

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Integration auf Mannigfaltigkeiten WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht

28. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

VIII	Integration auf Mannigfaltigkeiten	2
1	Mannigfaltigkeiten	2
1.1	Relativtopologie auf Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$	3
1.2	Mannigfaltigkeiten	3

Vorwort

Kapitel VIII

Integration auf Mannigfaltigkeiten

1. Mannigfaltigkeiten

Definition

Sei $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$, $V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $q \geq 1$. φ heißt regulär in $x \in V$, falls

$$\varphi'(x): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ regulär} \quad (1)$$

Falls φ regulär $\forall x \in V$ heißt φ regulär auf V bzw. reguläre C^q -Parametrisierung (auch C^q -Immersion). V heißt Parameterbereich und $\varphi(V)$ Spur von V .

Gleichung (1) impliziert

$$d \leq n \quad (2)$$

und sei in Kapitel VIII stets erfüllt. Folglich:

$$\text{Gleichung (1)} \Leftrightarrow \text{rang } \underbrace{\varphi'(x)}_{n \times d\text{-Matrix}} = d \quad (1')$$

■ Beispiel 1.1

- 1) Reguläre Kurve: $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, I offen, $\varphi'(x) \neq 0$ ($\varphi'(x)$ ist der Tangentialvektor)
- 2) $\varphi: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\cos kt, \sin kt)^\top$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ (k -fach durchlaufener Einheitskreis)
- 3) $\varphi: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1 + 2 \cos t)(\cos t, \sin t)^\top$ mit den besonderen Werte

$$\varphi\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Achtung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört nicht zur Kurve. φ ist regulär (ÜA)

- 4) $\varphi: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t^3, t^2)^\top$ ist nicht regulär, da $\varphi'(0) = 0$.

■ Beispiel 1.2 (Parametrisierung von Graphen)

Sei $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^d$ offen.

Betrachte $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) := (x, f(x))$. Offenbar ist $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi'(x) = (\text{id}_{\mathbb{R}^d}, f'(x)) \in \mathbb{R}^{n \times d}$.

$\Rightarrow \varphi$ stets regulär.

1.1. Relativtopologie auf Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$

Definition

$U \subset M$ heißt offen bezüglich M genau dann wenn $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U = \tilde{U} \cap M$.

$U \subset M$ heißt Umgebung von $u \in M$ bezüglich M , falls $\exists U_0 \subset M$ offen bezüglich M mit $u \in U_0 \subset U$.

1.2. Mannigfaltigkeiten

Definition

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit ($q \geq 1$) falls $\forall u \in M$ existiert eine Umgebung U von u bezüglich M und $\varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$, V offen mit φ reguläre C^q -Parametrisierung und φ ist Homöomorphismus und $\varphi(V) = U$.

M heißt auch C^q -Untermannigfaltigkeit. Verwende Mannigfaltigkeit statt C^1 -Mannigfaltigkeit

Definition

φ^{-1} bzw. (φ^{-1}, U) heißt Karte von M um $u \in M$. φ ist das zugehörige Kartengebiet, φ zugehörige Parametrisierung, V zugehöriger Parameterbereich.

Eine Menge $\{\varphi_\alpha^{-1} \mid \alpha \in A\}$ heißt Atlas von M , falls die zugehörigen Kartengebiete U_α die Mannigfaltigkeit überdecken (d.h. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset M$).

Definition

Eine reguläre Parametrisierung $\varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Einbettung, falls sie ein Homöomorphismus ist.

Vereinbarung: Parametrisierungen in Verbindung mit Mannigfaltigkeiten sind immer Homöomorphismen (also Einbettungen).

■ Beispiel 1.3

- 1) Der Kreis aus Beispiel 1.1 ist eine eindimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit (d.h. C^q -Mannigfaltigkeit $\forall q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, obwohl mehrfach durchlaufen). Ein Atlas benötigt mindestens zwei Karten.
- 2) Kurven aus Beispiel 1.1 3), 4) sind keine Mannigfaltigkeiten
- 3) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit, $\{\text{id}\}$ ist der zugehörige Atlas.

■ Beispiel 1.4

$M := \text{graph } f$ aus Beispiel 1.2.

Offenbar ist $\varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ Homöomorphismus und reguläre C^q -Parametrisierung $\Rightarrow M$ ist d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit.

