

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Integration auf Mannigfaltigkeiten WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht

6. November 2018

Inhaltsverzeichnis

VIII	Integration auf Mannigfaltigkeiten	2
29	Mannigfaltigkeiten	2
29.1	Relativtopologie auf Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$	3
29.2	Mannigfaltigkeiten	3
30	Integration auf Kartengebieten	10
31	Integral auf Mannigfaltigkeiten	18
32	Integralsätze von Gauß und Stokes	24

Vorwort

Kapitel VIII

Integration auf Mannigfaltigkeiten

29. Mannigfaltigkeiten

Definition

Sei $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$, $V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $q \geq 1$. φ heißt regulär in $x \in V$, falls

$$\varphi'(x): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ regulär} \quad (1)$$

Falls φ regulär $\forall x \in V$ heißt φ regulär auf V bzw. reguläre C^q -Parametrisierung (auch C^q -Immersion). V heißt Parameterbereich und $\varphi(V)$ Spur von V .

Gleichung (1) impliziert

$$d \leq n \quad (2)$$

und sei in Kapitel VIII stets erfüllt. Folglich:

$$\text{Gleichung (1)} \Leftrightarrow \text{rang } \underbrace{\varphi'(x)}_{n \times d\text{-Matrix}} = d \quad (1')$$

■ Beispiel 29.1

- 1) Reguläre Kurve: $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, I offen, $\varphi'(x) \neq 0$ ($\varphi'(x)$ ist der Tangentialvektor)
- 2) $\varphi: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\cos kt, \sin kt)^\top$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ (k -fach durchlaufener Einheitskreis)
- 3) $\varphi: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1 + 2 \cos t)(\cos t, \sin t)^\top$ mit den besonderen Werte

$$\varphi\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Achtung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehört nicht zur Kurve. φ ist regulär (ÜA)

- 4) $\varphi: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t^3, t^2)^\top$ ist nicht regulär, da $\varphi'(0) = 0$.

■ Beispiel 29.2 (Parametrisierung von Graphen)

Sei $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^d$ offen.

Betrachte $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) := (x, f(x))$. Offenbar ist $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi'(x) = (\text{id}_{\mathbb{R}^d}, f'(x)) \in \mathbb{R}^{n \times d}$.

$\Rightarrow \varphi$ stets regulär.

29.1. Relativtopologie auf Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$

Definition

$U \subset M$ heißt offen bezüglich M genau dann wenn $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U = \tilde{U} \cap M$.

$U \subset M$ heißt Umgebung von $u \in M$ bezüglich M , falls $\exists U_0 \subset M$ offen bezüglich M mit $u \in U_0 \subset U$.

29.2. Mannigfaltigkeiten

Definition

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit ($q \geq 1$) falls $\forall u \in M$ existiert eine Umgebung U von u bezüglich M und $\varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$, V offen mit φ reguläre C^q -Parametrisierung und φ ist Homöomorphismus und $\varphi(V) = U$.

M heißt auch C^q -Untermannigfaltigkeit. Verwende Mannigfaltigkeit statt C^1 -Mannigfaltigkeit

Definition

φ^{-1} bzw. (φ^{-1}, U) heißt Karte von M um $u \in M$. φ ist das zugehörige Kartengebiet, φ zugehörige Parametrisierung, V zugehöriger Parameterbereich.

Eine Menge $\{\varphi_\alpha^{-1} \mid \alpha \in A\}$ heißt Atlas von M , falls die zugehörigen Kartengebiete U_α die Mannigfaltigkeit überdecken (d.h. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset M$).

Definition

Eine reguläre Parametrisierung $\varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Einbettung, falls sie ein Homöomorphismus ist.

Vereinbarung: Parametrisierungen in Verbindung mit Mannigfaltigkeiten sind immer Homöomorphismen (also Einbettungen).

■ Beispiel 29.3

- 1) Der Kreis aus Beispiel 29.1 ist eine eindimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit (d.h. C^q -Mannigfaltigkeit $\forall q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, obwohl mehrfach durchlaufen). Ein Atlas benötigt mindestens zwei Karten.
- 2) Kurven aus Beispiel 29.1 3), 4) sind keine Mannigfaltigkeiten
- 3) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist n -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit, $\{\text{id}\}$ ist der zugehörige Atlas.

■ Beispiel 29.4

$M := \text{graph } f$ aus Beispiel 29.2.

Offenbar ist $\varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ Homöomorphismus und reguläre C^q -Parametrisierung $\Rightarrow M$ ist d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit.

■ Beispiel 29.5

Sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$, D offen, $f \in C^q$ ($q \geq 1$), $\text{rang } f'(x) = n - d \forall x \in D$. Definiere

$$M := \{u \in D \mid f(u) = 0\} \quad (\star)$$

Fixiere $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in M$, wobei $\tilde{u} = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) \in \mathbb{R}^n$.

$\star \Rightarrow f_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{(n-d) \times (n-d)}$ regulär
 $\xRightarrow[\text{Funktion}]{\text{implizite}}$ \exists Umgebung $V \subset \mathbb{R}^d$ von \tilde{x} , Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von \tilde{y} und $\psi \in C^q(V, W)$ mit
 $(x, \psi(x)) \in M, \psi: V \rightarrow W$
 $\Rightarrow \varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) := (x, \psi(x))$ ist reguläre C^q -Parametrisierung, Homöomorphismus und $\varphi(V)$ ist Umgebung von $\tilde{u} \in M$ bezüglich M
 $\Rightarrow M$ ist d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit

Bemerkung: $M = \text{graph } f$ und $M = \{f = 0\}$ sind grundlegende Konstruktionen von Mannigfaltigkeiten.

Jede Mannigfaltigkeit hat – lokal – diese Eigenschaft.

Satz 29.6 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)

Es gilt

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow \forall u \in M \exists$ Umgebung U von u bezüglich M , $W \subset \mathbb{R}^d$ offen,
 $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und Permutation Π von Koordinaten in \mathbb{R}^n , sodass
 $\psi(W) = U$ und $\psi(w) = \Pi(w, f(w)) \forall w \in W$
 (d.h. U ist Graph von f).

Somit: M ist C^q -Mannigfaltigkeit genau dann wenn M lokal Graph einer C^∞ -Funktion ist.

Beweis.

(\Rightarrow) Klar nach z.B. Beispiel 29.2

(\Leftarrow) Sei M Mannigfaltigkeit. Fixiere $\tilde{u} \in M$. Sei $\varphi: \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ zugehörige C^q -Parametrisierung von $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$.

