mit der Struktur verträgliche Umkehrabbildung besitzt, also eine strukturerhaltende Abbildung. Tatsächlich können wir uns einen Isomorphismus $f : G \to H$ so vorstellen, dass wir

nur die Elemente von $G$ umbenennen. Alle Aussagen, die sich nur aus der Struktur selbst ergeben, bleiben damit wahr. Zum Beispiel: Ist $G \cong H$ und ist $G$ abelsch, so auch $H$ und umgekehrt.

**Beispiel III.2.11**

- Es ist $\mathbb{Z}^\times = \mu_2 \cong \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z})^\times \cong S_2$. Je zwei beliebige Gruppen der Ordnung 2 sind zueinander isomorph.
- $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto e^x$ liefert einen Isomorphismus, da $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, \cdot)$.

**Definition III.2.12 (Kern)**
Der Kern eines Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ ist $\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{1\}) = \{x \in G \mid f(x) = 1_H\}$.

**Lemma III.2.13**
Ist $f : G \to H$ ein Homomorphismus, so ist $N := \mathrm{Ker}(f)$ eine Untergruppe von $G$ mit $x \cdot y \cdot x^{-1} \in N$ für alle $x \in G$ und $y \in N$.

*Beweis.* Es ist $N \leq G$. Für $x \in G$ und $y \in N$ ist $f(xyx^{-1}) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(x^{-1}) = f(x) \cdot f(x^{-1}) \cdot 1 = f(x) \cdot f(x^{-1}) = 1$, also $xyx^{-1} \in N$. □

**Satz III.2.14**
Sei $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Genau dann ist $f$ injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{1_G\}$.

*Beweis.* Schreibe $N = \mathrm{Ker}(f)$.

- Hinrichtung: Ist $f$ injektiv, so ist $N \leq G$ mit $|N| \leq 1$, also $N = \{1_G\}$.
- Rückrichtung: Sei $N = \{1_G\}$. Sind $x, y \in G$ mir $f(x) = f(y)$, so ist $1 = (f(x))^{-1} \cdot f(y) = f(x^{-1} \cdot y)$, also $x^{-1} \cdot y \in N = \{1\}$ und somit $x = y$. Folglich ist $f$ injektiv. □

**Definition III.2.15 (Normalteiler)**
Ist $N \leq G$ mit $x^{-1}y \in N$ für alle $x \in G$ und $y \in N$, so nennt man $N$ einen Normalteiler von $G$ und schreibt $N \lhd G$.

# III.3. Homomorphismen von Ringen

Seien $R, S$ und $T$ Ringe.

**Definition III.3.1 (Ringhomomorphismus)**
Eine Abbildung $f : R \to S$ ist ein Ringhomomorphismus, wenn für $x, y \in R$ gilt:
(RH1:) $f(x + y) = f(x) + f(y)$
(RH2:) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$
Die Menge der Ringhomomorphismen $f : R \to R$ wird mit $\mathrm{Hom}(R, S)$ bezeichnet. Ein Homomorphismus $f : R \to S$ ist ein Mono-, Epi- oder Isomorphismus, wenn $f$ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Gibt es einen Isomorphismus $f : R \to S$, so nennt man $R$ und $S$ isomorph und schreibt $R \cong S$. Die Elemente von $\mathrm{End}(R) := \mathrm{Hom}(R, R)$ nennt man Endomorphismen. Der Kern eines Ringhomomorphismus $f : R \to S$ ist $\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0\})$.

▶ **Bemerkung III.3.2**
Ein Ringhomomorphismus $f : R \to S$ ist ein Gruppenhomomorphismus der abelschen Gruppen $(R, +)$ und $(S, +)$, der mit der Multiplikation verträglich ist, also eine strukturverträgliche Abbildung zwischen Ringen.

■ **Beispiel III.3.3**

- $\mathrm{id}_R : R \to R$ ist ein Ringisomorphismus
- Ist $R_0 \leq R$ ein Unterring von $R$, so ist $\iota : R_0 \to R$ ein Ringmonomorphismus
- $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$ mit $\overline{a} \mapsto a + n\mathbb{Z}$ it ein Ringepimorphismus
- Sei $R$ kommutativ mit Einselement. Für $\lambda \in R$ ist die Auswertungsabbildung $R[X] \to R$ mit $f \mapsto f(\lambda)$ ein Ringepimorphismus.
- $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto \overline{z}$ ist ein Ringisomorphismus

**Satz III.3.4**
Sind $f : R \to S$ und $g : S \to T$ Ringhomomorphismen, so auch $g \circ f : R \to T$.

*Beweis.* Übung, analog zu Gruppen □

**Lemma III.3.5**
Ist $f : R \to S$ ein Ringisomorphismus, so auch $f^{-1} : S \to R$.

*Beweis.* Von den Gruppen wissen wir: $f^{-1}$ ist ein Isomorphismus der abelschen Gruppen $(S, +) \to (R, +)$. Die Verträglichkeit mit der Multiplikation zeigt man analog. □

**Satz III.3.6**
Sei $f \in \mathrm{Hom}(R, S)$. Genau dann ist $f$ ein Ringisomorphismus, wenn es $f' \in \mathrm{Hom}(S, R)$ mit $f' \circ f = \mathrm{id}_R$ und $f \circ f' = \mathrm{id}_S$ gibt.

*Beweis.* analog zu Gruppen □

**Lemma III.3.7**
Der Kern $I := \mathrm{Ker}(f)$ eines Ringhomomorphismus $f : R \to S$ ist eine Untergruppe von $(R, +)$ mit $x \cdot a, a \cdot x \in I$ für alle $a \in I$ und $x \in R$.

*Beweis.* Von den Gruppen wissen wir: $I$ ist eine Untergruppe von $(R, +)$. Für $x \in R$ und $a \in I$ ist $f(xa) = f(x) \cdot f(a) = f(x) \cdot 0 = 0$. Somit ist $xa \in I$. Analog ist $ax \in I$. □

**Satz III.3.8**
Sei $f \in \mathrm{Hom}(R, S)$. Genau dann ist $f$ injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

*Beweis.* Die Aussage folgt aus dem entsprechenden Satz für Gruppen, da $f : (R, +) \to (S, +)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. □

**Definition III.3.9 (Ideal)**
Ist $I$ eine Untergruppe von $(R, +)$ und $xa, ax \in I$ mit $x \in R$ und $a \in I$, so nennt man $I$ ein Ideal von $R$ und schreibt $I \lhd R$.

**Beispiel III.3.10**
Der Kern des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$ mit $a \mapsto \overline{a}$ ist das Ideal $I = n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$.

# III.4. Homomorphismen von Vektorräumen

Seien $U, V, W$ drei $K$-VR.

**Definition III.4.1 (linear)**
Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt $K$-linearer Homomorphismus von $K$-VR, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:
(L1): $f(x + y) = f(x) + f(y)$
(L2): $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$
Die Menge der $K$-linearen Abbildungen $f : V \to W$ wird mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V, V)$ nennt man die Endomorphismen von $V$. Ein $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist ein Mono-, Epi- bzw. Isomorphismus, falls $f$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist. Einen Endomorphismus der auch ein Isomorphismus ist, nennt man Automorphismus von $V$ und bezeichnet die Menge der Automorphismen von $V$ mit $\mathrm{Aut}_K(V)$. Der Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist $\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0\})$.

▶ **Bemerkung III.4.2**
Eine $K$-lineare Abbildung $f : V \to W$ ist also ein Homomorphismus der abelschen Gruppen $(V, +) \to (W, +)$, der mit der Skalarmultiplikation verträglich ist, d.h. eine strukturverträgliche Abbildung zwischen VR.

**Satz III.4.3**
Eine Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann $K$-linear, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:
(L): $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

*Beweis.*
- Hinrichtung: $f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$
- Rückrichtung: (L1): $f(x + y) = f(1x + 1y) = 1f(x) + 1f(y)$, (L2): $f(\lambda x) = f(\lambda x + 0y) = \lambda f(x)$. □

■ **Beispiel III.4.4**
- $\mathrm{id}_V : V \to V$ ist ein Automorphismus von $V$
- $c_0 : V \to W$ mit $x \mapsto 0$ ist $K$-linear
- Für einen UVR $V_0 \leq V$ ist $\iota : V_0 \to V$ ein Monomorphismus
- Im $K$-VR $K[X]$ kann man die (formale) Ableitung definieren: $(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i)' := \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$. Diese Abbildung $K[X] \to K[X]$ mit $f \mapsto f'$ ist ein $K$-Endomorphismus von $K[X]$.

■ **Beispiel III.4.5**
Sei $V = K^n$ und $W = K^m$. Wir fassen die Elemente von $V$ und $W$ als Spaltenvektoren auf. Zu einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ definieren wir die Abbildung $f_A : V \to W$ mit $x \mapsto Ax$.

Ausgeschrieben: Ist $A = (a_{ij})$ und $x = (x_1, ..., x_n)^t$ so ist

$$f_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1n} \cdot x_n \\ ... \\ a_{m1} \cdot x_1 + ... + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung ist $K$-linear.

**Satz III.4.6**
Für ein $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dann gilt:

- $f(0) = 0$
- Für $x, y \in V$ ist $f(x - y) = f(x) - f(y)$.
- Sind $(x_1)$ aus $V$, $(\lambda_i)$ aus $K$, fast alle gleich 0, so ist $f(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot f(x)$.
- Ist $(x_i)$ linear abhängig in $V$, so ist $f(x_i)$ linear abhängig in $W$.
- Ist $V_0 \leq V$ ein UVR von $V$, so ist $f(V_0) \leq W$ ein UVR.
- Ist $W_0 \leq W$ ein UVR von $W$, so ist $f^{-1}(W_0) \leq V$ ein UVR.

