Maß und Integral WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Rene Schilling

21. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Für die Vorlesung *Maß und Integral* von Prof. Schilling im WS 2018/19 gibt es zwar schon ein Buch von Prof. Schilling, was sich jeder Kapitel für Kapitel über die SLUB herunterladen kann. Trotzdem haben wir es uns nicht nehmen lassen auch für diese Vorlesung ein Skript zu schreiben.[1]

Dem Fakt geschuldet, dass Prof. Schilling seine Vorlesung sehr lebhaft[2] hält und mit mindestens 3 Farben und jeder Menge Pfeilen arbeitet, war es relativ schwierig daraus ein vernünftiges Skript zu schreiben. Deswegen sind die nachfolgenden Seiten eher eine zusammengefasste und verbesserte Abschrift seines Buches.

Auch wenn wir uns Mühe geben dieses Skript frei von Fehlern zu halten - perfekt sind auch wir nicht. Falls du deswegen einen Fehler beim Lesen findest sind wir froh über jeden Issue, den du auf `https://github.com/henrydatei/TUD_MATH_BA` erstellst. So hilfst du deinen jetzigen und zukünftigen Kommilitonen!

Genieße auf jeden Fall die Show von Prof. Schilling ☺! Ich habe bis jetzt keine Vorlesung erlebt, die mit so viel Begeisterung gehalten wurde.

1. Einleitung

messen: Längen, Flächen, Volumina, $\mathbb{N} \to$ zählen, Wahrscheinlichkeiten, Energie $\to$ Integrale, ...
Wenn man ein Integral hat: $\int_{t_0}^{t} F(t)\,\mathrm{d}t$, also wird das $\mathrm{d}t$ durch ein Maß $\mu(\mathrm{d}t)$ ersetzt.
Wir messen Mengen:

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty] \text{ mit } \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$$

Dabei ist:

- E eine beliebige Grundmenge
- $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset X\}$ die Potenzmenge von E
- $F \to \mu(F) \in [0, \infty]$

Konvention:

- Familien von Mengen: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \dots, \mathcal{R}$
- Mengen: A, B, E
- Maße: $\mu, \lambda, \nu, \rho, \delta$
- Abbildungen: $\varphi, \psi, \gamma, \eta$

[1] Also zumindest haben wir das vor; zu dem Zeitpunkt, an dem ich dieses Vorwort schreibe, ich das Skript noch lange nicht fertig.

[2] Seine Vorlesung lässt sich mit folgenden Wort eigentlich ganz gut beschreiben: *fabulös*

■ **Beispiel (Flächenmessung)**

$$\begin{aligned}\mu(F) = g \cdot h &= \mu(F_1) + \mu(F_2) + \mu(F_3)\\ &= g' \cdot h + h' \cdot g'' + h'' \cdot g''\\ &= \ldots \overset{!}{=} gh\end{aligned}$$

F_1, F_2, F_3 disjunkt bzw. nicht überlappend!
$\mu(F) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2)$ mit $\mu(\Delta) = 0.5gh$
Allgemein für Dreiecke:
$\mu(\Delta) = 0.5gh \overset{!}{=} 0.5g'h'$ und das ganze ist wohldefiniert!

Dreiecke lassen allgemeine Flächenberechnung zu - Triangulierung!

$$F = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n \text{ (disjunkte Vereinigung } \Delta_i \cap \Delta_k = \varnothing \quad k \neq i)$$

2. Sigma-Algebren

Ziel: Charakterisierung der Definitionsgebiete von Maßen.

$\mathbb{CH}$

Definition 2.1 (σ-Algebra, messbar)
Eine σ-Algebra über einer beliebigen Grundmenge $E \neq \varnothing$ ist eine Familie von Mengen in $\mathscr{P}(E)$, $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(E)$:

- (S_1): $E \in \mathscr{A}$
- (S_2): $A \in \mathscr{A} \to A^C = E \setminus A \in \mathscr{A}$
- (S_3): $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

Eine Menge $A \in \mathscr{A}$ heißt messbar.

Satz 2.2 (Eigenschaften einer σ-Algebra)
Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über E.

(a) $\varnothing \in \mathscr{A}$

(b) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$

(c) $(A_n)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

(d) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$

(e) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{A}$

Beweis. (a) $\varnothing = X^C \in \mathscr{A}$

(b) $A_1 = A,\ A_2 = B$m $A_3 = A_4 = ... = \varnothing \Rightarrow A \cup B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

(c) $A_n \in \mathscr{A} \overset{\text{S2}}{\Rightarrow} A_n^C \in \mathscr{A} \overset{\text{S3}}{\Rightarrow} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C\right)^C \in \mathscr{A}$

(d) wie (b)

(e) $A \setminus B = A \cap B^C \in \mathscr{A}$ □

Fazit: Auf einer σ-Algebra kann man alle üblichen Mengenoperationen abzählbar oft durchführen ohne $\mathscr{A}$ zu verlassen!

