Algebra und Zahlentheorie SS 2019

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

26. April 2019

Inhaltsverzeichnis

I Körper **3**

1 Körpererweiterungen . . . 3

2 Algebraische Körpererweiterungen . . . 6

3 Wurzelkörper und Zerfällungskörper . . . 10

4 Der algebraische Abschluss . . . 14

5 Die transzendente Erweiterung . . . 17

6 Die separable Erweiterung . . . 19

Vorwort

Motivation und Einführung

Kapitel I

Körper

1. Körpererweiterungen

Sei K, L, M Körper.

▶ **Bemerkung 1.1**

In diesem Kapitel bedeutet “Ring” immer kommutativer Ring mit Einselement, und ein Ringhomomorphismus bildet stets das Einselement auf das Einselement ab. Insbesondere gibt es für jeden Ring einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus : $\mathbb{Z} \to R$.

▶ **Bemerkung 1.2**

(a) Ein Körper ist ein Ring R, in dem eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

1) $0 \neq 1$ und jedes $0 \neq x \in R$ ist invertierbar

2) $R^\times = R \setminus \{0\}$

3) R hat genau zwei Hauptideale (nämlich (0) und (1))

4) (0) ist ein maximales Ideal von R

5) (0) ist das einzige echte Ideal von R

6) (0) ist das einzige Primideal von R

(b) Insbesondere sind Körper nullteilerfrei, weshalb $\mathrm{Ker}(\mathbb{Z} \to K)$ prim ist.

(c) Aus (5) folgt: Jeder Ringhomomorphismus $K \to L$ ist injektiv

(d) Der Durchschnitt einer Familie von Teilkörpern von K ist wieder ein Teilkörper von K.

Definition 1.3 (Charakteristik)

Die Charakteristik von K, $\mathrm{char}(K)$, ist das $p \in \{0, 2, 3, 5, 7, \ldots\}$ mit $\mathrm{Ker}(\mathbb{Z} \to K) = (p)$.

■ **Beispiel 1.4**

(a) $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ und $\mathrm{char}(\mathbb{F}_p) = (p)$ ($p =$ Primzahl), wobei $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

(b) Ist $K_0 \subseteq K$ Teilkörper, so ist $\mathrm{char}(K_0) = \mathrm{char}(K)$.

Definition 1.5 (Primkörper)

Der Primkörper von K ist der kleinste Teilkörper von K. (existiert nach Bemerkung 1.2(d))

Satz 1.6
Sei $\mathbb{F}$ der Primkörper von K.

(a) $\operatorname{char}(K) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{F} \cong \mathbb{Q}$

(b) $\operatorname{char}(K) = p > 0 \Leftrightarrow \mathbb{F} \cong \mathbb{F}_p$

Beweis. "$\Leftarrow$": Beispiel 1.4
"$\Rightarrow$": $\operatorname{Im}(\mathbb{Z} \to K) \subseteq \mathbb{F}$ und $\operatorname{Im}(\mathbb{Z} \to K) \cong \mathbb{Z}/\operatorname{Ker}(\mathbb{Z} \to K)$

(a) $\operatorname{Im}(\mathbb{Z} \to K) \cong Z/(0) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{F} = \operatorname{Quot}(\operatorname{Im}(\mathbb{Z} \to K)) \cong \operatorname{Quot}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$

(b) $\operatorname{Im}(\mathbb{Z} \to K) \cong Z/(p) \cong \mathbb{F}_p$ ist Teilkörper von K $\Rightarrow \mathbb{F} = \operatorname{Im}(\mathbb{Z} \to K) \cong \mathbb{F}_p$ □

Definition 1.7 (Körpererweiterung)
Ist K ein Teilkörper von L, so nennt man L eine Köpererweiterung von K, auch geschrieben $L \mid K$.

Definition 1.8 (K-Homomorphismus)
Seien $L_1 \mid K$ und $L_2 \mid K$ Körpererweiterungen.

(a) Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon L_1 \to L_2$ ist ein K-Homomorphismus, wenn $\varphi|_K = \operatorname{id}_K$ (i.Z. $\varphi : L_1 \to L_2$)

(b) $\operatorname{Hom}_K(L_1, L_2) = \{\varphi \mid \varphi : L_1 \to L_2 \text{ ist } K\text{-Homomorphismus}\}$

(c) L_1 und L_2 sind K-isomorph (i.Z. $L_1 \cong L_2$), wenn es einen Isomorphismus: $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(L_1, L_2)$ gibt.

▶ **Bemerkung 1.9**
$L \mid K$ eine Körpererweiterung, so wird L durch Einschränkung der Multiplikation zu einem K-Vektorraum.

Definition 1.10 (Körpergrad)
$[L : K] := \dim_k(L) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, der Körpergrad der Körpererweiterungen $L \mid K$.

■ **Beispiel 1.11**

(a) $[K : K] = 1$

(b) $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ (Basis $(1, i)$) (aber $(\mathbb{C} : \mathbb{R}) = \infty$)

(c) $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$ (mit Abzählarbarkeitsargument oder siehe §2)

(d) $[K(x) : K] = \infty$ ($K(x) = \operatorname{Quot}(K[x])$ (vgl. GEO II.8)

Satz 1.12
Für $K \subseteq L \subseteq M$ Körper ist $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$
("Körpergrad ist multiplikativ")

Beweis. Behauptung: Sei $x_1, \ldots, x_n \in L$ K-linear unabhängig und $y_1, \ldots, y_m \in M$ L-linear unabhängig
$\Rightarrow x_i y_j, i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, m\}$ K-linear unabhängig.
Beweis: $\sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i y_j = 0$ mit $\lambda_{ij} \in K$

$$\Rightarrow \sum_j \underbrace{\left(\sum_i \lambda_{ij} x_i\right)}_{\in L} y_j = 0 \xrightarrow{y_j\, L\text{-l.u.}} \sum_i \lambda_{ij} x_i = 0 \quad \forall j \xrightarrow{y_j\, K\text{-l.u.}} \lambda_{ij} = 0 \quad \forall i, \forall j$$

- $[L : K] = \infty$ oder $[M : L] = \infty \Rightarrow [M : K] = \infty$
- $[L : K] = n, [M : L] = m < \infty$
  $(x_1, \dots, x_n)$ Basis des K-Vektorraum L und $(y_1, \dots, y_m)$ Basis des L-Vektorraums M
  $\Rightarrow \{x_i y_j : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ K-linear unabhängig und
  $\sum_{i,j} K x_i y_j = \sum_j \left(\sum_i \lambda_{ij} x_i\right) y_j = M$, also ist
  $\{x_i y_j : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ Basis von M □

Definition 1.13 (Körpergrad endlich)
$L \mid K$ endlich $:\Leftrightarrow [L : K] < \infty$.

