

# Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

3. Mai 2018

# *Inhaltsverzeichnis*

<b>I</b>	<b>Endomorphismen</b>	<b>1</b>
1	Eigenwerte . . . . .	1
2	Das charakteristische Polynom . . . . .	4
3	Diagonalisierbarkeit . . . . .	6
4	Trigonalisierbarkeit . . . . .	9
5	Das Minimalpolynom . . . . .	11
6	Nilpotente Endomorphismen . . . . .	14
7	Die JORDAN-Normalform . . . . .	18
<b>II</b>	<b>Skalarprodukte</b>	<b>21</b>
<b>III</b>	<b>Dualität</b>	<b>22</b>
<b>IV</b>	<b>Moduln</b>	<b>23</b>
	<b>Anhang</b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>Listen</b>	<b>25</b>
A.1	Liste der Theoreme . . . . .	25
A.2	Liste der benannten Sätze . . . . .	26
	<b>Akronyme</b>	<b>26</b>

## Kapitel I

# Endomorphismen

In diesem Kapitel seien  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -VR und  $f \in \text{End}_K(V)$  ein Endomorphismus.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Geometrie von  $f$  besser zu verstehen und Basen zu finden, für die  $M_B(f)$  eine besonders einfache oder kanonische Form hat.

## 1. Eigenwerte

### ► Bemerkung 1.1

Wir erinnern uns daran, dass  $\text{End}_K(V) = \text{Hom}_K(V, V)$  sowohl einen  $K$ -VR als auch einen Ring bildet. Bei der Wahl einer Basis  $B$  von  $V$  wird  $f \in \text{End}_K(V)$  durch die Matrix  $M_B(f) = M_B^B(f)$  beschrieben.

■ **Beispiel 1.2**  $K = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_2(\mathbb{R}), f = f_A \in \text{End}_K(K^2)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{mit } B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ ist } M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Endomorphismus  $f = f_A$  streckt also entlang der Achse  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  um den Faktor 3 und spiegelt entlang der Achse  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

### Definition 1.3 (Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum)

Sind  $0 \neq x \in V$  und  $\lambda \in K$  mit  $f(x) = \lambda x$  so nennt man  $\lambda$  einen Eigenwert von  $f$  und  $x$  einen Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Der Eigenraum zu  $\lambda \in K$  ist  $\text{Eig}(f, \lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$ .

### ► Bemerkung 1.4

Für jedes  $\lambda \in K$  ist  $\text{Eig}(f, \lambda)$  ein UVR von  $V$ , da

$$\begin{aligned} \text{Eig}(f, \lambda) &= \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \\ &= \{x \in V \mid f(x) - \lambda \cdot \text{id}_V(x) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid (f - \lambda \cdot \text{id}_V)(x) = 0\} \\ &= \text{Ker}(f - \lambda \cdot \text{id}_V) \end{aligned}$$

und  $f - \lambda \cdot \text{id}_V \in \text{End}_K(V)$ .

### ► Bemerkung 1.5

Achtung! Der Nullvektor ist nach Definition kein Eigenvektor, aber  $\lambda = 0$  kann ein Eigenwert sein, nämlich genau dann, wenn  $f \notin \text{Aut}_K(V)$ , siehe Übung. Die Menge der Eigenvektoren zu  $\lambda$  ist also  $\text{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$  und  $\lambda$  ist genau dann ein Eigenwert von  $f$ , wenn  $\text{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$ .

■ **Beispiel 1.6**

Ist  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  und  $f = f_A \in \text{End}_K(K^n)$ , so sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  EW von  $f$  und jedes  $e_i$  ist ein EV zum EW  $\lambda_i$ .

**Satz 1.7**

Sei  $B$  eine Basis von  $V$ . Genau dann ist  $M_B(f)$  eine Diagonalmatrix, wenn  $B$  aus EV von  $f$  besteht.

*Beweis.* Ist  $B = (x_1, \dots, x_n)$  eine Basis aus EV zu EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , so ist  $M_B(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  und umgekehrt.  $\square$

■ **Beispiel 1.8**

Sei  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^2$  und  $f_\alpha \in \text{End}_K(\mathbb{R}^2)$  die Drehung um den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für  $\alpha = 0$  hat  $f_\alpha = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$  nur den EW 1.

Für  $\alpha = \pi$  hat  $f_\alpha = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$  nur den EW -1.

Für  $\alpha \neq 0, \pi$  hat  $f_\alpha$  keine EW.

**Lemma 1.9**

Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  paarweise verschiedene EW von  $f$  und ist  $x_i$  ein EV zu  $\lambda_i$  für  $i = 1, \dots, m$ , so ist  $(x_1, \dots, x_m)$  linear unabhängig.

*Beweis.* Induktion nach  $m$

$m = 1$ : klar, denn  $x_1 \neq 0$

$m - 1 \rightarrow m$ : Sei  $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$  mit  $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$ .

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \lambda \cdot \text{id}_V) \left( \sum_{i=1}^m \mu_i x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_i (f(x_i) - \lambda_m \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i (\lambda_i - \lambda_m) \cdot x_i \end{aligned}$$

Nach IB ist  $\mu_i (\lambda_i - \lambda_m) = 0$  für  $i = 1, \dots, m - 1$ , da  $\lambda_i \neq \lambda_m$  für  $i \neq m$  also  $\mu_i = 0$  für  $i = 1, \dots, m - 1$ . Damit ist auch  $\mu_m = 0$ . Folglich ist  $(x_1, \dots, x_m)$  linear unabhängig.  $\square$

**Satz 1.10**

Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  paarweise verschieden, so ist

$$\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i).$$

*Beweis.* Seien  $x_i, y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i)$  für  $i = 1, \dots, m$ . Ist  $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$ , so ist  $\sum_{i=1}^m \underbrace{x_i - y_i}_{z_i} = 0$ .

o. E. seien  $z_i \neq 0$  für  $i = 1, \dots, r$  und  $z_i = 0$  für  $i = r + 1, \dots, m$ . Wäre  $r > 0$ , so wären  $(z_1, \dots, z_r)$  linear abhängig, aber  $z_i = x_i - y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$ , im Widerspruch zu Lemma 1.9. Somit ist  $x_i = y_i$  für alle  $i$  und folglich ist die Summe  $\sum \text{Eig}(f, \lambda_i)$  direkt.  $\square$

**Definition 1.11 (EW und EV für Matrizen)**

Sei  $A \in \text{Mat}_n(K)$ . Man definiert Eigenwerte, Eigenvektoren, etc von  $A$  als Eigenwerte, Eigenvektoren von  $f_A \in \text{End}_K(K^n)$ .

**Satz 1.12**

Sei  $B$  eine Basis von  $V$  und  $\lambda \in K$ . Genau dann ist  $\lambda$  ein EW von  $f$ , wenn  $\lambda$  ein EW von  $A = M_B(f)$  ist. Insbesondere haben ähnliche Matrizen die selben EW.