■ **Beispiel 2.3**
$X \neq \varnothing$ Menge, $A, B \subset X$

(a) $\mathscr{P}(X)$ ist eine σ-Algebra (größtmögliche)

(b) $\{\varnothing, X\}$ ist eine σ-Algebra (kleinstmögliche)

(c) $\{\varnothing, A, A^C, X\}$ ist eine σ-Algebra

(d) $\{\varnothing, B, X\}$ ist eine σ-Algebra, wenn $B = \varnothing$ oder $B = X$

(e) $\mathscr{A} = \{A \subset X \mid \#A \leq \#\mathbb{N} \text{ oder } \#A^C \leq \#\mathbb{N}\}$ ist eine σ-Algebra

(f) Spur-σ-Algebra: $E \subset X, \mathscr{A}$ ist σ-Algebra in $X \Rightarrow \mathscr{A}_E := \{E \cap A \mid A \in \mathscr{A}\}$ ist eine σ-Algebra.

(g) Urbild-σ-Algebra: $f : X \to Y$ eine Abbildung, X, Y Mengen, $\mathscr{A}_Y$ sei σ-Algebra in $Y \Rightarrow \mathscr{A} := \{f^{-1}(A_Y) \mid A_Y \in \mathscr{A}\}$ eine σ-Algebra.

▶ **Hinweis**

Notation: $\mathscr{A}_i, i \in I$ beliebig viele beliebige Mengenfamilien in $\mathscr{P}(E)$

$$\bigcap_{n \in I} \mathscr{A}_i := \{A \mid \forall i \in I \colon A \in \mathscr{A}_i\}$$

Satz 2.4

(a) Der Schnitt $\mathscr{A} = \bigcap_{n \in I} \mathscr{A}_i, I$ beliebig, $\mathscr{A}_i$ σ-Algebra ist σ-Algebra.

(b) $\forall \mathscr{G} \subset \mathscr{P}(E)$ existiert eine minimale σ-Algebra mit der Eigenschaft $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$. Dieses $\mathscr{A}$ heißt von $\mathscr{G}$ erzeugte σ-Algebra.
Notation: $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{G})$. $\mathscr{G}$ heißt Erzeuger von $\mathscr{A}$.

Beweis. (a)

- (S1): $\forall x \in I \colon \varnothing \in \mathscr{A}_i \Rightarrow \varnothing \in \mathscr{A}$
- (S2):

$$\begin{aligned} A \in \mathscr{A} &\Leftrightarrow \forall i \in I \colon A \in \mathscr{A}_i \\ &\xRightarrow[S2]{\text{für } A_i} \forall i \in I \colon A^C \in \mathscr{A}_i \\ &\Leftrightarrow A^C \in \mathscr{A} \end{aligned}$$

- (S3):

$$\begin{aligned} (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A} &\Rightarrow \forall i \in I \colon (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A}_i \\ &\xRightarrow[S3]{\text{für } A_i} \forall i \in I \colon A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}_i \\ &\Rightarrow A \in \mathscr{A} \end{aligned}$$

(b) a) sagt: Dabei ist $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, weil $\mathscr{F} = \mathscr{P}(E)$ Kandidat und dann (**??**) wohldefiniert.

- Existenz: $\mathscr{A}$ reicht, weil $\mathscr{A}$ wohldefiniert und $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$ und $\mathscr{A}$ ist σ-Algebra.
- Minimalität: Angenommen $\mathscr{A}'$ ist σ-Algebra mit $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}'$. Dann folgt mit (**??**) $\mathscr{A}'$ tritt auf als $\mathscr{F}$ in (**??**). Das impliziert $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$, das heißt $\mathscr{A}$ ist kleiner, sogar minimal! □

▶ **Bemerkung 2.5**

(a) $\mathscr{A}$ ist σ-Algebra $\Rightarrow \mathscr{A} = \sigma(\mathscr{A})$ (Gleichheit gilt, da $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}$, Minimalität von $\sigma(\mathscr{A})$)

(b) $A \subset E \Rightarrow \sigma(\{A\}) = \{\varnothing, E, A, A^C\}$

(c) $\mathscr{G} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \sigma(\mathscr{H}) \subset \sigma(\mathscr{A})$. Denn

$$\begin{aligned} \mathscr{G} \subset \mathscr{H} \text{ und } \mathscr{H} \subset \sigma(\mathscr{H}) &\Rightarrow \mathscr{G} \subset \sigma(\mathscr{H}) \ \sigma\text{-Algebra per Definition} \\ &\Rightarrow \sigma(\mathscr{G})\sigma(\mathscr{H}) \end{aligned}$$

Wiederholung (offen, Topologie)

- $U \subset \mathbb{R}^d$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset U$
- Familie der offenen Mengen in $\mathbb{R}^d$: $\mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathbb{R}^p) = \{U \subset \mathbb{R}^p \mid U \text{ offen}\}$
- Allgemeine Topologie in E hat folgende Eigenschaften:
  - (O_1) $\varnothing, E \in \mathscr{O}$
  - (O_2) $U, V \in \mathscr{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathscr{O}$
  - (O_3) $U_i \in \mathscr{O}, i \in I$ beliebig $\Rightarrow \bigcup_{n \in I} U_i \in \mathscr{O}$

▶ **Hinweis**

$U_n \in \mathscr{O}, n \in \mathbb{N}$, dann muss $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \notin \mathscr{O}$ sein.

