Gewöhnliche Differentialgleichungen und Integration auf Mannigfaltigkeiten WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht

18. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kapitel VIII

Integration auf Mannigfaltigkeiten

1. Mannigfaltigkeiten

Definition
Sei $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$, $V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $q \geq 1$. φ heißt regulär in $x \in V$, falls

$$\varphi'(x)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \text{ regulär} \tag{1}$$

Falls φ regulär $\forall x \in V$ heißt φ regulär auf V bzw. reguläre C^q-Parametrisierung (auch C^q-Immersion). V heißt Parameterbereich und $\varphi(V)$ Spur von V.

Gleichung (1) impliziert

$$d \leq n \tag{2}$$

und sei in Kapitel VIII stehts erfüllt. Folglich:

$$\text{Gleichung (1)} \Leftrightarrow \text{rang} \underbrace{\varphi'(x)}_{n \times d\text{-Matrix}} = d \tag{1'}$$

■ **Beispiel 1.1**

1) Reguläre Kurve: $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, I offen, $\varphi'(x) \neq 0$ ($\varphi'(x)$ ist der Tangentialvektor)
2) $\varphi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\cos kt, \sin kt)^\mathsf{T}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ (k-fach durchlaufener Einheitskreis)
3) $\varphi : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1 + 2\cos t)(\cos t, \sin t)^\mathsf{T}$ mit den besonderen Werte

$$\varphi\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Achtung: $\binom{1}{0}$ gehört nicht zur Kurve. φ ist regulär (ÜA)
4) $\varphi : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t^3,\ t^2)^\mathsf{T}$ ist nicht regulär, da $\varphi'(0) = 0$.

■ **Beispiel 1.2 (Parametrisierung von Graphen)**
Sei $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^d$ offen.

Betrachte $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) := \big(x, f(x)\big)$. Offenbar ist $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi'(x) = \big(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}, f'(x)\big) \in \mathbb{R}^{n \times d}$.
$\Rightarrow \varphi$ stets regulär.

1.1. Relativtopologie auf Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$

Definition

$U \subset M$ heißt offen bezüglich M genau dann wenn $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U = \tilde{U} \cap M$.

$U \subset M$ heißt Umgebung von $u \in M$ bezüglich M, falls $\exists U_0 \subset M$ offen bezüglich M mit $u \in U_0 \subset U$.

1.2. Mannigfaltigkeiten

Definition

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit</u> $(q \geq 1)$ falls $\forall u \in M$ existiert eine Umgebung U von u bezüglich M und $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, V offen mit φ reguläre C^q-Parametrisierung und φ ist Homöomorphismus und $\varphi(V) = U$.

M heißt auch C^q-Untermannigfaltigkeit. Verwende Mannigfaltigkeit statt C^1-Mannigfaltigkeit

Definition

φ^{-1} bzw. (φ^{-1}, U) heißt <u>Karte</u> von M um $u \in M$. φ ist das zugehörige <u>Kartengebiet</u> , φ zugehörige <u>Parametrisierung</u> , V zugehöriger <u>Parameterbereich</u> .

Eine Menge $\{\varphi{-}1_\alpha \mid \alpha \in A\}$ heißt <u>Atlas</u> von M, falls die zugehörigen Kartengebiete U_α die Mannigfaltigkeit überdecken (d.h. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset M$).

Definition

Eine reguläre Parametrisierung $\varphi\colon V \subset \mathbb{R}^d \to U \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>Einbettung</u> , falls sie ein Homöomorphismus ist.

<u>Vereinbarung:</u> Parametrisierungen in Verbindung mit Mannigfaltigkeiten sind <u>immer</u> Homöomorphismen (also Einbettungen).

■ **Beispiel 1.3**

1) Der Kreis aus Beispiel 1.1 ist eine eindimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit (d.h. C^q-Mannigfaltigkeit $\forall q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, obwohl mehrfach durchlaufen). Ein Atlas benötigt mindestens zwei Karten.
2) Kurven aus Beispiel 1.1 3), 4) sind keine Mannigfaltigkeiten
3) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, $\{\mathrm{id}\}$ ist der zugehörige Atlas.

■ **Beispiel 1.4**

$M :=$ graph f aus Beispiel 1.2.

Offenbar ist $\varphi\colon V \subset \mathbb{R}^d \to M \subset \mathbb{R}^n$ Homöomorphismus und reguläre C^q-Parametrisierung $\Rightarrow M$ ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit.

■ **Beispiel 1.5**

Sei $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$, D offen, $f \in C^q$ $(q \geq 1)$, rang $f'(x) = n - d$ $\forall u \in D$. Definiere

$M := \{u \in D \mid f(u) = 0\}$

Fixiere $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in M$, wobei $\tilde{u} = (x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_{n-d}) \in \mathbb{R}^n$.