Definition 1.14 (Unterring, Teilkörper)
Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$.

(a) $K[a_1, \dots, a_n]$ ist kleinster Unterring von L, der $K \cup \{a_1, \dots, a_n\}$ enthält ("$a_1, \dots, a_n$ über K erzeugt")

(b) $K[a_1, \dots, a_n]$ ist kleinster Teilkörper von L, der $K \cup \{a_1, \dots, a_n\}$ enthält ("von "$a_1, \dots, a_n$ über K erzeugte", "$a_1, \dots, a_n$" zu K adjungieren)

(c) $L|K$ ist endlich erzeugt $:\Leftrightarrow a_1, \dots, a_n \in L : L = K(a_1, \dots, a_n)$

(d) $L|K$ ist einfach $:\Leftrightarrow$ existiert $a \in L : L = K(a)$

▶ **Bemerkung 1.15**

(a) $L \mid K$ endlich $\Rightarrow L \mid K$ endlich erzeugt.

(b) $K[a_1, \dots, a_n]$ ist das Bild des Homomorphismus

$$\begin{cases} K[x_1, \dots, x_n] & \to L \\ f & \mapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{cases}$$

und $K(a_1, \dots, a_n) = \{\alpha\beta \colon \alpha, \beta \in K[a_1, \dots, a_n], \beta \neq 0\} \cong \mathrm{Quot}(K[a_1, \dots, a_n])$

2. Algebraische Körpererweiterungen

Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung.

Definition 2.1 (algebraisch, transzendent)
Sei $\alpha \in L$. Gibt es ein $0 \neq f \in K$ mit $f(\alpha) = 0$, so heißt α algebraisch über K, andernfalls transzendent über K.

■ **Beispiel 2.2**

(a) $\alpha \in K \Rightarrow \alpha$ ist algebraisch über K (denn $f(\alpha) = 0$ für $f = X - \alpha \in K$)

(b) $\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ (denn $f(\sqrt{-1}) = 0$ für $f = X^2 + 1 \in \mathbb{Q}$)
$\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ ist algebraisch über $\mathbb{R}$

▶ **Bemerkung 2.3**
Sind $K \subseteq L \subseteq M$ Körper und $\alpha \in M$ algebraisch über K, so auch über L.

Lemma 2.4
Genau dann ist $\alpha \in L$ algebraisch über K, wenn $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ K-linear abhängig sind.

Beweis. Für $\lambda_0, \lambda_1, \dots \in K$, fast alle gleich Null, so ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \alpha^i :\Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \text{ für } f = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i X^i \in K$$ □

Lemma 2.5
Betrachte den Epimorphismus

$$\varphi_\alpha : \begin{cases} K[x] & \to K[\alpha] \\ f & \mapsto f(\alpha). \end{cases}$$

Genau dann ist α algebraisch über K, wenn $\operatorname{Ker}(\varphi_\alpha) \neq (0)$. In diesem Fall ist $\operatorname{Ker}(\varphi_\alpha) = (f_\alpha)$ mit einem eindeutig bestimmten irreduziblen, normierten $f_\alpha \in K$.

Beweis. K Hauptidealring $\Rightarrow \operatorname{Ker}(\varphi_\alpha) = (f_\alpha)$, $f_\alpha \in K$, o.E. sei f_α normiert. Aus $K[\alpha] \subseteq L$ nullteilerfrei folgt, dass $\operatorname{Ker}(\varphi_\alpha)$ prim ist. Somit ist f_α prim und im Hauptidealring also auch irreduzibel. □

Definition 2.6 (Minimalpolynom, Grad)
Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K, $\operatorname{Ker}(\varphi_\alpha) = (f_\alpha)$ mit $f_\alpha \in K$ normiert und irreduzibel.

(a) $\operatorname{MinPol}(\alpha \mid K) := f_\alpha$, das Minimalpolynom von α über K.

(b) $\deg(\alpha \mid K) :\Leftrightarrow \deg(f_\alpha)$, der Grad von α über K.

Satz 2.7
Sei $\alpha \in L$.

(a) α transzendent über K
$\Rightarrow K[\alpha] \cong K$, $K(\alpha) \cong_K K(X)$, $[K(\alpha) : K] = \infty$.

(b) α algebraisch über K
$\Rightarrow K[\alpha] = K(\alpha) \cong K/\operatorname{MinPol}(\alpha \mid K)$, $[K(\alpha)\colon K)] = \deg(\alpha \mid K) < \infty$ und
$1, \alpha, \dots, \alpha^{\deg(\alpha|K)-1}$ ist K-Basis von $K(\alpha)$.

Beweis. (a) $\operatorname{Ker}(\varphi_\alpha) = (0) \Rightarrow \varphi_\alpha$ ist Isomorphismus (da zusätzlich injektiv)
$\Rightarrow K(\alpha) \cong_K \operatorname{Quot}(K[\alpha]) \cong_K \operatorname{Quot}(K) = K(X)$
$\Rightarrow [K(\alpha)\colon K] = [K(x)\colon K] = \infty$

(b) Sei $f = f_\alpha = \operatorname{MinPol}(\alpha \mid K)$, $n = \deg(\alpha \mid K) = \deg(f)$.

