

# **Lineare Algebra SS2018**

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

13. Juli 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Endomorphismen</b>	<b>1</b>
1	Eigenwerte . . . . .	1
2	Das charakteristische Polynom . . . . .	4
3	Diagonalisierbarkeit . . . . .	6
4	Trigonalisierbarkeit . . . . .	9
5	Das Minimalpolynom . . . . .	12
6	Nilpotente Endomorphismen . . . . .	15
7	Die JORDAN-Normalform . . . . .	20
<b>II</b>	<b>Skalarprodukte</b>	<b>23</b>
1	Das Standardskalarprodukt . . . . .	23
2	Bilinearformen und Sesquilinearformen . . . . .	26
3	Euklidische und unitäre Vektorräume . . . . .	29
4	Orthogonalität . . . . .	31
5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen . . . . .	34
6	Selbstadjungierte Endomorphismen . . . . .	37
7	Hauptachsentransformation . . . . .	39
8	Quadriken . . . . .	43
<b>III</b>	<b>Dualität</b>	<b>48</b>
1	Das Lemma von Zorn . . . . .	48
2	Der Dualraum . . . . .	51
3	Die duale Abbildung . . . . .	54
4	Die adjungierte Abbildung . . . . .	57
5	Der Spektralsatz . . . . .	60
6	Tensorprodukte . . . . .	63
<b>IV</b>	<b>Moduln</b>	<b>68</b>
1	Moduln . . . . .	68
2	Teilbarkeit . . . . .	72
3	Hauptidealringe . . . . .	75
4	Faktorielle Ringe . . . . .	77
5	Quotienten von Ringen und Moduln . . . . .	80
6	Der Elementarteilersatz . . . . .	84
	<b>Anhang</b>	<b>86</b>
<b>A</b>	<b>Listen</b>	<b>86</b>
A.1	Liste der Theoreme . . . . .	86

A.2 Liste der benannten Sätze . . . . .	87
<b>Index</b>	<b>88</b>

## Kapitel I

# Endomorphismen

In diesem Kapitel seien  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -VR und  $f \in \text{End}_K(V)$  ein Endomorphismus.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Geometrie von  $f$  besser zu verstehen und Basen zu finden, für die  $M_B(f)$  eine besonders einfache oder kanonische Form hat.

## 1. Eigenwerte

### ► Bemerkung 1.1

Wir erinnern uns daran, dass  $\text{End}_K(V) = \text{Hom}_K(V, V)$  sowohl einen  $K$ -VR als auch einen Ring bildet. Bei der Wahl einer Basis  $B$  von  $V$  wird  $f \in \text{End}_K(V)$  durch die Matrix  $M_B(f) = M_B^B(f)$  beschrieben.

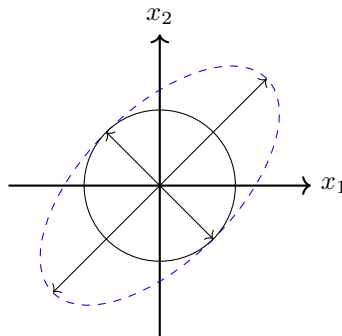
■ **Beispiel 1.2**  $K = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}), f = f_A \in \text{End}_K(K^2)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{mit } B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ ist } M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Endomorphismus  $f = f_A$  streckt also entlang der Achse  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  um den Faktor 3 und spiegelt

entlang der Achse  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



**Definition 1.3 (Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum)**

Sind  $0 \neq x \in V$  und  $\lambda \in K$  mit  $f(x) = \lambda x$  so nennt man  $\lambda$  einen Eigenwert von  $f$  und  $x$  einen Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Der Eigenraum zu  $\lambda \in K$  ist  $\text{Eig}(f, \lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$ .

**► Bemerkung 1.4**

Für jedes  $\lambda \in K$  ist  $\text{Eig}(f, \lambda)$  ein UVR von  $V$ , da

$$\begin{aligned}\text{Eig}(f, \lambda) &= \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \\ &= \{x \in V \mid f(x) - \lambda \cdot \text{id}_V(x) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid (f - \lambda \cdot \text{id}_V)(x) = 0\} \\ &= \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_V)\end{aligned}$$

und  $f - \lambda \cdot \text{id}_V \in \text{End}_K(V)$ .

**► Bemerkung 1.5**

Achtung! Der Nullvektor ist nach Definition kein Eigenvektor, aber  $\lambda = 0$  kann ein Eigenwert sein, nämlich genau dann, wenn  $f \notin \text{Aut}_K(V)$ , siehe Übung. Die Menge der Eigenvektoren zu  $\lambda$  ist also  $\text{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$  und  $\lambda$  ist genau dann ein Eigenwert von  $f$ , wenn  $\text{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$ .

**■ Beispiel 1.6**

Ist  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  und  $f = f_A \in \text{End}_K(K^n)$ , so sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  EW von  $f$  und jedes  $e_i$  ist ein EV zum EW  $\lambda_i$ .

**Satz 1.7**

Sei  $B$  eine Basis von  $V$ . Genau dann ist  $M_B(f)$  eine Diagonalmatrix, wenn  $B$  aus EV von  $f$  besteht.

*Beweis.* Ist  $B = (x_1, \dots, x_n)$  eine Basis aus EV zu EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so ist  $M_B(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  und umgekehrt.  $\square$

**■ Beispiel 1.8**

Sei  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^2$  und  $f_\alpha \in \text{End}_K(\mathbb{R}^2)$  die Drehung um den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für  $\alpha = 0$  hat  $f_\alpha = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$  nur den EW 1.

Für  $\alpha = \pi$  hat  $f_\alpha = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$  nur den EW -1.

Für  $\alpha \neq 0, \pi$  hat  $f_\alpha$  keine EW.

**Lemma 1.9**

Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  paarweise verschiedene EW von  $f$  und ist  $x_i$  ein EV zu  $\lambda_i$  für  $i = 1, \dots, m$ , so ist  $(x_1, \dots, x_m)$  linear unabhängig.

*Beweis.* Induktion nach  $m$

$m = 1$ : klar, denn  $x_1 \neq 0$

$m-1 \rightarrow m$ : Sei  $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$  mit  $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$ .

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \lambda \cdot \text{id}_V) \left( \sum_{i=1}^m \mu_i x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_i (f(x_i) - \lambda_m \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i (\lambda_i - \lambda_m) \cdot x_i \end{aligned}$$

Nach IB ist  $\mu_i (\lambda_i - \lambda_m) = 0$  für  $i = 1, \dots, m-1$ , da  $\lambda_i \neq \lambda_m$  für  $i \neq m$  also  $\mu_i = 0$  für  $i = 1, \dots, m-1$ . Damit ist auch  $\mu_m = 0$ . Folglich ist  $(x_1, \dots, x_m)$  linear unabhängig.  $\square$

### Satz 1.10

Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  paarweise verschieden, so ist

$$\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i).$$

*Beweis.* Seien  $x_i, y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i)$  für  $i = 1, \dots, m$ . Ist  $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$ , so ist  $\sum_{i=1}^m \underbrace{x_i - y_i}_{z_i} = 0$ .

o. E. seien  $z_i \neq 0$  für  $i = 1, \dots, r$  und  $z_i = 0$  für  $i = r+1, \dots, m$ . Wäre  $r > 0$ , so wären  $(z_1, \dots, z_r)$  linear abhängig, aber  $z_i = x_i - y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$ , im Widerspruch zu Lemma 1.9. Somit ist  $x_i = y_i$  für alle  $i$  und folglich ist die Summe  $\sum \text{Eig}(f, \lambda_i)$  direkt.  $\square$

### Definition 1.11 (EW und EV für Matrizen)

Sei  $A \in \text{Mat}_n(K)$ . Man definiert Eigenwerte, Eigenvektoren, etc von  $A$  als Eigenwerte, Eigenvektoren von  $f_A \in \text{End}_K(K^n)$ .

### Satz 1.12

Sei  $B$  eine Basis von  $V$  und  $\lambda \in K$ . Genau dann ist  $\lambda$  ein EW von  $f$ , wenn  $\lambda$  ein EW von  $A = M_B(f)$  ist. Insbesondere haben ähnliche Matrizen die selben EW.

*Beweis.* Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_A} & K^n \\ \Phi_B \downarrow & & \downarrow \Phi_B \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

denn  $f_A(x) = \lambda x \iff (\Phi_B \circ f_A)(x) = \Phi_B(\lambda x) \iff f(\Phi_B(x)) = \lambda \Phi_B(x)$ .

Ähnliche Matrizen beschreiben den selben Endomorphismus bezüglich verschiedener Basen, vgl. IV.4.1  $\square$

## 2. Das charakteristische Polynom

### Satz 2.1

Sei  $\lambda \in K$ . Genau dann ist  $\lambda$  ein EW von  $f$ , wenn  $\det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = 0$ .

*Beweis.* Da  $\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$  ist  $\lambda$  genau dann ein EW von  $f$ , wenn  $\dim_K(\text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)) > 0$ , also wenn  $\lambda \cdot \text{id}_V - f \notin \text{Aut}_K(V)$ . Nach IV.4.6 bedeutet dies, dass  $\det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = 0$   $\square$

### Definition 2.2 (charakteristisches Polynom)

Das charakteristische Polynom einer Matrix  $A \in \text{Mat}_n(K)$  ist die Determinante der Matrix  $t \cdot \mathbb{1}_n - A \in \text{Mat}_n(K[t])$ .

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) \in K[t]$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus  $f \in \text{End}_K(V)$  ist  $\chi_f(t) = \chi_{M_B(f)}(t)$ , wobei  $B$  eine Basis von  $V$  ist.

### Satz 2.3

Sind  $A, B \in \text{Mat}_n(K)$  mit  $A \sim B$ , so ist  $\chi_A = \chi_B$ . Insbesondere ist  $\chi_f$  wohldefiniert.

*Beweis.* Ist  $B = SAS^{-1}$  mit  $S \in \text{GL}_n(K)$ , so ist  $t \cdot \mathbb{1}_n - B = S(t \cdot \mathbb{1}_n - A)S^{-1}$ , also  $t \cdot \mathbb{1}_n - B \sim t \cdot \mathbb{1}_n - A$  und ähnliche Matrizen haben die selben Determinante (IV.4.4).

Sind  $B, B'$  Basen von  $V$ , so sind  $M_B(f) \sim M_{B'}(f)$ , also  $\chi_{M_B(f)} = \chi_{M_{B'}(f)}$   $\square$

### Lemma 2.4

Für  $\lambda \in K$  ist  $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$ .

*Beweis.* Sei  $B$  eine Basis von  $V$  und  $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ . Dann ist  $M_B(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = \lambda \cdot \mathbb{1}_n - A$ . Aus IV.2.8 und I.6.8 folgt  $\det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$ . Folglich ist

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \chi_A(\lambda) \\ &= \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) \\ &= \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) \\ &= \det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) \end{aligned} \quad \square$$

### Satz 2.5

Sei  $\dim_K(V) = n$  und  $f \in \text{End}_K(V)$ . Dann ist  $\chi_f(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$  ein Polynom vom Grad  $n$  mit

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1 \\ \alpha_{n-1} &= -\text{tr}(f) \\ \alpha_0 &= (-1)^n \cdot \det(f) \end{aligned}$$

Die Nullstellen von  $\chi_f$  sind genau die EW von  $f$ .

*Beweis.* Sei  $B$  eine Basis von  $V$  und  $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ . Wir erinnern uns daran, dass  $\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Es ist  $\chi_f(t) = \det(t \cdot 1_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (t\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$ .

Der Summand für  $\underline{\sigma} = \text{id}$  ist  $\prod_{i=1}^n (t - a_{ii}) = t^n + \sum_{i=1}^n (-a_{ii})t^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^n (-a_{ii})$

Für  $\underline{\sigma} \neq \text{id}$  ist  $\sigma(i) \neq i$  für mindestens zwei  $i$ , der entsprechende Summand hat also Grad höchstens  $n-2$ . Somit haben  $\alpha_n$  und  $\alpha_{n-1}$  die oben behauptete Form, und  $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(f)$ .

Die Aussage über die Nullstellen von  $\chi_f$  folgt aus Satz 2.1 und Lemma 2.4.  $\square$

### Folgerung 2.6

Ist  $\dim_K(V) = n$ , so hat  $f$  höchstens  $n$  Eigenwerte.

*Beweis.* Satz 2.5 und I.6.10  $\square$

### Definition 2.7 (normiertes Polynom)

Ein Polynom  $0 \neq P \in K[t]$  mit Leitkoeffizient 1 heißt normiert.

### ■ Beispiel 2.8

1. Ist  $A = (a_{ij})_{i,j}$  eine obere Dreiecksmatrix, so ist  $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t - a_{ii})$ , vgl. IV.2.9.c

Insbesondere ist  $\chi_{1_n}(t) = (t - 1)^n$ ,  $\chi_0(t) = t^n$

2. Für eine Blockmatrix  $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$  mit quadratischen Matrizen  $A_1, A_2$  ist  $\chi_A = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$   
vgl. IV.2.9.e

3. Für

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad c_0, \dots, c_{n-1} \in K$$

ist  $\chi_A(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$

Man nennt diese Matrix die Begleitmatrix zum normierten Polynom  $P = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$  und schreibt  $M_P := A$



### 3. Diagonalisierbarkeit

**Definition 3.1 (diagonalisierbar)**

Man nennt  $f$  diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis  $B$  besitzt, für die  $M_B(f)$  eine Diagonalmatrix ist.

**Lemma 3.2**

Genau dann ist  $f$  diagonalisierbar, wenn

$$V = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ): Ist  $B$  eine Basis aus EV von  $f$  (vgl. Satz 1.7), so ist  $B \subseteq \bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$ , also  $V = \text{span}_K(\bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)) = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$ .

( $\Leftarrow$ ): Ist  $V = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$ , so gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit  $V = \sum_{i=1}^n \text{Eig}(f, \lambda_i)$ . Wir wählen Basen  $B_i$  von  $\text{Eig}(f, \lambda_i)$ . Dann ist  $\bigcup_{i=1}^n B_i$  ein endliches Erzeugendensystem von  $V$ , enthält also eine Basis von  $V$  (II.3.6). Diese besteht aus EV von  $f$ .  $\square$

**Satz 3.3**

Ist  $\dim_K(V) = n$ , so hat  $f$  höchstens  $n$  Eigenwerte. Hat  $f$  genau  $n$  Eigenwerte, so ist  $f$  diagonalisierbar.

*Beweis.* Ist  $\lambda$  ein EW von  $f$ , so ist  $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \geq 1$ . Sind also  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  paarweise verschiedene EW von  $f$ , so ist

$$\begin{aligned} n = \dim_K(V) &\geq \dim_K\left(\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &\stackrel{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda_i)) \\ &\geq m \end{aligned}$$

Ist zudem  $m = n$ , so muss

$$\begin{aligned} \dim_K(V) &= \dim_K\left(\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \text{ sein, also} \\ V &= \sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i) \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist  $f$  genau dann diagonalisierbar.  $\square$

**Definition 3.4 ( $a$  teilt  $b$ )**

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit seien  $a, b \in R$ . Man sagt,  $a$  teilt  $b$  (in Zeichen  $a|b$ ), wenn es  $x \in R$  mit  $b = ax$  gibt.

**Definition 3.5 (Vielfachheit)**

Für  $0 \neq P \in K[t]$  und  $\lambda \in K$  nennt man  $\mu(P, \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N}_{>0} \mid (t - \lambda)^r \mid P\}$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$  von  $P$ .

**Lemma 3.6**

Genau dann ist  $\mu(P, \lambda) \geq 1$ , wenn  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  ist.

*Beweis.*  $(\Rightarrow)$ :  $t - \lambda \mid P \Rightarrow P(t) = (t - \lambda) \cdot Q(t)$  mit  $Q(t) \in K[t] \Rightarrow P(\lambda) = 0 \cdot Q(\lambda) = 0$ .

$(\Leftarrow)$ :  $P(\lambda) = 0 \stackrel{I.6.9}{=} t - \lambda \mid P(t) \Rightarrow \mu(P, \lambda) \geq 1$ . □

**Lemma 3.7**

Ist  $P(t) = (t - \lambda)^r \cdot Q(t)$  mit  $Q(t) \in K[t]$  und  $Q(\lambda) \neq 0$ , so ist  $\mu(P, \lambda) = r$

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\mu(P, \lambda) \geq r$ . Wäre  $\mu(P, \lambda) \geq r + l$ , so  $(t - \lambda)^{r+l} \mid P(t)$  also  $(t - \lambda)^r \cdot Q(t) = (t - \lambda)^{r+l} \cdot R(t)$  mit  $R(t) \in K[t]$ , folglich  $t - \lambda \mid Q(t)$ , insbesondere  $Q(\lambda) = 0$ .

(Denn wir dürfen kürzen:  $R$  ist nullteilerfrei, genau so wie  $K[t]$ ).

$(t - \lambda)^r (Q(t) - (t - \lambda)R(t)) = 0 \Rightarrow Q(t) = (t - \lambda)R(t)$ . □

**Lemma 3.8**

Sind  $P, Q, R \in K[t]$  mit  $PQ = PR$ , und ist  $P \neq 0$ , so ist  $Q = R$ .

*Beweis.*  $PQ = PR \Rightarrow P(Q - R) = 0 \stackrel{K[t] \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} Q - R = 0$ , d.h.  $Q = R$ . □

**Lemma 3.9**

Es ist  $\sum_{\lambda \in K} \mu(P, \lambda) \leq \deg(P)$ , mit Gleichheit genau dann, wenn  $P$  in Linearfaktoren zerfällt.

*Beweis.* Schreibe  $P(t) = \prod_{\lambda \in K} (t - \lambda)^{r_\lambda} \cdot Q(t)$ , wobei  $Q(t) \in K[t]$  keine Nullstellen mehr besitzt. Nach Lemma 3.7 ist  $\mu(P, \lambda) = r_\lambda$  für alle  $\lambda$  und somit  $\deg(P) = \sum_{\lambda \in K} r_\lambda + \deg(Q) \geq \sum_{\lambda \in K} \mu(P, \lambda)$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $\deg(Q) = 0$ , also  $Q = c \in K$ , d.h. genau dann, wenn  $P(t) = c \cdot \prod_{\lambda \in K} (t - \lambda)^{r_\lambda}$ . □

**Lemma 3.10**

Für  $\lambda \in K$  ist

$$\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \geq \mu(x_f, \lambda)$$

*Beweis.* Ergänze eine Basis  $B$  von  $\text{Eig}(f, \lambda)$  zu einer Basis  $B$  von  $V$ . Dann ist

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_s & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix  $A' \in \text{Mat}_{n-s}(K)$ , also  $\chi_f(t) = \chi_A(t) \stackrel{\text{Beispiel 2.8}}{=} \chi_{\lambda \mathbb{1}} \cdot \chi_{A'}(t) = (t - \lambda)^s \cdot \chi_{A'}(t)$  und somit  $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = s \leq \mu(x_f, \lambda)$ . □

**Satz 3.11**

Genau dann ist  $f$  diagonalisierbar, wenn  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt und  $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = \mu(\chi_f, \lambda)$  für alle  $\lambda \in K$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
 \dim_K\left(\sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)\right) &\stackrel{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)\right) \\
 &\stackrel{\text{II.4.12}}{=} \sum_{\lambda \in K} \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 3.10}}{\leq} \sum_{\lambda \in K} \mu(\chi_f, \lambda) \tag{1} \\
 &\leq \deg(\chi_f) \tag{2} \\
 &= n
 \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist  $f$  genau dann diagonalisierbar, wenn  $\dim_K(\sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)) = n$ , also wenn bei (1) und (2) Gleichheit herrscht. Gleichheit bei (1) bedeutet  $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = \mu(\chi_f, \lambda)$  für alle  $\lambda \in K$ , und Gleichheit bei (2) bedeutet nach Lemma 3.9, dass  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt.  $\square$

**Definition 3.12 (algebraische und geometrische Vielfachheit)**

Man nennt  $\mu_a(f, \lambda) = \mu(\chi_f, \lambda)$  die algebraische Vielfachheit und  $\mu_g(f, \lambda) = \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda))$  die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  von  $f$ .

**► Bemerkung 3.13**

Wieder nennt man  $A \in \text{Mat}_n(K)$  diagonalisierbar, wenn  $f_A \in \text{End}_K(K^n)$  diagonalisierbar ist, also wenn  $A \sim D$  für eine Diagonalmatrix  $D$ .

## 4. Trigonalisierbarkeit

### Definition 4.1

Man nennt  $f$  trigonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis  $B$  besitzt, für die  $M_B(f)$  eine obere Dreiecksmatrix ist.

### ■ Beispiel 4.2

Ist  $f$  diagonalisierbar, so ist  $f$  auch trigonalisierbar.

### Lemma 4.3

Ist  $f$  trigonalisierbar, so zerfällt  $\chi_f$  in Linearfaktoren.

*Beweis.* Klar aus Beispiel 2.8 und Satz 2.3. □

### Definition 4.4 (invariant)

Ein Untervektorraum  $W \leq V$  ist  $f$ -invariant, wenn  $f(W) \leq W$ .

### ► Bemerkung 4.5

Ist  $W$  ein  $f$ -invarianter UVR von  $V$ , so ist  $f|_W \in \text{End}_K(W)$ .

### ■ Beispiel 4.6

1.  $V$  hat stets die  $f$ -invarianten UVR  $W = \{0\}$  und  $W = V$ .
2. Jeder UVR  $W \leq \text{Eig}(f, \lambda)$  ist  $f$ -invariant.
3. Ist  $B = (x_1, \dots, x_n)$  eine Basis von  $V$ , für die  $M_B(f)$  eine obere Dreiecksmatrix ist, so sind alle UVR  $W_i = \text{span}_K(x_1, \dots, x_i)$   $f$ -invariant.
4. Sei  $V = W \oplus U$ ,  $B_1 = (x_1, \dots, x_r)$  Basis von  $W$ ,  $B_2(x_{r+1}, \dots, x_n)$  Basis von  $U$  und  $B = (x_1, \dots, x_n)$ . Ist  $W$   $f$ -invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Sind  $W$  und  $U$   $f$ -invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(f|_U) \end{pmatrix}$$

### Lemma 4.7

Ist  $W \subset V$  ein  $f$ -invarianter UVR, so gilt  $\chi_{f|_W} | \chi_f$ . Hat  $W$  ein lineares Komplement  $U$ , dass auch  $f$ -invariant ist, so  $\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$ .

*Beweis.* Ergänze eine Basis  $B_0 = (x_1, \dots, x_r)$  von  $W$  zu einer Basis  $B = (x_1, \dots, x_n)$  von  $V$ . Sei  $A = M_B(f)$ ,

$A_0 = M_{B_0}(f|_W)$ . Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad C \in \text{Mat}_{n-r}(K)$$

folglich  $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C$ , insbesondere  $\chi_{f|_W} | \chi_f$ .

Ist auch  $U = \text{span}_K(x_{r+1}, \dots, x_n)$   $f$ -invariant, so ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

und folglich  $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$ . □

### Theorem 4.8

Genau dann ist  $f$  trigonalisierbar, wenn  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt.

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ): Lemma 4.3

( $\Leftarrow$ ): Induktion nach  $n = \dim_K(V)$ .

$n = 1$ : trivial

$n - 1 \rightarrow n$ : Nach Annahme ist  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Sei  $x_1$  ein EV zum EW  $\lambda_1$ . Dann ist  $V_1 = K \cdot x_1$  ein  $f$ -invarianter UVR. Ergänze  $B_1 = (x_1)$  zu einer Basis  $B = (x_1, \dots, x_n)$  von  $V$  und setze  $B_2 = (x_2, \dots, x_n)$ ,  $V_2 = \text{span}_K(B_2)$ .  $n - 1 \rightarrow n$ : Nach Annahme ist  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Sei  $x_1$  ein EV zum EW  $\lambda_1$ . Dann ist  $V_1 = K \cdot x_1$  ein  $f$ -invarianter UVR. Ergänze  $B_1 = (x_1)$  zu einer Basis  $B = (x_1, \dots, x_n)$  von  $V$  und setze  $B_2 = (x_2, \dots, x_n)$ ,  $V_2 = \text{span}_K(B_2)$ .

$$\Rightarrow M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad A_2 \in \text{Mat}_{n-1}(K)$$

$$\chi_f(t) = \chi_{\lambda_1 \mathbb{1}_1} \cdot \chi_{A_2} = (t - \lambda_1) \cdot \chi_{A_2}(t)$$

$$\stackrel{\text{Lemma 3.7}}{\Rightarrow} \chi_{A_2}(t) = \prod_{i=2}^n (t - \lambda_i)$$

Seien  $\pi_1, \pi_2 \in \text{End}_K(V)$  gegeben durch  $M_B(\pi_1) = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$  und  $M_B(\pi_2) = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$ . Dann ist  $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}_V$  und  $f_i = \pi_i \circ f$  ist  $f = \text{id}_V \circ f = f_1 + f_2$  und  $f_2|_{V_2} \in \text{End}_K(V_2)$ . Nach Induktionshypothese ist  $f_2|_{V_2}$  trigonalisierbar, da  $M_B(f_2|_{V_2}) = A_2$ , also  $\chi_{f_2|_{V_2}} = \chi_{A_2}$ . Dies bedeutet, es gibt also eine Basis  $B'_2 = (x'_2, \dots, x'_n)$  von  $V_2$ , für die  $M_{B'_2}(f_2|_{V_2})$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist für  $B' = (x_1, x'_2, \dots, x'_n)$  auch

$$\begin{aligned} M_{B'}(f) &= M_{B'}(f_1) + M_{B'}(f_2) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{B'_2}(f_2|_{V_2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine obere Dreiecksmatrix. □

### Folgerung 4.9

Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so ist jedes  $f \in \text{End}_K(V)$  trigonalisierbar.

