Analysis 1. Semester (WS2017/18)

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht
Kursassistenz: Moritz Schönherr

28. November 2017

Inhaltsverzeichnis

Literatur

- Forster: Analysis 1 + 2, Vieweg
- Königsberger: Analysis 1 + 2, Springer
- Hildebrandt: Analysis 1 + 2, Springer
- Walter: Analysis 1 + 2, Springer
- Escher/Amann: Analysis 1 + 2, Birkhäuser
- Ebbinghaus: Einfühung in die Mengenlehre, BI-Wissenschaftsverlag
- Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teubner 1996
- Springer-Taschenbuch der Mathematik, Springer 2012

Teil I

Grundlagen der Mathematik

Kapitel 1

Grundbegriffe aus Mengelehre und Logik

Mengenlehre: Universalität von Aussagen
Logik: Regeln des Folgerns, wahre/falsche Aussagen

> **Definition Aussage:** Sachverhalt, dem man entweder den Wahrheitswert ”wahröder ”falschßuordnen kann, aber nichts anders.

Beispiele:
- 5 ist eine Quadratzahl $\rightarrow$ falsch (Aussage)
- Die Elbe fließt durch Dresden $\rightarrow$ wahr (Aussage)
- Mathematik ist rot $\rightarrow$??? (keine Aussage)

> **Definition Menge:** Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen. (Cantor, 1877)

Beispiele:
- $M_1 :=$ Menge aller Städte in Deutschland
- $M_2 := \{1; 2; 3\}$

Für ein Objekt m und eine Menge M gilt stets $m \in M$ oder $m \notin M$
Für die Mengen M und N gilt $M = N$, falls dieselben Elemente enthalten sind $\{1; 2; 3\} = \{3; 2; 1\} = \{1; 2; 2; 3\}$
- $N \subseteq M$, falls $n \in M$ für jedes $n \in N$
- $N \subset M$, falls zusätzlich $M \neq N$

> **Definition Aussageform:** Sachverhalt mit Variablen, der durch geeignete Ersetzung der Variablen zur Aussage wird.

Beispiele:
- $A(X) :=$ Die Elbe fließt durch X

- $B(X;Y;Z) := X + Y = Z$

- aber $A(Dresden), B(2;3;4)$ sind Aussagen, $A(Mathematik)$ ist keine Aussage
- $A(X)$ ist eine Aussage fü jedes $X \in M_1 \rightarrow$ Generalisierung von Aussagen durch Mengen

Bildung und Verknüpfung von Aussagen

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Beispiele:
- $\neg$(3 ist gerade) $\rightarrow$ w
- (4 ist gerade) $\wedge$ (4 ist Primzahl) $\rightarrow$ f
- (3 ist gerade) $\vee$ (3 ist Primzahl) $\rightarrow$ w
- (3 ist gerade) $\Rightarrow$ (Mond ist Würfel) $\rightarrow$ w
- (Die Sonne ist heiß) $\Rightarrow$ (es gibt Primzahlen) $\rightarrow$ w

Auschließendes oder: (entweder A oder B) wird realisiert durch $\neg(A \iff B)$.

Aussageform $A(X)$ sei für jedes $X \in M$ Aussage: neue Aussage mittels Quantoren
- $\forall$: "für alle"
- $\exists$: ës existiert"

Beispiele:
- $\forall n \in \mathbb{N} : n$ ist gerade $\rightarrow$ f
- $\exists n \in \mathbb{N} : n$ ist gerade $\rightarrow$ w

Definition Tautologie bzw. Kontraduktion/Widerspruch: zusammengesetzte Aussage, die unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Teilaussagen stest wahr bzw. falsch ist.

Beispiele:
- Tautologie (immer wahr): $(A) \vee (\neg A), \neg(A \wedge (\neg A)), (A \wedge B) \Rightarrow A$
- Widerspruch (immer falsch): $A \wedge (\neg A), A \iff \neg A$
- besondere Tautologie: $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Satz (de Morgansche Regeln): Folgende Aussagen sind Tautologien:
- $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$

Bildung von Mengen Seien M und N Mengen
- Aufzählung der Elemente: $\{1; 2; 3\}$
- mittels Eigenschaften: $\{X \in M \mid A(X)\}$
- $\emptyset :=$ Menge, die keine Elemente enthält
  - leere Menge ist immer Teilmenge jeder Menge M
  - **Warnung:** $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- Verknüpfung von Mengen wie bei Aussagen

Definition Mengensystem: Ein Mengensystem $\mathcal{M}$ ist eine Menge, bestehend aus anderen Mengen.

