Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

14. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Endomorphismen

Kapitel II

Skalarprodukte

1. Quadriken

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.1 (Quadrik)
Eine Quadrik ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x + 2b^t x + c = 0\}$$

mit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, $b^t \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$.

▶ **Bemerkung 1.2**

- $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0\}$ also Q ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms in $x_1, ..., x_n$
- Q bestimmt A, b, c nicht eindeutig, da $Q(A, b, c) = Q(\lambda A, \lambda b, \lambda c)$
- Man kann A, b, c so normieren, dass $c = 0$ oder $c = 1$

▶ **Bemerkung 1.3**
Seien A, b, c wie in Definition 1.1, so schreiben wir

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\}$. Wir schreiben (A, b) für

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n,n+1}(\mathbb{R})$$

Es gilt $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(\tilde{A})$.

▶ **Bemerkung 1.4 (Wiederholung)**
Seien V, W K-Vektorräume. $f : V \to W$ heißt affin, wenn $\exists g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $f(v) = g(v) + w_0$ $\forall v \in V$. Ist f affin und bijektiv, so ist f^{-1} affin, d.h. $\mathrm{Aff}_K(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ affin und bijektiv}\}$. Im Fall von $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$ ist

$$\mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \{f = \tau_z \circ f_T \mid T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}^n\}$$

mit $f_T(x) = Tx$ und $\tau_z(x) = x + z$.

Lemma 1.5
Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik, so ist $f(Q)$ eine Quadrik, für $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. $f = \tau_z \circ f_T$ mit $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^n$. Schreibe $S = T^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\tilde{S} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $\tilde{S}\tilde{x} = \widetilde{Sx}$.

$$\begin{aligned} f_T(Q) &= \{Tx \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid (\tilde{S}\tilde{y})^t \tilde{A} \tilde{S} \tilde{y} = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{\tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S}}_{\begin{pmatrix} S^t A S & S^t b \\ b^t S & c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\} \end{aligned}$$

Jetzt für τ_z. Sei $U_z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $U_z \tilde{x} = \tilde{\tau}_z(x)$. Man folgert analog, dass

$$\tau_z(Q) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{y}^t \underbrace{U_z^t \tilde{A} U_z}_{\begin{pmatrix} A & Az + b \\ z^t A + b & z^t A z + b^t z + z^t b + c \end{pmatrix}} \tilde{y} = 0\}$$ □

Definition 1.6 (Typen von Quadriken)
Sei Q gegeben durch (A, b, c) wie in Definition 1.1. Q heißt

- vom <u>kegeligen Typ</u>, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, b) = \mathrm{rk}(\tilde{A})$
- eine <u>Mittelpunktsquadrik</u>, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A, b) < \mathrm{rk}(\tilde{A})$
- vom <u>parabolischen Typ</u>, wenn $\mathrm{rk}(A) < \mathrm{rk}(A, b)$

Lemma 1.7
Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik, $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Von dem Typ, von dem Q ist, ist auch $f(Q)$.

Beweis. $f = f_{S^{-1}}$, $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Da $\tilde{S}$ invertierbar ist, ist $\mathrm{rk}(\tilde{A}) = \mathrm{rk}(\tilde{S}^t \tilde{A} \tilde{S})$, analog auch $\mathrm{rk}(S^t A S) = \mathrm{rk}(A)$. $(S^t A S, S^t b) = S^t (A, b) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{rk}(S^t A S, S^t b) = \mathrm{rk}(A, b)$. Für $f = \tau_z$ analog. □

Definition 1.8 (Isometrie)
Eine <u>Isometrie</u> des $\mathbb{R}^n$ ist $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f(x) = Ax + b$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist orthogonal.

▶ **Bemerkung 1.9**
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie genau dann, wenn $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Theorem 1.10 (Klassifikation bis auf Isometrien)
Sei Q eine Quadrik. Es gibt eine Isometrie $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ mit $f(Q)$, die eine der folgenden Formen annimmt:

- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 0 \right\} \quad k \geq r - k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - \sum_{i=k+1}^{n} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r - k, r < n$

mit $a_1, ..., a_r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $0 \leq k \leq r \leq n$

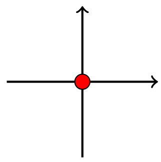
Beweis.

