Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

31. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Endomorphismen

In diesem Kapitel seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, V ein n-dimensionaler K-VR und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Geometrie von f besser zu verstehen und Basen zu finden, für die $M_B(f)$ eine besonders einfache oder kanonische Form hat.

1. Eigenwerte

▶ **Bemerkung 1.1**
Wir erinnern uns daran, dass $\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$ sowohl einen K-VR als auch einen Ring bildet. Bei der Wahl einer Basis B von V wird $f \in \mathrm{End}_K(V)$ durch die Matrix $M_B(f) = M_B^B(f)$ beschrieben.

■ **Beispiel 1.2**
$K = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}), f = f_A \in \mathrm{End}_K(K^2)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \; A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ mit $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist $M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Der Endomorphismus $f = f_A$ streckt also entlang der Achse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Faktor 3 und spiegelt entlang der Achse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Definition 1.3 (Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum)
Sind $0 \neq x \in V$ und $\lambda \in K$ mit $f(x) = \lambda x$ so nennt man λ einen Eigenwert von f und x einen Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Der Eigenraum zu $\lambda \in K$ ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$.

▶ **Bemerkung 1.4**
Für jedes $\lambda \in K$ ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ein UVR von V, da

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(f, \lambda) &= \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \\ &= \{x \in V \mid f(x) - \lambda \cdot \mathrm{id}_V(x) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid (f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(x) = 0\} \\ &= \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

und $f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V \in \mathrm{End}_K(V)$.

▶ **Bemerkung 1.5**
Achtung! Der Nullvektor ist nach Definition kein Eigenvektor, aber $\lambda = 0$ kann ein Eigenwert sein, nämlich genau dann, wenn $f \notin \mathrm{Aut}_K(V)$, siehe Übung. Die Menge der Eigenvektoren zu λ ist also $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \backslash \{0\}$ und λ ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\}$.

■ **Beispiel 1.6**
Ist $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und $f = f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$, so sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ EW von f und jedes e_i ist ein EV zum EW λ_i.

Satz 1.7
Sei B eine Basis von V. Genau dann ist $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix, wenn B aus EV von f besteht.

Beweis. Ist $B = (x_1, ... x_n)$ eine Basis aus EV zu EW $\lambda_1, ..., \lambda_n$, so ist $M_B(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ und umgekehrt. □

■ **Beispiel 1.8**
Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $f_\alpha \in \mathrm{End}_K(\mathbb{R}^2)$ die Drehung um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für $\alpha = 0$ hat $f_\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW 1.
Für $\alpha = \pi$ hat $f_\alpha = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ nur den EW -1.
Für $\alpha \neq 0, \pi$ hat f_α keine EW.

Lemma 1.9
Sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von f und ist x_i ein EV zu λ_i für $i = 1, ..., m$, so ist $(x_1, ..., x_m)$ linear unabhängig.

Beweis. Induktion nach m
$\underline{m = 1}$: klar, denn $x_1 \neq 0$
$\underline{m - 1 \to m}$: Sei $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$ mit $\mu_1, ..., \mu_m \in K$.

$$\begin{aligned} 0 &= (f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)\left(\sum_{i=1}^m \mu_i x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu_i (f(x_i) - \lambda_m \cdot x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i (\lambda_i - \lambda_m) \cdot x_i \end{aligned}$$

Nach IB ist $\mu_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0$ für $i = 1, ..., m-1$, da $\lambda_i \neq \lambda_m$ für $i \neq m$ also $\mu_i = 0$ für $i = 1, ..., m-1$. Damit ist auch $\mu_m = 0$. Folglich ist $(x_1, ..., x_m)$ linear unabhängig. □

Satz 1.10
Sind $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, so ist

$$\sum_{i=1}^m \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=0}^m \mathrm{Eig}(f, \lambda_i).$$

Beweis. Seien $x_i, y_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ für $i = 1, ..., m$. Ist $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$, so ist $\sum_{i=1}^m \underbrace{x_i - y_i}_{z_i} = 0$.

o. E. seien $z_i \neq 0$ für $i = 1, ..., r$ und $z_i = 0$ für $i = r+1, ..., m$. Wäre $r > 0$, so wären $(z_1, ..., z_r)$ linear abhängig, aber $z_i = x_i - y_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) \backslash \{0\}$, im Widerspruch zu Lemma 1.9. Somit ist $x_i = y_i$ für alle i und folglich ist die Summe $\sum \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ direkt. □

Definition 1.11 (EW und EV für Matrizen)
Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Man definiert Eigenwerte, Eigenvektoren, etc von A als Eigenwerte, Eigenvektoren von $f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$.

Satz 1.12
Sei B eine Basis von V und $\lambda \in K$. Genau dann ist λ ein EW von f, wenn λ ein EW von $A = M_B(f)$ ist. Insbesondere haben ähnliche Matrizen die selben EW.

Beweis. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\Phi_B"'] & K^n \arrow[d, "\Phi_B"] \\
V \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

denn $f_A(x) = \lambda x \iff (\Phi_B \circ f_A)(x) = \Phi_B(\lambda x) \iff f(\Phi_B(x)) = \lambda \Phi_B(x)$.
Ähnliche Matrizen beschreiben den selben Endomorphismus bezüglich verschiedener Basen, vgl. IV.4.1 □

2. Das charakteristische Polynom

Satz 2.1
Sei $\lambda \in K$. Genau dann ist λ ein EW von f, wenn $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = 0$.

Beweis. Da $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)$ ist λ genau dann ein EW von f, wenn $\dim_K(\mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)) > 0$, also wenn $\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f \notin \mathrm{Aut}_K(V)$. Nach IV.4.6 bedeutet dies, dass $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = 0$ □

Definition 2.2 (charakteristisches Polynom)
Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist die Determinante der Matrix $t \cdot \mathbb{1}_n - A \in \mathrm{Mat}_n(K[t])$.

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) \in K[t]$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist $\chi_f(t) = \chi_{M_B(f)}(t)$, wobei B eine Basis von V ist.

Satz 2.3
Sind $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $A \sim B$, so ist $\chi_A = \chi_B$. Insbesondere ist χ_f wohldefiniert.

Beweis. Ist $B = SAS^{-1}$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so ist $t \cdot \mathbb{1}_n - B = S(t \cdot \mathbb{1}_n - A)S^{-1}$, also $t \cdot \mathbb{1}_n - B \sim t \cdot \mathbb{1}_n - A$ und ähnliche Matrizen haben die selben Determinante (IV.4.4).
Sind B, B' Basen von V, so sind $M_B(f) \sim M_{B'}(f)$, also $\chi_{M_B(f)} = \chi_{M_{B'}(f)}$ □

Lemma 2.4
Für $\lambda \in K$ ist $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)$.

Beweis. Sei B eine Basis von V und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Dann ist $M_B(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = \lambda \cdot \mathbb{1}_n - A$. Aus IV.2.8 und I.6.8 folgt $\det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$. Folglich ist

$$\begin{aligned}\chi_f(\lambda) &= \chi_A(\lambda)\\ &= \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda)\\ &= \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)\\ &= \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)\end{aligned}$$ □

Satz 2.5
Sei $\dim_K(V) = n$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann ist $\chi_f(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$ ein Polynom vom Grad n mit

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 1\\ \alpha_{n-1} &= -\operatorname{tr}(f)\\ \alpha_0 &= (-1)^n \cdot \det(f)\end{aligned}$$

Die Nullstellen von χ_f sind genau die EW von f.

Beweis. Sei B eine Basis von V und $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$. Wir erinnern uns daran, dass $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Es ist $\chi_f(t) = \det(t - \cdot 1_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n (t\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$.
Der Summand für $\sigma = \mathrm{id}$ ist $\prod_{i=1}^n (t - a_{ii}) = t^n + \sum_{i=1}^n (-a_{ii}) t^{n-1} + ... + \prod_{i=1}^n (-a_{ii})$
Für $\sigma \neq \mathrm{id}$ ist $\sigma(i) \neq i$ für mindestens zwei i, der entsprechende Summand hat also Grad höchstens $n-2$. Somit haben α_n und α_{n-1} die oben behauptete Form, und $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(f)$.
Die Aussage über die Nullstellen von χ_f folgt aus Satz 2.1 und Lemma 2.4. □

Folgerung 2.6
Ist $\dim_K(V) = n$, so hat f höchstens n Eigenwerte.