*Beweis.* Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{f_A} & K^n \\ \Phi_B \downarrow & & \downarrow \Phi_B \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

denn  $f_A(x) = \lambda x \iff (\Phi_B \circ f_A)(x) = \Phi_B(\lambda x) \iff f(\Phi_B(x)) = \lambda \Phi_B(x)$ .

Ähnliche Matrizen beschreiben den selben Endomorphismus bezüglich verschiedener Basen, vgl. IV.4.1 □

## 2. Das charakteristische Polynom

### Satz 2.1

Sei  $\lambda \in K$ . Genau dann ist  $\lambda$  ein EW von  $f$ , wenn  $\det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = 0$ .

*Beweis.* Da  $\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$  ist  $\lambda$  genau dann ein EW von  $f$ , wenn  $\dim_K(\text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)) > 0$ , also wenn  $\lambda \cdot \text{id}_V - f \notin \text{Aut}_K(V)$ . Nach IV.4.6 bedeutet dies, dass  $\det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = 0$   $\square$

### Definition 2.2 (charakteristisches Polynom)

Das charakteristische Polynom einer Matrix  $A \in \text{Mat}_n(K)$  ist die Determinante der Matrix  $t \cdot \mathbb{1}_n - A \in \text{Mat}_n(K[t])$ .

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) \in K[t]$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus  $f \in \text{End}_K(V)$  ist  $\chi_f(t) = \chi_{M_B(f)}(t)$ , wobei  $B$  eine Basis von  $V$  ist.

### Satz 2.3

Sind  $A, B \in \text{Mat}_n(K)$  mit  $A \sim B$ , so ist  $\chi_A = \chi_B$ . Insbesondere ist  $\chi_f$  wohldefiniert.

*Beweis.* Ist  $B = SAS^{-1}$  mit  $S \in \text{GL}_n(K)$ , so ist  $t \cdot \mathbb{1}_n - B = S(t \cdot \mathbb{1}_n - A)S^{-1}$ , also  $t \cdot \mathbb{1}_n - B \sim t \cdot \mathbb{1}_n - A$  und ähnliche Matrizen haben die selben Determinante (IV.4.4).

Sind  $B, B'$  Basen von  $V$ , so sind  $M_B(f) \sim M_{B'}(f)$ , also  $\chi_{M_B(f)} = \chi_{M_{B'}(f)}$   $\square$

### Lemma 2.4

Für  $\lambda \in K$  ist  $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$ .

*Beweis.* Sei  $B$  eine Basis von  $V$  und  $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ . Dann ist  $M_B(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = \lambda \cdot \mathbb{1}_n - A$ . Aus IV.2.8 und I.6.8 folgt  $\det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$ . Folglich ist

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \chi_A(\lambda) \\ &= \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) \\ &= \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) \\ &= \det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) \end{aligned} \quad \square$$

### Satz 2.5

Sei  $\dim_K(V) = n$  und  $f \in \text{End}_K(V)$ . Dann ist  $\chi_f(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$  ein Polynom vom Grad  $n$  mit

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1 \\ \alpha_{n-1} &= -\text{tr}(f) \\ \alpha_0 &= (-1)^n \cdot \det(f) \end{aligned}$$

Die Nullstellen von  $\chi_f$  sind genau die EW von  $f$ .

*Beweis.* Sei  $B$  eine Basis von  $V$  und  $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ . Wir erinnern uns daran, dass  $\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Es ist  $\chi_f(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (t\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$ .

Der Summand für  $\sigma = \text{id}$  ist  $\prod_{i=1}^n (t - a_{ii}) = t^n + \sum_{i=1}^n (-a_{ii})t^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^n (-a_{ii})$

Für  $\sigma \neq \text{id}$  ist  $\sigma(i) \neq i$  für mindestens zwei  $i$ , der entsprechende Summand hat also Grad höchstens  $n-2$ . Somit haben  $\alpha_n$  und  $\alpha_{n-1}$  die oben behauptete Form, und  $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(f)$ .

Die Aussage über die Nullstellen von  $\chi_f$  folgt aus Satz 2.1 und Lemma 2.4.  $\square$

**Folgerung 2.6**

Ist  $\dim_K(V) = n$ , so hat  $f$  höchstens  $n$  Eigenwerte.

*Beweis.* Satz 2.5 und I.6.10

□

**Definition 2.7 (normiertes Polynom)**

Ein Polynom  $0 \neq P \in K[t]$  mit Leitkoeffizient 1 heißt normiert.

**■ Beispiel 2.8**

1. Ist  $A = (a_{ij})_{i,j}$  eine obere Dreiecksmatrix, so ist  $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t - a_{ii})$ , vgl. IV.2.9.c  
Insbesondere ist  $\chi_{1_n}(t) = (t - 1)^n$ ,  $\chi_0(t) = t^n$
2. Für eine Blockmatrix  $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$  mit quadratischen Matrizen  $A_1, A_2$  ist  $\chi_A = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$   
vgl. IV.2.9.e
3. Für

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad c_0, \dots, c_{n-1} \in K$$

ist  $\chi_A(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$

Man nennt diese Matrix die Begleitmatrix zum normierten Polynom  $P = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$  und schreibt  $M_P := A$

### 3. Diagonalisierbarkeit

**Definition 3.1 (diagonalisierbar)**

Man nennt  $f$  diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis  $B$  besitzt, für die  $M_B(f)$  eine Diagonalmatrix ist.

**Lemma 3.2**

Genau dann ist  $f$  diagonalisierbar, wenn

$$V = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$$

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ): Ist  $B$  eine Basis aus EV von  $f$  (vgl. Satz 1.7), so ist  $B \leq \bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$ , also  $V = \text{span}_K(\bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)) = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$ .  
 ( $\Leftarrow$ ): Ist  $V = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)$ , so gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit  $V = \sum_{i=1}^n \text{Eig}(f, \lambda_i)$ . Wir wählen Basen  $B_i$  von  $\text{Eig}(f, \lambda_i)$ . Dann ist  $\bigcup_{i=1}^n B_i$  ein endliches Erzeugendensystem von  $V$ , enthält also eine Basis von  $V$  (II.3.6). Diese besteht aus EV von  $f$ .  $\square$

**Satz 3.3**

Ist  $\dim_K(V) = n$ , so hat  $f$  höchstens  $n$  Eigenwerte. Hat  $f$  genau  $n$  Eigenwerte, so ist  $f$  diagonalisierbar.

