

# Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

14. Juni 2018

# *Inhaltsverzeichnis*

|            |                                     |           |
|------------|-------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Endomorphismen</b>               | <b>1</b>  |
| <b>II</b>  | <b>Skalarprodukte</b>               | <b>2</b>  |
| 1          | Quadriken . . . . .                 | 3         |
| <b>III</b> | <b>Dualität</b>                     | <b>8</b>  |
| 1          | Das Lemma von Zorn . . . . .        | 8         |
| 2          | Der Dualraum . . . . .              | 11        |
| <b>IV</b>  | <b>Moduln</b>                       | <b>13</b> |
|            | <b>Anhang</b>                       | <b>15</b> |
| <b>A</b>   | <b>Listen</b>                       | <b>15</b> |
| A.1        | Liste der Theoreme . . . . .        | 15        |
| A.2        | Liste der benannten Sätze . . . . . | 16        |
|            | <b>Index</b>                        | <b>16</b> |
|            | <b>Index</b>                        | <b>17</b> |

## Kapitel I

### *Endomorphismen*

## Kapitel II

### *Skalarprodukte*

# 1. Quadriken

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

## Definition 1.1 (Quadrik)

Eine Quadrik ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  mit

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x + 2b^t x + c = 0\}$$

mit  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  symmetrisch,  $b^t \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$ .

## ► Bemerkung 1.2

- $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0\}$  also  $Q$  ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in  $x_1, \dots, x_n$
- $Q$  bestimmt  $A, b, c$  nicht eindeutig, da  $Q(A, b, c) = Q(\lambda A, \lambda b, \lambda c)$
- Man kann  $A, b, c$  so normieren, dass  $c = 0$  oder  $c = 1$

## ► Bemerkung 1.3

Seien  $A, b, c$  wie in Definition 1.1, so schreiben wir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\}$ . Wir schreiben  $(A, b)$  für

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n, n+1}(\mathbb{R})$$

Es gilt  $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(\tilde{A})$ .

## ► Bemerkung 1.4 (Wiederholung)

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume.  $f : V \rightarrow W$  heißt affin, wenn  $\exists g \in \text{Hom}_K(V, W)$  mit  $f(v) = g(v) + w_0$   $\forall v \in V$ . Ist  $f$  affin und bijektiv, so ist  $f^{-1}$  affin, d.h.  $\text{Aff}_K(V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ affin und bijektiv}\}$ . Im Fall von  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $K = \mathbb{R}$  ist

$$\text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{f = \tau_z \circ f_T \mid T \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}^n\}$$

mit  $f_T(x) = Tx$  und  $\tau_z(x) = x + z$ .

## Lemma 1.5

Ist  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Quadrik, so ist  $f(Q)$  eine Quadrik, für  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ .

*Beweis.*  $f = \tau_z \circ f_T$  mit  $T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  und  $z \in \mathbb{R}^n$ . Schreibe  $S = T^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Es gilt  $\tilde{S}\tilde{x} = \tilde{S}x$ .

$$\begin{aligned} f_T(Q) &= \{Tx \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\tilde{S}\tilde{y})^t \tilde{A} \tilde{S}\tilde{y} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{\tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S}}_{\substack{S^t A S & S^t b \\ b^t S & c}} \tilde{y} = 0\} \end{aligned}$$

Jetzt für  $\tau_z$ . Sei  $U_z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $U_z \tilde{x} = \tilde{\tau}_z(x)$ . Man folgert analog, dass

$$\tau_z(Q) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{U_z^t \tilde{A} U_z}_{\substack{A & Az+b \\ z^t A + b & z^t Az + b^t z + z^t b + c}} \tilde{y} = 0\} \quad \square$$

### Definition 1.6 (Typen von Quadriken)

Sei  $Q$  gegeben durch  $(A, b, c)$  wie in Definition 1.1.  $Q$  heißt

- vom kegeligen Typ, wenn  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A, b) = \text{rk}(\tilde{A})$
- eine Mittelpunktsquadrik, wenn  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A, b) < \text{rk}(\tilde{A})$
- vom parabolischen Typ, wenn  $\text{rk}(A) < \text{rk}(A, b)$

### Lemma 1.7

Ist  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Quadrik,  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ . Von dem Typ, von dem  $Q$  ist, ist auch  $f(Q)$ .