- f irreduzibel $\Rightarrow (f) \neq (0)$ prim $\xRightarrow{\text{GEO II.4.7}} (f)$ ist maximal
  $\Rightarrow K[\alpha] \cong K/(f)$ ist Körper $\Rightarrow K[\alpha] = K(\alpha)$
- $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ sind K-linear unabhängig:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \alpha^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i \in (f) \quad \xRightarrow{\deg f = n} \quad \lambda_i = 0 \ \forall i$$

$1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ ist Erzeugendensystem: Für $g \in K$ ist

$$g = qf + r \text{ mit } q, r \in K \text{ und } \deg(r) < \deg(f) = n$$

und

$$g(\alpha) = q(\alpha) \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + r(\alpha) = r(\alpha)$$

somit $K = \operatorname{Im}(\varphi_\alpha) = \{g(\alpha) \colon g \in K\} = \{r(\alpha) \colon r \in K, \deg(r) < n\} = \sum_{i=0}^{n-1} K \cdot \alpha^i$ □

■ Beispiel 2.8

(a) $p \in \mathbb{Z}$ prim $\Rightarrow \sqrt{p} \in \mathbb{C}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$.
Da $f(X) = X^2 - p$ irreduzibel in $\mathbb{Q}$ ist (GEO II.7.3), ist $\operatorname{MinPol}(\sqrt{p} : \mathbb{Q}) = X^2 - p$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}) : \mathbb{Q}] = 2$.

(b) Sei $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$ ($p \in \mathbb{N}$ prim). Da $\Phi_p = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1 \in \mathbb{Q}$ irreduzibel in $\mathbb{Q}$ ist (GEO II.7.9), ist $\operatorname{MinPol}(\zeta_p \mid \mathbb{Q}) = \Phi_p$, $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1$. Daraus folgt schließlich $[\mathbb{C} : \mathbb{Q} \geq [\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1 \ \forall p \Rightarrow [\mathbb{C} : \mathbb{Q}] = \infty \Rightarrow [R : \mathbb{Q}] = \infty$.

(c) $e \in \mathbb{R}$ ist transzendent über $\mathbb{Q}$ (Hermite 1873), $\pi \in \mathbb{R}$ ist transzendent über $\mathbb{Q}$ (Lindemann 1882).
Daraus folgt: $[R : \mathbb{Q}] \geq [\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] = \infty$. Jedoch ist unbekannt, ob z.B. $\pi + e$ transzendent ist.

Definition 2.9
$L \mid K$ ist algebraisch :$\Leftrightarrow$ jedes $\alpha \in L$ ist algebraisch über K.

Satz 2.10
$L \mid K$ endlich $\Rightarrow L \mid K$ algebraisch.

Beweis. $\alpha \in L$, $[L:K] = n \Rightarrow 1, \alpha, \ldots, \alpha^n$ K-linear abhängig $\overset{2.4}{\Longrightarrow}$ α algebraisch über K. □

Folgerung 2.11
Ist $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über K, so ist $L \mid K$ endlich, insbesondere algebraisch.

Beweis. Induktion nach n:

- $n = 0$: ✓
- $n > 0$: $K_1 := K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$
  $\Rightarrow L = K_1(\alpha_n)$, α_n algebraisch über K_1 (Bemerkung 2.3)
  $\Rightarrow [L:K] = \underbrace{[K_1(\alpha_n) : K_1]}_{<\infty \text{ nach Satz 2.7}} \cdot \underbrace{[K_1 : K]}_{<\infty \text{ nach IH}}$ □

Folgerung 2.12
Es sind äquivalent:

(a) $L \mid K$ ist endlich.

(b) $L \mid K$ ist endlich erzeugt und algebraisch.

(c) $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über K.

Beweis.
- (1) $\Rightarrow$ (2): Bemerkung 1.15 und Satz 2.10
- (2) $\Rightarrow$ (3): trivial
- (3) $\Rightarrow$ (1): Folgerung 2.11 □

▶ **Bemerkung 2.13**
Nach Satz 2.7 ist

$$\alpha \text{ algebraisch über } K :\Leftrightarrow K[\alpha] = K(\alpha)$$

Direkter Beweis für ($\Rightarrow$):
Sei $0 \neq \beta \in K[\alpha]$. Daraus folgt, dass $f(\beta) = 0$ für ein irreduzibles $0 \neq f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K$. Durch Einsetzen von β und Division durch β erhält man (auch wegen der aus der Irreduzibilität

$$\overset{a_0 \neq 0}{\Longrightarrow} \beta^{-1} = -a_0^{-1}(a_1 + a_2\beta + \cdots + a_n\beta^{n-1}) \in K[\beta] \subseteq K[\alpha]$$

Satz 2.14
Seien $K \subseteq L \subseteq M$ Körper. Dann gilt:

$$M \mid K \text{ algebraisch } \Leftrightarrow M \mid L \text{ algebraisch und } L \mid K \text{ algebraisch}$$

Beweis. ($\Rightarrow$) klar, siehe Bemerkung 2.3.

($\Leftarrow$) Sei $\alpha \in M$. Schreibe $f = \mathrm{MinPol}(\alpha \mid L) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $\quad L_0 := K(a_0, \ldots, a_n)$
$\Rightarrow f \in L_0[x]$

$\Rightarrow [L_0(\alpha) : L_0] \leq \deg(f) \leq \infty$

$\Rightarrow [K(\alpha : K)] \leq [K(a_0, \ldots, a_n, \alpha) : K] = \underbrace{[L_0(\alpha) : L_0]}_{<\infty} \underbrace{[L_0 : K]}_{< \text{ nach } 2.7}$

$\Rightarrow \alpha$ algebraisch über K

$\overset{\alpha \text{ bel.}}{\Rightarrow} M \mid K$ algebraisch. □

Folgerung 2.15

$\tilde{K} = \{\alpha \in L \colon \alpha$ algebraisch über $K\}$ ist ein Körper, und ist $\alpha \in L$ algebraisch über $\tilde{K}$, so ist schon $\alpha \in \tilde{K}$.

Beweis.