$\star \Rightarrow f_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$ regulär

$\xRightarrow[\text{Funktion}]{\text{implizite}}$ $\exists$ Umgebung $V \subset \mathbb{R}^d$ von $\tilde{x}$, Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von $\tilde{y}$ und $\psi \in C^q(V, W)$ mit $(x, \psi(x)) \in M$, $\psi : V \to W$

$\Rightarrow \varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) := (x, \psi(x))$ ist reguläre C^q-Parametrisierung, Homöomorphismus und $\varphi(V)$ ist Umgebung von $\tilde{u} \in M$ bezüglich M

$\Rightarrow M$ ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit

Bemerkung: $M = \operatorname{graph} f$ und $M = \{f = 0\}$ sind grundlegende Konstruktionen von Mannigfaltigkeiten. Jede Mannigfaltigkeit hat – lokal – diese Eigenschaft.

Satz 1.6 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)
Es gilt

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit	$\Leftrightarrow$	$\forall u \in M\, \exists$ Umgebung U von u bezüglich M, $W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und Permutation Π von Koordinaten in $\mathbb{R}^n$, sodass $\psi(W) = U$ und $\psi(u) = \Pi(w, f(w))\ \forall w \in W$ (d.h. U ist Graph von f).

Somit: M ist C^q-Mannigfaltigkeit genau dann wenn M lokal Graph einer C^∞-Funktion ist.

Beweis.

($\Rightarrow$) Klar nach z.B. Beispiel 1.2

($\Leftarrow$) Sei M Mannigfaltigkeit. Fixiere $\tilde{u} \in M$. Sei $\varphi\colon \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ zugehörige C^q-Parametrisierung von $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$.
$\varphi'(x)$ ist regulär $\Rightarrow \varphi'_I(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär für die Zerlegung von φ in

$$\varphi(x) = \Pi \begin{pmatrix} \varphi_{\mathrm{I}}(x) \\ \varphi_{\mathrm{II}}(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\mathrm{I}}(x) \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi_{\mathrm{II}}(x) \in \mathbb{R}^{n-d}$$

Zerlege ebenso $u = \Pi(v, w)$, $v \in \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}^{n-d}$ (d.h. auch $\tilde{u} = \Pi(\tilde{v}, \tilde{w})$)

$\xRightarrow[\text{Funktion}]{\text{Inverse}}$ Damit existieren

- $V \subset \tilde{V}$ offen, mit obigem $\tilde{x} \in V$, $W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\tilde{\nu} \in W$
- $\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}\colon W \to V$ als Homöomorphismus, C^q-Abbildung, $\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(\tilde{\nu}) = \tilde{x}$

Definiere $f(v) := \varphi_{\mathrm{II}}\big(\varphi^{-1}(v)\big)\ \forall v \in W$. Offenbar ist $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und damit

$$\psi(v) := \varphi\big(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\big) = \Pi\left[\varphi_{\mathrm{I}}\big(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\big), \varphi_{\mathrm{II}}\big(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\big)\right] = \Pi(v, f(v))$$

$\Rightarrow \psi(\tilde{\nu}) = \Pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}$ und $\psi(W) = \varphi(V) \subset M$

$\xRightarrow[\text{morphismus}]{\varphi\text{ Homöo-}}$ $\varphi(V)$ ist offen in M

$\Rightarrow U := \psi(W)$ offen bezüglich M

$\Rightarrow U$ ist Umgebung von $\tilde{u}$ bezüglich M

Da $\tilde{u}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 1.7 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten über umgebenden Raum)
Es gilt:

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow$ $\forall u \in M\ \exists$ Umgebung $\tilde{U}$ von u bezüglich dem $\mathbb{R}^n$, $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen sowie $\tilde{\psi}\colon \tilde{U} \to \tilde{V}$ mit $\tilde{\psi}$ ist C^q-Diffeomorphismus und

$$\tilde{\psi}(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap \underbrace{(\mathbb{R}^d \times \{0\})}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Bemerkung: Die Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten benutzt den umgebenden Raum und wird häufig als Definition für Mannigfaltigkeiten angegeben.

Beweis.

