Gewöhnliche Differentialgleichungen und Integration auf Mannigfaltigkeiten WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht

12. November 2018

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kapitel VIII

Integration auf Mannigfaltigkeiten

29. Mannigfaltigkeiten

Definition
Sei $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$, $V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $q \geq 1$. φ heißt regulär in $x \in V$, falls

$$\varphi'(x)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \text{ regulär} \tag{1}$$

Falls φ regulär $\forall x \in V$ heißt φ regulär auf V bzw. reguläre C^q-Parametrisierung (auch C^q-Immersion). V heißt Parameterbereich und $\varphi(V)$ Spur von V.

Gleichung (1) impliziert

$$d \leq n \tag{2}$$

und sei in Kapitel VIII stehts erfüllt. Folglich:

$$\text{Gleichung (1)} \Leftrightarrow \text{rang} \underbrace{\varphi'(x)}_{n \times d\text{-Matrix}} = d \tag{1'}$$

■ **Beispiel 29.1**

1) Reguläre Kurve: $\varphi\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, I offen, $\varphi'(x) \neq 0$ ($\varphi'(x)$ ist der Tangentialvektor)
2) $\varphi\colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\cos kt, \sin kt)^\mathsf{T}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ (k-fach durchlaufener Einheitskreis)
3) $\varphi\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (1 + 2\cos t)(\cos t, \sin t)^\mathsf{T}$ mit den besonderen Werte

$$\varphi\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Achtung: $\binom{1}{0}$ gehört nicht zur Kurve. φ ist regulär (ÜA)
4) $\varphi\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (t^3,\ t^2)^\mathsf{T}$ ist nicht regulär, da $\varphi'(0) = 0$.

■ **Beispiel 29.2 (Parametrisierung von Graphen)**
Sei $f \in C^q(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^d$ offen.

Betrachte $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) := \big(x, f(x)\big)$. Offenbar ist $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi'(x) = \big(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}, f'(x)\big) \in \mathbb{R}^{n \times d}$.
$\Rightarrow \varphi$ stets regulär.

29.1. Relativtopologie auf Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$

Definition
$U \subset M$ heißt offen bezüglich M genau dann wenn $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U = \tilde{U} \cap M$.

$U \subset M$ heißt Umgebung von $u \in M$ bezüglich M, falls $\exists U_0 \subset M$ offen bezüglich M mit $u \in U_0 \subset U$.

29.2. Mannigfaltigkeiten

Definition
$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit ($q \geq 1$) falls $\forall u \in M$ existiert eine Umgebung U von u bezüglich M und $\varphi\colon V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, V offen mit φ reguläre C^q-Parametrisierung und φ ist Homöomorphismus und $\varphi(V) = U$.

M heißt auch C^q-Untermannigfaltigkeit. Verwende Mannigfaltigkeit statt C^1-Mannigfaltigkeit

Definition
φ^{-1} bzw. (φ^{-1}, U) heißt Karte von M um $u \in M$. φ ist das zugehörige Kartengebiet , φ zugehörige Parametrisierung , V zugehöriger Parameterbereich .

Eine Menge $\{\varphi_\alpha^{-1} \mid \alpha \in A\}$ heißt Atlas von M, falls die zugehörigen Kartengebiete U_α die Mannigfaltigkeit überdecken (d.h. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset M$).

Definition
Eine reguläre Parametrisierung $\varphi\colon V \subset \mathbb{R}^d \to U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Einbettung , falls sie ein Homöomorphismus ist.

Vereinbarung: Parametrisierungen in Verbindung mit Mannigfaltigkeiten sind immer Homöomorphismen (also Einbettungen).

■ Beispiel 29.3

1) Der Kreis aus Beispiel 29.1 ist eine eindimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit (d.h. C^q-Mannigfaltigkeit $\forall q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, obwohl mehrfach durchlaufen). Ein Atlas benötigt mindestens zwei Karten.

2) Kurven aus Beispiel 29.1 3), 4) sind keine Mannigfaltigkeiten

3) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, $\{\mathrm{id}\}$ ist der zugehörige Atlas.

■ Beispiel 29.4
$M :=$ graph f aus Beispiel 29.2.

Offenbar ist $\varphi\colon V \subset \mathbb{R}^d \to M \subset \mathbb{R}^n$ Homöomorphismus und reguläre C^q-Parametrisierung
$\Rightarrow M$ ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit.

■ Beispiel 29.5
Sei $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$, D offen, $f \in C^q$ $(q \geq 1)$, rang $f'(x) = n - d$ $\forall u \in D$. Definiere

$M := \{u \in D \mid f(u) = 0\}$

Fixiere $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in M$, wobei $\tilde{u} = (x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) \in \mathbb{R}^n$.

$\star \Rightarrow f_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$ regulär

$\xrightarrow[\text{Funktion}]{\text{implizite}}$ $\exists$ Umgebung $V \subset \mathbb{R}^d$ von $\tilde{x}$, Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von $\tilde{y}$ und $\psi \in C^q(V, W)$ mit $(x, \psi(x)) \in M$, $\psi\colon V \to W$

$\Rightarrow \varphi\colon V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) := (x, \psi(x))$ ist reguläre C^q-Parametrisierung, Homöomorphismus und $\varphi(V)$ ist Umgebung von $\tilde{u} \in M$ bezüglich M

$\Rightarrow M$ ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit

Bemerkung: $M = \operatorname{graph} f$ und $M = \{f = 0\}$ sind grundlegende Konstruktionen von Mannigfaltigkeiten. Jede Mannigfaltigkeit hat – lokal – diese Eigenschaft.

Satz 29.6 (lokale Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Graph)
Es gilt

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit	$\Leftrightarrow$	$\forall u \in M \, \exists$ Umgebung U von u bezüglich M, $W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und Permutation Π von Koordinaten in $\mathbb{R}^n$, sodass $\psi(W) = U$ und $\psi(u) = \Pi(w, f(w)) \; \forall w \in W$ (d.h. U ist Graph von f).

Somit: M ist C^q-Mannigfaltigkeit genau dann wenn M lokal Graph einer C^∞-Funktion ist.

Beweis.

($\Rightarrow$) Klar nach z.B. Beispiel 29.2

($\Leftarrow$) Sei M Mannigfaltigkeit. Fixiere $\tilde{u} \in M$. Sei $\varphi\colon \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ zugehörige C^q-Parametrisierung von $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$.
$\varphi'(x)$ ist regulär $\Rightarrow \varphi_I'(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär für die Zerlegung von φ in

$$\varphi(x) = \Pi \begin{pmatrix} \varphi_{\mathrm{I}}(x) \\ \varphi_{\mathrm{II}}(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\mathrm{I}}(x) \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi_{\mathrm{II}}(x) \in \mathbb{R}^{n-d}$$

Zerlege ebenso $u = \Pi(v, w)$, $v \in \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}^{n-d}$ (d.h. auch $\tilde{u} = \Pi(\tilde{v}, \tilde{w})$)

$\xRightarrow[\text{Funktion}]{\text{Inverse}}$ Damit existieren

- $V \subset \tilde{V}$ offen, mit obigem $\tilde{x} \in V$, $W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\tilde{\nu} \in W$
- $\varphi_{\mathrm{I}}^{-1} \colon W \to V$ als Homöomorphismus, C^q-Abbildung, $\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(\tilde{\nu}) = \tilde{x}$

Definiere $f(v) := \varphi_{\mathrm{II}}\big(\varphi^{-1}(v)\big)\ \forall v \in W$. Offenbar ist $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und damit

$$\psi(v) := \varphi\big(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\big) = \Pi\left[\varphi_{\mathrm{I}}\big(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\big), \varphi_{\mathrm{II}}\big(\varphi_{\mathrm{I}}^{-1}(v)\big)\right] = \Pi(v, f(v))$$

$\Rightarrow \psi(\tilde{\nu}) = \Pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}$ und $\psi(W) = \varphi(V) \subset M$

$\xRightarrow[\text{morphismus}]{\varphi\text{ Homöo-}}$ $\varphi(V)$ ist offen in M

$\Rightarrow U := \psi(W)$ offen bezüglich M

$\Rightarrow U$ ist Umgebung von $\tilde{u}$ bezüglich M

Da $\tilde{u}$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 29.7 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten über umgebenden Raum)
Es gilt:

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow$ $\forall u \in M\ \exists$ Umgebung $\tilde{U}$ von u bezüglich dem $\mathbb{R}^n$, $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen sowie $\tilde{\psi} \colon \tilde{U} \to \tilde{V}$ mit $\tilde{\psi}$ ist C^q-Diffeomorphismus und

$$\tilde{\psi}(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap (\underbrace{\mathbb{R}^d \times \{0\}}_{\in \mathbb{R}^n})$$

Bemerkung: Die Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten benutzt den umgebenden Raum und wird häufig als Definition für Mannigfaltigkeiten angegeben.

