

# **Numerik WS2018/19**

Dozent: Prof. Dr. Andreas Fischer

9. Oktober 2018

# *Inhaltsverzeichnis*

<b>I</b>	<b>Interpolation</b>	<b>2</b>
1	Grundlagen . . . . .	2
2	Interpolation durch Polynome . . . . .	4
2.1	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	4
2.2	NEWTON-Form des Interpolationspolynoms . . . . .	5
2.3	Interpolationsfehler . . . . .	6
<b>II</b>	<b>numerische Quadratur und Integration</b>	<b>8</b>
<b>III</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>9</b>
<b>IV</b>	<b>Kondition</b>	<b>10</b>
<b>V</b>	<b>Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme</b>	<b>11</b>
<b>VI</b>	<b>lineare Optimierung</b>	<b>12</b>
	<b>Anhang</b>	<b>14</b>
	<b>Index</b>	<b>14</b>

# *Vorwort*

## Kapitel I

# Interpolation

## 1. Grundlagen

### Aufgabe:

Gegeben sind  $n + 1$  Datenpaare  $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ , alles reelle Zahlen und paarweise verschieden.

Gesucht ist eine Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Interpolationsbedingungen

$$F(x_0) = f_0, \dots, F(x_n) = f_n \quad (1)$$

genügt.

### Definition (Stützstellen, Stützwerte)

Die  $x_0$  bis  $x_n$  werden Stützstellen genannt.

Die  $f_0$  bis  $f_n$  werden Stützwerte genannt.

Die oben gestellte Aufgabe wird zum Beispiel durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \{x_0, \dots, x_n\} \\ f_i & x = x_i \end{cases}$$

gelöst. Weitere Möglichkeiten sind: Polygonzug, Treppenfunktion, Polynom, ...

- In welcher Menge von Funktionen soll  $F$  liegen?
- Gibt es im gewählten Funktionenraum für beliebige Datenpaare eine Funktion  $F$ , die den Interpolationsbedingungen genügt (eine solche Funktion heißt Interpolierende)?
- Ist die Interpolierende in diesem Raum eindeutig bestimmt?
- Welche weiteren Eigenschaften besitzt die Interpolierende, zum Beispiel hinsichtlich ihrer Krümmung oder der Approximation einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_k = f(x_k)$  für  $k = 0, \dots, n$ ?
- Wie sollte man die Stützstellen wählen, falls nicht vorgegeben?
- Wie lässt sich die Interpolierende effizient bestimmen, gegebenenfalls auch unter der Berücksichtigung, dass neue Datenpaare hinzukommen oder dass sich nur die Stützwerte ändern?

### ■ Beispiel 1.1

$k$	0	1	2	3	4	5
$x_k$ in s	0	1	2	3	4	5
$f_k$ in °C	80	85,8	86,4	93,6	98,3	99,1

Interpolation im

- Raum der stetigen stückweise affinen Funktionen
- Raum der Polynome höchstens 5. Grades
- Raum der Polynome höchstens 4. Grades (Interpolation im Allgemeinen nicht lösbar, Regression nötig)

## 2. Interpolation durch Polynome

$\Pi_n$  bezeichne den Vektorraum der Polynome von Höchstgrad  $n$  mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation. Für jedes  $p \in \Pi_n$  gibt es  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , sodass

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

und umgekehrt.

### 2.1. Existenz und Eindeutigkeit

#### Satz 2.1

Zu  $n+1$  Datenpaaren  $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$  mit paarweise verschiedenen Stützstellen existiert genau ein Polynom  $p \in \Pi_n$ , dass die Interpolationsbedingung Gleichung (1) erfüllt.

*Beweis.* • Existenz: Sei  $j \in \{0, \dots, n\}$  und  $L_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$L_j(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

das LAGRANGE-Basispolynom vom Grad  $n$ . Offenbar gilt  $L_j \in \Pi_n$  und

$$L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases} = \delta_{jk} \quad (3)$$

Definiert man  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$p(x) := \sum_{j=0}^n f_j \cdot L_j(x) \quad (4)$$

so ist  $p \in \Pi_n$  und außerdem erfüllt  $p$  wegen Gleichung (3) die Interpolationsbedingung Gleichung (1)

- Eindeutigkeit: Angenommen es gibt Interpolierende  $p, \tilde{p} \in \Pi_n$  mit  $p \neq \tilde{p}$ . Dann folgt  $p - \tilde{p} \in \Pi_n$  und  $(p - \tilde{p})(x_k) = p(x_k) - \tilde{p}(x_k) = 0$  für  $k = 0, \dots, n$ . Also hat  $(p - \tilde{p})$  mindestens  $n + 1$  Nullstellen, hat aber Grad  $n$ . Das heißt, dass  $(p - \tilde{p})$  das Nullpolynom sein muss.  $\square$

#### Definition (Interpolationspolynom)

Das Polynom, dass die Interpolationsbedingung erfüllt, heißt Interpolationspolynom zu  $(x_0, f_0), \dots, (x_n, f_n)$ .

#### ► Bemerkung 2.2

- Die Darstellung Gleichung (4) heißt LAGRANGE-Form des Interpolationspolynoms.
- Um mittels Gleichung (4) einen Funktionswert  $p(x)$  zu berechnen, werden  $\mathcal{O}(n^2)$  Operationen benötigt; bei gleichabständigen Stützstellen kann man diesen Aufwand auf  $\mathcal{O}(n)$  verringern. Ändern sich die Stützwerte, kann man durch Wiederverwendung von den  $L_j(x)$  das  $p(x)$  in  $\mathcal{O}(n)$  Operationen berechnen.
- Man kann zeigen, dass  $L_0$  bis  $L_n$  eine Basis von  $\Pi_n$  bilden.