Beweis. Satz 2.5 und I.6.10 □

Definition 2.7 (normiertes Polynom)
Ein Polynom $0 \neq P \in K[t]$ mit Leitkoeffizient 1 heißt normiert.

Beispiel 2.8

1. Ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - a_{ii})$, vgl. IV.2.9.c
Insbesondere ist $\chi_{1_n}(t) = (t-1)^n$, $\chi_0(t) = t^n$
2. Für eine Blockmatrix $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ mit quadratischen Matrizen A_1, A_2 ist $\chi_A = \chi_{A_1} \cdot \chi_{A_2}$
vgl. IV.2.9.e
3. Für

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \qquad c_0, \dots, c_{n-1} \in K$$

ist $\chi_A(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$
Man nennt diese Matrix die Begleitmatrix zum normierten Polynom $P = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$ und schreibt $M_P := A$

3. Diagonalisierbarkeit

Definition 3.1 (diagonalisierbar)
Man nennt f diagonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, für die $M_B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Lemma 3.2
Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn

$$V = \sum_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$$

.

Beweis. ($\Rightarrow$): Ist B eine Basis aus EV von f (vgl. Satz 1.7), so ist $B \leq \bigcup_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$, also $V = \mathrm{span}_K(\bigcup_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)) = \sum_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$.
($\Leftarrow$): Ist $V = \sum_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$, so gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $V = \sum_{i=1}^r \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$. Wir wählen Basen B_i von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$. Dann ist $\bigcup_{i=1}^r B_i$ ein endliches Erzeugendensystem von V, enthält also eine Basis von V (II.3.6). Diese besteht aus EV von f. □

Satz 3.3
Ist $\dim_K(V) = n$, so hat f höchstens n Eigenwerte. Hat f genau n Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.

Beweis. Ist λ ein EW von f, so ist $\dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda)) \geq 1$. Sind also $\lambda_1, ..., \lambda_n$ paarweise verschiedene EW von f, so ist

$$\begin{aligned} n = \dim_K(V) &\geq \dim_K\left(\sum_{i=1}^m \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\left(\bigoplus_{i=0}^m \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \dim_K(\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)) \\ &\geq m \end{aligned}$$

Ist zudem $m = n$, so muss

$$\dim_K(V) = \dim_K(\sum_{i=1}^m \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)) \text{ sein, also}$$

$$V = \sum_{i=1}^m \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar. □

Definition 3.4 (a teilt b)
Sei R ein kommutativer Ring mit seien $a, b \in R$. Man sagt, a teilt b (in Zeichen $a|b$), wenn es $x \in R$ mit $b = ax$ gibt.

Definition 3.5 (Vielfachheit)
Für $0 \neq P \in K[t]$ und $\lambda \in K$ nennt man $\mu(P, \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N}_{>0} \mid (t - r)^r | P\}$ die Vielfachheit der Nullstelle λ von P.

Lemma 3.6
Genau dann ist $\mu(P, \lambda) \geq 1$, wenn λ eine Nullstelle von P ist.

Beweis. (⇒): $t-\lambda|P \Rightarrow P(t) = (t-\lambda)\cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t] \Rightarrow P(\lambda) = 0 \cdot Q(\lambda) = 0$.
(⇐): $P(\lambda) = 0 \overset{I.6.9}{\Rightarrow} t-\lambda|P(t) \Rightarrow \mu(P,\lambda) \geq 1$. □

Lemma 3.7
Ist $P(t) = (t-\lambda)^r \cdot Q(t)$ mit $Q(t) \in K[t]$ und $Q(\lambda) \neq 0$, so ist $\mu(P,\lambda) = r$

Beweis. Offensichtlich ist $\mu(P,\lambda) \geq r$. Wäre $\mu(P,\lambda) \geq r+l$, so $(t-\lambda)^{r+l}|P(t)$ also $(t-\lambda)^r \cdot Q(t) = (t-\lambda)^{r+l} \cdot R(t)$ mit $R(t) \in K[t]$, folglich $t-\lambda|Q(t)$, insbesondere $Q(\lambda) = 0$.
(Denn wir dürfen kürzen: R ist nullteilerfrei, genau so wie $K[t]$).
$(t-\lambda)^r(Q(t) - (t-\lambda)R(t)) = 0 \Rightarrow Q(t) = (t-\lambda)R(t)$. □

Lemma 3.8
Sind $P, Q, R \in K[t]$ mit $PQ = PR$, und ist $P \neq 0$, so ist $Q = R$.

Beweis. $PQ = PR \Rightarrow P(Q-R) = 0 \overset{K[t] \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} Q - R = 0$, d.h. $Q = R$. □

Lemma 3.9
Es ist $\sum_{\lambda\in K} \mu(P,\lambda) \leq \deg(P)$, mit Gleichheit genau dann, wenn P in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Schreibe $P(t) = \prod_{\lambda\in K}(t-\lambda)^{r_\lambda} \cdot Q(t)$, wobei $Q(t) \in K[t]$ keine Nullstellen mehr besitzt. Nach Lemma 3.7 ist $\mu(P,\lambda) = r_\lambda$ für alle λ und somit $\deg(P) = \sum_{\lambda\in K} r_\lambda + \deg(Q) \geq \sum_{\lambda\in K} \mu(P,\lambda)$ mit Gleichheit genau dann,wenn $\deg(Q) = 0$, also $Q = c \in K$, d.h. genau dann, wenn $P(t) = c \cdot \prod_{\lambda\in K}(t-\lambda)^{r_\lambda}$. □

Lemma 3.10
Für $\lambda \in K$ ist

$$\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) \geq \mu(x_f,\lambda)$$

Beweis. Ergänze eine Basis B von $\mathrm{Eig}(f,\lambda)$ zu einer Basis B von V. Dann ist

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_s & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $A' \in \mathrm{Mat}_{n-s}(K)$, also $\chi_f(t) = \chi_A(t) \overset{\text{Beispiel 2.8}}{=} \chi_{\lambda\mathbb{1}} \cdot \chi_{A'}(t) = (t-\lambda)^s \cdot \chi_{A'}(t)$ und somit $\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = s \leq \mu(x_f,\lambda)$. □

Satz 3.11
Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt und $\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = \mu(x_f,\lambda)$ für alle $\lambda \in K$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dim_K\Big(\sum_{\lambda\in K} \mathrm{Eig}(f,\lambda)\Big) &\overset{\text{Satz 1.10}}{=} \dim_K\Big(\bigoplus_{\lambda\in K} \mathrm{Eig}(f,\lambda)\Big) \\
&\overset{\text{II.4.12}}{=} \sum_{\lambda\in K} \dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) \\
&\overset{\text{Lemma 3.10}}{\leq} \sum_{\lambda\in K} \mu(\chi_f,\lambda) \qquad (1) \\
&\leq \deg(\chi_f) \qquad (2) \\
&= n
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar, wenn $\dim_K(\sum_{\lambda\in K}\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = n$, also wenn bei (1) und (2) Gleichheit herrscht. Gleichheit bei (1) bedeutet $\dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda)) = \mu(\chi_f,\lambda)$ für alle $\lambda \in K$, und Gleichheit bei (2) bedeutet nach Lemma 3.9, dass χ_f in Linearfaktoren zerfällt. □

Definition 3.12 (algebraische und geometrische Vielfachheit)
Man nennt $\mu_a(f,\lambda) = \mu(\chi_f,\lambda)$ die algebraische Vielfachheit und $\mu_g(f,\lambda) = \dim_K(\mathrm{Eig}(f,\lambda))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ von f.

▶ **Bemerkung 3.13**
Wieder nennt man $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ diagonalisierbar, wenn $f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$ diagonalisierbar ist, also wenn $A \sim D$ für eine Diagonalmatrix D.

4. Trigonalisierbarkeit

Definition 4.1
Man nennt f trigonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beispiel 4.2
Ist f diagonalisierbar, so ist f auch trigonalisierbar.

Lemma 4.3
Ist f trigonalisierbar, so zerfällt χ_f in Linearfaktoren.

Beweis. Klar aus Beispiel 2.8 und Satz 2.3. □

Definition 4.4 (invariant)
Ein Untervektorraum $W \leq V$ ist f-invariant, wenn $f(W) \leq W$.

Bemerkung 4.5
Ist W ein f-invarianter UVR von V, so ist $f|_W \in \mathrm{End}_K(W)$.