Definition 2.6 (Borel(sche) σ-Algebra)
Die von $\mathscr{O} = \mathscr{O}(\mathbb{R}^d)$ erzeugte σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$ heißt BOREL(sche) σ-Algebra.
Notation: $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$
$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ heißt Borel-Menge oder Borel-messbar.

▶ **Bemerkung**

Definition 2.6 gilt “mutatis umtanais” auch in allgemeinen topologischen Räumen, d.h. in $(E, \mathscr{O})$ ist $\mathscr{B}(E) := \sigma(\mathscr{O})$.

Satz 2.7
$\mathscr{O}, \mathscr{C}, \mathscr{K}$ = offene, abgeschlossene und kompakte Mengen $\subset \mathbb{R}^d$. Dann $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{C} = \mathscr{K}$.

Beweis. Übungsaufgabe (vergleiche Beweis von Satz 2.8).

- $U \in \mathscr{O} \Leftrightarrow U^C \in \mathscr{C}$
- $K \in \mathscr{K} \Leftrightarrow K \in \mathscr{K}$ und beschränkt ($\Leftrightarrow \exists r > 0\colon K \subset B_r(0)$) (HEINE-BOREL) □

Weitere angenehme Erzeuger von $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$

- $\mathscr{J}^o_{[rat]} = \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) \mid a_n, b_n \in \mathbb{R}[\mathbb{Q}]\}$ offene [rationale] Erzeuger
- $\mathscr{J}_{[rat]} = \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) \mid a_n, b_n \in \mathbb{R}[\mathbb{Q}]\}$ abgeschlossene [rationale] Erzeuger

▶ **Hinweis**

- $a \geq b \rightsquigarrow (a, b) = \varnothing$
- $A \times \cdots \times \varnothing \times \cdots \times \Omega = \varnothing$

Satz 2.8
In $\mathbb{R}^d$ gilt:

$$\sigma(\mathscr{O}) = \sigma(\mathscr{J}) = \sigma(\mathscr{J}^o) = \sigma(\mathscr{J}^o_{rat}) = \sigma(\mathscr{J}_{rat})$$

Beweis. (1) Jedes $I \in \mathscr{J}^o$ ist eine offene Menge (DIY) $\Rightarrow \mathscr{J}^o_{rat} \subset \mathscr{J}^o \subset \mathscr{O}$

(2) Sei $U \in \mathscr{O}$. Dann gilt:

$$U = \bigcup_{\substack{I' \in \mathscr{I}^o_{rat} \\ I' \subset U}} I'$$

Klar in (??) ist $\bigcup_{\dots} I' \subset U$. Für $U \subset \bigcup_{\dots} I'$ bemerken wir, weil U offen ist gilt:

$$\forall x \in U \exists \varepsilon = \varepsilon_x > 0 \colon B_\varepsilon(x) \subset U \quad \text{vergleiche Abb}$$

Eingeschriebenes (in $B_\varepsilon(x)$) Rechteck $I \subset B_\varepsilon(x), x \in I, I \in \mathscr{I}$.
WLOG (Without lose of generality): $I = I' \subset \mathscr{I}^o_{rat}$ sonst zusammendrücken ($\mathbb{Q}^d \subset \mathbb{R}^d$ dicht)
$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{I' \in \mathscr{I}^o_{rat}} I' \Rightarrow$ (??). Die Vereinigung in (??) ist abzählbar, da $\#\mathscr{I}^o_{rat} = \#(\mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^d) = \#\mathbb{N}$. Also

$$\begin{aligned} U \in \mathscr{O} &\overset{(??)}{\Longrightarrow} U \in \sigma(\mathscr{I}) \\ &\Rightarrow \mathscr{O} \subset \sigma(\mathscr{I}) \\ &\Rightarrow \sigma(\mathscr{O}) \subset \sigma(\mathscr{I}) \subset \sigma(\mathscr{I}) \subset \sigma(\mathscr{O}) \end{aligned}$$

(Letzte zwei Inklusionen gelten, da $\mathscr{I}^o_{rat} \subset \mathscr{I}^o$) und (1).)

(3) Jetzt drücke ich $\mathscr{I}^o_{rat}$ mit $\mathscr{I}_{rat}$ aus:

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_d, b_d) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_1 + \frac{1}{n}, b_1 - \frac{1}{n}] \times \dots \times [a_d + \frac{1}{n}, b_d - \frac{1}{n}]$$
$$(\alpha_1, \beta_1) \times \dots \times (\alpha_d, \beta_d) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [\alpha_1 + \frac{1}{k}, \beta_1 - \frac{1}{k}] \times \dots \times [\alpha_d + \frac{1}{k}, \beta_d - \frac{1}{k}]$$

natürlich ist $[\alpha_1 + \frac{1}{k}, \beta_1 - \frac{1}{k}] \times \dots \times [\alpha_d + \frac{1}{k}, \beta_d - \frac{1}{k}] \in \mathscr{I}^o_{rat}$ und die Vereinigung ist dann in $\sigma(\mathscr{I}^o_{rat})$

Dann folgt 1) $\mathscr{I}^o \subset \sigma(\mathscr{I})$ und 2) $\mathscr{I} \subset \sigma(\mathscr{I}^o)$.
Also gilt $\sigma(\mathscr{I}^o) = \sigma(\mathscr{I}^o_{rat}) = \sigma(\mathscr{I}_{rat}) \Rightarrow$ Behauptung □

▶ Hinweis

Beweis gilt statt für abgeschlossene Rechtecke $\mathscr{I}$ bzw. $\mathscr{I}_{rat}$ auch für halboffene Rechtecke, also Mengen der Art: $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_d, b_d)$.