$\varphi'(x)$ ist regulär $\Rightarrow \varphi'_I(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär für die Zerlegung von φ in

$$\varphi(x) = \Pi \begin{pmatrix} \varphi_I(x) \\ \varphi_{II}(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi_I(x) \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi_{II}(x) \in \mathbb{R}^{n-d}$$

Zerlege ebenso $u = \Pi(v, w)$, $v \in \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}^{n-d}$ (d.h. auch $\tilde{u} = \Pi(\tilde{v}, \tilde{w})$)

$\xRightarrow[\text{Funktion}]{\text{Inverse}}$ Damit existieren

– $V \subset \tilde{V}$ offen, mit obigem $\tilde{x} \in V$, $W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\tilde{v} \in W$

– $\varphi_I^{-1}: W \rightarrow V$ als Homöomorphismus, C^q -Abbildung, $\varphi_I^{-1}(\tilde{v}) = \tilde{x}$

Definiere $f(v) := \varphi_{II}(\varphi_I^{-1}(v)) \forall v \in W$. Offenbar ist $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und damit

$$\psi(v) := \varphi(\varphi_I^{-1}(v)) = \Pi[\varphi_I(\varphi_I^{-1}(v)), \varphi_{II}(\varphi_I^{-1}(v))] = \Pi(v, f(v))$$

$\Rightarrow \psi(\tilde{v}) = \Pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}$ und $\psi(W) = \varphi(V) \subset M$

$\xRightarrow[\text{morphismus}]{\varphi \text{ Homöo-}}$ $\varphi(V)$ ist offen in M

$\Rightarrow U := \psi(W)$ offen bezüglich M

$\Rightarrow U$ ist Umgebung von \tilde{u} bezüglich M

Da \tilde{u} beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 29.7 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten über umgebenden Raum)

Es gilt:

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d -dimensionale Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow \forall u \in M \exists$ Umgebung \tilde{U} von u bezüglich dem \mathbb{R}^n , $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen sowie
 $\tilde{\psi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ mit $\tilde{\psi}$ ist C^q -Diffeomorphismus und
 $\tilde{\psi}(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap \underbrace{(\mathbb{R}^d \times \{0\})}_{\in \mathbb{R}^n}$

Bemerkung: Die Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten benutzt den umgebenden Raum und wird häufig als Definition für Mannigfaltigkeiten angegeben.

Beweis.

(\Leftarrow) $\tilde{\psi}$ eingeschränkt auf $\tilde{U} \cap M$ liefert Karten \Rightarrow Behauptung

(\Rightarrow) Fixiere $\tilde{u} \in M$. Wähle $U \subset M$, $W \subset \mathbb{R}^d$ sowie $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ gemäß Satz 29.6 und sei oBdA $\Pi = \text{id}$.

Zerlege nach dem Schema $u = (v, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ obiges $\tilde{u} = (\tilde{v}, f(\tilde{v}))$.

Definiere $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$ und $\tilde{\varphi}: \hat{V} \rightarrow \hat{U}$ mit $\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w)$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} \in C^q$, $\tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} \text{id}_d & 0 \\ f'(v) & \text{id}_{n-d} \end{pmatrix}$ ist regulär

$\xrightarrow[\text{Funktion}]{\text{implizite}}$ \exists Umgebung $\tilde{U} \subset \hat{U}$ von \tilde{u} , Umgebung $\tilde{V} \subset \hat{V}$ von $(\tilde{v}, 0)$, sodass $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in C^q(\tilde{U}, \tilde{V})$ existiert.
 Wegen $\tilde{\varphi}(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = \tilde{U} \cap M$ folgt die Behauptung. \square

Folgerung 29.8

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit und $\varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow U \subset M$ eine Parametrisierung von U

$\Rightarrow \exists \tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tilde{\varphi}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ mit $U \subset \tilde{U}$ und $V \times \{0\} \subset \tilde{V}$ sowie $\tilde{\varphi}$ ist C^q -Diffeomorphismus mit $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x) \forall x \in V$.

Beweis. Folgt aus den Beweisen von Satz 29.6 und Satz 29.7. \square

Satz 29.9 (lokale Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Niveaumenge)

Es gilt

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d -dimensionale Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow \forall u \in M \exists$ Umgebung \tilde{U} von u bezüglich dem \mathbb{R}^n und $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$ mit $\text{rang } f'(u) = n - d$ und $\tilde{U} \cap M = \{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\}$.

Somit: M ist C^q -Mannigfaltigkeit genau dann wenn M lokal Niveaumenge einer C^q -Funktion ist.

Definition

$c \in \mathbb{R}^{n-d}$ heißt regulärer Wert von $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, falls $\text{rang } f'(u) = n - d \forall u \in \tilde{U}$ mit $f(u) = c$.

Folglich ist $M = \{u \in \tilde{U} \mid f(u) = c\}$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit falls c regulärer Wert von f ist.

Beweis.

(\Leftarrow) Gemäß Beispiel 29.5 erhält man eine lokale Parametrisierung \Rightarrow Behauptung

(\Rightarrow) Fixiere $\tilde{u} \in M$. Wähle $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ gemäß Satz 29.7.

Sei $f := (\tilde{\psi}_{d+1}, \dots, \tilde{\psi}_n)$. Offenbar ist $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$.

Mit $\tilde{\varphi}$ aus Satz 29.7 folgt, dass $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \varphi'(\tilde{v}, 0)^{-1}$ regulär ist

$\Rightarrow f'(u)$ hat vollen Rang, d.h. $\text{rang } f'(u) = n - d$

\Rightarrow nach Konstruktion ist $\{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\} = \tilde{U} \cap M$

\Rightarrow Behauptung. \square

Kartenwechsel: Offenbar sind die Karten / der Atlas für Mannigfaltigkeiten nicht eindeutig, daher ist gelegentlich ein Wechsel der Karten sinnvoll.

Lemma 29.10 (Kartenwechsel)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit und $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ Karten mit Kartengebieten $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1: \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ist C^q -Diffeomorphismus.

Beweis. Ersetze φ_1 und φ_2 mit $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ gemäß Folgerung 29.8. Einschränkung von $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ liefert die Behauptung. \square

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor von $u \in M$, falls eine stetig differentierbare Kurve $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ ($\delta > 0$) existiert mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$.

Die Menge aller Tangentialvektoren heißt Tangentialraum.

Satz 29.11

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit, $u \in M$, $\varphi: V \rightarrow M$ zugehörige Parametrisierung von u .

$\Rightarrow T_u M$ ist d -dimensionale (\mathbb{R} -) Vektorraum und

$$T_u M = \underbrace{\varphi'(x)}_{\in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} \cdot (\mathbb{R}^d) \quad (3)$$

mit $x := \varphi^{-1}(u)$, wobei $T_u M$ unabhängig von spezieller Parametrisierung φ ist.

Beweis. Sei $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ C^1 -Kurve mit $\gamma(0) = u$

$\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$ ist C^1 -Kurve $g: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $g(0) = x$ und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x) \cdot g'(0), \quad \varphi'(x) \text{ ist regulär.} \quad (\star)$$

Offenbar liefert jede C^1 -Kurve g im \mathbb{R}^d durch x eine C^1 -Kurve γ in M mit Gleichung (\star) . Die Menge aller Tangentialvektoren $g'(0)$ von C^1 -Kurven g im \mathbb{R}^d ist offenbar \mathbb{R}^d .

\Rightarrow Gleichung (3) $\xrightarrow[\text{regulär}]{\varphi'(x)} \dim(T_u M) = d$.

Da Gleichung (\star) für jede Parametrisierung gilt, ist $T_u M$ unabhängig von φ . \square

Bemerkung: Man bezeichnet auch $(u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialraum und $TM := \bigcup_{u \in M} (u, T_u M) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialbündel.

■ Beispiel 29.12

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow M$ ist n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $T_u M = \mathbb{R}^n \ \forall u \in M$.

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit. Vektoren $w \in \mathbb{R}^n$ heißen Normalenvektor in $u \in M$ an M , falls

$$\langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_u M.$$

Die Menge aller Normalenvektoren $N_u M := (T_u M)^\perp$ heißt Normalenraum von M in u .

Satz 29.13

Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ regulärer Wert von f .