## 2.2. Newton-Form des Interpolationspolynoms

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (5)$$

mit Koeffizienten  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Die Berechnung des Koeffizienten  $c_j$  kann rekursiv durch Ausnutzen der Interpolationsbedingung Gleichung (1) erfolgen. Für  $c_0$  erhält man

$$f_0 \stackrel{!}{=} p(x_0) = c_0$$

Seien  $c_0$  bis  $c_{j-1}$  bereits ermittelt. Dann folgt:

$$f_j \stackrel{!}{=} p(x_j) = c_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} c_k (x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{k-1})}_{\text{bekannt}} + c_j \underbrace{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})}_{\text{bekannt}}$$

### ► Bemerkung 2.3

- Der Aufwand um die Koeffizienten  $c_0, \dots, c_n$  zu ermitteln ist  $\mathcal{O}(n^2)$ . Kommt ein Datenpaar hinzu, kann man Gleichung (5) um einen Summanden erweitern und mit  $\mathcal{O}(n)$  Operationen  $c_{n+1}$  bestimmen.
- Sind die Koeffizienten  $c_0, \dots, c_n$  in Gleichung (5) bekannt, dann benötigt man zur Berechnung von  $p(x)$   $\mathcal{O}(n)$  Operationen.
- Die Polynome  $N_0, \dots, N_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$N_0 = 1 \quad \text{und} \quad N_j = (x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})$$

heißen NEWTON-Basispolynome und bilden eine Basis von  $\Pi_n$ .

Die Koeffizienten  $c_0, \dots, c_n$  ergeben sich wegen Gleichung (2) auch als Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & (x_1 - x_0) & & & \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots & \prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Die Systemmatrix dieses linearen Gleichungssystems ist eine reguläre untere Dreiecksmatrix.

Zu effizienten Berechnung eines Funktionswertes  $p(x)$  nach Gleichung (5) mit gegebenen Koeffizienten

$c_0, \dots, c_n$  kann man das HORNER-Schema anwenden. Überlegung für  $n = 3$ .

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= c_0 + (x - x_0) \left[ c_1 + (x - x_1) [c_2 + (x - x_2)c_3] \right] \end{aligned}$$

Für beliebiges  $n$  liefert das den folgenden Algorithmus:

■ **Algorithmus 2.4 (Horner-Schema für Newton-Form)**

Input:  $n, x, c_0, \dots, c_n, x_0, \dots, x_n$

```

1  p = c_n
2  do j = n-1, 0, -1
3    p = c_j + (x - x_j)p
4  end do
```

## 2.3. Interpolationsfehler

### Definition (Maximum-Norm)

Die Norm

$$\|g\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |g(x)| \quad \text{für } g \in C[a, b]$$

definiert die Maximum-Norm in  $C[a, b]$ .

### Satz 2.5

Sei  $f \in C[a, b]$ . Dann existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Polynom  $p_\varepsilon$  mit  $\|f - p_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ .

Also liegt die Menge aller Polynome (beliebig hohen Grades) dicht in  $C[a, b]$ .

### Definition 2.6 (Stützstellensystem)

Stützstellensystem :  $a \leq x_0^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} \leq b$ . Weiterhin bezeichne  $p_n \in \Pi_n$  das zu den Datenpaaren  $(x_k^{(n)}, f(x_k^{(n)}))$  gehörende eindeutig bestimmte Interpolationspolynom.

### Satz 2.7 (Satz von Faber 1914)

Zu jedem Stützstellensystem gibt es  $f \in C[a, b]$ , sodass  $(p_n)$  nicht gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.  $\|p_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  bedeutet, dass  $(p_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

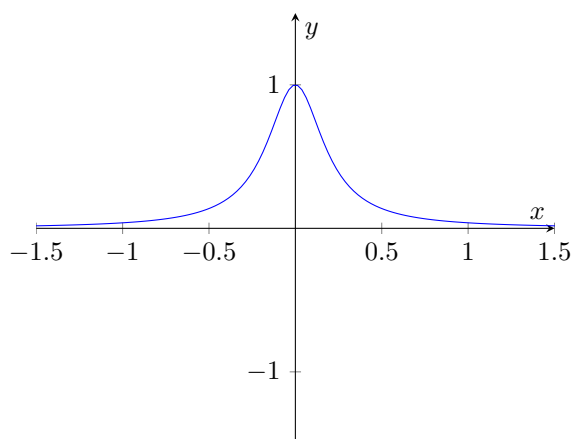
Nach einem Resultat von ERDÖS/VERTESI (1980) gilt sogar, dass  $(p_n(x))$  fast überall divergiert.

### ■ Beispiel 2.8 (Runge)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

äquidistante Stützstellen  $x_0, \dots, x_n, p \in \Pi_n$  als Interpolationspolynom





## Kapitel II

# *numerische Quadratur und Integration*

## Kapitel III

# *Lineare Gleichungssysteme*

## Kapitel IV

### *Kondition*

## Kapitel V

# *Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme*

## Kapitel VI

# *lineare Optimierung*

# Anhang

# Index

HORNER-Schema, [6](#)

LAGRANGE-Form, [4](#)

Basispolynom

LAGRANGE-Basispolynom, [4](#)

NEWTON-Basispolynome, [5](#)

Funktionenraum, [2](#)

Interpolationsbedingungen, [2](#)

Interpolationspolynom, [4](#)

Interpolierende, [2](#)

Maximum-Norm, [6](#)

Stützstellen, [2](#)

Stützstellensystem, [6](#)

Stützwerte, [2](#)