▶ Bemerkung 2.9

1. $\sigma(\mathbb{R})$ wird auch durch jede dieser Familen erzeugt, wobei D irgendeine dichte Teilmenge in $\mathbb{R}$ ist
   - $\{(-\infty, a) \colon a \in D\}$
   - $\{(-\infty, b] \colon b \in D\}$
   - $\{(c, \infty) \colon c \in D\}$
   - $\{(f, +\infty) \colon f \in D\}$
2. Die Operation $\sigma(\cdot)$ ist im allgemeinen nicht explizit oder konstruktiv.

3. Maße

Sei $E \neq \varnothing$ beliebige Grundmenge.

Definition 3.1 (Maß)
Ein Maß μ ist eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (M_0) $\mathscr{A}$ ist eine σ-Algebra auf E
- (M_1) $\mu(\varnothing) = 0$
- (M_2) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ paarweise disjunkt $\Longleftarrow \mu(\coprod_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Gilt für $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ nur $(M_1), (M_2)$, dann heißt μ

▶ **Bemerkung 3.2**
Wenn $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ nur M_1, M_2 erfüllt, dann heißt μ Prämaß.

- (M_1) will impliziert, dass $\varnothing \in \mathscr{F}$
- (M_2) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow coprod_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$

Für eine σ-Algebra ist das immer wahr.

Für auf- und absteigende Folgen von Mengen schreiben wir auch

$$A_n \uparrow A \Longleftrightarrow A_1 \subset A_2 \subset \ldots \text{ und } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
$$B_n \downarrow B \Longleftrightarrow B_1 \subset B_2 \subset \ldots \text{ und } B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Definition 3.3
Sei μ ein Maß auf E, $\mathscr{A}$ $\sigma - Algebra$. Dann heißt

- $(E, \mathscr{A})$ - Messraum
- $(E, \mathscr{A}, \mu)$ - Maßraum
- $\mu(E) < \infty$ - endliches Maß
- $\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}, A_n \uparrow E, \mu(A_n) < \infty (n \in \mathbb{N})$ - σ-endliches Maß
- $\mu(E) = 1$ - Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß)
- analog: σ-endlicher Maßraum und W-Raum = Maßraum + W-Raum.

Satz 3.4 (Eigenschaften von Maßen)
Es sei μ ein Maß auf $(E, \mathscr{A})$ und $A, A_n, B, B_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}$.

(a) $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additiv)

(b) $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (monoton)

(c) $A \subset B$ & $\mu(A) < \infty \Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(d) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ (stark additiv)

(e) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ (subadditiv)

(f) $A_n \uparrow A \Longrightarrow \mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}}(A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$ (stetig von unten)

(g) $B_n \downarrow B$ & $\mu(B_1) < \infty \Longrightarrow \mu(B_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}}(B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$ (stetig von oben)

(h) $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ (σ-subadditiv)

Beweis. Wird noch ergänzt später! □

▶ **Bemerkung 3.5**
Die Aussagen von **???** gelten auf für Prämaße, wenn das zu Grunge leigende Mengensystem $\mathscr{F}$ groß genug ist. Genauer braucht man dafür:

- a)-e) Stabilität unter endlichen vielen Wiederholungen von $\cup, \cap, \setminus$
- f) $A_{n+1} \setminus A_n, \bigcup_n^\infty A_n \in \mathscr{F}$
- g) $B_1 \setminus B_n, B_n \setminus B_{n+1}, \bigcap_n^\infty B_n, B_1 \setminus \bigcap_n^\infty \in \mathscr{F}$
- h) $\bigcup_n^m A_n, \bigcup_n^\infty A_n \in \mathscr{F}$

Problem: Ich muss μ auf allen $A \in \mathscr{A}$ erklären, um Beispiele zu haben.

■ **Beispiel 3.6**

1. (Dirac-Maß). Es sei $(E, \mathscr{A})$ ein beliebiger Messraum und $x \in E$ fest. Dann ist

$$\delta_x : \mathscr{A} \to [0,1] \text{ mit } \delta_x(A) := \begin{cases} 0 & x \notin A, \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

ist ein W-Maß, das Dirac-Maß (auch δ-Funktion, Einheitsmaße)

2. Es sei $E = \mathbb{R}$ und $\mathscr{A}$ wie in Beispiel 2.3 e) (d.h. $A \in \mathscr{A} \Longleftrightarrow A$ oder A^C abzählbar). Dann ist

$$\gamma(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar}, \\ 1 & A^C \text{abzählbar} \end{cases}$$

mit $A \in \mathscr{A}$ und γ ist ein W-Maß.