Beweis.

($\Leftarrow$) $\tilde{\psi}$ eingeschränkt auf $\tilde{U} \cap M$ liefert Karten $\Rightarrow$ Behauptung

($\Rightarrow$) Fixiere $\tilde{u} \in M$. Wähle $U \subset M$, $W \subset \mathbb{R}^d$ sowie $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ gemäß Satz 29.6 und sei oBdA $\Pi = \mathrm{id}$.
Zerlege nach dem Schema $u = (v, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ obiges $\tilde{u} = (\tilde{v}, f(\tilde{v}))$.
Definiere $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$ und $\tilde{\varphi} \colon \hat{V} \to \hat{U}$ mit $\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w)$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} \in C^q,\ \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_d & 0 \\ f'(v) & \mathrm{id}_{n-d} \end{pmatrix} \text{ ist regulär}$$

$\xRightarrow[\text{Funktion}]{\text{implizite}}$ $\exists$ Umgebung $\tilde{U} \subset \hat{U}$ von $\tilde{u}$, Umgebung $\tilde{V} \subset \hat{V}$ von $(\tilde{v}, 0)$, sodass $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in C^q(\tilde{U}, \tilde{V})$ existiert.
Wegen $\tilde{\varphi}(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = \tilde{U} \cap M$ folgt die Behauptung. □

Folgerung 29.8
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit und $\varphi \colon V \subset \mathbb{R}^d \to U \subset M$ eine Parametrisierung von U
$\Rightarrow \exists \tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tilde{\varphi} \colon \tilde{V} \to \tilde{U}$ mit $U \subset \tilde{U}$ und $V \times \{0\} \subset \tilde{V}$ sowie $\tilde{\varphi}$ ist C^q-Diffeomorphismus mit $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x)\ \forall x \in V$.

Beweis. Folgt aus den Beweisen von Satz 29.6 und Satz 29.7. □

Satz 29.9 (lokale Darstellung von Mannigfaltigkeiten als Niveaumenge)
Es gilt

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit	$\Leftrightarrow$	$\forall u \in M$ $\exists$ Umgebung $\tilde{U}$ von u bezüglich dem $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$ mit $\operatorname{rang} f'(u) = n - d$ und $\tilde{U} \cap M = \{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\}$.

Somit: M ist C^q-Mannigfaltigkeit genau dann wenn M lokal Niveaumenge einer C^q-Funktion ist.

Definition
$c \in \mathbb{R}^{n-d}$ heißt regulärer Wert von $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, falls $\operatorname{rang} f'(u) = n-d \; \forall u \in \tilde{U}$ mit $f(u) = c$.

Folglich ist $M = \{u \in \tilde{U} \mid f(u) = c\}$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit falls c regulärer Wert von f ist.

Beweis.
($\Leftarrow$) Gemäß Beispiel 29.5 erhält man eine lokale Parametrisierung $\Rightarrow$ Behauptung

($\Rightarrow$) Fixiere $\tilde{u} \in M$. Wähle $\tilde{U}$, $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{\psi} \colon \tilde{U} \to \tilde{V}$ gemäß Satz 29.7.
Sei $f := (\tilde{\psi}_{d+1}, \ldots, \tilde{\psi}_n)$. Offenbar ist $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$.
Mit $\tilde{\varphi}$ aus Satz 29.7 folgt, dass $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \varphi'(\tilde{v}, 0)^{-1}$ regulär ist
$\Rightarrow$ $f'(u)$ hat vollen Rang, d.h. $\operatorname{rang} f'(u) = n - d$
$\Rightarrow$ nach Konstruktion ist $\{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\} = \tilde{U} \cap M$
$\Rightarrow$ Behauptung. □

Kartenwechsel: Offenbar sind die Karten / der Atlas für Mannigfaltigkeiten nicht eindeutig, daher ist gelegentlich ein Wechsel der Karten sinnvoll.

Lemma 29.10 (Kartenwechsel)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit und φ_1^{-1}, φ_2^{-1} Karten mit Kartengebieten $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ist C^q-Diffeomorphismus.

Beweis. Ersetzte φ_1 und φ_2 mit $\tilde{\varphi_1}$, $\tilde{\varphi_2}$ gemäß Folgerung 29.8. Einschränkung von $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ liefert die Behauptung. □

Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor von $u \in M$, falls eine stetig differentierbare Kurve $\gamma \colon (-\delta, \delta) \to M$ $(\delta > 0)$ existiert mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$.

Die Menge aller Tangentialvektoren heißt Tangentialraum .

Satz 29.11
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit, $u \in M$, $\varphi\colon V \to M$ zugehörige Parametrisierung von u.

$\Rightarrow T_uM$ ist d-dimensionale ($\mathbb{R}$-) Vektorraum und

$$T_uM = \underbrace{\varphi'(x)}_{\in L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n)} \in \mathbb{R}^d \tag{3}$$

mit $x := \varphi^{-1}(u)$, wobei T_uM unabhängig von spezieller Parametrisierung φ ist.

Beweis. Sei $\gamma\colon (-\delta,\delta) \to M$ C^1-Kurve mit $\gamma(0) = u$
$\Rightarrow g := \varphi^{-1} \circ \gamma$ ist C^1-Kurve $g\colon (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}^d$ mit $g(0) = x$ und

$$\gamma'(0) = \varphi'(x) \cdot g'(0), \quad \varphi'(x) \text{ ist regulär.}$$

Offenbar liefert jede C^1-Kurve g im $\mathbb{R}^d$ durch x eine C^1-Kurve γ in M mit ???. **Die Menge aller Tangentialvektoren $g'(0)$ von C^1-Kurven g im $\mathbb{R}^d$ ist offenbar $\mathbb{R}^d$.**
$\Rightarrow$ **Gleichung (3)** $\xrightarrow[\textbf{regulär}]{\varphi'(x)}$ $\dim(T_uM) = d$.

Da ??? für jede Parametrisierung gilt, ist T_uM unabhängig von φ. □

Bemerkung: Man bezeichnet auch $(u, T_uM) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialraum und $TM := \bigcup_{u\in M}(u, T_uM) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialbündel.

■ **Beispiel 29.12**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Rightarrow M$ ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $T_uM = \mathbb{R}^n$ $\forall u \in M$.

Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Vektoren $w \in \mathbb{R}^n$ heißen Normalenvektor in $u \in M$ an M, falls

$$\langle w, v\rangle = 0 \quad \forall v \in T_uM.$$

Die Menge aller Normalenvektoren $N_uM := (T_uM)^\perp$ heißt Normalenraum von M in u.

Satz 29.13
Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d})$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ regulärer Wert von f.