*Beweis.* Ist  $\lambda$  ein EW von  $f$ , so ist  $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \geq 1$ . Sind also  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  paarweise verschiedene EW von  $f$ , so ist

$$\begin{aligned} n = \dim_K(V) &\geq \dim_K\left(\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &\stackrel{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda_i)) \\ &\geq m \end{aligned}$$

Ist zudem  $m = n$ , so muss

$$\begin{aligned} \dim_K(V) &= \dim_K\left(\sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i)\right) \text{ sein, also} \\ V &= \sum_{i=1}^m \text{Eig}(f, \lambda_i) \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist  $f$  genau dann diagonalisierbar.  $\square$

**Definition 3.4 ( $a$  teilt  $b$ )**

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit seien  $a, b \in R$ . Man sagt,  $a$  teilt  $b$  (in Zeichen  $a|b$ ), wenn es  $x \in R$  mit  $b = ax$  gibt.

**Definition 3.5 (Vielfachheit)**

Für  $0 \neq P \in K[t]$  und  $\lambda \in K$  nennt man  $\mu(P, \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N}_{>0} \mid (t - \lambda)^r | P\}$  die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$  von  $P$ .



**Lemma 3.6**

Genau dann ist  $\mu(P, \lambda) \geq 1$ , wenn  $\lambda$  eine Nullstelle von  $P$  ist.

*Beweis.*  $(\Rightarrow)$ :  $t - \lambda | P \Rightarrow P(t) = (t - \lambda) \cdot Q(t)$  mit  $Q(t) \in K[t] \Rightarrow P(\lambda) = 0 \cdot Q(\lambda) = 0$ .

$(\Leftarrow)$ :  $P(\lambda) = 0 \stackrel{I.6.9}{=} t - \lambda | P(t) \Rightarrow \mu(P, \lambda) \geq 1$ . □

**Lemma 3.7**

Ist  $P(t) = (t - \lambda)^r \cdot Q(t)$  mit  $Q(t) \in K[t]$  und  $Q(\lambda) \neq 0$ , so ist  $\mu(P, \lambda) = r$

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\mu(P, \lambda) \geq r$ . Wäre  $\mu(P, \lambda) \geq r + l$ , so  $(t - \lambda)^{r+l} | P(t)$  also  $(t - \lambda)^r \cdot Q(t) = (t - \lambda)^{r+l} \cdot R(t)$  mit  $R(t) \in K[t]$ , folglich  $t - \lambda | Q(t)$ , insbesondere  $Q(\lambda) = 0$ .

(Denn wir dürfen kürzen:  $R$  ist nullteilerfrei, genau so wie  $K[t]$ ).

$(t - \lambda)^r (Q(t) - (t - \lambda)R(t)) = 0 \Rightarrow Q(t) = (t - \lambda)R(t)$ . □

**Lemma 3.8**

Sind  $P, Q, R \in K[t]$  mit  $PQ = PR$ , und ist  $P \neq 0$ , so ist  $Q = R$ .

*Beweis.*  $PQ = PR \Rightarrow P(Q - R) = 0 \stackrel{K[t] \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} Q - R = 0$ , d.h.  $Q = R$ . □

**Lemma 3.9**

Es ist  $\sum_{\lambda \in K} \mu(P, \lambda) \leq \deg(P)$ , mit Gleichheit genau dann, wenn  $P$  in Linearfaktoren zerfällt.

*Beweis.* Schreibe  $P(t) = \prod_{\lambda \in K} (t - \lambda)^{r_\lambda} \cdot Q(t)$ , wobei  $Q(t) \in K[t]$  keine Nullstellen mehr besitzt. Nach Lemma 3.7 ist  $\mu(P, \lambda) = r_\lambda$  für alle  $\lambda$  und somit  $\deg(P) = \sum_{\lambda \in K} r_\lambda + \deg(Q) \geq \sum_{\lambda \in K} \mu(P, \lambda)$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $\deg(Q) = 0$ , also  $Q = c \in K$ , d.h. genau dann, wenn  $P(t) = c \cdot \prod_{\lambda \in K} (t - \lambda)^{r_\lambda}$ . □

**Lemma 3.10**

Für  $\lambda \in K$  ist

$$\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \geq \mu(x_f, \lambda)$$

*Beweis.* Ergänze eine Basis  $B$  von  $\text{Eig}(f, \lambda)$  zu einer Basis  $B$  von  $V$ . Dann ist

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{I}_s & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix  $A' \in \text{Mat}_{n-s}(K)$ , also  $\chi_f(t) = \chi_A(t) \stackrel{\text{Beispiel 2.8}}{=} \chi_{\lambda \mathbb{I}_s} \cdot \chi_{A'}(t) = (t - \lambda)^s \cdot \chi_{A'}(t)$  und somit  $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = s \leq \mu(x_f, \lambda)$ . □

**Satz 3.11**

Genau dann ist  $f$  diagonalisierbar, wenn  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt und  $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = \mu(x_f, \lambda)$  für alle  $\lambda \in K$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
 \dim_K\left(\sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)\right) &\stackrel{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)\right) \\
 &\stackrel{\text{II.4.12}}{=} \sum_{\lambda \in K} \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 3.10}}{\leq} \sum_{\lambda \in K} \mu(\chi_f, \lambda) \tag{1} \\
 &\leq \deg(\chi_f) \tag{2} \\
 &= n
 \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist  $f$  genau dann diagonalisierbar, wenn  $\dim_K(\sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f, \lambda)) = n$ , also wenn bei (1) und (2) Gleichheit herrscht. Gleichheit bei (1) bedeutet  $\dim_K(\text{Eig}(f, \lambda)) = \mu(\chi_f, \lambda)$  für alle  $\lambda \in K$ , und Gleichheit bei (2) bedeutet nach Lemma 3.9, dass  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt.  $\square$

**Definition 3.12 (algebraische und geometrische Vielfachheit)**

Man nennt  $\mu_a(f, \lambda) = \mu(\chi_f, \lambda)$  die algebraische Vielfachheit und  $\mu_g(f, \lambda) = \dim_K(\text{Eig}(f, \lambda))$  die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  von  $f$ .

► **Bemerkung 3.13**

Wieder nennt man  $A \in \text{Mat}_n(K)$  diagonalisierbar, wenn  $f_A \in \text{End}_K(K^n)$  diagonalisierbar ist, also wenn  $A \sim D$  für eine Diagonalmatrix  $D$ .

## 4. Trigonalisierbarkeit

### Definition 4.1

Man nennt  $f$  trigonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis  $B$  besitzt, für die  $M_B(f)$  eine obere Dreiecksmatrix ist.

### ■ Beispiel 4.2

Ist  $f$  diagonalisierbar, so ist  $f$  auch trigonalisierbar.

### Lemma 4.3

Ist  $f$  trigonalisierbar, so zerfällt  $\chi_f$  in Linearfaktoren.

*Beweis.* Klar aus Beispiel 2.8 und Satz 2.3. □

### Definition 4.4 (invariant)

Ein Untervektorraum  $W \leq V$  ist  $f$ -invariant, wenn  $f(W) \leq W$ .