3. $(X, \mathscr{A})$ beliebiger Messraum

4. diskrete W-Maße

5. triviale Maße: $(X, \mathscr{A})$ bei Messraum

Definition 3.7 (d-dimensionales Lebesgue-Maß)
Die Mengenfunktion λ^d auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ die jedem

$$\bigtimes_{i=1}^{d} [a_1, b_i) \in \mathscr{J}, \quad a_i \leq b_i$$

den Wert

$$\lambda^d(\bigtimes_{i=1}^{d} [a_1, b_i)) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

zuweist, heißt (d-dimensionales) Lebesgue-Maß.

Probleme:

- λ^d nur auf $\mathscr{J}$ definiert
- $\mathscr{J}$ ist "nur" Erzeuger von $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$
- ist λ^d wenigstens Prämaß?
- Wie kann ich λ^d von $\mathscr{J} \rightsquigarrow \sigma(\mathscr{J})$ fortsetzen?
- Eindeutigkeit?

$\rightsquigarrow$ Setze Antwort "ja" voraus, zeige Eigenschaften.

Satz 3.8
λ^d existiert als Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ und es durch Werte auf $\mathscr{J}$ eineindeutig bestimmt, für alle $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt.

(a) λ^d ist translationsinvariant: $\lambda^d(x + B) = \lambda^d(B)$, wobei $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), x + B := \{x + b \colon b \in B\}$

(b) λ^d ist bewegungsinvariant: $\lambda^d(R^{-1}(B)) = \lambda^d(B)$, mit $\forall R : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Bewegung, d.h. Kombination aus Translation, Drehung, Spiegelung

(c) $\lambda^d(M^{-1}(B)) = |\det(B)|^{-1} \lambda^d(B) \quad \forall M \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$

Beweis. kommt noch. □

▶ Hinweis
a) - c) nur dann sinnvoll, wenn gilt:

$$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow x + B, R^{-1}(B), M^{-1}(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$$

Lemma 3.9
$(E, \mathscr{A})$ Messraum, $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ eine additive Mengenfunktion ($\mu(\varnothing) = 0, \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$) und $\mu(E) < \infty$
Es ist μ ein Maß, wenn eine der folgenden Stetigkeiten gilt:

(a) μ stetig von unten (Satz 3.4 f))

(b) μ stetig von oben (Satz 3.4 g))

(c) μ stetig bei $\varnothing$ (d.h. Satz 3.4 g) mit $B = \varnothing$)

$\rightsquigarrow$ σ-additiv $\longleftarrow$ Stetigkeit

Beweis. Satz 3.4 zeigt a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c), brauche im Beweis nur "additiv". Zeige c) $\Rightarrow$ (M_2).
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ paarweise disjunkt, $A = \coprod_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ und $B_n := A \setminus (A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n) \downarrow \varnothing$

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \setminus (A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n)) + \mu(A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n)) \\ &= \mu(B_n) + \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\end{aligned}$$

Dabei wurde zweimal additiv benutzt und im letzten Schritt $n \to \infty$. □

4. Eindeutigkeit von Maßen

Algebra = σ-Algebra und G ist Grundmenge.
Ziel: λ^d (oder algemeines Maß) auf Erzeuger $\mathscr{G}$ definieren und dann auf $\sigma(\mathscr{G})$ fortsetzen. Brauche: Wohldefiniertheit $\longleftrightarrow \exists!$ Fortsetzung
Problem: $\sigma(\mathscr{G})$ im Allgeimeinen nicht "konstruierbar"

] $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(E)$ heißt DYNKIN-System, wenn

(D_1) $E \in \mathscr{D}$

- (D_2) $D \in \mathscr{D} \Rightarrow D^C \in \mathscr{D}$
- (D_3) $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ und paarweise Disjunktheit $\Rightarrow \biguplus_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathscr{D}$

► **Bemerkung 4.2**

(a) Jede σ-Algebra ist insbesondere eine Dynkin-System, da (D_3) schwächer als S_3.

(b) Wie in Satz 2.2a)b) sieht man $\varnothing \in \mathscr{D}, A, B \in \mathscr{D}$ und $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \sqcup B \in \mathscr{D}$

Satz 4.3

(a) Für $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(E)$ beliebig existiert ein kleinstes (minimales) Dynkin-System $\mathscr{D}$ mit $\mathscr{G} \subset \mathscr{D}$ mit Notation $\delta(\mathscr{G})$. $\delta/\mathscr{G}$ ist von $\mathscr{G}$ erzeugtes Dynkin-System.