$\Rightarrow M := \{u \in V \mid f(u) = c\}$ ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit mit

$$\begin{aligned} T_uM &= \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(u)\cdot v = 0\} && (\ker f'(u)) && \forall u \in M \\ N_uM &= \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = f'(u)^\mathsf{T} \cdot v,\ v \in \mathbb{R}^{n-d}\} && && \forall u \in M \end{aligned}$$

d.h. die Spalten von $f'(u)^\mathsf{T}$ bilden eine Basis von N_uM.

■ **Beispiel 29.14**

Sei $f = \binom{f_1}{f_2} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, $0 \in \mathbb{R}^2$ regulärer Wert von f.
$\Rightarrow M := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(u) = 0 = f_2(u)\}$ ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Der Gradient $f_i'(u)^\mathsf{T}$ steht senkrecht auf $\{f_i = 0\}$.
$\Rightarrow f_1'(u)^\mathsf{T}$, $f_2'(u)^\mathsf{T}$ sind Normalen zu M in u.
$\Rightarrow f_i'(u)^\mathsf{T} \cdot v = 0$, $i = 1, 2$ für Tangentenvektor v.

Beweis. M ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit, vgl. Satz 29.9.
Sei γ C^1-Kurve auf M, $\gamma(0) = u$, $\gamma'(0) = v \Rightarrow f(\gamma(t)) = c \ \forall t$.
$\Rightarrow f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = f'(u) \cdot v = 0$.

Wegen $\operatorname{rang} f'(u) = n - d$ folgt $\dim \ker f'(u) = d$
$\Rightarrow$ Behauptung für T_uM wegen $\dim T_uM = d$.

Sei $w = f'(u)^\mathsf{T}\tilde{v}$ und $v \in T_uM \Rightarrow \langle w, v\rangle = \langle \tilde{v}, f(u)v\rangle = 0 \Rightarrow w \in N_uM$.
Da $\operatorname{rang} f'(u)^\mathsf{T} = n - d$ und $\dim N_uM = n - d$ folgt die Behauptung. □

■ **Beispiel 29.15**

Sei $M := O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\mathsf{T}A = \mathrm{id}\}$ die orthogonale Gruppe. Dann ist M eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$T_{\mathrm{id}}M = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B + B^\mathsf{T} = 0\}, \quad \text{(schiefsymmetrische Matrizen)}$$

Beweis.

- Betrachte $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ mit $f(A) = A^\mathsf{T}A$
  $\Rightarrow f$ ist stetig differenzierbar mit $f'(A)B = A^\mathsf{T}B + B^\mathsf{T}A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} \ \forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- id ist ein regulärer Wert von f, denn sei $f(A) = \mathrm{id}$, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$
  $\Rightarrow f'(A)B = S$ hat die Lösung $B = \frac{1}{2}AS$, denn $\frac{1}{2}A^\mathsf{T}AS + \frac{1}{2}SA^\mathsf{T}A = S$, d.h. $f'(A)$ hat vollen Rang
  $\xRightarrow{\text{Satz 29.9}} M$ ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $d = \dim \mathbb{R}^{n\times n} - \dim \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- $T_{\mathrm{id}}M = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{id}^T B + B^T \mathrm{id} = 0\}$ □

Bemerkung:

- $A \in O(n) \Rightarrow A$ erhält das Skalarprodukt: $\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^\mathsf{T}Ax, y\langle = \langle x, y\rangle$.
- auch $A^\mathsf{T} \in O(n)$, somit stehts $A^{-1} = A^T$.

Definition

$(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit heißt Hyperfläche .

Die Abbildung $\nu\colon M \to \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}$ Mannigfaltigkeit, heißt Einheitsnormalenfeld , falls $\nu(n) \in N_uM$, $\|\nu(u)\| = 1 \ \forall u \in M$ und ν stetig auf M.

Lemma 29.16

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängende Hyperfläche

$\Rightarrow$ Es existiert kein Einheitsnormalenfeld oder genau 2.

Beweis.

a) Falls ν Einheitsnormalenfeld auf M, dann auch $-\nu$.

b) Seien ν, $\tilde{\nu}$ Einheitsnormalenfelder auf M

$\Rightarrow s(u) := \langle \nu(u), \tilde{\nu}(\nu) \rangle = \pm 1$.

Mit $\dim N_u M = 1$, ν stetig auf M und M zusammenhängend

$\Rightarrow s(u) = 1$ oder $s(u) = -1 \; \forall u \in M$

$\Rightarrow \tilde{\nu} = \nu$ oder $\nu = -\tilde{\nu}$ □

Beispiel 29.17

Das Möbius-Band: klebe die Enden eines $2d$-Streifens verdreht zusammen

$\Rightarrow$ besitzt kein Einheitsnormalenfeld.

Definition

Eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt orientierbar , falls ein Einheitsnormalenfeld $\nu \colon M \to \mathbb{R}^n$ existiert. ν heißt Orientierung , (M, ν) orientierte Mannigfaltigkeit .

Beispiel 29.18

Konstruiere ein Einheitsnormalenfeld für Hyperfläche $M = \{f = 0\}$.

Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R})$, $V \subset \mathbb{R}^n$, 0 regulärer Wert von f. Dann ist

$$M := \{u \in V \mid f(u) = 0\}$$

eine Hyperfläche.

Offenbar ist $\nu(u) = \frac{f'(u)}{|f'(u)|}$ Einheitsnormalenfeld auf M, denn der Gradient $f'(u)$ steht senkrecht auf Niveaumengen von f.

Definition

Seien $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_1|\ldots|a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ und $A_k \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ sei Matrix A ohne k-te Zeile. Dann heißt

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} := \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit $\alpha_k := (-1)^{k-1} \det A_k$ äußeres Produkt von $a_1, \ldots, a_{n-1}$.

(später: $\alpha \perp \alpha_j \; \forall j$, $|\alpha| =$ Volumen des von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ aufgespannten Parallelisotops.)

Beispiel 29.19

Für $n = 3$ ist $a_1 \wedge a_2 = a_1 \times a_2$ das Kreuzprodukt.

Lemma 29.20

Seien $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow \langle b, a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} \rangle = \det(b \mid a_1 \mid \ldots \mid a_{n-1}) \quad \forall b \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} \perp a_j \quad \forall j \in 1, \ldots, n-1$$

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1} = \begin{cases} = 0 & \text{falls } a_j \text{ linear abhängig,} \\ \neq 0, & \text{falls } a_j \text{ linear unabhängig} \end{cases}$$

Beweis. Für Gleichung (4) entwickle $\det(\ldots)$ nach erster Spalte b. $b = a_j$ in Gleichung (4) liefert zweite Behauptung, (4) liefert auch 3. Behauptung. □

■ Beispiel 29.21

Konstruiere ein Einheitsnormalenfeld mittels Parametrisierung φ. Sei $M = \varphi(V)$ Hyperfläche mit zugehöriger Parametrisierung $\varphi\colon V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, V offen.

$\Leftrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x) = \varphi'(x)e_j \in T_{\varphi(x)}M \ \forall x \in V$, $j = 1, \ldots, n-1$. (beachte: $\varphi_{x_j}(x) \in \mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow$ $N(x) := \varphi_{x_j}(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x) \in N_{\varphi(x)}M \ \forall x \in V$

$\Rightarrow$ $\nu(x) := \frac{N(x)}{|N(x)|}$ ist Einheitsnormalenfeld auf M (beachte: φ' regulär $\forall x$)

30. Integration auf Kartengebieten

Frage: Oberflächeninhalt bzw. d-dimensionaler Inhalt auf Mannigfaltigkeit M?

Idee: Approximiere durch stückweise „ebene“ Mannigfaltigkeit.

a) (d=2) Verbinde Punkte auf M zu Dreiecken (einbeschriebene Approximation).