- $\bigcup M := \{X \mid \exists M \in \mathcal{M} : X \in M\}$ (Vereinigung aller Mengen in $\mathcal{M}$)
- $\bigcap M := \{X \mid \forall M \in \mathcal{M} : X \in M\}$ (Durchschnitt aller Mengen in $\mathcal{M}$)

Definition Potenzmenge: Die Potenzmenge $\mathcal{P}$ enthält alle Teilmengen einer Menge M.
$\mathcal{P}(X) := \{\tilde{M} \mid \tilde{M} \subset M\}$

Beispiel:

- $M_3 := \{1; 3; 5\}$
  $\to \mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1; 3\}, \{1; 5\}, \{3; 5\}, \{1; 3; 5\}\}$

Satz (de Morgansche Regeln für Mengen):

- $(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N^C$
- $(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N)^C = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N^C$

Definition Kartesisches Produkt: $M \times N := \{m, n \mid m \in M \wedge n \in N\}$
(m, n) heißt geordnetes Paar (Reihenfolge wichtig!)
allgemeiner: $M_1 \times ... \times M_k := \{(m_1, ..., m_k) \mid m_j \in M_j, j = 1, .., k\}$
$M^k := M \times ... \times M := \{(m_1, ..., m_k) \mid m_j \in M_j, j = 1, .., k\}$

Satz (Auswahlaxiom): Sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem nichtleerer paarweise disjunkter Mengen M.

- Es existiert eine Auswahlmenge $\tilde{M}$, die mit jedem $M \in \mathcal{M}$ genau 1 Element gemeinsam hat.
- beachte: Die Auswahl ist nicht konstruktiv!

Kapitel 2

Aufbau einer mathematischen Theorie

Axiome $\rightarrow$ Beweise $\rightarrow$ Sätze ("neue"wahre Aussagen)
$\rightarrow$ ergibt Ansammlung (Menge) wahrer Aussagen

Formulierung mathematischer Aussagen

- typische Form eines mathematischen Satzes: "Wenn A gilt, dann gilt auch B."
- formal: $A \Rightarrow B$ bzw. $A(X) \Rightarrow B(X)$ ist stets wahr (insbesondere falls A wahr ist)

Beispiel

- $X \in \mathbb{N}$ und ist durch 4 teilbar $\Rightarrow X$ ist durch 2 teilbar
- beachte: Implikation auch wahr, falls $X = 5$ oder $X = 6$, dieser Fall ist aber uninteressant
- genauer meint man sogar $A \wedge C \Rightarrow B$, wobei C aus allen bekannten wahren Aussagen besteht
- man sagt: B ist **notwendig** für A, da A nur wahr sein kann, wenn B wahr ist
- man sagt: A ist **hinreichend** für B, da B stets wahr ist, wenn A wahr ist

Mathematische Beweise

- **direkter Beweis:** finde Zwischenaussagen $A_1, ..., A_k$, sodass für A auch wahr:
  $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge ... \wedge (A_k \Rightarrow B)$
- Beispiel: Zeige $x > 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$
  $(x > 2) \Rightarrow (x - 2 > 0) \wedge (x - 1 > 0) \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 1) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$
- **indirekter Beweis:** auf Grundlage der Tautologie $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ führt man direkten Beweis $\neg B \Rightarrow \neg A$ (das heißt angenommen B falsch, dann auch A falsch)
- praktisch formuliert man das auch so: $(A \wedge \neg B) \Rightarrow ... \Rightarrow (A \wedge \neg A)$
- Beispiel: Zeige $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ sei wahr
  $\neg B \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 1) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \neg A$

2.0.1 Relationen und Funktionen

Definition Relation: Seien M und N Mengen. Dann ist jede Teilmenge R von $M \times N$ eine Relation.
$(x, y) \in R$ heißt: x und y stehen in Relation zueinander

Beispiele

- M ist die Menge aller Menschen. Die Liebesbeziehung x liebt y sieht als geordnetes Paar geschrieben so aus: (x, y). Das heißt die Menge der Liebespaare ist das: $L := \{(x, y) \mid x \textit{ liebt } y\}$. Und es gilt: $L \subset M \times M$.