$\Rightarrow M := \{u \in V \mid f(u) = c\}$ ist d -dimensionale Mannigfaltigkeit mit

$$\begin{aligned} T_u M &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(u) \cdot v = 0\} & (\ker f'(u)) \quad \forall u \in M \\ N_u M &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = f'(u)^\top \cdot v, \ v \in \mathbb{R}^{n-d}\} & \forall u \in M \end{aligned}$$

d.h. die Spalten von $f'(u)^\top$ bilden eine Basis von $N_u M$.

■ Beispiel 29.14

Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $0 \in \mathbb{R}^2$ regulärer Wert von f .

$\Rightarrow M := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(u) = 0 = f_2(u)\}$ ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Der Gradient $f'_i(u)^\top$ steht senkrecht auf $\{f_i = 0\}$.

$\Rightarrow f'_1(u)^\top, f'_2(u)^\top$ sind Normalen zu M in u .

$\Rightarrow f'_i(u)^\top \cdot v = 0, \ i = 1, 2$ für Tangentenvektor v .

Beweis. M ist d -dimensionale Mannigfaltigkeit, vgl. Satz 29.9.

Sei γ C^1 -Kurve auf M , $\gamma(0) = u$, $\gamma'(0) = v \Rightarrow f(\gamma(t)) = c \ \forall t$.

$$\Rightarrow f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = f'(u) \cdot v = 0.$$

Wegen $\text{rang } f'(u) = n - d$ folgt $\dim \ker f'(u) = d$

\Rightarrow Behauptung für $T_u M$ wegen $\dim T_u M = d$.

Sei $w = f'(u)^\top \tilde{v}$ und $v \in T_u M \Rightarrow \langle w, v \rangle = \langle \tilde{v}, f(u)v \rangle = 0 \Rightarrow w \in N_u M$.

Da $\text{rang } f'(u)^\top = n - d$ und $\dim N_u M = n - d$ folgt die Behauptung. □

■ Beispiel 29.15

Sei $M := O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^\top A = \text{id}\}$ die orthogonale Gruppe. Dann ist M eine $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionale Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$T_{\text{id}} M = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid B + B^\top = 0\}, \quad (\text{schiefssymmetrische Matrizen})$$

Beweis.

- Betrachte $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$ mit $f(A) = A^\top A$
 $\Rightarrow f$ ist stetig differenzierbar mit $f'(A)B = A^\top B + B^\top A \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n} \forall B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- id ist ein regulärer Wert von f , denn sei $f(A) = \text{id}$, $S \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$
 $\Rightarrow f'(A)B = S$ hat die Lösung $B = \frac{1}{2}AS$, denn $\frac{1}{2}A^\top AS + \frac{1}{2}SA^\top A = S$, d.h. $f'(A)$ hat vollen Rang
 $\xrightarrow{\text{Satz 29.9}} M$ ist d -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $d = \dim \mathbb{R}^{n \times n} - \dim \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $T_{\text{id}}M = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{id}^\top B + B^\top \text{id} = 0\}$ □

Bemerkung:

- $A \in O(n) \Rightarrow A$ erhält das Skalarprodukt: $\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^\top Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle$.
- auch $A^\top \in O(n)$, somit stehts $A^{-1} = A^\top$.

Definition

$(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit heißt Hyperfläche.

Die Abbildung $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeit, heißt Einheitsnormalenfeld, falls $\nu(n) \in N_u M$, $\|\nu(u)\| = 1 \forall u \in M$ und ν stetig auf M .

Lemma 29.16

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängende Hyperfläche

\Rightarrow Es existiert kein Einheitsnormalenfeld oder genau 2.

Beweis.

- Falls ν Einheitsnormalenfeld auf M , dann auch $-\nu$.
- Seien $\nu, \tilde{\nu}$ Einheitsnormalenfelder auf M
 $\Rightarrow s(u) := \langle \nu(u), \tilde{\nu}(u) \rangle = \pm 1$.
Mit $\dim N_u M = 1$, ν stetig auf M und M zusammenhängend
 $\Rightarrow s(u) = 1$ oder $s(u) = -1 \forall u \in M$
 $\Rightarrow \tilde{\nu} = \nu$ oder $\tilde{\nu} = -\nu$ □

■ Beispiel 29.17

Das Möbius-Band: klebe die Enden eines $2d$ -Streifens verdreht zusammen

\Rightarrow besitzt kein Einheitsnormalenfeld.

Definition

Eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt orientierbar, falls ein Einheitsnormalenfeld $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert.
 ν heißt Orientierung, (M, ν) orientierte Mannigfaltigkeit.

■ Beispiel 29.18

Konstruiere ein Einheitsnormalenfeld für Hyperfläche $M = \{f = 0\}$.

Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R})$, $V \subset \mathbb{R}^n$, 0 regulärer Wert von f . Dann ist

$$M := \{u \in V \mid f(u) = 0\}$$

eine Hyperfläche.

Offenbar ist $\nu(u) = \frac{f'(u)}{|f'(u)|}$ Einheitsnormalenfeld auf M , denn der Gradient $f'(u)$ steht senkrecht auf Niveaumengen von f .

Definition

Seien $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_1 | \dots | a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ und $A_k \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ sei Matrix A ohne k -te Zeile. Dann heißt

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} := \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit $\alpha_k := (-1)^{k-1} \det A_k$ äußeres Produkt von a_1, \dots, a_{n-1} .

(später: $\alpha \perp \alpha_j \ \forall j$, $|\alpha|$ = Volumen des von $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ aufgespannten Parallelisotops.)

■ Beispiel 29.19

Für $n = 3$ ist $a_1 \wedge a_2 = a_1 \times a_2$ das Kreuzprodukt.

Lemma 29.20

Seien $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow \langle b, a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \rangle = \det(b \mid a_1 \mid \dots \mid a_{n-1}) \quad \forall b \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \perp a_j \quad \forall j \in 1, \dots, n-1$$

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} = \begin{cases} = 0 & \text{falls } a_j \text{ linear abhängig,} \\ \neq 0, & \text{falls } a_j \text{ linear unabhängig} \end{cases}$$

Beweis. Für Gleichung (4) entwickle $\det(\dots)$ nach erster Spalte b . $b = a_j$ in Gleichung (4) liefert zweite Behauptung, (4) liefert auch 3. Behauptung. \square

■ Beispiel 29.21

Konstruiere ein Einheitsnormalenfeld mittels Parametrisierung φ . Sei $M = \varphi(V)$ Hyperfläche mit zugehöriger Parametrisierung $\varphi: V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, V offen.

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) = \varphi'(x) e_j \in T_{\varphi(x)} M \quad \forall x \in V, j = 1, \dots, n-1. \quad (\text{beachte: } \varphi_{x_j}(x) \in \mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow N(x) := \varphi_{x_1}(x) \wedge \dots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x) \in N_{\varphi(x)} M \quad \forall x \in V$$

$$\Rightarrow \nu(x) := \frac{N(x)}{|N(x)|} \text{ ist Einheitsnormalenfeld auf } M \quad (\text{beachte: } \varphi' \text{ regulär } \forall x)$$

30. Integration auf Kartengebieten

Frage: Oberflächeninhalt bzw. d -dimensionaler Inhalt auf Mannigfaltigkeit M ?

Idee: Approximiere durch stückweise „ebene“ Mannigfaltigkeit.