Fläche $M = \sup \sum_{\triangle}$ Dreiecksflächen

$\to$ funktioniert nur für Kurven und nicht für $d > 1$. Z.B. Zylinderoberfläche in $M \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Fläche $M = \infty$, siehe dazu auch Hildebrandt: Analysis 2, Kapitel 6.1 (Schwarz’scher Stiefel)

b) (d=2) Nehme tangentiale Parallelogramme (äußere Approximation).

Fläche $M = \lim\limits_{\text{Feinheit} \to \infty} \sum_j$ Fläche$(\varphi'(x_j)(Q_j))$.

Hinweis: Eine allgemeine Theorie für den d-dimensionalen Inhalt liefert das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^d$.

Definition
Seien $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}^n$ $(d \leq n)$. Dann heißt die Menge

$$P(a_1, \ldots, a_d) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j a_j \;\middle|\; t_j \in [0,1],\ j = 1, \ldots, d \right\}$$

das von $a_1, \ldots, a_d$ aufgespannte Parallelotop (auch d-Spat).

Wiederhole: Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

Satz 30.1
Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und das Volumen $v(a_1, \ldots, a_n) := \mathcal{L}^n(P(a_1, \ldots, a_n))$.

$\Rightarrow$ i) $v(a_1, \ldots, \lambda a_n, \ldots, a_n) = |\lambda| v(a_1, \ldots, a_n)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ii) $v(a_1, \ldots, a_k + a_j, \ldots, a_n) = v(a_1, \ldots, a_n)$ falls $k \neq j$ (Prinzip des Cavalieri)

iii) $v(a_1, \ldots, a_n) = 1$ falls $\{a_1, \ldots, a_n\}$ ein Orthonormalensystem im $\mathbb{R}^n$ bilden

iv) $v(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$ wenn $A = (a_1 \mid \ldots \mid a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. die Determinante liefert das Volumen

beachte: Eigenschaften i) – iii) implizieren bereits iv) (argumentiere wie bei det)

Beweis.

a) $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig:
$\Rightarrow P(a_1, \ldots, a_n)$ ist flach $\Rightarrow v(a_1, \ldots, a_n) = 0$
$\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ i), ii) richtig

b) $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig: Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ das Standard-Orthonormalensystem, damit ist iii) wahr nach der Defintion des Lebegue-Maßes.
Sei $U := P(e_1, \ldots, e_n)$, $V := P(a_1, \ldots, a_n)$

$\Rightarrow A\colon \operatorname{int} U \to \operatorname{int} V$ ist Diffeomorphismus. Offenbar ist $A'(y) = A\ \forall y$.

$$\xRightarrow[\text{satz}]{\text{Trafo-}} \mathcal{L}(V) = \int_V \mathrm{d}x = \int_U |\det A|\, \mathrm{d}y = |\det A| \underbrace{\mathcal{L}(U)}_{=1} = |\det A|$$

$\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ i), ii), iii) nach Eigenschaften der Determinante □

Ziel: d-dimensionaler Inhalt $v_d(P(a_1, \dots, a_n))$

Idee: Betrachte $P(a_1, \dots, a_d)$ als Teilmenge eines d-dimensionalen Vektorraumes X und nehme d-dimensionales Lebesgue-Maß in X.

Somit sollte $v_d\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{d\text{-fach}} \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften innehaben:

(V1) $v_d(a_1, \dots, \lambda a_k, \dots, a_d) = |\lambda| v_d(a_1, \dots, a_d)$

(V2) $v_d(a_1, \dots, a_k + a_j, \dots, a_d) = v_d(a_1, \dots, a_d)\ \forall k \neq j$

(V3) $v_d(a_1, \dots, a_d) = 1$ falls $a_1, \dots, a_n$ orthonormal

Satz 30.2
v_d ist eindeutig bestimmt und es gilt

$$v_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det(A^\mathsf{T} A)} \text{ mit } A = (a_1 \mid \ldots \mid a_d) \tag{1}$$

▶ **Bemerkung**

1) Für $d = n$ liefert (1) iv) in beweis 11

2) $A^\mathsf{T} A$ ist symmetrisch und positiv definit und somit auch $\det(A^\mathsf{T} A) \geq 0$

3) $v_d(a_1, \dots, a_d) = 0 \Leftrightarrow a_1, \dots, a_d$ linear abhängig

Beweis. Sei $\alpha_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$, dann ist

$$A^\mathsf{T} A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{d1} & \dots & \alpha_{dd} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenschaften der Determinante implizieren, dass die rechte Seite in (1) (V1) bis (V3) erfüllt. Wie bei der Determinante zeigt man auch, dass (V1) bis (V3) v_d eindeutig bestimmen (Zurückführen von v_d auf eine Orthonormalbasis mittels i), ii) liefert eindeutigen Wert). □

■ **Beispiel 30.3**

Sei $d = n - 1$. Seien $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, $a := a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}$

$$\Rightarrow v_{n-1}(a_1, \dots, a_d) = |a|_2 \tag{2}$$

(d.h. euklidische Norm des äußeren Produktes liefert das Volumen)

Denn wegen $\langle a, a_j\rangle = 0$ und A wie in (1) folgt

$$\left(\frac{a^\top}{A^\top}\right) \cdot (a \mid A) = \begin{pmatrix} \langle a, a\rangle & 0 \\ 0 & A^\top A \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ |a|^2 \cdot \det(A^\top A) = [\det(a \mid A)]^2 \overset{29.9}{=} |a|^4$$

$$\Rightarrow\ \det(A^\top A) = |a|^2$$

Frage: Für Mannigfaltigkeit M: Ist für die Transformation $v_d(\text{Quader}Q) \xrightarrow{\varphi'(A)} v_d(\text{Parallelotop}P)$ für Quader $Q = P(b_1, \dots, b_d) \subset \mathbb{R}^d$ das $P(a_1, \dots, a_d) \subset T_u(M) \subset \mathbb{R}^n$ das zugehörige Parallelotop falls $a_j = \varphi'(x)b_j$ $j = 1, \dots, d$?

Satz 30.4
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit, φ Parametrisierung mit $\varphi(x) = u$ $\forall u \in M$ und ist $Q = P(a_1, \dots, a_d) \subset \mathbb{R}^d$ Quader und $a_j := \varphi'(x) \cdot b_j$

$$\Rightarrow\ v_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det(\varphi'(x)^\top \varphi'(x))} \cdot v_d(b_1, \dots, b_d) \tag{3}$$

$\varphi'(x)^\top\varphi'(x)$ heißt Maßtensor von φ in x und $g^\varphi(x) = \det(\varphi'(x)^\top\varphi'(x))$ heißt Gram'sche Determinante von φ in x.

Beweis. Sei $B = (b_1 \mid \dots \mid b_d)$, $A = (a_1 \mid \dots \mid a_d)$
$\overset{(1)}{\Longrightarrow} v_d(a_1, \dots, a_d) = \sqrt{\det(A^\top A)} = \sqrt{\det\left((\varphi'(x)B)^\top(\varphi'(x)B\right)} = \sqrt{\det(\varphi'(x)^\top\varphi'(x)} \cdot \sqrt{\det(B^\top B)}$ □

Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\varphi\colon V \to U$ lokale Parametrisierung, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem Kartengebiet U. Motiviert durch das Riemann-Integral

$$\sum f(U_i) \cdot v_d(P_i) = \sum f(\varphi(x_i)) \cdot \sqrt{g^\varphi(x)} \cdot v_d(Q_i)$$

setzt man

$$\int_U f \,\mathrm{d}a := \int_V f(\varphi(x)) \cdot \sqrt{g^\varphi(x)} \,\mathrm{d}x \tag{4}$$

als Integral von f über dem Kartengebiet U falls dieses existiert. f heißt dann integrierbar auf U.