*Beweis.* Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so zerfällt nach I.6.14 jedes Polynom über  $K$  in Linearfaktoren, ins-

besondere also  $\chi_f$ . □

**Folgerung 4.10**

Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -VR, so ist jedes  $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  trigonalisierbar.

*Beweis.* Nach dem Fundamentalsatz der Algebra I.6.16 ist  $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen. □

## 5. Das Minimalpolynom

### Definition 5.1

Für ein Polynom  $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \in K[t]$  definieren wir  $P(f) = \sum_{i=0}^n c_i f^i \in \text{End}_K(V)$ , wobei  $f^0 = \text{id}_V$ ,  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f \circ f$ , ...

Analog definiert man  $P(A)$  für  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

► **Bemerkung 5.2** Die Abbildung  $\begin{cases} K[t] \rightarrow \text{End}_K(V) \\ P \mapsto P(f) \end{cases}$  ist ein Homomorphismus von  $K$ -VR und Ringen. Sein Kern ist das Ideal

$$\mathcal{I}_f := \{P \in K[t] \mid P(f) = 0\}$$

und sein Bild ist der kommutative Unterring

$$\begin{aligned} K[f] &:= \{P(f) \mid P \in K[t]\} \\ &= \text{span}_K(f^0, f^1, f^2, \dots) \end{aligned}$$

des (im Allgemeinen nicht kommutativen) Rings  $\text{End}_K(V)$ .

Analog definiert man  $\mathcal{I}_A$  und  $K[A] \leq \text{Mat}_n(K)$ .

### Lemma 5.3

$$\mathcal{I}_f \neq \{0\}$$

*Beweis.* Wäre  $\mathcal{I}_f = \{0\}$ , so wäre  $K[t] \rightarrow \text{End}_K(V)$  injektiv, aber  $\dim_K(K[t]) = \infty > n^2 = \dim_K(\text{End}_K(V))$ , ein Widerspruch.  $\square$

### Satz 5.4

Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom  $0 \neq P \in K[t]$  kleinsten Grades mit  $P(f) = 0$ . Dieses teilt jedes  $Q \in K[t]$  mit  $Q(f) = 0$ .

*Beweis.* Nach Lemma 5.3 gibt es  $0 \neq P \in K[t]$  mit  $P(f) = 0$  von minimalem Grad  $d$ . Indem wir durch den Leitkoeffizienten von  $P$  teilen, können wir annehmen, dass  $P$  normiert ist.

Sei  $Q \in \mathcal{I}_f$ . Polynomdivision liefert  $R, H \in K[t]$  mit  $Q = P \cdot H + R$  und  $\deg(R) < \deg(P) = d$ . Es folgt  $R(f) = \underbrace{Q(f)}_{=0} - \underbrace{P(f)}_{=0} \cdot H(f) = 0$ . Aus der Minimalität von  $d$  folgt  $R = 0$  und somit  $P \mid Q$ .

Ist  $Q$  zudem normiert vom Grad  $d$ , so ist  $H = 1$ , also  $Q = P$ , was die Eindeutigkeit zeigt.  $\square$

### Definition 5.5 (Minimalpolynom)

Das eindeutig bestimmte normierte Polynom  $0 \neq P \in K[t]$  kleinsten Grades mit  $P(f) = 0$  nennt man das Minimalpolynom  $P_f$  von  $f$ .

Analog definiert man das Minimalpolynom  $P_A \in K[t]$  einer Matrix  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

■ **Beispiel 5.6**

1.  $A = \mathbb{1}_n$ ,  $\chi_A(t) = (t-1)^n$ ,  $P_A(t) = t-1$
2.  $A = 0$ ,  $\chi_A(t) = t^n$ ,  $P_A(t) = t$
3. Ist  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  mit paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , so ist  $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t-a_i) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)^{\mu_a(f_A, \lambda_i)}$ ,  $P_A(t) = \prod_{i=1}^r (t-\lambda_i)$  und es folgt  $\deg(P_A) \geq |\{a_1, \dots, a_n\}| = r$ .

**Definition 5.7 ( $f$ -zyklisch)**

Ein  $f$ -invarianter UVR  $W \leq V$  heißt  $f$ -zyklisch, wenn es ein  $x \in W$  mit  $W = \text{span}_K(x, f(x), f^2(x), \dots)$  gibt.

**Lemma 5.8**

Sei  $x \in V$  und  $x_i = f^i(x)$ . Es gibt ein kleinstes  $k$  mit  $x_k \in \text{span}_K(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ , und  $W = \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$  ein  $f$ -zyklischer UVR von  $V$  mit Basis  $B = (x_0, \dots, x_{k-1})$  und  $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$ .

*Beweis.* Da  $\dim_K(V) = n$  ist  $(x_0, \dots, x_n)$  linear abhängig, es gibt also ein kleinstes  $k$  mit  $(x_0, \dots, x_{k-1})$  linear unabhängig, aber  $(x_0, \dots, x_k)$  linear abhängig, folglich  $x_k \in \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$ . Mit  $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$  ist dann Da  $\dim_K(V) = n$  ist  $(x_0, \dots, x_n)$  linear abhängig, es gibt also ein kleinstes  $k$  mit  $(x_0, \dots, x_{k-1})$  linear unabhängig, aber  $(x_0, \dots, x_k)$  linear abhängig, folglich  $x_k \in \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$ . Mit  $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$  ist dann

$$M_B(f|_W) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

somit  $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ , also  $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$ . □

**Theorem 5.9 (Satz von Cayley-Hamilton)**

Für  $f \in \text{End}_K(V)$  ist  $\chi_f(f) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $x \in V$ . Definiere  $x_i = f^i(x)$  und  $W = \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$  wie in Lemma 5.8. Sei  $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ , also  $f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ . Wenden wir  $\chi_{f|_W}(f) \in \text{End}_K(V)$  auf  $x$  an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_{f|_W}(f)(x) &= \left( f^k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i f^i \right) (x) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} -c_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aus  $\chi_{f|_W}|_{\chi_f}$  (Beispiel 4.6) folgt somit  $\chi_f(f)(x) = 0$ , denn ist  $\chi_f = Q \cdot \chi_{f|_W}$  mit  $Q \in K[t]$ , so ist  $\chi_f(f) =$



$Q(f) \circ \chi_{f|_W}(f)$ , also  $\chi_f(f)(x) = Q(f)(\underbrace{\chi_{f|_W}(f)(x)}_{=0}) = 0$ . Da  $x \in V$  beliebig war, folgt  $\chi_f(f) = 0 \in \text{End}_K(V)$ .  $\square$

### Folgerung 5.10

Es gilt  $P_f | \chi_f$ . Insbesondere ist  $\deg(P_f) \leq n$ .

*Beweis.* Theorem 5.9 + Satz 5.4  $\square$

### ► Bemerkung 5.11

Ist  $B$  eine Basis von  $V$  und  $A = M_B(f)$ , so ist  $P_A = P_f$ . Insbesondere ist  $P_A = P_B$  für  $A \sim B$ . Als Spezialfall von Theorem 5.9 erhält man  $\chi_A(A) = 0$  und  $P_A | \chi_A$ .

### ► Bemerkung 5.12

Der naheliegende “Beweis“  $\underbrace{\chi_A}_{\in \text{Mat}_n(K)} = \det(t\mathbb{1}_n - A)(A) = \det(A\mathbb{1}_n - A) = \det(0) = \underbrace{0}_{\in K}$  ist falsch!

## 6. Nilpotente Endomorphismen

### ► Bemerkung 6.1

Für  $f \in \text{End}_K(V)$  sind

- $f\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subseteq \text{Ker}(f^1) \subseteq \text{Ker}(f^2) \subseteq \dots$
- $V = \text{Im}(f^0) \supseteq \text{Im}(f^1) \supseteq \text{Im}(f^2) \supseteq \dots$

Folgen von UVR von  $V$ . Nach der Kern-Bild-Formel III.7.13 ist

$$\dim_K(\text{Ker}(f^i)) + \dim_K(\text{Im}(f^i)) = \dim_K(V) \quad \forall i$$

Da  $\dim_K(V) = n < \infty$  gibt es ein  $d$  mit  $\text{Ker}(f^d) = \text{Ker}(f^{d+i})$  und  $\text{Im}(f^d) = \text{Im}(f^{d+i})$  für jedes  $i \geq 0$ .

### ■ Beispiel 6.2

$f = f_A$ ,  $A \in \text{Mat}_2(K)$ .

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) = \text{Ker}(f^1) = \dots$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = \text{span}_K(e_2)$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \underbrace{\text{Ker}(f^1)}_{=\text{span}_K(e_1)} \subset \text{Ker}(f^2) = \dots = K^2$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = K^2$

### Lemma 6.3

Seien  $f, g \in \text{End}_K(V)$ . Wenn  $f$  und  $g$  kommutieren, d.h.  $f \circ g = g \circ f$ , so sind die UVR  $\text{Ker}(g)$  und  $\text{Im}(g)$   $f$  invariant.

*Beweis.* Ist  $x \in \text{Ker}(f)$ , so ist  $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$ , also  $f(x) \in \text{Ker}(g)$ . Für  $g(x) \in \text{Im}(g)$  ist  $f(g(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$ . □

### Satz 6.4 (Lemma von Fitting)

Seien  $V_i = \text{Ker}(f^i)$ ,  $W_i = \text{Im}(f^i)$ ,  $d = \min\{i : V_i = V_{i+1}\}$ . Dann sind

$$\begin{aligned} \{0\} &= V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_d = V_{d+1} = \dots \\ V &= W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \dots \supsetneq W_d = W_{d+1} = \dots \end{aligned}$$

Folgen  $f$ -invarianter UVR und  $V = V_d \oplus W_d$ .

*Beweis.* Da  $f^i$  und  $f^j$  für beliebige  $i, j$  kommutieren, sind  $V_i$  und  $V_j$  nach Lemma 6.3  $f$ -invariant für jedes  $i$ . Aus  $\dim_K(V_i) + \dim_K(W_i) = n$  folgt  $d = \min\{i : W_i = W_{i+1}\}$ , insbesondere ist  $\text{Im}(f^d) = \text{Im}(f^{d+1}) = f(\text{Im}(f^d))$ , somit  $W_{d+i} = \text{Im}(f^{d+i}) = W_d$  für  $i \geq 0$ , also auch  $V_d = V_{d+i}$  für alle  $i \geq 0$ .

Insbesondere ist  $f^d|_{W_d} : W_d \rightarrow W_{2d} = W_d$  surjektiv, also auch injektiv, also  $V_d \cap W_d = \{0\}$ . Aus der Dimensionsformel II.4.12 folgt dann  $\dim_K(V_d + W_d) = \dim_K(V_d) + \dim_K(W_d) = \dim_K(V)$ . Folglich ist  $V_d + W_d = V$  und  $V_d \cap W_d = \{0\}$ , also  $V = V_d \oplus W_d$ .  $\square$

### Definition 6.5 (nilpotent)

Ein  $f \in \text{End}_K(V)$  heißt nilpotent, wenn  $f^k = 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Analog heißt  $A \in \text{Mat}_n(K)$  nilpotent, wenn  $A^k = 0$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Das kleinste  $k$  mit  $f^k = 0$  bzw.  $A^k$  heißt die Nilpotenzklasse von  $f$  bzw.  $A$ .

### Lemma 6.6

Ist  $f$  nilpotent, so gibt es eine Basis  $B$  von  $V$ , für die  $M_B(f)$  eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

*Beweis.* Induktion nach  $n = \dim_K(V)$ .

$n = 1$ :  $f^k = 0 \Rightarrow f = 0$

$n > 1$ : Sei  $k$  die Nilpotenzklasse von  $f$  und  $U = \text{Ker}(f^{k-1})$ . Dann ist  $U \subset V$ . Da  $f^k = f^{k-1} \circ f$  ist  $f(V) \subset U$ , insbesondere  $f|_U \in \text{End}_K(U)$ . Da  $f|_U$  nilpotent ist, gibt es nach I.H. eine Basis  $B_0$  von  $U$ , für die  $M_{B_0}(f|_U)$  eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Ergänze  $B_0$  zu einer Basis  $B$  von  $V$ . Da  $f(V) \subset U$  ist dann auch

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(f|_U) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix.  $\square$

### Satz 6.7

Für  $f \in \text{End}_K(V)$  sind äquivalent:

- 1)  $f$  ist nilpotent
- 2)  $f^n = 0$  für  $n \in \mathbb{N}$
- 3)  $P_f(t) = t^r$  für ein  $r \leq n$
- 4)  $\chi_f(t) = t^n$
- 5) Es gibt eine Basis  $B$  von  $V$ , mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

*Beweis.*

- 1)  $\Rightarrow$  5): Lemma 6.6
- 5)  $\Rightarrow$  4): Beispiel 2.8
- 4)  $\Rightarrow$  3): Nach Folgerung 5.10 ist  $P_f|_{\chi_f} = t^n$ , also  $t^n = P_f(t)Q(t)$  mit  $Q \in K[t]$ . Schreibe  $P_f(t) = t^a \cdot P_1(t)$ ,  $Q(t) = t^b \cdot Q_1(t)$  mit  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $P_1, Q_1 \in K[t]$ ,  $P_1(0) \neq 0$ ,  $Q_1(0) \neq 0$   
 $\stackrel{3.8}{\Rightarrow} t^{n-(a+b)} = P_1(t)Q_1(t)$  und  $(P_1Q_1)(0) \neq 0$   
 $\Rightarrow n - (a+b) = 0 \Rightarrow P_1 = 1$ , somit  $P_f(t) = t^a$
- 3)  $\Rightarrow$  2):  $t^r = 0$ ,  $r \leq n \Rightarrow f^n = 0$
- 2)  $\Rightarrow$  1): nach Definition □

**Folgerung 6.8**

Die Nilpotenzklasse eines nilpotenten Endomorphismus  $f \in \text{End}_K(V)$  ist höchstens  $\dim_K(V)$ .

**Folgerung 6.9**

Ist  $d := \min\{i \mid \text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})\}$ , so ist  $d \leq \dim_K(\text{Ker}(f)) = \mu_a(f, 0)$ .

*Beweis.* Sei  $V_d = \text{Ker}(f^d)$ ,  $W_d = \text{Im}(f^d)$ ,  $k = \dim_K(V_d)$ . Da  $V = V_d \oplus W_d$  ist  $\chi_f = \chi_{f|_{V_d}} \cdot \chi_{f|_{W_d}}$ . Da  $f|_{V_d}$  nilpotent ist, ist  $\chi_{f|_{V_d}} = t$  nach Satz 6.7. Da  $f|_{W_d}$  injektiv ist, ist  $\chi_{f|_{W_d}}(0) \neq 0$ . Somit ist  $\mu_a(f, 0) = \mu(\chi_f, 0) \stackrel{3.6}{=} k$ . Da  $\dim_K(\text{Ker}(f^d)) > \dots > \dim_K(\text{Ker}(f)) > 0$  ist  $k = \dim_K(\text{Ker}(f^d)) \geq d$ , falls  $d > 0$ , sonst klar. □

**► Bemerkung 6.10**

Die Bedeutung nilpotenter Endomorphismen beim Finden geeigneter Basen ergibt sich aus der folgenden Beobachtung:

Ist  $A$  eine obere Dreiecksmatrix, so ist  $A = D + N$ , wobei  $D$  eine Diagonalmatrix ist und  $N$  eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Anders gesagt: Jeder trigonalisierbare Endomorphismus ist Summe aus einem diagonalisierbaren und einem nilpotenten Endomorphismus.

**Definition 6.11 (Jordan-Matrix)**

Für  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir die JORDAN-Matrix

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_k(K)$$

weiter setzen wir für  $\lambda \in K$   $J_k(\lambda) := \lambda \mathbb{1} + J_k$ .

**Lemma 6.12**

Die JORDAN-Matrix  $J_k$  ist nilpotent von Nilpotenzklasse  $k$ .

*Beweis.* Es ist  $(J_k)^r = (\delta_{i+r,j})_{i,j}$  für  $r \geq 1$ . □

**Satz 6.13**

Ist  $f$  nilpotent von Nilpotenzklasse  $k$ , so gibt es eindeutig bestimmte  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_{>0}$  mit  $\sum_{d=1}^k dr_d = n$  und eine Basis  $B$  von  $V$  mit

$$M_B(f) = \text{diag}(\underbrace{J_k, \dots, J_k}_{r_k \text{ viele}}, \dots, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{r_1 \text{ viele}})$$

*Beweis.* Sei  $U_i = \text{Ker}(f^i)$ . Nach Satz 6.4 haben wir eine Folge  $\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_k = V$  mit  $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$  für alle  $i > 0$ .

Wir konstruieren eine Zerlegung  $V = \bigoplus_{d=1}^k W_d$  mit  $U_i = U_{i-1} \oplus W_i$ ,  $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$ ,  $f|_{W_d}$  injektiv für  $i > 1$ .

$$\begin{aligned} V &= U_k \\ V &= U_{k-1} \oplus W_k \\ V &= U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k \\ &\vdots \\ V &= U_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k \end{aligned}$$

Wähle  $W_k$  mit  $V = U_k = U_{k-1} \oplus W_k$ . Ist  $k > 1$ , so ist  $W_k \cap \text{Ker}(f) \subseteq W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$ , also  $f|_{W_k}$  ist injektiv. Des weiteren ist  $f(W_k) \subseteq U_{k-1}$  und aus  $W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$  folgt  $f(W_k) \cap U_{k-2} = \{0\}$ . Wir können deshalb  $W_{k-1}$  mit  $U_{k-1} = U_{k-2} \oplus W_{k-1}$  und  $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$  wählen. Somit ist  $V = U_{k-1} \oplus W_k = U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k$ . Wir setzen dies fort und erhalten  $V = U_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  mit  $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$  und  $f|_{W_i}$  injektiv für  $i > 1$ , wobei  $U_0 = \{0\}$  und  $W_1 = \text{Ker}(f)$ .

Sie  $r_d = \dim_K(W_d) - \dim_K(W_{d+1})$ , wobei wir  $W_{k+1} = \{0\}$ . Wähle nun eine Basis  $(x_{k,1}, \dots, x_{k,r_k})$  von  $W_k$ . Ist  $k > 1$ , so ist  $f|_{W_k}$  injektiv und wir können  $(f(x_{k,1}), \dots, f(x_{k,r_k}))$  durch Elemente  $x_{k-1,1}, \dots, x_{k-1,r_{k-1}}$  zu einer Basis von  $W_{k-1}$  ergänzen, und so weiter.

Da  $V = \bigoplus_{d=1}^k W_d$  ist

$$B = \{f^i(x_{d,j}) \mid d = 1, \dots, k, j = 1, \dots, r_d, i = 0, \dots, d-1\}$$

eine Basis von  $V$ , die bei geeigneter Anordnung das Gewünschte leistet.

Es bleibt zu zeigen, dass  $r_1, \dots, r_k$  eindeutig bestimmt sind. Ist  $B_0$  eine Basis, für die  $M_{B_0}(f)$  in der gewünschten Form ist, so ist

$$\begin{aligned} \dim_K(U_1) &= \sum_{d=1}^k r_d \\ \dim_K(U_2) &= \sum_{d=2}^k r_d + \sum_{d=1}^k r_d \\ &\vdots \\ \dim_K(U_k) &= \sum_{d=k}^k r_d + \dots + \sum_{d=1}^k r_d \end{aligned}$$

woraus man sieht, dass  $r_1, \dots, r_k$  durch  $U_1, \dots, U_k$ , also durch  $f$  eindeutig bestimmt.  $\square$

■ **Beispiel 6.14**  
 Sei  $f = f_A$  mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

$\Rightarrow k = 3, U_0 = \{0\}, U_1 = \mathbb{R}e_1, U_2 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2, U_3 = V.$

Wähle  $W_3$  mit  $V = U_3 = U_2 \oplus W_3$ , z.B.  $W_3 = \mathbb{R}e_3.$

Wähle  $W_2$  mit  $U_2 = U_1 \oplus W_2$  und  $f(W_3) \subseteq W_2$ , also

$$W_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze  $W_1 = U_1 = \text{Ker}(f) = \mathbb{R}e_1 \Rightarrow \text{Basis } B = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

## 7. Die Jordan-Normalform

### Definition 7.1 (Hauptraum)

Der Hauptraum von  $f$  zum EW  $\lambda$  der Vielfachheit  $r = \mu_a(f, \lambda)$  ist

$$\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Ker} \left( (f - \lambda \text{id}_V)^r \right)$$

### Lemma 7.2

$\text{Hau}(f, \lambda)$  ist ein  $f$ -invarianter UVR der Dimension  $\dim_K(\text{Hau}(f, \lambda)) = \mu_a(f, \lambda)$ , auf dem  $f - \lambda \text{id}_V$  nilpotent ist und  $\chi_{f|_{\text{Hau}(f, \lambda)}} = (t - \lambda)^{\mu_a(f, \lambda)}$

*Beweis.*  $f$  kommutiert sowohl mit  $f$  als auch mit  $\text{id}_V$ , somit auch mit  $(f - \lambda \text{id}_V)^r$ . Die  $f$ -Invarianz von  $U = \text{Hau}(f, \lambda)$  folgt aus Lemma 6.3. Nach Folgerung 6.9 ist  $\dim_K(U) = \mu_a(f - \lambda \text{id}_V, 0)$  und da  $\chi_f(t) = \chi_{f - \lambda \text{id}_V}(t - \lambda)$  ist  $\mu_a(f, \lambda) = \mu(\chi_f, \lambda) = \mu_a(f - \lambda \text{id}_V, 0)$ . Da  $f - \lambda \text{id}_V|_U$  nilpotent ist  $\chi_{f - \lambda \text{id}_V|_U}(t) = t^r$ , somit  $\chi_{f|_U}(t) = (t - \lambda)^r$ .  $\square$

### Satz 7.3 (Hauptraumzerlegung)

Ist  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  paarweise verschieden und  $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ , so ist  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$  mit  $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$  eine Zerlegung in  $f$ -invariante UVR und für jedes  $i$  ist  $\chi_{f|_{V_i}}(t) = (t - \lambda_i)^{r_i}$ .

*Beweis.* Induktion nach  $m$ .

$m = 1$ :  $r_1 = n \stackrel{7.2}{\Rightarrow} V = V_1$ .

$m - 1 \rightarrow m$ : Nach Satz 6.4 ist  $V = V_1 \oplus W_1$  mit  $W_1 = \text{Im}((f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1})$  eine Zerlegung in  $f$ -invariante UVR mit  $\dim_K(V_1) = r_1$ ,  $\dim_K(W_1) = n - r_1$ . Somit ist  $\chi_f = \chi_{f|_{V_1}} \cdot \chi_{f|_{W_1}}$  und  $\chi_{f|_{V_1}} \stackrel{7.2}{=} (t - \lambda_1)^{r_1}$  also  $\chi_{f|_{W_1}} = \prod_{i=2}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$ . Nach I.H. ist also  $W_1 = \bigoplus_{i=2}^m \text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)$ . Es ist für  $i \geq 2$   $\text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i) \subseteq \text{Hau}(f, \lambda_i) = V_i$  und da  $\dim_K(\text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)) = r_i = \dim_K(\text{Hau}(f, \lambda_i))$  gilt Gleichheit. Damit ist

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus W_1 \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m \text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i) \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m V_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^m V_i \end{aligned} \quad \square$$

### ■ Beispiel 7.4

$f = f_A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$$

$$\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \underbrace{\text{Hau}(f, 1)}_{\dim=2} \oplus \underbrace{\text{Hau}(f, 2)}_{\dim=1}$$

$$\text{Hau}(f, 1) = \text{Ker}((f - \text{id})^2) = L((A - \mathbb{1})^2, 0)$$

$$\text{Hau}(f, 2) = \text{Ker}(f - 2\text{id}) = \text{Eig}(f, 2) = L(A - 2\mathbb{1}, 0)$$

$$A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix}, (A - \mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 12 & \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hau}(f, 1) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$$

$$A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hau}(f, 2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mit } B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ ist}$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Theorem 7.5 (Jordan-Normalform)**

Sei  $f \in \text{End}_K(V)$  ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$  und  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{i=1}^r k_i = \dim_K(V)$  und eine Basis  $B$  von  $V$  mit

$$M_B(f) = \text{diag}(J_{k_1}(\mu_1), \dots, J_{k_r}(\mu_r))$$

Die Paare  $(\mu_1, k_1), \dots, (\mu_r, k_r)$  heißen die JORDAN-Invarianten von  $f$  und sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Schreibe  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  paarweise verschieden,  $r_i \in \mathbb{N}$ . Sei  $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$ . Nach Satz 7.3 ist  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$  eine Zerlegung in  $f$ -invariante UVR. Für jedes  $i$  wenden wir Satz 6.13 auf  $(f - \lambda_i \text{id}_V)|_{V_i}$  an und erhalten eine Basis  $B_i$  von  $V_i$  und  $k_{i,1} \geq \dots \geq k_{i,s_i}$  mit

$$M_B((f - \lambda_i \text{id})|_{V_i}) = \text{diag}(J_{k_{i,1}}, \dots, J_{k_{i,s_i}})$$

Es folgt  $M_{B_i}(f|_{V_i}) = M_{B_i}(\lambda_i \text{id}_{V_i}) + M_{B_i}((f - \lambda_i \text{id}_V)|_{V_i})$ . Ist nun  $B$  die Vereinigung der  $B_i$ , so hat  $M_B(f)$  die gewünschte Form. Die Eindeutigkeit der JORDAN-Invarianten folgt aus der Eindeutigkeit der  $k_{i,j}$  in Lemma 6.3.  $\square$



► **Bemerkung 7.6**

Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so haben wir nun eine (bis auf Permutationen) eindeutige Normalform für Endomorphismen  $f \in \text{End}_K(V)$  gefunden. Aus ihr lassen sich viele Eigenschaften des Endomorphismus leicht ablesen.