Folgerung 1.11
Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Quadrik. Es gibt eine invertierbare affine Abbildung $f \in \mathrm{Aff}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ für die $f(Q)$ eine der folgenden 3 Formen annimmt:

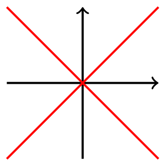
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} x_i^2 = 0 \right\} \quad k \geq r - k$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} x_i^2 = 1 \right\}$
- $f(Q) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} x_i^2 - 2x_{r+1} = 0 \right\} \quad k \geq r - k, r < n$

■ **Beispiel 1.12**
$Q \subseteq \mathbb{R}^2$

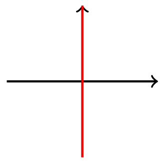
- _ $k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 0 \right\}$



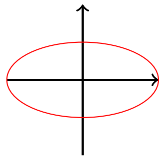
  _ $k = 1, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 0 \right\}$



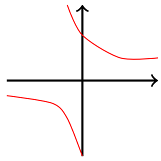
  _ $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 = 0 \right\}$



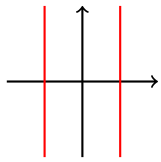
- – $k = 2, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1 \right\}$



  – $k = 1, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1 \right\}$



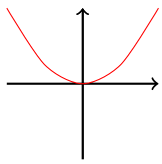
  – $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 = 1 \right\}$



  – $k = 0, r = 2 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1 \right\} = \emptyset$

  – $k = 0, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid -\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 = 1 \right\} = \emptyset$

- – $k = 1, r = 1 : \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 - 2x_2 = 0 \right\}$



▶ Bemerkung 1.13

- Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Quadrik, $U \subseteq V$ affiner Untervektorraum, so ist $Q \cap U$ eine Quadrik in dem Sinne, dass $\exists f$ Isometrie : $f(U) = \mathbb{R}^k$ und $f(Q \cap U)$ ist eine Quadrik.
- Ebene Quadriken sind im wesentlichen Kegelschnitte, $Q' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$, außer 2c und 2d in Beispiel 1.12

Folgerung 1.14
Sei Q eine Quadrik, dann existiert eine lineare affine Abbildung f mit: $f(Q)$ ist vom Typ 1, 2 oder 3.

▶ **Bemerkung 1.15**

Die Situation wird deutlich übersichtlicher, wenn man den affinen Raum $\mathbb{R}^n$ durch Hinzunahme von Punkten im Unendlichen zum projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ vervollstädigt und den Abschluss der Quadriken darin betrachtet. Es stellt sich dann heraus, dass vom projektiven Standpunkt aus die meisten ebenen Quadriken ähnlich aussehen. (Siehe Vorlesung *Elementare Algebraische Geometrie*)

Kapitel III

Dualität

1. Das Lemma von Zorn

Sei K ein Körper und U, V, W seien K-Vektorräume. Zudem sei X eine Menge.

Definition 1.1 (Relation)
Eine Relation ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$. Man schreibt $(x, x') \in R$ als xRx'. R heißt

- reflexiv, wenn $\forall x \in X$: xRx
- transitiv, wenn $\forall x, y, z \in X$: xRy und $yRz \Rightarrow xRz$
- symmetrisch, wenn $\forall x, y \in X$: $xRy \Rightarrow yRx$
- antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in X$: xRy und $yRx \Rightarrow y = x$
- total, wenn $\forall x, y \in X$: $(x, y) \notin R \Rightarrow (y, x) \in R$

Definition 1.2 (Äquivalenzrelation)
Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, transitive und symmetrische Relation.

Definition 1.3 (Halbordnung)
Eine Halbordnung ist eine reflexiv, transitive und antisymmetrische Relation. Eine totale Halbordnung heißt Totalordnung oder lineare Ordnung

■ **Beispiel 1.4**

- Die natürliche Ordnung auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$.
- Teilbarkeit ist eine Halbordnung auf $\mathbb{N}$, aber Teilbarkeit ist keine Halbordnung auf $\mathbb{Z}$, da $1|-1$ und $-1|1$, aber $1 \neq -1$!
- $\mathcal{P}(X)$ ist die Potenzmenge. "$\subseteq$" ist eine Halbordnung auf $\mathcal{P}$, aber für $|X| > 1$ ist "$\subseteq$" keine Totalordnung.
- Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung, sei $Y \subseteq X$, so ist $(Y, \subseteq |_Y)$ eine Halbordnung.