- a) ($d=2$) Verbinde Punkte auf M zu Dreiecken (einbeschriebene Approximation).

$$\text{Fläche } M = \sup \sum_{\Delta} \text{Dreiecksflächen}$$

→ funktioniert nur für Kurven und nicht für $d > 1$. Z.B. Zylinderoberfläche in $M \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow$
 Fläche $M = \infty$, siehe dazu auch Hildebrandt: Analysis 2, Kapitel 6.1 (Schwarz'scher Stiefel)

- b) ($d=2$) Nehme tangentielle Parallelogramme (äußere Approximation).

$$\text{Fläche } M = \lim_{\text{Feinheit} \rightarrow \infty} \sum_j \text{Fläche}(\varphi'(x_j)(Q_j)).$$

Hinweis: Eine allgemeine Theorie für den d -dimensionalen Inhalt liefert das Hausdorff-Maß \mathcal{H}^d .

Definition

Seien $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$ ($d \leq n$). Dann heißt die Menge

$$P(a_1, \dots, a_d) := \left\{ \sum_{j=1}^d t_j a_j \mid t_j \in [0, 1], j = 1, \dots, d \right\}$$

das von a_1, \dots, a_d aufgespannte Parallelotop (auch d -Spat).

Wiederhole: Lebesgue-Maß \mathcal{L}^n in \mathbb{R}^n .

Satz 30.1

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und das Volumen $v(a_1, \dots, a_n) := \mathcal{L}^n(p(a_1, \dots, a_n))$.

- ⇒ i) $v(a_1, \dots, \lambda a_n, \dots, a_n) = |\lambda| v(a_1, \dots, a_n) \forall \lambda \in \mathbb{R}$
 ii) $v(a_1, \dots, a_k + a_j, \dots, a_n) = v(a_1, \dots, a_n)$ falls $k \neq j$ (Prinzip des Cavalieri)
 iii) $v(a_1, \dots, a_n) = 1$ falls $\{a_1, \dots, a_n\}$ ein Orthonormalensystem im \mathbb{R}^n bilden
 iv) $v(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$ wenn $A = (a_1 \mid \dots \mid a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. die Determinante liefert das Volumen

beachte: Eigenschaften i) – iii) implizieren bereits iv) (argumentiere wie bei det)

Beweis.

- a) a_1, \dots, a_n linear abhängig:

$$\Rightarrow P(a_1, \dots, a_n) \text{ ist flach} \Rightarrow v(a_1, \dots, a_n) = 0$$

$$\Rightarrow \text{iv)} \Rightarrow \text{i)}, \text{ii)} \text{ richtig}$$

- b) a_1, \dots, a_n linear unabhängig: Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ das Standard-Orthonormalensystem, damit ist iii) wahr nach der Definition des Lebesgue-Maßes.

$$\text{Sei } U := P(e_1, \dots, e_n), V := P(a_1, \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow A: \text{int } U \rightarrow \text{int } V \text{ ist Diffeomorphismus. Offenbar ist } A'(y) = A \ \forall y.$$

$$\xrightarrow[\text{satz}]{\text{Trafo}} \mathcal{L}(V) = \int_V dx = \int_U |\det A| dy = |\det A| \underbrace{\mathcal{L}(U)}_{=1} = |\det A|$$

\Rightarrow iv) \Rightarrow i), ii), iii) nach Eigenschaften der Determinante □

Ziel: d -dimensionaler Inhalt $v_d(P(a_1, \dots, a_n))$

Idee: Betrachte $P(a_1, \dots, a_d)$ als Teilmenge eines d -dimensionalen Vektorraumes X und nehme d -dimensionales Lebesgue-Maß in X .

Somit sollte $v_d: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{d\text{-fach}} \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften innehaben:

$$(V1) \ v_d(a_1, \dots, \lambda a_k, \dots, a_d) = |\lambda| v_d(a_1, \dots, a_d)$$

$$(V2) \ v_d(a_1, \dots, a_k + a_j, \dots, a_d) = v_d(a_1, \dots, a_d) \ \forall k \neq j$$

$$(V3) \ v_d(a_1, \dots, a_d) = 1 \text{ falls } a_1, \dots, a_n \text{ orthonormal}$$

Satz 30.2

v_d ist eindeutig bestimmt und es gilt

$$v_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det(A^T A)} \text{ mit } A = (a_1 \mid \dots \mid a_d) \quad (1)$$

► Bemerkung

- 1) Für $d = n$ liefert (1) iv) in beweis 11
- 2) $A^T A$ ist symmetrisch und positiv definit und somit auch $\det(A^T A) \geq 0$
- 3) $v_d(a_1, \dots, a_d) = 0 \Leftrightarrow a_1, \dots, a_d$ linear abhängig

Beweis. Sei $\alpha_i j = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$, dann ist

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{d1} & \dots & \alpha_{dd} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenschaften der Determinante implizieren, dass die rechte Seite in (1) (V1) bis (V3) erfüllt. Wie bei der Determinante zeigt man auch, dass (V1) bis (V3) v_d eindeutig bestimmen (Zurückführen von v_d auf eine Orthonormalbasis mittels i), ii) liefert eindeutigen Wert). □

■ Beispiel 30.3

Sei $d = n - 1$. Seien $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, $a := a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}$

$$\Rightarrow v_{n-1}(a_1, \dots, a_d) = |a|_2 \quad (2)$$

(d.h. euklidische Norm des äußeren Produktes liefert das Volumen)

Denn wegen $\langle a, a_j \rangle = 0$ und A wie in (1) folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^\top}{A^\top} \right) \cdot (a \mid A) &= \begin{pmatrix} \langle a, a \rangle & 0 \\ 0 & A^\top A \end{pmatrix} \\ \Rightarrow |a|^2 \cdot \det(A^\top A) &= [\det(a \mid A)]^2 \stackrel{29.9}{=} |a|^4 \\ \Rightarrow \det(A^\top A) &= |a|^2 \end{aligned}$$

Frage: Für Mannigfaltigkeit M : Ist für die Transformation $v_d(\text{Quader } Q) \xrightarrow{\varphi'(A)} v_d(\text{Paralleltotop } P)$ für Quader $Q = P(b_1, \dots, b_d) \subset \mathbb{R}^d$ das $P(a_1, \dots, a_d) \subset T_u(M) \subset \mathbb{R}^n$ das zugehörige Parallelotop falls $a_j = \varphi'(x)b_j$ $j = 1, \dots, d$?

Satz 30.4

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit, φ Parametrisierung mit $\varphi(x) = u \ \forall u \in M$ und ist $Q = P(a_1, \dots, a_d) \subset \mathbb{R}^d$ Quader und $a_j := \varphi'(x) \cdot b_j$

$$\Rightarrow v_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det(\varphi'(x)^\top \varphi'(x))} \cdot v_d(b_1, \dots, b_d) \quad (3)$$

$\varphi'(x)^\top \varphi'(x)$ heißt Maßtensor von φ in x und $g^\varphi(x) = \det(\varphi'(x)^\top \varphi'(x))$ heißt Gram'sche Determinante von φ in x .

Beweis. Sei $B = (b_1 \mid \dots \mid b_d)$, $A = (a_1 \mid \dots \mid a_d)$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} v_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det(A^\top A)} = \sqrt{\det((\varphi'(x)B)^\top (\varphi'(x)B))} = \sqrt{\det(\varphi'(x)^\top \varphi'(x))} \cdot \sqrt{\det(B^\top B)} \quad \square$$

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit, $\varphi: V \rightarrow U$ lokale Parametrisierung, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Kartengebiet U . Motiviert durch das Riemann-Integral

$$\sum f(U_i) \cdot v_d(P_i) = \sum f(\varphi(x_i)) \cdot \sqrt{g^\varphi(x)} \cdot v_d(Q_i)$$

setzt man

$$\int_U f \, da := \int_V f(\varphi(x)) \cdot \sqrt{g^\varphi(x)} \, dx \quad (4)$$

als Integral von f über dem Kartengebiet U falls dieses existiert. f heißt dann integrierbar auf U .