Beispiel 4.6

1. V hat stets die f-invarianten UVR $W = \{0\}$ und $W = V$.
2. Jeder UVR $W \leq \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ist f-invariant.
3. Ist $B = (x_1, ..., x_n)$ eine Basis von V, für die $M_B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, so sind alle UVR $W_i = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_i)$ f-invariant.
4. Sei $V = W \oplus U$, $B_1 = (x_1, ..., x_r)$ Basis von W, $B_2(x_{r+1}, ..., x_n)$ Basis von U und $B = (x_1, ..., x_n)$. Ist W f-invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Sind W und U f-invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & 0 \\ 0 & M_{B_2}(f|_U) \end{pmatrix}$$

Lemma 4.7
Ist $W \subset V$ ein f-invarianter UVR, so gilt $\chi_{f|_W} | \chi_f$. Hat W ein lineares Komplement U, dass auch f-invariant ist, so $\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$.

Beweis. Ergänze eine Basis $B_0 = (x_1, ..., x_r)$ von W zu einer Basis $B = (x_1, ..., x_n)$ von V. Sei $A = M_B(f)$, $A_0 = M_{B_0}(f|_W)$. Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \qquad C \in \mathrm{Mat}_{n-r}(K)$$

folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C$, insbesondere $\chi_{f|_W} | \chi_f$.
Ist auch $U = \mathrm{span}_K(x_{r+1}, ..., x_n)$ f-invariant, so ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

und folglich $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$. □

Theorem 4.8
Genau dann ist f trigonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. ($\Rightarrow$): Lemma 4.3
($\Leftarrow$): Induktion nach $n = \dim_K(V)$.
$\underline{n=1}$: trivial
$\underline{n-1 \to n}$: Nach Annahme ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Sei x_1 ein EV zum EW λ_1. Dann ist $V_1 = K \cdot x_1$ ein f-invarianter UVR. Ergänze $B_1 = (x_1)$ zu einer Basis $B = (x_1, ..., x_n)$ von V und setze $B_2 = (x_2, ..., x_n)$, $V_2 = \mathrm{span}_K(B_2)$. $\underline{n-1 \to n}$: Nach Annahme ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$. Sei x_1 ein EV zum EW λ_1. Dann ist $V_1 = K \cdot x_1$ ein f-invarianter UVR. Ergänze $B_1 = (x_1)$ zu einer Basis $B = (x_1, ..., x_n)$ von V und setze $B_2 = (x_2, ..., x_n)$, $V_2 = \mathrm{span}_K(B_2)$.

$$\Rightarrow M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \qquad A_2 \in \mathrm{Mat}_{n-1}(K)$$
$$\chi_f(t) = \chi_{\lambda_1 \mathbb{1}_1} \cdot \chi_{A_2} = (t-\lambda_1) \cdot \chi_{A_2}(t)$$
$$\overset{\text{Lemma 3.7}}{\Rightarrow} \chi_{A_2}(t) = \prod_{i=2}^n (t-\lambda_i)$$

Seien $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{End}_K(V)$ gegeben durch $M_B(\pi_1) = \mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)$ und $M_B(\pi_2) = \mathrm{diag}(0, 1, ..., 1)$. Dann ist $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}_V$ und $f_i = \pi_1 \circ f$ ist $f = \mathrm{id}_V \circ f = f_1 + f_2$ und $f_2|_{V_2} \in \mathrm{End}_K(V_2)$. Nach Induktionshypothese ist $f_2|_{V_2}$ trigonalisierbar, da $M_B(f_2|_{V_2}) = A_2$, also $\chi_{f_2|_{V_2}} = \chi_{A_2}$. Dies bedeutet, es gibt also eine Basis $B_2' = (x_2', ..., x_n')$ von V_2, für die $M_{B_2'}(f_2|_{V_2})$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist für $B' = (x_1, x_2', ..., x_n')$ auch

$$\begin{aligned} M_{B'}(f) &= M_{B'}(f_1) + M_{B'}(f_2) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{B_2'}(f_2|_{V_2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine obere Dreiecksmatrix. □

Folgerung 4.9
Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist jedes $f \in \mathrm{End}_K(V)$ trigonalisierbar.

Beweis. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfällt nach I.6.14 jedes Polynom über K in Linearfaktoren, insbesondere also χ_f. □

Folgerung 4.10
Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-VR, so ist jedes $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ trigonalisierbar.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra I.6.16 ist $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen. □

5. Das Minimalpolynom

Definition 5.1
Für ein Polynom $P(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i \in K[t]$ definieren wir $P(f) = \sum_{i=0}^{m} c_i f^i \in \mathrm{End}_K(V)$, wobei $f^0 = \mathrm{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ... Für ein Polynom $P(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i \in K[t]$ definieren wir $P(f) = \sum_{i=0}^{m} c_i f^i \in \mathrm{End}_K(V)$, wobei $f^0 = \mathrm{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ...

Analog definiert man $P(A)$ für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

▶ **Bemerkung 5.2**
Die Abbildung $\begin{cases} K[t] \to \mathrm{End}_K(V) \\ P \mapsto P(f) \end{cases}$ ist ein Homomorphismus von K-VR und Ringen. Sein Kern ist das Ideal

$$\mathcal{I}_f := \{P \in K[t] \mid P(f) = 0\}$$

und sein Bild ist der kommutative Unterring

$$\begin{aligned} K[f] :&= \{P(f) \mid P \in K[t]\} \\ &= \mathrm{span}_K(f^0, f^1, f^2, ...) \end{aligned}$$

des (im Allgemeinen nicht kommutativen) Rings $\mathrm{End}_K(V)$.

Analog definiert man $\mathcal{I}_A$ und $K[A] \leq \mathrm{Mat}_n(K)$.

Lemma 5.3
$\mathcal{I}_f \neq \{0\}$

Beweis. Wäre $\mathcal{I}_f = \{0\}$, so wäre $K[t] \to \mathrm{End}_K(V)$ injektiv, aber $\dim_K(K[t]) = \infty > n^2 = \dim_K(\mathrm{End}_K(V))$, ein Widerspruch. □

Satz 5.4
Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$. Dieses teilt jedes $Q \in K[t]$ mit $Q(f) = 0$.

Beweis. Nach Lemma 5.3 gibt es $0 \neq P \in K[t]$ mit $P(f) = 0$ von minimalem Grad d. Indem wir durch den Leitkoeffizienten von P teilen, können wir annehmen, dass P normiert ist.
Sei $Q \in \mathcal{I}_f$. Polynomdivision liefert $R, H \in K[t]$ mit $Q = P \cdot H + R$ und $\deg(R) < \deg(P) = d$. Es folgt $R(f) = \underbrace{Q(f)}_{=0} - \underbrace{P(f)}_{=0} \cdot H(f) = 0$. Aus der Minimalität von d folgt $R = 0$ und somit $P|Q$.
Ist Q zudem normiert vom Grad d, so ist $H = 1$, also $Q = P$, was die Eindeutigkeit zeigt. □

Definition 5.5 (Minimalpolynom)
Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $0 \neq P \in K[t]$ kleinsten Grades mit $P(f) = 0$ nennt man das Minimalpolynom P_f von f.

Analog definiert man das Minimalpolynom $P_A \in K[t]$ einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

■ **Beispiel 5.6**

1. $A = \mathbb{1}_n$, $\chi_A(t) = (t-1)^n$, $P_A(t) = t - 1$
2. $A = 0$, $\chi_A(t) = t^n$, $P_A(t) = t$
3. Ist $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$ mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_r$, so ist $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{n}(t-a_i) = \prod_{i=1}^{n}(t-\lambda_i)^{\mu_a(f_A,\lambda_i)}$, $P_A(t) = \prod_{i=1}^{r}(t-\lambda_i)$ und es folgt $\deg(P_A) \geq |\{a_1, ..., a_n\}| = r$.

Definition 5.7 (f-zyklisch)
Ein f-invarianter UVR $W \leq V$ heißt f-zyklisch, wenn es ein $x \in W$ mit $W = \mathrm{span}_K(x, f(x), f^2(x), ...)$ gibt.

Lemma 5.8
Sei $x \in V$ und $x_i = f(x)$. Es gibt ein kleinstes k mit $x_k \in \mathrm{span}_K(x_0, x_1, ..., x_{k-1})$, und $W = \mathrm{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$ ein f-zyklischer UVR von V mit Basis $B = (x_0, ..., x_{k-1})$ und $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$.