### ► Bemerkung 4.5

Ist  $W$  ein  $f$ -invarianter UVR von  $V$ , so ist  $f|_W \in \text{End}_K(W)$ .

### ■ Beispiel 4.6

1.  $V$  hat stets die  $f$ -invarianten UVR  $W = \{0\}$  und  $W = V$ .
2. Jeder UVR  $W \leq \text{Eig}(f, \lambda)$  ist  $f$ -invariant.
3. Ist  $B = (x_1, \dots, x_n)$  eine Basis von  $V$ , für die  $M_B(f)$  eine obere Dreiecksmatrix ist, so sind alle UVR  $W_i = \text{span}_K(x_1, \dots, x_i)$   $f$ -invariant.
4. Sei  $V = W \oplus U$ ,  $B_1 = (x_1, \dots, x_r)$  Basis von  $W$ ,  $B_2(x_{r+1}, \dots, x_n)$  Basis von  $U$  und  $B = (x_1, \dots, x_n)$ . Ist  $W$   $f$ -invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Sind  $W$  und  $U$   $f$ -invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(f|_U) \end{pmatrix}$$

### Lemma 4.7

Ist  $W \subset V$  ein  $f$ -invarianter UVR, so gilt  $\chi_{f|_W} | \chi_f$ . Hat  $W$  ein lineares Komplement  $U$ , dass auch  $f$ -invariant ist, so  $\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$ .

*Beweis.* Ergänze eine Basis  $B_0 = (x_1, \dots, x_r)$  von  $W$  zu einer Basis  $B = (x_1, \dots, x_n)$  von  $V$ . Sei  $A = M_B(f)$ ,  $A_0 = M_{B_0}(f|_W)$ . Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad C \in \text{Mat}_{n-r}(K)$$

folglich  $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C$ , insbesondere  $\chi_{f|_W} | \chi_f$ .

Ist auch  $U = \text{span}_K(x_{r+1}, \dots, x_n)$   $f$ -invariant, so ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

und folglich  $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$ . □

**Theorem 4.8**

Genau dann ist  $f$  trigonalisierbar, wenn  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt.

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ): Lemma 4.3

( $\Leftarrow$ ): Induktion nach  $n = \dim_K(V)$ .

$n = 1$ : trivial

$n - 1 \rightarrow n$ : Nach Annahme ist  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Sei  $x_1$  ein EV zum EW  $\lambda_1$ . Dann ist  $V_1 = K \cdot x_1$  ein  $f$ -invarianter UVR. Ergänze  $B_1 = (x_1)$  zu einer Basis  $B = (x_1, \dots, x_n)$  von  $V$  und setze  $B_2 = (x_2, \dots, x_n)$ ,  $V_2 = \text{span}_K(B_2)$ .  $n - 1 \rightarrow n$ : Nach Annahme ist  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Sei  $x_1$  ein EV zum EW  $\lambda_1$ . Dann ist  $V_1 = K \cdot x_1$  ein  $f$ -invarianter UVR. Ergänze  $B_1 = (x_1)$  zu einer Basis  $B = (x_1, \dots, x_n)$  von  $V$  und setze  $B_2 = (x_2, \dots, x_n)$ ,  $V_2 = \text{span}_K(B_2)$ .

$$\Rightarrow M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad A_2 \in \text{Mat}_{n-1}(K)$$

$$\chi_f(t) = \chi_{\lambda_1 1_1} \cdot \chi_{A_2} = (t - \lambda_1) \cdot \chi_{A_2}(t)$$

$$\xrightarrow{\text{Lemma 3.7}} \chi_{A_2}(t) = \prod_{i=2}^n (t - \lambda_i)$$

Seien  $\pi_1, \pi_2 \in \text{End}_K(V)$  gegeben durch  $M_B(\pi_1) = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$  und  $M_B(\pi_2) = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$ . Dann ist  $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}_V$  und  $f_i = \pi_i \circ f$  ist  $f = \text{id}_V \circ f = f_1 + f_2$  und  $f_2|_{V_2} \in \text{End}_K(V_2)$ . Nach Induktionshypothese ist  $f_2|_{V_2}$  trigonalisierbar, da  $M_B(f_2|_{V_2}) = A_2$ , also  $\chi_{f_2|_{V_2}} = \chi_{A_2}$ . Dies bedeutet, es gibt also eine Basis  $B'_2 = (x'_2, \dots, x'_n)$  von  $V_2$ , für die  $M_{B'_2}(f_2|_{V_2})$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist für  $B' = (x_1, x'_2, \dots, x'_n)$  auch

$$\begin{aligned} M_{B'}(f) &= M_{B'}(f_1) + M_{B'}(f_2) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{B'_2}(f_2|_{V_2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine obere Dreiecksmatrix. □

**Folgerung 4.9**

Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so ist jedes  $f \in \text{End}_K(V)$  trigonalisierbar.

*Beweis.* Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so zerfällt nach I.6.14 jedes Polynom über  $K$  in Linearfaktoren, insbesondere also  $\chi_f$ . □

**Folgerung 4.10**

Ist  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -VR, so ist jedes  $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  trigonalisierbar.

*Beweis.* Nach dem Fundamentalsatz der Algebra I.6.16 ist  $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen. □

## 5. Das Minimalpolynom

### Definition 5.1

Für ein Polynom  $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \in K[t]$  definieren wir  $P(f) = \sum_{i=0}^n c_i f^i \in \text{End}_K(V)$ , wobei  $f^0 = \text{id}_V$ ,  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f \circ f$ , ... Für ein Polynom  $P(t) = \sum_{i=0}^m c_i t^i \in K[t]$  definieren wir  $P(f) = \sum_{i=0}^m c_i f^i \in \text{End}_K(V)$ , wobei  $f^0 = \text{id}_V$ ,  $f^1 = f$ ,  $f^2 = f \circ f$ , ...

Analog definiert man  $P(A)$  für  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

► **Bemerkung 5.2**  $\begin{cases} K[t] \rightarrow \text{End}_K(V) \\ P \mapsto P(f) \end{cases}$  ist ein Homomorphismus von  $K$ -VR und Ringen. Sein Kern ist das Ideal

$$\mathcal{I}_f := \{P \in K[t] \mid P(f) = 0\}$$

und sein Bild ist der kommutative Unterring

$$\begin{aligned} K[f] &:= \{P(f) \mid P \in K[t]\} \\ &= \text{span}_K(f^0, f^1, f^2, \dots) \end{aligned}$$

des (im Allgemeinen nicht kommutativen) Rings  $\text{End}_K(V)$ .

Analog definiert man  $\mathcal{I}_A$  und  $K[A] \leq \text{Mat}_n(K)$ .