► Bemerkung

- Die rechte Seite in (4) ist Lebesgue-Integral im \mathbb{R}^d .
- Damit definiert (4) sinnvoll ist, sollte die rechte Seite unabhängig von φ sein.
- Mittels des Hausdorff-Maßes \mathcal{H}^d kann $\int_U f \, da$ vollkommen analog zum Lebesgue-Integral definiert werden.
- Für n -dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$: $\int_u f \, da = \text{Lebesgue-Integral } \int_U f \, dx$.

Satz 30.5

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d -dimensionale Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ ein Kartengebiet und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\varphi: V_i \rightarrow U$ ($i = 1, 2$) seien zugehörige Parametrisierungen

$$\Rightarrow \int_{V_1} f(\varphi_1(x)) \sqrt{g^{\varphi_1}(x)} dx = \int_{V_2} f(\varphi_2(x)) \sqrt{g^{\varphi_2}(x)} dx$$

\Rightarrow Somit: (4) unabhängig von φ :

$$f(\cdot) \text{ integrierbar auf } U \Leftrightarrow f(\varphi(\cdot)) \sqrt{g^\varphi(x)} \text{ integrierbar auf } V \quad (5)$$

für eine Parametrisierung $\varphi: U \rightarrow V$

Beweis. $\psi: \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2: V_2 \rightarrow V_1$ ist Diffeomorphismus nach Lemma 29.10

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\text{satz}]{\text{Trafo}} \int_{V_1} f(\varphi_1(x)) \sqrt{g^{\varphi_1}(x)} dx &= \int_{V_2} f(\varphi_1(\psi(y))) \cdot \underbrace{\sqrt{\det(\varphi'_1(\psi(y)) \cdot \varphi'_1(\psi(y))) \cdot \det(\psi'(y))}}_{=\sqrt{\det(\psi' T \cdot \varphi'_1 T \varphi'_1 \cdot \psi')}} dy \\ &= \sqrt{\det((\varphi'_1 \psi')^T (\varphi_1 \psi))} \end{aligned}$$

Wegen $\varphi_2(y) = \varphi_1(\psi(y)) \xrightarrow[\text{regel}]{\text{Ketten}} \varphi'_2(y) = \varphi'_1(\psi(y)) \cdot \psi'(y)$

□

Definition

Falls $f = 1$ integrierbar über einem Kartengebiet $U \subset M$ ist, dann heißt

$$v_d(U) = \int_U 1 da \quad (6)$$

der d -dimensionale Inhalt von U . $\sqrt{g^\varphi(x)}$ heißt Flächenelement von U bezüglich U .

► Bemerkung

- 1) $v_d(U) = \mathcal{H}^d(U)$, d.h. der d -dimensionale Inhalt stimmt für Kartengebiete mit dem Hausdorff-Maß überein.
- 2) Nach (4): $v_d(U) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^d \varphi^{-1}(U) = 0$

■ Beispiel 30.6

Sei $M := \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |u| = r, u_1 > 0\}$ (Halbsphäre mit Radius r). Berechne $\int_M f da$.

Parametrisierung von M (Kugelkoordinaten):

$$\varphi(x_1, x_2) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos x_2 \cdot \cos x_1 \\ \cos x_2 \cdot \sin x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$$

für $(x_1, x_2) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = V$.

Offenbar ist $\varphi: V \rightarrow M \in C^1$, regulär und Homöomorphismus.

$\Rightarrow \varphi$ ist Parametrisierung von M , d.h. M ist Mannigfaltigkeit und M auch Kartengebiet.

$$\varphi'(x) = r \cdot \begin{pmatrix} -\cos x_2 \cdot \sin x_1 & -\sin x_2 \cdot \cos x_1 \\ \cos x_2 \cdot \cos x_1 & -\sin x_2 \cdot \sin x_1 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi'(x)^\top \cdot \varphi(x) = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g^\varphi(x)} = \cos^2 x_2$$

Damit lässt sich dann obiges Integral berechnen:

$$\int_M f da = r^2 \int_V f(\varphi(x)) \cdot \cos^2 x_2 dx = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x_1)) dx_1 dx_2$$

z.B. mit $f(u) = u_1^2 + u_2^2$:

$$\begin{aligned} \int_M u_1^2 + u_2^2 da &= r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx_1 dx_2 = \pi r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x_2 dx_2 = \left[\sin x_2 - \frac{1}{3} \sin^3 x_2 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi r^4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi r^4, \end{aligned}$$

z.B. für $f = 1$:

$$v_d(U) = \int_M da = \pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 = \pi r^2 [\sin x_2]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^2 \Rightarrow \text{Kugeloberfläche im } \mathbb{R}^3: 4\pi r^2$$

Satz 30.7 (Integration über $n - 1$ -dimensionale Graphen)

Sei $g: V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, V offen, $\Gamma = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in V\}$.

$$\Rightarrow \text{für } f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \text{ gilt: } \int_\Gamma f da = \int_V f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx, \text{ falls die rechte Seite ex.} \quad (7)$$

Beweis. Γ ist $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und auch Kartengebiet bezüglich der Parametrisierung $\varphi: V \rightarrow \Gamma$ mit $\varphi(x) = (x, g(x))$.

Offenbar ist $\gamma = \sqrt{\det(\varphi'(x)^\top \cdot \varphi'(x))} \stackrel{(1)}{=} v_{n-1}(\varphi_{x_1}(x), \dots, \varphi_{x_{n-1}}(x)) \stackrel{(2)}{=} |\varphi_{x_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x)|$.

Wegen $\varphi_{x_1}(x) \wedge \dots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x) = (-1)^n \begin{pmatrix} g'(x) \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + |g'(x)|^2} \text{ (euklidische Norm)} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \int_\Gamma f da = \int_V f(\varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + |g'(x)|^2} dx \quad \square$$

Flächeninhalt: von Γ ist somit

$$v_{n-1}(\Gamma) = \int_V \sqrt{1 + |g'(x)|^2} dx \quad (8)$$

■ Beispiel 30.8

Halbspähre $S_+^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1, x_n > 0\}$.

Offenbar ist S_+^{n-1} Graph von $g(x) = \sqrt{1 - |x|^2} \forall x \in B_1(0)$

$$\Rightarrow v_{n-1}(S_+^{n-1}) = \int_{B_1(0)} \sqrt{1 + \frac{|x|^2}{1 - |x|^2}} dx = \int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$f(x) = \sqrt{\frac{1}{1 - |x|^2}}$ ist rotationssymmetrisch auf $B_1(0)$, d.h. $f(x) = \tilde{f}(x)$ für $\tilde{f}: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$.