Beweis. Da $\dim_K(V) = n$ ist $(x_0, ..., x_n)$ linear abhängig, es gibt also ein kleinstes k mit $(x_0, ..., x_{k-1})$ linear unabhängig, aber $(x_0, ..., x_k)$ linear abhängig, folglich $x_k \in \mathrm{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$. Mit $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ ist dann Da $\dim_K(V) = n$ ist $(x_0, ..., x_n)$ linear abhängig, es gibt also ein kleinstes k mit $(x_0, ..., x_{k-1})$ linear unabhängig, aber $(x_0, ..., x_k)$ linear abhängig, folglich $x_k \in \mathrm{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$. Mit $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ ist dann

$$M_B(f|_W) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

somit $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$. □

Theorem 5.9 (Satz von Cayley-Hamiltion)
Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist $\chi_f(f) = 0$.

Beweis. Sei $x \in V$. Definiere $x_i = f^i(x)$ und $W = \mathrm{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$ wie in Lemma 5.8. Sei $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$, also $f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$. Wenden wir $\chi_{f|_W}(f) \in \mathrm{End}_K(V)$ auf x an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_{f|_W}(f)(x) &= \left(f^k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i f^i\right)(x) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} -c_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aus $\chi_{f|_W} | \chi_f$ (Beispiel 4.6) folgt somit $\chi_f(f)(x) = 0$, denn ist $\chi_f = Q \cdot \chi_{f|_W}$ mit $Q \in K[t]$, so ist $\chi_f(f) = Q(f) \circ \chi_{f|_W}(f)$, also $\chi_f(f)(x) = Q(f)(\underbrace{\chi_{f|_W}(f)(x)}_{=0}) = 0$. Da $x \in V$ beliebig war, folgt $\chi_f(f) = 0 \in \mathrm{End}_K(V)$. □

Folgerung 5.10
Es gilt $P_f | \chi_f$. Insbesondere ist $\deg(P_f) \leq n$.

Beweis. Theorem 5.9 + Satz 5.4 □

▶ **Bemerkung 5.11**
Ist B eine Basis von V und $A = M_B(f)$, so ist $P_A = P_f$. Insbesondere ist $P_A = P_B$ für $A \sim B$. Als Spezialfall von Theorem 5.9 erhält man $\chi_A(A) = 0$ und $P_A | \chi_A$.

▶ **Bemerkung 5.12**
Der naheliegende “Beweis“ $\underbrace{\chi_A}_{\in \mathrm{Mat}_n(K)} = \det(t\mathbb{1}_n - A)(A) = \det(A\mathbb{1}_n - A) = \det(0) = \underbrace{0}_{\in K}$ ist falsch!

6. Nilpotente Endomorphismen

▶ **Bemerkung 6.1**
Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sind

- $f\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subseteq \mathrm{Ker}(f^1) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2) \subseteq ...$
- $V = \mathrm{Im}(f^0) \supseteq \mathrm{Im}(f^1) \supseteq \mathrm{Im}(f^2) \supseteq ...$

Folgen von UVR von V. Nach der Kern-Bild-Formel III.7.13 ist

$$\dim_K(\mathrm{Ker}(f^i)) + \dim_K(\mathrm{Im}(f^i)) = \dim_K(V) \quad \forall i$$

Da $\dim_K(V) = n < \infty$ gibt es ein d mit $\mathrm{Ker}(f^d) = \mathrm{Ker}(f^{d+i})$ und $\mathrm{Im}(f^d) = \mathrm{Im}(f^{d+i})$ für jedes $i \geq 0$.

■ **Beispiel 6.2**
$f = f_A$, $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) = \mathrm{Ker}(f^1) = ...$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \mathrm{Ker}(f^1) = \mathrm{Ker}(f^2) = ... = \mathrm{span}_K(e_2)$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \underbrace{\mathrm{Ker}(f^1)}_{=\mathrm{span}_K(e_1)} \subset \mathrm{Ker}(f^2) = ... = K^2$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\{0\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subset \mathrm{Ker}(f^1) = \mathrm{Ker}(f^2) = ... = K^2$

Lemma 6.3
Seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Wenn f und g kommutieren, d.h. $f \circ g = g \circ f$, so sind die UVR $\mathrm{Ker}(g)$ und $\mathrm{Im}(g)$ f invariant.

Beweis. Ist $x \in \mathrm{Ker}(f)$, so ist $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$, also $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. Für $g(x) \in \mathrm{Im}(g)$ ist $f(g(x)) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g)$. □

Satz 6.4 (Lemma von Fitting)
Seien $V_i = \mathrm{Ker}(f^i)$, $W_i = \mathrm{Im}(f^i)$, $d = \min\{i : V_i = V_{i+1}\}$. Dann sind

$$\begin{aligned} \{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq ... \subsetneq V_d = V_{d+1} = ... \\ V = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq ... \supsetneq W_d = W_{d+1} = ... \end{aligned}$$

Folgen f-invarianter UVR und $V = V_d \oplus W_d$.

Beweis. Da f^i und f^j für beliebige i, j kommutieren, sind V_i und V_j nach Lemma 6.3 f-invariant für jedes i. Aus $\dim_K(V_i) + \dim_K(W_i) = n$ folgt $d = \min\{i : W_i = W_{i+1}\}$, insbesondere ist $\mathrm{Im}(f^d) = \mathrm{Im}(f^{d+1}) = f(\mathrm{Im}(f^d))$, somit $W_{d+i} = \mathrm{Im}(f^{d+i}) = W_d$ für $i \geq 0$, also auch $V_d = V_{d+i}$ für alle $i \geq 0$.
Insbesondere ist $f^d|_{W_d} : W_d \to W_{2d} = W_d$ surjektiv, also auch injektiv, also $V_d \cap W_d = \{0\}$. Aus der Dimensionsformel II.4.12 folgt dann $\dim_K(V_d + W_d) = \dim_K(V_d) + \dim_K(W_d) = \dim_K(V)$. Folglich ist $V_d + W_d = V$ und $V_d \cap W_d = \{0\}$, also $V = V_d \oplus W_d$. □

Definition 6.5 (nilpotent)
Ein $f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt nilpotent, wenn $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Analog heißt $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ nilpotent, wenn $A^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Das kleinste k mit $f^k = 0$ bzw. A^k heißt die Nilpotenzklasse von f bzw. A.

Lemma 6.6
Ist f nilpotent, so gibt es eine Basis B von V, für die $M_B(f)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Induktion nach $n = \dim_K(V)$.
$n = 1$: $f^k = 0 \Rightarrow f = 0$
$n > 1$: Sei k die Nilpotenzklasse von f und $U = \mathrm{Ker}(f^{k-1})$. Dann ist $U \subset V$. Da $f^k = f^{k-1} \circ f$ ist $f(V) \subset U$, insbesondere $f|_U \in \mathrm{End}_K(U)$. Da $f|_U$ nilpotent ist, gibt es nach I.H. eine Basis B_0 von U, für die $M_B(f|_U)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Ergänze B_0 zu einer Basis B von V. Da $f(V) \subset U$ ist dann auch

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(f|_U) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix. □

Satz 6.7
Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sind äquivalent:

1) f ist nilpotent
2) $f^n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$
3) $P_f(t) = t^r$ für ein $r \leq n$
4) $\chi_f(t) = t^n$
5) Es gibt eine Basis B von V, mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis.

- 1) $\Rightarrow$ 5): Lemma 6.6
- 5) $\Rightarrow$ 4): Beispiel 2.8
- 4) $\Rightarrow$ 3): Nach Folgerung 5.10 ist $P_f | \chi_f = t^n$, also $t^n = P_f(t)Q(t)$ mit $Q \in K[t]$. Schreibe $P_f(t) = t^a \cdot P_1(t), Q(t) = t^b \cdot Q_1(t)$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, $P_1, Q_1 \in K[t]$, $P_1(0) \neq 0$, $Q_1(0) \neq 0$
$\overset{Lemma\ 3.8}{\Rightarrow} t^{n-(a+b)} = P_1(t)Q_1(t)$ und $(P_1Q_1)(0) \neq 0$
$\Rightarrow n - (a+b) = 0 \Rightarrow P_1 = 1$, somit $P_f(t) = t^a$
- 3) $\Rightarrow$ 2): $t^r = 0$, $r \leq n \Rightarrow f^n = 0$
- 2) $\Rightarrow$ 1): nach Definition □

Folgerung 6.8
Die Nilpotenzklasse eines nilpotenten Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ist höchstens $\dim_K(V)$.

Folgerung 6.9
Ist $d := \min\{i \mid \mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i+1})\}$, so ist $d \leq \dim_K(\mathrm{Ker}(f)) = \mu_a(f, 0)$.