▶ **Bemerkung**

- Die rechte Seite in (4) ist Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^d$.
- Damit Definition (4) sinnvoll ist, sollte die rechte Seite unabhängig von φ sein.
- Mittels des Hausdorff-Maßes $\mathcal{H}^d$ kann $\int_U f\mathrm{d}a$ vollkommen analog zum Lebesgue-Integral definiert werden.
- Für n-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$: $\int_u f\mathrm{d}a =$ Lebesgue-Integral $\int_U f\mathrm{d}x$.

Satz 30.5
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ ein Kartengebiet und $f\colon U \to \mathbb{R}$ sowie $\varphi\colon V_i \to U$ $(i = 1, 2)$ seien zugehörige Parametrisierungen

$$\Rightarrow \int_{V_1} f(\varphi_1(x))\sqrt{g^{\varphi_1}(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{V_2} f(\varphi_2(x))\sqrt{g^{\varphi_2}(x)}\,\mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$ Somit: (4) unabhängig von φ:

$$f(\,\cdot\,) \text{ integrierbar auf } U \Leftrightarrow f(\varphi(\,\cdot\,))\sqrt{g^{\varphi}(x)} \text{ integrierbar auf V} \tag{5}$$
$$\text{für eine Parametrisierung } \varphi\colon U \to V$$

Beweis. $\psi\colon \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2\colon V_2 \to V_1$ ist Diffeomorphismus nach Lemma 29.10

$$\xRightarrow[\text{satz}]{\text{Trafo-}} \int_{V_1} f(\varphi_1(x))\sqrt{g^{\varphi_1}(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{V_2} f(\varphi_1(\psi(y))) \cdot \underbrace{\sqrt{\det\left(\varphi_1'(\psi(y)) \cdot \varphi_1'(\psi(y))\right)} \cdot \det(\psi'(y))}_{=\sqrt{\det(\psi' T \cdot \varphi_1' T \varphi_1' \cdot \psi'))} = \sqrt{\det((\varphi_1'\psi')^{\mathsf{T}}(\varphi_1 \psi)}}\,\mathrm{d}y$$

Wegen $\varphi_2(y) = \varphi_1(\psi(y)) \xRightarrow[\text{regel}]{\text{Ketten}} \varphi_2'(y) = \varphi_1'(\psi(y)) \cdot \psi'(y)$ □

Definition
Falls $f = 1$ integrierbar über einem Kartengebiet $U \subset M$ ist, dann heißt

$$v_d(U) = \int_U 1\mathrm{d}a \tag{6}$$

der <u>d-dimensionale Inhalt von U</u> . $\sqrt{g^{\varphi}(x)}$ heißt <u>Flächenelement</u> von U bezüglich U.

▶ **Bemerkung**

1) $v_d(U) = \mathcal{H}^d(U)$, d.h. der d-dimensionale Inhalt stimmt für Kartengebiete mit dem Hausdorff-Maß überein.
2) Nach (4): $v_d(U) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}^d \varphi^{-1}(U)) = 0$

■ **Beispiel 30.6**
Sei $M := \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |u| = r, u_1 > 0\}$ (Halbsphäre mit Radius r). Berechne $\int_M f\mathrm{d}a$.

Parametrisierung von M (Kugelkoordinaten):

$$\varphi(x_1, x_2) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos x_2 \cdot \cos x_1 \\ \cos x_2 \cdot \sin x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix}$$

für $(x_1, x_2) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = V$.

Offenbar ist $\varphi\colon V \to M \in C^1$, regulär und Homöomorphismus.
$\Rightarrow \varphi$ ist Parametrisierung von M, d.h. M ist Mannigfaltigkeit und M auch Kartengebiet.

$$\varphi'(x) = r \cdot \begin{pmatrix} -\cos x_2 \cdot \sin x_1 & -\sin x_2 \cdot \cos x_1 \\ \cos x_2 \cdot \cos x_1 & -\sin x_2 \cdot \sin x_1 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi'(x)^{\mathsf{T}} \cdot \varphi(x) = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g^{\varphi}(x)} = r^2 \cos x_2$$

Damit lässt sich dann obiges Integral berechnen:

$$\int_M f \mathrm{d}a = r^2 \int_V f(\varphi(x)) \cdot \cos x_2 \mathrm{d}x = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x_1)) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

z.B. mit $f(u) = u_1^2 + u_2^2$:

$$\begin{aligned} \int_M u_1^2 + u_2^2 \mathrm{d}a &= r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \pi r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x_2 \mathrm{d}x_2 = \left[\sin x_2 - \frac{1}{3}\sin^3 x_2\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi r^4 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi r^4, \end{aligned}$$

z.B. für $f = 1$:

$$v_d(U) = \int_M \mathrm{d}a = \pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 = \pi r^2 [\sin x_2]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Kugeloberfläche im } \mathbb{R}^3\text{: } 4\pi r^2$$

Satz 30.7 (Integration über $n-1$-dimensionale Graphen)
Sei $g\colon V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, V offen, $\Gamma = \{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in V\}$.

$$\Rightarrow \text{ für } f\colon \Gamma \to \mathbb{R} \text{ gilt: } \int_\Gamma f \, \mathrm{d}a = \int_V f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} \, \mathrm{d}x, \text{ falls die rechte Seite ex.} \tag{7}$$

Beweis. Γ ist $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit und auch Kartengebiet bezüglich der Parametrisierung $\varphi\colon V \to \Gamma$ mit $\varphi(x) = (x, g(x))$.

Offenbar ist $\gamma = \sqrt{\det(\varphi'(x)^{\mathsf{T}} \cdot \varphi'(x)} \overset{(1)}{=} v_{n-1}(\varphi_{x_1}(x), \dots, \varphi_{x_{n-1}}(x)) \overset{(2)}{=} |\varphi_{x_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x))|$.

Wegen $\varphi_{x_1}(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x) = (-1)^n \binom{g'(x)}{-1} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \gamma = \sqrt{1 + |g'(x)|^2}$ (euklidische Norm) $\overset{(4)}{\Longrightarrow} \int_\Gamma f \mathrm{d}a = \int_V f(\varphi(x)) \cdot \sqrt{1 + |g'(x)|^2} \, \mathrm{d}x$ ☐

Flächeninhalt: von Γ ist somit

$$v_{n-1}(\Gamma) = \int_V \sqrt{1 + |g'(x)|^2} \, \mathrm{d}x \tag{8}$$

■ **Beispiel 30.8**
Halbsphäre $S_+^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1, x_4 > 0\}$.

Offenbar ist S_+^{n-1} Graph von $g(x) = \sqrt{1-|x|^2}$ $\forall x \in B_1(0)$

$$\Rightarrow\ v_{n-1}(S_+^{n-1}) = \int_{B_1(0)} \sqrt{1 + \frac{|x|^2}{1-|x|^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$f(x) = \sqrt{\frac{1}{1-|x|^2}}$ ist rotationssymmetrisch auf $B_1(0)$, d.h. $f(x) = \tilde{f}(x)$ für $\tilde{f}\colon [0,\infty] \to \mathbb{R}$.

Königsberger 2:

$$\int_{B_r(0)} f(x)\mathrm{d}x = n \cdot \kappa_n \int_0^r \tilde{f}(\gamma)\gamma^{n-1}\mathrm{d}\gamma \tag{9}$$

für $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\kappa_n = \mathcal{L}^n(B_1(0))$

$$\overset{n-1}{\underset{\text{statt } n}{\Longrightarrow}}\ v_{n-1}(S_+^{n-1}) = (n-1)\kappa_{n-1}\int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r = (n-1)\kappa_{n-1}\int_0^1 r^n \frac{1}{r^2\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r$$

$$\underset{\text{Int.}}{\overset{\text{part.}}{=}} n \cdot (n-1)\kappa_{n-1}\int_0^1 r^{n-1}\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\,\mathrm{d}r \overset{(9)}{=} n \cdot \underbrace{\int_{B_1(0)} \sqrt{1-|x|^2}\,\mathrm{d}\gamma}_{\text{Volumen unter Halbsphäre}}$$

$$= \sum^{n} \kappa_n$$

Sei $\omega_n = v_{n-1}(S_{n-1}) = 2v_{n-1}(S_+^{n-1})$ Oberfläche, dann gilt

$$\omega_n = n \cdot \kappa_n, \tag{10}$$

z.B.