*Beweis.*
- klar
- klar
- Induktion
- $\sum \lambda_i \cdot x_i = 0 \Rightarrow 0 = f(0) = f(\sum \lambda_i \cdot x_i) = \sum \lambda_i \cdot f(x_i)$
- $x, y \in V_0 \Rightarrow f(x) + f(y) = f(x + y) \in f(V_0)$
  $x \in V_0, \lambda \in K \Rightarrow f(x \cdot \lambda = f(\lambda x) \in f(V_0))$
- $f(0) = 0 \in W_0 \Rightarrow 0 \in f^{-1}(W_0)$, insbesondere ist $f^{-1}(W_0) \neq \emptyset$
  $x, y \in f^{-1}(W_0) \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y) \in W_0$, also $x + y \in f^{-1}(W_0)$
  $x \in f^{-1}(W_0)$ und $\lambda \in K \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x) \in W_0$, also $\lambda x \in f^{-1}(W_0)$ □

**Satz III.4.7**
Sind $f : V \to W$ und $g : W \to U$ $K$-linear, so auch $g \circ f : V \to U$.

*Beweis.* Für $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ ist $(g \circ f)(\lambda x + \mu y) = g(f(\lambda x + \mu y)) = g(\lambda f(x) + \mu f(y)) = \lambda(g \circ f)(x) + \mu(g \circ f)(y)$. □

**Lemma III.4.8**
Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, so auch $f^{-1} : W \to V$.

*Beweis.* Wir müssen nur zeigen, dass $f^{-1}$ linear ist. Für $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ ist $f(\lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)) = \lambda(f \circ f^{-1})(x) + \mu(f \circ f^{-1})(y) = \lambda x + \mu y$, also $f^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)$. □

**Satz III.4.9**
Sei $f : V \to W$ linear. Genau dann ist $f$ ein Isomorphismus, wenn es eine lineare Abbildung $f' : W \to V$ gibt mit $(f' \circ f) = \mathrm{id}_V$ und $(f \circ f') = \mathrm{id}_W$.

*Beweis.* Ist $f$ ein Isomorphismus, so erfüllt $f' = f^{-1}$ die Behauptung. Existiert umgekehrt $f'$ wie angegeben, so muss $f$ bijektiv sein. □

▶ **Bemerkung III.4.10**
Wie auch bei Gruppen sehen wir hier bei VR, dass Isomorphismen genau die strukturerhaltenden Abbildungen sind. Wieder können wir uns einen Isomorphismus $f : V \to W$ so vorstellen, dass wir nur die Elemente von $V$ umbenennen. Alle Aussagen, die sich nur aus der Struktur selbst ergeben, bleiben damit wahr, wie z.B. $\dim_K(V) = \dim_K(W) \iff V = W$. Insbesondere ist $K^n \cong K^m$ für $n = m$.

**Satz III.4.11**
Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist $\mathrm{Ker}(f)$ ein UVR von $V$. Genau dann ist $f$ ein Monomorphismus, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

*Beweis.* Der erste Teil folgt aus Beispiel III.4.5, der zweite folgt aus den Gruppen, da $f : (V, +) \to (W, +)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. □

# III.5. Der Vektorraum der linearen Abbildungen

Seien $V$ und $W$ zwei $K$-VR.

**Satz III.5.1**
Sei $(x_i)$ eine Basis von $V$ und $(y_i)$ eine Familie in $W$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(x_i) = y_i$. Diese Abbildung ist durch $f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i y_i$ (*) ($\lambda_i \in K$, fast alle gleich 0) gegeben und erfüllt

- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}_K(y_i)$
- genau dann ist $f$ injektiv, wenn $(y_i)$ linear unabhängig ist

*Beweis.* Ist $f : V \to W$ linear mit $f(x_i) = y_i$, so folgt $f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i y_i$. Da sich jedes $x \in V$ als $x = \sum \lambda_i x_i$ schreiben lässt, ist $f$ dadurch schon eindeutig bestimmt. Andererseits wird durch (*) eine wohldefinierte Abbildung beschrieben, da die Darstellung von $x$ eindeutig ist (denn $x_i$ sind linear unabhängig). Es bleibt zu zeigen, dass die durch (*) definierte Abbildung $f : V \to W$ tatsächlich linear ist. Ist $x = \sum \lambda_i x_i$ und $x' = \sum \lambda'_i x_i$ so ist $f(x + x') = f(\sum(\lambda_i + \lambda'_i)x_i) = \sum(\lambda_i + \lambda'_i)y_i = \sum \lambda_i y_i + \sum \lambda'_i y_i = f(x) + f(x')$. $f(\lambda x) = f(\sum \lambda\lambda_i x_i) = \sum \lambda\lambda_i y_i = \lambda \sum \lambda_i y_i = \lambda f(x)$.

- $\mathrm{Im}(f)$ ist ein UVR von $W$ und $\{y_i\} \subset \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{span}_K(y_i)$, somit $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}_K(y_i)$
- $f$ ist injektiv $\iff$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
  $\iff$ $\lambda_i \in K$ gilt: $f(\sum \lambda_i x_i) = 0 \Rightarrow \sum \lambda_i x_i = 0$
  $\iff$ $\lambda_i \in K$ gilt: $\sum \lambda_i y_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$
  $\iff$ $(y_i)$ linear unabhängig. □

**Folgerung III.5.2**
Sei $\dim_K < \infty$. Ist $(x_1, ..., x_n)$ eine linear unabhängige Familie in $V$ und $(y_1, ..., y_n)$ eine Familie in $W$, so gibt es eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(x_i) = y_i$

*Beweis.* Nach dem Basisergänzungssatz können wir die Familie $(x_i)$ zu einer Basis $x_1, ..., x_m$ ergänzen. Die Behauptung folgt aus dem vorherigen Satz für beliebige $y_{n+1}, ..., y_m \in W$. □

**Folgerung III.5.3**
Ist $(x_i)$ eine Basis von $V$ und $(y_i)$ eine Basis in $W$, so gibt es genau einen Isomorphismus $f : V \to W$ mit $f(x_i) = y_i$.

*Beweis.* Sei $f$ wie im ersten Satz. $(y_i)$ ist Erzeugendensystem $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}_K(y_i) = W$, also $f$ surjektiv. $(y_i)$ linear abhängig $\Rightarrow f$ ist injektiv. □

**Folgerung III.5.4**
Zwei endlichdimensionale $K$-VR sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

*Beweis.* Folgerung III.5.3 und letztes Kapitel □

**Folgerung III.5.5**
Ist $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von $V$, so gibt es genau einen Isomorphismus $\Phi_B : K^n \to V$ mit $\Phi_B(e_i) = v_i$. Insbesondere ist jeder endlichdimensionale $K$-VR zu einem Standardraum isomorph, nämlich zu $K^n$ für $n = \dim_K(V)$.

**Definition III.5.6 (Koordinatensystem)**
Die Abbildung $\Phi_B$ heißt Koordinatensystem zu $B$. Für $v \in V$ ist $(x_1, ..., x_n)^t = \Phi_B^{-1}(v) \in K^n$ der Koordinatenvektor zu $v$ bezüglich $B$ und $(x_1, ..., x_n)$ sind die Koordinaten von $v$ bezüglich $B$.

**Satz III.5.7**
Die Menge $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist eine UVR des $K$-VR $\mathrm{Abb}(V, W)$.

*Beweis.* Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\eta \in K$.

- $f + g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$: Für $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ ist $(f + g)(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x + \mu y) + g(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) + \lambda g(x) + \mu g(y) = \lambda(f + g)(x) + \mu(f + g)(y)$
- $\eta f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$: Für $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ ist $(\eta f)(\lambda x + \mu y) = \eta \cdot f(\lambda x + \mu y) = \eta(\lambda f(x) + \mu f(y)) = \lambda(\eta f)(x) + \mu(\eta f)(y)$
- $\mathrm{Hom}_K(V, W) \neq \emptyset$: $c_0 \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ □

**Lemma III.5.8**
Sei $U$ ein weiterer $K$-VR. Sind $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$, so ist $f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2$ und $(f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g$.

*Beweis.* Für $x \in U$ ist

- $(f \circ (g_1 + g_2))(x) = f((g_1 + g_2)(x)) = f(g_1(x) + g_2(x)) = f(g_1(x)) + f(g_2(x)) = (f \circ g_1 + f \circ g_2)(x)$
- $((f_1 + f_2) \circ g)(x) = (f_1 + f_2)(g(x)) = f_1(g(x)) + f_2(g(x)) = (f_1 \circ g + f_2 \circ g)(x)$ □

**Folgerung III.5.9**
Unter der Komposition wird $\mathrm{End}_K(V)$ zu einem Ring mit Einselement $\mathrm{id}_V$ und $\mathrm{End}_K(V)^\times = \mathrm{Aut}_K(V)$.

*Beweis.* $(\mathrm{End}_K(V), +)$ ist eine abelsche Gruppe, die Komposition eine Verknüpfung auf $\mathrm{End}_K(V)$ ist assoziativ und die Distributivgesetze gelten (Lemma III.5.8). □

▶ **Bemerkung III.5.10**
Die Menge der strukturverträglichen Abbildungen zwischen $K$-VR trägt also wieder die Struktur eines $K$-VR. Wir können diesen mit unseren Mitteln untersuchen und z.B. nach Dimension und Basis fragen.

**Lemma III.5.11**
Seien $m, n, r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n\times r}(K)$. Für die linearen Abbildungen $f_A \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$, $f_B \in \mathrm{Hom}_K(K^r, K^n)$ gilt dann $f_{AB} = f_A \circ f_B$.

*Beweis.* Sind $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{jk})$, so ist $(f_A \circ f_B)(e_k) = f_A(f_B(e_k)) = f_A(Be_k) = f_A(b_{1k}, ..., b_{nk})^t = A \cdot (b_{1k}, ..., b_{nk})^t = (\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, ..., \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{jk})^t = AB \cdot e_k = f_{AB}(e_k)$ für $k = 1, ..., r$, also $f_A \circ f_B = f_{AB}$. □

**Satz III.5.12**
Die Abbildung $A \to f_A$ liefert einen Isomorphismus von $K$-VR $F_{m\times n}$: $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \to \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ sowie einen Ringisomorphismus $F_n : \mathrm{Mat}_n(F) \to \mathrm{End}_K(K^n)$ der $\mathrm{GL}_n(K)$ auf $\mathrm{Aut}_K(K^n)$ abbildet.