Königsberger 2:

$$\int_{B_r(0)} f(x) dx = n \cdot \kappa_n \int_0^r \tilde{f}(\gamma) \gamma^{n-1} d\gamma \quad (9)$$

für $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\kappa_n = \mathcal{L}^n(B_1(0))$

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\text{statt } n]{n-1} v_{n-1}(S_+^{n-1}) &= (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} dr = (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 r^n \frac{1}{r^2 \sqrt{1-r^2}} dr \\ &\stackrel{\text{part.}}{=} n \cdot (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 r^{n-1} \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} dr \stackrel{(9)}{=} n \cdot \underbrace{\int_{B_1(0)} \sqrt{1-|x|^2} d\gamma}_{\text{Volumen unter Halbsphäre}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n$$

Sei $\omega_n = v_{n-1}(S_{n-1}) = 2v_{n-1}(S_+^{n-1})$ Oberfläche, dann gilt

$$\omega_n = n \cdot \kappa_n, \quad (10)$$

z.B.

$$\underline{n=2}: 2\pi = 2 \cdot \pi$$

$$\underline{n=3}: 4\pi = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi$$

Hinweis: $v_n(B_r(0)) = \mathcal{L}^n(B_r(0)) = r^n \kappa_n$ (verwende Trafosatz),

$$v_{n-1}(\partial B_r(0)) = r^{n-1} \omega_n = r^{n-1} n \kappa_n \text{ (Beispiel 30.8 mit } B_r(0) \text{ statt } B_1(0))$$

■ Beispiel 30.9 (Kurvenintegral)

Betrachte Kurve $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, I offenes Intervall, sodass $C := \varphi(I)$ 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist (beachte: φ regulär für $\varphi'(x) \neq 0$).

Offenbar ist $\det(\varphi'(t)^\top \varphi'(t)) = |\varphi'(t)|^2$. Für $f: C \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist (falls es existiert)

$$\int_C f da = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt. \quad (11)$$

Das Integral heißt Kurvenintegral von f über C . Der 1-dimensionale Inhalt

$$v_1(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt \quad (12)$$

heißt Bogenlänge der Kurve C .

Falls $|\varphi'(t)| = 1 \forall t \in I$ heißt φ Bogenlänge-Parametrisierung von C (denn: $v_1(\varphi(t_2 - t_1)) = t_2 - t_1$, d.h. die Parameter liefern die Bogenlänge).

Mit

$$\sigma(s) := \int_a^b |\varphi'(t)| dt \quad (\star)$$

ist $\psi: (0, v_1(C)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\psi(I) = \varphi(\sigma^{-1}(I))$ stets die Bogenlängenparametrisierung von C . Denn: Offenbar ist $\sigma \in C^1$ und streng monoton wachsend $\Rightarrow \sigma^{-1} \in C^1$ existiert.

$$\Rightarrow |\psi'(\tau)| = |\psi'(\sigma^{-1}(\tau)) \cdot (\sigma^{-1})'(\tau)| = |\varphi'(\sigma^{-1}(\tau))| \cdot \frac{1}{|\sigma'(\sigma^{-1}(\tau))|} \stackrel{(\star)}{=} 1,$$

d.h. ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Kurve stets als Bogenlängenparametrisierung angeben.

Definition

Eine beliebige stetige Kurve $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C = \varphi([a, b])$, heißt rektifizierbar, falls

$$l(C) := \sup_Z \left\{ \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| \mid \{t_0, \dots, t_k\} \in Z \right\} < \infty,$$

wobei Z die Menge der Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t_1$, $k \in \mathbb{N}$ ist.

Satz 30.10 (Rektifizierbare Kurven)

Sei $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann:

- 1) φ ist rektifizierbar
- 2) $C := \varphi([a, b])$ sei 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Parametrisierung φ
 $\Rightarrow l(C) = v_d(C)$

Beweis.

zu 1) φ ist Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ mit Lipschitz-Konstante $L = \max_{t \in [a, b]} |\varphi'(t)|$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| \leq L \sum_{j=1}^k |t_j - t_{j-1}| = L|b - a| \text{ für jede Zerlegung } \{t_0, \dots, t_k\} \in Z$$

$$\Rightarrow l(\varphi([a, b])) < L(b - a)$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ rektifizierbar}$$

zu 2) Für beliebige Zerlegung $\{t_0, \dots, t_k\}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t) dt \right| \leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt \\ \Rightarrow l(C) &\leq \int_a^b |\varphi'(t)| dt = v_1(C) \end{aligned} \quad (\star\star)$$

Sei $l(t) := l(\varphi([a, b])) \forall t \in [a, b]$ und sei $h \in \mathbb{R}$, $t + h \in [a, b]$

$$\stackrel{h>0}{\implies} \left| \int_t^{t+h} \varphi'(\tau) d\tau \right| = |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \underbrace{l(t+h) - l(t)}_{l(\varphi([t, t+h]))} \stackrel{(\star\star)}{\leq} \int_t^{t+h} |\varphi'(\tau)| d\tau \quad \left| \cdot \frac{1}{h} \right|$$

$$\Rightarrow l \text{ ist differenzierbar mit } l'(t) = |\varphi'(t)|$$

$$\Rightarrow l(b) = \int_a^b l'(t) dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = v_1(C)$$

□

■ **Beispiel 30.11 (Umfang des Einheitskreises)**

Betrachte $\varphi: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Dann ist $C := \varphi((-\pi, \pi))$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit (der Einheitskreis ohne den Punkt $(-1 | 0)$).

$$v_1(C) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right| dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$$

(beachte: φ ist Bogenlängenparametrisierung)

Satz 30.12 (Eigenschaften des Integrals)

Seien $f, g, f_k: U \rightarrow \mathbb{R}$, U Kartengebiet der Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann:

- 1) f integrierbar auf $U \Leftrightarrow |f|$ integrierbar auf $M \Leftrightarrow f^+$ und f^- integrierbar auf U
- 2) f, g integrierbar, $c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_U cf \pm g da = c \int_U f da \pm \int_U g da$
- 3) f, g integrierbar auf U , g beschränkt auf $U \Rightarrow \cdot g$ integrierbar auf U
- 4) f, g integrierbar, $f \leq g$ auf $U \Rightarrow \int_U f da \leq \int_U g da$
- 5) (Monotone Konvergenz)

Seien f_k integrierbar auf U , $f_1 \leq f_2 \leq \dots$, Folge $\int_U f_k da$ beschränkt und $f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u)$ $\forall u \in U$

$\Rightarrow f$ integrierbar auf U mit $\int_U f da = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k da$

- 6) (Majorisierte Konvergenz)

Seien f_k, g integrierbar auf U , $|f_k| \leq g \forall k$, $f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u) \forall u \in U$

$\Rightarrow f$ ist integrierbar auf U mit $\int_U f da = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k da$

Beweis. Sei $\varphi: V \rightarrow U$ Parametrisierung des Kartengebiets U . Somit:

- f integrierbar auf $U \Leftrightarrow f(\varphi(\cdot))\sqrt{g^\varphi(\cdot)}$ integrierbar auf V , und
- $f \leq g$ auf $U \Leftrightarrow f(\varphi(\cdot))\sqrt{g^\varphi(\cdot)} \leq g(\varphi(\cdot))\sqrt{g^\varphi(\cdot)}$ auf V ,
- $f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u) \in U \Leftrightarrow f(\varphi(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \forall x \in V$,

somit folgen die Behauptungen direkt aus den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals (Kapitel 22). □

31. Integral auf Mannigfaltigkeiten

Frage: $\int_M f \, da$ für Mannigfaltigkeit M ?

Idee: Überdecke M mit Kartengebieten U_β ($\beta \in \xi$) und suche Integrale $\int_{U_\beta} f \, da$ geeignet zusammen.