*Beweis.*  $f = f_{S^{-1}}$ ,  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Da  $\tilde{S}$  invertierbar ist, ist  $\text{rk}(\tilde{A}) = \text{rk}(\tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S})$ , analog auch  $\text{rk}(S^t A S) = \text{rk}(A)$ .

$(S^t A S, S^t b) = S^t(A, b) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(S^t A S, S^t b) = \text{rk}(A, b)$ . Für  $f = \tau_z$  analog.  $\square$

### Definition 1.8 (Isometrie)

Eine Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  ist  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$f(x) = Ax + b$$

mit  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  ist orthogonal.

### ► Bemerkung 1.9

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Isometrie genau dann, wenn  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Theorem 1.10 (Klassifikation bis auf Isometrien)**

Sei  $Q$  eine Quadrik. Es gibt eine Isometrie  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$  mit  $f(Q)$ , die eine der folgenden Formen annimmt:

- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 = 0 \right\} \quad k \geq r - k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r - k, r < n$

mit  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $0 \leq k \leq r \leq n$

*Beweis.*

**Folgerung 1.11**

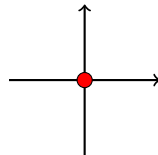
Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Quadrik. Es gibt eine invertierbare affine Abbildung  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$  für die  $f(Q)$  eine der folgenden 3 Formen annimmt:

- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^r x_i^2 = 0 \right\} \quad k \geq r - k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^r x_i^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^r x_i^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r - k, r < n$

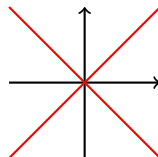
**■ Beispiel 1.12**

$Q \subseteq \mathbb{R}^2$

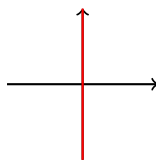
- $- \quad k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 0 \right\}$



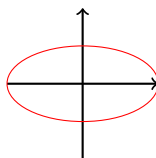
- $- \quad k = 1, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 0 \right\}$



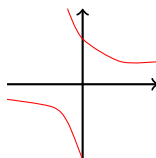
- $- \quad k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 = 0 \right\}$



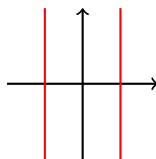
- $k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\}$



- $k = 1, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\}$



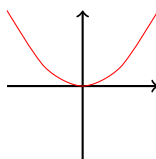
- $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 = 1 \right\}$



- $k = 0, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid - \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\} = \emptyset$

- $k = 0, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid - \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\} = \emptyset$

- –  $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - 2x_2 = 0 \right\}$



► **Bemerkung 1.13**

- Ist  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Quadrik,  $U \subseteq V$  affiner Untervektorraum, so ist  $Q \cap U$  eine Quadrik in dem Sinne, dass  $\exists f$  Isometrie :  $f(U) = \mathbb{R}^k$  und  $f(Q \cap U)$  ist eine Quadrik.
- Ebene Quadriken sind im wesentlichen Kegelschnitte,  $Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ , außer 2c und 2d in Beispiel 1.12

**Folgerung 1.14**

Sei  $Q$  eine Quadrik, dann existiert eine lineare affine Abbildung  $f$  mit:  $f(Q)$  ist vom Typ 1, 2 oder 3.



**► Bemerkung 1.15**

Die Situation wird deutlich übersichtlicher, wenn man den affinen Raum  $\mathbb{R}^n$  durch Hinzunahme von Punkten im Unendlichen zum projektiven Raum  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  vervollständigt und den Abschluss der Quadriken darin betrachtet. Es stellt sich dann heraus, dass vom projektiven Standpunkt aus die meisten ebenen Quadriken ähnlich aussehen. (Siehe Vorlesung *Elementare Algebraische Geometrie*)

## Kapitel III

# Dualität

### 1. Das Lemma von Zorn

Sei  $K$  ein Körper und  $U, V, W$  seien  $K$ -Vektorräume. Zudem sei  $X$  eine Menge.

#### Definition 1.1 (Relation)

Eine Relation ist eine Teilmenge  $R \subseteq X \times X$ . Man schreibt  $(x, x') \in R$  als  $xRx'$ .  $R$  heißt

- reflexiv, wenn  $\forall x \in X: xRx$
- transitiv, wenn  $\forall x, y, z \in X: xRy$  und  $yRz \Rightarrow xRz$
- symmetrisch, wenn  $\forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$
- antisymmetrisch, wenn  $\forall x, y \in X: xRy$  und  $yRx \Rightarrow y = x$
- total, wenn  $\forall x, y \in X: (x, y) \notin R \Rightarrow (y, x) \in R$

#### Definition 1.2 (Äquivalenzrelation)

Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation.