*Beweis.* Wir schreiben $F$ für $F_{m\times n}$

- $F$ ist linear: Sind $A, B \in Mat - n \times m(K)$ und $\lambda, \mu \in K$, so ist $F(\lambda A + \mu B)(x) = f_{\lambda A+\mu B}(x) = (\lambda A + \mu B)x = \lambda Ax + \mu Bx = \lambda f_A(x) + \mu f_B(x) = (\lambda F(A) + \mu F(B))(x)$, also ist $F$ linear.
- $F$ ist injektiv: Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Ist $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ mit $F(A) = 0$, so insbesondere $0 = F(A)(e_j) = f_A(e_j) = Ae_j = (a_{1j}, ..., a_{mj})^t$, also $A = 0$.
- $F$ ist surjektiv: Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Schreibe $f(e_j) = (a_{1j}, ..., a_{mj})^t$ und setze $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$. Dann ist $f_A \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ mit $f_A(e_j) = Ae_j = f(e_j)$, also $f = f_A = F(A) \in \mathrm{Im}(f)$.
- $F_n$ ist eine Ringhomomorphismus:
  (RH1) aus (L1)
  (RH2) aus $f_{AB} = f_A \circ f_B$.
- Somit ist $F_n$ eine Ringisomorphismus $\Rightarrow F_n(\mathrm{Mat}_n(K)^\times) = \mathrm{End}_K(V)^\times$, also $F_n(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{Aut}_K(V)$. □

# III.6. Koordinatendarstellung linearer Abbildungen

Seien $V, W$ endlichdimensionale $K$-VR mit den Basen $B = (x_1, ..., x_n)$ und $C = (y_1, ..., y_m)$.

**Definition III.6.1 (darstellende Matrix)**
Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Für $j = 1, ..., n$ schreiben wir $f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ mit eindeutig bestimmten $a_{ij} \in K$. Die Matrix $M_C^B(f) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ heißt die darstellende Matrix von $f$ bezüglich der Basen $B$ und $C$.

**Satz III.6.2**
Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Die darstellende Matrix $M_C^B(f)$ ist die eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$, für die das folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_A} & K^m \\ {\scriptstyle \Phi_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_C} \\ V & \xrightarrow[f]{} & W \end{array}$$

d.h. $f \circ \Phi_B = \Phi_C \circ f_A$.

*Beweis.* Sei zunächst $A = M_C^B(f)$. Für $j = 1, ..., n$ ist $\Phi_C(f_A(e_j)) = \Phi_C((a_{1j}, ..., a_{mj})^t) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i = f(x_j) = f(\Phi_B(e_j))$, also $\Phi_C \circ f_A = f \circ \Phi_B$.
Sei umgekehrt $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ mit $\Phi_C \circ f_A = f \circ \Phi_B$. Da $\Phi_B$ und $\Phi_C$ Isomorphismen sind, ist $f_A$ eindeutig bestimmt: $f_A = \Phi_C^{-1} \circ f \circ \Phi_B$ und deshalb auch $A$. □

**Folgerung III.6.3**
Die Abbildung $M_C^B \colon \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ ist ein Isomorphismus von $K$-VR.

*Beweis.* Definiere $A \colon \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ mit $f \mapsto \Phi_C^{-1} \circ f \circ \Phi_B$. $A(f) = F_{m\times n}(M_C^B(f))$, also $A = F_{m\times n} \circ M_C^B$. Die Abbildung ist bijektiv, da $\Phi_B$ und $\Phi_C$ bijektiv sind, und linear, da $\Phi_B$ und $\Phi_C$ linear sind. Also ist $A$ ein Isomorphismus. Da auch $F_{m\times n}^{-1}$ ein Isomorphismus ist, ist folglich auch $M_C^B = F_{m\times n}^{-1} \circ A$. □

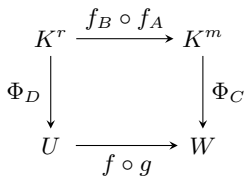
**Lemma III.6.4**
Sei $U$ ein weitere $K$-VR mit endlicher Basis $D$. Für $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $g \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ ist

$$M_C^B(f) \cdot M_B^D(g) = M_C^D(f \circ g)$$

*Beweis.* Sei $r = \dim_K(U)$ und $A = M_B^D(g)$ und $B = M_C^B(f)$. Nach III.6.2 kommutieren die beiden kleinen Quadrate in:

$$\begin{array}{ccccc} K^r & \xrightarrow{f_A} & K^n & \xrightarrow{f_B} & K^m \\ {\scriptstyle \Phi_D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_B} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_C} \\ U & \xrightarrow[g]{} & V & \xrightarrow[f]{} & W \end{array}$$

Deshalb kommutiert auch:




Die Eindeutigkeit impliziert deshalb, dass $F_{m\times n}(M_C^B(f)) \circ F_{r\times m}(M_B^D(g)) = F_{r\times n}(M_C^D(f \circ g))$. Da $F_{r\times n}$ injektiv ist, folgt $M_C^B(f) \cdot M_B^D(g) = M_C^D(f \circ g)$. □

**Folgerung III.6.5**
Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Genau dann ist $f$ ein Isomorphismus, wenn $m = n$ und $M_C^B(f) = \mathrm{GL}_(\, K)$. In diesem Fall ist $M_B^C(f^{-1}) = M_C^B(f)^{-1}$.

*Beweis.* Sei $A = M_C^B(f)$. $f$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $f_A$ einer ist, und in diesem Fall ist $m = n$. Zudem ist $f_A$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $A \in \mathrm{GL}_(\, K)$. Ist $f$ ein Isomorphismus, so ist $M_B^C(f^{-1}) \cdot M_C^B(f) = M_C^C(f^{-1} \circ f) = 1_n$, also $M_B^C(f^{-1}) = M_C^B(f)^{-1}$. □

**Folgerung III.6.6**
Die Abbildung $M_B := M_B^B \colon \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{Mat}_n(K)$ ist ein Ringisomorphismus, der $\mathrm{Aut}_K(V)$ auf $\mathrm{GL}_(\, K)$ abbildet.

*Beweis.* Folgerung III.6.3, Lemma III.6.4, Folgerung III.6.5 □

**Definition III.6.7 (Transformationsmatrix)**
Sind $B$ und $B'$ Basen von $V$, so nennt man $T_{B'}^B := M_{B'}^B(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{GL}_(\, K)$ die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $B$ nach $B'$.

▶ **Bemerkung III.6.8**
Nach III.6.2 ist $T_{B'}^B$, also die Matrix $A$, die $f_A = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_B$ erfüllt. Ist $x = \Phi_B^{-1}(v) \in K^n$ der Koordinatenvektor von $v$ bezüglich $B$, so ist $T_{B'}^B \cdot x = f_{T_{B'}^B}(x) = (\Phi_{B'} \circ \Phi_B)(\Phi_B^{-1}(v)) = \Phi_{B'}^{-1}(v)$ der Koordinatenvektor von $v$ bezüglich $B'$.

**Satz III.6.9 (Transformationsformel)**
Seien $B, B'$ Basen von $V$ und $C, C'$ Basen von $W$. Für $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist

$$M_{C'}^B(f) = T_{C'}^C \cdot M_C^B(f) \cdot (T_{B'}^B)^{-1}$$

*Beweis.* $f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V$ mit den Basen $B', B, C, C'$ und erhält $M_{C'}^{B'}(f) = M_{C'}^C(\mathrm{id}_W) \cdot M_C^B(f) \cdot M_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = T_{C'}^C \cdot M_C^B(f) \cdot T_B^{B'}$ und $T_B^{B'} = M_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = M_B^{B'}(\mathrm{id}_V^{-1}) = M_{B'}^B(\mathrm{id}_V)^{-1} = (T_{B'}^B)^{-1}$. □

**Folgerung III.6.10**
Sind $B$ und $B'$ Basen von $V$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so gilt $M_{B'}(f) = T_{B'}^B \cdot M_B(f) \cdot (T_{B'}^B)^{-1}$.

# III.7. Quotientenräume

Seien $V, W$ $K$-VR und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

**Definition III.7.1 (affiner Unterraum)**
Ein affiner Unterraum von $V$ ist eine Teilmenge der Form

$$x + U := \{x + u \mid u \in U\} \subseteq V$$

wobei $U \subseteq V$ ein beliebiger Untervektorraum von $V$ ist und $x \in V$.

**Lemma III.7.2**
Für $x, x' \in V$ sind äquivalent:

- $x + U = x' + U$
- $x' \in x + U$
- $x' - x \in U$

*Beweis.*
- $1 \Rightarrow 2$: $x' = x' + 0 \in x' + U = x + U$
- $2 \Rightarrow 3$: $x' \in x + U \Rightarrow x' = x + u$ mit $u \in U \Rightarrow x' - x = u \in U$
- $3 \Rightarrow 1$: Sei $u_0 := x' - x \in U$. Für $u \in U$ ist $x + u = x' - u_0 + u \in x' + U$, also $x' + U \subseteq x + U$, $x' + u = x + u_0 + u \in x + U$, also $x + U \subseteq x' + U$. □

**Lemma III.7.3**
Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $U = \mathrm{Ker}(f)$. Für $y \in f(V)$ ist die Faser $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ von $f$ der affine Unterraum $x_0 + U$ für ein beliebiges $x_0 \in f^{-1}(y)$.

*Beweis.* $f^{-1}(y) = \{x \in V \mid f(x) = f(x_0)\} = \{x \in V \mid f(x - x_0) = 0\} = \{x \in V \mid x - x_0 \in U\} = x_0 + U$ □

■ **Beispiel III.7.4**
Sind $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$ und $f(x, y) = x - 2y$ so sind die Fasern von $f$ die Geraden $L \subseteq \mathbb{R}^2$ der Steigung $\frac{1}{2}$.

**Lemma III.7.5**
Seien $x_1, x_1', x_2, x_2' \in V$ und $\lambda \in K$. Ist $x_1 + U = x_1' + U$ und $x_2 + U = x_2' + U$, so ist $(x_1 + x_2) + U = (x_1' + x_2') + U$, und $\lambda x_1 + U = \lambda x_1' + U$.