(b) $\mathscr{G} \subset \delta(\mathscr{G}) \subset \sigma(\mathscr{G})$

Beweis. (a) wie in **???** wörtlich

(b) todo □

Ziel: Zusammenhang Dynkin-System $\leftrightarrow$ σ-Algebra

Lemma 4.4
Ein Dynkin-System $\mathscr{D}$ ist eine Algebra $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}$ ist $\cap$-stabil ($\forall D, F \in \mathscr{D}$: $D \cap F \in \mathscr{D}$)

Beweis. • ($\Rightarrow$) Wenn $\mathscr{D}$ Algebra dann insbesondere

(a) $\mathscr{D}$ Dynkin-System, da $S_1 = D_1, S_2 = D_2, S_3 \to D_3$

(b) $\mathscr{D}$ $\cap$-stabil nach Satz 2.2c)

- ($\Leftarrow$) Sei $\mathscr{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System. Zeige S_3, d.h. $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathscr{D}$
  Idee: disjunkt machen, also $F_{n+1} := ((D_{n+1} \setminus D_n) \setminus D_{n-1}) \cdots \setminus D_1$, wobei $F_1 := D_1$
  Bemerke: $F_{n+1} = D_{n+1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} D_i^C\right) \in \mathscr{D}$, da $\cap$-stabil und F_n disjunkt
  $\Rightarrow D := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} D_n = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathscr{D}$ (wegen D_3) □

Satz 4.5
$\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(E)$ $\cap$-stabil $\Rightarrow \delta(\mathscr{G}) = \sigma(\mathscr{G})$.

Beweis. (1) $\delta(\mathscr{G}) \subset \sigma(\mathscr{G})$ Klar!

(2) Wäre $\sigma(\mathscr{G})$ eine Algebra, dann $\sigma(\mathscr{G}) \subset \delta(\mathscr{G})$
Grund: $\mathscr{G} \subset \delta(\mathscr{G})$ wegen Defintion und $\delta(\mathscr{G})$ wäre Algebra, damit folgt $\sigma(\mathscr{G}) \subset \delta(\mathscr{G})$ ($\sigma(\mathscr{G})$ minimale

Algebra mit $\mathscr{G} \subset \sigma(\mathscr{G})$), dann folgt mit 1) und Satz 4.3a) $\delta(\mathscr{G}) \subset \sigma(\mathscr{G})$

(3) Zeige $\delta(\mathscr{G})$ $\cap$-stabil. Dann Lemma 4.4 $\Rightarrow \delta(\mathscr{G})$ Algebra, fertig

(4) $D \in \delta(\mathscr{G})$ fest und behaupte $\mathscr{D}_D = \{Q \subset E \mid Q \cap D \in \delta(\mathscr{D})\}$ ist ein Dynkin-System:

- (D_1) $\varnothing \in \mathscr{D}_D$, da $Q = \varnothing$ setzen kann
- (D_2) Sei $Q \in \mathscr{D}_D$. zu zeigen: $Q^C \in \mathscr{D}_D$

$$\begin{aligned} Q^C \cap D = (Q^C \cup D^C) \cap D &\overset{*}{=} (Q \cap D)^C \cap D & *: \text{ de Morgan} \\ &= ((Q \cap D)) \uplus D^C)^C \in \delta(\mathscr{G}) & (\#) \end{aligned}$$

Damit folgt aus der Definition von $\mathscr{D}_D$, dass $Q^C \in \mathscr{D}_D$. In (#) wurde benutzt, das $Q \cap D \subset D$ und $D^C \not\subset D$

- (D_3) $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}_D$ disjunkt $\Rightarrow (Q_N \cap D)_{n\in\mathbb{N}} \subset \delta(\mathscr{D})$ disjunkt (gilt wegen Def von $\mathscr{D}_D$) $\delta(\mathscr{G}) \overset{D_3}{\ni} \sqcup_{n\in\mathbb{N}}(Q \cap D) = (\biguplus_{n\in\mathbb{N}} Q_n) \cap D \in \delta(\mathscr{G}) \overset{\text{Def. } \mathscr{D}_D}{\Rightarrow} \uplus_{n\in\mathbb{N}} Q_n \in \mathscr{D}_D$

(5) Zeige $\delta(\mathscr{G}) \subset \mathscr{D}_D$ für $D \in \delta(\mathscr{G})$ fest aber beliebig
$\forall D \in \delta(\mathscr{G})\colon \delta(\mathscr{G}) \cap D \in \delta(\mathscr{G}) \Rightarrow \delta(\mathscr{G}) \subset \delta(\mathscr{G})$ wäre $\cap$-stabil
Klar $\mathscr{G} \subset \delta(\mathscr{G})$ und $\mathscr{G}$ sei $\cap$-stabil (Vorraussetzung) $\mathscr{G} \subset \mathscr{D}_G \quad \forall G \in \mathscr{D}_G$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \delta(\mathscr{G}) \subset \mathscr{D}_G \quad \forall G \in \mathscr{G} \mathscr{D}_G \text{ Dynkin-System} \\ &\overset{\text{Def. } \mathscr{D}_G}{\Rightarrow} G \cap D \in \delta(\mathscr{G}) \forall D \in \mathscr{G} \forall D \in \delta(\mathscr{G}) \\ &\overset{\text{Def. } \mathscr{D}_D}{\Rightarrow} G \in \mathscr{D}_D \forall G \in \mathscr{G} \forall D \in \delta(\mathscr{G}) \quad \text{Tausche } D \leftrightarrow G \\ &\Rightarrow \mathscr{G} \subset \mathscr{D}_D \forall D \in \delta(\mathscr{G}) \\ &\xrightarrow[\text{Dyn. Sys}]{\mathscr{D}_D} \delta(\mathscr{G}) \subset \mathscr{D}_D \forall D \in \delta(\mathscr{G}) \\ &\Rightarrow \forall Q \in \delta(\mathscr{G})\colon Q \cap D \in \delta(\mathscr{G}) \\ &\Rightarrow \delta(\mathscr{G}) \cap\text{-stabil} \end{aligned}$$