### Lemma 5.3

$\mathcal{I}_f \neq \{0\}$

*Beweis.* Wäre  $\mathcal{I}_f = \{0\}$ , so wäre  $K[t] \rightarrow \text{End}_K(V)$  injektiv, aber  $\dim_K(K[t]) = \infty > n^2 = \dim_K(\text{End}_K(V))$ , ein Widerspruch.  $\square$

### Satz 5.4

Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom  $0 \neq P \in K[t]$  kleinsten Grades mit  $P(f) = 0$ . Dieses teilt jedes  $Q \in K[t]$  mit  $Q(f) = 0$ .

*Beweis.* Nach Lemma 5.3 gibt es  $0 \neq P \in K[t]$  mit  $P(f) = 0$  von minimalem Grad  $d$ . Indem wir durch den Leitkoeffizienten von  $P$  teilen, können wir annehmen, dass  $P$  normiert ist.

Sei  $Q \in \mathcal{I}_f$ . Polynomdivision liefert  $R, H \in K[t]$  mit  $Q = P \cdot H + R$  und  $\deg(R) < \deg(P) = d$ . Es folgt  $R(f) = \underbrace{Q(f)}_{=0} - \underbrace{P(f) \cdot H(f)}_{=0} = 0$ . Aus der Minimalität von  $d$  folgt  $R = 0$  und somit  $P \mid Q$ .

Ist  $Q$  zudem normiert vom Grad  $d$ , so ist  $H = 1$ , also  $Q = P$ , was die Eindeutigkeit zeigt.  $\square$

### Definition 5.5 (Minimalpolynom)

Das eindeutig bestimmte normierte Polynom  $0 \neq P \in K[t]$  kleinsten Grades mit  $P(f) = 0$  nennt man das Minimalpolynom  $P_f$  von  $f$ .

Analog definiert man das Minimalpolynom  $P_A \in K[t]$  einer Matrix  $A \in \text{Mat}_n(K)$ .

### ■ Beispiel 5.6

1.  $A = \mathbb{1}_n$ ,  $\chi_A(t) = (t-1)^n$ ,  $P_A(t) = t-1$
2.  $A = 0$ ,  $\chi_A(t) = t^n$ ,  $P_A(t) = t$
3. Ist  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  mit paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , so ist  $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t-a_i) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)^{\mu_a(f_A, \lambda_i)}$ ,  $P_A(t) = \prod_{i=1}^r (t-\lambda_i)$  und es folgt  $\deg(P_A) \geq |\{a_1, \dots, a_n\}| = r$ .

**Definition 5.7 ( $f$ -zyklisch)**

Ein  $f$ -invarianter UVR  $W \leq V$  heißt  $f$ -zyklisch, wenn es ein  $x \in W$  mit  $W = \text{span}_K(x, f(x), f^2(x), \dots)$  gibt.

**Lemma 5.8**

Sei  $x \in V$  und  $x_i = f^i(x)$ . Es gibt ein kleinstes  $k$  mit  $x_k \in \text{span}_K(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ , und  $W = \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$  ein  $f$ -zyklischer UVR von  $V$  mit Basis  $B = (x_0, \dots, x_{k-1})$  und  $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$ .

*Beweis.* Da  $\dim_K(V) = n$  ist  $(x_0, \dots, x_n)$  linear abhängig, es gibt also ein kleinstes  $k$  mit  $(x_0, \dots, x_{k-1})$  linear unabhängig, aber  $(x_0, \dots, x_k)$  linear abhängig, folglich  $x_k \in \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$ . Mit  $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$  ist dann Da  $\dim_K(V) = n$  ist  $(x_0, \dots, x_n)$  linear abhängig, es gibt also ein kleinstes  $k$  mit  $(x_0, \dots, x_{k-1})$  linear unabhängig, aber  $(x_0, \dots, x_k)$  linear abhängig, folglich  $x_k \in \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$ . Mit  $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$  ist dann

$$M_B(f|_W) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

somit  $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ , also  $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$ . □

**Theorem 5.9 (Satz von CAYLEY-HAMILTON)**

Für  $f \in \text{End}_K(V)$  ist  $\chi_f(f) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $x \in V$ . Definiere  $x_i = f^i(x)$  und  $W = \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$  wie in Lemma 5.8. Sei  $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ , also  $f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ . Wenden wir  $\chi_{f|_W}(f) \in \text{End}_K(V)$  auf  $x$  an, so erhalten wir Sei  $x \in V$ . Definiere  $x_i = f^i(x)$  und  $W = \text{span}_K(x_0, \dots, x_{k-1})$  wie in Lemma 5.8. Sei  $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ , also  $f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ . Wenden wir  $\chi_{f|_W}(f) \in \text{End}_K(V)$  auf  $x$  an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_{f|_W}(f)(x) &= \left( f^k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i f^i \right) (x) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} -c_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aus  $\chi_{f|_W}|_{\chi_f}$  (Beispiel 4.6) folgt somit  $\chi_f(f)(x) = 0$ , denn ist  $\chi_f = Q \cdot \chi_{f|_W}$  mit  $Q \in K[t]$ , so ist  $\chi_f(f) = Q(f) \circ \chi_{f|_W}(f)$ , also  $\chi_f(f)(x) = \underbrace{Q(f)(\chi_{f|_W}(f)(x))}_{=0} = 0$ . Da  $x \in V$  beliebig war, folgt  $\chi_f(f) = 0 \in \text{End}_K(V)$ . □

**Folgerung 5.10**

Es gilt  $P_f|_{\chi_f}$ . Insbesondere ist  $\deg(P_f) \leq n$ .

*Beweis.* Theorem 5.9 + Satz 5.4 □

**► Bemerkung 5.11**

Ist  $B$  eine Basis von  $V$  und  $A = M_B(f)$ , so ist  $P_A = P_f$ . Insbesondere ist  $P_A = P_B$  für  $A \sim B$ . Als Spezialfall von Theorem 5.9 erhält man  $\chi_A(A) = 0$  und  $P_A|_{\chi_A}$ .

► **Bemerkung 5.12**

Der naheliegende “Beweis“  $\underbrace{\chi_A}_{\in \text{Mat}_n(K)} = \det(t\mathbb{1}_n - A)(A) = \det(A\mathbb{1}_n - A) = \det(0) = \underbrace{0}_{\in K}$  ist falsch!

## 6. Nilpotente Endomorphismen

### ► Bemerkung 6.1

Für  $f \in \text{End}_K(V)$  sind

- $f\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subseteq \text{Ker}(f^1) \subseteq \text{Ker}(f^2) \subseteq \dots$
- $V = \text{Im}(f^0) \supseteq \text{Im}(f^1) \supseteq \text{Im}(f^2) \supseteq \dots$

Folgen von UVR von  $V$ . Nach der Kern-Bild-Formel III.7.13 ist

$$\dim_K(\text{Ker}(f^i)) + \dim_K(\text{Im}(f^i)) = \dim_K(V) \quad \forall i$$

Da  $\dim_K(V) = n < \infty$  gibt es ein  $d$  mit  $\text{Ker}(f^d) = \text{Ker}(f^{d+i})$  und  $\text{Im}(f^d) = \text{Im}(f^{d+i})$  für jedes  $i \geq 0$ .