<u>n=2:</u> $2\pi = 2 \cdot \pi$

<u>n=3:</u> $4\pi = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi$

<u>Hinweis:</u> $v_n(B_r(0)) = \mathcal{L}^n(B_r(0)) = r^n\kappa_n$ (verwende Trafosatz),
$v_{n-1}(\partial B_r(0)) = r^{n-1}\omega_n = r^{n-1}n\kappa_n$ (Beispiel 30.8 mit $B_r(0)$ statt $B_1(0)$)

■ **Beispiel 30.9 (Kurvenintegral)**

Betrachte Kurve $\varphi\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, I offenes Intervall, sodass $C := \varphi(I)$ 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist (beachte: φ regulär für $\varphi'(x) \neq 0$).

Offenbar ist $\det(\varphi'(t)^\mathsf{T}\varphi'(t)) = |\varphi'(t)|^2$. Für $f\colon C \to \mathbb{R}^n$ ist (falls es existiert)

$$\int_C f\mathrm{d}a = \int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Das Integral heißt <u>Kurvenintegral</u> von f über C. Der 1-dimensionale Inhalt

$$v_1(C) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

heißt <u>Bogenlänge</u> der Kurve C.

Falls $|\varphi'(t)| = 1\ \forall t \in I$ heißt φ <u>Bogenlänge-Parametrisierung</u> von C (denn: $v_1(\varphi(t_2-t_1)) = t_2 - t_1$, d.h. die Parameter liefern die Bogenlänge).

Mit

$$\sigma(s) := \int_a^b |\varphi'(t)|\mathrm{d}t$$

ist $\psi\colon (0, v_1(C)) \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(I) = \varphi(\sigma^{-1}(I))$ stets die Bogenlängenparametrisierung von C. Denn: Offenbar ist $\sigma \in C^1$ und streng monoton wachsend $\Rightarrow \sigma^{-1} \in C^1$ existiert.

$$\Rightarrow \ |\psi'(\tau)| = |\psi'(\sigma^{-1}(\tau)) \cdot \left(\sigma^{-1}\right)'(\tau)| = |\varphi'(\sigma^{-1}(\tau))| \cdot \frac{1}{|\sigma'(\sigma^{-1}(\tau))} \overset{\textbf{(??)}}{=} 1,$$

d.h. ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Kurve stets als Bogenlängenparametrisierung angeben.

Definition
Eine beliebige stetige Kurve $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $C = \varphi([a, b])$, heißt rektifizierbar , falls

$$l(C) := \sup_Z \left\{ \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| \;\middle|\; \{t_0, \ldots, t_k\} \in Z \right\} < \infty,$$

wobei Z die Menge der Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t_1$, $k \in \mathbb{N}$ ist.

Satz 30.10 (Rektifizierbare Kurven)
Sei $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann:

1) φ ist rektifizierbar

2) $C := \varphi([a, b])$ sei 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Parametrisierung φ
$\Rightarrow l(C) = v_d(C)$

Beweis.
zu 1) φ ist Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ mit Lipschitz-Konstante $L = \max_{t\in[a,b]} |\varphi'(t)|$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| \leq L \sum_{j=1}^k |t_j - t_{j-1}| = L|b - a| \text{ für jede Zerlegung } \{t_0, \ldots, t_k\} \in Z$$

$\Rightarrow l(\varphi([a, b])) < L(b - a)$

$\Rightarrow \varphi$ rektifizierbar

zu 2) Für beliebige Zerlegung $\{t_0, \ldots, t_k\}$ gilt

$$\sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t)\mathrm{d}t \right| \leq \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_a^b |\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \ \text{ť}l(C) \leq \int_a^b |\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t = v_1(C)$$

Sei $l(t) := l(\varphi([a,b]))\ \forall t \in [a,b]$ und sei $h \in \mathbb{R}$, $t+h \in [a,b]$

$$\overset{h>0}{\Longrightarrow} \left| \left|\int_t^{t+h} \varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau\right| = |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \le \underbrace{l(t+h) - l(t)}_{l(\varphi([t,t+h]))} \overset{(??)}{\le} \int_t^{t+h} |\varphi'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \right| \cdot \frac{1}{h}$$

$\Rightarrow$ l ist differenzierbar mit $l'(t) = |\varphi'(t)|$

$$\Rightarrow l(b) = \int_a^b l'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = v_1(C)$$

□

■ **Beispiel 30.11 (Umfang des Einheitskreises)**
Betrachte $\varphi\colon (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = \binom{\cos t}{\sin t}$. Dann ist $C := \varphi((-\pi,\pi))$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit (der Einheitskreis ohne den Punkt $(-1 \mid 0)$).

$$v_1(C) = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\right| \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$$

(beachte: φ ist Bogenlängenparametrisierung)

Satz 30.12 (Eigenschaften des Integrals)
Seien f, g, $f_k\colon U \to \mathbb{R}$, U Kartengebiet der Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann:

1) f integrierbar auf $U \Leftrightarrow |f|$ integrierbar auf $M \Leftrightarrow f^+$ und f^- integrierbar auf U
2) f, g integrierbar, $c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_U cf \pm g\mathrm{d}a = c\int_U f\mathrm{d}a \pm \int_U g\mathrm{d}a$
3) f, g integrierbar auf U, g beschränkt auf $U \Rightarrow \cdot g$ integrierbar auf U
4) f, g integrierbar, $f \le g$ auf $U \Rightarrow \int_U f\,\mathrm{d}a \le \int_U g\,\mathrm{d}a$
5) (Monotone Konvergenz)

   Seien f_k integrierbar auf U, $f_1 \le f_2 \le \ldots$, Folge $\int_U f_k\,\mathrm{d}a$ beschränkt und $f(u) = \lim_{k\to\infty} f_k(u)$ $\forall u \in U$
   $\Rightarrow f$ integrierbar auf U mit $\int_U f\,\mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \int f_k\,\mathrm{d}a$
6) (Majorisierte Konvergenz)

   Seien f_k, g integrierbar auf U, $|f_k| \le g\ \forall k$, $f(u) = \lim_{k\to\infty} f_k(u)\ \forall u \in U$
   $\Rightarrow f$ ist integrierbar auf U mit $\int_U f\,\mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \int_U f_k\,\mathrm{d}a$

Beweis. Sei $\varphi\colon V \to U$ Parametrisierung des Kartengebiets U. Somit:

- f integrierbar auf $U \Leftrightarrow f(\varphi(\,\cdot\,))\sqrt{g^{\varphi}(\,\cdot\,)}$ integrierbar auf V, und
- $f \le g$ auf $U \Leftrightarrow f(\varphi(\,\cdot\,))\sqrt{g^{\varphi}(\,\cdot\,)} \le g(\varphi(\,\cdot\,))\sqrt{g^{\varphi}(\,\cdot\,)}$ auf V,
- $f(u) = \lim_{k\to\infty} f_k(u) \in U \Leftrightarrow f(\varphi(x)) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)\ \forall x \in V$,

somit folgen die Behauptungen direkt aus den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals (Kapitel 22). □

31. Integral auf Mannigfaltigkeiten

Frage: $\displaystyle\int_M f\,da$ für Mannigfaltigkeit M?