Die Relation $R \subset M \times N$ heißt **Ordnungsrelation** (kurz. Ordnung) auf M, falls für alle $a, b, c \in M$ gilt:

- $(a, a) \in R$ (reflexiv)
- $(a, b), (b, a) \in R$ (antisymetrisch)
- $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitiv)
- z.B. $R = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) \mid X \subset Y\}$

Eine Ordnungsrelation heißt **Totalordnung**, wenn zusätzlich gilt: $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Beispiel
Seien m, n und o natürliche Zahlen, dann ist $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y\}$ eine Totalordnung, da

- $m \leq m$ (reflexiv)
- $(m \leq n \wedge n \leq m) \Rightarrow m = n$ (antisymetrisch)
- $(m \leq n \wedge n \leq o) \Rightarrow m \leq o$ (transitiv)
- $m \leq n \vee n \leq m$ (total)

Eine Relation auf M heißt **Äquivalenzrelation**, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:

- $(a, a) \in R$ (reflexiv)
- $(a, b), (b, a) \in R$ (symetrisch)
- $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitiv)

Obwohl Ordnungs- und Äquivalenzrelation die gleichen Eigenschaften haben, haben sie unterschiedliche Zwecke: Ordnungsrelationen ordnen Elemente in einer Menge (z.B. das Zeichen $\leq$ ordnet die Menge der natürlichen Zahlen), während Äquivalenzrelationen eine Menge in disjunkte Teilmengen (Äquivalenzklassen) ohne Rest aufteilen.

Wenn R eine Ordnung auf M ist, so wird häufig geschrieben:
$a \leq b$ bzw. $a \geq b$ falls $(a, b) \in \mathbb{R}$
$a < b$ bzw. $a > b$ falls zusätzlich $a \neq b$

Definition Abbildung/Funktion: Eine Funktion F von M nach N (kurz: $F : M \mapsto N$), ist eine Vorschrift, die jedem Argument/Urbild $m \in M$ genau einen Wert/Bild $F(m) \in N$ zuordnet.
$D(F) := M$ heißt Definitionsbereich/Urbildmenge
N heißt Zielbild
$F(M') := \{n \in N \mid n = F(m) \text{ für ein } m \in M'\}$ ist Bild von $M' \subset M$
$F^{-1}(N') := \{m \in M \mid n = F(m) \text{ für ein } N'\}$ ist Urbild von $N' \subset N$
$R(F) := F(M)$ heißt Wertebereich/Bildmenge
$graph(F) := \{(m, n) \in M \times N \mid n = F(m)\}$ heißt Graph von F
$F_{|M'}$ ist Einchränkungvon F auf $M' \subset M$

Unterschied Zielmenge und Wertebereich: $f(x) = sin(x)$:
Zielmenge: $\mathbb{R}$
Wertebereich: $[-1; 1]$

Funktionen F und G sind gleich, wenn
- $D(F) = D(G)$
- $F(m) = G(m) \quad \forall m \in D(F)$

Manchaml wird auch die vereinfachende Schreibweise benutzt:
- $F : M \mapsto N$, obwohl $D(F) \subsetneq M$ (z.B. $tan : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, Probleme bei $\frac{\pi}{2}$)
- gelegentlich spricht man auch von "Funktion $F(m)$ßtatt Funktion F

Definition Komposition/Verknüpfung: Die Funktionen $F : M \mapsto N$ und $G : N \mapsto P$ sind verknüpft, wenn
$F \circ G : M \mapsto P$ mit $(F \circ G)(m) := G(F(m))$

Eigenschaften von Funktionen:

- injektiv: Zuordnung ist eineindeutig $\rightarrow F(m_1) = F(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$
- Beispiel: x^2 ist nicht injektiv, da $F(2) = F(-2) = 4$
- surjektiv: $F(M) = N \quad \forall n \in N \ \exists m \in M : F(m) = n$
- Beispiel: $sin(x)$ ist nicht surjektiv, da es kein x für $y = 27$ gibt
- bijektiv: injektiv und surjektiv

Für bijektive Abbildung $F : M \mapsto N$ ist Umkehrabbildung/inverse Abbildung $F^{-1} : N \mapsto M$ definiert durch: $F^{-1}(n) = m \iff F(m) = n$
Hinweis: Die Notation $F^{-1}(N')$ für Urbild bedeutet nicht, dass die inverse Abbildung F^{-1} existiert.

Satz: Sei $F : M \mapsto N$ surjektiv. Dann existiert die Abbildung $G : N \mapsto M$, sodass $F \circ G = id_N$ (d.h. $F(G(n)) = n \quad \forall n \in N$)

Definition Rechenoperation/Verknüpfung: Eine Rechenoperation auf einer Menge M ist die Abbildung $* : M \times M \mapsto M$ d.h. $(m, n) \in M$ wird das Ergbnis $m * n \in M$ zugeordnet.

Eigenschaften von Rechenoperationen:
- hat neutrales Element $e \in M : m * e = m$
- ist kommutativ $m * n = n * m$
- ist assotiativ $k * (m * n) = (k * m) * n$
- hat ein inverses Element $m' \in M$ zu $m \in M : m * m' = e$

e ist stets eindeutig, m' ist eindeutig, wenn die Operation $*$ assoziativ ist.

Beispiele:
- Addition $+$: $(m, n) \mapsto m + n$ Summe, neutrales Element heißt Nullelement, inverses Element $-m$

- Multiplikation $\cdot$: $(m,n) \mapsto m \cdot n$ Produkt, neutrales Element Eins, inverses Element m^{-1}

Addition und Multiplikation sind distributiv, falls $k(m+n) = k \cdot m + k \cdot n$

Definition Körper: Eine Menge M ist ein Körper K, wenn man auf K eine Addition und eine Multiplikation mit folgenden Eigenschaften durchführen kann:
- es gibt neutrale Elemente 0 und $1 \in K$
- Addition und Multiplikation sind jeweils kommutativ und assoziativ
- Addition und Multiplikation sind distributiv
- es gibt Inverse $-k$ und $k^{-1} \in K$

  $\rightarrow$ die reellen Zahlen sind ein solcher Körper

Eine Menge M habe die Ordnung "$\leq$ünd diese erlaubt die Addition und Multiplikation, wenn
- $a \leq b \iff a + c \leq b + c$
- $a \leq b \iff a \cdot c \leq b \cdot c \quad c > 0$

  $\rightarrow$ Man kann die Gleichungen in gewohnter Weise umformen.

Ein Körper K heißt angeordnet, wenn er eine Totalordnung besitzt, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist.

Isomorphismus bezüglich einer Struktur ist die bijektive Abbildung $I : M_1 \mapsto M_2$, die die vorhandene Struktur auf M_1 und M_2 erhält, z.B.
- Ordnung $\leq_1$ auf M_1, falls $a \leq_1 b \iff I(a) \leq_2 I(b)$
- Abbildung $F_i : M_i \mapsto M_i$, falls $I(F_1(a)) = F_2(I(a))$
- Rechenoperation $*_i : M_i \times M_i \mapsto M_i$, falls $I(a *_1 b) = I(a) *_2 I(b)$
- spezielles Element $a_i \in M_i$, falls $I(a_1) = a_2$

Ës gibt 2 verschiedene Arten von reellen Zahlen, meine und Prof. Schurichts. Wenn wir einen Isomorphismus finden, dann bedeutet das, dass unsere Zahlen strukturell die selben sind."