■ Beispiel 1.5

Sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$, D offen, $f \in C^q$ ($q \geq 1$), $\text{rang } f'(x) = n - d \forall x \in D$. Definiere

$$M := \{u \in D \mid f(u) = 0\}$$

Fixiere $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in M$, wobei $\tilde{u} = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) \in \mathbb{R}^n$.

$\star \Rightarrow f_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ regulär

$\xrightarrow[\text{Funktion}]{\text{implizite}} \exists$ Umgebung $V \subset \mathbb{R}^d$ von \tilde{x} , Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von \tilde{y} und $\psi \in C^q(V, W)$ mit $(x, \psi(x)) \in M$, $\psi : V \rightarrow W$

$\Rightarrow \varphi : V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) := (x, \psi(x))$ ist reguläre C^q -Parametrisierung, Homöomorphismus und $\varphi(V)$ ist Umgebung von $\tilde{u} \in M$ bezüglich M

$\Rightarrow M$ ist d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit

Bemerkung: $M = \text{graph } f$ und $M = \{f = 0\}$ sind grundlegende Konstruktionen von Mannigfaltigkeiten. Jede Mannigfaltigkeit hat – lokal – diese Eigenschaft.

Satz 1.6 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)

Es gilt

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow \forall u \in M \exists$ Umgebung U von u bezüglich M , $W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und Permutation Π von Koordinaten in \mathbb{R}^n , sodass $\psi(W) = U$ und $\psi(w) = \Pi(w, f(w)) \forall w \in W$ (d.h. U ist Graph von f).

Somit: M ist C^q -Mannigfaltigkeit genau dann wenn M lokal Graph einer C^∞ -Funktion ist.

Beweis.

(\Rightarrow) Klar nach z.B. Beispiel 1.2

(\Leftarrow) Sei M Mannigfaltigkeit. Fixiere $\tilde{u} \in M$. Sei $\varphi : \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ zugehörige C^q -Parametrisierung von $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$.

$\varphi'(x)$ ist regulär $\Rightarrow \varphi'_I(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär für die Zerlegung von φ in

$$\varphi(x) = \Pi \begin{pmatrix} \varphi_I(x) \\ \varphi_{II}(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi_I(x) \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi_{II}(x) \in \mathbb{R}^{n-d}$$

Zerlege ebenso $u = \Pi(v, w)$, $v \in \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}^{n-d}$ (d.h. auch $\tilde{u} = \Pi(\tilde{v}, \tilde{w})$)

$\xrightarrow[\text{Funktion}]{\text{Inverse}}$ Damit existieren

– $V \subset \tilde{V}$ offen, mit obigem $\tilde{x} \in V$, $W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\tilde{v} \in W$

– $\varphi_I^{-1}: W \rightarrow V$ als Homöomorphismus, C^q -Abbildung, $\varphi_I^{-1}(\tilde{v}) = \tilde{x}$

Definiere $f(v) := \varphi_{II}(\varphi^{-1}(v)) \forall v \in W$. Offenbar ist $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und damit

$$\psi(v) := \varphi(\varphi_I^{-1}(v)) = \Pi[\varphi_I(\varphi_I^{-1}(v)), \varphi_{II}(\varphi_I^{-1}(v))] = \Pi(v, f(v))$$

$$\Rightarrow \psi(\tilde{v}) = \Pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u} \text{ und } \psi(W) = \varphi(V) \subset M$$

$\xrightarrow[\text{morphimus}]{\varphi \text{ Homöo-}}$ $\varphi(V)$ ist offen in M

$$\Rightarrow U := \psi(W) \text{ offen bezüglich } M$$

$$\Rightarrow U \text{ ist Umgebung von } \tilde{u} \text{ bezüglich } M$$

Da \tilde{u} beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Satz 1.7 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten über umgebenden Raum)

Es gilt:

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d -dimensionale Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow \forall u \in M \exists$ Umgebung \tilde{U} von u bezüglich dem \mathbb{R}^n , $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen sowie

$\tilde{\psi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ mit $\tilde{\psi}$ ist C^q -Diffeomorphismus und

$$\tilde{\psi}(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap \underbrace{(\mathbb{R}^d \times \{0\})}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Bemerkung: Die Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten benutzt den umgebenden Raum und wird häufig als Definition für Mannigfaltigkeiten angegeben.

Beweis.

(\Leftarrow) $\tilde{\psi}$ eingeschränkt auf $\tilde{U} \cap M$ liefert Karten \Rightarrow Behauptung

(\Rightarrow) Fixiere $\tilde{u} \in M$. Wähle $U \subset M$, $W \subset \mathbb{R}^d$ sowie $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ gemäß Satz 1.6 und sei oBdA $\Pi = \text{id}$.