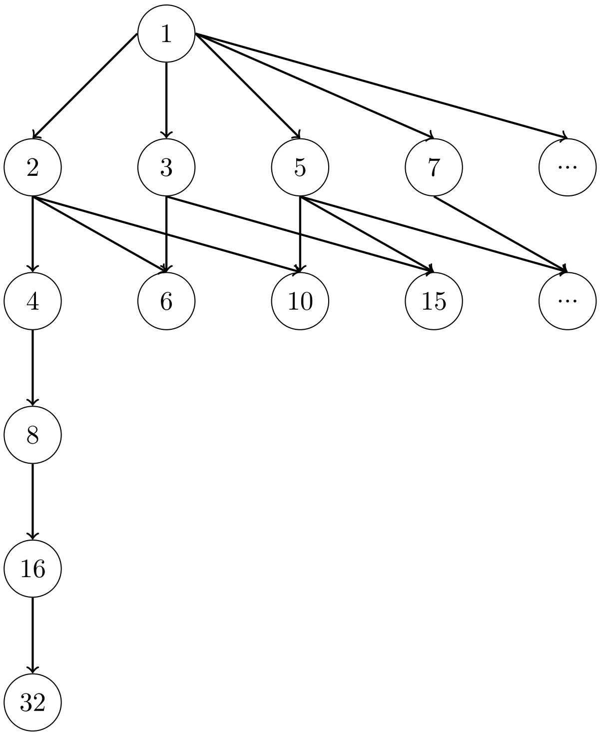
Definition 1.5 (Kette)
Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung, $Y \subseteq X$. Y heißt Kette, wenn $(Y, \leq |_Y)$ total ist.

$x \in Y$ heißt ein minimales Element von Y, wenn $\forall x' \in Y$: $x < x'$.

$x \in Y$ heißt untere Schranke von Y, wenn $\forall y \in Y$: $y \geq x$.

$x \in Y$ heißt kleinstes Element von Y, wenn x untere Schranke von Y ist.

Analog: maximales Element, obere Schranke, größtes Element.



$Y = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Kette

▶ Bemerkung 1.6

- Hat Y ein kleinstes Element, so ist dies eindeutig bestimmt. Ein kleinstes Element ist minimal.
- Jede endliche Halbordnung hat minimale Elemente. Jede endliche Totalordnung hat ein kleinstes Element. Analog für maximale Elemente und größtes Element.

■ Beispiel 1.7

$(\mathbb{N}, \leq)$ hat als kleinstes Element die 1, aber kein größtes Element oder maximale Elemente.

■ Beispiel 1.8

$V = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{X}$ die Menge der Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. $(\mathfrak{X}, \leq)$ ist eine Halbordnung auf $Y \subseteq X$ mit $Y = \{U \in \mathfrak{X} \mid \dim_{\mathbb{R}}(U) \leq 2\}$.

- Y hat ein kleinstes Element: $\{0\}$.
- Es gibt unendlich viele maximale Elemente in Y, nämlich die Untervektorräume von V, die die Dimension 2 haben. Es gibt also kein größtes Element.
- V ist die obere Schranke von Y.

> **Theorem 1.9 (Das Lemma von Zorn)**
> Sei $(X, \leq)$ eine Halbordnung, die nicht leer ist. Wenn jede Kette eine obere Schranke hat, dann hat X ein maximales Element.

Beweis. Dieses Theorem ist äquivalent zum Auswahlaxiom. ☹. Wir wollen zumindest die Hinrichtung zeigen, d.h. aus dem Lemma von Zorn folgt das Auswahlaxiom. □

Folgerung 1.10 (Auswahlaxiom)
Zu jeder Familie (x_i), nicht leer, gibt es eine Auswahlfunktion, das heißt eine Abbildung:

$$f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \text{ mit } f(i) \in X_i \quad \forall i$$

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Menge der Paare (J, f) bestehend aus einer Teilmenge $J \subseteq I$ und einer Abbildung $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i \quad \forall i \in J$. Definieren wir $(J, f) \leq (J', f') \iff J \subseteq J'$ und $f'|_J = f$, so ist $\leq$ eine Halbordnung auf $\mathcal{F}$. Da $(\emptyset, \emptyset) \in \mathcal{F}$ ist $\mathcal{F}$ nichtleer. Ist $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine nichtleere Kette, so wird auf $J' := \bigcup_{(J,f) \in \mathcal{G}} J$ durch $f'(j) = f(j)$ falls $(J, f) \in \mathcal{G}$ und $j \in J$ eine wohldefinierte Abbildung $f' : J \to \bigcup_{i \in J} X_i$ mit $f'(i) \in X_i \quad \forall i \in J'$ gegeben. Das Paar (J', f') ist eine obere Schranke der Kette $\mathcal{G}$. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathcal{F}$ ein maximales Element (J, f). Wir behaupten, dass $J = I$. Andernfalls nehmen wir ein $i' \in I \backslash J$ und ein $x' \in X_{i'}$ und definieren $J' := U \cup \{i'\}$ und $f' : J' \to \bigcup_{i \in J'} X_i$, $j \mapsto \begin{cases} f(j) & j \in J \\ x' & j = i' \end{cases}$. Dann ist $(J', f') \in \mathcal{F}$ und $(J, f) < (J', f')$ im Widerspruch zur Maximalität von (J, f). $\square$

Folgerung 1.11 (Basisergänzungssatz)
Sei V ein K-Vektorraum. Jede linear unabhängige Teilmenge $X_0 \subseteq V$ ist in einer Basis von V enthalten.