#### Definition 1.3 (Halbordnung)

Eine Halbordnung ist eine reflexiv, transitive und antisymmetrische Relation. Eine totale Halbordnung heißt Totalordnung oder lineare Ordnung

#### ■ Beispiel 1.4

- Die natürliche Ordnung auf  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$  und  $\mathbb{N}$ .
- Teilbarkeit ist eine Halbordnung auf  $\mathbb{N}$ , aber Teilbarkeit ist keine Halbordnung auf  $\mathbb{Z}$ , da  $1 \mid -1$  und  $-1 \mid 1$ , aber  $1 \neq -1$ !
- $\mathcal{P}(X)$  ist die Potenzmenge. " $\subseteq$ " ist eine Halbordnung auf  $\mathcal{P}$ , aber für  $|X| > 1$  ist " $\subseteq$ " keine Totalordnung.
- Sei  $(X, \leq)$  eine Halbordnung, sei  $Y \subseteq X$ , so ist  $(Y, \leq|_Y)$  eine Halbordnung.

#### Definition 1.5 (Kette)

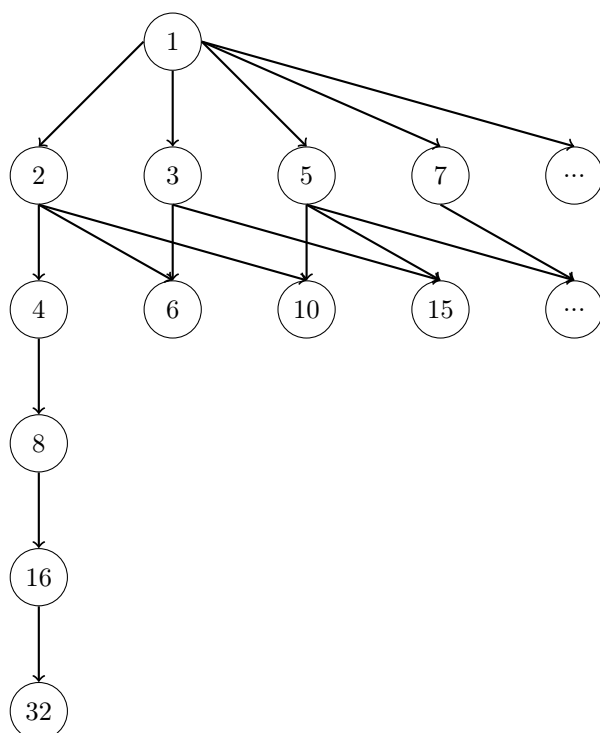
Sei  $(X, \leq)$  eine Halbordnung,  $Y \subseteq X$ .  $Y$  heißt Kette, wenn  $(Y, \leq|_Y)$  total ist.

$x \in Y$  heißt ein minimales Element von  $Y$ , wenn  $\forall x' \in Y: x < x'$ .

$x \in Y$  heißt untere Schranke von  $Y$ , wenn  $\forall y \in Y: y \geq x$ .

$x \in Y$  heißt kleinstes Element von  $Y$ , wenn  $x$  untere Schranke von  $Y$  ist.

Analog: maximales Element, obere Schranke, größtes Element.



$Y = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist eine Kette

► **Bemerkung 1.6**

- Hat  $Y$  ein kleinstes Element, so ist dies eindeutig bestimmt. Ein kleinstes Element ist minimal.
- Jede endliche Halbordnung hat minimale Elemente. Jede endliche Totalordnung hat ein kleinstes Element. Analog für maximale Elemente und größtes Element.

■ **Beispiel 1.7**

$(\mathbb{N}, \leq)$  hat als kleinstes Element die 1, aber kein größtes Element oder maximale Elemente.

■ **Beispiel 1.8**

$V = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{X}$  die Menge der Untervektorräume des  $\mathbb{R}^3$ .  $(\mathcal{X}, \leq)$  ist eine Halbordnung auf  $Y \subseteq X$  mit  $Y = \{U \in \mathcal{X} \mid \dim_{\mathbb{R}}(U) \leq 2\}$ .

- $Y$  hat ein kleinstes Element:  $\{0\}$ .
- Es gibt unendlich viele maximale Elemente in  $Y$ , nämlich die Untervektorräume von  $V$ , die die Dimension 2 haben. Es gibt also kein größtes Element.
- $V$  ist die obere Schranke von  $Y$ .