**Folgerung 7.7**

Sei  $f \in \text{End}_K(V)$  trigonalisierbar mit  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f, \lambda_i)}$ ,  $P_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{d_i}$  und JORDAN-Invarianten  $(\mu_1, k_1), \dots, (\mu_r, k_r)$ . Mit  $J_i = \{j \mid \mu_j = \lambda_i\}$  ist dann

$$\begin{aligned}\mu_g(f, \lambda_i) &= |J_i| \\ \mu_a(f, \lambda_i) &= \sum_{j \in J_i} k_j \\ d_i &= \max\{k_j \mid j \in J_i\}\end{aligned}$$

*Beweis.* •  $\mu_a$ : klar, da  $\chi_f(t) = \prod_{j=1}^r (t - \mu_j)^{k_j} = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f, \lambda_i)}$

- $\mu_g$ : lese Basis von  $\text{Eig}(f, \lambda_i)$  aus JORDAN-NF: Jeder Block  $J_{k_j}(\lambda_i)$  liefert ein Element der Basis.
- $d_i$ : folgt, da  $J_{k_j}$  nilpotent von Nilpotenzklasse  $k_j$  ist (Lemma 6.12). □

**Folgerung 7.8**

Genau dann ist  $f$  diagonalisierbar, wenn

$$\begin{aligned}\chi_f(t) &= \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K \text{ paarweise verschieden und} \\ P_f(t) &= \prod_{i=1}^m m(t - \lambda_i)\end{aligned}$$

*Beweis.* Genau dann ist  $f$  diagonalisierbar, wenn  $f$  trigonalisierbar ist und die JORDAN-NF die Diagonalmatrix ist (Eindeutigkeit der JNF), also  $k_j = 1$  für alle  $j$ . Nach Folgerung 7.7 ist dies äquivalent dazu, dass  $d_i = 1$  für alle  $i$ , also  $P_f = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)$ . □

► **Bemerkung 7.9**

Wider definiert man die JORDAN-Invarianten, etc. von einer Matrix  $A \in \text{Mat}_n(K)$  als die JORDAN-Invarianten von  $f_A \in \text{End}_K(K^n)$ .

**Folgerung 7.10**

Seien  $A, B \in \text{Mat}_n(K)$  trigonalisierbar. Genau dann ist  $A \sim B$ , wenn  $A$  und  $B$  die gleichen JORDAN-Invarianten haben.

*Beweis.* Existenz und Eindeutigkeit der JORDAN-Normalform. □

## Kapitel II

# Skalarprodukte

In diesem ganzen Kapitel seien

- $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$
- $n \in \mathbb{N}$
- $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -VR

## 1. Das Standardskalarprodukt

Sei zunächst  $K = \mathbb{R}$ .

### Definition 1.1 (Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}$ )

Auf den Standardraum  $V = \mathbb{R}^n$  definiert man das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}$   $\langle \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

### Satz 1.2

Das Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für  $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

- Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $\langle x, y \rangle \geq 0$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

*Beweis.* • klar

- klar

- $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq x_j^2$  für jedes  $j \Rightarrow \langle x, x \rangle \geq 0$  und  $\langle x, x \rangle > 0$  falls  $x_j \neq 0$  für ein  $j$ . □

**Definition 1.3 (euklidische Norm in  $\mathbb{R}$ )**

Auf  $K = \mathbb{R}^n$  definiert man euklidische Norm in  $\mathbb{R}$   $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Satz 1.4 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)**

Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Gleichheit genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

*Beweis.* siehe Analysis, siehe VI.§3 □

**Satz 1.5**

Die euklidische Norm erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

*Beweis.* • Satz 1.2

- Satz 1.2
- $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \stackrel{1.4}{\Rightarrow} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  □

Sei nun  $K = \mathbb{C}$ .

**Definition 1.6 (komplexe Konjugation, Absolutbetrag)**

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  definiert man  $\bar{z} = x - iy$  heißt komplexe Konjugation .. Man definiert den Absolutbetrag von  $z$  als

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Für  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$  sehen wir

$$\bar{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$$

**Satz 1.7**

Komplexe Konjugation ist ein Ringautomorphismus von  $\mathbb{C}$  mit Fixkörper

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\} = \mathbb{R}$$

*Beweis.* siehe LAAG1 H47 □

**Folgerung 1.8**

Für  $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  und  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  ist  $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ ,  $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ ,  $\overline{A^t} = \overline{A}^t$ ,  $\overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$

*Beweis.* Satz 1.7, einfache Übung □

**Definition 1.9 (Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}$ )**

Auf  $K = \mathbb{C}^n$  definiert man das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}$   $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\langle x, y \rangle = x^t \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

**Satz 1.10**

Das komplexe Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für  $x, x', y, y' \in \mathbb{C}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

- Für  $x, y \in \mathbb{C}^n$  ist  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- Für  $x \in \mathbb{C}^n$  ist  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

*Beweis.* • klar

- klar

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

□

**Definition 1.11 (euklidische Norm in  $\mathbb{C}$ )**

Auf  $V = \mathbb{C}^n$  definiert man die euklidische Norm in  $\mathbb{C}$   $\| \cdot \| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**► Bemerkung 1.12**

Schränkt man das komplexe Skalarprodukt auf den  $\mathbb{R}^n$  ein, so erhält man das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Wir werden ab jetzt die beiden Fälle  $K = \mathbb{R}$  und  $K = \mathbb{C}$  parallel behandeln. Wenn nicht anders angegeben, werden wir die Begriffe für den komplexen Fall benutzen, aber auch den reellen Fall einschließen.

## 2. Bilinearformen und Sesquilinearformen

Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ .

### Definition 2.1 (Bilinearform, Sesquilinearform)

Eine Bilinearform ( $K = \mathbb{R}$ ) bzw. Sesquilinearform ( $K = \mathbb{C}$ ) ist eine Abbildung  $s : V \times V \rightarrow K$  für die gilt:

- Für  $x, x', y \in V$  ist  $s(x + x', y) = s(x, y) + s(x', y)$
- Für  $x, y, y' \in V$  ist  $s(x, y + y') = s(x, y) + s(x, y')$
- Für  $x, y \in V, \lambda \in K$  ist  $s(\lambda x, y) = \lambda s(x, y)$
- Für  $x, y \in V, \lambda \in K$  ist  $s(x, \lambda y) = \overline{\lambda} s(x, y)$

### ► Bemerkung 2.2

Im Fall  $K = \mathbb{R}$  ist  $\lambda = \overline{\lambda}$ . Wir werden der Einfachheit halber auch in diesem Fall von Sesquilinearformen sprechen, vgl. Bemerkung 1.12

### ■ Beispiel 2.3

Für  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_n(K)$  ist  $s_A : K^n \times K^n \rightarrow K^n$  gegeben durch

$$s_A(x, y) = x^t A \bar{y} = x^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{y}_j \right)_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \bar{y}_j$$

eine Sesquilinearform auf  $V = K^n$ .

### Definition 2.4

Sei  $s$  eine Sesquilinearform auf  $V$  und  $B = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ . Die darstellende Matrix von  $s$  bzgl.  $B$  ist

$$M_B(s) = (s(v_i, v_j))_{i,j} \in \text{Mat}_n(K)$$

### ■ Beispiel 2.5

Die darstellende Matrix des Standardskalarprodukts  $s = s_{\mathbb{1}_n}$  auf den Standardraum  $V = K^n$  bzgl. der Standardbasis  $\mathcal{E}$  ist

$$M_{\mathcal{E}}(s) = \mathbb{1}_n$$

### Lemma 2.6

Seien  $v, w \in V$ . Mit  $x = \Phi_B^{-1}(v)$ ,  $y = \Phi_B^{-1}(w)$  und  $A = M_B(s)$  ist  $s(v, w) = x^t A \bar{y} = s_A(x, y)$ .

*Beweis.* Achtung:  $v_i$  beschreibt das  $i$ -te Element der Basis  $B$ !

$$s(v, w) = s\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j s(v_i, v_j) = x^t A \bar{y}$$

□

**Satz 2.7**

Sei  $B$  eine Basis von  $V$ . Die Abbildung  $s \mapsto M_B(s)$  ist eine Bijektion zwischen den Sesquilinearformen auf  $V$  und  $\text{Mat}_n(K)$ .

*Beweis.* • injektiv: Lemma 2.6

- surjektiv: Für  $A \in \text{Mat}_n(K)$  wird durch  $s(v, w) = \Phi_B^{-1}(v)^t \cdot A \cdot \overline{\Phi_B^{-1}(w)}$  eine Sesquilinearform auf  $V$  mit  $M_B(s) = (s(v_i, w_j))_{i,j} = (e_i^t A e_j)_{i,j} = (e_i A e_j)_{i,j} = A$  definiert.  $\square$

**Satz 2.8 (Transformationsformel)**

Seien  $B$  und  $B'$  Basen von  $V$  und  $s$  eine Sesquilinearform auf  $V$ . Dann gilt:

$$M_{B'}(s) = (T_B^{B'})^t \cdot M_B(s) \cdot \overline{T_B^{B'}}$$

*Beweis.* Seien  $v, w \in V$ . Definiere  $A = M_B(s)$ ,  $A' = M_{B'}(s)$ ,  $T = T_B^{B'}$  und  $x, y, x', y' \in K^n$  mit  $v = \Phi_B(x) = \Phi_B(x')$ ,  $w = \Phi_B(y) = \Phi_B(y')$ . Dann ist  $x = Tx'$ ,  $y = Ty'$  und somit

$$\begin{aligned} (x')^t A' \overline{y'} &\stackrel{2.6}{=} s(v, w) \\ &\stackrel{2.6}{=} x^t A \overline{y} \\ &= (Tx')^t A \overline{Ty'} \\ &= (x')^t T^t A \overline{Ty'} \end{aligned}$$

Da  $v, w \in V$  und somit  $x', y' \in K$  beliebig waren, folgt  $A = T^t A T$ .  $\square$

**■ Beispiel 2.9**

Sei  $s$  das Standardskalarprodukt auf dem  $K^n$  und  $B = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis des  $K^n$ . Dann ist

$$M_B(s) = (T_{\mathcal{E}}^B)^t \cdot M_{\mathcal{E}}(s) \cdot \overline{T_{\mathcal{E}}^B} = B^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{B} = B^t B$$

wobei  $B = (b_1, \dots, b_n) \in \text{Mat}_n(K)$ .

**Satz 2.10**

Sei  $s$  eine Sesquilinearform auf  $V$ . Dann sind äquivalent:

- Es gibt  $0 \neq v \in V$  mit  $s(v, w) = 0$  für alle  $w \in V$ .
- Es gibt  $0 \neq w \in V$  mit  $s(v, w) = 0$  für alle  $v \in V$ .
- Es gibt eine Basis  $B$  von  $V$  mit  $\det(M_B(s)) = 0$ .
- Für jede Basis  $B$  von  $V$  gilt  $\det(M_B(s)) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $B$  eine Basis von  $V$ ,  $v = \Phi_B(x)$  und  $A = M_B(s)$ . Genau dann ist die (semilineare) Abbildung  $w \mapsto s(v, w)$  die Nullabbildung, wenn  $x^t A \overline{y} = 0$  für alle  $y \in K^n$ , also wenn  $0 = x^t A$ , d.h.  $A^t x = 0$ . Somit ist (1) genau dann erfüllt, wenn  $A^t$  nicht invertierbar ist, also wenn  $0 = \det(A^t) = \det(A)$ . Damit  $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$  gezeigt und  $(2) \iff (4)$  zeigt man analog.  $\square$

**Definition 2.11 (ausgeartet)**

Eine Sesquilinearform  $s$  auf  $V$  heißt ausgeartet, wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 2.10 erfüllt ist, sonst nicht-ausgeartet.

**Definition 2.12 (symmetrisch, hermitesch)**

Eine Sesquilinearform  $s$  auf  $V$  heißt symmetrisch, wenn bzw. hermitesch, wenn

$$s(x, y) = \overline{s(y, x)} \quad \text{für alle } x, y \in V$$

Eine Matrix  $A \in \text{Mat}_n(K)$  heißt symmetrisch bzw. hermitesch, wenn  $A = A^* = \overline{A}^t = \overline{A^t}$ .

**Satz 2.13**

Sei  $s$  eine Sesquilinearform auf  $V$  und  $B$  eine Basis von  $V$ . Genau dann ist  $s$  hermitesch, wenn  $M_B(s)$  dies ist.

*Beweis.*  $(\Rightarrow)$ : klar aus Definition von  $M_B(s)$ .

$(\Leftarrow)$ :  $x = \Phi_B^{-1}(w)$ ,  $y = \Phi_B^{-1}(v)$ ,  $\overline{s(v, w)} = \overline{s(v, w)^t} = \overline{(x^t A \bar{y})^t} = y^t \overline{A^t x} = s(w, v)$

□

**Satz 2.14**

Für  $A, B \in \text{Mat}_n(K)$  und  $S \in \text{GL}_n(K)$  ist  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,  $(AB)^* = B^* A^*$ ,  $(A^*)^* = A$  und  $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$ .

*Beweis.* Folgerung 1.8, III.1.14, III.1.15

□

### 3. Euklidische und unitäre Vektorräume

**Lemma 3.1**

Sei  $s$  eine hermitesche Sesquilinearform auf  $V$ . Dann ist  $s(x, x) \in \mathbb{R}$  für alle  $x \in V$ .

*Beweis.* Da  $s$  hermitesch ist, ist  $s(x, x) = \overline{s(x, x)}$ , also  $s(x, x) \in \mathbb{R}$ . □

**Definition 3.2 (quadratische Form)**

Sei  $s$  eine hermitesche Sesquilinearform auf  $V$ . Die quadratische Form zu  $s$  ist die Abbildung

$$q_s : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto s(x, x) \end{cases}$$

**► Bemerkung 3.3**

Die quadratische Form  $q_s$  erfüllt das  $q_s(\lambda x) = |\lambda|^2 \cdot q_s(x)$  für alle  $x \in V$ ,  $\lambda \in K$ . Im Fall  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ ,  $s = s_A$ ,  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  ist  $q_s(x) = s_A(x, x) = x^t A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  ein “quadratisches Polynom in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$ ”.

**Satz 3.4 (Polarisierung)**

Sei  $s$  eine hermitesche Sesquilinearform auf  $V$ . Dann gilt für  $x, y \in V$ :

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{1}{2}(q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y)) & K = \mathbb{R} \\ s(x, y) &= \frac{1}{4}(q_s(x+y) - q_s(x-y) + iq_s(x+iy) - iq_s(x-iy)) & K = \mathbb{C} \end{aligned}$$

*Beweis.* Im Fall  $K = \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y) &= s(x+y, x+y) - s(x, x) - s(y, y) \\ &= s(x, x) + s(x, y) + s(y, x) + s(y, y) - s(x, x) - s(y, y) \\ &= s(x, y) + s(y, x) - 2s(x, y) \end{aligned}$$

Im Fall  $K = \mathbb{C}$ : ÜA □

**Definition 3.5 ((semi)definit, euklidischer VR, unitärer VR)**

Sei  $s$  eine hermitesche Sesquilinearform auf  $V$ . Ist  $s(x, x) \geq 0$  für alle  $x \in V$ , so heißt  $s$  positiv semidefinit. Ist  $s(x, x) > 0$  für alle  $0 \neq x \in V$ , so heißt  $s$  positiv definit (oder ein Skalarprodukt).

Eine hermitesche Matrix  $A \in \text{Mat}_n(K)$  heißt positiv (semi)definit, wenn  $s_A$  dies ist.

Einen endlichdimensionalen  $K$ -VR zusammen mit positiv definiten hermiteschen Sesquilinearformen nennt man einen euklidischen bzw. unitären VR (oder auch Prähilbertraum). Wenn nicht anderes angegeben, notieren wir die Sesquilinearform mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**■ Beispiel 3.6**

Der Standardraum  $V = K^n$  zusammen mit dem Standardskalarprodukt ist ein euklidischer bzw. unitärer VR.



■ **Beispiel 3.7**

Ist  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , so ist  $s_A$  genau dann positiv definit, wenn  $\lambda_i > 0$  für alle  $i$ , und positiv semidefinit, wenn  $\lambda_i \geq 0$  für alle  $i$ .

**Satz 3.8**

Ist  $V$  ein unitärer VR und  $U \subseteq V$  ein UVR, so ist  $U$  mit der Einschränkung des Skalarprodukts wieder ein unitärer VR.

*Beweis.* klar, die Einschränkung ist wieder positiv definit. □

**Definition 3.9**

Ist  $V$  ein unitärer VR, so definiert man die Norm von  $x \in V$  als

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

**Satz 3.10**

Die Norm eines unitären VR erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für  $x \in V$  ist  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für  $x \in V$  und  $\lambda \in K$  ist  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für  $x, y \in V$  ist  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

*Beweis.* • Das Skalarprodukt ist positiv definit.

- klar
  - Wie im Fall im  $\mathbb{R}^n$
- 

**Satz 3.11**

Ist  $V$  ein unitärer VR, so gilt für  $x, y \in V$ :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

*Beweis.* Für  $y = 0$  ist die Aussage klar.

Sei also  $y \neq 0$ . Für  $\lambda, \mu \in K$  ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y \rangle \\ &= \lambda \bar{\lambda} \cdot \langle x, x \rangle + \mu \bar{\mu} \cdot \langle y, y \rangle + \lambda \bar{\mu} \cdot \langle x, y \rangle + \mu \bar{\lambda} \cdot \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

Setzt man  $\lambda = \bar{\lambda} = \langle y, y \rangle > 0$  und  $\mu = -\langle x, y \rangle$  ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \cdot \|x\|^2 \|y\|^2 + \mu \bar{\mu} \lambda - \lambda \mu \bar{\mu} - \langle x, y \rangle \bar{\lambda} \langle y, x \rangle \\ &= \lambda (\|x\|^2 \|y\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2) \end{aligned}$$

Teilen durch  $\lambda$  und Wurzelziehen liefert die Ungleichung. Gilt dort Gleichheit, so ist  $\|\lambda x + \mu y\| = 0$  folglich (da  $\lambda \neq 0$ ) sind dann  $x, y$  linear unabhängig. Ist  $x = \alpha y$  mit  $\alpha \in K$ , so ist  $|\langle x, y \rangle| = |\alpha| \cdot \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$  □

## 4. Orthogonalität

Sei  $V$  ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

### Definition 4.1 (orthogonal, orthogonales Komplement)

Zwei Vektoren  $x, y \in V$  heißen orthogonal, in Zeichen  $x \perp y$ , wenn  $\langle x, y \rangle = 0$ . Zwei Mengen  $X, Y \subseteq V$  sind orthogonal, in Zeichen  $X \perp Y$ , wenn  $x \perp y$  für alle  $x \in X$  und  $y \in Y$ .

Für  $U \subseteq V$  bezeichnet

$$U^\perp = \{x \in V \mid x \perp u \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement zu  $U$ .

### Lemma 4.2

Für  $x, y \in V$  ist

- $x \perp y \iff y \perp x$
- $x \perp 0$
- $x \perp x \iff x = 0$

*Beweis.* klar □

### Satz 4.3

Für  $U \subseteq V$  ist  $U^\perp$  ein Untervektorraum von  $V$  mit  $U \perp U^\perp$  und  $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$ .

*Beweis.* Linearität des Skalarprodukts im ersten Argument liefert, dass  $U^\perp$  ein Untervektorraum ist. Die Aussage  $U^\perp \perp U$  ist trivial,  $U \perp U^\perp$  folgt dann aus Lemma 4.2. Ist  $u \in U \cap U^\perp$ , so ist insbesondere  $u \perp u$ , also  $u = 0$  nach Lemma 4.2. □

### Definition 4.4 (orthonormal)

Eine Familie  $(x_i)_{i \in I}$  von Elementen von  $V$  ist orthogonal, wenn  $x_i \perp x_j$  für alle  $i \neq j$ , und orthonormal, wenn zusätzlich  $\|x_i\| = 1$  für alle  $i$ . Eine orthogonale Basis nennt man eine Orthogonalbasis, eine orthonormale Basis nennt man eine Orthonormalbasis.

### ► Bemerkung 4.5

Eine Basis  $B$  ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die darstellende Matrix des Skalarprodukts bezüglich  $B$  die Einheitsmatrix ist. (Beispiel: Standardbasis des Standardraum bezüglich des Standardskalarprodukts)

### Lemma 4.6

Ist die Familie  $(x_i)_{i \in I}$  orthogonal und  $x_i \neq 0$  für alle  $i \in I$ , so ist  $(x_i)_{i \in I}$  linear unabhängig.

*Beweis.* Ist  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ ,  $\lambda_i \in K$ , fast alle gleich 0, so ist  $0 = \langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, x_j \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle$ . Aus  $x_j \neq 0$  folgt  $\langle x_j, x_j \rangle > 0$  und somit  $\lambda_j = 0$  für jedes  $j \in I$ . □

**Lemma 4.7**

Ist  $(x_i)_{i \in I}$  orthogonal und  $x_i \neq 0$  für alle  $i$ , so ist  $(y_i)_{i \in I}$  mit

$$y_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

orthonormal.

*Beweis.* Für alle  $i$  ist  $\langle y_i, y_i \rangle = \frac{1}{\|x_i\|^2} \langle x_i, x_i \rangle = 1$ .

Für alle  $i \neq j$  ist  $\langle y_i, y_j \rangle = \frac{1}{\|x_i\| \cdot \|x_j\|} \langle x_i, x_j \rangle = 0$ . □

**Satz 4.8**

Sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum und  $B = (x_1, \dots, x_k)$  eine Orthonormalbasis von  $U$ . Es gibt genau einen Epimorphismus  $\text{pr}_U : V \rightarrow U$  mit  $\text{pr}_U|_U = \text{id}_U$  und  $\text{Ker}(\text{pr}_U) \perp U$ , insbesondere also  $x - \text{pr}_U x \perp U$  für alle  $x \in V$ , genannt die orthogonale Projektion auf  $U$ , und dieser ist gegeben durch

$$x \mapsto \sum_{i=1}^k \langle x, x_i \rangle x_i \quad (1)$$

*Beweis.* Sei zunächst  $\text{pr}_U$  durch (1) gegeben. Die Linearität von  $\text{pr}_U$  folgt aus (S1) und (S3). Für  $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in U$  ist  $\langle u, x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j$ , woraus  $\text{pr}_U(u) = u$ . Somit ist  $\text{pr}_U|_U = \text{id}_U$ , und insbesondere ist  $\text{pr}_U$  surjektiv. Ist  $\text{pr}_U(x) = 0$ , so ist  $\langle x, x_i \rangle = 0$  für alle  $i$ , woraus mit (S2) und (S4) sofort  $x \perp U$  folgt. Somit ist  $\text{Ker}(\text{pr}_U) \perp U$ .

Für  $x \in V$  ist  $\text{pr}_U(x - \text{pr}_U(x)) = \text{pr}_U(x) - \text{pr}_U(\text{pr}_U(x)) = \text{pr}_U(x) - \text{pr}_U(x) = 0$ , also  $x - \text{pr}_U(x) \in \text{Ker}(\text{pr}_U) \subseteq U^\perp$ . Ist  $f : V \rightarrow U$  ein weiterer Epimorphismus mit  $f|_U = \text{id}_U$  und  $\text{Ker}(f) \perp U$ , so ist

$$\underbrace{\text{pr}_U(x)}_{\in U} - \underbrace{f(x)}_{\in U} = \underbrace{\text{pr}_U(x) - x}_{\in U^\perp} - \underbrace{f(x) - x}_{\in U^\perp} \in U \cap U^\perp = \{0\}$$

für jedes  $x \in V$ , somit  $f = \text{pr}_U$ . □

**Theorem 4.9 (Gram-Schmidt-Verfahren)**

Ist  $(x_1, \dots, x_n)$  eine Basis von  $V$  und  $k \leq n$  mit  $(x_1, \dots, x_k)$  orthonormal, so gibt es eine Orthonormalbasis  $(y_1, \dots, y_n)$  von  $V$  mit  $y_i = x_i$  für  $i = 1, \dots, k$  und  $\text{span}_K(y_1, \dots, y_l) = \text{span}_K(x_1, \dots, x_l)$  für  $l = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* Induktion nach  $d = n - k$ .