Idee: Überdecke M mit Kartengebieten U_β ($\beta \in \xi$) und suche Integrale $\int_{U_\beta} f\,da$ geeignet zusammen.

Problem: U_β überlappen sich im Allgemeinem

Ausweg: Zerlege die Funktion $\alpha = 1$ geeignet als $1 = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j$.

Definition
Die Menge der stetigen Funktionen $\alpha_j\colon M \to [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$ heißt Zerlegung der Eins (ZdE) auf $M \subset \mathbb{R}^n$, falls

i) $\displaystyle\sum_{j=1}^\infty \alpha_j(u) = 1 \;\forall u \in M$

ii) Zerlegung ist lokal-endlich, d.h. $\forall u \in M$ existiert eine Umgebung $U(u)$ bezüglich M mit

$$\alpha_j = 0 \text{ auf } U(u) \text{ für f.a. } j \in \mathbb{N}$$

Definition
Sei $\mathcal{U}$ eine bezüglich M offene Überdeckung von $M \subset \mathbb{R}^n$. Die Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$ ist $\mathcal{U}$ untergeordnet, falls $\forall j\ \exists U_j \in \mathcal{U}\colon\ \operatorname{supp}\alpha_j \subset U_j$. $\operatorname{supp}\alpha_j := \overline{\{u \in M \mid \alpha_j(u) \neq 0\}}$ ist der Träger von α_j.

Satz 31.1 (Existenz der Zerlegung der Eins)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\mathcal{U}$ eine bezüglich M offene Überdeckung von M
$\Rightarrow$ es existiert eine Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$ von M, die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist.

▶ **Bemerkung**

- Betrachte später die Überdeckung $\mathcal{U}$ einer Mannigfaltigkeit M mit Kartengebieten
- α_j in Wahrheit in C^∞

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$.

a) $U_\alpha \in \mathcal{U}$ offen bezüglich $M \Rightarrow \exists W_\alpha \subset \mathbb{R}^n\colon U_\alpha = W_\alpha \cap M$. Setzte $W = \bigcup_{\alpha\in A} W_\alpha$ offen im $\mathbb{R}^n$.
Sei $K_j := \{u \in W \mid \operatorname{dist}_{W^\complement} u \geq \frac{1}{j}\} \cap \overline{B_j(0)}$. Offenbar sind die K_j kompakt
$\Rightarrow K_j \subset K_{j+1}\ \forall j \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_j = W$. ($\{K_j\}$ heißt kompakte Ausschöpfung von W).

b) Sei $u \in K_{j+1} \setminus \operatorname{int} K_{j+1}$ (kompakt) $\subset \operatorname{int} K_{j+2} \setminus K_{j-1}$ (offen)
$\Rightarrow\ \exists \alpha \in A$: $u \in W_\alpha$
$\Rightarrow\ \exists$ Kugel $B_r(u)$, offen im $\mathbb{R}^n$ ($r > 0$): $B_r(u) \subset W_\alpha \cap (\operatorname{int} K_{j+2} \setminus K_{j-1})$
$\Rightarrow\ K_{j+1} \setminus \operatorname{int} K_j$ wird von endlich vielen Kugeln $B_r(u)$ überdeckt
$\Rightarrow\ \exists$ Folge $\{u_j\}$ in W mit $\bigcup_{j=1}^\infty B_{r_j}(u_j) = W$ und für $u \in W$ gilt:
$\exists$ Umgebung U mit $U \cap B_{r_j}(u_j) \neq \emptyset$ nur für endlich viele j

c) Betrachte $\gamma_j : W \to [0,1]$ mit

$$\gamma_j(v) := \begin{cases} e^{\frac{1_j}{|v-u_j|-v_j}}, & \text{für } |v-u_j| \le r_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar gilt $\gamma_j(r) > 0$ auf $B_{r_j}(u_j)$, $\gamma_j \in C^\infty(W)$. Setzte $\gamma(u) = \sum_{j=1}^\infty \gamma_j(u)$, $\alpha_j(u) := \frac{\gamma_j(u)}{\gamma(u)}$ $\forall u \in W$. Offenbar ist $\{\alpha_j\}$ eine Zerlegung der Eins von W, damit auch von M und ist offenbar $\mathcal{U}$ untergeordnet. □

Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}^n$, $\operatorname{supp} f \subset U \subset M$, U Kartengebiet von M.

f heißt integrierbar auf M , falls die Einschränkung $f|_U$ integrierbar auf Kartengebiet U und

$$\int_M f \mathrm{d}a := \int_U f|_U \, \mathrm{d}a \tag{1}$$

heißt Integral von f auf M.

Lemma 31.2 (Kriterium für Integrierbarkeit)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$, $\operatorname{supp} f \subset U \subset M$, U Kartengebiet von M und sei $\{x_j\}$ eine Zerlegung der Eins auf M. Dann:

f integrierbar auf M $\Leftrightarrow$ i) f_{x_j} integrierbar auf M $\forall j \in \mathbb{N}$
ii) $\sum_{j=1}^\infty \int_m |f| \alpha_j \, \mathrm{d}a < \infty$

$$\Rightarrow \sum_M f \mathrm{d}a = \sum_{j=1}^\infty \int_M \alpha_j \mathrm{d}a \tag{2}$$

Beweis.
a) Sei f integrierbar auf $M \overset{30.12}{\Longrightarrow}$ i) und

$$\sum_{j=1}^\infty \int_M |f| \alpha_j \, \mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k \int |f| \alpha_j \, \mathrm{d}a \le \int_M |f| \, \mathrm{d}a < \infty \tag{3}$$

$\Rightarrow$ ii) $\xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{majorisierte}}$ (2)

b) gelten i) und ii) $\xrightarrow[\text{Konvergenz}]{\text{majorisierte}}$ $|f|$ integrierbar $\Rightarrow f$ integrierbar □

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung bezüglich M von M mit Kartengebieten.

$f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar auf Mannigfaltigkeit M , falls die Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$ auf M existiert, die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist, sodass

i) $f\alpha_j$ integrierbar $\forall j \in \mathbb{N}$ (auf M)

ii) $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \, \mathrm{d}a < \infty$

und damit definiere sich

$$\int_M f \mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \, \mathrm{d}a, \tag{4}$$

und heißt Integral von f auf M .

Satz 31.3 (Rechtfertigung des Integralbegriffs)

f ist integrierbar auf M und $\int_M f \mathrm{d}a$ sind unabhängig von konkreter Überdeckung $\mathcal{U}$ und Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$.

Beweis. Sei : $M \to \mathbb{R}$ integrierbar auf M mit $\{\alpha_j\}$, $\mathcal{U}$ gemäß Definition. Sei $\{\tilde{\alpha}_j\}$ eine weitere Zerlegung der Eins, die einer Überdeckung $\tilde{\mathcal{U}}$ durch Kartengebiete untergeordnet ist. Dann sind zu zeigen:

i') $f\tilde{\alpha}_j$ ist integrierbar auf M $\forall j$ und

ii') $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \, \mathrm{d}a < \infty$ und

iii') $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \, \mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_m f\tilde{\alpha}_j \, \mathrm{d}a$.

zu i') $f\alpha_j$ sind integrierbar auf M nach Voraussetzung

$\overset{30.12}{\Longrightarrow}$ $f\tilde{\alpha}_k\alpha_j$ ist integrierbar auf M $\forall k, j \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f\tilde{\alpha}_k|\alpha_j \, \mathrm{d}a \leq \sum_{j=1}^{\infty} |f|\alpha_j \, \mathrm{d}a < \infty$$

$\overset{31.2}{\Longrightarrow}$ $f\tilde{\alpha}_k$ und $|f\tilde{\alpha}_k|$ integrierbar auf M $\forall k$