Beweis. Sei $\mathfrak{X} = \{X \subseteq V \mid X \text{ ist linear unabhängig}, X_0 \subseteq X\}$ geordnet durch Inklusion. Dann ist $X_0 \in \mathfrak{X}$, also $\mathfrak{X} \neq \emptyset$. Ist $\mathcal{Y}$ eine nichtleere Kette in $\mathfrak{X}$, so ist auch $Y = \bigcup \mathcal{Y} \subseteq V$ linear unabhängig. Sind $y_1, ..., y_n \in Y$ paarweise verschieden, so gibt es $Y_1, ..., Y_n \in \mathcal{Y}$ mit $y_i \in Y_i$ für $i = 1, ..., n$. Da $\mathcal{Y}$ total geordnet ist, besitzt $\{Y_1, ..., Y_n\}$ ein größtes Element, o.E. Y_1. Also sind $y_1, ..., y_n \in Y_1$ und somit linear unabhängig. Folglich ist $Y_1 \in \mathfrak{X}$ eine obere Schranke von $\mathcal{Y}$. Nach dem Lemma von Zorn besitzt $\mathfrak{X}$ ein maximales Element X. Das heißt, X ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V, nach LAAG1 II.3.5 also eine Basis von V. $\square$

2. Der Dualraum

Sei V ein K-Vektorraum.

Definition 2.1 (Dualraum)
Der Dualraum zu V ist der K-Vektorraum

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \to K \text{ linear}\}$$

Die Elemente von V^* heißen Linearformen auf V.

■ **Beispiel 2.2**
Ist $V = K^n = \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$, so wird $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ durch $\mathrm{Mat}_{1\times n}(K) \cong K^n$. Wir können also die Elemente von V als Spaltenvektoren und die Linearformen auf V als Zeilenvektoren auffassen.

Lemma 2.3
Ist $B(x_1)_{i\in I}$ eine Basis von V, so gibt es zu jedem $i \in I$ genau $x_i^* \in V^*$ mit $x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall j \in I$.

Beweis. Siehe LAAG1 III.5.1, angewandt auf die Familie $(y_j)_{j\in I}$, $y_j\delta_{i.j}$ in $W = K$. □

Satz 2.4
Ist $B = (x_1)_{i\in I}$ eine Basis von V, so ist $B^* = (x_i^*)_{i\in I}$ linear unabhängig. Ist I endlich, so ist B^* eine Basis von V^*.

Beweis. Ist $\varphi = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i^*$, $\lambda_i \in K$, fast alle gleich 0, so ist $\varphi(x_j) = \sum_{i\in I} \lambda_j x_i^*(x_j) = \lambda_j$ für jedes $j \in I$. Ist also $\varphi = 0$, so ist $\lambda_j = \varphi(x_j) = 0 \quad \forall j \in I$, B^* ist somit linear unabhängig.
Ist zudem I endlich und $\psi \in V^*$, so ist $\psi = \psi' = \sum_{i\in I} \psi(x_i)x_i^*$, denn $\psi'(x_j) = \sum_{i\in I} \psi(x_i)x_i^*(x_j) = \psi(x_i) \quad \forall j \in I$, und somit ist B^* ein Erzeugendensystem von V^*. □

Definition 2.5 (duale Basis)
Ist $B = (x_i)_{i\in I}$ eine endliche Basis von V, so nennt man $B^* = (x_i^*)_{i\in I}$ die zu B duale Basis.

Folgerung 2.6
Zu jeder Basis B von V gibt es einen eindeutig bestimmtem Monomorphismus

$$f_V \to V^* \text{ mit } f(B) = B^*$$

Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist dieser ein Isomorphismus.

Folgerung 2.7
Zu jedem $= 0 \neq x \in V$ gibt es eine Linearform $\varphi \in V$ mit $\varphi(x) = 1$.

Beweis. Ergänze $x_1 = x$ zu einer Basis $(x_i)_{i\in I}$ von V (Folgerung 1.11) und $\varphi = x_1^*$. □

■ **Beispiel 2.8**
Ist $V = K^n$ mit Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$, so können wir V^* mit dem Vektorraum der Zeilenvektoren identifizieren, und dann ist

$$e_i^* = e_i^t$$

Definition 2.9 (Bidualraum)
Der Bidualraum zu V ist der K-Vektorraum

$$V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$$

Satz 2.10
Die kanonische Abbildung

$$\iota : \begin{cases} V \to V^{**} \\ x \to \iota_x \end{cases} \quad \text{wobei } \iota_x(\varphi) = \varphi(x)$$

ist ein Monomorphismus. Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist ι ein Isomorphismus.

Kapitel IV

Moduln

Anhang

Anhang A: Listen

A.1. Liste der Theoreme

A.2. Liste der benannten Sätze

Index