- $\alpha, \beta \in \tilde{K}$:
  $\Rightarrow K(\alpha, \beta) \mid K$ endlich, insbesondere algebraisch
  $\Rightarrow \alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^{-1} \in K(\alpha, \beta)$ alle algebraisch über K, also $K(\alpha, \beta) \subseteq \tilde{K}$.
- $\alpha \in L$ algebraisch über $\tilde{K}$:
  $\Rightarrow \tilde{K}(\alpha) \mid \tilde{K}$ algebraisch
  $\Rightarrow \tilde{K} \mid K$ algebraisch $\overset{2.14}{\Rightarrow} \tilde{K}(\alpha \mid K)$ algebraisch, insbesondere $\alpha \in \tilde{K}$. □

Definition 2.16 (relative algebraische Abschluss)

$\tilde{K} = \{\alpha \in L \colon \alpha$ algebraisch über $K\}$ heißt der <u>relative algebraische Abschluss</u> von K in L.

Beispiel 2.17

$\tilde{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} \colon \alpha$ algebraisch über $K\}$ ist ein Körper, der Körper der algebraischen Zahlen. Es ist $[\tilde{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}] = \infty$, z.B. da $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p-1$ für jedes p prim. (algebraische Erweiterung die nicht endlich ist.)

3. Wurzelkörper und Zerfällungskörper

Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ mit $n = \deg(f) > 0$.

■ **Beispiel 3.1**
Sei $K = \mathbb{Q}$. Dann hat f eine Nullstelle ("Wurzel") $\alpha \in \mathbb{C}$, und $L := K(\alpha) = K[\alpha]$ ist die kleinste Erweiterung von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$, die diese Nullstelle enthält.

Definition 3.2 (Wurzelkörper)
Ein Wurzelkörper von f ist eine Körpererweiterung $L \mid K$ der Form $L = K(\alpha)$ mit $f(\alpha) = 0$.

Lemma 3.3
Sei $L = K(\alpha)$ mit $f(\alpha) = 0$ ein Wurzelkörper von f. Dann ist $[L : K] \leq n$. Ist f irreduzibel, so ist $[L : K] = n$ und $g \mapsto g(\alpha)$ induziert einen Isomorphismus $K[X]/(f) \xrightarrow{\cong}_K L$.

Beweis. Sei zunächst f irreduzibel, $f_\alpha = \mathrm{MinPol}(\alpha \mid K)$. Dann ist $f = cf_\alpha$, die Behauptung folgt somit aus Satz 2.7b). Für $f \in K[X]$ beliebig, schreibe $f = f_1 \cdots f_r$ mit $f_i \in K[X]$ irreduzibel

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \text{ OE } f_1(\alpha) = 0 \Rightarrow [L : K] = \deg(f_1) \leq \deg(f) = n \qquad \square$$

Lemma 3.4
Sei f irreduzibel. Dann ist $L := K[X]/(f)$ ein Wurzelkörper von f.

Beweis. Betrachte den Epimorphismus $\pi = \pi_f : K[X] \to K[X]/(f) = L$, setze $\alpha = \pi(X)$

- K Körper $\Rightarrow \pi_{|K}$ injektiv
  $\Rightarrow$ können K mit Teilkörper von L identifizieren, sodass $\pi_{|K} = \mathrm{id}_K$
- (f) irreduzibel $\Rightarrow$ prim $\xrightarrow{\text{GEO II.4.7}}$ (f) maximal $\Rightarrow L = K[X]/(f)$ ist Körper
- $f(\alpha) = f(\pi(X)) \overset{(*)}{=} \pi(f(X)) = 0 \quad f(X) \in \mathrm{Ker}(\pi)$
  ($*$ gilt, da $f = \sum a_i x^i = \pi(f) = \sum \pi(a_i)\pi(x)^i = \sum a_i \pi(x)^i = f(\pi(x))$)
- $L = \pi(K[X]) = K[\pi(X)] = k[\alpha] \overset{\alpha \text{ alg.}}{=} K(\alpha)$ $\square$

Satz 3.5
Sei f irreduzibel. Ein Wurzelkörper von f existiert und ist eindeutig in folgendem Sinn:
Sind $L_1 = K(\alpha_1), L_2 = K(\alpha_2)$ mit $f(\alpha_1) = 0 = f(\alpha_2)$, so existiert genau ein K-Isomorphismus $\varphi : L_1 \to L_2$ mit $\varphi(\alpha_1) = \alpha_2$.

Beweis.

- Existenz gibt Lemma 3.4
- Lemma 3.3 liefert Isomorphismus

$$\left\{\begin{matrix} L_1 \xleftarrow[\varphi_1]{\cong} & K[X]/(f) & \xrightarrow[\varphi_2]{\cong} L_2 \\ \alpha_1 \leftarrow\!\shortmid & X + (f) & \mapsto \alpha_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi_2 \circ \varphi_1 : L_1 \xrightarrow{\cong}_K L_2 \text{ mit } \alpha_1 \mapsto \alpha_2$$

Umgekehrt ist jeder K-Isomorphismus $\varphi : L_1 \to_K L_2$ wegen $L_1 = K(\alpha_1)$ schon durch $\varphi(\alpha_1)$ festgelegt. $\square$

Folgerung 3.6
f hat einen Wurzelkörper.

Beweis. Schreibe $f = f_1 \cdots f_r, f_1, \dots, f_r \in K[X]$ irreduzibel, nehme einen Wurzelkörper von f_1. □

Folgerung 3.7
Es gibt eine Erweiterung $L \mid K$, über der f in Linearfaktoren zerfällt, also $f = c \prod_{i=0}^{n}(x - \alpha_i)$ mit $c \in K^\times, \alpha, \dots, \alpha_n \in L$.

Beweis. Schreibe $f = c \cdot f_0$ mit $c \in K^\times, f_0 \in K[X]$ normiert.
Induktion nach n:

- $n = 1 : f = x - a$, nehme $L = K$.
- $n > 1$: Nach Folgerung 3.6 existiert $L_1 \mid K, \alpha_1 \in L_1$ mit $f_0(\alpha_1) = 0$
  $\Rightarrow f_0 = (x - \alpha_1) \cdot f_1$ mit $f_1 \in L_1[X]$ normiert
  $\overset{\text{(IH)}}{\Longrightarrow}$ existiert $L \mid L_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ mit $f_1 = \prod_{i=2}^{n}(x - \alpha_i)$
  $\Rightarrow f = c \cdot f_0 = c \cdot (x - \alpha_1) \cdot f_1 = c \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ □

Definition 3.8 (Zerfällungskörper)
Ein Zerfällungskörper von K ist eine Erweiterung $L \mid K$ der Form $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $f = c \cdot \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ mit $c \in K^\times$.