Problem: U_β überlappen sich im Allgemeinen

Ausweg: Zerlege die Funktion $\alpha = 1$ geeignet als $1 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$.

Definition

Die Menge der stetigen Funktionen $\alpha_j: M \rightarrow [0, 1]$, $j \in \mathbb{N}$ heißt Zerlegung der Eins (ZdE) auf $M \subset \mathbb{R}^n$, falls

$$\text{i) } \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(u) = 1 \quad \forall u \in M$$

ii) Zerlegung ist lokal-endlich, d.h. $\forall u \in M$ existiert eine Umgebung $U(u)$ bezüglich M mit

$$\alpha_j = 0 \text{ auf } U(u) \text{ für f.a. } j \in \mathbb{N}$$

Definition

Sei \mathcal{U} eine bezüglich M offene Überdeckung von $M \subset \mathbb{R}^n$. Die Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$ ist \mathcal{U} untergeordnet, falls $\forall j \exists U_j \in \mathcal{U}: \text{supp } \alpha_j \subset U_j$. $\text{supp } \alpha_j := \overline{\{u \in M \mid \alpha_j(u) \neq 0\}}$ ist der Träger von α_j .

Satz 31.1 (Existenz der Zerlegung der Eins)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und sei \mathcal{U} eine bezüglich M offene Überdeckung von M

\Rightarrow es existiert eine Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$ von M , die \mathcal{U} untergeordnet ist.

► Bemerkung

- Betrachte später die Überdeckung \mathcal{U} einer Mannigfaltigkeit M mit Kartengebieten
- α_j in Wahrheit in C^∞

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

a) $U_\alpha \in \mathcal{U}$ offen bezüglich $M \Rightarrow \exists W_\alpha \subset \mathbb{R}^n: U_\alpha = W_\alpha \cap M$. Setze $W = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$ offen im \mathbb{R}^n .

Sei $K_j := \{u \in W \mid \text{dist}_{W^c} u \geq \frac{1}{j}\} \cap \overline{B_j(0)}$. Offenbar sind die K_j kompakt

$\Rightarrow K_j \subset K_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = W$. ($\{K_j\}$ heißt kompakte Ausschöpfung von W).

b) Sei $u \in K_{j+1} \setminus \text{int } K_{j+1}$ (kompakt) $\subset \text{int } K_{j+2} \setminus K_{j-1}$ (offen)

$\Rightarrow \exists \alpha \in A: u \in W_\alpha$

$\Rightarrow \exists$ Kugel $B_r(u)$, offen im \mathbb{R}^n ($r > 0$): $B_r(u) \subset W_\alpha \cap (\text{int } K_{j+2} \setminus K_{j-1})$

$\Rightarrow K_{j+1} \setminus \text{int } K_j$ wird von endlich vielen Kugeln $B_r(u)$ überdeckt

$\Rightarrow \exists$ Folge $\{u_j\}$ in W mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{r_j}(u_j) = W$ und für $u \in W$ gilt:

\exists Umgebung U mit $U \cap B_{r_j}(u_j) \neq \emptyset$ nur für endlich viele j

c) Betrachte $\gamma_j: W \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\gamma_j(v) := \begin{cases} e^{\frac{1_j}{|v-u_j|-v_j}}, & \text{für } |v-u_j| \leq r_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar gilt $\gamma_j(r) > 0$ auf $B_{r_j}(u_j)$, $\gamma_j \in C^\infty(W)$. Setze $\gamma(u) = \sum_{j=1}^\infty \gamma_j(u)$, $\alpha_j(u) := \frac{\gamma_j(u)}{\gamma(u)} \forall u \in W$.

Offenbar ist $\{\alpha_j\}$ eine Zerlegung der Eins von W , damit auch von M und ist offenbar \mathcal{U} untergeordnet. \square

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\text{supp } f \subset U \subset M$, U Kartengebiet von M .

f heißt integrierbar auf M , falls die Einschränkung $f|_U$ integrierbar auf Kartengebiet U und

$$\int_M f \, da := \int_U f|_U \, da \quad (1)$$

heißt Integral von f auf M .

Lemma 31.2 (Kriterium für Integrierbarkeit)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{supp } f \subset U \subset M$, U Kartengebiet von M und sei $\{x_j\}$ eine Zerlegung der Eins auf M . Dann:

$$f \text{ integrierbar auf } M \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{i) } f_{x_j} \text{ integrierbar auf } M \, \forall j \in \mathbb{N} \\ \text{ii) } \sum_{j=1}^\infty \int_M |f| \alpha_j \, da < \infty \end{array}$$

$$\Rightarrow \sum_M f \, da = \sum_{j=1}^\infty \int_M \alpha_j \, da \quad (2)$$

Beweis.

a) Sei f integrierbar auf $M \xrightarrow{30.12} \text{i) und}$

$$\sum_{j=1}^\infty \int_M |f| \alpha_j \, da = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_M |f| \alpha_j \, da \leq \int_M |f| \, da < \infty \quad (3)$$

$$\Rightarrow \text{ii) } \xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{majorisierte}} (2)$$

b) gelten i) und ii) $\xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{majorisierte}} |f|$ integrierbar $\Rightarrow f$ integrierbar \square

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit und \mathcal{U} eine offene Überdeckung bezüglich M von M mit Kartengebieten.

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar auf Mannigfaltigkeit M , falls die Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$ auf M existiert, die \mathcal{U} untergeordnet ist, sodass

i) $f\alpha_j$ integrierbar $\forall j \in \mathbb{N}$ (auf M)

ii) $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \, da < \infty$

und damit definiere sich

$$\int_M f \, da = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \, da, \quad (4)$$

und heißt Integral von f auf M .

Satz 31.3 (Rechtfertigung des Integralbegriffs)

f ist integrierbar auf M und $\int_M f \, da$ sind unabhängig von konkreter Überdeckung \mathcal{U} und Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$.

Beweis. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf M mit $\{\alpha_j\}$, \mathcal{U} gemäß Definition. Sei $\{\tilde{\alpha}_j\}$ eine weitere Zerlegung der Eins, die einer Überdeckung $\tilde{\mathcal{U}}$ durch Kartengebiete untergeordnet ist. Dann sind zu zeigen:

i') $f\tilde{\alpha}_j$ ist integrierbar auf $M \, \forall j$ und

ii') $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \, da < \infty$ und

iii') $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \, da = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\tilde{\alpha}_j \, da$.

zu i') $f\alpha_j$ sind integrierbar auf M nach Voraussetzung

$\xRightarrow{30.12} f\tilde{\alpha}_k\alpha_j$ ist integrierbar auf $M \, \forall k, j \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f\tilde{\alpha}_k|\alpha_j \, da \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \, da < \infty$$

$\xRightarrow{31.2} f\tilde{\alpha}_k$ und $|f\tilde{\alpha}_k|$ integrierbar auf $M \, \forall k$

\Rightarrow i') und

$$\begin{aligned} \int_M f\tilde{\alpha}_k \, da &= \int_{j=1}^{\infty} \int_M f\tilde{\alpha}_j \, da \quad \text{bzw.} \\ \int_M |f|\tilde{\alpha}_k \, da &= \int_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\tilde{\alpha}_k\alpha_j \, da \end{aligned} \quad (\star)$$

zu ii') $f\alpha_j$ integrierbar auf M nach Voraussetzungen

$$\xrightarrow[\text{mit } \{\tilde{\alpha}_j\}]{31.2} \int_M f\alpha_j \, da = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \tilde{\alpha}_k \, da \quad \forall j \quad (**)$$

und analog für $|f|$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \alpha_k \, da = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \, da \stackrel{\text{ii)}}{<} \infty \quad (#)$$

Doppelreihensatz, $(**)$ mit $|f|$ und ii) erlauben die Vertauschung der Summation in $(#)$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f|\tilde{\alpha}_k \, da = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \, da \quad (+)$$

\Rightarrow ii')

zu iii') Analog erhält man $(+)$ mit f statt $|f| \Rightarrow$ iii') \square

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, M Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ Teilmenge. Die Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar auf A , falls

$$f_A := \begin{cases} f, & \text{auf } A, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar auf M ist. $A \subset M$ heißt (endlich) messbar in M falls die Funktion $f \equiv 1$ auf A integrierbar ist.

$$v_d(A) = \int_A da$$

heißt d -dimensionaler Inhalt (d -dimensionales Maß) von A

beachte: Für $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar ist $\lambda^n(A) = \infty$ möglich. Hier ist $v_d(A) < \infty$ für $A \subset M$ messbar.