Beispiele: $M_1 = \mathbb{N}$ und $M_2 = \{\text{gerade Zahlen}\}$, jeweils mit Addition, Multiplikation und Ordnung

$\rightarrow I : M_2 \mapsto M_2$ mit $I(k) = 2k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ Isomorphismus, der die Addition, Ordnung und die Null, aber nicht die Multiplikation erhält

2.0.2 Bemerkungen zum Fundament der Mathematik

Forderungen an eine mathematische Theorie:
- widerspruchsfrei: Satz und Negation nicht gleichzeitig herleitbar
- vollständig: alle Aussagen innerhalb der Theorie sind als wahr oder falsch beweisbar

2 Unvollständigkeitssätze:
- jedes System ist nicht gleichzeitig widerspruchsfrei und vollständig
- in einem System kann man nicht die eigene Widerspruchsfreiheit zeigen

Teil II

Zahlenbereiche

Kapitel 3

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N}$ sei diejenige Menge, die die **Peano-Axiome** erfüllt, das heißt

- $\mathbb{N}$ sei induktiv, d.h. es existiert ein Nullelement und eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ mit $\nu(n) \neq 0 \quad \forall n$
- Falls $N \subset \mathbb{N}$ induktiv in $\mathbb{N}$ (0, $\nu(n) \in N$ falls $n \in N \Rightarrow N = \mathbb{N}$

$\rightarrow$ $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Menge

Nach der Mengenlehre ZF (Zermelo-Fraenkel) existiert eine solche Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Mit den üblichen Symbolen hat man:

- $0 := \emptyset$
- $1 := \nu(0) := \{\emptyset\}$
- $2 := \nu(1) := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 := \nu(2) := \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Damit ergibt sich in gewohnter Weise $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$
anschauliche Notation $\nu(n) = n + 1$ (beachte: noch keine Addition definiert!)

Theorem: Falls $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}'$ die Peano-Axiome erfüllen, sind sie isomorph bezüglich Nachfolgerbildung und Nullelement. Das heißt alle solche $\mathbb{N}'$ sind strukturell gleich und können mit obigem $\mathbb{N}$ identifiziert werden.

Satz (Prinzip der vollständigen Induktion): Sei $\{A_n \mid n \in N\}$ eine Menge von Aussagen A_n mit der Eigenschaft
IA: A_0 ist wahr
IS: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \Rightarrow A_{n+1}$
A_n ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

Lemma: Es gilt:

- $\nu(n) \cup \{0\} = \mathbb{N}$
- $\nu(n) \neq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Satz (rekursive Definition/Rekursion): Sei B eine Menge und $b \in B$. Sei F eine Abbildung mit $F : B \times \mathbb{N} \mapsto B$. Dann liefert nach Vorschrift: $f(0) := b$ und $f(n+1) = F(f(n), n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \mapsto B$. Das heißt eine solche Abbildung exstiert und ist eindeutig.

Rechenoperationen:
- Definition Addition '+': $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ durch $n+0 := n$, $n+\nu(m) := \nu(n+m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$
- Definition Multiplikation '$\cdot$': $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ durch $n \cdot 0 := 0$, $n \cdot \nu(m) := n \cdot m + n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ sind beide Definitionen rekursiv und eindeutig definiert.
$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n + 1 = n + \nu(0) = \nu(n + 0) = \nu(n)$

Satz: Addition und Multiplikation haben folgende Eigenschaften:
- es existiert jeweils ein neutrales Element
- kommutativ
- assoziativ
- distributiv

Es gilt $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$:
- $m \neq 0 \Rightarrow m + n \neq 0$
- $m \cdot n = 0 \Rightarrow n = 0$ oder $m = 0$
- $m + k = n + k \Rightarrow m = n$ (Kürzungsregel der Addition)
- $m \cdot k = n \cdot k \Rightarrow m = n$ (Kürzungsregel der Multiplikation)

Ordnung auf $\mathbb{N}$: Relation $R := \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \leq n\}$
wobei $m \leq n \iff n = m + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

Satz: Es gilt auf $\mathbb{N}$:
- $m \leq n \Rightarrow \exists! k \in \mathbb{N} : n = m + k$, nenne $n - m := k$ (Differenz)
- Relation R (bzw. $\leq$) ist eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$
- Ordnung $\leq$ ist verträglich mit der Addition und Multiplikation