Beweis. Sei $V_d = \mathrm{Ker}(f^d)$, $W_d = \mathrm{Im}(f^d)$, $k = \dim_K(V_d)$. Da $V = V_d \oplus W_d$ ist $\chi_f = \chi_{f|_{V_d}} \cdot \chi_{f|_{W_d}}$. Da $f|_{V_d}$ nilpotent ist, ist $\chi_{f|_{V_d}} = t$ nach Satz 6.7. Da $f|_{W_d}$ injektiv ist, ist $\chi_{f|_{W_d}}(0) \neq 0$. Somit ist $\mu_a(f, 0) = \mu(\chi_f, 0) \overset{Lemma\ 3.6}{=} k$. Da $\dim_K(\mathrm{Ker}(f^d)) > ... > \dim_K(\mathrm{Ker}(f)) > 0$ ist $k = \dim_K(\mathrm{Ker}(f^d)) \geq d$, falls $d > 0$, sonst klar. □

▶ **Bemerkung 6.10**

Die Bedeutung nilpotenter Endomorphismen beim Finden geeigneter Basen ergibt sich aus der folgenden Beobachtung:
Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so ist $A = D + N$, wobei D eine Diagonalmatrix ist und N eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Anders gesagt: Jeder trigonalisierbare Endomorphismus ist Summe aus einem diagonalisierbaren und einem nilpotenten Endomorphismus.

Definition 6.11 (Jordan-Matrix)

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Jordan-Matrix

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_k(K)$$

weiter setzen wir für $\lambda \in K$ $J_k(\lambda) := \lambda \mathbb{1} + J_k$.

Lemma 6.12

Die Jordan-Matrix J_k ist nilpotent von Nilpotenzklasse k.

Beweis. Es ist $(J_k)^r = (\delta_{i+r,j})_{i,j}$ für $r \geq 1$. □

Satz 6.13

Ist f nilpotent von Nilpotenzklasse k, so gibt es eindeutig bestimmte $r_1, .., r_k \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\sum_{d=1}^{k} d r_d = n$ und eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \mathrm{diag}(\underbrace{J_k, ..., J_k}_{r_k \text{ viele}}, ..., \underbrace{J_1, ..., J_1}_{r_1 \text{ viele}})$$

Beweis. Sei $U_i = \mathrm{Ker}(f^i)$. Nach Satz 6.4 haben wir eine Folge $\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset ... \subset U_k = V$ mit $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$ für alle $i > 0$.
Wir konstruieren eine Zerlegung $V = \bigoplus_{d=1}^{k} W_d$ mit $U_i = U_{i-1} \oplus W_i$, $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$, $f|_{W_d}$ injektiv für $i > 1$.

$$\begin{aligned} V &= U_k \\ V &= U_{k-1} \oplus W_k \\ V &= U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k \\ &\vdots \\ V &= U_0 \oplus W_1 \oplus ... \oplus W_k \end{aligned}$$

Wähle W_k mit $V = U_k = U_{k-1} \oplus W_k$. Ist $k > 1$, so ist $W_k \cap \mathrm{Ker}(f) \subseteq W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$, also $f|_{W_k}$ ist injektiv. Des weiteren ist $f(W_k) \subseteq U_{k-1}$ und aus $W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$ folgt $f(W_k) \cap U_{k-2} = \{0\}$. Wir können deshalb W_{k-1} mit $U_{k-1} = U_{k-2} \oplus W_{k-1}$ und $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$ wählen. Somit ist $V = U_{k-1} \oplus W_k = U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k$. Wir setzen dies fort und erhalten $V = U_0 \oplus W_1 \oplus ... \oplus W_k$ mit $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$ und $f|_{W_i}$ injektiv für $i > 1$, wobei $U_0 = \{0\}$ und $W_1 = \mathrm{Ker}(f)$.

Sie $r_d = \dim_K(W_d) - \dim_K(W_{d+1})$, wobei wir $W_{k+1} = \{0\}$. Wähle nun eine Basis $(x_{k,1}, ..., x_{k,r_k})$ von W_k. Ist $k > 1$, so ist $f|_{W_k}$ injektiv und wir können $(f(x_{k,1}), ..., f(x_{k,r_k}))$ durch Elemente $x_{k-1,1}, ..., x_{k-1,r_{k-1}}$ zu einer Basis von W_{k-1} ergänzen, und so weiter.
Da $V = \bigoplus_{d=1}^{k} W_d$ ist

$$B = \{f^i(x_{d,j}) \mid d = 1, ..., k, j = 1, ..., r_d, i = 0, ..., d-1\}$$

eine Basis von V, die bei geeigneter Anordnung das Gewünschte leistet.
Es bleibt zu zeigen, dass $r_1, ..., r_k$ eindeutig bestimmt sind. Ist B_0 eine Basis, für die $M_{B_0}(f)$ in der gewünschten Form ist, so ist

$$\begin{aligned}
\dim_K(U_1) &= \sum_{d=1}^{k} r_d \\
\dim_K(U_2) &= \sum_{d=2}^{k} r_d + \sum_{d=1}^{k} r_d \\
&\vdots \\
\dim_K(U_k) &= \sum_{d=k}^{k} r_d + ... + \sum_{d=1}^{k} r_d
\end{aligned}$$

woraus man sieht, dass $r_1, ..., r_k$ durch $U_1, ..., U_k$, also durch f eindeutig bestimmt. □

■ **Beispiel 6.14**
Sei $f = f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

$\Rightarrow k = 3, U_0 = \{0\}, U_1 = \mathbb{R}e_1, U_2 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2, U_3 = V$.
Wähle W_3 mit $V = U_3 = U_2 \oplus W_3$, z.B. $W_3 = \mathbb{R}e_3$.
Wähle W_2 mit $U_2 = U_1 \oplus W_2$ und $f(W_3) \subseteq W_2$, also

$$W_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze $W_1 = U_1 = \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}e_1 \Rightarrow$ Basis $B = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

7. Die JORDAN-Normalform

Definition 7.1 (Hauptraum)
Der Hauptraum von f zum EW λ der Vielfachheit $r = \mu_a(f,\lambda)$ ist

$$\mathrm{Hau}(f,\lambda) = \mathrm{Ker}\left((f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^r\right)$$

Lemma 7.2
$\mathrm{Hau}(f,\lambda)$ ist ein f-invarianter UVR der Dimension $\dim_K(\mathrm{Hau}(f,\lambda)) = \mu_a(f,\lambda)$, auf dem $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ nilpotent ist und $\chi_{f|_{\mathrm{Hau}(f,\lambda)}} = (t-\lambda)^{\mu_a(f,\lambda)}$

Beweis. f kommutiert sowohl mit f als auch mit id_V, somit auch mit $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^r$. Die f-Invarianz von $U = \mathrm{Hau}(f,\lambda)$ folgt aus Lemma 6.3. Nach Folgerung 6.9 ist $\dim_K(U) = \mu_a(f - \lambda\,\mathrm{id}_V, 0)$ und da $\chi_f(t) = \chi_{f-\lambda\,\mathrm{id}_V}(t-\lambda)$ ist $\mu_a(f,\lambda) = \mu(\chi_f,\lambda) = \mu_a(f-\lambda\,\mathrm{id}_V, 0)$. Da $f - \lambda\,\mathrm{id}_V|_U$ nilpotent ist $\chi_{f-\lambda\,\mathrm{id}_V|_U}(t) = t^r$, somit $\chi_{f|_U}(t) = (t-\lambda)^r$. □

Satz 7.3 (Hauptraumzerlegung)
Ist $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{r_i}$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ paarweise verschieden und $r_1, ..., r_m \in \mathbb{N}$, so ist $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ mit $V_i = \mathrm{Hau}(f,\lambda_i)$ eine Zerlegung in f-invariante UVR und für jedes i ist $\chi_{f|_{V_i}}(t) = (t-\lambda_i)^{r_i}$.