*Beweis.*
- $x_1 + U = x_1' + U$, $x_2 + U = x_2' + U \Rightarrow x_1' - x_1, x_2' - x_2 \in U \Rightarrow (x_1' + x_2') - (x_1 + x_2) = (x_1' - x_1) - (x_2' - x_2) \in U \Rightarrow (x_1 + x_2) + U = (x_1' + x_2') + U$
- $x_1 + U = x_1' + U \Rightarrow x_1' - x_1 \in U \Rightarrow \lambda x_1' - \lambda x_1 \in U \Rightarrow \lambda x_1' + U = \lambda x_1 + U$ □

**Definition III.7.6 (Quotientenraum)**
Der Quotientenraum von $V$ modulo $U$ ist die Menge der affinen Unterräume

$$V/U := \{x + U \mid x \in V\}$$

mit der Addition $(x_1 + U) + (x_2 + U) = (x_1 + x_2) + U$ und der Multiplikation $\lambda(x + U) = \lambda x + U$. Dies ist wohldefiniert nach Lemma III.7.5.

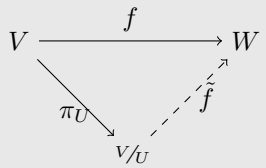
Wir definieren die Abbildung $\pi_U : V \to V/U$ durch $\pi_U(x) = x + U$.

**Satz III.7.7**
Der Quotientenraum $V/U$ ist ein $K$-VR und $\pi_U$ ein Epimorphismus mit Kern $U$.

*Beweis.*
- $(V/U, +)$ ist eine abelsche Gruppe:
  - Assoziativität un Kommutativität: überträgt sich von $(V, +)$
  - neutrales Element: $0 + U = U$
  - inverses Element: $-(x + U) = (-x) + U$
- $(V/U, +)$ ist $K$-VR: (V2) überträgt sich von $(V, +, \cdot)$
- $\pi_U$ surjektiv: nach Definition von $V/U$
- $\pi_U$ linear: nach Definition von $+$ und $\cdot$ auf $V/U$
- $\mathrm{Ker}(\pi_U) = \{x \in V \mid x + U = U\} = \{x \in V \mid x \in 0 + U\} = U$ □

▶ **Bemerkung III.7.8**
Die Untervektorraum sind also genau die Kerne linearer Abbildungen! Ist $f : V \to W$ linear, so ist $\mathrm{Ker}(f) \subseteq V$ ein Untervektorraum. Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist $\pi_U : V \to V/U$ linear mit Kern $U$.

**Theorem III.7.9 (Homomorphiesatz)**
Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\tilde{f} : V/U \to W$ mit $f = \tilde{f} \circ \pi_U$, d.h. es kommutiert:




Diese erfüllt $\mathrm{Ker}(\tilde{f}) = {}^{\mathrm{Ker}(f)/U} = \{x + U \mid x \in \mathrm{Ker}(f)\} \subseteq {}^{V/U}$.

*Beweis.* Ist $f = \tilde{f} \circ \pi_U$, so gilt $\tilde{f}(x + U) = \tilde{f}(\pi_U) = f(x)$ $(*)$, somit ist $\tilde{f}$ dann eindeutig bestimmt. Umgekehrt wird durch $(*)$ eine wohldefinierte Abbildung $\tilde{f}$ erklärt: Sind $x, x' \in V$ mit $x + U = x' + U$, so ist $x - x' \in U \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ und deshalb $f(x) = f(x')$.

- Linearität: Für $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ ist $\tilde{f}(\lambda(x + U) + \mu(y + U)) = \tilde{f}(\lambda\pi_U(x) + \mu\pi_U(y)) = \lambda\tilde{f}(x + U) + \mu\tilde{f}(y + U)$.

- Kern: $\tilde{f}(x+U)=0 \iff f(x)=0 \iff x\in \mathrm{Ker}(f)$. □

**Folgerung III.7.10**
Für $f\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ ist $\mathrm{Im}(f)\cong {}^{V}\!/_{\mathrm{Ker}(f)}$. Insbesondere gilt: Ist $f$ ein Epimorphismus, so ist $W\cong {}^{V}\!/_{\mathrm{Ker}(f)}$.

*Beweis.* Betrachte $\tilde{f}: {}^{V}\!/_{\mathrm{Ker}(f)}\to W$. Nach Theorem III.7.9 ist $\mathrm{Ker}(\tilde{f}) = {}^{\mathrm{Ker}(f)}\!/_{\mathrm{Ker}(f)} = \{\mathrm{Ker}(f)\}$, also $\tilde{f}$ injektiv. Nach Definition ist $\tilde{f}({}^{V}\!/_{\mathrm{Ker}(f)}) = f(V) = \mathrm{Im}(f)$. Somit ist $\tilde{f}: {}^{V}\!/_{\mathrm{Ker}(f)}\to \mathrm{Im}(f)$ ein Isomorphismus. □

**Satz III.7.11**
Seien $U, U'$ Untervektorraum von $V$. Genau dann ist $V = U\oplus U'$, wenn $\pi_U|_{U'} : U'\to {}^{V}\!/_{U}$ ein Isomorphismus ist.

*Beweis.*
- $\pi_U|_{U'}$ injektiv $\iff \mathrm{Ker}(\pi_U|_{U'})=\{0\} \iff \mathrm{Ker}(\pi_U)\cap U' = \{0\} \iff U\cap U' = \{0\}$
- $\pi_U|_{U'}$ surjektiv $\iff \forall x\in V \exists u'\in U : \pi_U(u') = \pi_U(x) \iff u'-x\in \mathrm{Ker}(\pi_U) = U \iff x = u+u' \iff V = U+U'$ □

**Folgerung III.7.12**
Ist $\dim_K(V)<\infty$, so ist $\dim_K({}^{V}\!/_{U}) = \dim_K(V) - \dim_K(U)$.

*Beweis.* Es existiert ein lineares Komplement $U'$ zu $U$ in $V$ (d.h. $V = U\oplus U'$) und $\dim_K(U') = \dim_K(V) - \dim_K(U)$. Es gilt ${}^{V}\!/_{U} = U'$. □

**Folgerung III.7.13**
Ist $\dim_K(V)<\infty$ und $f\in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, so ist $\dim_K(V) = \dim_K(\mathrm{Ker}(f)) + \dim_K(\mathrm{Im}(f))$.

*Beweis.* III.7.11 und Folgerung III.7.12 □

**Folgerung III.7.14**
Ist $\dim_K(V)<\infty$ und $f\in \mathrm{End}_K(V)$, so sind äquivalent:

- $f\in \mathrm{Aut}_K(V)$
- $f$ ist injektiv
- $f$ ist surjektiv

*Beweis.*
- 2 $\iff \dim_K(\mathrm{Ker}(f)) = 0$
- 3 $\iff \dim_K(\mathrm{Im}(f)) = \dim_K(V)$ □

▶ **Bemerkung III.7.15**
Analog zu dem Quotientenräumen kann man definieren:

- Quotientengruppen ${}^{G}\!/_{N}$, wobei $N$ Normalteiler von $G$ ist
- Quotientenringe ${}^{R}\!/_{I}$, wobei $I$ ein Ideal von $R$ ist (z.B. ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{n\mathbb{Z}}$)

Diese werden in der Vorlesung *Algebra und Zahlentheorie* behandelt.

# III.8. Rang

Seien $V, W$ zwei endlichdimensionale $K$-VR und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

**Definition III.8.1 (Rang)**
Der Rang von $f$ ist $\mathrm{rk}(f) = \dim_K(\mathrm{Im}(f))$.

▶ **Bemerkung III.8.2**
Es ist $\mathrm{rk}(f) = \dim_K(V) - \dim_K(\mathrm{Ker}(f))$. Also ist $f$ genau dann injektiv, wenn $\mathrm{rk}(f) = \dim_K(V)$. Auch sehen wir, dass $\mathrm{rk}(f) \leq \min\{\dim_K(V), \dim_K(W)\}$.

**Lemma III.8.3**
Sei $U$ ein weiterer endlichdimensionaler $K$-VR und $g \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$.

- Ist $g$ surjektiv, dann ist $\mathrm{rk}(f \circ g) = \mathrm{rk}(f)$.
- Ist $f$ injektiv, dann ist $\mathrm{rk}(f \circ g) = \mathrm{rk}(g)$.

*Beweis.* Dies folgt sofort aus $\mathrm{Im}(f \circ g) = f(\mathrm{Im}(g))$. □

**Satz III.8.4**
Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Genau dann ist $\mathrm{rk}(f) = r$, wenn es $B$ von $V$ und $C$ von $W$ gibt, für die

$$M_C^B(f) = E_r = \sum_{i=1}^{r} E_{ii}$$

$$E_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Beweis.*
- Rückrichtung: Ist $M_C^B(f) = E_r$ und $C = (y_1, ..., y_n)$, so ist $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}_K(y_1, ..., y_r)$, also $\mathrm{rk}(f) = r$.
- Hinrichtung: Sei $r = \mathrm{rk}(f)$. Setze $U = \mathrm{Ker}(f)$ und $W = \mathrm{Im}(f)$. Wähle Basis $(y_1, ..., y_r)$ und ergänze diese zu einer Basis $C$ von $W$. Wähle für $i = 1, ..., r$ ein $x_i \in f^{-1}(y_i)$. Dann ist $(x_1, ..., x_r)$ linear unabhängig und mit $U' = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_r)$ ist $f|_{U'} : U' \to W_0$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist $U \cap U' = \{0\}$ und es folgt $V = U \oplus U'$. Ist also $(x_{r+1}, ..., x_n)$ eine Basis von $U$, so ist $B = (x_1, ..., x_n)$ eine Basis von $V$. Diese Basis erfüllt $M_C^B(f) = E_r$. □

**Definition III.8.5 (Rang einer Matrix)**
Der Rang einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ ist $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(f_A)$, wobei $f_A : K^n \to K^m$ die durch $A$ beschriebene lineare Abbildung ist.

▶ **Bemerkung III.8.6**

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Man fasst die Spalten $a_j = (a_{1j}, ..., a_{mj})^t$ als Elemente des $K^m$ auf und definiert den Spaltenraum $\mathrm{SR}(A) = \mathrm{span}_K(a_1, ..., a_n) \subseteq K^m$. Entsprechend definiert man den Zeilenraum $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{span}_K(\tilde{a}_1^t, .., \tilde{a}_m^t) \subseteq K^n$. Es ist $\mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{SR}(A)$ und folglich $\mathrm{rk}(A) = \dim_K(\mathrm{SR}(A))$. Außerdem ist $\mathrm{SR}(A^t) = \mathrm{ZR}(A)$ und deshalb $\mathrm{rk}(A^t) = \dim_K(\mathrm{ZR}(A))$. Man nennt $\mathrm{rk}(A)$ deshalb auch den Spaltenrang von $A$ und $\mathrm{rk}(A^t)$ den Zeilenrang von $A$.