Bweis:

- *Sei* $n = m + k = m + k' \Rightarrow k = k'$
- *Sei* $n = n + 0 \Rightarrow n \leq n \Rightarrow$ *reflexiv*
  sei $k \leq m, m \leq n \Rightarrow \exists l, j : m = k + l, n = m + j = (k + l) + j = k + (l + j) \Rightarrow k \leq n \Rightarrow$ *transitiv*
  sei nun $m \leq n$*undn* $n \leq m \Rightarrow n = m + j = n + l + j \Rightarrow 0 = l + j \Rightarrow j = 0 \Rightarrow n = m \Rightarrow$ *antisymmetrisch*
  Totalordnung, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n$ *oder* $n \leq m$
  IA: $m = 0$ *wegen* $0 = n + 0$ *folgt* $0 \leq n \forall n$

IS: gelte $m \leq n$ *oder* $n \leq m$ *mit festem* m *und* $\forall n \in \mathbb{N},$ *dann*
falls $n \leq m \Rightarrow n \leq m+1$
falls $m < n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = m + (k+1) = (m+)1 + k \Rightarrow m+1 \leq n$
$m \leq n$ *oder* $n \leq m$ *gilt für* $m+1$ *und* $\forall n \in \mathbb{N},$ *also* $\forall n, m \in \mathbb{N}$

- *sei* $m \leq n \Rightarrow \exists j : n = m + j \Rightarrow n + k = m + j + k \Rightarrow m + k \leq n + k$

Kapitel 4

Ganze und rationale Zahlen

Frage: Existiert eine natürliche Zahl x mit $n = n' + x$ für ein gegebenes n und n'?
Antwort: Das geht nur falls $n \leq n'$, dann ist $x = n - n'$
Ziel: Zahlenbereichserweiterung, sodass die Gleichung immer lösbar ist. Ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine neue Zahl als Lösung zu. Gewisse Paare liefern die gleiche Lösung, z.B. $(6, 4), (5, 3), (7, 5)$. Diese müssen mittels Relation identifiziert werden.

$$\mathbb{Q} := \{(n_1, n_1'), (n_2, n_2') \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid n_1 + n_2' = n_1' + n_2\}$$

Satz: $\mathbb{Q}$ ist die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Beispiele:

- $(5, 3) \sim (6, 4) \sim (7, 5)$ bzw. $(5 - 3) \sim (6 - 4) \sim (7 - 5)$
- $(3, 6) \sim (5, 8)$ bzw. $(3 - 6) \sim (5 - 8)$

Beweis:

- *offenbar* $((n, n'), (n, n')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ *reflexiv*
- *falls* $((n_1, n_1'), (n_2, n_2')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (n_2, n_2'), (n_1, n_1')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ *symmetrisch*
- *sei* $((n_1, n_1'), (n_2, n_2')) \in \mathbb{Q}$ *und* $((n_2, n_2'), (n_3, n_3')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow n_1 + n_2' = n_1' + n_2, n_2 + n_3' = n_2' + n_3 \Rightarrow n_1 + n_3' = n_1' + n_3 \Rightarrow ((n_1, n_1'), (n_3, n_3')) \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ *transitiv*

setze $\overline{\mathbb{Z} := \{[(n, n')] \mid n, n' \in \mathbb{N}\}}$ Menge der ganzen Zahlen, [ganze Zahl]
Kurzschreibweise: $\overline{m} := [(m, m')]$ oder $\overline{n} := [(n, n')]$

Satz: Sei $[(n,n')] \in \overline{\mathbb{Z}}$. Dann existiert eindeutig $n* \in \mathbb{N}$ mit $(n*,0) \in [(n,n')]$, falls $n \geq n'$ bzw. $(0,n*) \in [(n,n')]$ falls $n < n'$.