**Theorem 1.9 (Das Lemma von Zorn)**

Sei  $(X, \leq)$  eine Halbordnung, die nicht leer ist. Wenn jede Kette eine obere Schranke hat, dann hat  $X$  ein maximales Element.

*Beweis.* Dieses Theorem ist äquivalent zum Auswahlaxiom. ☺. Wir wollen zumindest die Hinrichtung zeigen, d.h. aus dem Lemma von Zorn folgt das Auswahlaxiom.  $\square$

**Folgerung 1.10 (Auswahlaxiom)**

Zu jeder Familie  $(x_i)$ , nicht leer, gibt es eine Auswahlfunktion, das heißt eine Abbildung:

$$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \text{ mit } f(i) \in X_i \quad \forall i$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{F}$  die Menge der Paare  $(J, f)$  bestehend aus einer Teilmenge  $J \subseteq I$  und einer Abbildung  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$  mit  $f(i) \in X_i \quad \forall i \in J$ . Definieren wir  $(J, f) \leq (J', f') \iff J \subseteq J'$  und  $f'|_J = f$ , so ist  $\leq$  eine Halbordnung auf  $\mathcal{F}$ . Da  $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{F}$  ist  $\mathcal{F}$  nichtleer. Ist  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  eine nichtleere Kette, so wird auf  $J' := \bigcup_{(J, f) \in \mathcal{G}} J$  durch  $f'(j) = f(j)$  falls  $(J, f) \in \mathcal{G}$  und  $j \in J$  eine wohldefinierte Abbildung  $f' : J' \rightarrow \bigcup_{i \in J} X_i$  mit  $f'(i) \in X_i \quad \forall i \in J'$  gegeben. Das Paar  $(J', f')$  ist eine obere Schranke der Kette  $\mathcal{G}$ . Nach dem Lemma von Zorn besitzt  $\mathcal{F}$  ein maximales Element  $(J, f)$ . Wir behaupten, dass  $J = I$ . Andernfalls nehmen wir ein  $i' \in I \setminus J$  und ein  $x' \in X_{i'}$  und definieren  $J' := J \cup \{i'\}$  und  $f' : J' \rightarrow \bigcup_{i \in J'} X_i, j \mapsto \begin{cases} f(j) & j \in J \\ x' & j = i' \end{cases}$ . Dann ist  $(J', f') \in \mathcal{F}$  und  $(J, f) < (J', f')$  im Widerspruch zur Maximalität von  $(J, f)$ .  $\square$

**Folgerung 1.11 (Basisergänzungssatz)**

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Jede linear unabhängige Teilmenge  $X_0 \subseteq V$  ist in einer Basis von  $V$  enthalten.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{X} = \{X \subseteq V \mid X \text{ ist linear unabhängig, } X_0 \subseteq X\}$  geordnet durch Inklusion. Dann ist  $X_0 \in \mathcal{X}$ , also  $\mathcal{X} \neq \emptyset$ . Ist  $\mathcal{Y}$  eine nichtleere Kette in  $\mathcal{X}$ , so ist auch  $Y = \bigcup \mathcal{Y} \subseteq V$  linear unabhängig. Sind  $y_1, \dots, y_n \in Y$  paarweise verschieden, so gibt es  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{Y}$  mit  $y_i \in Y_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Da  $\mathcal{Y}$  total geordnet ist, besitzt  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  ein größtes Element, o.E.  $Y_1$ . Also sind  $y_1, \dots, y_n \in Y_1$  und somit linear unabhängig. Folglich ist  $Y_1 \in \mathcal{X}$  eine obere Schranke von  $\mathcal{Y}$ . Nach dem Lemma von Zorn besitzt  $\mathcal{X}$  ein maximales Element  $X$ . Das heißt,  $X$  ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von  $V$ , nach LAAG1 II.3.5 also eine Basis von  $V$ .  $\square$

## 2. Der Dualraum

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

### Definition 2.1 (Dualraum)

Der Dualraum zu  $V$  ist der  $K$ -Vektorraum

$$V^* = \text{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \rightarrow K \text{ linear}\}$$

Die Elemente von  $V^*$  heißen Linearformen auf  $V$ .

### ■ Beispiel 2.2

Ist  $V = K^n = \text{Mat}_{n \times 1}(K)$ , so wird  $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$  durch  $\text{Mat}_{1 \times n}(K) \cong K^n$ . Wir können also die Elemente von  $V$  als Spaltenvektoren und die Linearformen auf  $V$  als Zeilenvektoren auffassen.