Satz 3.9
Ein Zerfällungskörper von f existiert.

Beweis. Ist $L \mid K$ wie in Folgerung 3.7, ist $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Zerfällungskörper von f. □

Lemma 3.10
Ist $L \mid K$ ein Zerfällungskörper vpn f, so ist $[L : K] \leq n!$

Beweis. Sei $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n), f = c \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$.
Induktion nach n:

- $n = 1 : L = K, [K : K] = 1$
- $n > 1 : L_1 = K(\alpha_1)$ ist Wurzelkörper von $f \overset{3.3}{\Longrightarrow} [L_1 : K] \leq n$ und schreibe $f = c \cdot (x - \alpha_1) \cdot f_1, f_1 = \prod_{i=2}^{n}(x - \alpha_i) \in L_1[X]$
  $\Rightarrow L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = L_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist Zerfällungskörper von f_1 (über L_1)
  $\overset{\text{IH}}{\Longrightarrow} [L : L_1] \leq \deg(f_1)! = (n-1)!$
  $\Rightarrow [L : K] = [L : L_1][L_1 : K] = (n-1)!n = n!$ □

Beispiel 3.11

(a) Ist $n = 2$, so ist jeder Wurzelkörper L von f, schon ein Zerfällungskörper: $[L : K] \leq 2$.

(b) Ist $n = 3$, f irreduzibel. Schreibe $L_1 = K(\alpha), f = c(x - \alpha_1)f_1$ mit $f_1 \in L_1[X]$
   - f_1 reduzibel: L_1 ist schon Zerfällungskörper von f, $[L_1 : K] = 3$
   - f_1 irreduzibel: L_1 ist kein Zerfällungskörper von f. Ist L Wurzelkörper von f_1, so ist L Zerfällungskörper von f, $[L : K] = 3! = 6$

■ **Beispiel**

Sei $f = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, dann sind die Nullstellen von f: $\sqrt[2]{2} \in \mathbb{R}, \zeta_3 \sqrt[2]{2}, \zeta_3^2 \sqrt[2]{2}$

- $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{2})$ ist Wurzelkörper von f. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}, \zeta_3 \sqrt[3]{2}, \zeta_3^2 \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{R}$, aber kein Zerfällungskörper. Der Zerfällungskörper von f ist

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3 \sqrt[3]{2}, \zeta_3^2 \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3^2 \sqrt[3]{2})$$

Mathematica/WolframAlpha-Befehle

Will man die Nullstellen von $f = X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ finden, dann bietet Mathematica folgende Funktion:

`Solve[f==0,x,Complexes]`,

der letzte Parameter lässt einem den Körper wählen, in dem Mathematica suchen soll. Es gibt zur Auswahl **`Integers, Rationals, Reals, Complexes`**. Für das Beispiel erhält man folgenden Output:

$$\left\{x \to -(-2)^{(1/3)}, x \to 2^{(1/3)}, x \to (-1)^{(2/3)} 2^{(1/3)}\right\}.$$

Dabei müsste man die Einheitswurzeln identifizieren:

$$\left\{x \to \zeta_3 \sqrt[3]{2}, x \to \sqrt[3]{2}, x \to \zeta_3^2 \sqrt[3]{2}\right\}$$

Anmerkung

Wenn f irreduzibel $\Rightarrow K[X]/(f)$ ist Wurzelkörper.

Lemma 3.12

Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ irreduzibel und sei $L = K(\alpha)$ mit $f(\alpha)$ ein Wurzelkörper von f. Sei $\tilde{L} \mid \tilde{K}$ eine weitere Körpererweiterung und $\varphi \in \mathrm{Hom}(K, \tilde{K})$. Ist $\sigma \in \mathrm{Hom}(L, \tilde{L})$ eine Fortsetzung von φ (d.h. $\sigma_{|K} = \varphi$), so ist $\sigma(\alpha)$ eine Nullstelle von $f^\varphi = \sum_{i=0}^n \varphi(\alpha_i) x^i \in K[X]$. Ist umgekehrt $\beta \in L'$ eine Nullstelle von f^φ, so gibt es genau eine Fortsetzung $\sigma \in \mathrm{Hom}(L, \tilde{L})$ von φ mit $\sigma(\alpha) = \beta$.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\sigma} & L' \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \xrightarrow{\varphi} & K' \end{array}$$

Beweis (was für die Prüfung!).

- $f(\alpha) = 0 \Rightarrow 0 = \sigma(0) = \sigma(f(\alpha)) = \sigma\left(\sum_{i=0}^n a_i \alpha_i\right) = \sum_{i=0}^n \varphi(a_i) \sigma(\alpha)^i = f^\varphi(\sigma(\alpha))$
- Eindeutigkeit klar, da $L = K(\alpha)$
- Existenz: Betrachte

$$\eta : \begin{cases} K[X] & \to L \\ g & \mapsto g(\alpha) \end{cases} \qquad \psi : \begin{cases} K[X] & \to L' \\ g & \to g^\varphi(\beta) \end{cases} \qquad \to \text{ sind Homomorphismen nach univer. Eigenschaft}$$

(Bemerke: η surjektiv: $\eta_{|K} = \mathrm{id} \to K \in \mathrm{Im}(\eta)$ mit $\eta(x) = \alpha \to \alpha \in \mathrm{Im}(\eta)$)

$Ker(\eta) = (f)$ ist Isomorphismus und $\bar{\eta} : K[X]/(f) \xrightarrow{\cong} L$ und
$f \in \mathrm{Ker}(\psi) \Rightarrow \mathrm{Ker}(\psi) = (f)$ ist Homomorphismus $\bar{\psi} : K[X]/(f) \to L'$
$\sigma := \bar{\psi} \circ \bar{\eta}^{-1} : L \to L'$ ist eine Fortsetzung von ψ und

$$\sigma(\alpha) = \bar{\psi}(x + (f)) = \beta$$

□

Satz 3.13
Der Zerfällungskörper von f ist eindeutig bestimmt bis auf K-Isomorphie.