$d = 0$ : nichts zu zeigen

$d - 1 \rightarrow d$ : Für  $i \neq k + 1$  definiere  $y_i = x_i$ . Sei  $U = \text{span}_K(x_1, \dots, x_k)$ ,  $\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} - \text{pr}_U(x_{k+1})$ . Dann ist  $\tilde{x}_{k+1} \in \text{Ker}(\text{pr}_U) \subseteq U^\perp$  (vgl. Satz 4.8) und  $\text{span}_K(x_1, \dots, x_k, \tilde{x}_{k+1}) = \text{span}_K(x_1, \dots, x_{k+1})$ . Setze  $y_{k+1} = \frac{1}{\|\tilde{x}_{k+1}\|} \tilde{x}_{k+1}$ . Dann ist  $(y_1, \dots, y_n)$  eine Basis von  $V$  mit  $(y_1, \dots, y_{k+1})$  orthonormal (vgl. Lemma 4.7). Nach Induktionshypothese gibt es eine Orthonormalbasis von  $V$ , die das Gewünschte leistet. □

**Folgerung 4.10**

Jeder endlichdimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum  $V$  besitzt eine Orthonormalbasis.

*Beweis.* Wähle irgendeine Basis von  $V$  und wende Theorem 4.9 mit  $k = 0$  an. □

**Folgerung 4.11**

Ist  $U$  ein Untervektorraum von  $V$ , so ist  $V = U \oplus U^\perp$  und  $(U^\perp)^\perp = U$ .

*Beweis.* Wähle eine Orthonormalbasis von  $U$  (vgl. Folgerung 4.10),  $B = (x_1, \dots, x_k)$  und ergänze diese zu einer Orthonormalbasis  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $V$  (vgl. Theorem 4.9). Dann sind  $x_{k+1}, \dots, x_n \in U^\perp$ , da  $U \cap U^\perp = \{0\}$  ist somit  $V = U \oplus U^\perp$ . Insbesondere ist  $\dim_K(U^\perp) = n - \dim_K(U)$ , woraus  $\dim_K((U^\perp)^\perp) = \dim_K(U)$  folgt. Zusammen mit der trivialen Inklusion  $U \subseteq (U^\perp)^\perp$  folgt  $U = (U^\perp)^\perp$ .  $\square$

**Folgerung 4.12**

Ist  $s$  eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf  $V$  und  $B$  eine Basis von  $V$ , so ist

$$\det(M_B(s)) \in \mathbb{R}_{>0}$$

*Beweis.* Wähle eine Orthonormalbasis  $B'$  von  $V$  bezüglich  $s$ . Dann ist  $M_{B'}(s) = \mathbb{1}_n$ , folglich

$$\begin{aligned} \det(M_B(s)) &= \det\left((T_{B'}^B)^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{T_{B'}^B}\right) \\ &= \det\left((T_{B'}^B)^t\right) \cdot \det\left(\overline{T_{B'}^B}\right) \\ &= \det\left(T_{B'}^B\right) \cdot \overline{\det\left(T_{B'}^B\right)} \\ &= |\det\left(T_{B'}^B\right)|^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

 $\square$

## 5. Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Sei  $V$  ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und  $f \in \text{End}_K(V)$ .

**Definition 5.1 (orthogonale, unitäre Endomorphismen)**

$f$  ist orthogonal bzw. unitär, wenn

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

### Satz 5.2

Ist  $f$  unitär, so gelten

- Für  $x \in V$  ist  $\|f(x)\| = \|x\|$ .
- Sind  $x, y \in V$  mit  $x \perp y$ , so ist  $f(x) \perp f(y)$ .
- Es ist  $f \in \text{Aut}_K(V)$  und auch  $f^{-1}$  ist unitär.
- Das Bild einer Orthonormalbasis unter  $f$  ist eine Orthonormalbasis.
- Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von  $f$ , so ist  $|\lambda| = 1$ .

*Beweis.* • klar

• klar

•  $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$ , also ist  $f$  injektiv, somit  $f \in \text{Aut}_K(V)$  und

$$\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y) \rangle \stackrel{f \text{ unitär}}{=} \langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y)) \rangle = \langle x, y \rangle$$

• Folgt aus 1, 2 und 3

• Ist  $f(x) = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ , so ist

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

□

### Satz 5.3

Ist  $\|f(x)\| = \|x\|$  für alle  $x \in V$ , so ist  $f$  unitär.

*Beweis.* Aus  $\|f(x)\| = \|x\|$  folgt  $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$ . Die Polarisierung (Satz 3.4) für  $\langle f(x), f(y) \rangle$  und die Linearität von  $f$  liefern  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ . Zum Beispiel im Fall  $K = \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} \left( \left\langle \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)}, \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)} \right\rangle - \langle f(x), f(x) \rangle - \langle f(y), f(y) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle) \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

□

**Definition 5.4 (orthogonale, unitäre Matrizen)**

Eine Matrix  $A \in \text{Mat}_n(K)$  heißt orthogonal bzw. unitär, wenn

$$A^* A = \mathbb{1}_n$$

**► Bemerkung 5.5**

Offenbar ist  $A$  genau dann unitär, wenn  $A^*$  das Inverse zu  $A$  ist. Die folgenden Bedingungen sind daher äquivalent dazu, dass  $A$  unitär ist:

$$AA^* = \mathbb{1}_n, \overline{A}A^t = \mathbb{1}_n, A^t \overline{A} = \mathbb{1}_n, A^t = \overline{A^{-1}}$$

**Satz 5.6**

Sei  $B$  eine Orthogonalbasis von  $V$ . Genau dann ist  $f$  unitär, wenn  $M_B(f)$  unitär ist.

*Beweis.* Sei  $A = M_B(f)$ ,  $v = \Phi_B(x)$ ,  $\Phi_B(y)$ . Dann ist  $\langle v, w \rangle = x^t \underbrace{M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle)}_{=1} \cdot \overline{y} = x^t \cdot \overline{y}$ . Somit ist  $f$  genau dann unitär, wenn  $(Ax)^t \overline{Ay} = x^t \overline{y}$  für alle  $x, y \in K^n$ , also wenn  $A^t \overline{A} = \mathbb{1}$ , d.h.  $A$  unitär.  $\square$

**Satz 5.7**

Die folgenden Mengen bilden Untergruppen der  $\text{GL}_n(K)$ .

- $O_n = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}$  die orthogonale Gruppe
- $SO_n = \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\}$  die spezielle orthogonale Gruppe
- $U_n = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\}$  die unitäre Gruppe
- $SU_n = \{A \in U_n \mid \det(A) = 1\}$  die spezielle unitäre Gruppe

*Beweis.* z.B. für  $U_n$ : Sind  $A^{-1} = A^*$ ,  $B^{-1} = B^*$ , so ist  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$ ,  $(A^{-1})^{-1} = A = (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$   $\square$

**Satz 5.8**

Genau dann ist  $A \in \text{Mat}_n(K)$  unitär, wenn die Spalten (oder die Zeilen) von  $A$  eine Orthonormalbasis des  $K^n$  bilden.

*Beweis.* Sei  $s$  das Standardskalarprodukt und  $B = (a_1, \dots, a_n)$ . Nach Bemerkung 4.5 ist  $B$  genau dann eine Orthonormalbasis, wenn  $M_B(s) = \mathbb{1}_n$ , und  $M_B(s) = A^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{A}$ , vgl. Beispiel 2.9  $\square$

**Theorem 5.9**

Sei  $K = \mathbb{C}$  und  $f \in \text{End}_K(V)$ . Ist  $f$  unitär, so besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $f$ .

*Beweis.* Induktion über  $n = \dim_K(V)$ .

$n = 0$ : klar

$n - 1 \rightarrow n$ : Da  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, hat  $\chi_f$  eine Nullstelle  $\lambda$ , es gibt also einen Eigenvektor  $x_1$  von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Ohne Einschränkung nehmen wir  $\|x\| = 1$  an. Sei  $W = K \cdot x_1$ . Nach Folgerung 4.11 ist dann

$V = W \oplus W^\perp$ . Für  $v \in W^\perp, w \in W$  ist

$$0 = \langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \bar{\lambda} \langle f(v), w \rangle$$

da  $\lambda \neq 0$  ( $f$  unitär) also  $f(W^\perp) \perp W$ . Somit ist  $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$ , d.h.  $W^\perp$  ist  $f$ -invariant. Da auch  $f|_{W^\perp}$  unitär ist, gibt es nach Induktionshypothese eine Orthonormalbasis  $(x_1, \dots, x_n)$  aus Eigenvektoren von  $f|_{W^\perp}$ . Da  $V = W \oplus W^\perp$  und  $W \perp W^\perp$  ist  $(x_1, \dots, x_n)$  eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .  $\square$

### Folgerung 5.10

Jeder unitäre Endomorphismus eines unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

### Folgerung 5.11

Zu jeder  $A \in U_n$  gibt es  $S \in U_n$  so, dass

$$S^* A S = S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit  $|\lambda_i| = 1$  für  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* Da  $A$  unitär ist, ist  $f_A \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$  unitär, nach Theorem 5.9 existiert also eine Orthonormalbasis  $B$  des  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Die Transformationsmatrix  $S = T_{\mathcal{E}}^B$  hat als Spalten die Elemente von  $B$  und somit ist  $S$  nach Satz 5.8 unitär. Nach Satz 5.2 ist  $|\lambda| = 1$  für alle Eigenwerte von  $f_A$ .  $\square$

### ► Bemerkung 5.12

Dies (Theorem 5.9) gilt nicht im Fall  $K = \mathbb{R}$ . Man kann aber auch orthogonale Endomorphismen immer “fast diagonalisieren“.

## 6. Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei  $V$  ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und  $f \in \text{End}_K(V)$ .

**Definition 6.1 (selbstadjungiert)**

$f$  ist selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

**Satz 6.2**

Sei  $B$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Genau dann ist  $f$  selbstadjungiert, wenn  $M_B(f)$  hermitesch ist.

*Beweis.* Seien  $A = M_B(f)$ ,  $v = \Phi_B(x)$ ,  $w = \Phi_B(y)$ . Es ist

$$\begin{aligned} \langle f(v), w \rangle &= (Ax)^t \bar{y} = x^t A^t \bar{y} \\ \langle v, f(w) \rangle &= x^t \overline{Ay} = x^t \bar{A} \bar{y} \end{aligned}$$

Somit ist  $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$  genau dann, wenn  $A^t = \bar{A}$ , d.h.  $A = A^*$ , also  $A$  hermitesch.  $\square$

**Lemma 6.3**

Ist  $f$  selbstadjungiert und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $f$ , so ist  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Ist  $0 \neq x \in V$  mit  $f(x) = \lambda x$ , so ist

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle f(x), x \rangle = \langle x, f(x) \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

und mit  $\langle x, x \rangle \neq 0$  folgt  $\lambda = \bar{\lambda}$ , also  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Satz 6.4**

Ist  $f$  selbstadjungiert, so ist  $\chi_f \in \mathbb{R}[t]$  und  $\chi_f$  zerfällt über  $\mathbb{R}$  in Linearfaktoren.

*Beweis.* Sei  $B$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Nach Satz 6.2 ist  $A = M_B(f) \in \text{Mat}_n(K) \subseteq \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  hermitesch. Da  $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $\chi_f(t) \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Nach Lemma 6.3 ist aber schon  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Somit zerfällt  $\chi_f \chi_A \in \mathbb{R}[t]$  über  $\mathbb{R}$  in Linearfaktoren.  $\square$

**Theorem 6.5**

Ist  $f$  selbstadjungiert, so besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $f$ .

*Beweis.* Induktion über  $n = \dim_K(V)$ .

$n = 0$ : klar

$n - 1 \rightarrow n$ : Nach Satz 6.4 hat  $f$  einen reellen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wähle  $x_1 \in V$  mit  $f(x_1) = \lambda x_1$  und  $\|x_1\| = 1$ . Sei  $W = K \cdot x_1$ . Für  $y \in W^\perp$  ist

$$\langle x_1, f(y) \rangle = \langle f(x_1), y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle = 0$$



und folglich ist  $W^\perp$   $f$ -invariant. Nach Folgerung 4.11 ist  $V = W \oplus W^\perp$  und  $f|_{W^\perp}$  ist wieder selbstadjungiert. Nach Induktionshypothese hat  $W^\perp$  eine Orthonormalbasis  $(x_1, \dots, x_n)$  aus Eigenvektoren von  $f|_{W^\perp}$ . Da  $V = W \oplus W^\perp$  und  $W \perp W^\perp$  ist  $(x_1, \dots, x_n)$  eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .  $\square$

### Folgerung 6.6

Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines euklidischen oder unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

### Folgerung 6.7

Ist

- $f$  selbstadjungiert ( $K = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ )
- $f$  unitär ( $K = \mathbb{C}$ )

so ist

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

eine Zerlegung von  $V$  in paarweise orthogonale Untervektorräume.

*Beweis.* Nach Theorem 5.9 bzw. Theorem 6.5 existiert eine Orthonormalbasis  $B$  aus Eigenvektoren. Insbesondere ist  $f$  diagonalisierbar, also

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

Zu jedem  $\lambda$  gibt es eine Teilfamilie von  $B$  die eine Basis von  $\text{Eig}(f, \lambda)$  bildet. Da  $B$  eine Orthonormalbasis ist, folgt, dass die Eigenräume paarweise orthogonal sind.  $\square$

### ► Bemerkung 6.8

Um eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren wie in Theorem 5.9 oder Theorem 6.5 zu bestimmen, kann man entweder wie im Induktionsbeweis vorgehen, oder man bestimmt zunächst Basen  $B$  von  $\text{Eig}(f, \lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  und orthonormalisiert diese mit Theorem 4.9 zu Basen  $B'$ . Nach Folgerung 6.7 ist  $\bigcup B'$  dann eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .

## 7. Hauptachsentransformation

Sei  $V$  ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und  $s$  eine hermitesche Sesquilinearform auf  $V$ .

### Satz 7.1

Zu  $A \in \text{Mat}_n(K)$  hermitesch gibt es  $S \in U_n(K)$  so, dass

$$S^*AS = S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Da  $A$  hermitesch ist, ist  $f_A \in \text{End}_K(K^n)$  selbstadjungiert, es gibt also nach Theorem 6.5 also eine Orthonormalbasis  $B = (x_1, \dots, x_n)$  aus Eigenvektoren von  $f_A$ . Die Transformationsmatrix  $S = T_{\mathcal{E}}^B$  hat  $x_1, \dots, x_n$  als Spalten und ist somit nach Satz 5.8 unitär. Nach Lemma 6.3 sind die Eigenvektoren  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  reell.  $\square$

### Folgerung 7.2

Sei  $A \in \text{Mat}_n(K)$  hermitesch. Genau dann ist  $A$  positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

*Beweis.* Nach Satz 7.1 existiert  $S \in U_n(K)$  mit

$$S^*AS = S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind die Eigenwerte von  $S^{-1}AS$  (LAAG 1.5.1.11), also  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Sei  $T = \bar{S}$ . Genau dann ist  $A$  positiv definit, wenn  $T^t A \bar{T} = S^*AS = D$  positiv definit ist (Satz 2.8), also wenn  $\lambda_i > 0$ .  $\square$

### Theorem 7.3 (Hauptachsentransformation)

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $s$  auf  $V$  gibt es eine Orthonormalbasis  $B$  von  $V$ , für die

$$M_B(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

*Beweis.* Sei  $B_0 = (x_1, \dots, x_n)$  eine Orthonormalbasis von  $V$  und  $A = M_{B_0}(s)$ . Da  $s$  hermitesch ist, ist auch  $A$  hermitesch (Satz 2.13). Nach Satz 7.1 gibt es deshalb  $S \in U_n(K)$  mit  $S^*AS = D$  eine reelle Diagonalmatrix. Ist nun  $f \in \text{End}_K(V)$  mit  $M_{B_0}(f) = \bar{S}$ , so ist auch  $B = (f(x_1), \dots, f(x_n))$  eine Basis von  $V$  mit  $T_{B_0}^B = \bar{S}$  unitär. Da  $M_{B_0}(f)$  unitär ist, ist auch  $f$  unitär. Nach Satz 5.2 ist  $f(B_0) = B$  somit auch eine Orthonormalbasis. Nach Satz 2.8 ist

$$M_B(s) = (T_{B_0}^B)^t \cdot M_{B_0}(s) \cdot \overline{T_{B_0}^B} = S^*AS = D$$

$\square$

### ■ Beispiel 7.4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, s = s_A, K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow q_s(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

Wie verhält sich  $q_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ? Wie sehen die "Höhenlinien"

$$H_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_s(x) = c\} \quad c \in \mathbb{R}$$

aus?

$$\begin{aligned}\chi_A &= (t-2)^2 - 1 = (t-1)(t-3) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \\ &\Rightarrow B = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\Rightarrow M_B(s) = \text{diag}(3, 1)\end{aligned}$$

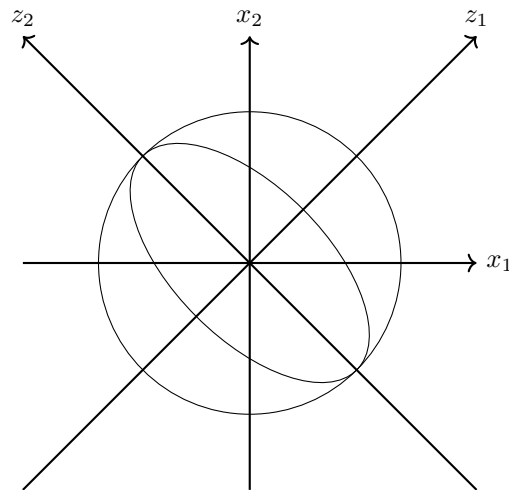
Im neuen Koordinatensystem  $z = \Phi_B^{-1}(x)$  ist dann

$$q_s(z) = 3z_1^2 + z_2^2$$

Mit  $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $a_2 = 1$  erhält man "Höhenlinien" der Form

$$\left( \frac{z_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{z_2}{a_2} \right)^2 = c$$

was für  $c > 0$  eine Ellipse beschreibt.



### Folgerung 7.5

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform  $s$  auf  $V$  gibt es eine Basis  $B$  von  $V$ , für die

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{r_+(s)} & & \\ & -\mathbb{1}_{r_-(s)} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $r_+(s) + r_-(s) \leq n$ .

*Beweis.* Sei  $B_0 = (x_1, \dots, x_n)$  eine Orthonormalbasis von  $V$  mit  $A = M_{B_0}(s) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Setze

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i \neq 0 \\ 1 & \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Sei  $x'_i = \mu_i \cdot x_i$  und  $B' = (x'_1, \dots, x'_n)$ . Dann ist  $M_B(s) = S^t A \bar{S}$  mit  $S = T_{B_0}^{B'} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  also  $M_{B'}(s) = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$  mit  $\lambda'_i = \mu_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\mu_i} = \mu_i^2 \lambda_i \in \{0, 1, -1\}$ . Durch Permutation der Elemente von  $B'$  erhält man die gewünschte Basis  $B$ .  $\square$

**Definition 7.6 (Ausartungsraum)**

Der Ausartungsraum von  $s$  ist

$$V_0 = \{x \in V \mid s(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\}$$

**Lemma 7.7**

$V_0$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .

*Beweis.* Klar aus Linearität im ersten Argument.  $\square$

**Lemma 7.8**

Seien  $V_+$  und  $V_-$  Untervektorräume von  $V$  mit  $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$  und  $s$  positiv definit auf  $V_+$ ,  $-s$  positiv definit auf  $V_-$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \dim_K(V_+) &= \max\{\dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, s \text{ positiv definit auf } W\} \\ \dim_K(V_-) &= \max\{\dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, -s \text{ positiv definit auf } W\} \end{aligned}$$

*Beweis.* Beweis nur für  $V_+$ , analog für  $V_-$ .

$\leq$ : klar

$\geq$ : Ist  $W \leq V$  Untervektorraum mit  $s(x, x) > 0 \quad \forall x \in W \setminus \{0\}$ , so ist  $W \cap (V_- \oplus V_0) = \{0\}$ . Ist  $x = y + z$  mit  $y \in V_-$ ,  $z \in V_0$ , so ist  $s(x, x) = s(y + z, y + z) = \underbrace{s(y, y)}_{\leq 0} + \underbrace{s(y, z) + s(z, y) + s(z, z)}_{=0} \leq 0 \Rightarrow \dim_K(W) \leq$

$$\dim_K(V) - \dim_K(V_-) - \dim_K(V_0) = \dim_K(V_+).$$

$\square$

**Theorem 7.9 (Trägheitssatz von Sylvester)**

Für eine hermitesche Sesquilinearform  $s$  auf  $V$  sind die Zahlen  $r_+(s)$ ,  $r_-(s)$  aus Folgerung 7.5 eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Sei  $B$  eine Basis von  $V$  wie in Folgerung 7.5,  $B = (x_1, \dots, x_n)$ . Definiere

$$\begin{aligned} V_+ &= \text{span}_K(x_1, \dots, x_{r_+(s)}) \\ V_- &= \text{span}_K(x_{r_+(s)+1}, \dots, x_{r_+(s)+r_-(s)}) \\ V'_0 &= \text{span}_K(x_{r_+(s)+r_-(s)+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Dann ist  $s$  positiv definit auf  $V_+$ ,  $-s$  positiv definit auf  $V_-$  und  $V = V_+ \oplus V_- \oplus V'_0$ . Es gilt  $V'_0 = V_0$

$\subseteq$ : klar

$\supseteq$ : Ist  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in V_0$ , so ist  $0 = s(x, x_i) = \lambda_i \cdot s(x_i, x_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  also  $\lambda_i = 0$  für  $i = 1, \dots, r_+(s) + r_-(s)$ , d.h.  $x \in V'_0$ . Nach Lemma 7.8 ist  $r_+(s) = \dim_K(V_+)$  nur von  $s$  abhängig, analog für  $r_-(s)$ .  $\square$

**Definition 7.10 (Signatur)**

Die Signatur von  $s$  ist das Tripel

$$(r_+(s), r_-(s), r_0(s))$$

wobei  $r_0(s) = \dim_K(V_0)$ .

**Folgerung 7.11**

Ist  $s$  eine hermitesche Form auf  $V$  und  $B$  eine Basis von  $V$ , so ist die Zahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte von  $M_B(s)$  gleich  $r_+(s)$  bzw.  $r_-(s)$ , insbesondere also unabhängig von  $B$ .

*Beweis.* Sei  $A = M_B(s)$ . Nach Satz 7.1 gibt es  $S \in U_n(K)$  mit  $S^*AS$  eine reelle Diagonalmatrix. Da  $S^* = S^{-1}$  haben  $A$  und  $S^*AS$  die selben Eigenwerte. Bringt man  $S^*AS$  nun in die Form in Folgerung 7.5, so ändern sich die Vorzeichen der Diagonale nicht mehr.  $\square$

## 8. Quadriken

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

### Definition 8.1 (Quadrik)

Eine Quadrik ist eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  mit

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x + 2b^t x + c = 0\}$$

mit  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  symmetrisch,  $b^t \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$ .

### ► Bemerkung 8.2

- $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0\}$  also  $Q$  ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in  $x_1, \dots, x_n$
- $Q$  bestimmt  $A, b, c$  nicht eindeutig, da  $Q(A, b, c) = Q(\lambda A, \lambda b, \lambda c)$
- Man kann  $A, b, c$  so normieren, dass  $c = 0$  oder  $c = 1$

### ► Bemerkung 8.3

Seien  $A, b, c$  wie in Definition 8.1, so schreiben wir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\}$ . Wir schreiben  $(A, b)$  für

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n, n+1}(\mathbb{R})$$

Es gilt  $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(A, b) \leq \text{rk}(\tilde{A})$ .

### ► Bemerkung 8.4 (Wiederholung)

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume.  $f : V \rightarrow W$  heißt affin, wenn  $\exists g \in \text{Hom}_K(V, W)$  mit  $f(v) = g(v) + w_0$   $\forall v \in V$ . Ist  $f$  affin und bijektiv, so ist  $f^{-1}$  affin, d.h.  $\text{Aff}_K(V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ affin und bijektiv}\}$ .  
Im Fall von  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $K = \mathbb{R}$  ist

$$\text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{f = \tau_z \circ f_T \mid T \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}^n\}$$

mit  $f_T(x) = Tx$  und  $\tau_z(x) = x + z$ .

### Lemma 8.5

Ist  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Quadrik, so ist  $f(Q)$  eine Quadrik, für  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ .

*Beweis.*  $f = \tau_z \circ f_T$  mit  $T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  und  $z \in \mathbb{R}^n$ . Schreibe  $S = T^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Es gilt  $\tilde{S}\tilde{x} = \widetilde{Sx}$ .

$$\begin{aligned} f_T(Q) &= \{Tx \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\tilde{S}\tilde{y})^t \tilde{A} \tilde{S}\tilde{y} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{\tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S}}_{\begin{pmatrix} S^t A S & S^t b \\ b^t S & c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\} \end{aligned}$$

Jetzt für  $\tau_z$ . Sei  $U_z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $U_z \tilde{x} = \tilde{\tau}_z(x)$ . Man folgert analog, dass

$$\tau_z(Q) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{U_z^t \tilde{A} U_z}_{\begin{pmatrix} A & Az + b \\ z^t A + b & z^t Az + b^t z + z^t b + c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\} \quad \square$$

### Definition 8.6 (Typen von Quadriken)

Sei  $Q$  gegeben durch  $(A, b, c)$  wie in Definition 8.1.  $Q$  heißt

- vom kegeligen Typ, wenn  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A, b) = \text{rk}(\tilde{A})$
- eine Mittelpunktsquadratik, wenn  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A, b) < \text{rk}(\tilde{A})$
- vom parabolischen Typ, wenn  $\text{rk}(A) < \text{rk}(A, b)$
- ausgeartet, wenn  $\det(\tilde{A}) = 0$

### Lemma 8.7

Ist  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Quadrik,  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ . Von dem Typ, von dem  $Q$  ist, ist auch  $f(Q)$ .

*Beweis.*  $f = f_{S^{-1}}$ ,  $S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Da  $\tilde{S}$  invertierbar ist, ist  $\text{rk}(\tilde{A}) = \text{rk}(\tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S})$ , analog auch  $\text{rk}(S^t A S) = \text{rk}(A)$ .

$(S^t A S, S^t b) = S^t(A, b) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk}(S^t A S, S^t b) = \text{rk}(A, b)$ . Für  $f = \tau_z$  analog.  $\square$

### Definition 8.8 (Isometrie)

Eine Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  ist  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$f(x) = Ax + b$$

mit  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  ist orthogonal.

### ► Bemerkung 8.9

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine Isometrie genau dann, wenn  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Theorem 8.10 (Klassifikation der Quadriken bis auf Isometrien)**

Sei  $Q$  eine Quadrik. Es gibt eine Isometrie  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$  mit  $f(Q)$ , die eine der folgenden Formen annimmt:

- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 = 0 \right\} \quad k \geq r - k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 - \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{x_i}{a_i} \right)^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r - k, r < n$

mit  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $0 \leq k \leq r \leq n$

*Beweis.* Sei  $Q$  gegeben durch  $(A, b, c)$ . Nach Satz 7.1 gibt es eine orthogonale Matrix  $S \in O_n$  mit  $S^t S A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Indem wir  $Q$  durch  $f_{S^{-1}}(Q)$  ersetzen, können wir also ohne Einschränkung annehmen, dass  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Ohne Einschränkung ist weiter  $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  und  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_r < 0$  und  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0$ . Dann ist  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  eine Orthonormalbasis des Ausartungsraums  $V_0$  von  $s_A$ .

Wenn wir  $Q$  durch  $\tau_z(Q)$  ersetzen, wird  $b$  durch  $Az + b$  ersetzt, wir können deshalb ohne Einschränkung annehmen, dass  $b \in V_0$ . Ist  $n > r$ , also  $V_0 \neq \{0\}$ , so können wir eine Orthonormalbasis  $(v_{r+1}, \dots, v_n)$  von  $V_0$  mit  $b \in \text{span}_{\mathbb{R}}(v_{r+1})$  wählen.

Indem wir  $Q$  durch  $f_{S^{-1}}(Q)$  mit  $S = (e_1, \dots, e_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$  ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $b = \mu \cdot e_{r+1}$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Ist nun  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A, b)$ , so gibt es  $z$  mit  $Az = -b$ , und indem wir  $Q$  durch  $\tau_z(Q)$  ersetzen, können wir annehmen, dass  $b = 0$ .

- Im Fall  $c = 0$  setzt man  $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$  und ersetzt gegebenenfalls  $(A, b, c)$  mit  $(-A, -b, -c)$ , um Form 1 zu erhalten.
- Im Fall  $c \neq 0$  ersetzt man  $(A, b, c)$  durch  $(-\frac{1}{c}A, -\frac{1}{c}b, -1)$  und setzt dann  $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ , um Form 2 zu erhalten.
- Ist  $\text{rk}(A) < \text{rk}(A, b)$ , so ist insbesondere  $r < n$  und  $\mu \neq 0$ . Nun ersetzen wir  $Q$  durch  $\tau_z(Q)$  mit  $z = -\frac{c}{2\mu} \cdot e_{r+1}$  und können somit auch wieder  $c = 0$  annehmen. Ersetzt man  $(A, b, 0)$  durch  $(-\frac{1}{\mu}A, -1, 0)$  und setzt wieder  $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ , so erhält man Form 3. (Ist  $k < r - k$ , so ersetzt man weiter  $Q$  durch  $f_{-1_n}(Q)$  und  $(A, b, 0)$  durch  $(-A, -b, 0)$ .)  $\square$

**Folgerung 8.11**

Sei  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Quadrik. Es gibt eine invertierbare affine Abbildung  $f \in \text{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$  für die  $f(Q)$  eine der folgenden 3 Formen annimmt:

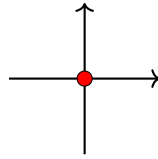
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^r x_i^2 = 0 \right\} \quad k \geq r - k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^r x_i^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^r x_i^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r - k, r < n$

**■ Beispiel 8.12**

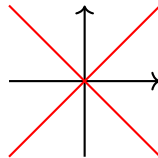
$Q \subseteq \mathbb{R}^2$



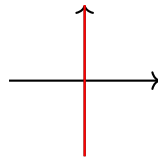
- $k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 0 \right\}$



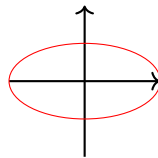
- $k = 1, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 0 \right\}$



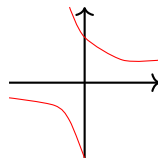
- $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 = 0 \right\}$



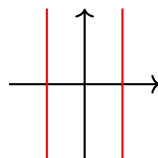
- $k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\}$



- $k = 1, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\}$



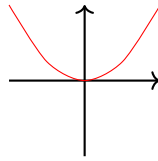
- $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 = 1 \right\}$



- $k = 0, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid - \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\} = \emptyset$

- $k = 0, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid - \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{x_2}{a_2} \right)^2 = 1 \right\} = \emptyset$

$$\bullet \quad k=1, r=1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{a_1} \right)^2 - 2x_2 = 0 \right\}$$



► **Bemerkung 8.13**

- Ist  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  eine Quadrik,  $U \subseteq V$  affiner Untervektorraum, so ist  $Q \cap U$  eine Quadrik in dem Sinne, dass  $\exists f$  Isometrie :  $f(U) = \mathbb{R}^k$  und  $f(Q \cap U)$  ist eine Quadrik.
- Ebene Quadriken sind im wesentlichen Kegelschnitte,  $Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ , außer 2c und 2d in Beispiel 8.12

► **Bemerkung 8.14**

Die Situation wird deutlich übersichtlicher, wenn man den affinen Raum  $\mathbb{R}^n$  durch Hinzunahme von Punkten im Unendlichen zum projektiven Raum  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  vervollständigt und den Abschluss der Quadriken darin betrachtet. Es stellt sich dann heraus, dass vom projektiven Standpunkt aus die meisten ebenen Quadriken ähnlich aussehen. (Siehe Vorlesung *Elementare Algebraische Geometrie*)

## Kapitel III

# Dualität

### 1. Das Lemma von Zorn

Sei  $K$  ein Körper und  $U, V, W$  seien  $K$ -Vektorräume. Zudem sei  $X$  eine Menge.

#### Definition 1.1 (Relation)

Eine Relation ist eine Teilmenge  $R \subseteq X \times X$ . Man schreibt  $(x, x') \in R$  als  $xRx'$ .  $R$  heißt

- reflexiv, wenn  $\forall x \in X: xRx$
- transitiv, wenn  $\forall x, y, z \in X: xRy$  und  $yRz \Rightarrow xRz$
- symmetrisch, wenn  $\forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$
- antisymmetrisch, wenn  $\forall x, y \in X: xRy$  und  $yRx \Rightarrow y = x$
- total, wenn  $\forall x, y \in X: (x, y) \notin R \Rightarrow (y, x) \in R$

#### ■ Beispiel 1.2 (Äquivalenzrelation)

Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation. Wir haben schon verschiedene Äquivalenzrelationen kennengelernt: Isomorphie von  $K$ -Vektorräumen und Ähnlichkeit von Matrizen.

#### Definition 1.3 (Halbordnung)

Eine Halbordnung (oder partielle Ordnung) ist eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation  $\leq$ . Eine totale Halbordnung heißt Totalordnung oder lineare Ordnung. Man schreibt  $x < y$  für  $x \leq y \wedge x \neq y$ .

#### ■ Beispiel 1.4

1. Die natürliche Ordnung  $\leq$  auf  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{N}$  ist eine  $\mathbb{Z}$  Totalordnung.
2. Teilbarkeit  $|$  ist eine Halbordnung auf  $\mathbb{N}$ , aber Teilbarkeit ist keine Halbordnung auf  $\mathbb{Z}$ , da  $1|-1$  und  $-1|1$ , aber  $1 \neq -1$ !
3.  $\mathcal{P}(X)$  ist die Potenzmenge. " $\subseteq$ " ist eine Halbordnung auf  $\mathcal{P}$ , aber für  $|X| > 1$  ist " $\subseteq$ " keine Totalordnung.
4. Sei  $(X, \leq)$  eine Halbordnung, sei  $Y \subseteq X$ , so ist  $(Y, \subseteq|_Y)$  eine Halbordnung.

**Definition 1.5 (Kette)**

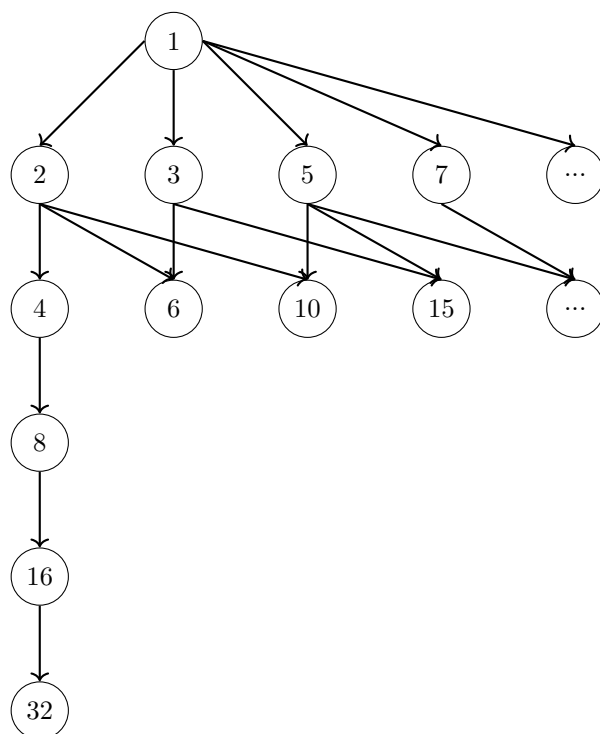
Sei  $(X, \leq)$  eine Halbordnung,  $Y \subseteq X$ .  $Y$  heißt Kette, wenn  $(Y, \leq|_Y)$  total ist.

$x \in Y$  heißt ein minimales Element von  $Y$ , wenn  $\forall x' \in Y: x < x'$ .

$x \in Y$  heißt untere Schranke von  $Y$ , wenn  $\forall y \in Y: y \geq x$ .

$x \in Y$  heißt kleinstes Element von  $Y$ , wenn  $x$  untere Schranke von  $Y$  ist.

Analog: maximales Element, obere Schranke, größtes Element.



$Y = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist eine Kette

**► Bemerkung 1.6**

- Hat  $Y$  ein kleinstes Element, so ist dies eindeutig bestimmt. Ein kleinstes Element ist minimal.
- Jede endliche Halbordnung hat minimale Elemente. Jede endliche Totalordnung hat ein kleinstes Element. Analog für maximale Elemente und größtes Element.

**■ Beispiel 1.7**

$(\mathbb{N}, \leq)$  hat als kleinstes Element die 1, aber kein größtes Element oder maximale Elemente.

**■ Beispiel 1.8**

$V = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathfrak{X}$  die Menge der Untervektorräume des  $\mathbb{R}^3$ .  $(\mathfrak{X}, \leq)$  ist eine Halbordnung auf  $Y \subseteq X$  mit  $Y = \{U \in \mathfrak{X} \mid \dim_{\mathbb{R}}(U) \leq 2\}$ .

- $Y$  hat ein kleinstes Element:  $\{0\}$ .
- Es gibt unendlich viele maximale Elemente in  $Y$ , nämlich die Untervektorräume von  $V$ , die die Dimension 2 haben. Es gibt also kein größtes Element.
- $V$  ist die obere Schranke von  $Y$ .

**Theorem 1.9 (Das Lemma von Zorn)**

Sei  $(X, \leq)$  eine Halbordnung, die nicht leer ist. Wenn jede Kette eine obere Schranke hat, dann hat  $X$  ein maximales Element.

*Beweis.* Das Lemma von Zorn hat axiomatischen Charakter - es ist äquivalent zum Auswahlaxiom, seine Gültigkeit ist somit abhängig von unseren grundlegenden mengentheoretischen Annahmen. Für einen Beweis des Lemmas von Zorn aus dem Auswahlaxiom siehe die Vorlesung *Mengenlehre*. Wir zeigen hier zumindest die andere Richtung, nämlich dass das Auswahlaxiom aus dem Lemma von Zorn folgt.  $\square$

**Folgerung 1.10 (Auswahlaxiom)**

Zu jeder Familie  $(x_i)$ , nicht leer, gibt es eine Auswahlfunktion, das heißt eine Abbildung:

$$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \text{ mit } f(i) \in X_i \quad \forall i$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{F}$  die Menge der Paare  $(J, f)$  bestehend aus einer Teilmenge  $J \subseteq I$  und einer Abbildung  $f : J \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$  mit  $f(i) \in X_i \quad \forall i \in J$ . Definieren wir  $(J, f) \leq (J', f') \iff J \subseteq J'$  und  $f'|_J = f$ , so ist  $\leq$  eine Halbordnung auf  $\mathcal{F}$ . Da  $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{F}$  ist  $\mathcal{F}$  nichtleer. Ist  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  eine nichtleere Kette, so wird auf  $J' := \bigcup_{(J, f) \in \mathcal{G}} J$  durch  $f'(j) = f(j)$  falls  $(J, f) \in \mathcal{G}$  und  $j \in J$  eine wohldefinierte Abbildung  $f' : J' \rightarrow \bigcup_{i \in J} X_i$  mit  $f'(i) \in X_i \quad \forall i \in J'$  gegeben. Das Paar  $(J', f')$  ist eine obere Schranke der Kette  $\mathcal{G}$ . Nach dem Lemma von Zorn besitzt  $\mathcal{F}$  ein maximales Element  $(J, f)$ . Wir behaupten, dass  $J = I$ . Andernfalls nehmen wir ein  $i' \in I \setminus J$  und ein  $x' \in X_{i'}$  und definieren  $J' := J \cup \{i'\}$  und  $f' : J' \rightarrow \bigcup_{i \in J'} X_i, j \mapsto \begin{cases} f(j) & j \in J \\ x' & j = i' \end{cases}$ . Dann ist  $(J', f') \in \mathcal{F}$  und  $(J, f) < (J', f')$  im Widerspruch zur Maximalität von  $(J, f)$ .  $\square$

**Folgerung 1.11 (Basisergänzungssatz)**

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Jede linear unabhängige Teilmenge  $X_0 \subseteq V$  ist in einer Basis von  $V$  enthalten.

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{X} = \{X \subseteq V \mid X \text{ ist linear unabhängig, } X_0 \subseteq X\}$  geordnet durch Inklusion. Dann ist  $X_0 \in \mathfrak{X}$ , also  $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ . Ist  $\mathcal{Y}$  eine nichtleere Kette in  $\mathfrak{X}$ , so ist auch  $Y = \bigcup \mathcal{Y} \subseteq V$  linear unabhängig. Sind  $y_1, \dots, y_n \in Y$  paarweise verschieden, so gibt es  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{Y}$  mit  $y_i \in Y_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Da  $\mathcal{Y}$  total geordnet ist, besitzt  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  ein größtes Element, o.E.  $Y_1$ . Also sind  $y_1, \dots, y_n \in Y_1$  und somit linear unabhängig. Folglich ist  $Y_1 \in \mathfrak{X}$  eine obere Schranke von  $\mathcal{Y}$ . Nach dem Lemma von Zorn besitzt  $\mathfrak{X}$  ein maximales Element  $X$ . Das heißt,  $X$  ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von  $V$ , nach LAAG1 II.3.5 also eine Basis von  $V$ .  $\square$

## 2. Der Dualraum

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum.

### Definition 2.1 (Dualraum)

Der Dualraum zu  $V$  ist der  $K$ -Vektorraum

$$V^* = \text{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \rightarrow K \text{ linear}\}$$

Die Elemente von  $V^*$  heißen Linearformen auf  $V$ .

### ■ Beispiel 2.2

Ist  $V = K^n = \text{Mat}_{n \times 1}(K)$ , so wird  $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$  durch  $\text{Mat}_{1 \times n}(K) \cong K^n$ . Wir können also die Elemente von  $V$  als Spaltenvektoren und die Linearformen auf  $V$  als Zeilenvektoren auffassen.

### Lemma 2.3

Ist  $B = (x_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , so gibt es zu jedem  $i \in I$  genau  $x_i^* \in V^*$  mit

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \in I$$

*Beweis.* Siehe LAAG1 III.5.1, angewandt auf die Familie  $(y_j)_{j \in I}$ ,  $y_j \delta_{i,j}$  in  $W = K$ . □

### Satz 2.4

Ist  $B = (x_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ , so ist  $B^* = (x_i^*)_{i \in I}$  linear unabhängig. Ist  $I$  endlich, so ist  $B^*$  eine Basis von  $V^*$ .

*Beweis.* Ist  $\varphi = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^*$ ,  $\lambda_i \in K$ , fast alle gleich 0, so ist  $\varphi(x_j) = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i^*(x_j) = \lambda_j$  für jedes  $j \in I$ . Ist also  $\varphi = 0$ , so ist  $\lambda_j = \varphi(x_j) = 0 \quad \forall j \in I$ ,  $B^*$  ist somit linear unabhängig.

Ist zudem  $I$  endlich und  $\psi \in V^*$ , so ist  $\psi = \psi' = \sum_{i \in I} \psi(x_i) x_i^*$ , denn  $\psi'(x_j) = \sum_{i \in I} \psi(x_i) x_i^*(x_j) = \psi(x_i) \quad \forall j \in I$ , und somit ist  $B^*$  ein Erzeugendensystem von  $V^*$ . □

### Definition 2.5 (duale Basis)

Ist  $B = (x_i)_{i \in I}$  eine endliche Basis von  $V$ , so nennt man  $B^* = (x_i^*)_{i \in I}$  die zu  $B$  duale Basis.

### Folgerung 2.6

Zu jeder Basis  $B$  von  $V$  gibt es einen eindeutig bestimmten Monomorphismus

$$f_V : V \rightarrow V^* \text{ mit } f(B) = B^*$$

Ist  $\dim_K(V) < \infty$ , so ist dieser ein Isomorphismus.

### Folgerung 2.7

Zu jedem  $x \neq 0 \in V$  gibt es eine Linearform  $\varphi \in V^*$  mit  $\varphi(x) = 1$ .

*Beweis.* Ergänze  $x_1 = x$  zu einer Basis  $(x_i)_{i \in I}$  von  $V$  (Folgerung 1.11) und  $\varphi = x_1^*$ . □

### ■ Beispiel 2.8

Ist  $V = K^n$  mit Standardbasis  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ , so können wir  $V^*$  mit dem Vektorraum der Zeilen-

vektoren identifizieren, und dann ist

$$e_i^* = e_i^t$$

### Definition 2.9 (Bidualraum)

Der Bidualraum zu  $V$  ist der  $K$ -Vektorraum

$$V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}_K(V^*, K)$$

### Satz 2.10

Die kanonische Abbildung

$$\iota : \begin{cases} V \rightarrow V^{**} \\ x \rightarrow \iota_x \end{cases} \quad \text{wobei } \iota_x(\varphi) = \varphi(x)$$

ist ein Monomorphismus. Ist  $\dim_K(V) < \infty$ , so ist  $\iota$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* •  $\iota_x \in V^{**}$ :

- $\iota_x(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \iota_x(\varphi) + \iota_x(\psi)$
- $\iota_x(\lambda\varphi) = (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\iota_x(\varphi)$

•  $\iota$  linear:

- $\iota_{x+y}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \iota_x(\varphi) + \iota_y(\varphi) = (\iota_x + \iota_y)(\varphi)$
- $\iota_{\lambda x}(\varphi) = \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = (\lambda\iota_x)(\varphi)$

•  $\iota$  injektiv: Sei  $0 \neq x \in V$ . Nach Folgerung 2.7 existiert  $\varphi \in V^*$  mit  $\varphi(x) = 1 \neq 0$ . Somit ist  $\iota_x \neq 0$ .

• Ist  $\dim_K(V) < \infty$ , so ist  $V \stackrel{2.6}{\cong} V^* \stackrel{2.6}{\cong} V^{**}$ , insbesondere  $\dim_K(V) = \dim_K(V^{**})$ . Der Monomorphismus  $\iota$  ist somit ein Isomorphismus.  $\square$

### ► Bemerkung 2.11

Sei  $\dim_K(V) < \infty$ . Im Gegensatz zu den Isomorphismen  $V \rightarrow V^*$ , die von der Wahl der Basis  $B$  abhängen, ist der Isomorphismus  $\iota : V \rightarrow V^{**}$  kanonisch (von der Wahl der Basis  $B$  unabhängig).

Die Voraussetzung, dass  $\dim_K(V) < \infty$  ist hier essentiell: Für  $\dim_K(V) = \infty$  ist  $\iota$  nicht surjektiv.

### Definition 2.12 (Annulator)

Für eine Teilmenge  $U \subseteq V$  bezeichne

$$U^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in U\}$$

den Annulator von  $U$ .

### Lemma 2.13

$U^0$  ist ein Untervektorraum von  $V^*$ .

*Beweis.* Klar.  $\square$

**Satz 2.14**

Ist  $\dim_K(V) < \infty$  und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so ist

$$\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(U^0)$$

*Beweis.* Ergänze eine Basis  $(x_1, \dots, x_r)$  von  $U$  zu einer Basis  $B = (x_1, \dots, x_n)$  von  $V$ . Dann ist  $B^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$  eine Basis von  $V^*$ . Sei  $C = (x_{r+1}^*, \dots, x_n^*)$ . Dann ist  $C$  eine Basis von  $U^0$ :

- $B^*$  ist Basis  $\Rightarrow C$  ist linear unabhängig.
- $C \subseteq U^0$ : Für  $1 \leq j \leq r < i \leq n$  ist  $x_i^*(x_j) = \delta_{ij} = 0$ .
- $U^0 \subseteq \text{span}_K(C)$ : Ist  $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^* \in U^0$ , so  $0 = \varphi(x_j) = \lambda_j$  für alle  $j \leq r$ , also  $\varphi \in \text{span}_K(x_{r+1}^*, \dots, x_n^*)$ . □

**Folgerung 2.15**

Ist  $\dim_K(V) < \infty$  und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so ist

$$\iota(U) = U^{00}$$

*Beweis.* Es ist klar, dass  $\iota(U) \subseteq U^{00}$ .

Für  $\varphi \in U^0$  und  $x \in U$  ist  $\iota_x(\varphi) = \varphi(x) = 0$ . Mit Satz 2.14 ist

$$\begin{aligned} \dim_K(U^{00}) &= \dim_K(V^*) - \dim_K(U^0) \\ &= \dim_K(V^*) - (\dim_K(V) - \dim_K(U)) \\ &\stackrel{2.6}{=} \dim_K(U) \end{aligned}$$

und da  $\iota$  injektiv ist, folgt  $\iota(U) = U^{00}$ . □



### 3. Die duale Abbildung

Sei  $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ .

► **Bemerkung 3.1**

Ist  $\varphi \in W^* = \text{Hom}_K(W, K)$  eine Linearform auf  $W$ , so ist  $\varphi \circ f \in \text{Hom}_K(V, K) = V^*$  eine Linearform auf  $V$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ & \searrow f^*(\varphi) & \downarrow \varphi \\ & & K \end{array}$$

**Definition 3.2 (duale Abbildung)**

Die zu  $f$  duale Abbildung ist

$$f^* : \begin{cases} W^* \rightarrow V^* \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{cases}$$

**Lemma 3.3**

Es ist  $f^* \in \text{Hom}_K(W^*, V^*)$ .