**Lemma III.8.7**

Ist $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $S \in \mathrm{GL}_m(K)$, $T \in \mathrm{GL}_n(K)$, so ist $\mathrm{rk}(SAT) = \mathrm{rk}(A)$.

*Beweis.* $\mathrm{rk}(SAT) = \mathrm{rk}(f_{SAT}) = \mathrm{rk}(f_S \circ f_A \circ f_T) = \mathrm{rk}(f_A) = \mathrm{rk}(A)$, da $f_S$ und $f_T$ bijektiv sind. □

**Satz III.8.8**

Für jedes $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ gibt es $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $SAT = E_r$, wobei $r = \mathrm{rk}(A)$.

*Beweis.* Es gibt Basen $B$ von $K^n$ und $C$ von $K^m$ mit $M_C^B(f_A) = E_r$. Mit den Standardbasen $E_n$ bzw. $E_m$ gilt: $M_C^B(f_A) = T_C^{E_m} \cdot M_{E_m}^{E_n}(f_A) \cdot (T_B^{E_n})^{-1} = SAT$ mit $S = T_C^{E_m} \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T = (T_B^{E_n})^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$. □

**Folgerung III.8.9**

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Genau dann gibt es $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = SAT$, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.

*Beweis.*

- Hinrichtung: Lemma III.8.7
- Rückrichtung: $r = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) \Rightarrow$ es gibt $S_1, S_2 \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T_1, T_2 \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S_1AT_1 = E_r = S_2BT_2 \Rightarrow B = S_2^{-1} \cdot SAT_1 \cdot T_2^{-1}$. □

**Satz III.8.10**

Für $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ ist $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^t)$, anders gesagt: $\dim_K(\mathrm{SR}(A)) = \dim_K(\mathrm{ZR}(A))$.

*Beweis.* Mit III.8.8 ergibt sich: $SAT = E_r$ mit $r = \mathrm{rk}(A)$, $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$. Aus $E_r^t = (SAT)^t = T^tA^tS^t$, folgt, dass $\mathrm{rk}(A^t) = \mathrm{rk}(E_r^t) = \mathrm{rk}(A)$. □

**Folgerung III.8.11**

Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ sind äquivalent:

- $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, d.h. es gibt $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $SA = AS = 1_n$
- $\mathrm{rk}(A) = n$
- Die Spalten von $A$ sind linear unabhängig.
- Die Zeilen von $A$ sind linear unabhängig.
- Es gibt $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $SA = 1_n$.
- Es gibt $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $AT = 1_n$.

*Beweis.* • 1 $\iff$ 2: $A \in \mathrm{GL}_n(K) \iff f_A \in Aut_K(K^n) \iff f_A$ surjektiv $\iff \mathrm{rk}(f_A) = n \iff$

$\operatorname{rk}(A) = n$

- $4 \iff 2 \iff 3$
- $1 \Rightarrow 5, 6 \Rightarrow 2$ □

# III.9. Lineare Gleichungssysteme

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ und $b \in K^m$.

**Definition III.9.1 (Lineares Gleichungssystem)**
Unter einem Linearen Gleichungssystem verstehen wir eine Gleichung der Form $Ax = b$. Diese heißt homogen, wenn $b = 0$, sonst inhomogen und $L(A, b) = \{x \in K^n \mid Ax = b\}$ ist sein Lösungsraum.

▶ **Bemerkung III.9.2**
Ist $A = (a_{ij})$, $b = (b_1, ..., b_m)^t$, so schreibt man das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ auch

$$\left|\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right|$$

▶ **Bemerkung III.9.3**
Das homogene System $Ax = 0$ hat als Lösungsraum den Untervektorraum $L(A, 0) = \mathrm{Ker}(f_A)$ der Dimension $\dim_K(L(A, 0)) = n - \mathrm{rk}(A)$. Das inhomogene System hat entweder $L(A, b) = \emptyset$ oder der Lösungsraum ist der affine Unterraum $L(A, b) = f^{-1}(b) = x_0 + L(A, 0)$, wobei $x_0 \in L(A, b)$ beliebig. Man erhält so alle Lösungen des inhomogenen Systems, wenn man eine Lösung und die Lösungen des homogenen Systems kennt.

**Definition III.9.4 (Zeilenstufenform)**
Die Matrix $A = (a_{ij})$ hat Zeilenstufenform, wenn es ganze Zahlen $0 \le r \le m$ und $1 \le k_1 < ... < k_r \le n$ gibt mit:

- für $1 \le i \le r$ und $1 \le j < k_i$ ist $a_{ij} = 0$
- für $1 \le i \le r$ ist $a_{ik_i} \neq 0$ (sogenannte Pivotelemente)
- für $r < i \le m$ und $1 \le j \le n$ ist $a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{2k_2} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{rk_r} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Lemma III.9.5**
Sei $A$ in Zeilenstufenform. Dann ist $\mathrm{rk}(A) = r$.

*Beweis.* Wegen $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^t) = \dim_K(\mathrm{ZR})$ genügt es zu zeigen, dass die ersten $r$ Zeilen $a_1, ..., a_r$ linear unabhängig sind. Ist $\sum_{i=1}^{r} \lambda a_i = 0$, so ist insbesondere $0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{ik_i} = \lambda_1 a_{1k_1}$, also $\lambda_1 = 0$, und dann immer so weiter. □

**Satz III.9.6**
Sei $A$ in Zeilenstufenform.

- Ist $b_i \neq 0$ für ein $r < i \leq m$, so ist $L(A, b) = \emptyset$.
- Ist $b_i = 0$ für alle $r < i \leq m$, so erhält man alle $x \in L(A, b)$, indem man erst $x_j \in K$ für $j \in \{1, .., n\} \backslash \{k_1, ..., k_r\}$ beliebig wählt und dann für $i = r, r-1, ..., 1$ rekursiv $x_{k_i} = a_{1k_i}^{-1} \cdot (b_i - \sum_{j=k_i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j) \quad (*)$ setzt.

*Beweis.*
- Klar.
- Sicher erhält man auf diese Weise Lösungen $x \in L(A, b)$. Umgekehrt muss jede solche Lösung $(*)$ erfüllen, man erhält auf diese Weise also alle. □

**Definition III.9.7 (Elementarmatrizen)**
Für $i, j \in \{1, ..., m\}$, $\lambda \in K^\times$ und $\mu \in K$ definieren wir $m \times m$-Matrizen, die sogenannten Elementarmatrizen:

- $S_i(\lambda) := 1_m + (\lambda - 1)E_{ii}$
- $Q_{ij}(\mu) := 1_m + \mu E_{ij}$
- $P_{ij} := 1_m + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$

▶ **Bemerkung III.9.8**
Multiplikation einer dieser Matrizen von links an die Matrix $A$ hat folgende Wirkung:

- $S_i(\lambda) \cdot A$: Multiplikation der $i$-ten Zeile mit $\lambda$
- $Q_{ij}(\mu) \cdot A$: Addition des $\mu$-fachen der $j$-ten Zeile zur $i$-ten Zeile
- $P_{ij}$: Vertauschung von $i$-ter und $j$-ter Zeile

Man spricht dann von sogenannten elementaren Zeilenumformungen der Matrix $A$ von Typ I, II oder III.

**Lemma III.9.9**
Es sind $S_i(\lambda), Q_{ij}(\mu), P_{ij} \in \mathrm{GL}_m(K)$. Dann ist $S_i(\lambda)^{-1} = S_i(\lambda^{-1}), Q_{ij}(\mu)^{-1} = Q_{ij}(-\mu), P_{ij}^{-1} = P_{ij}$. Insbesondere gilt: Ist $E$ eine der Elementarmatrizen, so ist $\mathrm{ZR}(EA) = \mathrm{ZR}(A)$ und $L(EA, 0) = L(A, 0)$. Weiterhin ist $\mathrm{rk}(EA) = \mathrm{rk}(A)$.

*Beweis.* Inverse nachprüfen. Da $E \in \mathrm{GL}_m(K)$ sind $f_E, f_{E^t} \in Aut_K(K^m)$, also $\mathrm{ZR}(EA) = \mathrm{SR}((EA)^t) = \mathrm{Im}(f_{A^t E^t}) = \mathrm{Im}(f_{A^t} \circ f_{E^t}) = \mathrm{Im}(f_{A^t}) = \mathrm{ZR}(A)$ und $L(EA, 0) = \mathrm{Ker}(f_{EA}) = \mathrm{Ker}(f_E \circ f_A) = \mathrm{Ker}(f_A) = L(A, 0)$. □

▶ **Bemerkung III.9.10**

Anders gesagt: Elementare Zeilenumformungen verändern den Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems nicht.

**Theorem III.9.11 (Eliminierungsverfahren nach Gauss)**
Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ gibt es $l \in \mathbb{N}_0$ und Elementarmatrizen $E_1, ..., E_l$ vom Typ II und III für die $E_l \cdot ... \cdot E_1 \cdot A$ in Zeilenstufenform ist.

*Beweis.* Seien $a_1, ..., a_n$ die Spalten von $A$.
Ist $A = 0$ so ist nichts zu tun.
Sei nun $A \neq 0$ und sei $k_1$ minimal mit $a_{k_1} \neq 0$. Es gibt also ein $i$ mit $a_{ik_1} \neq 0$. Durch Vertauschen der ersten und der $i$-ten Zeile erreichen wir, dass $a_{1k_1} = 0$, d.h. wir multiplizieren $A$ mit $E_1 = P_{1i}$. Nun addieren wir für $i = 2, .., m$ ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile zur $i$-ten Zeile, um $a_{ik_1} = 0$, d.h. wir multiplizieren $A$ mit $E_i = Q_{i1}(\mu_i)$ für $\mu_i = \frac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}}$. Nach diesen Umformungen haben wir eine Matrix der Form:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

und können nun mit dem Rest der Matrix $A =: A'$ von vorne beginnen. Die nun folgenden Zeilenumformungen werden die erste Zeile und die ersten $k_1$ Spalten nicht mehr ändern, und weil $A'$ weniger Zeilen und Spalten als $A$ hat, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab. □

**Folgerung III.9.12**
Zu jeder Matrix $A$ gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ für die $SA$ in Zeilenstufenform ist.