Beweis. Induktion nach m.
$\underline{m=1}$: $r_1 = n \overset{\text{Lemma 7.2}}{\Rightarrow} V = V_1$.
$\underline{m-1 \to m}$: Nach Satz 6.4 ist $V = V_1 \oplus W_1$ mit $W_1 = \mathrm{Im}((f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^r)$ eine Zerlegung in f-invariante UVR mit $\dim_K(V_1) = r_1$, $\dim_K(W_1) = n - r_1$. Somit ist $\chi_f = \chi_{f|_{V_1}} \cdot \chi_{f|_{W_1}}$ und $\chi_{f|_{V_1}} \overset{\text{Lemma 7.2}}{=} (t-\lambda_1)^{r_1}$ also $\chi_{f|_{W_1}} = \prod_{i=2}^m (t-\lambda_i)^{r_i}$. Nach I.H. ist also $W_1 = \bigoplus_{i=2}^m \mathrm{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)$. Es ist für $i \geq 2$ $\mathrm{Hau}(f|_{W_1},\lambda_i) \subseteq \mathrm{Hau}(f,\lambda_i) = V_i$ und da $\dim_K(\mathrm{Hau}(f|_{W_1},\lambda_i)) = r_i = \dim_K(\mathrm{Hau}(f,\lambda_i))$ gilt Gleichheit. Damit ist

$$\begin{aligned} V &= V_1 \oplus W_1 \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m \mathrm{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i) \\ &= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m V_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^m V_i \end{aligned}$$

□

■ **Beispiel 7.4**
$f = f_A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

$\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathrm{Hau}(f,1)}_{\dim = 2} \oplus \underbrace{\mathrm{Hau}(f,2)}_{\dim 1}$
$\mathrm{Hau}(f,1) = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{id})^2) = L((A - \mathbb{1})^2, 0)$
$\mathrm{Hau}(f,2) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Eig}(f,2) = L(A - 2\mathbb{1}, 0)$

$$A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix}, (A-\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & & 12 \\ & 0 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathrm{Hau}(f,1) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$$

$$A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & \\ & -1 & 4 \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \mathrm{Hau}(f,2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

Theorem 7.5 (JORDAN-Normalform)
Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom χ_f in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}$, $\mu_1, ..., \mu_r \in K$ und $k_1, ..., k_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^r k_i = \dim_K(V)$ und eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \mathrm{diag}(J_{k_1}(\mu_1), ..., J_{k_r}(\mu_r))$$

Die Paare $(\mu_1, k_1), ..., (\mu_r, k_r)$ heißen die JORDAN-Invarianten von f und sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Beweis. Schreibe $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{r_i}$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, $r_i \in \mathbb{N}$. Sei $V_i = \mathrm{Hau}(f, \lambda_i)$. Nach Satz 7.3 ist $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ eine Zerlegung in f-invariante UVR. Für jedes i wenden wir Satz 6.13 auf $(f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)|_{V_i}$ an und erhalten eine Basis B_i von V_i und $k_{i,1} \geq ... \geq k_{i,s_i}$ mit

$$M_B((f - \lambda_i \,\mathrm{id})|_{V_i}) = \mathrm{diag}(J_{k_{i,1}}, ..., J_{k_{i,s_i}})$$

Es folgt $M_{B_i}(f|_{V_i}) = M_{B_i}(\lambda_i \,\mathrm{id}_{V_i}) + M_{B_i}((f - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)|_{V_i})$. Ist nun B die Vereinigung der B_i, so hat $M_B(f)$ die gewünschte Form. Die Eindeutigkeit der JORDAN-Invarianten folgt aus der Eindeutigkeit der $k_{i,j}$ in Lemma 6.3.□

▶ Bemerkung 7.6
Ist K algebraisch abgeschlossen, so haben wir nun eine (bis auf Permutationen) eindeutige Normalform für Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_K(V)$ gefunden. Aus ihr lassen sich viele Eigenschaften des Endomorphismus leicht ablesen.

Folgerung 7.7
Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ trigonalisierbar mit $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{\mu_a(f,\lambda_i)}$, $P_f(t) = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{d_i}$ und JORDAN-Invarianten $(\mu_1, k_1), ..., (\mu_r, k_r)$. Mit $J_i = \{j \mid \mu_j = \lambda_i\}$ ist dann

$$\mu_g(f, \lambda_i) = |J_i|$$
$$\mu_a(f, \lambda_i) = \sum_{j \in J_i} k_j$$
$$d_i = \max\{k_j \mid j \in J_i\}$$

Beweis.
- μ_a: klar, da $\chi_f(t) = \prod_{j=1}^r (t-\mu_j)^{k_j} = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{\mu_a(f,\lambda_i)}$
- μ_g: lese Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ aus JORDAN-NF: Jeder Block $J_{k_j}(\lambda_i)$ liefert ein Element der Basis.

- d_i: folgt, da J_{k_j} nilpotent von Nilpotenzklasse k_j ist (Lemma 6.12). □

Folgerung 7.8
Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{m} (t - \overset{\lambda}{_i})^{r_i} \quad \lambda_1, ..., \lambda_m \in K \text{ paarweise verscheiden und}$$
$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{m} m(t - \lambda_i)$$

Beweis. Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn f trigonalisierbar ist und die Jordan-NF die Diagonalmatrix ist (Eindeutigkeit der JNF), also $k_j = 1$ für alle j. Nach Folgerung 7.7 ist dies äquivalent dazu, dass $d_i = 1$ für alle i, also $P_f = \prod_{i=1}^{m} (t - \lambda_i)$. □

▶ **Bemerkung 7.9**
Wider definiert man die Jordan-Invarianten, etc. von einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ als die Jordan-Invarianten von $f_A \in \mathrm{End}_K(K^n)$.

Folgerung 7.10
Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ trigonalisierbar. Genau dann ist $A \sim B$, wenn A und B die gleichen Jordan-Invarianten haben.

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit der Jordan-Normalform. □

Kapitel II

Skalarprodukte

In diesem ganzen Kapitel seien

- $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$
- $n \in \mathbb{N}$
- V ein n-dimensionaler K-VR

1. Das Standardskalarprodukt

Sei zunächst $K = \mathbb{R}$.

Definition 1.1 (Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}$)
Auf den Standardraum $V = \mathbb{R}^n$ definiert man das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}$ $\langle . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Satz 1.2
Das Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist:

$$\begin{aligned} \langle x + x', y \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= = \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\langle x, y \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Beweis.
- klar
- klar
- $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq x_j^2$ für jedes $j \Rightarrow \langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle > 0$ falls $x_j \neq 0$ für ein j. □

Definition 1.3 (euklidische Norm in $\mathbb{R}$)
Auf $K = \mathbb{R}^n$ definiert man euklidische Norm in $\mathbb{R}$ $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Satz 1.4 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)
Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. siehe Analysis, siehe VI.§3 □

Satz 1.5
Die euklidische Norm erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beweis.
- Satz 1.2
- Satz 1.2
- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \overset{Satz\ 1.4}{\Rightarrow} \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ □

Sei nun $K = \mathbb{C}$.

Definition 1.6 (komplexe Konjugation, Absolutbetrag)
Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiert man $\overline{z} = x - iy$ heißt komplexe Konjugation.. Man definiert den Absolutbetrag von z als

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$ sehen wir

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$$

Satz 1.7
Komplexe Konjugation ist ein Ringautomorphismus von $\mathbb{C}$ mit Fixkörper

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\} = \mathbb{R}$$

Beweis. siehe LAAG1 H47 □

Folgerung 1.8
Für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A^t} = \overline{A}^t, \overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$

Beweis. Satz 1.7, einfache Übung □

Definition 1.9 (Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}$)
Auf $K = \mathbb{C}^n$ definiert man das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}$ $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ durch

$$\langle x, y\rangle = x^t\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i$$

Satz 1.10
Das komplexe Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x, x', y, y' \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist:

$$\begin{aligned}\langle x + x', y\rangle &= \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle \\ \langle \lambda x, y\rangle &= = \lambda\langle x, y\rangle \\ \langle x, y + y'\rangle &= \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle \\ \langle x, \lambda y\rangle &= \overline{\lambda}\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

- Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
- Für $x \in \mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

Beweis.
- klar
- klar
- $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ □

Definition 1.11 (euklidische Norm in $\mathbb{C}$)
Auf $V = \mathbb{C}$ definiert man die euklidische Norm in $\mathbb{C}$ $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

▶ **Bemerkung 1.12**
Schränkt man das komplexe Skalarprodukt auf den $\mathbb{R}^n$ ein, so erhält man das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir werden ab jetzt die beiden Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ parallel behandeln. Wenn nicht anders angegeben, werden wir die Begriffe für den komplexen Fall benutzen, aber auch den reellen Fall einschließen.