($\Leftarrow$) $\tilde{\psi}$ eingeschränkt auf $\tilde{U} \cap M$ liefert Karten $\Rightarrow$ Behauptung

($\Rightarrow$) Fixiere $\tilde{u} \in M$. Wähle $U \subset M$, $W \subset \mathbb{R}^d$ sowie $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ gemäß Satz 1.6 und sei oBdA $\Pi = \mathrm{id}$.
Zerlege nach dem Schema $u = (v, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ obiges $\tilde{u} = (\tilde{v}, f(\tilde{v}))$.
Definiere $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$ und $\tilde{\varphi}\colon \hat{V} \to \hat{U}$ mit $\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w)$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} \in C^q,\ \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_d & 0 \\ f'(v) & \mathrm{id}_{n-d} \end{pmatrix} \text{ ist regulär}$$

$\xRightarrow[\text{Funktion}]{\text{implizite}}$ $\exists$ Umgebung $\tilde{U} \subset \hat{U}$ von $\tilde{u}$, Umgebung $\tilde{V} \subset \hat{V}$ von $(\tilde{v}, 0)$, sodass $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in C^q(\tilde{U}, \tilde{V})$ existiert.
Wegen $\tilde{\varphi}(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = \tilde{U} \cap M$ folgt die Behauptung. □

Folgerung 1.8
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon V \subset \mathbb{R}^d \to U \subset M$ eine Parametrisierung von U
$\Rightarrow \exists \tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \to \tilde{U}$ mit $U \subset \tilde{U}$ und $V \times \{0\} \subset \tilde{V}$ sowie $\tilde{\varphi}$ ist C^q-Diffeomorphismus mit $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x)\ \forall x \in V$.

Beweis. Folgt aus den Beweisen von Satz 1.6 und Satz 1.7. □

Satz 1.9 (lokale Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Niveaumenge)
Es gilt

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit	$\Leftrightarrow$	$\forall u \in M$ $\exists$ Umgebung $\tilde{U}$ von u bezüglich dem $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$ mit $\operatorname{rang} f'(u) = n - d$ und $\tilde{U} \cap M = \{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\}$.

Somit: M ist C^q-Mannigfaltigkeit genau dann wenn M lokal Niveaumenge einer C^q-Funktion ist.

Definition
$c \in \mathbb{R}^{n-d}$ heißt regulärer Wert von $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, falls $\operatorname{rang} f'(u) = n-d \; \forall u \in \tilde{U}$ mit $f(u) = c$.

Folglich ist $M = \{u \in \tilde{U} \mid f(u) = c\}$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit falls c regulärer Wert von f ist.

Beweis.
($\Leftarrow$) Gemäß Beispiel 1.5 erhält man eine lokale Parametrisierung $\Rightarrow$ Behauptung

($\Rightarrow$) Fixiere $\tilde{u} \in M$. Wähle $\tilde{U}$, $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{\psi} \colon \tilde{U} \to \tilde{V}$ gemäß Satz 1.7.
Sei $f := (\tilde{\psi}_{d+1}, \ldots, \tilde{\psi}_n)$. Offenbar ist $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$.
Mit $\tilde{\varphi}$ aus Satz 1.7 folgt, dass $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \varphi'(\tilde{v}, 0)^{-1}$ regulär ist
$\Rightarrow$ $f'(u)$ hat vollen Rang, d.h. $\operatorname{rang} f'(u) = n - d$
$\Rightarrow$ nach Konstruktion ist $\{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\} = \tilde{U} \cap M$
$\Rightarrow$ Behauptung. □

Kartenwechsel: Offenbar sind die Karten / der Atlas für Mannigfaltigkeiten nicht eindeutig, daher ist gelegentlich ein Wechsel der Karten sinnvoll.

Lemma 1.10 (Kartenwechsel)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit und φ_1^{-1}, φ_2^{-1} Karten mit Kartengebieten $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ist C^q-Diffeomorphismus.

Beweis. Ersetzte φ_1 und φ_2 mit $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ gemäß Folgerung 1.8. Einschränkung von $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ liefert die Behauptung. □

Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor von $u \in M$, falls eine stetig differentierbare Kurve $\gamma \colon (-\delta, \delta) \to M$ $(\delta > 0)$ existiert mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$.

Die Menge aller Tangentialvektoren heißt Tangentialraum .

Satz 1.11
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, $u \in M$, $\varphi\colon V \to M$ zugehörige Parametrisierung von u.

$\Rightarrow T_uM$ ist d-dimensionale ($\mathbb{R}$-) Vektorraum und

$$T_uM = \underbrace{\varphi'(x)}_{\in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} \cdot (\mathbb{R}^d) \tag{3}$$

mit $x := \varphi^{-1}(u)$, wobei T_uM unabhängig von spezieller Parametrisierung φ ist.