*Beweis.* folgt direkt aus Theorem III.9.11 mit $S = E_l \cdot ... \cdot E_1$ □

▶ **Bemerkung III.9.13**

Der Beweis für das Eliminierungsverfahren liefert ein Verfahren, die Elementarmatrizen $E_1, ..., E_l$ zu finden. Damit erhält man ein Verfahren ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Setzt man $S = E_l \cdot ... \cdot E_1$, $A' = SA$ und $b' = Sb$, so ist $L(A, b) = L(A', b')$: $Ax = b \Rightarrow SAx = Sb$ bzw. $A'x = b' \Rightarrow S^{-1}A'x = S^{-1}b'$.
Das Gleichungssystem kann dann gelöst werden. Praktisch führt man die elementaren Zeilenumformungen an $A$ parallel dazu auch an $b$ durch.

▶ **Bemerkung III.9.14**

Es gibt von diesem Verfahren verschiedene Varianten und weitere Anwendungen: So kann man z.B. die Invertierbarkeit einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ prüfen und ggf. das Inverse bestimmen: Ist $E_l \cdot ... \cdot E_1 \cdot A$ in Zeilenstufenform, so ist $A$ genau dann invertierbar, wenn alle Zeilen von Null verschieden sind. Ist dies der Fall, so ist $r = n$ und $k_i = i$ für alle $i$, und man findet weitere Elementarmatrizen $E_{l+1}, ..., E_s$ vom Typ I und II, für die $E_s \cdot ... \cdot E_1 \cdot A = 1_n$. Dann ist $S' = E_s \cdot ... \cdot E_1 \cdot A = A^{-1}$. Praktisch erhält man $A^{-1}$, indem man die Zeilenumformungen an $A$ parallel

dazu auch an $1_n$ ausführt.

**Folgerung III.9.15**
Jedes $A \in \mathrm{GL}_m(K)$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

*Beweis.* $A^{-1} = S' = E_s \cdot ... \cdot E_1 \Rightarrow A = (E_s \cdot ... \cdot E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdot ... \cdot E_s^{-1}$ □

# Kapitel IV

# *Determinanten*

## IV.1. Das Vorzeichen einer Permutation

In diesem Kapitel sei $K$ ein Körper und $R$ ein kommutativer Ring mit Einselement.

▶ **Bemerkung IV.1.1**
Wir erinnern uns an die symmetrische Gruppe $S_n$, die aus den Permutationen der Menge $X = \{1, .., n\}$ (also den bijektiven Abbildungen $X \to X$) mit der Komposition als Verknüpfung. Es ist $|S_n| = n!$ und $S_2 \cong \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$, doch für $n \geq 3$ ist $S_n$ nicht abelsch. Wir schreiben $\sigma_1\sigma_2$ für $\sigma_1 \circ \sigma_2$ und notieren $\sigma \in S_n$ auch als

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

■ **Beispiel IV.1.2**
Für $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i \neq j$ bezeichne $\tau_{ij} \in S_n$ die Transposition

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j & \text{falls k=i} \\ i & \text{falls k=j} \\ k & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar gilt $\tau_{ij}^2 = \mathrm{id}$, also $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij} = \tau_{ji}$.

**Satz IV.1.3**
Für jedes $\sigma \in S_n$ gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und die Transpositionen $\tau_1, ..., \tau_r \in S_n$ mit

$$\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_r$$

*Beweis.* Sei $1 \leq k \leq n$ maximal mit $\sigma(i) = i$ für $i \leq k$. Induktion nach $n - k$.
Ist $n - k = 0$, so ist $\sigma = \mathrm{id}$ und wir sind fertig.
Andernfalls ist $l = k + 1 \leq n$ und $\sigma(l) > l$. Für $\sigma' = \tau_{l,\sigma(l)} \circ \sigma$ ist $\sigma(l) = l$ und somit $\sigma'(i) = i$ für $1 \leq i \leq k + 1$.
Nach Induktionshypothese gibt es Transpositionen $\tau_1, ..., \tau_r$ mit $\sigma' = \tau_1 \circ ... \circ \tau_r$. Es folgt $\sigma = \tau_{l,\sigma(l)}^{-1} \circ \sigma^{-1} = \tau_{l,\sigma(l)} \circ \tau_1 \circ ... \circ \tau_r$. □

**Definition IV.1.4 (Fehlstand, Vorzeichen)**
Sei $\sigma \in S_n$.

- Ein Fehlstand von $\sigma$ ist ein Paar $(i,j)$ mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.
- Das Vorzeichen (oder Signum) von $\sigma$ ist $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{f(\sigma)} \in \{-1,1\}$, wobei $f(\sigma)$ die Anzahl der Fehlstände von $\sigma$ ist.
- Man nennt $\sigma$ gerade, wenn $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, sonst ungerade.

■ **Beispiel IV.1.5**

- Genau dann hat $\sigma$ keine Fehlstände, wenn $\sigma = \mathrm{id}$. Insbesondere $\operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1$.
- Die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  hat die Fehlstände $(1,3)$ und $(2,3)$, somit $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.
- Die Transposition

$$\tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  hat die Fehlstände $(1,2)$, $(2,3)$ und $(3,1)$, somit $\operatorname{sgn}(\tau_{13}) = -1$.
- Eine Transposition $\tau_{ij} \in S_n$ ist ungerade: Ist $i < j$, so sind die Fehlstände $(i, i+1), ..., (i,j)$ und $(j+1, j)...(j-1, j)$, also $j - (i+1) + 1 + (j-1) - (i-1) + 1 = 2(j-1) - 1$ viele.

**Lemma IV.1.6**
Für $\sigma \in S_n$ ist

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \in \mathbb{Q}$$

*Beweis.* Durchläuft $(i,j)$ alle Paare $1 \leq i < j \leq n$, so durchläuft $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ alle zweielementigen Teilmengen von $\{1, ..., n\}$. Das Produkt $\prod_{i<j} \sigma(j) - \sigma(i)$ hat also bis auf das Vorzeichen die selben Faktoren wie das Produkt $\prod_{i<j} j - i = \prod_{i<j} |j - i|$ und $\prod_{i<j} \sigma(j) - \sigma(i) = \prod_{i<j, \sigma(i)<\sigma(j)} \sigma(j) - \sigma(i) \cdot \prod_{i<j, \sigma(i)>\sigma(j)} \sigma(j) - \sigma(i) = (-1)^{f(\sigma)} \cdot \prod_{i<j} |\sigma(j) - \sigma(i)| = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i<j} j - i$. □

**Satz IV.1.7**
Die Abbildung $\operatorname{sgn} : S_n \to \mathbb{Z}^\times = \mu_2$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

*Beweis.* Seien $\sigma, \tau \in S_n$. Dann ist $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j-i} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i}$. Da mit $\{i,j\}$ auch $\{\tau(i), \tau(j)\}$ alle zweielementigen Teilmengen von $\{1, ..., n\}$ und $\frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} = \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)}$ ist $\prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j-i} = \operatorname{sgn}(\sigma)$ und $\prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i} = sng(\tau)$.

Somit ist $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau)$. □

**Folgerung IV.1.8**
Für $\sigma \in S_n$ ist

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$$

*Beweis.* $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)^{-1} = \text{sgn}(\sigma)$ □

**Folgerung IV.1.9**
Sei $\sigma \in S_n$. Sind $\tau_1, ..., \tau_r$ Transpositionen mit $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_r$, so ist

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^r$$

*Beweis.* Beispiel IV.1.5 und IV.1.7 □

**Folgerung IV.1.10**
Die geraden Permutationen $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}$ bilden einen Normalteiler von $S_n$, genannt die alternierende Gruppe. Ist $\tau \in S_n$ mit $\text{sgn}(\tau) = -1$, so gilt für $A_n\tau = \{\sigma\tau \mid \sigma \in A_n\}$: $A_n \cup A_n\tau = S_n$ und $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$.

*Beweis.* Es ist $A_n = Ker(\text{sgn})$ und damit ist dieser auch ein Normalteiler. Ist $\sigma \in S_n \backslash A_n$, so ist $\text{sgn}(\sigma\tau^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau)^{-1} = (-1)(-1)^{-1} = 1$, also $\sigma = \sigma\tau^{-1} \in A_n\tau$, somit $A_n \cup A_n\tau = S_n$. Ist $\sigma \in A_n$, so ist $\text{sgn}(\sigma\tau) = -1$, also $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$. □

# IV.2. Determinante einer Matrix

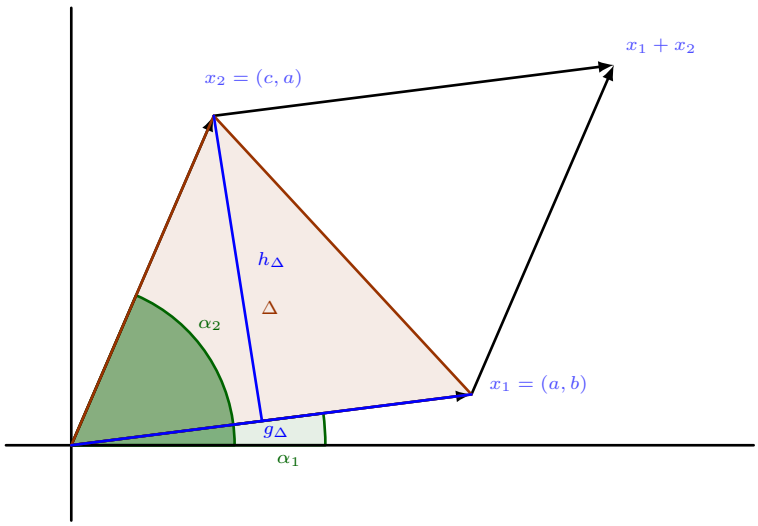
▶ **Bemerkung IV.2.1**
Wir werden nun auch Matrizen mit Koeffizienten in Ring $R$ anstatt $K$ betrachten. Mit der gewohnten Addition und Multiplikation bilden die $n \times n$-Matrizen einen Ring $\mathrm{Mat}_n(R)$, und wir definieren wieder $\mathrm{GL}_n(R) = \mathrm{Mat}_n(R)^\times$.