*Beweis.* Sind  $\varphi, \psi \in W^*$  und  $\lambda \in K$  ist

$$\begin{aligned} f^*(\varphi + \psi) &= (\varphi + \psi) \circ f \\ &= \varphi \circ f + \psi \circ f \\ &= f^*(\varphi) + f^*(\psi) \\ f^*(\lambda\varphi) &= (\lambda\varphi) \circ f \\ &= \lambda \cdot (\varphi \circ f) \\ &= \lambda \cdot f^*(\varphi) \end{aligned}$$

□

**Satz 3.4**

Sind  $B = (x_1, \dots, x_n)$  und  $C = (y_1, \dots, y_m)$  Basen von  $V$  bzw.  $W$ , so ist

$$M_{B^*}^{C^*}(f^*) = (M_C^B(f))^t$$

*Beweis.* Sei  $A = M_C^B(f) = (a_{ij})_{i,j}$  und  $B = M_{B^*}^{C^*}(f^*) = (b_{ji})_{j,i}$ . Dann ist  $f(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$ , also  $a_{ji} = y_i^*(f(x_j)) = f^*(y_i^*)(x_j)$  und  $f^*(y_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ji}x_j^*$ , also  $b_{ji} = f^*(y_i^*)(x_j) = a_{ij}$ . □

**Folgerung 3.5**

Sind  $V$  und  $W$  endlichdimensional, und identifizieren wir  $V = V^{**}$  und  $W = W^{**}$ , so ist  $f = f^{**}$ , das heißt  $\iota \circ f = f^{**} \circ \iota$ .

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 \downarrow \iota_V \cong & & \downarrow \iota_W \cong \\
 V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**}
 \end{array}$$

*Beweis.* Seien  $B$  und  $C$  Basen von  $V$  bzw.  $W$ . Unter der Identifizierung ist  $B^{**} = B$  und  $C = C^{**}$ , das heißt  $\iota(x_i) = x_i^{**}$  bzw.  $\iota(y_j) = y_j^{**}$ , denn  $\iota(x_i)(x_j^*) = x_j^*(x_i) = \delta_{ij} = x_i^{**}(x_j^*) \quad \forall i, j$  und somit

$$M_C^B(f^{**}) \stackrel{3.4}{=} \left( M_{B^*}^{C^*}(f^*) \right)^t \stackrel{3.4}{=} \left( M_C^B(f) \right)^{tt} = M_C^B(f)$$

Also  $f^{**} = f$ . □

### Folgerung 3.6

Sind  $V, W$  endlichdimensional, so liefert die Abbildung  $f \mapsto f^*$  einen Isomorphismus von  $K$ -Vektorräumen.

$$\text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(W^*, V^*)$$

*Beweis.* Sind  $f, g \in \text{Hom}_K(V, W)$  und  $\lambda \in K, \varphi \in W^*$ , so ist

$$\begin{aligned}
 (f + g)^*(\varphi) &= \varphi \circ (f + g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g = f^*(\varphi) + g^*(\varphi) = (f^* + g^*)(\varphi) \\
 (\lambda f)^*(\varphi) &= \varphi \circ (\lambda f) = \lambda \cdot (\varphi \circ f) = \lambda \circ f^*(\varphi) = (\lambda f^*)(\varphi)
 \end{aligned}$$

Die Abbildung ist somit linear. Nach Folgerung 3.5 ist sie injektiv. Da

$$\begin{aligned}
 \dim_K(V, W) &= \dim_K(V) \cdot \dim_K(W) \\
 &= \dim_K(V^*) \cdot \dim_K(W^*) \\
 &= \dim_K(\text{Hom}_K(W^*, V^*))
 \end{aligned}$$

ist sie auch ein Isomorphismus. □

### Satz 3.7

Sind  $V, W$  endlichdimensional so ist

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(f^*) &= \text{Ker}(f)^0 \\
 \text{Ker}(f^*) &= \text{Im}(f)^0
 \end{aligned}$$

*Beweis.* •  $\text{Im}(f^*) \subseteq \text{Ker}(f)^0$ : Ist  $\varphi \in W^*, x \in \text{Ker}(f)$ , so ist

$$f^*(\varphi)(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(0) = 0$$

- $\text{Ker}(f)^0 \subseteq \text{Im}(f^*)$ : Sei  $\varphi \in \text{Ker}(f)^0$ . Setze eine Basis  $(x_1, \dots, x_r)$  von  $\text{Ker}(f)$  zu einer Basis  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $V$  fort. Dann sind  $f(x_{r+1}), \dots, f(x_n)$  linear unabhängig nach der Kern-Bild-Formel (LAAG 1 III.7.13), es gibt also  $\psi \in W^*$  mit

$$\psi(f(x_i)) = \varphi(x_i) \quad \forall i$$

Es folgt

$$f^*(\psi)(x_i) = \psi(f(x_i)) = \varphi(x_i) \quad \forall i$$

also  $\varphi = f^*(\psi)$ .

- Mit der Identifizierung  $V = V^{**}$  ist

$$\operatorname{Im}(f)^0 \stackrel{3.5}{=} \operatorname{Im}(f^{**})^0 = \operatorname{Ker}(f^*)^{00} \stackrel{2.15}{=} \operatorname{Ker}(f^*)$$

□

### Folgerung 3.8

Sind  $V, W$  endlichdimensional, so ist

$$\operatorname{rk}(f) = \operatorname{rk}(f^*)$$

*Beweis.*

$$\operatorname{rk}(f) = \dim_K(\operatorname{Im}(f))$$

$$\stackrel{2.14}{=} \dim_K(W) - \dim_K(\operatorname{Im}(f)^0)$$

$$\stackrel{LAAG1.III.7.13}{=} \dim_K(W^*) - \dim_K(\operatorname{Ker}(f^*))$$

$$= \operatorname{rk}(f^*)$$

□

### Folgerung 3.9

Ist  $\dim_K(V) < \infty$  und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, so lässt sich jede Linearform auf  $U$  zu einer Linearform auf  $V$  fortsetzen.

*Beweis.* Ist  $f : U \rightarrow V$  die Inklusionsabbildung, so ist  $f^* : V^* \rightarrow U^*$ ,  $\varphi \mapsto \varphi|_U$  und

$$\operatorname{rk}(f^*) = \operatorname{rk}(f) = \dim_K(U) = \dim_K(U^*)$$

$f^*$  ist somit surjektiv.

□

### ► Bemerkung 3.10

Folgerung 3.9 gilt auch ohne die Voraussetzung  $\dim_K(V) < \infty$ , siehe Übung.

### ► Bemerkung 3.11

Ein homogenes lineares Gleichungssystem  $Ax = 0$  hat als Lösungsraum  $L(A, 0) \subseteq K^n$  ein Untervektorraum des  $K^n$ . Unter der Identifizierung  $K^n = (K^n)^{**}$  ist  $L(A, 0)$  der Annulator der Linearformen beschrieben durch die Zeilen  $a_1, \dots, a_m \in (K^n)^*$  von  $A$ . Wir wollen umgekehrt zu einem Untervektorraum  $W \subseteq K^n$  ein  $A = (a_1, \dots, a_m) \in \operatorname{Mat}_{n \times m}(K)$  mit  $W = L(A, 0)$  finden. Ist  $W = \operatorname{span}_K(b_1, \dots, b_r)$ , so ist  $W = \operatorname{Im}(f_B)$  mit  $B = (b_1, \dots, b_r) \in \operatorname{Mat}_{n \times r}(K)$ .

$\Rightarrow W \stackrel{3.7}{=} \operatorname{Ker}(f_B^*)^0$  und  $M_{\mathcal{E}^t}(f_B^*) = B^t$ . Wenn man also eine Basis  $(a_1, \dots, a_s)$  von  $L(B^t, 0)$  bestimmt und daraus eine Matrix  $A = (a_1^t, \dots, a_s^t) \in \operatorname{Mat}_{s \times n}(K)$  bildet, so ist  $W = L(A, 0)$ .

## 4. Die adjungierte Abbildung

Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  und  $V$  ein endlichdimensionaler unitärer  $K$ -Vektorraum.

### Definition 4.1 (weitere Skalarmultiplikation)

Wir definieren auf  $V$  eine Skalarmultiplikation

$$\lambda * x = \bar{\lambda} \cdot x$$

und schreiben  $\bar{V} = (V, +, *)$ .

### Lemma 4.2

$\bar{V}$  ist ein  $K$ -Vektorraum und  $\text{End}_K(V) = \text{End}_K(\bar{V})$ .

*Beweis.* Mit LAAG1 VI.1.7 nachprüfen, zum Beispiel:

- $\lambda * (x + y) = \bar{\lambda} \cdot (x + y) = \bar{\lambda}x + \bar{\lambda}y = \lambda * x + \lambda * y$
- $\lambda * (\mu * x) = \bar{\lambda}(\bar{\mu} \cdot x) = \overline{\lambda\mu}x = (\lambda\mu) * x$

□

Weiterhin sei:  $f \in \text{End}_K(V)$ ,  $x \in V$ ,  $\lambda \in K$

$$\Rightarrow f(\lambda * x) = f(\bar{\lambda}x) = \bar{\lambda} f(x)$$

$$\Rightarrow f \in \text{End}_K(\bar{V}).$$

Umgekehrt sei  $g \in \text{End}_K(\bar{V})$ ,  $x \in V$ ,  $\lambda \in K$

$$\Rightarrow g(\lambda \cdot x) = g(\bar{\lambda} * x) = \bar{\lambda} g(x)$$

$$\Rightarrow g \in \text{End}_K(V).$$

### Lemma 4.3

Für  $y \in V$  ist

$$\Phi_y : \begin{cases} V \rightarrow K \\ x \mapsto \langle x, y \rangle \end{cases}$$

eine Linearform auf  $V$ .

Die Abbildung  $y \mapsto \Phi_y$  liefert einen Isomorphismus  $\Phi : \bar{V} \rightarrow V^*$ .

*Beweis.* •  $\Phi_y \in V^*$ : Linearität in ersten Argument.

- $\Phi \in \text{Hom}_K(\bar{V}, V^*)$ : Für  $y, y' \in V$ ,  $\lambda \in K$ ,  $x \in V$  ist
  - $\Phi_{y+y'}(x) = \langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle = \Phi_y(x) + \Phi_{y'}(x)$
  - $\Phi_{\lambda * y}(x) = \langle x, \lambda * x \rangle = \langle x, \bar{\lambda}y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle = \lambda \Phi_y(x)$

- $\Phi$  injektiv: Skalarprodukt ist nicht ausgeartet.

- Da  $\dim_K(\bar{V}) = \dim_K(V) = \dim_K(V^*)$  ist  $\Phi$  somit ein Isomorphismus.

□

**Satz 4.4**

Zu  $f \in \text{End}_K(V)$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $f^{adj} \in \text{End}_K(V)$  mit

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

*Beweis.* Existenz und Eindeutigkeit sind zu zeigen.

- Existenz:

$$\begin{array}{ccc} \overline{V} & \xleftarrow{f} & \overline{V} \\ & f^{adj} & \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ V^* & \xleftarrow{f^*} & V^* \end{array}$$

Für  $f^{adj} = \Phi^{-1} \circ f^* \circ \Phi \in \text{End}_K(\overline{V}) = \text{End}_K(V)$  ist

$$\Phi_y \circ = (f^* \circ \Phi)(y) = (\Phi \circ f^{adj})(y) = \Phi_{f^{adj}(y)}$$

also

$$\langle f(x), y \rangle = (\Phi_y \circ f)(x) = \Phi_{f^{adj}(y)}(x) = \langle x, f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

- Eindeutigkeit: Erfüllen  $f_1, f_2$  für Gleichung

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

so ist

$$0 = \langle x, f_1(y) \rangle - \langle x, f_2(y) \rangle = \langle x, f_1(y) - f_2(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

da  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nicht ausgeartet ist, folgt daraus, dass  $f_1 = f_2$ . □

**Definition 4.5 (adjungierter Endomorphismus)**

Die Abbildung  $f^{adj}$  heißt der zu  $f$  adjungierte Endomorphismus.

**■ Beispiel 4.6**

- Ist  $f$  selbstadjungiert, so ist  $f^{adj} = f$ .
- Ist  $f$  unitär, so ist  $f \in \text{Aut}_K(V)$  und

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

also  $f^{adj} = f^{-1}$ .

**Lemma 4.7**

Ist  $B$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , so ist

$$M_B(f^{adj}) = M_B(f^*)$$

*Beweis.* Ist  $A = M_B(f)$  und  $B = M_B(f^{adj})$ ,  $v = \Phi_B(x)$ ,  $w = \Phi_B(y)$ , so ist

$$\begin{aligned} (Ax)^t \bar{y} &= \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^{adj}(w) \rangle \\ x^t A^t \bar{y} &= x^t \bar{B} \bar{y} \\ \Rightarrow B &= \overline{A^t} = A^* \end{aligned}$$

□

#### Lemma 4.8

Für  $f, g \in \text{End}_K(V)$  und  $\lambda, \mu \in K$  ist

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)^{adj} &= \bar{\lambda} f^{adj} + \bar{\mu} g^{adj} \\ (f^{adj})^{adj} &= f \end{aligned}$$

*Beweis.* Für  $x, y \in V$  ist

$$\begin{aligned} \langle (\lambda f + \mu g)(x), y \rangle &= \lambda \langle f(x), y \rangle + \mu \langle g(x), y \rangle \\ &= \lambda \langle x, f^{adj}(y) \rangle + \mu \langle x, g^{adj}(y) \rangle \\ &= \langle x, (\bar{\lambda} f^{adj} + \bar{\mu} g^{adj})(y) \rangle \end{aligned}$$

und

$$\langle f^{adj}(x), y \rangle = \overline{\langle y, f^{adj}(y) \rangle} = \overline{\langle f(y), x \rangle} = \langle x, f(y) \rangle$$

□

## 5. Der Spektralsatz

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler unitärer  $K$ -Vektorraum und  $f \in \text{End}_K(V)$ .

**Definition 5.1 (normaler Endomorphismus, normale Matrix)**

Der Endomorphismus  $f$  heißt normal, wenn

$$f \circ f^{adj} = f^{adj} \circ f$$

Entsprechend heißt  $A \in \text{Mat}_n(K)$  normal, wenn

$$AA^* = A^*A$$

■ **Beispiel 5.2**

- Ist  $f$  selbstadjungiert, so ist  $f^{adj} = f$ , insbesondere ist  $f$  normal.
- Ist  $f$  unitär, so ist  $f^{adj} = f^{-1}$ , insbesondere ist  $f$  normal.

**Lemma 5.3**

Genau dann ist  $f \in \text{End}_K(V)$  normal, wenn

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle f^{adj}(x), f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

*Beweis.* • Hinrichtung: Ist  $f$  normal, so ist

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \langle x, (f^{adj} \circ f)(y) \rangle \\ &= \langle x, (f \circ f^{adj})(y) \rangle \\ &= \langle f^{adj}(x), f^{adj}(y) \rangle \quad \forall x, y \in V \end{aligned}$$

- Rückrichtung: Ist umgekehrt  $\langle f^{adj}(x), f^{adj}(y) \rangle$ , so ist

$$\begin{aligned} \langle x, (f^{adj} \circ f)(y) \rangle &= \langle x, (f \circ f^{adj})(y) \rangle \\ 0 &= \langle x, (f^{adj} \circ f - f \circ f^{adj})(y) \rangle \\ f^{adj} \circ f &= f \circ f^{adj} \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.4**

Ist  $f$  normal, ist ist

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^{adj})$$

*Beweis.* Nach Lemma 5.3 ist

$$\|f(x)\| = \|f^{adj}(x)\| \quad \forall x \in V$$

Insbesondere gilt

$$f(x) = 0 \iff f^{adj}(x) = 0 \quad \square$$

### Lemma 5.5

?? Ist  $f$  normal, so ist

$$\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Eig}(f^{adj}, \bar{\lambda}) \quad \forall \lambda \in K$$

*Beweis.* Da  $(\lambda \cdot \text{id} - f)^{adj} \stackrel{4.8}{=} \bar{\lambda} \cdot \text{id} - f^{adj}$  ist auch  $\lambda \cdot \text{id} - f$  normal. Somit ist

$$\begin{aligned} \text{Eig}(f, \lambda) &= \text{Ker}(\lambda \text{id} - f) \\ &\stackrel{5.4}{=} \text{Ker}((\lambda \text{id} - f)^{adj}) \\ &= \text{Ker}(\bar{\lambda} \text{id} - f^{adj}) \\ &= \text{Eig}(f^{adj}, \bar{\lambda}) \end{aligned} \quad \square$$

### Theorem 5.6 (Spektralsatz)

Sei  $f \in \text{End}_K(V)$  ein Endomorphismus, für den  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt. Genau dann besitzt  $V$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $f$ , wenn  $f$  normal ist.

*Beweis.* • Hinrichtung: Ist  $B$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $f$ , so ist  $A = M_B(f)$  eine Diagonalmatrix. Dann ist auch  $M_B(f^{adj}) \stackrel{4.7}{=} A^*$  eine Diagonalmatrix und  $AA^* = A^*A$ . Somit ist  $f$  normal.

- Rückrichtung: Sei  $f$  normal und  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ . Beweis nach Induktion nach  $n = \dim_K(V)$ .

$n = 0$ : klar

$n - 1 \rightarrow n$ : Wähle Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1$ , o.E.  $\|x_1\| = 1$ . Sei  $U = K \cdot x_1$ . Nach ?? ist  $f^{adj}(x_1) = \bar{\lambda}_1 x_1$ , insbesondere ist  $U$   $f$ -invariant und  $f^{adj}$ -invariant. Für  $x \in U^\perp$  ist

$$\langle f(x), x_1 \rangle = \langle x, f^{adj}(x_1) \rangle = \langle x, \bar{\lambda}_1 x_1 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle x, x_1 \rangle = 0$$

also  $f(x) \in U^\perp$  und

$$\langle f^{adj}(x), x_1 \rangle = \langle x, f(x_1) \rangle = \langle x, \lambda_1 x_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, x_1 \rangle = 0$$

also  $f^{adj}(x) \in U^\perp$ . Somit ist  $V = U \oplus U^\perp$  eine Zerlegung in Untervektorräume, die sowohl  $f$ -invariant als auch  $f^{adj}$ -invariant sind. Insbesondere ist  $f^{adj}|_{U^\perp} = (f|_{U^\perp})^{adj}$ , woraus folgt, dass auch  $f|_{U^\perp}$  normal ist:

$$f|_{U^\perp} \circ (f|_{U^\perp})^{adj} = f \circ f^{adj}|_{U^\perp} = f^{adj} \circ f|_{U^\perp} = f^{adj}|_{U^\perp} \circ f|_{U^\perp} = (f|_{U^\perp})^{adj} \circ f|_{U^\perp}$$

Außerdem zerfällt auch  $\chi_{f|_{U^\perp}} = \prod_{i=2}^n (t - \lambda_i)$  in Linearfaktoren. Nach Induktionshypothese existiert eine Orthonormalbasis  $(x_2, \dots, x_n)$  von  $U^\perp$  bestehend aus Eigenvektoren von  $f|_{U^\perp}$  und  $(x_1, \dots, x_n)$  ist dann eine Orthonormalbasis von  $V$  aus Eigenvektoren von  $f$ .  $\square$

### Folgerung 5.7

Sei  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ . Genau dann gibt es  $S \in U_n$  mit  $S^* A S = D$  eine Diagonalmatrix, wenn  $A$  normal ist.



**► Bemerkung 5.8**

Theorem [5.6](#) ist eine gemeinsame Verallgemeinerung von Theorem [II.5.9](#) und Theorem [II.6.5](#)

## 6. Tensorprodukte

### Definition 6.1 (bilineare Abbildung)

Eine Abbildung  $\xi : V \times W \rightarrow U$  ist bilinear, wenn für jedes  $v \in V$  die Abbildung

$$\begin{cases} W \rightarrow U \\ w \mapsto \xi(v, w) \end{cases}$$

und für jedes  $w \in W$  die Abbildung

$$\begin{cases} V \rightarrow U \\ v \mapsto \xi(v, w) \end{cases}$$

linear sind.

Wir definieren

$$\text{Bil}_K(V, W, U) = \{\xi \in \text{Abb}(V \times W, U) \mid \xi \text{ bilinear}\}$$

### ■ Beispiel 6.2

Seien  $V = W = K[t]_{\leq d}$ ,  $U = K[t]_{\leq 2d}$ . Die Abbildung

$$\xi : \begin{cases} V \times W \rightarrow U \\ (f, g) \mapsto fg \end{cases} \quad \text{ist bilinear}$$

Wir sehen, dass  $\text{Im}(\xi)$  im Allgemeinen kein Untervektorraum von  $U$  ist. Ist zum Beispiel  $K = \mathbb{Q}$ ,  $d = 1$ , so liegen  $t^2 = \xi(t, t)$  und  $-2 = \xi(-2, 1)$  im  $\text{Im}(\xi)$  nicht jedoch  $t^2 - 2$ , denn wäre  $t^2 - 2 = fg$  mit  $f, g \in \mathbb{Q}[t]$  linear, so hätte  $t^2 - 2$  eine Nullstelle in  $\mathbb{Q}$ , aber  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

### Lemma 6.3

$\text{Bil}_K(V, W, U)$  bildet einen Untervektorraum des  $K$ -Vektorraum  $\text{Abb}(V \times W, U)$ .

*Beweis.* klar, zum Beispiel

$$(\xi + \xi')(\lambda v, w) = \xi(\lambda v, w) + \xi'(\lambda v, w) = \lambda \xi(v, w) + \lambda \xi'(v, w) = \lambda(\xi + \xi')(v, w)$$

□

### Lemma 6.4

Ist  $\xi \in \text{Bil}_K(V, W, U)$  und  $f \in \text{Hom}_K(U, U')$  für einen  $K$ -Vektorraum, so ist

$$f \circ \xi \in \text{Bil}_K(V, W, U')$$

*Beweis.* klar, zum Beispiel

$$(f \circ \xi)(\lambda v, w) = f(\xi(\lambda v, w)) = f(\lambda \xi(v, w)) = \lambda \cdot (f \circ \xi)(v, w)$$

□

**Lemma 6.5**

Sei  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$  und  $(w_j)_{j \in J}$  eine Basis von  $W$ . Zu jeder Familie  $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  in  $U$  gibt es genau ein  $\xi \in \text{Bil}_K(V, W, U)$  mit

$$\xi(v_i, w_j) = u_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J$$

*Beweis.* • Eindeutigkeit: Ist  $\xi$  bilinear,  $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ ,  $w = \sum_{j \in J} \mu_j w_j$  so ist

$$\begin{aligned} \xi(v, w) &= \xi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i, \sum_{j \in J} \mu_j w_j\right) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i \xi\left(v_i, \sum_{j \in J} \mu_j w_j\right) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j u_{ij} \end{aligned} \tag{1}$$

durch die Familie  $(u_{ij})_{i,j}$  bestimmt.

• Existenz: Wird  $\xi$  durch (1) definiert, so ist  $\xi$  bilinear: Für festes  $w = \sum_{j \in J} \mu_j w_j$  ist

$$\begin{cases} V & \rightarrow U \\ v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i & \mapsto \xi(v, w) = \sum_{i \in I} \lambda_i \left( \sum_{j \in J} \mu_j u_{ij} \right) \end{cases}$$

linear (LAAG1 III.5.1), analog für festes  $v$ . □

**Definition 6.6 (Tensorprodukt)**

Ein Tensorprodukt von  $V$  und  $W$  ist ein Paar  $(T, \tau)$  bestehend aus einem  $K$ -Vektorraum  $T$  und einer bilinearen Abbildung  $\tau \in \text{Bil}_K(V, W, T)$  welche die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Ist  $U$  ein weiterer  $K$ -Vektorraum und  $\xi \in \text{Bil}_K(V, W, U)$  so gibt es genau ein  $\xi_{\otimes} \in \text{Hom}_K(T, U)$  mit  $\xi = \xi_{\otimes} \circ \tau$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \xi & \downarrow \xi_{\otimes} \\ & & U \end{array}$$

**Anmerkung**

Sind  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume und  $K$  ein gemeinsamer Körper, so kann man das Tensorprodukt  $V \otimes W$ , was auch ein Vektorraum ist, wie folgt konstruieren: Wenn  $B = (b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $V$  und  $C = (c_1, \dots, c_m)$  eine Basis von  $W$  ist, dann ist  $V \otimes W$  ein Vektorraum, genannt *Tensorprodukt*, in dem es eine Basis gibt, die auf eindeutige Weise mit den geordneten Paaren des kartesischen Produkts

$$B \times C = \{(b_i, c_j)\}$$

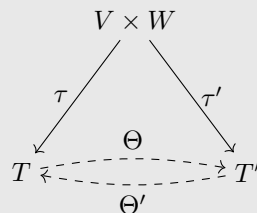
der Basen der Ausgangsräume identifiziert werden kann. Die Dimension von  $V \otimes W$  ist dann das Produkt der Dimensionen von  $V$  und  $W$ . Ein Element der Basis von  $V \otimes W$ , das dem Paar  $(b_i, c_j)$  entspricht, wird als  $b_i \otimes c_j$  notiert, das  $\otimes$  hat also keine tiefere Bedeutung. Ein Element des Tensorproduktes  $V \otimes W$  hat dann die Gestalt:

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} \cdot (b_i \otimes c_j)$$

mit  $\lambda_{ij} \in K$ .

**Lemma 6.7**

Sind  $(T, \tau)$  und  $(T', \tau')$  Tensorprodukte von  $V$  und  $W$ , so gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus  $\Theta : T \rightarrow T'$  mit  $\tau' = \Theta \circ \tau$ .