$\Rightarrow$ i') und

$$\begin{aligned} \int_M f\tilde{\alpha}_k \, \mathrm{d}a &= \int_{j=1}^{\infty} \int_M f\tilde{\alpha}_j \, \mathrm{d}a \qquad \text{bzw.} \\ \int_M |f|\tilde{\alpha}_k \, \mathrm{d}a &= \int_{j=1}^{\infty} \int |f|\tilde{\alpha}_k\alpha_j \, \mathrm{d}a \end{aligned} \tag{$\star$}$$

zu ii') $f\alpha_j$ integrierbar auf M nach Voraussetzungen

und analog für $|f|$

$\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j\alpha_k \, \mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_m |f|\alpha_j \, \mathrm{d}a \overset{\text{ii)}}{<} \infty$

Doppelreihensatz, (zu ii')) mit $|f|$ und ii) eerlauben die Vertauschung der Summation in (zu ii'))

$\overset{(\star)}{\Longrightarrow}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f|\tilde{\alpha}_k \, \mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \, \mathrm{d}a$

$\Rightarrow$ ii')

$$\xrightarrow[\text{mit } \{\tilde{\alpha}_j\}]{31.2} \int_M f\alpha_j \, \mathrm{d}a = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j\tilde{\alpha}_k \, \mathrm{d}a \quad \forall j \quad \text{und analog für } |f| \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j\alpha_k \, \mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_m |f|\alpha_j \, \mathrm{d}a \overset{\text{ii)}}{<} \infty \text{Doppelreihens}$$

Analog erhält man (zu ii')) mit f statt $|f| \Rightarrow$ iii')

Definition
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, M Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ Teilmenge. Die Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar auf A , falls

$$f_A := \begin{cases} f, & \text{auf } A, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar auf M ist. $A \subset M$ heißt (endlich) messbar in M falls die Funktion $f = \equiv 1$ auf A integrierbar ist.

$$v_d(A) = \int_A \mathrm{d}a$$

heißt d-dimensionaler Inhalt (d-dimensionales Maß) von A

beachte: Für $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar ist $\lambda^n(A) = \infty$ möglich. Hier ist $v_d(A) < \infty$ für $A \subset M$ messbar.

Definition
$A \subset M$ heißt d-Nullmenge , falls $v_d(A) = 0$.

beachte: d-Nullmengen auf M entsprechend $\mathcal{L}^d$-Nullmengen im Parameterbereich.

Satz 31.4
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ kompakt bezüglich M, $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow f$ integrierbar auf A

Hinweis:
- $A \subset M$ ist kompakt bezüglich M, z.B. $A = \varphi(U)$ für Parametrisierung und $U \subset \mathbb{R}^n$ kompakt
- somit sind alle kompakten $A \subset M$ messbar

Beweis.
a) Sei $A \subset U$ für ein Kartengebiet $U \subset M$ mit zugehöriger Parametrisierung $\varphi\colon V \subset \mathbb{R}^d \to U$
$\Rightarrow B := \varphi^{-1}(A)$ kompakt im $\mathbb{R}^d$ (da φ Homöomorphismus)
Da $f(\varphi(\,\cdot\,))\sqrt{g^\varphi(\,\cdot\,)}$ stetig auf B
$\Rightarrow$ auch integrierbar auf $B \Rightarrow f$ integrierbar auf A

b) (allgemeiner Fall)
Sei $\{\alpha_j\}$ eine Zerlegung der Eins zur Mannigfaltigkeit M. $\forall v \in A\ \exists$ Umgebung $U(v) \subset M$: $\alpha_j = 0$ auf $U(v)$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$.
$\{U(v)\}_{v \in A}$ ist eine offene Überdeckung von A.

$\Rightarrow$ bereits endlich viele überdecken kompaktes A

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}$: $\alpha_j = 0$ auf $A \; \forall j > m$

$\Rightarrow f_A(u) = \sum_{j=1}^{m} f_A(u)\alpha_j \; \forall u \in M$

supp $f_A\alpha_j$ ist abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $A \Rightarrow$ selbst kompakt
$\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} f_A\alpha_j$ integrierbar auf $M \; \forall j$

Wegen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f_A|\alpha_j \,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{m} \int |f_A|\alpha_j \,\mathrm{d}a < \infty$$

$\Rightarrow f_A$ integrierbar auf M $\square$

Übertragung der Eigenschaften aus Satz 30.12:

Satz 31.5 (Eigenschaften des Integrals)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigket und f, g, $f_k \colon M \to \mathbb{R}$. Dann:

1) f integrierbar auf $M \Leftrightarrow |f|$ integrierbar auf $M \Leftrightarrow f^+$ und f^- integrierbar auf M

2) f, g integrierbar auf M, $c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_M cf \pm g\mathrm{d}a = c\int_M f\mathrm{d}a \pm \int_M g\mathrm{d}a$$

3) f, g integrierbar auf M, g beschränkt auf M
$\Rightarrow f \cdot g$ integrierbar auf M

4) (Monotone Konvergenz)

Seien $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ auf M, alle f_k integrierbar auf M. Die Folge $\int_M f_k \,\mathrm{d}a$ sei beschränkt, $f(u) := \lim_{k\to\infty} \to \infty f_k(u) \; \forall u \in M$

$$\Rightarrow f \text{ integrierbar auf } M \text{ mit } \int_M f\mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k\mathrm{d}a$$

5) (Majorisierte Konvergenz)

Seien $_k$, g integrierbar auf M, $|f_k| \leq g$ auf $M \; \forall k$ und $f(u) := \lim_{k\to\infty} f_k(u) \; \forall u \in M$

$$\Rightarrow f \text{ integrierbar auf } M \text{ mit } \int_M f\mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k\mathrm{d}a$$

Beweis. Sei $\{\alpha_j\}$ eine Zerlegung der Eins zu M.

beachte: f ist integrierbar auf $M \overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} f\alpha_j$ ist integrierbar auf einem Kartengebiet $U_j \subset M$
Damit folgen (1) – (3) leicht aus Satz 30.12.

zu 4) ähnlich zu 5)

zu 5) Fixiere ein $j \in \mathbb{N}$. $f_k\alpha_j$ ist integrierbar auf einem Kartenbegiet $\forall U$,

$$\lim_{k\to\infty} f_k(u)\alpha_j(u) = f(u)\alpha_j(u)$$

Mit $|f_k \alpha_j| \leq g\alpha_j \overset{30.12}{\Longrightarrow} f\alpha_j$ integrierbar und

$$\lim_{k\to\infty} \int_M f_k \alpha_j \mathrm{d}a = \int_M f\alpha_j \mathrm{d}a$$

Wegen $|f\alpha_j| \leq g\alpha_j \ \forall j$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f\alpha_j| \,\mathrm{d}a \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_M g\alpha_j \,\mathrm{d}a \overset{g \text{ intbar}}{<} \infty$$

$\Rightarrow f$ integrierbar auf M mit

$$\int_M f\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \,\mathrm{d}a$$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \,\mathrm{d}a \right| < \varepsilon$$

und es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \int_M f\alpha_j \,\mathrm{d}a - \int_M f_k\alpha_j \,\mathrm{d}a \right| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \forall j = 1, \ldots, m \ \forall k \geq k_0 \qquad (\text{nach } (\textbf{??}))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_M f\mathrm{d}a - \int_M f_k \,\mathrm{d}a \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^{m} \left(\int_M f\alpha_j \,\mathrm{d}a - \int_M f_k\alpha_j \,\mathrm{d}a \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \,\mathrm{d}a \right| + \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M g\alpha_j \,\mathrm{d}a \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{m} \cdot m + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \end{aligned}$$

$\overset{\varepsilon>0}{\underset{\text{bel}}{\Longrightarrow}} \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}a = \int_M f\mathrm{d}a.$ □

32. Integralsätze von Gauß und Stokes

Anhang