▶ **Bemerkung IV.2.2**
Seien $a_1, ..., a_n \in R^m$ Spaltenvektoren, so bezeichnen wir mit $A = (a_1, ..., a_n) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ die Matrix mit den Spalten $a_1, ..., a_n$. sind $\widetilde{a_1}, ..., \widetilde{a_m} \in R^n$ Zeilenvektoren, so bezeichnen wir mit $\tilde{A} = (\widetilde{a_1}, ..., \widetilde{a_m}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ die Matrix mit den Zeilen $\widetilde{a_1}, ..., \widetilde{a_m}$.

▶ **Bemerkung IV.2.3**
Wir hatten bereits definiert: $\det(A) = ad - bc$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K)$$

und hatten festgestellt: $\det(A) \neq 0 \iff A \in \mathrm{GL}_2(K)$. Interpretation im $K = \mathbb{R}$:




Parallelogramm hat die Fläche $|\det A|$. Polarkoordianten: $x_i = \lambda_i(\cos a_i, \sin a_i)$. Ohne Einschrän-

kung: $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \pi$

$$F_P = 2 \cdot F_\Delta = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g_\Delta \cdot h_\Delta$$
$$g_\Delta = \lambda_1$$
$$h_\Delta = \lambda_2 \cdot \sin(a_2 - a_1)$$
$$F_P = \lambda_1\lambda_2(\cos a_1 \sin a_2 - \sin a_1 \cos a_2) = \det(\begin{pmatrix} \lambda_1 \cos a_1 & \lambda_1 \sin a_1 \\ \lambda_2 \cos a_2 & \lambda_2 \sin a_2 \end{pmatrix})$$
$$= \det A$$

Insbesondere erfüllt det die folgenden Eigenschaften:

- Für $\lambda \in R$ ist $\det(\lambda x_1, x_2) = \det(x_1, \lambda x_2) = \lambda \cdot \det(x_1, x_2)$
- Für $x_i = x_i' + x_i''$ ist $\det(x_1, x_2) = \det(x_1', x_2) + \det(x_1'', x_2)$
- Ist $x_1 = x_2$, so ist $\det A = 0$
- $\det(1_2) = 1$

**Definition IV.2.4 (Determinantenabbildung)**
Eine Abbildung $\delta : \mathrm{Mat}_n(R) \to R$ heißt Determinantenabbildung, wenn gilt:
(D1): $\delta$ ist linear in jeder Zeile: sind $a_1, ..., a_n$ die Zeilen von $A$ und ist $i \in \{1, ..., n\}$ und $a_i = \lambda' a_i' + \lambda'' a_i''$ mit $\lambda', \lambda'' \in R$ und den Zeilenvektoren $a_i', a_i''$, so ist $\delta(A) = \lambda' \cdot \delta(a_1, ..., a_i', ..., a_n) + \lambda'' \cdot \det(a_1, ..., a_i'', ..., a_n)$.
(D2): $\delta$ ist alternierend: sind $a_1, ..., a_n$ die Zeilen von $A$ und $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$ mit $a_i = a_j$, so ist $\delta(A) = 0$.
(D3): $\delta$ ist normiert: $\delta(\mathbb{1}_n) = 1$.

■ **Beispiel IV.2.5**
Sei $\delta : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ eine Determinantenabbildung. Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ nicht invertierbar, so sind die Zeilen $a_1, ..., a_n$ von $A$ linear abhängig, es gibt also ein $i$ mit $a_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot a_j$. Es folgt $\delta(A) = \delta(a_1, ..., a_n) = \sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot \delta(a_1, ..., a_j, ..., a_n)$ mit $a_i = a_j$ mit D2: $\sum_{j \neq i} \lambda_j \cdot 0 = 0 = \delta(A)$.

**Lemma IV.2.6**
Erfüllt $\delta : \mathrm{Mat}_n(R) \to R$ die Axiome D1 und D2, so gilt für jedes $\sigma \in S_n$ und die Zeilenvektoren $a_1, ..., a_n$:

$$\delta(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \delta(a_1, ..., a_n)$$

*Beweis:*
*$\sigma$ ist ein Produkt von Transpositionen. Es genügt also die Behauptung für $\sigma = \tau_{ij}$ mit $1 \leq i < j \leq n$ zu zeigen.*
$0 = \delta(a_1, ..., a_i + a_j, ..., a_j + a_i, ...., a_n) = \delta(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n) + \delta(a_1, ..., a_i, ..., a_i, ..., a_n) + \delta(a_1, ..., a_j, ..., a_j, ..., a_n) + \delta a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_n = \delta(a_1, ..., a_n) + \delta(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(n)}) = 0$. *Mit* $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau_{ij}) = -1$ *folgt die Behauptung.*

**Lemma IV.2.7**
Erfüllt $\delta : \mathrm{Mat}_n(R) \to R$ die Axiome D1 und D2, so gilt für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(R)$:

$$\delta(A) = \delta(\mathbb{1}_n) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \left( \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

*Beweis.* Schreibe $a_i = (a_{j_1}, ..., a_{in}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot e_j$. Wiederholtes Anwenden von D1 gibt $\delta(A) = \delta(a_1, ..., a_n) = \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \cdot \delta(e_{j_1}, a_2, ..., a_n) = \sum_{j_1=1}^{n} ... \sum_{j_n=1}^{n} \delta(e_{j_1}, ..., e_{j_n}) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ij_i}$. Wegen D2 ist $\delta(e_{j_1}, ..., e_{j_n}) = 0$ falls $j_i = j_{i'}$ für ein $i \neq i'$. Andernfalls ist $\sigma(i) = j_i$ einer Permutation von $\{1, ..., n\}$ und $\delta(e_{j_1}, ..., e_{j_n}) = \delta(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \delta(e_1, ..., e_n) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \delta(\mathbb{1}_n)$. □

**Theorem IV.2.8**
Es gibt genau eine Determinantenabbildung $\delta : \mathrm{Mat}_n(R) \to R$ und diese ist gegeben durch die Leibnitzformel

$$\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in S_n \backslash A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

*Beweis.* Eindeutigkeit der Abbildung folgt wegen D3. Bleibt nur noch zu zeigen, dass det auch die Axiome D1 bis D3 erfüllt.
D1: klar
D3: klar
D2: Seien $\mu \neq v$ mit $a_\mu = a_v$. Mit $\tau = \tau_{\mu v}$ ist $S_n \backslash A_n = A_n \tau$, somit $\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma \in A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} - \sum_{\sigma \in A_n \tau} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma\tau(i)} = \sum_{\sigma \in A_n} \left( \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} - \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma\tau(i)} \right)$. $Daa_{ij} = a_{\tau(i),j}$ für alle $i, j$ ist $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{\tau(i),\sigma\tau(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma\tau(i)}$ für jedes $\sigma \in S_n$, woraus $\det(a_{ij}) = 0$ folgt. □

■ **Beispiel IV.2.9**

- $n = 2$, $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau_{12}\}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

- $n = 3$, $S_3 = \{id, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}, 2 \text{ zyklische Vertauschungen}\}$, $A_3 = \{\mathrm{id}, 2 \text{ zyklische Vertauschungen}\}$, $S_3 \backslash A_3 = \{\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}\}$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ergibt sich: $\det(A) = \sum_{\sigma \in A_3} a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot a_{3,\sigma(3)} - \sum_{\sigma \in S_3 \backslash A_3} a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot a_{3,\sigma(3)} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$

- Ist $A = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- Für $i \neq j$, $\lambda \in K^\times$, $\mu \in K$ ist $\det(S_i(\lambda)) = \lambda$, $\det(Q_{ij}(\mu)) = 1$, $\det(P_{ij}) = -1$
- Ist $A$ eine Blockmatrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen $A_1, A_2, C$, so ist $\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$

**Folgerung IV.2.10**
Für $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$ ist $\det(A) = \det(A^t)$. Insbesondere erfüllt det die Axiome D1 und D2 auch für Spalten anstatt Zeilen.

*Beweis.* Mit $\rho = \sigma^{-1}$ gilt $\mathrm{sgn}(\rho) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ und somit $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\rho \in S_n} \mathrm{sgn}(\rho) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\rho(i),i} = \det(A^t)$. □

**Theorem IV.2.11 (Determinantenmultiplikationssatz)**
Für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$ ist

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

*Beweis.* Fixiere $A$ und betrachte die Abbildung $\delta : \mathrm{Mat}_n(R) \to R$ mit $B \mapsto \det(AB^{-1})$. Diese Abbildung erfüllt die Axiome D1 und D2. sind $b_1, ..., b_n$ die Zeilen von $B$, so hat $AB^{-1}$ die Spalten $Ab_1^t, ..., Ab_n^t$, es werden die Eigenschaften von det auf $\delta$ übertragen.
$\Rightarrow \det(AB) = \delta(B^t) = \delta(\mathbb{1}_n) \cdot \det(B^t) = \det(A) \cdot \det(B)$. □

**Folgerung IV.2.12**
Die Abbildung $\det : \mathrm{Mat}_n(R) \to R$ schränkt sich zu einem Gruppenhomomorphismus $\mathrm{GL}_n(R) \to R^\times$ ein. Ist $R = K$ ein Körper, so ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ also genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ und in diesem Fall ist $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

*Beweis.* Aus $AA^{-1} = \mathbb{1}_n$ folgt $\det(A^{-1}) * \det(A) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$, insbesondere $\det(A) \in R^\times$. Der zweite Teil folgt wegen $K^\times = K \backslash \{0\}$. □

**Folgerung IV.2.13**
Die Matrizen mit Determinante 1 bilden einen Normalteiler $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in \mathrm{GL}_n \mid \det(A) = 1\}$ der allgemeinen linearen Gruppe, die sogenannte spezielle lineare Gruppe.

**Folgerung IV.2.14**
Elementare Zeilenumformungen vom Typ II ändern die Determinante nicht, elementare Zeilenumformungen vom Typ III ändern nur das Vorzeichen der Determinante.