Beweis. Sei $\gamma\colon (-\delta, \delta) \to M$ C^1-Kurve mit $\gamma(0) = u$
$\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$ ist C^1-Kurve $g\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^d$ mit $g(0) = x$ und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x) \cdot g'(0), \quad \varphi'(x) \text{ ist regulär.}$$

Offenbar liefert jede C^1-Kurve g im $\mathbb{R}^d$ durch x eine C^1-Kurve γ in M mit ???. Die Menge aller Tangentialvektoren $g'(0)$ von C^1-Kurven g im $\mathbb{R}^d$ ist offenbar $\mathbb{R}^d$.
$\Rightarrow$ Gleichung (3) $\xrightarrow[\text{regulär}]{\varphi'(x)}$ $\dim(T_uM) = d$.

Da ??? für jede Parametrisierung gilt, ist T_uM unabhängig von φ. □

Bemerkung: Man bezeichnet auch $(u, T_uM) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialraum und $TM := \bigcup_{u \in M}(u, T_uM) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialbündel.

■ **Beispiel 1.12**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow$ M ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $T_uM = \mathbb{R}^n$ $\forall u \in M$.

Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Vektoren $w \in \mathbb{R}^n$ heißen Normalenvektor in $u \in M$ an M, falls

$$\langle w, v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_uM.$$

Die Menge aller Normalenvektoren $N_uM := (T_uM)^\perp$ heißt Normalenvektor von M in u.

Satz 1.13
Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ regulärer Wert von f.

$\Rightarrow M := \{u \in V \mid f(u) = c\}$ ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit mit

$$\begin{aligned} T_uM &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(u) \cdot v = 0\} && (\ker f'(u)) \quad \forall u \in M \\ N_uM &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = f'(u)^\mathsf{T} \cdot v,\ v \in \mathbb{R}^{n-d}\} && \forall u \in M \end{aligned}$$

d.h. die Spalten von $f'(u)^\mathsf{T}$ bilden eine Basis von N_uM.

■ **Beispiel 1.14**

Sei $f = \binom{f_1}{f_2} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $0 \in \mathbb{R}^2$ regulärer Wert von f.
$\Rightarrow M := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(u) = 0 = f_2(u)\}$ ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Der Gradient $f_i'(u)^\mathsf{T}$ steht senkrecht auf $\{f_i = 0\}$.
$\Rightarrow f_1'(u)^\mathsf{T}$, $f_2'(u)^\mathsf{T}$ sind Normalen zu M in u.
$\Rightarrow f_i'(u)^\mathsf{T} \cdot v = 0$, $i = 1, 2$ für Tangentenvektor v.

Beweis. M ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit, vgl. Satz 1.9.
Sei γ C^1-Kurve auf M, $\gamma(0) = u$, $\gamma'(0) = v \Rightarrow f(\gamma(t)) = c \; \forall t$.
$\Rightarrow f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = f'(u) \cdot v = 0$.

Wegen $\operatorname{rang} f'(u) = n - d$ folgt $\dim \ker f'(u) = d$
$\Rightarrow$ Behauptung für T_uM wegen $\dim T_uM = d$.

Sei $w = f'(u)^\mathsf{T}\tilde{v}$ und $v \in T_uM \Rightarrow \langle w, v\rangle = \langle \tilde{v}, f(u)v\rangle = 0 \Rightarrow w \in N_uM$.
Da $\operatorname{rang} f'(u)^\mathsf{T} = n - d$ und $\dim N_uM = n - d$ folgt die Behauptung. □

■ **Beispiel 1.15**

Sei $M := O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\mathsf{T}A = \mathrm{id}\}$ die orthogonale Gruppe. Dann ist M eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$T_{\mathrm{id}}M = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B + B^\mathsf{T} = 0\}, \quad \text{(schiefsymmetrische Matrizen)}$$

Beweis.

- Betrachte $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ mit $f(A) = A^\mathsf{T}A$
  $\Rightarrow f$ ist stetig differenzierbar mit $f'(A)B = A^\mathsf{T}B + B^\mathsf{T}A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} \; \forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- id ist ein regulärer Wert von f, denn sei $f(A) = \mathrm{id}$, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$
  $\Rightarrow f'(A)B = S$ hat die Lösung $B = \frac{1}{2}AS$, denn $\frac{1}{2}A^\mathsf{T}AS + \frac{1}{2}SA^\mathsf{T}A = S$, d.h. $f'(A)$ hat vollen Rang
  $\xRightarrow{\text{Satz 1.9}} M$ ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $d = \dim \mathbb{R}^{n\times n} - \dim \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $T_{\mathrm{id}}M = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{id}^T B + B^T \mathrm{id} = 0\}$ □

<u>Bemerkung:</u>

- $A \in O(n) \Rightarrow A$ erhält das Skalarprodukt: $\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^\mathsf{T}Ax, y\langle = \langle x, y\rangle$.
- auch $A^\mathsf{T} \in O(n)$, somit stehts $A^{-1} = A^T$.

Anhang