□

Wir brauchen Satz 4.5 an 2 Stellen: hier und bei Produktmaßen

Satz 4.6 (Eindeutigkeitssatz)
$(E, \mathscr{A})$ beliebiger Messraum, μ, ν zwei Maße und $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{G})$ und

(a) $\mathscr{G}$ ist $\cap$-stabil

(b) $\exists (G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}, G_n \uparrow E, \mu(G_n), \nu(G_n) < \infty$

$\Rightarrow \forall G \in \mathscr{G}\colon \mu(G) = \nu(G) \Rightarrow \forall A \in \sigma(G)\colon \mu(A) = \nu(A)$ Kurznotation: $\mu_{|G} = \nu|_G \Rightarrow \mu = \nu$

Beweis. $\forall n\colon \mathscr{D}_n := \{A \in \mathscr{A} \mid \mu(G_n \cap A) = \nu(G_n \cap A)\}$

(a) $\mathscr{D}_n$ ist Dynkin-System $\forall n, n$ fest □

▶ Bemerkung 4.7 (Sonderfall)
μ, ν W-Maße (oder $\mu(E) = \nu(E) < \infty$), dann kann man b) weglassen
Grund: $\mathscr{G} \rightsquigarrow \mathscr{G} \cup \{E\} = \{B\colon B \in \mathscr{G} \text{ oder } B = E\}$ und $G_n := E \uparrow E \Rightarrow$ b)

5. Existenz von Maßen

Ziel: Fortsetzung von Prämaßen auf Erzeuger $\to \sigma$(Erzeuger)

■ Beispiel

λ^d auf $\mathscr{I}$ = halboffene Rechtecke und $\sigma(\mathscr{I}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$. Wenn Fortsetzung existiert $\overset{4.6}{\Longrightarrow}$ Fortsetzung eindeutig.

Definition 5.1 (Halbring)
Eine Famile $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(E)$ heißt Halbring über E, wenn gilt:

- (S_1) $\varnothing \in \mathscr{S}$
- (S_2) $S, T \in \mathscr{S} \Rightarrow S \cap T \in \mathscr{S}$
- (S_3) $\forall S, T \in \mathscr{S}, \exists S_1, \ldots, S_m \in \mathscr{S}, m \in \mathbb{N}$, disjunkt: $S \setminus T = \biguplus_{i=1}^m S_i$

▶ Bemerkung 5.2

$\mathscr{I}$ ist Halbring in $\mathbb{R}^d$

(a) $d = 1$: per Hand (trivial)

(b) $d > 1$: Induktion (siehe Fubini)

(c) Intuition:

Zentraler Satz der Maßtheorie:

Satz 5.3 (Carathéodory, Fortsetzungssatz)
Sei $\mathscr{S}$ ein Halbring über E und $\mu : \mathscr{S} \to [0, \infty]$ Prämaß, d.h.

(a) $\mu(\varnothing) = 0$

(b) $\forall (S_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$, disjunkt und $\biguplus_{i\in\mathbb{N}} S_i \in \mathscr{S}$ gilt: $\mu\left(\biguplus_{i\in\mathbb{N}} S_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(S_i)$

$\Rightarrow \exists$ Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathscr{S})$.
Zusatz: Wenn $(G_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}, G_i \uparrow E, \mu(G_i) < \infty \Rightarrow \exists!$ Fortsetzung.

▶ Bemerkung 5.4

Satz 5.3b) $\equiv \mu$ ist relativ zu $\mathscr{S}$ σ-additiv; Satz sagt: σ-additiv vererbt sich auf $\sigma(\mathscr{S})$
Hauptproblem bleibt aber die Existenz einer Fortsetzung.

Beweis (Satz 5.3). Beweisskizze: Beweis: □

Satz 5.5
λ^1 ist Prämaß auf $\mathscr{I}$.

Beweis. ... □

Folgerung 5.6
λ^1 ist Maß auf $\sigma(\mathscr{I}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Es ist das einzige Maß mit $\lambda^1[a, b) = b - a$.