Beweis. Behauptung: Ist $\varphi : K \to K'$ ein Isomorphismus, L ein Zerfällungskörper, L' ein Zerfällungskörper von f^φ, so setzt sich φ zu einem Isomorphismus $L \to L'$ fort.

Beweis: Induktion nach $n = \deg(f)$

(IA) $n = 1 : L = K \underset{\varphi}{\xrightarrow{\cong}} K' = L'$ ✓

(IS) $n > 1$: Schreibe $f = cg_1 \cdots g_r$ mit $g_i \in K[x]$ normiert und irreduzibel, $c \in K^\times$
$\Rightarrow f^\varphi = c^\varphi g_1^\varphi \cdots g_r^\varphi$ mit $c^\varphi \in (K')^\varphi$ und $g_i^\varphi \in K'[X]$ normiert und irreduzibel (weil φ Isomorphismus ist). Sei $\alpha_1 \in L$ mit $g_1(\alpha_1) = 0, \alpha_1' \in L'$ mit $g_1^\varphi(\alpha_1') = 0$
$\xRightarrow{3.12}$ φ setzt man zu einem Isomorphismus

$$\sigma : K_1 := K(\alpha_1) \to K'(\alpha_1') \text{ mit } \sigma(\alpha_1) = \alpha_1'$$

fort. Schreibe $f = (x - \alpha_1) \cdot f_1^\sigma$ mit $f_1 \in K_1[X]$
$\Rightarrow f^\varphi = (x - \underbrace{\sigma(\alpha_1)}_{\alpha_1'}) \cdot f_1^\sigma$ mit $f_1^\sigma \in K_1'[X]$. L ist Zerfällungskörper von f_1, L' ist Zerfällungskörper von f_1^σ
$\Rightarrow \sigma$ setzt sich fort zu einem Isomorphismus $L \to L'$

Die Behauptung im Fall $\varphi = \mathrm{id}_K$ ist genau die Aussage von Satz 3.13. □

▶ Bemerkung 3.14

Ist $M \mid K$ eine Erweiterung, die einem Zerfällungskörper l von f enthält, dann ist dieser nicht nur bis auf die Isomorphie sondern als Teilkörper eindeutig bestimmt $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ genau die n Nullstellen von f in M sind.

4. Der algebraische Abschluss

Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung.

Definition 4.1 (algebraisch abgeschlossen)
K ist algebraisch abgeschlossen $\iff$ jedes $f \in K[X]$ mit $\deg(f) > 0$ hat eine Nullstelle in K.

Lemma 4.2
Es ist äquivalent:

(a) K ist algebraisch abgeschlossen.

(b) Jedes $0 \neq f \in K[X]$ zerfällt über K in Linearfaktoren.

(c) K hat keine echte algebraische Erweiterung.

Beweis. (a) (a) $\Rightarrow$ (b): Induktion nach $\deg(f)$ (siehe LAAG)

(b) (b) $\Rightarrow$ (c): Sei $L \mid K$ algebraisch, $\alpha \in L$. Schreibe $f = \mathrm{MinPol}(\alpha \mid K)$. Nach (b) zerfällt f in Linearfaktoren über $K \Rightarrow \alpha \in K$

(c) (c) $\Rightarrow$ (a): Sei $f \in K[X], \deg(f) > 0$. Nach Satz 3.9 existiert ein Zerfällungskörper L von f. Da $L \overset{(*)}{=} K$ nach (c) hat f Nullstellen in K.
$((*)$ L ist Erweiterung $\to$ die nach (c) trivial ist) □

Definition 4.3 (algebraisch Abgeschlossen)
L ist algebraischer Abschluss von $K :\iff L$ ist algebraisch abgeschlossen und $L \mid K$ algebraisch.

Lemma 4.4
Ist L algebraischer Abschluss, so ist der relative algebraische Abschluss $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.

Beweis.
- $\tilde{K}$ ist Körper: Folgerung 2.15
- $\tilde{K} \mid K$ ist algebraisch: Definition
- $\tilde{K}$ ist algebraisch abgeschlossen: Sei $f \in \tilde{K}[X]$ mit $\deg(f) > 0$.
  L algebraisch abgeschlossen $\Rightarrow$ existiert $\alpha \in L$ mit $f(\alpha) = 0$ und $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ algebraisch über $\tilde{K} \overset{2.15}{\Longrightarrow}$ $\alpha \in \tilde{K}$. □

■ Beispiel 4.5

(a) $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen (Fundamentalsatz der Algebra, $\nearrow$ II.)

(b) $\mathbb{C}$ ist algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$.

(c) $\tilde{\mathbb{Q}} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ algebraisch über } \mathbb{Q}\}$ ist nach Lemma 4.4 ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$.

Lemma 4.6
Sei $L \mid K$ algebraisch, E ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\varphi \in \mathrm{Hom}(K, E)$. Dann existiert eine Fortsetzung von φ auf L, d.h. ein $\sigma \in \mathrm{Hom}(L, E)$ mit $\sigma_{|K} = \varphi$.

Beweis. Definiere Halbordnung.

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &:= \left\{(M,\sigma) : K \subseteq M \subseteq L \text{ Zwischenkörper}, \sigma \in \mathrm{Hom}(M,E), \sigma_{|K} = \varphi\right\}\\ (M,\sigma) &\subseteq (M',\sigma') :\Leftrightarrow m \subset M' \text{ und } \sigma'_{|M} = \sigma\end{aligned}$$

- $\mathfrak{X} \neq \varnothing$: $(K,\varphi) \in \mathfrak{X}$
- Ist $(M,\sigma)_{i\in I}$ eine Kette in $\mathfrak{X}$, so definieren wir $M := \bigcup_{i\in I} M_i$ und $\sigma : M \to E$ durch $\sigma(x) = \sigma_i(x)$ falls $x \in M_i$. Dann ist $(M,\sigma) \in \mathfrak{X}$ eine obere Schranke der Kette $(M_i,\sigma_i)_{i\in I}$. Nach Lemma von Zorn existiert (M,σ) maximal. Es ist $M = L$: Sei $\alpha \in L, f = \mathrm{MinPol}(\alpha \mid M)$. $f \in E[X]$ hat Nullstelle $\beta \in E$, da E algebraisch abgeschlossen ist. $\overset{3.12}{\Longrightarrow}$ existiert Fortsetzung $\sigma' \in \mathrm{Hom}(M(\alpha),E)$ von σ
  $(M,\sigma) \leq (M(\alpha,\sigma')) \in \mathfrak{X} \xrightarrow{(M(\alpha),\sigma) \text{ max.}} M = M(\alpha), \alpha \in M$. □

> **Theorem 4.7 (Steinitz, 1910)**
> Jeder Körper K besitzt einen bis auf K-Isomorphie eindeutig bestimmten algebraischen Abschluss.