*Beweis.* $\det(Q_{ij}(\mu)A) = \det(Q_{ij}(\mu)) \cdot \det(A) = 1 \cdot \det(A) = \det(A)$, Rest analog. □

# IV.3. Minoren

Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

**Definition IV.3.1 (adjungierte Matrix)**
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Für $i, j \in \{1, ..., n\}$ definieren wir die $n \times n$-Matrix:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & ... & a_{i-1,j.1} & 0 & a_{i-1,j+1} & ... & a_{i-1,n} \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{i+1,1} & ... & a_{i+1,j.1} & 0 & a_{i+1,j+1} & ... & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die durch Ersetzen der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalte durch $e_j$ aus $A$ hervorgeht, sowie die $(n-1) \times (n-1)$- Matrix:

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & ... & a_{i-1,j.1} & a_{i-1,j+1} & ... & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & ... & a_{i+1,j.1} & a_{i+1,j+1} & ... & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die durch Streichen der $i$-ten Zeile und der $j$-ten Spalten entsteht. Weiterhin definieren wir die zu $A$ adjungierte Matrix als $A^{\#} = (a^{\#}_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(R)$, wobei $a^{\#}_{ij} = \det(A_{ji})$.

**Lemma IV.3.2**
Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$ mit Spalten $a_1, ..., a_n$. Für $i, j \in \{1, .., n\}$ gilt:

- $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ij})$
- $\det(A_{ij}) = \det(a_1, ..., a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, ..., a_n)$

*Beweis.*

- Durch geeignete Permutation der ersten $i$ Zeilen und der ersten $j$ Zeilen erhält man

$$\det(A_{ij}) = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{i+j} \cdot \det(\mathbb{1}_n) \cdot \det(A'_{ij})$$

- Man erhält $A_{ij}$ aus $(a_1, ..., e_i, ..., a_n)$ durch elementare Spaltenumformungen vom Typ II. □

**Satz IV.3.3**
Für $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$ ist

$$A^{\#} \cdot A = A \cdot A^{\#} = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n \tag{IV.1}$$

*Beweis.* $(A^{\#}A)_{ij} = \sum_{k=1}^n a^{\#}_{ik} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot \det(A_{kj}) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot \det(a_1, ..., a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, ..., a_n) = \det(a_1, ..., a_{i-1}, \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k, a_{i+1}, ..., a_n) = \det(a_1, ..., a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, ..., a_n) = \delta_{ij} \cdot \det(A) = (\det(A) \cdot \mathbb{1}_n)_{ij}$. Analog bestimmt man die Koeffizienten von $AA^{\#}$, wobei man $\det(A_{jk}) = \det(A^t_{jk}) = \det((A^t)_{kj})$ benutzt. □

**Folgerung IV.3.4**
Es ist $\mathrm{GL}_n(R) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(R) \mid \det(A) \in R^\times\}$ und für $A \in \mathrm{GL}_n(R)$ ist $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\#}$.

*Beweis.* IV.3.3 und Folgerung IV.2.12 □

**Satz IV.3.5 (Laplace'scher Entwicklungssatz)**
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Für jedes $i, j \in \{1, .., n\}$ gilt die Formel für die Entwicklung nach der $i$-ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$$

Gleiches gilt auch für Spalten.

*Beweis.* $\det(A) = (AA^{\#})_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot a^{\#}_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ij})$. Analog auch für Spalten. □

**Satz IV.3.6 (Cramer'sche Regel)**
Sei $A \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit Spalten $a_1, ..., a_n$ und sei $b \in R^n$. Weiter sei $x = (x_1, ..., x_n)^t \in R^n$ die eindeutige Lösung des Linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Dann ist für $i = 1, ..., n$

$$x_i = \frac{\det(a_1, ..., a_{i-1}, b, a_{i+1}, ..., a_n)}{\det(A)}$$

*Beweis.* $x_i = (A^{-1}b)_i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_{ij} \cdot b_j = \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{j=1}^n a^{\#}_{ij} \cdot b_j = \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{j=1}^n b_j \cdot \det(a_1, ..., a_{i-1}, e_i, a_{i+1}, ..., a_n) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(a_1, ..., a_{i-1}, b_j, a_{i+1}, ..., a_n)$. □

**Definition IV.3.7 (Minor)**
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ und $1 \leq r \leq m$, $1 \leq s \leq n$. Eine $r \times s$- Teilmatrix von $A$ ist eine Matrix der Form $(a_{i\mu,jv})_{\mu,v} \in \mathrm{Mat}_{r\times s}(R)$ mit $1 \leq i_1 < ... < i_r \leq m$ und $1 \leq j_1 < ... < j_s \leq n$. Ist $A'$ eine $r \times r$-Teilmatrix von $A$, so bezeichnet man $\det(A')$ als einen $r$-Minor von $A$.

■ **Beispiel IV.3.8**
Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$ und $i, j \in \{1, ..., n\}$, so ist $A'_{ij}$ eine Teilmatrix und $\det(A'_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot a^{\#}_{ji}$ ein $(n-1)$-Minor von $A$.

**Satz IV.3.9**
Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$ und $r \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $\mathrm{rk}(A) \geq r$, wenn es eine $r \times r$- Teilmatrix $A'$ von $A$ mit $\det(A') \neq 0$ gibt.

*Beweis.*
- Hinrichtung: Ist $\mathrm{rk}(A) \geq r$, so hat $A$ $r$ linear unabhängige Spalten $a_1, ..., a_r$. Die Matrix $\tilde{A} = (a_1, ..., a_r)$ hat den Rang $r$ und deshalb $r$ linear unabhängige Zeilen $\widetilde{a_1}, ..., \widetilde{a_r}$. Die $r \times r$-Matrix $A$ hat dann Rang $r$, ist also invertierbar, und $\det(A) \neq 0$.
- Rückrichtung: Ist $A'$ eine $r \times r$-Teilmatrix von $A$ mit $\det(A') \neq 0$, so ist $\mathrm{rk}(A) \geq \mathrm{rk}(A') = r$. □

**Folgerung IV.3.10**
Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Der Rang von $A$ ist das größte $r \in \mathbb{N}$, für das $A$ einen von Null verschiedenen $r$-Minor hat.

# IV.4. Determinante und Spur von Endomorphismen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V$ ein $K$-VR mit $\dim_K(V) = m$.

**Satz IV.4.1**
Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $A'$ eine Basis von $V$ und $A = M_{A'}(f)$. Sei weiter $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Genau dann gibt es eine Basis $B'$ von $V$ mit $B = M_{B'}(f)$, wenn es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = SAS^{-1}$ gibt.

*Beweis.* Ist $B'$ eine Basis von $V$ mit $B = M_{B'}(f)$, so ist $B = SAS^{-1}$ mit $S = T_{B'}^{A'}$. Sei umgekehrt $B = SAS^{-1}$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(K)$. Es gibt eine Basis $B'$ von $V$ mit $T_{B'}^{A'} = S$, also $M_{B'}(f) = T_{B'}^{A'} \cdot M_{A'}(f) \cdot (T_{B'}^{A'})^{-1} = SAS^{-1} = B$: Mit $B' = (\Phi_{A'}(f_s^{-1}(e_1)), ..., \Phi_{A'}(f_s^{-1}(e_n)))$ ist $\Phi_{A'} \circ f_s^{-1} = id_V \circ \Phi_{B'}$, also $T_{B'}^{A'} = M_{A'}^{A'}(id_V) = S^{-1}$. Folglich ist $T_{B'}^{A'} = (T_{A'}^{B'})^{-1} = (S^{-1})^{-1} = S$. □

**Definition IV.4.2 (Ähnlichkeit)**
Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$ heißen ähnlich, wenn (in Zeichen $A \sim B$) es $S \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $B = SAS^{-1}$ gibt.

**Satz IV.4.3**
Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mat}_n(R)$.

*Beweis.*
- Reflexivität: $A = \mathbb{1}_n \cdot A \cdot (\mathbb{1}_n)^{-1}$
- Symmetrie: $B = SAS^{-1} \Rightarrow A = S^{-1}BS = S^{-1}B(S^{-1})^{-1}$
- Transitivität: $B = SAS^{-1}$, $C = TBT^{-1} \Rightarrow C = TSAS^{-1}T^{-1} = (TS)A(ST)^{-1}$ □

**Satz IV.4.4**
Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Ist $A \sim B$, so ist

$$\det(A) = \det(B)$$

*Beweis.* $B = SAS^{-1}$, $S \in \mathrm{GL}_n(R)$, $\det(B) = \det(S) \cdot \det(A) \cdot \det(S)^{-1} = \det(A)$ □

**Definition IV.4.5 (Determinante eines Endomorphismus)**
Die Determinante eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist

$$\det(f) = \det(M_B(f))$$

wobei $B$ eine Basis von $V$ ist.

**Satz IV.4.6**
Für $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt:

- $\det(\mathrm{id}_V) = 1$
- $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$
- Genau dann ist $\det(f) \neq 0$, wenn $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$. In diesem Fall ist $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$

*Beweis.* sollte klar sein, evtl. mit Theorem IV.2.11 □

**Definition IV.4.7 (Spur einer Matrix)**
Die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(R)$ ist

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

**Lemma IV.4.8**
Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$

- $\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_n(R) \to R$ ist $R$-linear
- $\mathrm{tr}(A^t) = \mathrm{tr}(A)$
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

*Beweis.* in den Übungen bereits behandelt □

**Satz IV.4.9**
Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Ist $A \sim B$, so ist $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

*Beweis.* $B = SAS^{-1}$, $S \in \mathrm{GL}_n(R) \Rightarrow \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{tr}(AS^{-1}S) = \mathrm{tr}(A)$ □

**Definition IV.4.10 (Spur eines Endomorphismus)**
Die Spur eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(M_B(f))$$

wobei $B$ eine Basis von $V$ ist.

▶ **Bemerkung IV.4.11**
Im Fall $K = \mathbb{R}$ kann man den Absolutbetrag der Determinante eines $f \in \mathrm{End}_K(K^n)$ geometrisch interpretieren, nämlich als das Volumen von $f(Q)$, wobei $Q = [0,1]^n$ der Einheitsquader ist, und somit als Volumenänderung durch $f$. Auch das Vorzeichen von $\det(f)$ hat eine Bedeutung: Es gibt an, ob $f$ orientierungserhaltend ist. Für erste Interpretationen der Spur siehe A100.

# Anhang

# Anhang A: Listen

## A.1. Liste der Theoreme

## A.2. Liste der benannten Sätze