2. Bilinearformen und Sesquilinearformen

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition 2.1 (Bilinearform, Sesquilinearform)
Eine Bilinearform ($K = \mathbb{R}$) bzw. Sesquilinearform ($K = \mathbb{C}$) ist eine Abbildung $s : V \times V \to K$ für die gilt:

- Für $x, x', y \in V$ ist $s(x + x', y) = s(x, y) + s(x', y)$
- Für $x, y, y' \in V$ ist $s(x, y + y') = s(x, y) + s(x, y')$
- Für $x, y \in V$, $\lambda \in K$ ist $s(\lambda x, y) = \lambda s(x, y)$
- Für $x, y \in V$, $\lambda \in K$ ist $s(x, \lambda y) = \overline{\lambda} s(x, y)$

▶ **Bemerkung 2.2**
Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist $\lambda = \overline{\lambda}$. Wir werden der Einfachheit halber auch in diesem Fall von Sesquilinearformen sprechen, vgl. Bemerkung 1.12

■ **Beispiel 2.3**
Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist $s_A : K^n \times K^n \to K^n$ gegeben durch

$$s_A(x, y) = x^t A\overline{y} = x^t \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{y}_j \right)_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j$$

eine Sesquilinearform auf $V = K^n$.

Definition 2.4
Sei s eine Sesquilinearform auf V und $B = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V. Die darstellende Matrix von s bzgl. B ist

$$M_B(s) = (s(v_i, v_j))_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

■ **Beispiel 2.5**
Die darstellende Matrix des Standardskalarprodukts $s = s_{\mathbb{1}_n}$ auf den Standardraum $V = K^n$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{E}$ ist

$$M_{\mathcal{E}}(s) = \mathbb{1}_n$$

Lemma 2.6
Seien $v, w \in V$. Mit $x = \Phi_B^{-1}(v)$, $y = \Phi_B^{-1}(w)$ und $A = M_B(s)$ ist $s(v, w) = x^t A\overline{y} = s_A(x, y)$.

Beweis. Achtung: v_i beschreibt das i-te Element der Basis B!
$s(v, w) = s(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y} s(v, v_j) = x^t A\overline{y}$ □

Satz 2.7
ISei B eine Basis von V. Die Abbildung $s \mapsto M_B(s)$ ist eine Bijektion zwischen den Sesquilinearformen auf V und $\mathrm{Mat}_n(K)$.

Beweis.
- injektiv: Lemma 2.6
- surjektiv: Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ wird durch $s(v, w) = \Phi_B^{-1}(v)^t \cdot A \cdot \overline{\Phi_B^{-1}(w)}$ eine Sesquilinearform auf V mit $M_B(s) = (s(v_i, w_j))_{i,j} = (e_i^t A\overline{e_j})_{i,j} = (e_i A e_j)_{i,j} = A$ definiert. □

Satz 2.8 (Transformationsformel)
Seien B und B' Basen von V und s eine Sesquilinearform auf V. Dann gilt:

$$M_{B'}(s) = (T_B^{B'})^t \cdot M_B(s) \cdot \overline{T_B^{B'}}$$

Beweis. Seien $v, w \in V$. Definiere $A = M_B(s)$, $A' = M_{B'}(s)$, $T = T_B^{B'}$ und $x, y, x', y' \in K^n$ mit $v = \Phi_B(x) = \Phi_B(x')$, $w = \Phi_B(y) = \Phi_B(y')$. Dann ist $x = Tx'$, $y = Ty'$ und somit

$$\begin{aligned}(x')^t A' \overline{y'} &\overset{Lemma\ 2.6}{=} s(v,w) \\ &\overset{Lemma\ 2.6}{=} x^t A \overline{y} \\ &= (Tx')^t A \overline{Ty'} \\ &= (x')^t T^t A \overline{T} \overline{y'}\end{aligned}$$

Da $v, w \in V$ und somit $x', y' \in K$ beliebig waren, folgt $A = T^t A \overline{T}$. □

■ **Beispiel 2.9**
Sei s das Standardskalarprodukt auf dem K^n und $B = (b_1, ..., b_n)$ eine Basis des K^n. Dann ist

$$M_B(s) = (T_{\mathcal{E}}^B)^t \cdot M_{\mathcal{E}}(s) \cdot \overline{T_{\mathcal{E}}^B} = B^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{B} = B^t B$$

wobei $B = (b_1, ..., b_n) \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Satz 2.10
Sei s eine Sesquilinearform auf V. Dann sind äquivalent:

- Es gibt $0 \neq v \in V$ mit $s(v, w) = 0$ für alle $w \in V$.
- Es gibt $0 \neq w \in V$ mit $s(v, w) = 0$ für alle $v \in V$.
- Es gibt eine Basis B von V mit $\det(M_B(s)) = 0$.
- Für jede Basis B von V gilt $\det(M_B(s)) = 0$.

Beweis. Sei B eine Basis von V, $v = \Phi_B(x)$ und $A = M_B(s)$. Genau dann ist die (semilineare) Abbildung $w \mapsto s(v, w)$ die Nullabbildung, wenn $x^t A \overline{y} = 0$ für alle $y \in K^n$, also wenn $0 = x^t A$, d.h. $A^t x = 0$. Somit ist (1) genau dann erfüllt, wenn A^t nicht invertierbar ist, also wenn $0 = \det(A^t) = \det(A)$. Damit (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) gezeigt und (2) $\iff$ (4) zeigt man analog. □

Definition 2.11 (ausgeartet)
Eine Sesquilinearform s auf V heißt ausgeartet, wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 2.10 erfüllt ist, sonst nicht-ausgeartet.

Definition 2.12 (symmetrisch, hermitesch)
Eine Sesquilinearform s auf V heißt symmetrisch, wenn bzw. hermitesch, wenn

$$s(x, y) = \overline{s(y, x)} \quad \text{für alle } x, y \in V$$

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt symmetrisch bzw. hermitesch, wenn $A = A^* = \overline{A}^t = \overline{A^t}$.

Satz 2.13
Sei s eine Sesquilinearform auf V und B eine Basis von V. Genau dann ist s hermitesch, wenn $M_B(s)$ dies ist.

Beweis. ($\Rightarrow$): klar aus Definition von $M_B(s)$.

($\Leftarrow$): $x = \Phi_B^{-1}$, $y = \Phi_B^{-1}(w)$, $\overline{s(v,w)} = \overline{s(v,w)^t} = \overline{(x^t A \overline{y})^t} = y^t \overline{A^t} \overline{x} = s(w,v)$ □

Satz 2.14
Für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$, $(A^*)^* = A$ und $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$.

Beweis. Folgerung 1.8, III.1.14, III.1.15 □

3. Euklidische und unitäre Vektorräume

Lemma 3.1
Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Dann ist $s(x,x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$.

Beweis. Da s hermitesch ist, ist $s(x,x) = \overline{s(x,x)}$, also $s(x,x) \in \mathbb{R}$. □

Definition 3.2 (quadratische Form)
Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Die quadratische Form zu s ist die Abbildung

$$q_s : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ x \mapsto s(x,x) \end{cases}$$

▶ **Bemerkung 3.3**
Die quadratische Form q_s erfüllt das $q_s(\lambda x) = |\lambda|^2 \cdot q_s(x)$ für alle $x \in V$, $\lambda \in K$. Im Fall $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)^t$, $s = s_A$, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist $q_s(x) = s_A(x,x) = x^t A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ein "quadratisches Polynom in den Variablen $x_1, ..., x_n$".

Satz 3.4 (Polarisierung)
Sei s ein hermitesche Sesquilinearform auf V. Dann gilt für $x, y \in V$:

$$s(x,y) = \frac{1}{2}(q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y)) \quad K = \mathbb{R}$$

$$s(x,y) = \frac{1}{4}(q_s(x+y) - q_s(x-y) + iq_s(x+iy) - iq_s(x-iy)) \quad K = \mathbb{C}$$

Beweis. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y) &= s(x+y, x+y) - s(x,x) - s(y,y) \\ &= s(x,x) + s(x,y) + s(y,x) + s(y,y) - s(x,x) - s(y,y) \\ &= s(x,y) + s(y,x) - 2s(x,y) \end{aligned}$$

Im Fall $K = \mathbb{C}$: ÜA □

Definition 3.5 ((semi)definit, euklidischer VR, unitärer VR)
Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Ist $s(x,x) \geq 0$ für alle $x \in V$, so heißt s positiv semidefinit. Ist $s(x,x) > 0$ für alle $0 \neq x \in V$, so heißt s positiv definit (oder ein Skalarprodukt).

Eine hermitesche Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt positiv (semi)definit, wenn s_A dies ist.