Zerlege nach dem Schema $u = (v, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ obiges $\tilde{u} = (\tilde{v}, f(\tilde{v}))$.

Definiere $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$ und $\tilde{\varphi}: \hat{V} \rightarrow \hat{U}$ mit $\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w)$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} \in C^q, \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} \text{id}_d & 0 \\ f'(v) & \text{id}_{n-d} \end{pmatrix} \text{ ist regulär}$$

$\xrightarrow[\text{Funktion}]{\text{implizite}}$ \exists Umgebung $\tilde{U} \subset \hat{U}$ von \tilde{u} , Umgebung $\tilde{V} \subset \hat{V}$ von $(\tilde{v}, 0)$, sodass $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in C^q(\tilde{U}, \tilde{V})$ existiert.

Wegen $\tilde{\varphi}(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = \tilde{U} \cap M$ folgt die Behauptung. \square

Folgerung 1.8

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit und $\varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow U \subset M$ eine Parametrisierung von U

$\Rightarrow \exists \tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tilde{\varphi}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ mit $U \subset \tilde{U}$ und $V \times \{0\} \subset \tilde{V}$ sowie $\tilde{\varphi}$ ist C^q -Diffeomorphismus mit $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x) \forall x \in V$.

Beweis. Folgt aus den Beweisen von Satz 1.6 und Satz 1.7. \square

Satz 1.9 (lokale Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Niveaumenge)

Es gilt

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d -dimensionale $\Leftrightarrow \forall u \in M \exists$ Umgebung \tilde{U} von u bezüglich dem \mathbb{R}^n und $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$ mit $\text{rang } f'(u) = n - d$ und $\tilde{U} \cap M = \{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\}$.

Somit: M ist C^q -Mannigfaltigkeit genau dann wenn M lokal Niveaumenge einer C^q -Funktion ist.

Definition

$c \in \mathbb{R}^{n-d}$ heißt regulärer Wert von $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, falls $\text{rang } f'(u) = n - d \forall u \in \tilde{U}$ mit $f(u) = c$.

Folglich ist $M = \{u \in \tilde{U} \mid f(u) = c\}$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit falls c regulärer Wert von f ist.

Beweis.

(\Leftarrow) Gemäß Beispiel 1.5 erhält man eine lokale Parametrisierung \Rightarrow Behauptung

(\Rightarrow) Fixiere $\tilde{u} \in M$. Wähle $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ gemäß Satz 1.7.

Sei $f := (\tilde{\psi}_{d+1}, \dots, \tilde{\psi}_n)$. Offenbar ist $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$.

Mit $\tilde{\varphi}$ aus Satz 1.7 folgt, dass $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \varphi'(\tilde{v}, 0)^{-1}$ regulär ist

$\Rightarrow f'(u)$ hat vollen Rang, d.h. $\text{rang } f'(u) = n - d$

\Rightarrow nach Konstruktion ist $\{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\} = \tilde{U} \cap M$

\Rightarrow Behauptung. □

Kartenwechsel: Offenbar sind die Karten / der Atlas für Mannigfaltigkeiten nicht eindeutig, daher ist gelegentlich ein Wechsel der Karten sinnvoll.

Lemma 1.10 (Kartenwechsel)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit und $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ Karten mit Kartengebieten $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1: \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ist C^q -Diffeomorphismus.

Beweis. Ersetze φ_1 und φ_2 mit $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ gemäß Folgerung 1.8. Einschränkung von $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ liefert die Behauptung. □

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentenvektor von $u \in M$, falls eine stetig differentierbare Kurve $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ ($\delta > 0$) existiert mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$.

Die Menge aller Tangentenvektoren heißt Tangentenraum.

Satz 1.11

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit, $u \in M$, $\varphi: V \rightarrow M$ zugehörige Parametrisierung von u .

$\Rightarrow T_u M$ ist d -dimensionale (\mathbb{R} -) Vektorraum und

$$T_u M = \underbrace{\varphi'(x)}_{\in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} \cdot (\mathbb{R}^d) \quad (3)$$

mit $x := \varphi^{-1}(u)$, wobei $T_u M$ unabhängig von spezieller Parametrisierung φ ist.