*Beweis.* Da  $(T, \tau)$  die universelle Eigenschaft erfüllt, gibt es ein eindeutig bestimmtes  $\Theta = (\tau')_{\otimes} \in \text{Hom}_K(T, T')$  mit  $\tau' = \Theta \circ \tau$ . Analog gibt es  $\Theta' \in \text{Hom}_K(T', T)$  mit  $\tau = \Theta' \circ \tau'$ . Es folgt, dass  $\tau = \Theta' \circ \tau' = \Theta' \circ \Theta \circ \tau$ . Da auch  $\tau = \text{id}_T \circ \tau$  liefert die Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von  $(T, \tau)$ , für  $U = T$ ,  $\xi = \tau$ , dass  $\Theta \circ \Theta' = \text{id}_T$ . Analog sieht man, dass  $\Theta \circ \Theta' = \text{id}_{T'}$ . Somit ist  $\Theta$  ein Isomorphismus.  $\square$

**Definition 6.8 (Vektorraum mit Basis  $X$ )**

Sei  $X$  eine Menge. Der  $K$ -Vektorraum mit Basis  $X$  ist der Untervektorraum  $V = \text{span}_K((\delta_x)_{x \in X})$

des  $K$ -Vektorraum  $\text{Abb}(X, K)$  mit  $\delta_x(y) = \delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$

**Lemma 6.9**

Sei  $X$  eine Menge und  $V$  der  $K$ -Vektorraum mit Basis  $X$ . Dann ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $(\delta_x)_{x \in X}$  ist eine Basis von  $V$ .

*Beweis.* Zu zeigen ist nur, dass  $(\delta_x)_{x \in X}$  linear unabhängig ist. Ist  $f = \sum_{x \in X} \lambda_x \delta_x$ ,  $\lambda_x \in K$ , fast alle gleich 0, und  $f = 0$ , so ist  $\lambda_x = f(x) = 0$  für jedes  $x \in X$ .  $\square$

**Lemma 6.10**

Sei  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$  und  $(w_j)_{j \in J}$  eine Basis von  $W$ . Sei  $T$  der  $K$ -Vektorraum mit der Basis  $I \times J$  (im Sinne von Definition 6.8) und  $\tau : V \times W \rightarrow T$  die bilineare Abbildung gegeben durch  $(v_i, w_j) \mapsto \delta_{i,j}$ , vergleiche Lemma 6.5. Dann ist  $(T, \tau)$  ein Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ .

*Beweis.* Wir schreiben  $v_i \otimes w_j$  für  $\delta_{i,j}$ . Sei  $U$  ein weiterer  $K$ -Vektorraum und  $\xi \in \text{Bil}_K(V, W, U)$ . Da  $(v_i \otimes w_j)_{(i,j) \in I \times J}$  eine Basis von  $T$  ist, gibt es genau ein  $\xi_\otimes \in \text{Hom}_K(T, U)$  mit  $\xi_\otimes(v_i \otimes w_j) = \xi(v_i, w_j)$  für alle  $i, j$ , also mit  $\xi_\otimes \circ \tau = \xi$  nach Lemma 6.5. Die universelle Eigenschaft ist somit erfüllt.  $\square$

**Satz 6.11**

Es gibt ein bis auf Isomorphie (im Sinne von Lemma 6.7) eindeutig bestimmtes Tensorprodukt

$$(V \otimes_K W, \otimes)$$

von  $V$  und  $W$ . Sind  $V$  und  $W$  endlichdimensional, so ist

$$\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$$

*Beweis.* Lemma 6.10 und Lemma 6.7  $\square$

**■ Beispiel 6.12**

Durch die Wahl der Standardbasis erhält man einen kanonischen Isomorphismus  $K^m \otimes_K K^n \cong \text{Mat}_{m \times n}(K)$ .

**■ Beispiel 6.13**

Ist  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis  $(x_1, \dots, x_n)$ , so ist  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension  $2n$  mit Basis  $(1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n, i \otimes x_1, \dots, i \otimes x_n)$ . Durch  $\lambda \cdot z \otimes x = (\lambda z) \otimes x$  für  $\lambda, z \in \mathbb{C}, x \in V$  wird  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  zu einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der Dimension  $1 \otimes x_1, \dots, 1 \otimes x_n, V_{\mathbb{C}}$ , genannt die Komplexifizierung von  $V$ .

**Satz 6.14**

Sei  $V \otimes_K W$  ein Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ . Für jeden weiteren  $K$ -Vektorraum  $U$  liefert die Abbildung  $\xi \rightarrow \xi_\otimes$  ein Isomorphismus

$$\text{Bil}_K(V, W, U) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_K(V \otimes_K W, U)$$

*Beweis.* Diese Abbildung heiße  $\Lambda$ .

- $\Lambda$  ist linear: klar aus Eindeutigkeitsaussage, z.B.

$$(\xi_\otimes + \xi'_\otimes) \circ \otimes = \xi_\otimes \circ \otimes + \xi'_\otimes \circ \otimes = \xi + \xi' = (\xi + \xi')_\otimes \circ \otimes$$

und somit  $\xi_\otimes + \xi'_\otimes = (\xi + \xi')_\otimes$ .

- $\Lambda$  ist injektiv: Ist  $\xi \neq 0$ , so wegen  $\xi = \xi_\otimes \circ \otimes$  auch  $\xi_\otimes \neq 0$ .
- $\Lambda$  ist surjektiv: Ist  $f \in \text{Hom}_K(V \otimes_K W, U)$ , so ist  $\xi = f \circ \otimes$  bilinear, die universelle Eigenschaft liefert somit  $f = \xi_\otimes \in \text{Im}(\Lambda)$ .  $\square$

**Folgerung 6.15**

Sind  $V$  und  $W$  endlichdimensional, so ist

$$V \otimes_K W \cong \text{Bil}_K(V, W, K)^*$$

*Beweis.* Es ist  $\dim_K(V \otimes_K W) < \infty$  und deshalb

$$V \otimes_K W \cong (V \otimes_K W)^{**} \stackrel{6.14}{\cong} \text{Bil}_K(V, W, K)$$

□

**► Bemerkung 6.16**

Während obige Konstruktion des Tensorprodukts von der Wahl (und Existenz) von Basen abhängt, ist die folgende Konstruktion “basisfrei“:

Sei  $T_1$  der  $K$ -Vektorraum mit Basis  $V \times W$  und  $T_0$  der Untervektorraum von  $T_1$  erzeugt von Elementen der Form:

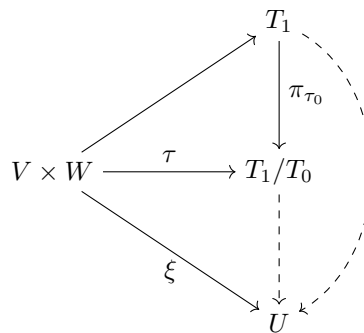
$$\delta_{v+v',w} - \delta_{v,w} - \delta_{v',w}$$

$$\delta_{v,w+w'} - \delta_{v,w} - \delta_{v,w'}$$

$$\delta_{\lambda v,w} - \lambda \cdot \delta_{v,w}$$

$$\delta_{v,\lambda w} - \lambda \cdot \delta_{v,w}$$

mit  $v, v' \in V$ ,  $w, w' \in W$  und  $\lambda \in K$ . Sei weiter  $T = T_1/T_0$  und  $\tau : V \times W \rightarrow T$  gegeben durch  $(v, w) \mapsto \delta_{v,w} + T_0$ . Dann ist  $(T, \tau)$  ein Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ .

**► Bemerkung 6.17**

Analog kann man für  $k \geq 2$  und die  $K$ -Vektorräume  $V_1, \dots, V_k$   $k$ -lineare Abbildungen  $V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow U$  definieren und erhält dann Tensorprodukte  $V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_k$ .

## Kapitel IV

# Moduln

In diesem ganzen Kapitel sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Einselement.

## 1. Moduln

### Definition 1.1

Ein  $R$ -Modul ist ein Tripel  $(M, +, \cdot)$  bestehend aus einer Menge  $M$ , einer Verknüpfung  $+: M \times M \rightarrow M$  und der Abbildung  $\cdot: R \times M \rightarrow M$  (Skalarmultiplikation) für die gelten:

- (M1):  $(M, +)$  ist eine abelsche Gruppe
- (M2): Addition und Skalarmultiplikation sind verträglich. Für alle  $x, y \in M$  und  $a, b \in R$  gelten

$$1. \quad a(x + y) = ax + ay$$

$$2. \quad (a + b)x = ax + bx$$

$$3. \quad a \cdot bx = ab \cdot x$$

$$4. \quad 1 \cdot x = x$$

### ■ Beispiel 1.2

1. Ist  $R = K$  ein Körper, so sind die  $R$ -Moduln genau die  $K$ -Vektorräume.
2. Ist  $R = \mathbb{Z}$ , so sind die  $R$ -Moduln genau die abelschen Gruppen mit der einzig möglichen Skalarmultiplikation

$$\mathbb{Z} \times A \rightarrow A, (k, a) \mapsto ka = \underbrace{1 + \dots + 1}_{k\text{-mal}} a = \underbrace{a + \dots + a}_{k\text{-mal}}$$

vergleiche Laag 1 III.2.3

3. Jedes Ideal  $M \subseteq R$  ist ein  $R$ -Modul mit Einschränkung der Multiplikation als Skalarmultiplikation.
4. Ist  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f \in \text{End}_K(V)$ , so wird  $V$  durch  $P(t) \cdot x := P(f)(x)$  zu einem Modul über dem Ring  $R = K[t]$ , siehe auch V.5.2

### ► Bemerkung 1.3

Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Wie für Vektorräume (LAAG 1 II.1.5) überzeugt man sich leicht, dass  $0x = 0$ ,  $a0 = 0$ ,  $(-a)x = a(-x) = -ax$  für alle  $a \in R$ ,  $x \in M$ .

Im Gegensatz zu Vektorräumen folgt aber aus  $ax = 0$  nicht, dass  $a = 0$  oder  $x = 0$ , siehe zum

Beispiel das  $\mathbb{Z}$ -Modul  $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Es ist

$$n \cdot \bar{1} = \bar{n} = \bar{0} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

aber  $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ .

#### Definition 1.4 (Homomorphismus von $R$ -Moduln)

Seien  $M, M'$   $R$ -Moduln. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow M'$  ein Homomorphismus von  $R$ -Moduln (oder  $R$ -Homomorphismus oder  $R$ -linear), wenn

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(ax) &= a \cdot f(x) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Menge der  $R$ -Homomorphismen  $f : M \rightarrow M'$  mit  $\text{Hom}_R(M, M')$ . Wie üblich definiert man den Kern eines  $R$ -Homomorphismus, sowie die Begriffe Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, Endomorphismus und Automorphismus von  $R$ -Moduln.

#### ■ Beispiel 1.5

- Ist  $R = K$ , so sind die  $R$ -Homomorphismen genau die lineare Abbildungen.
- Ist  $R = \mathbb{Z}$ , so sind die  $R$ -Homomorphismen genau die Gruppenhomomorphismen.

#### ■ Beispiel 1.6

Für jedes  $a \in R$  ist die Abbildung

$$\begin{cases} M \rightarrow M \\ x \mapsto ax \end{cases}$$

einen Endomorphismus von  $M$ .

#### Definition 1.7 (Unterm modul, Erzeugendensystem)

Ein Unterm modul ist eine nichtleere Teilmenge  $N \subseteq M$ , für die gilt:

- Sind  $x, y \in N$ , so ist auch  $x + y \in N$ .
- Ist  $a \in R$  und  $x \in N$ , so ist auch  $ax \in N$ .

Für eine Familie  $(x_i)_{i \in I}$  ist

$$\sum_{i \in I} Rx_i = \left\{ \sum_{i \in I} ax_i \mid a \in R, \text{ fast alle gleich } 0 \right\}$$

der von  $(x_i)_{i \in I}$  erzeugte Unterm modul von  $M$ . Ist  $\sum_{i \in I} Rx_i = M$ , so ist  $(x_i)_{i \in I}$  ein Erzeugendensystem von  $M$ . Der  $R$ -Modul  $M$  ist endlich erzeugt, wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

#### ► Bemerkung 1.8

Wieder ist der Kern eines  $R$ -Homomorphismus  $f : M \rightarrow M'$  ein Unterm modul von  $M$ . Leicht sieht man auch hier, dass  $\sum_{i \in I} Rx_i$  ein Unterm modul von  $M$  ist, und zwar der kleinste, der alle  $x_i$  enthält.



■ **Beispiel 1.9**

- Ist  $R = K$  ein Körper, so sind die Untermoduln von  $M$  genau die Untervektorräume.
- Ist  $R = \mathbb{Z}$ , so sind die Untermoduln von  $M$  genau die Untergruppen und der von einer Familie erzeugte Untermodul ist genau gleich der davon erzeugten Untergruppe.  
Ist zum Beispiel  $M = \mathbb{Z}$ , so sind alle  $n\mathbb{Z}$  Untermoduln von  $M$ .

**Definition 1.10 (freie Familie, Basis)**

Eine Familie  $(x_i)_{i \in I}$  in  $M$  ist frei oder ( $R$ -linear unabhängig), wenn es keine Familie  $(\lambda_i)_{i \in I}$  von Elementen von  $R$ , fast alle gleich 0, aber nicht alle gleich 0, mit  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$  gibt.

Ein freies Erzeugendensystem heißt Basis. Besitzt  $M$  eine Basis, so nennt man  $M$  frei.

**Satz 1.11**

Seien  $M, M'$   $R$ -Moduln,  $(x_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $M$  und  $(y_i)_{i \in I}$  eine Familie in  $M'$ . Dann gibt es genau eine  $R$ -lineare Abbildung  $f : M \rightarrow M'$  mit  $f(x_i) = y_i$  für alle  $i$ .

*Beweis.* klar, siehe LAAG 1 III.5.1 □

■ **Beispiel 1.12**

- Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $M = R^n$  mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein endlich erzeugter freier  $R$ -Modul mit der üblichen Standardbasis.
- Allerdings ist zum Beispiel der  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  zwar endlich erzeugt aber nicht frei. Für  $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist  $n\bar{a} = \bar{0}$ , also  $\bar{a}$  linear abhängig.

**Definition 1.13 (Summen von Moduln)**

Die Summe einer Familie  $(N_i)_{i \in I}$  von Untermoduln von  $M$  ist

$$\sum_{i \in I} N_i = \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in N_i, \text{ fast alle gleich } 0 \right\}$$

Lässt sich jedes  $x \in \sum_{i \in I} N_i$  eindeutig als  $\sum_{i \in I} x_i$  mit  $x_i \in N_i$  schreiben, so nennt man die Summe direkt und schreibt dafür auch  $\bigoplus_{i \in I} N_i$ .

Ist  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $R$ -Moduln, so definiert man deren (externe) direkte Summe als das  $R$ -Modul

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i \mid x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

► **Bemerkung 1.14**

Wie auch für Vektorräume ist eine externe direkte Summe eine direkte Summe der entsprechenden Untermoduln und ist  $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ , so ist  $M$  isomorph zur externen direkten Summe der  $N_i$ .

**Definition 1.15 (Torsionsmodul)**

Für  $a \in R$  definiert man den  $a$ -Torsionsmodul von  $M$  als

$$M[a] := \{x \in M \mid ax = 0\}$$

Die Elemente des Torsionsmoduls

$$M_{tor} := \bigcup_{0 \neq a \in R} M[a] = \{x \in M \mid ax = 0 \text{ für ein } a \in R \setminus \{0\}\}$$

nennt man die Torsionselemente von  $M$ .

**Satz 1.16**

Für  $a \in R$  ist  $M[a]$  ein Untermodul von  $M$ . Ist  $R$  nullteilerfrei, so ist auch  $M_{tor}$  ein Untermodul von  $M$ .

*Beweis.*  $M[a]$  ist der Kern des Endomorphismus  $x \mapsto ax$  (Beispiel 1.6), somit ein Untermodul (Bemerkung 1.8). Seien  $a, b \in R \setminus \{0\}$  und  $x \in M[a]$ ,  $y \in M[b]$ . Ist  $R$  nullteilerfrei so ist  $ab \neq 0$  und

$$(ab) \cdot (x + y) = b \cdot \underbrace{ax}_{=0} + a \cdot \underbrace{by}_{=0} = 0$$

also  $x + y \in M[ab] \subseteq M_{tor}$ . Somit ist  $M_{tor}$  in diesem Fall ein Untermodul von  $M$ . □

**■ Beispiel 1.17**

Sei  $R = \mathbb{Z}$  und  $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , dann ist  $M_{tor} = M = M[n]$ .

## 2. Teilbarkeit

### Definition 2.1 (Teilbarkeit)

Seien  $a, b \in R$ .

1.  $a$  teilt  $b$  (in Zeichen  $a \mid b$ ): Es existiert  $x \in R$  mit  $b = ax$ .
2.  $a$  und  $b$  sind assoziiert (in Zeichen  $a \sim b$ ): Es existiert  $x \in R^\times$  mit  $b = ax$ .

### Lemma 2.2

Für  $a, b, c, d \in R$  gelten

1.  $a \mid a$
2.  $a \mid b$  und  $b \mid c \Rightarrow a \mid c$
3.  $a \mid b$  und  $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$
4.  $a \mid b$  und  $c \mid d \Rightarrow (ac) \mid (bd)$

*Beweis.* klar □

### Lemma 2.3

Für  $a, b, c, d \in R$  gelten

1.  $a \sim a$
2.  $a \sim b$  und  $b \sim c \Rightarrow a \sim c$
3.  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
4.  $a \sim b$  und  $c \sim d \Rightarrow (ac) \sim (bd)$

*Beweis.* klar, da  $(R^\times, \cdot)$  eine Gruppe ist. □

### ► Bemerkung 2.4

Teilbarkeit auf  $R$  ist insbesondere eine Präordnung, das heißt reflexiv und transitiv, und Assoziiertheit ist eine Äquivalenzrelation.

### Lemma 2.5

Sei  $R$  nullteilerfrei und seien  $a, b \in R$ . Genau dann ist  $a \sim b$ , wenn  $a \mid b$  und  $b \mid a$ .

*Beweis.* • Hinrichtung:  $b = ax$  mit  $x \in R^\times \Rightarrow a = bx^{-1}$ .

- Rückrichtung:  $b = ax, a = by$  mit  $x, y \in R^\times$

$$\begin{aligned} a &= by = axy \\ a(1 - xy) &= 0 \end{aligned}$$

Also  $a = 0$  und damit  $b = 0$  oder  $xy = 1$ , also  $x, y \in R^\times$ . In beiden Fällen folgt  $a \sim b$ . □

■ **Beispiel**

Offenbar  $2 \mid -2$  und  $-2 \mid 2$ . Es gilt  $2 \sim -2$  und  $-2 \sim 2$ .

**Satz 2.6**

Sie  $R$  nullteilerfrei. Mit  $[a] := \{a' \in R \mid a \sim a'\}$  wird durch  $[a][b] \iff a \mid b$  eine wohldefinierte Halbordnung auf  $R/\sim := \{[a] \mid a \in R\}$  gegeben.

*Beweis.* • wohldefiniert:  $a \mid b, a \sim a', b \sim b' \Rightarrow a' \mid b'$ :  $ax = b, au = a', bv = b$  mit  $x \in R$  und  $u, v \in R^\times$

$$b' = bv = axv = a' \underbrace{u^{-1}vx}_{\in R}$$

also  $a' \mid b'$ .

- reflexiv: klar
- transitiv: aus Transitivität von  $\mid$
- antisymmetrisch: Lemma 2.5

□

**Definition 2.7 (größter gemeinsamer Teiler, kleinstes gemeinsames Vielfaches)**

Seien  $a, b \in R$ . Ein  $c \in R$  ist ein größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$  in Zeichen  $c = \text{ggT}(a, b)$ , wenn gilt:  $c \mid a$  und  $c \mid b$  und ist  $d \in R$  mit  $d \mid a$  und  $d \mid b$ , so auch  $d \mid c$ .

Ein  $c \in R$  ist ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von  $a$  und  $b$ , in Zeichen  $c = \text{kgV}(a, b)$ , wenn gilt:  $a \mid c$  und  $b \mid c$  und ist  $d \in R$  mit  $a \mid d$  und  $b \mid d$ , so ist  $c \mid d$ .

► **Bemerkung 2.8**

Wenn ggT und kgV in einem nullteilerfreien Ring  $R$  existieren, sind sie eindeutig bestimmt, aber nur bis auf Assoziiertheit (Lemma 2.5).

**Definition 2.9 (Primzahl, irreduzibel)**

Sei  $x \in R$ .

- $x$  ist prim  $\iff x \notin R^\times \cup \{0\}$  und  $\forall a, b \in R$  gilt  $x \mid (ab) \Rightarrow x \mid a \vee x \mid b$ .
- $x$  ist irreduzibel  $\iff x \notin R^\times \cup \{0\}$  und  $\forall a, b \in R$  gilt  $x = ab \Rightarrow a \in R^\times \vee b \in R^\times$ .

► **Bemerkung 2.10**

Leicht sieht man: Ist  $p \in R$  prim und  $a_1, \dots, a_n \in R$  mit  $p \mid (a_1 \dots a_n)$ , so gilt  $p \mid a_i$  für ein  $i$ .

■ **Beispiel 2.11**

- In  $R = \mathbb{Z}$  gilt:  $p$  prim  $\iff p$  irreduzibel
- Sei  $f \in R = \mathbb{Q}[t]$ .
  - $\deg(f) = 1 \Rightarrow f \sim (t - a)$  ist irreduzibel und prim (denn  $(t - a) \mid g \iff g(a) = 0$ )
  - $\deg(f) = 2$ :  $f = t^2 - 1$  ist nicht irreduzibel,  $t^2 - 2$  ist irreduzibel

**Satz 2.12**

Sei  $R$  nullteilerfrei und  $0 \neq p \in R \setminus R^\times$ . Ist  $p$  prim, so ist es auch irreduzibel.

*Beweis.* Sei  $p = ab$  mit  $a, b \in R$ . Da insbesondere  $p \mid ab$  und  $p$  prim ist, folgt  $p \mid a$  oder  $p \mid b$ . Sei ohne Einschränkung  $p \mid a$ , das heißt  $a = pa'$  mit  $a' \in R$ .

$$\begin{aligned}\Rightarrow p &= ab = pa'b \\ \Rightarrow p(1 - a'b) &= 0 \\ \Rightarrow a'b &= 1, \text{ insbesondere } b \in R^\times\end{aligned}$$

Somit ist  $p$  irreduzibel. □

► **Bemerkung 2.13**

Erinnerung: Ein Ideal von  $R$  ist eine Untergruppe  $I \subseteq (R, +)$  mit

$$a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I$$

also genau ein Untermodul des  $R$ -Moduls  $R$ .

**Definition 2.14 (erzeugtes Ideal, Hauptideal)**

Sei  $A \subseteq R$ . Das von  $A$  erzeugte Ideal mit

$$\langle A \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \mid n \in \mathbb{N}_0, a_1, \dots, a_n \in A, r_1, \dots, r_n \in R \right\}$$

Ist  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , so schreibt man auch  $(a_1, \dots, a_n)$  für  $\langle A \rangle$ . Ein Ideal der Form  $I = (a)$  ist ein Hauptideal.

► **Bemerkung 2.15**

Das von  $A$  erzeugte Ideal  $\langle A \rangle$  ist gleich dem von  $A$  erzeugten Untermodul des  $R$ -Moduls  $R$ , und ist das kleinste Ideal von  $R$ , das  $A$  enthält.

► **Bemerkung 2.16**

Für  $a \in R$  ist  $(a) = Ra$  und für  $a, b \in R$  sind äquivalent:

1.  $a \mid b$
2.  $b \in (a)$
3.  $(b) \subseteq (a)$

Für  $R$  nullteilerfrei sind zudem äquivalent:

1.  $a \sim b$
2.  $(a) = (b)$

■ **Beispiel 2.17**

Jeder Ring hat die Ideale  $(0) = \{0\}$  und  $(1) = R$ . Für jedes  $a \in R^\times$  ist  $(a) = (1)$ , ist  $R$  also ein Körper, so hat  $R$  keine weiteren Ideale.

■ **Beispiel 2.18**

In  $R = \mathbb{Z}$ : Für  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $(n) = \mathbb{Z} \cdot n = n\mathbb{Z}$ .

### 3. Hauptidealringe

Sei  $R$  nullteilerfrei.

**Definition 3.1 (Hauptidealring)**

Ein Ring  $R$  ist ein Hauptidealring, wenn  $R$  nullteilerfrei ist und jedes Ideal von  $R$  ein Hauptideal ist.

■ **Beispiel 3.2**

Ist  $R = K$  ein Körper, so hat  $R$  nur die Ideale  $(0)$  und  $(1)$ , und somit ist  $R$  ein Hauptidealring.

**Definition 3.3 (euklidische Gradfunktion)**

Eine euklidische Gradfunktion auf  $R$  ist eine Abbildung  $\delta : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$  für die gilt:

Für jedes  $a \in R$  und  $0 \neq b \in R$  gibt es  $q, r \in R$  mit  $a = bq + r$ , wobei  $r = 0$  oder  $\delta(r) < \delta(b)$ .

Ein nullteilerfreier Ring  $R$  ist euklidisch, wenn es eine euklidische Gradfunktion auf  $R$  gibt.