Beweis:

- $n \geq n' \Rightarrow \exists! n* \in \mathbb{N} : n = n' + n* \Rightarrow (n*,0) \sim (n,n')$
- $n < n' \Rightarrow \exists! n* \in \mathbb{N} : n + n* = n' \Rightarrow (0,n*) \sim (n,n')$

Frage: Was hat $\overline{\mathbb{Z}}$ mit $\mathbb{Z}$ zu tun?
Antwort: identifiziere $(n,0)$ bzw. $(n-0)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und identifiziere $(0,n)$ bzw. $(0-n)$ mit Symbol $-n$
$\Rightarrow$ ganze Zahlen kann man eindeutig den Elementen folgender Mengen zuordnen: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Rechenoperationen auf $\overline{\mathbb{Z}}$:

- Addition: $\overline{m} + \overline{n} = [(m,m')] + [(n,n')] = [(m+n, m'+n')]$
- Multiplikation: $\overline{m} \cdot \overline{n} = [(m,m')] \cdot [(n,n')] = [(mn + m'n', mn' + m'n)]$

Satz: Addition und Multiplikation sind eindeutig definiert, d.h. unabhängig von Repräsentant bezüglich $\mathbb{Q}$

Beweis:
Sei $(m_1,m_1') \sim (m_2,m_2'), (n_1,n_1') \sim (n_2,n_2') \Rightarrow m_1 + m_2' = m_1' + m_2, n_1 + n_2' = n_1' + n_2 \Rightarrow m_1 + n_1 + m_2' + n_2' = m_1' + n_1' + m_2 + n_2 \Rightarrow (m_1,m_1') + (n_1,n_1') \sim (m_2,m_2') + (n_2,n_2')$

Satz: Für Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ gilt $\forall \overline{m}, \overline{n} \in \overline{\mathbb{Z}}$:
- es existiert eine neutrales Element: $0 := [(0,0)]$, $1 := [(1,0)]$
- jeweils kommutativ, assoziativ und gemeinsam distributiv
- $-\overline{n} := [(n',n)] \in \mathbb{Z}$ ist invers bezüglich der Addition zu $[(n,n')] = \overline{n}$
- $(-1) \cdot \overline{n} = -\overline{n}$
- $\overline{m} \cdot \overline{n} = 0 \iff \overline{m} = 0 \vee \overline{n} = 0$

Beweis:

- *offenbar* $\overline{n} + 0 = 0 + \overline{n} = \overline{n}$ *und* $\overline{n} \cdot 1 = 1 \cdot \overline{n} = \overline{n}$
- *Fleißarbeit*
- *offenbar* $\overline{n} + (-\overline{n}) = (-\overline{n}) + \overline{n} = [(n+n', m+m')] = 0$
- $(-1) \cdot \overline{n} = [(0,1)] \cdot [n,n'] = [n',n] = -\overline{n}$
- *Übungsaufgabe*

Satz: Für $\overline{m}, \overline{n} \in \mathbb{Z}$ hat die Gleichung $\overline{m} = \overline{n} + \overline{x}$ die Lösung $\overline{x} = \overline{m} + (-\overline{n})$

Ordnung auf $\overline{\mathbb{Z}}$: betrachte Relation $R := \{(\overline{m}, \overline{n}) \in \overline{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathbb{Z}} \mid \overline{m} \leq \overline{n}\}$

Satz: R ist Totalordnung auf $\mathbb{Z}$ und verträglich mit Addition und Multiplikation

Ordnung verträglich mit Addition: $\overline{n} < 0 \iff 0 = \overline{n} + (-\overline{n}) < -\overline{n} = (-1) \cdot \overline{n}$

beachte: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{(-n) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

Satz: $\mathbb{Z}$ und $\overline{\mathbb{Z}}$ sind isomorph bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung.

Beweis:
betrachte Abbildung $I : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Z}}$ *mit* $I(k) := [(k, 0)]$ *und* $I(-k) := [(0, k)] \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ *Übungsaufgabe*

Notation: verwende stets $\mathbb{Z}$, schreibe $m, n, ...$ statt $\overline{m}, \overline{n}, ...$ für ganze Zahlen in $\mathbb{Z}$