Beweis. Sei $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ C^1 -Kurve mit $\gamma(0) = u$

$\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$ ist C^1 -Kurve $g: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $g(0) = x$ und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x) \cdot g'(0), \quad \varphi'(x) \text{ ist regulär.}$$

Offenbar liefert jede C^1 -Kurve g im \mathbb{R}^d durch x eine C^1 -Kurve γ in M mit ???. Die Menge aller Tangentialvektoren $g'(0)$ von C^1 -Kurven g im \mathbb{R}^d ist offenbar \mathbb{R}^d .

\Rightarrow Gleichung (3) $\xrightarrow[\text{regulär}]{\varphi'(x)}$ $\dim(T_u M) = d$.

Da ??? für jede Parametrisierung gilt, ist $T_u M$ unabhängig von φ . □

Bemerkung: Man bezeichnet auch $(u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialraum und $TM := \bigcup_{u \in M} (u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialbündel.

■ Beispiel 1.12

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow M$ ist n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $T_u M = \mathbb{R}^n \ \forall u \in M$.

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit. Vektoren $w \in \mathbb{R}^n$ heißen Normalenvektor in $u \in M$ an M , falls

$$\langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_u M.$$

Die Menge aller Normalenvektoren $N_u M := (T_u M)^\perp$ heißt Normalenraum von M in u .

Satz 1.13

Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ regulärer Wert von f .

$\Rightarrow M := \{u \in V \mid f(u) = c\}$ ist d -dimensionale Mannigfaltigkeit mit

$$\begin{aligned} T_u M &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(u) \cdot v = 0\} & (\ker f'(u)) \quad \forall u \in M \\ N_u M &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = f'(u)^\top \cdot v, v \in \mathbb{R}^{n-d}\} & \forall u \in M \end{aligned}$$

d.h. die Spalten von $f'(u)^\top$ bilden eine Basis von $N_u M$.

■ **Beispiel 1.14**

Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $0 \in \mathbb{R}^2$ regulärer Wert von f .

$\Rightarrow M := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(u) = 0 = f_2(u)\}$ ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Der Gradient $f'_i(u)^\top$ steht senkrecht auf $\{f_i = 0\}$.

$\Rightarrow f'_1(u)^\top, f'_2(u)^\top$ sind Normalen zu M in u .

$\Rightarrow f'_i(u)^\top \cdot v = 0$, $i = 1, 2$ für Tangentenvektor v .

Beweis. M ist d -dimensionale Mannigfaltigkeit, vgl. Satz 1.9.

Sei γ C^1 -Kurve auf M , $\gamma(0) = u$, $\gamma'(0) = v \Rightarrow f(\gamma(t)) = c \forall t$.

$\Rightarrow f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = f'(u) \cdot v = 0$.

Wegen $\text{rang } f'(u) = n - d$ folgt $\dim \ker f'(u) = d$

\Rightarrow Behauptung für $T_u M$ wegen $\dim T_u M = d$.

Sei $w = f'(u)^\top \tilde{v}$ und $v \in T_u M \Rightarrow \langle w, v \rangle = \langle \tilde{v}, f(u)v \rangle = 0 \Rightarrow w \in N_u M$.

Da $\text{rang } f'(u)^\top = n - d$ und $\dim N_u M = n - d$ folgt die Behauptung. \square

■ **Beispiel 1.15**

Sei $M := O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^\top A = \text{id}\}$ die orthogonale Gruppe. Dann ist M eine $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionale Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$T_{\text{id}} M = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B + B^\top = 0\}, \quad (\text{schiefssymmetrische Matrizen})$$

Beweis.

- Betrachte $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ mit $f(A) = A^\top A$
 $\Rightarrow f$ ist stetig differenzierbar mit $f'(A)B = A^\top B + B^\top A \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n} \forall B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- id ist ein regulärer Wert von f , denn sei $f(A) = \text{id}$, $S \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$
 $\Rightarrow f'(A)B = S$ hat die Lösung $B = \frac{1}{2}AS$, denn $\frac{1}{2}A^\top AS + \frac{1}{2}SA^\top A = S$, d.h. $f'(A)$ hat vollen Rang
 $\xrightarrow{\text{Satz 1.9}} M$ ist d -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $d = \dim \mathbb{R}^{n \times n} - \dim \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $T_{\text{id}} M = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{id}^\top B + B^\top \text{id} = 0\}$ \square

Bemerkung:

- $A \in O(n) \Rightarrow A$ erhält das Skalarprodukt: $\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^\top Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle$.
- auch $A^\top \in O(n)$, somit stehts $A^{-1} = A^\top$.

Anhang