■ **Beispiel 3.4**

1. Auf  $R = \mathbb{Z}$  ist der Absolutbetrag

$$\delta(x) = |x|$$

eine euklidische Gradfunktion. (LAAG 1 I.4.6)

2. Auf  $R = K[t]$ ,  $K$  ein Körper, ist der Grad

$$\delta(f) = \deg(f)$$

eine euklidische Gradfunktion. (LAAG 1 I.6.5)

3.  $R = K$  ein Körper ist

$$\delta(x) = 0$$

eine euklidische Gradfunktion, da man in einem Körper jedes Element durch jedes Element (Ausnahme: 0) teilen kann.

**Lemma 3.5**

Sei  $\delta : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine euklidische Gradfunktion und  $(0) \neq \trianglelefteq R$  ein Ideal. Ist  $0 \neq a \in I$  mit  $\delta(a) = \min\{\delta(b) \mid 0 \neq b \in I\}$ , so ist  $I = (a)$ .

*Beweis.* • “ $\supseteq$ ”:  $a \in I \Rightarrow (a) \subset I$

- “ $\subseteq$ ”: Sei  $0 \neq b \in I$ . Schreibe  $b = qa + r$  mit  $q, r \in R$  und  $r = 0$  oder  $\delta(r) < \delta(a)$ . Da  $r = \underbrace{b}_{\in I} - q \underbrace{a}_{\in I} \in I$  folgt wegen der Minimalität von  $\delta(a)$ , dass  $r = 0$ , also  $b \in (a)$ .  $\square$

**Satz 3.6**

Ist  $R$  euklidisch, so ist  $R$  ein Hauptidealring.

*Beweis.* Sei  $I \trianglelefteq R$  ein Ideal. Ist  $I = (0)$ , so ist  $I$  ein Hauptideal. Andernfalls existiert ein  $0 \neq a \in I$  mit  $\delta(a)$

minimal. Nach Lemma 3.5 ist  $I = (a)$  ein Hauptideal.  $\square$

### Folgerung 3.7

Die Ringe  $\mathbb{Z}$  und  $K[t]$ ,  $K$  ein Körper, sind Hauptidealringe.

### Lemma 3.8

Sei  $R$  ein Hauptidealring und  $a, b \in R$ . Es existiert ein  $c \in R$  mit  $c = \text{ggT}(a, b)$  und  $(c) = (a, b)$ . Insbesondere gibt es  $x, y \in R$  mit  $c = ax + by$  und  $\text{ggT}(x, y) = 1$ .

*Beweis.*  $R$  Hauptidealring  $\Rightarrow \exists c \in R$  mit  $(c) = (a, b)$ , insbesondere  $c = ax + by$  mit  $x, y \in R$ .

- $c = \text{ggT}(a, b)$ :  $a, b \in (c) \Rightarrow c \mid a$  und  $c \mid b$ . Ist  $d \in R$  mit  $d \mid a$  und  $d \mid b$ , so ist  $d \mid (ax + by) = c$
- $\text{ggT}(x, y) = 1$ : Ist  $d \in R$  mit  $d \mid x$  und  $d \mid y$ , so gelten  $(cd) \mid (ax)$  und  $(cd) \mid (by) \Rightarrow (cd) \mid (ax + by) = c \Rightarrow d \in R^\times$ , also  $d \sim 1$ .  $\square$

### Satz 3.9

Sei  $R$  ein Hauptidealring,  $p \in R$ . Ist  $p$  irreduzibel, so auch prim.

*Beweis.* Seien  $a, b \in R$  mit  $p \mid (ab)$ . Angenommen  $p \nmid a$ . Da  $p$  irreduzibel ist, ist  $\text{ggT}(p, a) = 1$ , also  $1 = px + ay$  mit  $x, y \in R$  nach Lemma 3.8. Also  $p \mid (pbx + aby) = b$ .  $\square$

## 4. Faktorielle Ringe

Sei  $R$  nullteilerfrei.

### Definition 4.1 (faktorielle Ringe)

$R$  ist faktoriell  $\iff$  jedes  $0 \neq x \in R \setminus R^\times$  ist ein Produkt von Primelementen.

### Lemma 4.2

Sei  $R$  faktoriell und  $x \in R$ . Ist  $x$  irreduzibel, so auch prim.

*Beweis.* Sei  $x$  irreduzibel, insbesondere  $0 \neq x \in R \setminus R^\times$ . Da  $R$  faktoriell, ist  $x = p_1 \cdots p_n$  mit  $p_1, \dots, p_n \in R$  prim. Da  $x$  irreduzibel ist und  $p_i \notin R^\times$  ist  $n = 1$  und somit  $x = p_1$  prim.  $\square$

### Lemma 4.3

Sei  $R$  ein Hauptidealring und

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$$

eine Kette von Idealen in  $R$ . Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $I_n = I_m$  für alle  $m \geq n$ .

*Beweis.* Behauptung:  $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  ist wieder ein Ideal von  $R$ .

Beweis: schon in den Übungen zum Teil behandelt, aber hier noch mal kurz bewiesen

- $i \in I, r \in R \Rightarrow x \in I_n$  für ein  $n \xrightarrow{I_n \subseteq I} rx \in I_n \subseteq I$
- $x, y \in I \Rightarrow x \in I_n, y \in I_m$  mit  $n, m \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{Kette}} x + y \in I_k \subseteq I$  mit  $k = \max\{n, m\}$

Da  $R$  Hauptidealring ist, ist somit  $I = (x)$  für ein  $x \in R$ . Mit  $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$  folgt  $x \in I_n$  für ein  $n$ , und somit  $(x) \subseteq I_n \subseteq I_m \subseteq I = (x)$ , für  $m \geq n$ , also  $I_n = I_m$ .  $\square$

### Satz 4.4

Ist  $R$  ein Hauptidealring, so ist  $R$  faktoriell.

*Beweis.* Sei  $X := \{a \in R \mid a \text{ ist Produkt von Primelementen}\} \cup \{0\} \cup R^\times$ . Zu zeigen ist  $X = R$ . Angenommen, es gebe  $a \in R \setminus X$ . Da nicht prim ist, insbesondere nicht irreduzibel (Satz 3.9), ist  $a = a_1 \cdot a'_1$  mit  $a_1, a'_1 \in R \setminus R^\times$ . Wären  $a_1$  und  $a'_1$  in  $X$ , so auch  $a$ , also ohne Einschränkung  $a_1 \notin X$ . Führt man nun mit  $a_1$  so fort, erhält man eine Folge  $a_1, a_2, \dots$  von Elementen von  $R \setminus X$  mit  $a_{i+1} \mid a_i$  und  $a_{i+1} \not\sim a_i$  für alle  $i$ . Die entsprechenden Hauptideale bilden eine Kette

$$(a) \subsetneq (a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq \dots$$

im Widerspruch zu Lemma 4.3. Somit ist  $X = R$ , also  $R$  faktoriell.  $\square$

### Anmerkung

Es gilt also euklidisch  $\Rightarrow$  Hauptidealring  $\Rightarrow$  faktoriell.



**Lemma 4.5**

Sind  $p_1, \dots, p_r \in R$  prim,  $q_1, \dots, q_s \in R$  irreduzibel mit

$$\prod_{i=1}^r p_i = \prod_{j=1}^s q_j$$

ist  $r = s$  und nach Umnummerierung ist

$$p_i \sim q_i \quad \forall i$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung unter der schwächeren Annahme

$$\prod_{i=1}^r p_i \sim \prod_{j=1}^s q_j$$

durch Induktion nach  $r$ .

$r = 0$ :  $1 \sim \prod_{j=1}^s q_j \Rightarrow q_j \in R^\times \forall j \xrightarrow{q_j \text{ irred.}} s = 0$

$r - 1 \rightarrow r$ :  $p_1 \mid \prod_{i=1}^r p_i \sim \prod_{j=1}^s q_j \xrightarrow{p_1 \text{ prim}} p_1 \mid q_j$  für ein  $j$ . Nach Umnummerierung ist  $j = 1$ . Da  $q_1$  irreduzibel und  $p_1 \notin R^\times$  ist  $p_1 \sim q_1$ , also  $q_1 = p_1 \cdot u$  mit  $u \in R^\times$ . Es folgt

$$p_1 \cdot \left( \prod_{i=2}^r p_i - u \cdot \prod_{j=2}^s q_j \right) = 0$$

$$\prod_{i=2}^r p_i = u \cdot \prod_{j=2}^s q_j \sim \prod_{j=2}^s q_j$$

Nach Induktionshypothese ist  $r - 1 = s - 1$ , und nach Umnummerierung ist  $p_i \sim q_i$  für  $i = 2, \dots, r$ .  $\square$

**Satz 4.6**

Ist  $R$  faktoriell, so lässt sich jedes  $0 \neq x \in R \setminus R^\times$  auf eindeutige Weise (bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit) als Produkt von Primelementen schreiben.

*Beweis.* Sei  $x = \prod_{i=1}^r p_i = \prod_{j=1}^s q_j$  mit  $p_i, q_j$  prim. Da die  $q_j$  nach Satz 2.12 irreduzibel sind, folgt  $r = s$  und  $p_i \sim q_i$  für alle  $i$  aus Lemma 4.5.  $\square$

**Folgerung 4.7**

Sei  $R$  faktoriell und enthalte  $\mathcal{P} \subseteq R$  für jede Äquivalenzklasse assoziierter Primelemente genau einen Vertreter. Dann lässt sich jedes  $0 \neq a \in R$  als

$$a = \varepsilon \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\mu(p)}$$

mit eindeutig bestimmten  $\varepsilon \in R^\times$  und  $\mu(p) \in \mathbb{N}_0$ , fast alle gleich 0, schreiben.

**■ Beispiel 4.8**

1. Jedes  $n \in \mathbb{N}$  lässt sich eindeutig als

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p}$$

schreiben, wobei  $\mathbb{P}$  die Menge der Primzahlen ist (Hauptsatz der Arithmetik).

2. Bezeichnet  $\mathcal{M}$  die Menge der normierten irreduziblen Polynome in  $K[t]$  ( $K$  Körper), so lässt sich jedes  $0 \neq f \in K[t]$  eindeutig als

$$f = c \cdot \prod_{P \in \mathcal{M}} P^{n_P}$$

mit  $c \in K^\times$  und  $n_P \in \mathbb{N}_0$ , fast alle gleich 0, schreiben.

## 5. Quotienten von Ringen und Moduln

Seien  $M$  und  $M'$  zwei  $R$ -Moduln und  $N \subseteq M$  ein Untermodul.

### Definition 5.1 (Quotientenmodul)

Für  $x \in M$  schreiben wir

$$x + N := \{x + y \mid y \in N\}$$

Der Quotientenmodul (oder Faktormodul) von  $M$  modulo  $N$  ist

$$M/N := \{x + N \mid x \in M\}$$

zusammen mit der Addition

$$(x + N) + (y + N) := (x + y) + N \quad (x, y \in M)$$

und der Skalarmultiplikation

$$r \cdot (x + N) := rx + N \quad (x \in M, r \in R)$$

Sei  $\pi_N : M \rightarrow M/N$  die Abbildung gegeben durch  $x \mapsto x + N$ .

### Lemma 5.2

Addition und Skalarmultiplikation sind wohldefiniert und machen  $M/N$  zu einem  $R$ -Modul. Die Abbildung  $\pi_N : M \rightarrow M/N$  ist ein  $R$ -Epimorphismus mit Kern

$$\text{Ker}(\pi_N) = N$$

*Beweis.* • wohldefiniert: wie in LAAG 1 III.7.5

•  $M/N$  ist  $R$ -Modul: wie in LAAG 1 III.7.7 □

### ► Bemerkung 5.3

Durch  $x \sim_N x' \iff x - x' \in N$  wird eine Äquivalenzrelation  $\sim_N$  auf  $M$  definiert, und  $x + N$  ist eine  $\sim_N$ -Äquivalenzklasse  $[x]_{\sim_N} = \{y \in M \mid x \sim_N y\}$ .

### Satz 5.4 (Homomorphiesatz für Moduln)

Sei  $f \in \text{Hom}_K(M, M')$  und  $N \subseteq M$  ein Untermodul mit  $N \subseteq \text{Ker}(f)$ . Dann gibt es genau ein  $\bar{f} \in \text{Hom}_K(M/N, M')$  mit  $f = \bar{f} \circ \pi_N$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ & \searrow \pi_N & \nearrow \bar{f} \\ & M/N & \end{array}$$

*Beweis.* Analog zu LAAG 1 III.7.9. Man zeigt, dass jedes  $\bar{f} \in \text{Hom}_K(M/N, M')$

$$\bar{f}(x + N) = f(x) \quad (x \in M)$$

erfüllen muss, und dass dies wiederum eine wohldefinierte Abbildung liefert.  $\square$

### Lemma 5.5

Durch  $U \mapsto \pi_N(U)$  wird eine Bijektion gegeben zwischen

- den Untermoduln von  $M$ , die  $N$  enthalten
- den Untermoduln von  $M/N$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{U}$  die Menge der Untermoduln von  $M$ , die  $N$  enthalten,  $\bar{\mathcal{U}}$  die Menge der Untermoduln von  $M/N$ .

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \pi_N(U) \in \bar{\mathcal{U}}$ : klar, da  $\pi_N$  ein Homomorphismus ist
- $\bar{U} \in \bar{\mathcal{U}} \Rightarrow \pi_N^{-1}(\bar{U}) \in \mathcal{U}$ : klar, da  $\pi_N$  ein Homomorphismus ist und  $N = \text{Ker}(\pi_N) = \pi_N^{-1}(\{0\}) \subseteq \pi_N^{-1}(\bar{U})$
- $\bar{U} \in \bar{\mathcal{U}} \Rightarrow \pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$ : klar, da  $\pi_N$  surjektiv
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = U$ :

$$\begin{aligned} \pi_N^{-1}(\pi_N(U)) &= \bigcup_{x \in U} \pi_N^{-1}(\pi_N(x)) \\ &= \bigcup_{x \in U} \pi_N^{-1}(x + N) \\ &= \bigcup_{x \in U} (x + N) \\ &= U + N = U \end{aligned}$$

$\square$

### ► Bemerkung 5.6

Das Ideal  $I \trianglelefteq R$  ist ein Untermodul des  $R$ -Moduls  $R$ , somit haben wir ein  $R$ -Modul  $R/I$  definiert. Man kann  $R/I$  mit einer Ringstruktur ausstatten.

### Definition 5.7 (Quotientenring)

Sei  $I \trianglelefteq R$  ein Ideal. Für  $x \in R$  schreiben wir

$$x + I = \{x + a \mid a \in I\}$$

Dann ist

$$R/I = \{x + I \mid x \in R\}$$

der Quotientenring von  $R$  modulo  $I$  mit Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} (x + I) + (x' + I) &= (x + x') + I \quad \forall x, x' \in R \\ (x + I) \cdot (x' + I) &= (x \cdot x') + I \quad \forall x, x' \in R \end{aligned}$$

Und wieder  $\pi_I : R \rightarrow R/I$  mit  $x \mapsto x + I$ .

**Lemma 5.8**

Addition und Multiplikation sind wohldefiniert und machen  $R/I$  zu einem kommutativen Ring mit Einselement.  $\pi_I$  ist ein Ringhomomorphismus mit Kern

$$\text{Ker}(\pi_I) = I$$

*Beweis.* • Addition wohldefiniert: Lemma 5.2

- Multiplikation wohldefiniert: Sind  $x, x', y, y' \in R$  mit

$$x + I = x' + I$$

$$y + I = y' + I$$

Dann ist

$$x - x' = a \in I \Rightarrow x = x' + a$$

$$y - y' = b \in I \Rightarrow y = y' + b$$

Also

$$\begin{aligned} xy &= (x' + a)(y' + b) = x'y' + \underbrace{ay' + x'b + ab}_{\in I} \\ &\Rightarrow xy + I = x'y' + I \end{aligned}$$

- $R/I$  ist Ring: R1 bis R3 folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von  $R$ .
- $R/I$  ist kommutativ: folgt auch aus den Eigenschaften von  $R$ .
- Einselement:  $1 + I$
- $\pi_I$  ist ein Ringhomomorphismus: folgt nach Definition
- $\text{Ker}(\pi_I)$ : klar

□

**Satz 5.9 (Homomorphiesatz für Ringe)**

Sei  $\varphi : R \rightarrow R'$  ein Ringhomomorphismus,  $I \trianglelefteq R$  ein Ideal mit  $I \subseteq \text{Ker}(\varphi)$ . Dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus mit  $\bar{\varphi} : R/I \rightarrow R'$ , sodass  $\bar{\varphi} \circ \pi_I = \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M' \\ & \searrow \pi_I & \nearrow \bar{\varphi} \\ & R/I & \end{array}$$

*Beweis.* Man sieht, dass

$$\bar{\varphi}(x + I) = \varphi(x) \quad \forall x \in R$$

gelten muss, und das dies auch ein wohldefinierter Ringhomomorphismus ist.

□

■ **Beispiel 5.10**

- $R = \mathbb{Z}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  ist  $n\mathbb{Z}$  ein Ideal.

$$\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}$$

- Sei  $K$  ein Körper und sei  $a \in K$ . Dann ist  $K[t] \rightarrow K, P \mapsto P(a)$  ist ein Ringhomomorphismus. Der Kern  $\text{Ker}(\varphi) = (t - a)$ , also alle Polynome, die in  $a$  eine Nullstelle haben. Es folgt

$$K[t]/(t - a) \cong K$$

☺  $\mathbb{Z}$  ist der Herr der Ringe ☺

■ **Beispiel 5.11**

Sei  $0 \neq p \in K[t]$ .  $K[t]/(p)$  ist ein Ring, aber auch ein  $K[t]$ -Modul und damit ein  $K$ -Vektorraum.

$$\dim_K (K[t]/(p)) = n = \deg(p)$$

Ist  $B = (1, \bar{t}, \dots, \overline{t^{n-1}})$  eine Basis wobei  $\bar{x} = \pi_{(p)}(x) \forall x \in K[t]$ .

## 6. Der Elementarteilersatz

Sei  $R$  Hauptidealring.

### Definition 6.1

Seien  $a, b, x, y \in R$ . Für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  ist

$$E_{ij} = (\delta_{\sigma,i}, \dots, \delta_{\mu,j})_{\sigma,\mu} \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$$

Sei

$$E_{ij}(a, b, x, y) = \mathbb{1}_n - E_{ii} - E_{jj} + aE_{ii} + bE_{ij} + xE_{jj} + yE_{ji}$$

### Lemma 6.2

Ist  $ax - by \in R^\times$ , so ist

$$E_{ij}(a, b, x, y) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

*Beweis.* Folgt aus LAAG1 IV.3.4, da

$$\det(E_{ij}(a, b, x, y)) = ax - by \in R^\times$$

Oder direkt: Das Inverse ist  $E_{ij}(xc^{-1}, bc^{-1}, ac^{-1}, -yc^{-1})$ , zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xc^{-1} & -bc^{-1} \\ -yc^{-1} & ac^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ax - by)c^{-1} & 0 \\ 0 & (ax - by)c^{-1} \end{pmatrix} \quad \square$$

### ► Bemerkung 6.3

Multiplikation mit  $E_{ij}(a, b, x, y)$  von links an  $(a_1, \dots, a_n)^t \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$

### Theorem 6.4 (Elementarteilersatz für Matrizen)

Sei  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Es gibt

$$0 \leq r \leq \min\{n, m\}$$

$$S \in \text{GL}_m(\mathbb{R})$$

$$T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

mit

$$SAT = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, Q)$$

$$0 = Q \in \text{Mat}_{m-r \times n-r}$$

wobei  $d_i \in R \setminus \{0\}$  mit  $d_i \mid d_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, n-1$

# Anhang



## Anhang A: Listen

### A.1. Liste der Theoreme

Theorem I.4.8: . . . . .	10
Theorem I.5.9: Satz von CAYLEY-HAMILTON . . . . .	13
Theorem I.7.5: JORDAN-Normalform . . . . .	21
Theorem II.4.9: GRAM-SCHMIDT-Verfahren . . . . .	32
Theorem II.5.9: . . . . .	35
Theorem II.6.5: . . . . .	37
Theorem II.7.3: Hauptachsentransformation . . . . .	39
Theorem II.7.9: Trägheitssatz von SYLVESTER . . . . .	41
Theorem II.8.10: Klassifikation der Quadriken bis auf Isometrien . . . . .	45
Theorem III.1.9: Das Lemma von Zorn . . . . .	50
Theorem III.5.6: Spektralsatz . . . . .	61
Theorem IV.6.4: Elementarteilersatz für Matrizen . . . . .	84

## A.2. Liste der benannten Sätze

Satz I.6.4: Lemma von FITTING . . . . .	15
Satz I.7.3: Hauptraumzerlegung . . . . .	20
Satz II.1.4: Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ . . . . .	24
Satz II.2.8: Transformationsformel . . . . .	27
Satz II.3.4: Polarisierung . . . . .	29
Satz IV.5.4: Homomorphiesatz für Moduln . . . . .	80
Satz IV.5.9: Homomorphiesatz für Ringe . . . . .	82

# Index

- Äquivalenzrelation, [48](#)
- JORDAN-Invarianten, [21](#)
- JORDAN-Matrix, [17](#)
- Abbildung
  - bilinear, [63](#)
- Absolutbetrag, [24](#)
- Annulator, [52](#)
- assoziiert, [72](#)
- Ausartungsraum, [41](#)
- ausgeartet, [28](#), [44](#)
- Auswahlfunktion, [50](#)
- Bidualraum, [52](#)
- Bilinearform, [26](#)
- charakteristische Polynom, [4](#)
- definit, [29](#)
- diagonalisierbar, [6](#)
- duale Basis, [51](#)
- Dualraum, [51](#)
- Eigenraum, [2](#)
- Eigenvektor, [2](#)
- Eigenwert, [2](#)
- Endomorphismus
  - adjungierte Endomorphismus, [58](#)
  - normal, [60](#)
  - orthogonal, [34](#)
  - unitär, [34](#)
- euklidische Gradfunktion, [75](#)
- euklidische Norm in  $\mathbb{C}$ , [25](#)
- euklidische Norm in  $\mathbb{R}$ , [24](#)
- euklidischen, [29](#)
- faktoriell, [77](#)
- Familie
  - frei, [70](#)
- größter gemeinsamer Teiler, [73](#)
- Halbordnung, [48](#)
- Hauptideal, [74](#)
- Hauptidealring, [75](#)
- Hauptraum, [20](#)
- Hauptsatz der Arithmetik, [79](#)
- hermitesch, [28](#)
- Ideal
  - erzeugte Ideal, [74](#)
- invariant, [9](#)
- irreduzibel, [73](#)
- Isometrie, [44](#)
- Kette, [49](#)
  - größtes Element, [49](#)
  - kleinstes Element, [49](#)
  - maximales Element, [49](#)
  - minimales Element, [49](#)
  - obere Schranke, [49](#)
  - untere Schranke, [49](#)
- kleinstes gemeinsames Vielfaches, [73](#)
- komplexe Konjugation, [24](#)
- Komplexifizierung, [66](#)
- lineare Ordnung, [48](#)
- Linearformen, [51](#)
- Matrix
  - normal, [60](#)
  - orthogonal, [35](#)
  - unitär, [35](#)
- Minimalpolynom, [12](#)
- Modul, [68](#)
  - (externe) direkte Summe, [70](#)
  - Automorphismus, [69](#)
  - Basis, [70](#)
  - direkt, [70](#)
  - endlich erzeugt, [69](#)
  - Endomorphismus, [69](#)
  - Epimorphismus, [69](#)
  - Erzeugendensystem, [69](#)
  - frei, [70](#)
  - Homomorphismus, [69](#)
  - Isomorphismus, [69](#)
  - Kern, [69](#)

- Monomorphismus, 69
- Summe, 70
- nilpotent, 16
- Nilpotenzklasse, 16
- normiert, 5
- orthogonal, 31
- orthogonale Gruppe, 35
- orthogonale Komplement, 31
- orthogonale Projektion, 32
- orthonormal, 31
- partielle Ordnung, 48
- Präordnung, 72
- prim, 73
- projektiven Raum, 47
- quadratische Form, 29
- Quadrik, 43
  - kegeligen Typ, 44
  - Mittelpunktsquadrik, 44
  - parabolischen Typ, 44
- Quotientenmodul, 80
- Quotientenring, 81
- Relation, 48
  - antisymmetrisch, 48
  - reflexiv, 48
  - symmetrisch, 48
  - total, 48
  - transitiv, 48
- Ring
  - euklidisch, 75
  - selbstadjungiert, 37
  - semidefinit, 29
  - Sesquilinearform, 26
    - darstellende Matrix, 26
  - Signatur, 42
  - spezielle orthogonale Gruppe, 35
  - spezielle unitäre Gruppe, 35
  - Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}$ , 25
  - Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}$ , 23
  - symmetrisch, 28
  - teilt, 6, 72
  - Tensorprodukt, 64
  - Torsionselemente, 71
  - Torsionsmodul, 71
  - Totalordnung, 48
  - trigonalisierbar, 9
  - unitäre Gruppe, 35
  - unitären, 29
  - universelle Eigenschaft, 64
  - Unterm modul, 69
    - erzeugte Unterm modul, 69
  - Vektorraum mit Basis  $X$ , 65
  - Vielfachheit, 7
    - algebraische Vielfachheit, 8
    - geometrische Vielfachheit, 8
  - zyklisch, 13