Beweis. ... □

6. Messbare Abbildungen

Seien $(E, \mathscr{A}), (E^{'}, \mathscr{A}^{'})$ zwei Messräume
$T : E \to E^{'}$ Abbildung "T respektiert" $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}^{'}$ auf E bzw. $E^{'}$
Kenne die Frage (**???**): $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d \to x + B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ (Beweis via $\mathscr{I} =$ Erzeuger von $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$)

Definition 6.1 (messbare Abbildung)
Eine Abbildung $T : E \to E^{'}$ heißt $(\mathscr{A}/\mathscr{A}^{'})$-messbar, wenn gilt

$$\forall A^{'} \in \mathscr{A}^{'} : T^{-1}(A) \in \mathscr{A} \tag{1}$$

Notation: $T^{-1}(A) \subset \mathscr{A} = \{T^{-1}(A^{'}) \mid A^{'} \in \mathscr{A}^{'}\}$

Lemma 6.2
Sei $\mathscr{A}^{'} = \sigma(\mathscr{G}^{'})$ für ein $\mathscr{G}^{'}$.

$$T : E \to E^{'} \text{ ist } \mathscr{A}/\mathscr{A}^{'} \text{ messbar } \Leftrightarrow \forall G^{'} \in \mathscr{G}^{'} : T^{-1}(G^{'}) \in \mathscr{A} \tag{2}$$

d.h. Massbarkeit reicht am Erzeuger zu testen.

Beweis. ... □

■ **Beispiel 6.3**
Jede stetige Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist Borel-$(\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)/\mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ - messbar
Grund: $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathscr{O})$, $\mathscr{O}^n := \{$offene Mengen $\subseteq \mathbb{R}^n$

$$f \text{ stetig } \Rightarrow f^{-1}(\mathscr{O}^n) \subset \mathscr{O}^d \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \text{ und } 6.2 \tag{3}$$

Achtung: stetig $\Rightarrow$ Borel-messbar $\not\Rightarrow$ stetig

Beispiel

Satz 6.4
Seien $(E_i, \mathscr{A}_i), i = 1, 2, 3$ Messräume und

- $T : E_1 \to E_2 \quad \mathscr{A}_1/\mathscr{A}_2$- messbar
- $T : E_2 \to E_3 \quad \mathscr{A}_2/\mathscr{A}_3$- messbar

$\Rightarrow S \circ T : E_1 \to E_3$ ist $\mathscr{A}_1/\mathscr{A}_3$-messbar.

Beweis. ... □

Lemma 6.5 (auch Definition)
$(T_i)_{i\in I}$ beliebig viele Abbildungen $T_i : E \to E_i$ und $(E_i, \mathscr{A}_i)$ sei Messraum für alle $i \in I$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sigma(T_i, i \in I) &:= \sigma(\bigcup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathscr{A}_i)) \\ &= \sigma(\{A \subset E \mid \exists i \in I\colon A \in T_i^{-1}(\mathscr{A}_i)\}) \end{aligned} \tag{4}$$

die kleinste σ-Algebra in E, sodass alle $T_i : E \to E_i$ gleichzeitig messbar sind.
Sprechweise: "von den $(T_i)_{i\in I}$ erzeugte σ-Algebra"

Beweis. ... □

Satz 6.6 (Bildmaß)
$T : (E, \mathscr{A}) \to (E, \mathscr{A}^{'})$ messbar und ν sei Maß auf $(E, \mathscr{A})$. Dann definiert

$$\forall A^{'} \in \mathscr{A}^{'} : \nu^{'}(A^{'}) := \nu(T^{-1}(A^{'})) \tag{5}$$

ein Maß auf $(E^{'}, \mathscr{A}^{'})$.

Beweis. ... □

Definition 6.7 (Bildmaß)
Das Maß $\nu^{'}$ aus Satz 6.6 heißt Bildmaß ν und T (engl. image measure, push forward).
Notation: $T(\nu)$ oder $T * \nu$ oder $\nu \circ T^{-1}$

■ **Beispiel 6.8**

(a) $\lambda^d(x + B) = \lambda^d(\tau_x^{-1}(B)) = \tau_x(\lambda^d)(B)$

(b) W-Theorie: $(\Omega, \mathscr{A},)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega) = 1$

$$\begin{aligned} &\xi : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)) && \text{"Zufallsvarible"} \\ &\xi()(B) = \circ\xi^{-1}(B) = (\{\xi \in B\}) && \text{"Verteilung von } \xi\text{"} \\ &\{\xi \in B\} = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\} = \xi^{-1}(B) \end{aligned} \tag{6}$$

konkret: 2 mal Würfeln

Achtung: $T : (E, \mathcal{P}(E)) \to (E^{'}, \mathscr{A}^{'})$, die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ macht alle T für alle $\mathscr{A}^{'}$ messbar.

Satz 6.9
Sei $T = \mathrm{O}(\mathbb{R}^d) = \{T \in \mathbb{R}^{d\times d}\colon T^t \cdot T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$ Orthogonale Matrizen
$\Rightarrow T(\lambda^d) = \lambda^d \to |\det(T)| = 1$

Beweis. ... □

Satz 6.10
Sei $S \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$ $(\det(S) \neq 0)$. Dann

$$S(\lambda^d) \overset{Def}{=} \lambda^d \circ S = |\det(S^{-1})|\lambda^d = \frac{1}{|\det(S)|}\lambda^d \tag{7}$$

Beweis. ... □

Folgerung 6.11
λ^d invariant unter Bewegung.

Beweis. Bewegung = Kombination aus Shifts τ_x und Matrizen T mit $|\det(T)| = 1$ und Satz 6.10. □

7. Messbare Funktionen

8. Integration positiver Funktionen

Anhang