### Lemma 2.3

Ist  $B = (x_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , so gibt es zu jedem  $i \in I$  genau  $x_i^* \in V^*$  mit  $x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \in I$ .

*Beweis.* Siehe LAAG1 III.5.1, angewandt auf die Familie  $(y_j)_{j \in I}$ ,  $y_j \delta_{i,j}$  in  $W = K$ . □

### Satz 2.4

Ist  $B = (x_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , so ist  $B^* = (x_i^*)_{i \in I}$  linear unabhängig. Ist  $I$  endlich, so ist  $B^*$  eine Basis von  $V^*$ .

*Beweis.* Ist  $\varphi = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^*$ ,  $\lambda_i \in K$ , fast alle gleich 0, so ist  $\varphi(x_j) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^*(x_j) = \lambda_j$  für jedes  $j \in I$ . Ist also  $\varphi = 0$ , so ist  $\lambda_j = \varphi(x_j) = 0 \quad \forall j \in I$ ,  $B^*$  ist somit linear unabhängig.

Ist zudem  $I$  endlich und  $\psi \in V^*$ , so ist  $\psi = \psi' = \sum_{i \in I} \psi(x_i) x_i^*$ , denn  $\psi'(x_j) = \sum_{i \in I} \psi(x_i) x_i^*(x_j) = \psi(x_i) \quad \forall j \in I$ , und somit ist  $B^*$  ein Erzeugendensystem von  $V^*$ . □

### Definition 2.5 (duale Basis)

Ist  $B = (x_i)_{i \in I}$  eine endliche Basis von  $V$ , so nennt man  $B^* = (x_i^*)_{i \in I}$  die zu  $B$  duale Basis.

### Folgerung 2.6

Zu jeder Basis  $B$  von  $V$  gibt es einen eindeutig bestimmten Monomorphismus

$$f_V : V \rightarrow V^* \text{ mit } f(B) = B^*$$

Ist  $\dim_K(V) < \infty$ , so ist dieser ein Isomorphismus.

### Folgerung 2.7

Zu jedem  $x \neq 0 \in V$  gibt es eine Linearform  $\varphi \in V^*$  mit  $\varphi(x) = 1$ .

*Beweis.* Ergänze  $x_1 = x$  zu einer Basis  $(x_i)_{i \in I}$  von  $V$  (Folgerung 1.11) und  $\varphi = x_1^*$ . □

### ■ Beispiel 2.8

Ist  $V = K^n$  mit Standardbasis  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ , so können wir  $V^*$  mit dem Vektorraum der Zeilenvektoren identifizieren, und dann ist

$$e_i^* = e_i^t$$

**Definition 2.9 (Bidualraum)**

Der Bidualraum zu  $V$  ist der  $K$ -Vektorraum

$$V^{**} = (V^*)^* = \operatorname{Hom}_K(V^*, K)$$

**Satz 2.10**

Die kanonische Abbildung

$$\iota : \begin{cases} V \rightarrow V^{**} \\ x \rightarrow \iota_x \end{cases} \quad \text{wobei } \iota_x(\varphi) = \varphi(x)$$

ist ein Monomorphismus. Ist  $\dim_K(V) < \infty$ , so ist  $\iota$  ein Isomorphismus.

## Kapitel IV

### *Moduln*

# Anhang



## Anhang A: Listen

### A.1. Liste der Theoreme

|   |   |
|---|---|
| Theorem 1.10: Klassifikation bis auf Isometrien . . . . . | 5 |
| Theorem 1.9: Das Lemma von Zorn . . . . .                 | 9 |

## **A.2. Liste der benannten Sätze**

# Index

Äquivalenzrelation, 8

Auswahlfunktion, 10

duale Basis, 11

Dualraum, 11

Halbordnung, 8

Isometrie, 4

Kette, 8

größtes Element, 8

kleinstes Element, 8

maximales Element, 8

minimales Element, 8

obere Schranke, 8

untere Schranke, 8

lineare Ordnung, 8

Linearformen, 11

projektiven Raum, 7

Quadrik, 3

kegeligen Typ, 4

Mittelpunktsquadrik, 4

parabolischen Typ, 4

Relation, 8

antisymmetrisch, 8

reflexiv, 8

symmetrisch, 8

total, 8

transitiv, 8

Totalordnung, 8