Frage: Existiert eine ganze Zahl mit $n = n' \cdot x$ für $n, n' \in \mathbb{Z}, n' \neq 0$
Antwort: im Allgemeinen nicht **Ziel:** Zahlbereichserweiterung analog zu $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
ordne jedem Paar $(n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ neue Zahl x zu
schreibe (n, n') auch als $\frac{n}{n'}$ oder $n : n'$
identifiziere Paare wie z.B. $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}$ durch Relation
$\mathbb{Q} := (\frac{n_1}{n_2'}, \frac{n_2}{n_2'}) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}) \mid n_1 n_2' = n_1' n_2$
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$

setze $\mathbb{Q} := [\frac{n}{n'}] \mid (n, n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ Menge der rationalen Zahlen
beachte: unendlich viele Symbole $\frac{n}{n'}$ für gleiche Zahl $[\frac{n}{n'}]$
wir schreiben später $\frac{n}{n'}$ für die Zahl $[\frac{n}{n'}]$

offenbar gilt die Kürzungsregel: $[\frac{n}{n'}] = [\frac{kn}{kn'}] \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$

Rechenoperationen auf $\mathbb{Q}$:

- Addition: $[\frac{m}{m'}] + [\frac{n}{n'}] := [\frac{mn' + m'n}{m'n'}]$
- Multiplikation: $[\frac{m}{m'}] \cdot [\frac{n}{n'}] := [\frac{mn}{m'n'}]$

Satz: Mit Addition und Multiplikation ist $\mathbb{Q}$ ein Körper mit
- neutralen Elementen: $0 = [\frac{0_\mathbb{Z}}{1_\mathbb{Z}}] = [\frac{0_\mathbb{Z}}{n_\mathbb{Z}}], 1 := [\frac{1_\mathbb{Z}}{1_\mathbb{Z}}] = [\frac{n}{n}] \neq 0$
- inversen Elementen: $-[\frac{n}{n'}] = [\frac{-n}{n}], [\frac{n}{n'}]^{-1} = [\frac{n'}{n}]$

Ordnung auf $\mathbb{Q}$: für $[\frac{n}{n'}] \in \mathbb{Q}$ kann man stets $n' > 0$ annehmen
Realtion: $R := \{([\frac{m}{m'}], [\frac{n}{n'}]) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid mn' \leq m'n, m', n' > 0\}$ gibt Ordnung $\leq$

Satz: $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper (d.h. $\leq$ ist eine Totalordnung und verträglich mit Addition und Multiplikation)

Notation: schreibe vereinfacht nur noch $\frac{n}{n'}$ für die Zahl $[\frac{n}{n'}] \in \mathbb{Q}$ und verwende auch Symbole $p, q, ...$ für Elemente aus $\mathbb{Q}$

Gleichung $p \cdot x = q$ hat stets eindeutige Lösung: $x = q \cdot p^{-1}$ $(p, q \in \mathbb{Q}, p \neq 0)$

Frage: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$? **Antwort:** Sei $\mathbb{Z}_\mathbb{Q} := \frac{n}{1} \in \mathbb{Q} \mid n\mathbb{Z}, I : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\mathbb{Q}$ mit $I(n) = \frac{n}{1}$
$\Rightarrow I$ ist Isomorphismus bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung.
In diesem Sinn: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Folgerung: Körper $\mathbb{Q}$ ist archimedisch angeordnet, d.h. für alle $q \in \mathbb{Q} \exists n \in \mathbb{N} : q <_\mathbb{Q} n$

Beweis:
Sei $q = [\frac{k}{k'}]$ *mit* $k' > 0$
$n := 0$ *falls* $k < 0 \Rightarrow q = [\frac{k}{k'}] < [\frac{0}{k'}] = 0 = n$
$n := k + 1$ *falls* $k \geq 0 \Rightarrow q = [\frac{k}{k'}] < [\frac{k+1}{k'}] = n$

Kapitel 5

Reelle Zahlen

Kapitel 6

komplexe Zahlen

Teil III

Metrische Räume und Konvergenz

Kapitel 7

Grundlegen Ungleichungen

Kapitel 8

Metrische Räume

Kapitel 9

Konvergenz

Kapitel 10

Vollständigkeit

Kapitel 11

Kompaktheit

Kapitel 12

Reihen

Teil IV

Funktionen und Stetigkeit

Kapitel 13

Funktionen