Beweis.

- Eindeutigkeit:
  Seien L_1, L_2 algebraische Abschlüsse von K
  $L_1 \mid K$, L_2 algebraisch abgeschlossen $\overset{4.6}{\Longrightarrow}$ existiert $\sigma \in \mathrm{Hom}(L_1,L_2)$

$$\left.\begin{cases} L_1 \text{ algebraisch abgeschlossen } \Rightarrow \sigma(L_1) \cong L_1 \text{ algebraisch abgeschlossen} \\ L_2 \mid K \text{ algebraisch } \Rightarrow L_2 \mid \sigma(L_1) \text{ algebraisch}\end{cases}\right\} \overset{4.2}{\Longrightarrow} L_2 = \sigma(L_1).$$

  Somit ist $\sigma : L_1 \to L_2$ ein K-Isomorphismus.
- Existenz: Seien
  (a) $\mathscr{F} = \{f \in K[X] \colon \deg(f) > 0\}$
  (b) $\mathfrak{X} = (X_f)_{f\in\mathscr{F}}$ Familie von Variablen
  (c) $R := K[\mathfrak{X}]$ Polynomring in den Variablen X_f $(f \in mathscrF)$
  (d) $I := (f(X_f) \colon f \in \mathscr{F}) \trianglelefteq R$
  (a) Behauptung 1: Es gilt $I \subsetneq R$.

  Beweis (Behauptung 1). Angenommen $I = R$. Dann existieren $f_1,\ldots,f_n \in \mathscr{F}$ und $g_1,\ldots,g_n \in R$ mit $\sum_{i=1}^n g_i \cdot f_i(X_f f_i) = 1$. Sei L ein Zerfällungskörper von $f_1,\ldots,f_n$. Dann existieren $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in L$ mit $f_i(\alpha_i) = 0$ für alle i. Sei $\varphi : R \to L$ der Einsetzungshomomorphismus gegeben durch

$$\varphi_{|K} = \mathrm{id}_K \quad \varphi(X_{f_i}) = \alpha_i \quad \varphi(X_f) = 0 \text{ für } f \in \mathscr{F}/\{f_1,\ldots,f_n\}$$
$$\Longrightarrow 1 = \varphi(1) = \sum_{i=1}^n \varphi(g_i)\cdot\varphi(f_i(X_f))$$
$$= \sum_{i=1}^n \varphi(g_i)\cdot f_i(\underbrace{\varphi(X_f)}_{=\alpha_i}) = \sum_{i=1}^n \varphi(g_i)\cdot \underbrace{f_i(\alpha_i)}_{=0} = 0$$ □

  Jedes echte Ideal ist in einem maximalen Ideal von R enthalten (GEO II 2.13) $\Longrightarrow$ existiert maximales Ideal $m \trianglelefteq R$ mit $I \subseteq m$. $L_1 := R/m$ ist Körpererweiterung von K, und jedes $f \in \mathscr{F}$ hat eine Nullstelle in

L_1, nämlich $f(X_f + m) = f(X_f) + m = 0 + m$. Iteriere dies und erhalte eine Kette von Körpern

$$K := L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots,$$

wobei jedes $f \in L_i[X], \deg(f) > 0$ eine Nullstelle in L_{i+1} hat. Setze nun $L = \bigcup_{i=1}^{\infty}$.

(a) Behauptung 2: L ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis (Behauptung 2). Sei $f \in L[X], \deg(f) > 0 \implies f \in L_i[X]$ für ein $i \implies f$ hat eine Nullstelle in $L_{i+1} \subseteq L$ □

Nach Lemma 4.4 ist somit $\tilde{K} = \{\alpha \in L \colon \alpha \text{ algebraisch über } K\}$ ein abgeschlossener Abschluss von K. □

Definition 4.8 (algebraischer Abschluss)
Mit $\bar{K}$ bezeichnen wir den (bis auf K-Isomorphie eindeutig bestimmten) algebraischen Abschluss von K.

Definition 4.9 (Automorphismengruppe)
$\mathrm{Aut}(L \mid K) := \{\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, L) \colon \sigma \text{ Isomorphismus}\}$, die Automorphismengruppe von $L \mid K$.

▶ Bemerkung 4.10
$\mathrm{Aut}(L \mid K)$ ist Gruppe unter $\sigma \cdot \sigma' = \sigma' \circ \sigma$ und wirkt auf L durch $x^\sigma := \sigma(x)$.

Satz 4.11
Sei $K \subseteq L \subseteq \bar{K}$ ein Zwischenkörper. Jedes $\varphi \in Hom_K(L, \bar{K})$ lässt sich zu einem $\sigma \in \mathrm{Aut}(\bar{K} \mid K)$ fortsetzen.

Beweis. Sei $\bar{K} \mid K$ algebraisch abgeschlossen und $\bar{K}$ algebraisch abgeschlossen
$\overset{4.6}{\implies}$ existiert Fortsetzung $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(\bar{K}, \bar{K})$ von ϖ
$\bar{K}$ algebraisch abgeschlossen $\implies \sigma(\bar{K})$ algebraisch abgeschlossen
$\bar{K} \mid K$ algebraisch ist $\implies \bar{K} \mid \sigma(\bar{K})$ algebraisch $(\bar{K} = \sigma(\bar{K}))$ somsit ist $\sigma \in \mathrm{Aut}(\bar{K}, K)$. □

Definition 4.12 (konjugiert)
$\alpha, \beta \in \bar{K}$ sind K-konjugiert $\iff$ existiert $\sigma \in \mathrm{Aut}(\bar{K}, K)$ mit $\sigma(\alpha) = \beta$.