### ■ Beispiel 6.2

$f = f_A$ ,  $A \in \text{Mat}_2(K)$ .

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) = \text{Ker}(f^1) = \dots$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = \text{span}_K(e_2)$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \underbrace{\text{Ker}(f^1)}_{=\text{span}_K(e_1)} \subset \text{Ker}(f^2) = \dots = K^2$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ :  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = K^2$

### Lemma 6.3

Seien  $f, g \in \text{End}_K(V)$ . Wenn  $f$  und  $g$  kommutieren, d.h.  $f \circ g = g \circ f$ , so sind die UVR  $\text{Ker}(g)$  und  $\text{Im}(g)$   $f$  invariant.

*Beweis.* Ist  $x \in \text{Ker}(f)$ , so ist  $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$ , also  $f(x) \in \text{Ker}(g)$ . Für  $g(x) \in \text{Im}(g)$  ist  $f(g(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$ .  $\square$

### Satz 6.4 (Lemma von FITTING)

Seien  $V_i = \text{Ker}(f^i)$ ,  $W_i = \text{Im}(f^i)$ ,  $d = \min\{i : V_i = V_{i+1}\}$ . Dann sind

$$\begin{aligned} \{0\} &= V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_d = V_{d+1} = \dots \\ V &= W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \dots \supsetneq W_d = W_{d+1} = \dots \end{aligned}$$

Folgen  $f$ -invarianter UVR und  $V = V_d \oplus W_d$ .

*Beweis.* Da  $f^i$  und  $f^j$  für beliebige  $i, j$  kommutieren, sind  $V_i$  und  $V_j$  nach Lemma 6.3  $f$ -invariant für jedes  $i$ . Aus  $\dim_K(V_i) + \dim_K(W_i) = n$  folgt  $d = \min\{i : W_i = W_{i+1}\}$ , insbesondere ist  $\text{Im}(f^d) = \text{Im}(f^{d+1}) = f(\text{Im}(f^d))$ , somit  $W_{d+i} = \text{Im}(f^{d+i}) = W_d$  für  $i \geq 0$ , also auch  $V_d = V_{d+i}$  für alle  $i \geq 0$ . Insbesondere ist  $f^d|_{W_d} : W_d \rightarrow W_{2d} = W_d$  surjektiv, also auch injektiv, also  $V_d \cap W_d = \{0\}$ . Aus der Dimensionsformel II.4.12 folgt dann  $\dim_K(V_d + W_d) = \dim_K(V_d) + \dim_K(W_d) = \dim_K(V)$ . Folglich ist  $V_d + W_d = V$  und  $V_d \cap W_d = \{0\}$ , also  $V = V_d \oplus W_d$ .  $\square$



**Definition 6.5 (nilpotent)**

Ein  $f \in \text{End}_K(V)$  heißt nilpotent, wenn  $f^k = 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Analog heißt  $A \in \text{Mat}_n(K)$  nilpotent, wenn  $A^k = 0$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Das kleinste  $k$  mit  $f^k = 0$  bzw.  $A^k$  heißt die Nilpotenzklasse von  $f$  bzw.  $A$ .

**Lemma 6.6**

Ist  $f$  nilpotent, so gibt es eine Basis  $B$  von  $V$ , für die  $M_B(f)$  eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

*Beweis.* Induktion nach  $n = \dim_K(V)$ .

$n = 1$ :  $f^k = 0 \Rightarrow f = 0$

$n > 1$ : Sei  $k$  die Nilpotenzklasse von  $f$  und  $U = \text{Ker}(f^{k-1})$ . Dann ist  $U \subset V$ . Da  $f^k = f^{k-1} \circ f$  ist  $f(V) \subset U$ , insbesondere  $f|_U \in \text{End}_K(U)$ . Da  $f|_U$  nilpotent ist, gibt es nach I.H. eine Basis  $B_0$  von  $U$ , für die  $M_{B_0}(f|_U)$  eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Ergänze  $B_0$  zu einer Basis  $B$  von  $V$ . Da  $f(V) \subset U$  ist dann auch

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(f|_U) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix. □

**Satz 6.7**

Für  $f \in \text{End}_K(V)$  sind äquivalent:

- 1)  $f$  ist nilpotent
- 2)  $f^n = 0$  für  $n \in \mathbb{N}$
- 3)  $P_f(t) = t^r$  für ein  $r \leq n$
- 4)  $\chi_f(t) = t^n$
- 5) Es gibt eine Basis  $B$  von  $V$ , mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

*Beweis.*

- 1)  $\Rightarrow$  5): Lemma 6.6
- 5)  $\Rightarrow$  4): Beispiel 2.8
- 4)  $\Rightarrow$  3): Nach Folgerung 5.10 ist  $P_f|_{\chi_f} = t^n$ , also  $t^n = P_f(t)Q(t)$  mit  $Q \in K[t]$ . Schreibe  $P_f(t) = t^a \cdot P_1(t)$ ,  $Q(t) = t^b \cdot Q_1(t)$  mit  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $P_1, Q_1 \in K[t]$ ,  $P_1(0) \neq 0$ ,  $Q_1(0) \neq 0$   
 $\xRightarrow{\text{Lemma 3.8}} t^{n-(a+b)} = P_1(t)Q_1(t)$  und  $(P_1Q_1)(0) \neq 0$   
 $\Rightarrow n - (a+b) = 0 \Rightarrow P_1 = 1$ , somit  $P_f(t) = t^a$
- 3)  $\Rightarrow$  2):  $t^r = 0$ ,  $r \leq n \Rightarrow f^n = 0$
- 2)  $\Rightarrow$  1): nach Definition □

**Folgerung 6.8**

Die Nilpotenzklasse eines nilpotenten Endomorphismus  $f \in \text{End}_K(V)$  ist höchstens  $\dim_K(V)$ .

**Folgerung 6.9**

Ist  $d := \min\{i \mid \text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})\}$ , so ist  $d \leq \dim_K(\text{Ker}(f)) = \mu_a(f, 0)$ .