Definition

$A \subset M$ heißt d -Nullmenge, falls $v_d(A) = 0$.

beachte: d -Nullmengen auf M entsprechend \mathcal{L}^d -Nullmengen im Parameterbereich.

Satz 31.4

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ kompakt bezüglich M , $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow f$ integrierbar auf A

Hinweis:

- $A \subset M$ ist kompakt bezüglich M , z.B. $A = \varphi(U)$ für Parametrisierung und $U \subset \mathbb{R}^n$ kompakt
- somit sind alle kompakten $A \subset M$ messbar

Beweis.

a) Sei $A \subset U$ für ein Kartengebiet $U \subset M$ mit zugehöriger Parametrisierung $\varphi: V \subset \mathbb{R}^d \rightarrow U$

$\Rightarrow B := \varphi^{-1}(A)$ kompakt im \mathbb{R}^d (da φ Homöomorphismus)

Da $f(\varphi(\cdot))\sqrt{g^\varphi(\cdot)}$ stetig auf B

\Rightarrow auch integrierbar auf $B \Rightarrow f$ integrierbar auf A

b) (allgemeiner Fall)

Sei $\{\alpha_j\}$ eine Zerlegung der Eins zur Mannigfaltigkeit M . $\forall v \in A \exists$ Umgebung $U(v) \subset M$: $\alpha_j = 0$ auf $U(v)$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$.

$\{U(v)\}_{v \in A}$ ist eine offene Überdeckung von A .

\Rightarrow bereits endlich viele überdecken kompaktes A

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$: $\alpha_j = 0$ auf $A \forall j > m$

$\Rightarrow f_A(u) = \sum_{j=1}^m f_A(u) \alpha_j \forall u \in M$

$\text{supp } f_A \alpha_j$ ist abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $A \Rightarrow$ selbst kompakt

$\stackrel{a)}{\Rightarrow} f_A \alpha_j$ integrierbar auf $M \forall j$

Wegen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f_A| \alpha_j \, da = \sum_{j=1}^m \int_M |f_A| \alpha_j \, da < \infty$$

$\Rightarrow f_A$ integrierbar auf M

□

Übertragung der Eigenschaften aus Satz 30.12:

Satz 31.5 (Eigenschaften des Integrals)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeit und $f, g, f_k: M \rightarrow \mathbb{R}$. Dann:

1) f integrierbar auf $M \Leftrightarrow |f|$ integrierbar auf $M \Leftrightarrow f^+$ und f^- integrierbar auf M

2) f, g integrierbar auf $M, c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_M cf \pm g \, da = c \int_M f \, da \pm \int_M g \, da$$

3) f, g integrierbar auf M, g beschränkt auf M

$\Rightarrow f \cdot g$ integrierbar auf M

4) (Monotone Konvergenz)

Seien $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ auf M , alle f_k integrierbar auf M . Die Folge $\int_M f_k \, da$ sei beschränkt, $f(u) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u) \forall u \in M$

$$\Rightarrow f \text{ integrierbar auf } M \text{ mit } \int_M f \, da = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, da$$

5) (Majorisierte Konvergenz)

Seien f_k, g integrierbar auf $M, |f_k| \leq g$ auf $M \forall k$ und $f(u) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u) \forall u \in M$

$$\Rightarrow f \text{ integrierbar auf } M \text{ mit } \int_M f \, da = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, da$$

Beweis. Sei $\{\alpha_j\}$ eine Zerlegung der Eins zu M .

beachte: f ist integrierbar auf $M \xrightarrow{\text{Def.}} f\alpha_j$ ist integrierbar auf einem Kartengebiet $U_j \subset M$

Damit folgen (1) – (3) leicht aus Satz 30.12.

zu 4) ähnlich zu 5)

zu 5) Fixiere ein $j \in \mathbb{N}$. $f_k\alpha_j$ ist integrierbar auf einem Kartengebiet $\forall U$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(u)\alpha_j(u) = f(u)\alpha_j(u)$$

Mit $|f_k\alpha_j| \leq g\alpha_j \xrightarrow{30.12} f\alpha_j$ integrierbar und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k\alpha_j \, da = \int_M f\alpha_j \, da \quad (\star)$$

Wegen $|f\alpha_j| \leq g\alpha_j \, \forall j$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f\alpha_j| \, da \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_M g\alpha_j \, da \stackrel{g \text{ intbar}}{<} \infty$$

$\Rightarrow f$ integrierbar auf M mit

$$\int_M f \, da = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \, da$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \, da \right| < \varepsilon$$

und es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \int_M f\alpha_j \, da - \int_M f_k\alpha_j \, da \right| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \forall k \geq k_0 \quad (\text{nach } (\star))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_M f \, da - \int_M f_k \, da \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^m \left(\int_M f\alpha_j \, da - \int_M f_k\alpha_j \, da \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \, da \right| + \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M g\alpha_j \, da \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{m} \cdot m + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\text{bel}]{\varepsilon > 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k \, da = \int_M f \, da.$$

□

32. Integralsätze von Gauß und Stokes

Anhang

Index

A

äußeres Produkt, 9
Atlas, 3

B

Bogenlänge, 15
Bogenlänge-Parametrisierung, 15

C

C^q -Parametrisierung, 2

D

d -dimensionale C^q -Mannigfaltigkeit, 3
 d -dimensionale Inhalt von U , 13
 d -dimensionaler Inhalt, 21
 d -Nullmenge, 21

E

Einbettung, 3
Einheitsnormalenfeld, 8

F

Flächenelement, 13

G

Gram'sche Determinante, 12

H

Hyperfläche, 8

I

Integral, 19
Integral von f auf M , 20
integrierbar, 12
integrierbar auf A , 21
integrierbar auf M , 19
integrierbar auf Mannigfaltigkeit M , 20

K

Karte, 3

Kartengebiet, 3

Kurvenintegral, 15

M

Maßtensor, 12
messbar, 21

N

Normalenraum, 7
Normalenvektor, 7

O

orientierbar, 8
orientierte Mannigfaltigkeit, 8
Orientierung, 8

P

Parallelotop, 10
Parameterbereich, 2, 3
Parametrisierung, 3

R

regulär, 2
regulär auf V , 2
regulärer Wert, 5
rektifizierbar, 16

S

Spur, 2

T

Tangentialraum, 6
Tangentialvektor, 6
Träger, 18

Z

Zerlegung der Eins, 18