▶ Bemerkung 4.13
K-Konjugiertheit ist eine Äquivalenzrelation auf $\bar{K}$.

Folgerung 4.14
$\alpha, \beta \in \bar{K}$ sind K-konjugiert $\Leftrightarrow \mathrm{MinPol}(\alpha \mid K) = \mathrm{MinPol}(\beta \mid K)$.

Beweis.

- $\Rightarrow$: $\sigma(\alpha) = \beta$ mit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\bar{K} \mid K), f \in K[X],\ f(\alpha) = 0 \implies 0 = \sigma(0) = \sigma(f(\alpha)) = f(\sigma(\alpha)) = f(\beta)$
- $\Leftarrow$: $\mathrm{MinPol}(\alpha \mid K) = \mathrm{MinPol}(\beta \mid K)$
$\overset{3.5}{\implies}$ existiert K-Isomorphismus $\varphi : K(\alpha) \to K(\beta)$ mit $\varphi(\alpha) = \beta$
$\overset{4.11}{\implies}$ existiert Fortsetzung $\sigma \in \mathrm{Aut}(\bar{K}, K)$ von φ. □

■ Beispiel 4.15

- $\mathrm{i}, -\mathrm{i} \in \tilde{\mathbb{Q}}$ sind $\mathbb{Q}$-konjugiert: komplex Konjugation (eingeschränkt auf $\tilde{\mathbb{Q}}$)
- $\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \tilde{\mathbb{Q}}$ sind $\mathbb{Q}$-konjugiert: $\mathrm{MinPol}(\sqrt{2} \mid \mathbb{Q}) = x^2 - 2 = \mathrm{MinPol}(-\sqrt{2} \mid \mathbb{Q})$

5. Die transzendente Erweiterung

Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung.

Definition 5.1 (algebraisch abhängig)

(a) $a_1, \dots, a_n \in L$ algebraisch abhängig über K :⇔ existiert $0 \neq f \in K(X_1, \dots, X_n)\colon f(a_1, \dots, a_n) = 0$

(b) $(a_i)_{i\in I}$ ist algebraisch abhängig über K :⇔ existiert $J \subseteq I$ endlich: $(a_i)_{i\in I}$ algebraisch abhängig über K

■ **Beispiel**

Betrachte die reellen Zahlen $\sqrt{\pi}$ und $2\pi + 1$, beide sind transzendent über $\mathbb{Q}$. Die Singletons $\{\sqrt{\pi}\}$ und $\{2\pi + 1\}$ sind algebraisch unabhängig über $\mathbb{Q}$. Aber die Vereinigung $\{\sqrt{\pi}, 2\pi + 1\}$ ist nicht algebraisch unabhängig in $\mathbb{Q}$, da

$$P(x, y) = 2x^2 - y + 1 = 0$$

ist, wenn $x = \sqrt{\pi}$ und $y = 2\pi + 1$ gesetzt sind.

▶ **Bemerkung 5.2**

(a) (a) ist algebraisch abhängig über K ⇔ a ist algebraisch über K

(b) $L = K(X_1, \dots, X_n) = \mathrm{Quot}(K([X_1, \dots, X_n]))$ $\implies$ $X_1, \dots, X_n$ sind algebraisch unabhängig über K

(c) Sind π, e unabhängig über $\mathbb{Q}$?
Falls "Ja", wäre z.B. $\pi + e$ transzendent über $\mathbb{Q}$

Definition 5.3 (rein transzendent)

$L \mid K$ rein transzendent :⇔ $L = K(\mathfrak{X})$ mit $\mathfrak{X} = (a_i)_{i\in I}$ algebraisch unabhängig über K.

Lemma 5.4

$\mathfrak{X} = (a_i)_{i\in I}$ algebraisch unabhängig über K $\implies$ $K(\mathfrak{X}) \cong_K K(X_i\colon i \in I) = \mathrm{Quot}(K[X_i\colon i \in I])$.

Beweis. Betrachte K-Isomorphismus

$$\varphi = \begin{cases} K[X_i\colon I \in I] & \to K[a_i : i \in I] \\ f & \mapsto f(\mathfrak{X}) \end{cases}$$

(a_i für x_i einsetzen.) Da $\mathfrak{X}$ algebraisch unabhängig über K, ist $\mathrm{Ker}(\varphi) = (0)$
$\implies K(\mathfrak{X}) = \mathrm{Quot}(K[\mathfrak{X}]) \cong_K \mathrm{Quot}(K[X_i : i \in I])$. □

Satz 5.5

$L \mid K$ rein transzendent $\implies$ $\tilde{K} = K$.

Beweis. Nach Lemma 5.4 o.E. $L = K(X_i : i \in I)$. Weiter o. E. $I = \{1, \dots, n\}$ endlich. Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K. Definiere $f = \mathrm{MinPol}(\alpha \mid K)$.
f irreduzibel in $K[X]$ $\xRightarrow{\text{Gauss}}$ f irreduzibel in $K[X_1, \dots, X_n][X]$
$\xRightarrow{\text{Gauss}}$ f irreduzibel $K(X_1, \dots, X_n)[X]$

$\Longrightarrow \deg(f) = 1$
$\Longrightarrow \alpha \in K.$ $\square$

6. Die separable Erweiterung

Anhang

Index

algebraisch, 6, 7
algebraisch Abgeschlossen, 14
algebraisch abhängig, 17
algebraischen Abschluss, 16

Charakteristik, 3

einfach, 5
endlich erzeugt, 5

Grad, 6

Köpererweiterung, 4
Körpergrad, 4

Minimalpolynom, 6

Primkörper, 3

rein transzendent, 17
relative algebraische Abschluss, 9

Teilkörper, 5
transzendent, 6

Unterring, 5

Wurzelkörper, 10

Zerfällungskörper, 11