*Beweis.* Sei  $V_d = \text{Ker}(f^d)$ ,  $W_d = \text{Im}(f^d)$ ,  $k = \dim_K(V_d)$ . Da  $V = V_d \oplus W_d$  ist  $\chi_f = \chi_{f|_{V_d}} \cdot \chi_{f|_{W_d}}$ . Da  $f|_{V_d}$  nilpotent ist, ist  $\chi_{f|_{V_d}} = t$  nach Satz 6.7. Da  $f|_{W_d}$  injektiv ist, ist  $\chi_{f|_{W_d}}(0) \neq 0$ . Somit ist  $\mu_a(f, 0) = \mu(\chi_f, 0) \stackrel{\text{Lemma 3.6}}{=} k$ . Da  $\dim_K(\text{Ker}(f^d)) > \dots > \dim_K(\text{Ker}(f)) > 0$  ist  $k = \dim_K(\text{Ker}(f^d)) \geq d$ , falls  $d > 0$ , sonst klar.  $\square$

► **Bemerkung 6.10**

Die Bedeutung nilpotenter Endomorphismen beim Finden geeigneter Basen ergibt sich aus der folgenden Beobachtung:

Ist  $A$  eine obere Dreiecksmatrix, so ist  $A = D + N$ , wobei  $D$  eine Diagonalmatrix ist und  $N$  eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Anders gesagt: Jeder trigonalisierbare Endomorphismus ist Summe aus einem diagonalisierbaren und einem nilpotenten Endomorphismus.

**Definition 6.11 (JORDAN-Matrix)**

Für  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir die JORDAN-Matrix

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_k(K)$$

weiter setzen wir für  $\lambda \in K$   $J_k(\lambda) := \lambda \mathbb{1} + J_k$ .

**Lemma 6.12**

Die JORDAN-Matrix  $J_k$  ist nilpotent von Nilpotenzklasse  $k$ .

*Beweis.* Es ist  $(J_k)^r = (\delta_{i+r,j})_{i,j}$  für  $r \geq 1$ .  $\square$

**Satz 6.13**

Ist  $f$  nilpotent von Nilpotenzklasse  $k$ , so gibt es eindeutig bestimmte  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}_{>0}$  mit  $\sum_{d=1}^k dr_d = n$  und eine Basis  $B$  von  $V$  mit

$$M_B(f) = \text{diag}(\underbrace{J_k, \dots, J_k}_{r_k \text{ viele}}, \dots, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{r_1 \text{ viele}})$$

*Beweis.* Sei  $U_i = \text{Ker}(f^i)$ . Nach Satz 6.4 haben wir eine Folge  $\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_k = V$  mit  $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$  für alle  $i > 0$ .

Wir konstruieren eine Zerlegung  $V = \bigoplus_{d=1}^k W_d$  mit  $U_i = U_{i-1} \oplus W_i$ ,  $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$ ,  $f|_{W_d}$  injektiv für  $i > 1$ .

$$\begin{aligned} V &= U_k \\ V &= U_{k-1} \oplus W_k \\ V &= U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k \\ &\vdots \\ V &= U_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k \end{aligned}$$

Wähle  $W_k$  mit  $V = U_k = U_{k-1} \oplus W_k$ . Ist  $k > 1$ , so ist  $W_k \cap \text{Ker}(f) \subseteq W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$ , also  $f|_{W_k}$  ist injektiv. Des weiteren ist  $f(W_k) \subseteq U_{k-1}$  und aus  $W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$  folgt  $f(W_k) \cap U_{k-2} = \{0\}$ . Wir können deshalb  $W_{k-1}$  mit  $U_{k-1} = U_{k-2} \oplus W_{k-1}$  und  $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$  wählen. Somit ist  $V = U_{k-1} \oplus W_k = U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k$ . Wir setzen dies fort und erhalten  $V = U_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  mit  $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$  und  $f|_{W_i}$  injektiv für  $i > 1$ , wobei  $U_0 = \{0\}$  und  $W_1 = \text{Ker}(f)$ .

Sie  $r_d = \dim_K(W_d) - \dim_K(W_{d+1})$ , wobei wir  $W_{k+1} = \{0\}$ . Wähle nun eine Basis  $(x_{k,1}, \dots, x_{k,r_k})$  von  $W_k$ . Ist  $k > 1$ , so ist  $f|_{W_k}$  injektiv und wir können  $(f(x_{k,1}), \dots, f(x_{k,r_k}))$  durch Elemente  $x_{k-1,1}, \dots, x_{k-1,r_{k-1}}$  zu einer Basis von  $W_{k-1}$  ergänzen, und so weiter.

Da  $V = \bigoplus_{d=1}^k W_d$  ist

$$B = \{f^i(x_{d,j}) \mid d = 1, \dots, k, j = 1, \dots, r_d, i = 0, \dots, d-1\}$$

eine Basis von  $V$ , die bei geeigneter Anordnung das Gewünschte leistet.

Es bleibt zu zeigen, dass  $r_1, \dots, r_k$  eindeutig bestimmt sind. Ist  $B_0$  eine Basis, für die  $M_{B_0}(f)$  in der gewünschten Form ist, so ist

$$\begin{aligned} \dim_K(U_1) &= \sum_{d=1}^k r_d \\ \dim_K(U_2) &= \sum_{d=2}^k r_d + \sum_{d=1}^k r_d \\ &\vdots \\ \dim_K(U_k) &= \sum_{d=k}^k r_d + \dots + \sum_{d=1}^k r_d \end{aligned}$$

woraus man sieht, dass  $r_1, \dots, r_k$  durch  $U_1, \dots, U_k$ , also durch  $f$  eindeutig bestimmt. □

■ **Beispiel 6.14**  
Sei  $f = f_A$  mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

$\Rightarrow k = 3, U_0 = \{0\}, U_1 = \mathbb{R}e_1, U_2 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2, U_3 = V$ .

Wähle  $W_3$  mit  $V = U_3 = U_2 \oplus W_3$ , z.B.  $W_3 = \mathbb{R}e_3$ .

Wähle  $W_2$  mit  $U_2 = U_1 \oplus W_2$  und  $f(W_3) \subseteq W_2$ , also

$$W_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze  $W_1 = U_1 = \text{Ker}(f) = \mathbb{R}e_1 \Rightarrow$  Basis  $B = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

## 7. Die JORDAN-Normalform

### Definition 7.1 (Hauptraum)

Der Hauptraum von  $f$  zum EW  $\lambda$  der Vielfachheit  $r = \mu_a(f, \lambda)$  ist

$$\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Ker} \left( (f - \lambda \text{id}_V)^r \right)$$

### Lemma 7.2

$\text{Hau}(f, \lambda)$  ist ein  $f$ -invarianter UVR der Dimension  $\dim_K(\text{Hau}(f, \lambda)) = \mu_a(f, \lambda)$ , auf dem  $f - \lambda \text{id}_V$  nilpotent ist und  $\chi_{f|_{\text{Hau}(f, \lambda)}} = (t - \lambda)^{\mu_a(f, \lambda)}$

*Beweis.*  $f$  kommutiert sowohl mit  $f$  als auch mit  $\text{id}_V$ , somit auch mit  $(f - \lambda \text{id}_V)^r$ . Die  $f$ -Invarianz von  $U = \text{Hau}(f, \lambda)$  folgt aus Lemma 6.3. Nach Folgerung 6.9 ist  $\dim_K(U) = \mu_a(f - \lambda \text{id}_V, 0)$  und da  $\chi_f(t) = \chi_{f - \lambda \text{id}_V}(t - \lambda)$  ist  $\mu_a(f, \lambda) = \mu(\chi_f, \lambda) = \mu_a(f - \lambda \text{id}_V, 0)$ . Da  $f - \lambda \text{id}_V|_U$  nilpotent ist  $\chi_{f - \lambda \text{id}_V|_U}(t) = t^r$ , somit  $\chi_{f|_U}(t) = (t - \lambda)^r$ .  $\square$

### Satz 7.3 (Hauptraumzerlegung)

Ist  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  paarweise verschieden und  $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}$ , so ist  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$  mit  $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$  eine Zerlegung in  $f$ -invariante UVR und für jedes  $i$  ist  $\chi_{f|_{V_i}}(t) = (t - \lambda_i)^{r_i}$ .

*Beweis.* Induktion nach  $m$ .

$m = 1$ :  $r_1 = n \xrightarrow{\text{Lemma 7.2}} V = V_1$ .

$m - 1 \rightarrow m$ : Nach Satz 6.4 ist  $V = V_1 \oplus W_1$  mit  $W_1 = \text{Im}((f - \lambda_1 \text{id}_V)^{r_1})$  eine Zerlegung in  $f$ -invariante UVR mit  $\dim_K(V_1) = r_1$ ,  $\dim_K(W_1) = n - r_1$ . Somit ist  $\chi_f = \chi_{f|_{V_1}} \cdot \chi_{f|_{W_1}}$  und  $\chi_{f|_{V_1}} \stackrel{\text{Lemma 7.2}}{=} (t - \lambda_1)^{r_1}$  also  $\chi_{f|_{W_1}} = \prod_{i=2}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$ . Nach I.H. ist also  $W_1 = \bigoplus_{i=2}^m \text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)$ . Es ist für  $i \geq 2$   $\text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i) \subseteq \text{Hau}(f, \lambda_i) = V_i$  und da  $\dim_K(\text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)) = r_i = \dim_K(\text{Hau}(f, \lambda_i))$  gilt Gleichheit. Damit ist

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus W_1 \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m \text{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i) \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m V_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^m V_i \end{aligned} \quad \square$$

### ■ Beispiel 7.4

$f = f_A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$$

$$\chi_A(t) = (t - 1)^2(t - 2) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \underbrace{\text{Hau}(f, 1)}_{\dim=2} \oplus \underbrace{\text{Hau}(f, 2)}_{\dim=1}$$

$$\text{Hau}(f, 1) = \text{Ker}((f - \text{id})^2) = L((A - \mathbb{1})^2, 0)$$

$$\text{Hau}(f, 2) = \text{Ker}(f - 2 \text{id}) = \text{Eig}(f, 2) = L(A - 2\mathbb{1}, 0)$$

$$A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix}, (A - \mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 12 & \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hau}(f, 1) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$$

$$A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ Hau}(f, 2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit  $B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Theorem 7.5 (JORDAN-Normalform)**

Sei  $f \in \text{End}_K(V)$  ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$  und  $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{i=1}^r k_i = \dim_K(V)$  und eine Basis  $B$  von  $V$  mit

$$M_B(f) = \text{diag}(J_{k_1}(\mu_1), \dots, J_{k_r}(\mu_r))$$

Die Paare  $(\mu_1, k_1), \dots, (\mu_r, k_r)$  heißen die JORDAN-Invarianten von  $f$  und sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Schreibe  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$  paarweise verschieden,  $r_i \in \mathbb{N}$ . Sei  $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$ . Nach Satz 7.3 ist  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$  eine Zerlegung in  $f$ -invariante UVR. Für jedes  $i$  wenden wir Satz 6.13 auf  $(f - \lambda_i \text{id}_V)|_{V_i}$  an und erhalten eine Basis  $B_i$  von  $V_i$  und  $k_{i,1} \geq \dots \geq k_{i,s_i}$  mit

$$M_B((f - \lambda_i \text{id})|_{V_i}) = \text{diag}(J_{k_{i,1}}, \dots, J_{k_{i,s_i}})$$

Es folgt  $M_{B_i}(f|_{V_i}) = M_{B_i}(\lambda_i \text{id}_{V_i}) + M_{B_i}((f - \lambda_i \text{id}_V)|_{V_i})$ . Ist nun  $B$  die Vereinigung der  $B_i$ , so hat  $M_B(f)$  die gewünschte Form. Die Eindeutigkeit der JORDAN-Invarianten folgt aus der Eindeutigkeit der  $k_{i,j}$  in Lemma 6.3.  $\square$

**► Bemerkung 7.6**

Ist  $K$  algebraisch abgeschlossen, so haben wir nun eine (bis auf Permutationen) eindeutige Normalform für Endomorphismen  $f \in \text{End}_K(V)$  gefunden. Aus ihr lassen sich viele Eigenschaften des Endomorphismus leicht ablesen.

**Folgerung 7.7**

Sei  $f \in \text{End}_K(V)$  trigonalisierbar mit  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f, \lambda_i)}$ ,  $P_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{d_i}$  und JORDAN-Invarianten  $(\mu_1, k_1), \dots, (\mu_r, k_r)$ . Mit  $J_i = \{j \mid \mu_j = \lambda_i\}$  ist dann

$$\begin{aligned} \mu_g(f, \lambda_i) &= |J_i| \\ \mu_a(f, \lambda_i) &= \sum_{j \in J_i} k_j \\ d_i &= \max\{k_j \mid j \in J_i\} \end{aligned}$$

*Beweis.* •  $\mu_a$ : klar, da  $\chi_f(t) = \prod_{j=1}^r (t - \mu_j)^{k_j} = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f, \lambda_i)}$

•  $\mu_g$ : lese Basis von  $\text{Eig}(f, \lambda_i)$  aus JORDAN-NF: Jeder Block  $J_{k_j}(\lambda_i)$  liefert ein Element der Basis.

- $d_i$ : folgt, da  $J_{k_j}$  nilpotent von Nilpotenzklasse  $k_j$  ist (Lemma 6.12). □

## Kapitel II

### *Skalarprodukte*

## Kapitel III

### *Dualität*



## Kapitel IV

### *Moduln*

# Anhang

## Anhang A: Listen

### A.1. Liste der Theoreme

Theorem 4.8	: . . . . .	10
Theorem 5.9	: Satz von CAYLEY-HAMILTION . . . . .	12
Theorem 7.5	: JORDAN-Normalform . . . . .	19

## A.2. Liste der benannten Sätze

Satz 6.4	:	Lemma von FITTING	.....	14
Satz 7.3	:	Hauptraumzerlegung	.....	18