Einen endlichdimensionalen K-VR zusammen mit positiv definiten hermiteschen Sesquilinearformen nennt man einen euklidischen bzw. unitären VR (oder auch Prähilbertraum). Wenn nicht anderes angegeben, notieren wir die Sesquilinearform mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

■ **Beispiel 3.6**
Der Standardraum $V = K^n$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt ist ein euklidischer bzw. unitärer VR.

■ **Beispiel 3.7**
Ist $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so ist s_A genau dann positiv definit, wenn $\lambda_i > 0$ für alle i, und positiv semidefinit, wenn $\lambda_i \geq 0$ für alle i.

Satz 3.8
Ist V ein unitärer VR und $U \subseteq V$ ein UVR, so ist U mit der Einschränkung des Skalarprodukts wieder ein unitärer VR.

Beweis. klar, die Einschränkung ist wieder positiv definit. ☐

Definition 3.9
Ist V ein unitärer VR, so definiert man die Norm von $x \in V$ als

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Satz 3.10
Die Norm eines unitären VR erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in V$ ist $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- Für $x \in V$ und $\lambda \in K$ ist $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für $x, y \in V$ ist $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Beweis.
- Das Skalarprodukt ist positiv definit.
- klar
- Wie im Fall im $\mathbb{R}^n$ ☐

Satz 3.11
Ist V ein unitärer VR, so gilt für $x, y \in V$:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Für $y = 0$ ist die Aussage klar.
Sei also $y \neq 0$. Für $\lambda, \mu \in K$ ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle \\ &= \lambda\overline{\lambda} \cdot \langle x, x\rangle + \mu\overline{\mu} \cdot \langle y, y\rangle + \lambda\overline{\mu} \cdot \langle x, y\rangle + \mu\overline{\lambda} \cdot \langle y, x\rangle \end{aligned}$$

Setzt man $\lambda = \overline{\lambda} = \langle y, y\rangle > 0$ und $\mu = -\langle x, y\rangle$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \cdot \|x\|^2\|y\|^2 + \mu\overline{\mu}\lambda - \lambda\mu\overline{\mu} - \langle x, y\rangle\, \overline{\lambda}\, \langle y, x\rangle \\ &= \lambda(\|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2) \end{aligned}$$

Teilen durch λ und Wurzelziehen liefert die Ungleichung. Gilt dort Gleichheit, so ist $\|\lambda x + \mu y\| = 0$ folglich (da $\lambda \neq 0$) sind dann x, y linear unabhängig. Ist $x = \alpha y$ mit $\alpha \in K$, so ist $|\langle x, y\rangle| = |\alpha| \cdot \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$ ☐

4. Orthogonalität

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

Definition 4.1 (orthogonal, orthogonales Komplement)
Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal, in Zeichen $x \perp y$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Zwei Mengen $X, Y \subseteq V$ sind orthogonal, in Zeichen $X \perp Y$, wenn $x \perp y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

Für $U \subseteq V$ bezeichnet

$$U^\perp = \{x \in V \mid x \perp u \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement zu U.

Lemma 4.2
Für $x, y \in V$ ist

- $x \perp y \iff y \perp x$
- $x \perp 0$
- $x \perp x \iff x = 0$

Beweis. klar □

Satz 4.3
Für $U \subseteq V$ ist $U^\perp$ ein Untervektorraum von V mit $U \perp U^\perp$ und $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$.

Beweis. Linearität des Skalarprodukts im ersten Argument liefert, dass $U^\perp$ ein Untervektorraum ist. Die Aussage $U^\perp \perp U$ ist trivial, $U \perp U^\perp$ folgt dann aus Lemma 4.2. Ist $u \in U \cap U^\perp$, so ist insbesondere $u \perp u$, also $u = 0$ nach Lemma 4.2. □

Definition 4.4 (orthonormal)
Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen von V ist orthogonal, wenn $x_i \perp x_j$ für alle $i \neq j$, und orthonormal, wenn zusätzlich $\|x_i\| = 1$ für alle i. Eine orthogonale Basis nennt man eine Orthogonalbasis, eine orthonormale Basis nennt man eine Orthonormalbasis.

▶ **Bemerkung 4.5**
Eine Basis B ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die darstellende Matrix des Skalarprodukts bezüglich B die Einheitsmatrix ist. (Beispiel: Standardbasis des Standardraum bezüglich des Standardskalarprodukts)

Lemma 4.6
Ist die Familie $(x_i)_{i \in I}$ orthogonal und $x_i \neq 0$ für alle $i \in I$, so ist $(x_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Beweis. Ist $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$, $\lambda_i \in K$, fast alle gleich 0, so ist $0 = \left\langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle$ Aus $x_j \neq 0$ folgt $\langle x_j, x_j \rangle > 0$ und somit $\lambda_j = 0$ für jedes $j \in I$. □

Lemma 4.7
Ist $(x_i)_{i \in I}$ orthogonal und $x_i \neq 0$ für alle i, so ist $(y_i)_{i \in I}$ mit

$$y_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

orthonormal.

Beweis. Für alle i ist $\langle y_i, y_i \rangle = \frac{1}{\|x_i\|^2} \langle x_i, x_i \rangle = 1$.
Für alle $i \neq j$ ist $\langle y_i, y_j \rangle = \frac{1}{\|x_i\| \cdot \|x_j\|} \langle x_i, x_j \rangle = 0$. □

Satz 4.8
Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $B = (x_1, ..., x_k)$ eine Orthonormalbasis von U. Es gibt genau einen Epimorphismus $\mathrm{pr}_U : V \to U$ mit $\mathrm{pr}_U|_U = \mathrm{id}_U$ und $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_U) \perp U$, insbesondere also $x - \mathrm{pr}_U \perp U$ für alle $x \in V$, genannt die orthogonale Projektion auf U, und dieser ist geben durch

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i \tag{1}$$

Beweis. Sei zunächst pr_U durch (1) gegeben. Die Linearität von pr_U folgt aus (S1) und (S3). Für $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in U$ ist $\langle u, x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j$, woraus $\mathrm{pr}_U(u) = u$. Somit ist $\mathrm{pr}_U|_U = \mathrm{id}_U$, und insbesondere ist pr_U surjektiv. Ist $\mathrm{pr}_U(x) = 0$, so ist $\langle x, x_i \rangle = 0$ für alle i., woraus mit (S2) und (S4) sofort $x \perp U$ folgt. Somit ist $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_U) \perp U$.
Für $x \in V$ ist $\mathrm{pr}_U(x - \mathrm{pr}_U(x)) = \mathrm{pr}_U(x) - \mathrm{pr}_U(\mathrm{pr}_U(x)) = \mathrm{pr}_U(x) - \mathrm{pr}_U(x) = 0$, also $x - \mathrm{pr}_U(x) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_U) \subseteq U^\perp$.
Ist $f : V \to U$ ein weiterer Epimorphismus mit $f|_U = \mathrm{id}_U$ und $\mathrm{Ker}(f) \perp U$, so ist

$$\underbrace{\mathrm{pr}_U(x)}_{\in U} - \underbrace{f(x)}_{\in U} = \underbrace{\mathrm{pr}_U(x) - x}_{\in U^\perp} - \underbrace{f(x) - x}_{\in U^\perp} \in U \cap U^\perp = \{0\}$$

für jedes $x \in V$, somit $f = \mathrm{pr}_U$. □

Theorem 4.9 (Gram-Schmidt-Verfahren)
Ist $(x_1, ..., x_n)$ eine Basis von V und $k \leq n$ mit $(x_1, ..., x_k)$ orthonormal, so gibt es eine Orthonormalbasis $(y_1, ..., y_n)$ von V mit $y_i = x_i$ für $i = 1, ..., k$ und $\mathrm{span}_K(y_1, ..., y_l) = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_l)$ für $l = 1, ..., n$.

Beweis. Induktion nach $d = n - k$.
$d = 0$: nichts zu zeigen
$d - 1 \to d$: Für $i \neq k+1$ definiere $y_I = x_i$. Sei $U = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_k)$, $\tilde{x_{k+1}} = x_{k+1} - \mathrm{pr}_U(x_{k-1})$. Dann ist $\tilde{x_{k+1}} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_U) \subseteq U^\perp$ (vgl. Satz 4.8) und $\mathrm{span}_K(x_1, ..., x_k, \tilde{x_{k+1}}) = \mathrm{span}_K(x_1, ..., x_{k+1})$. Setze $y_{k+1} = \frac{1}{\|\tilde{x_{k+1}}\|} \tilde{x_{k+1}}$.
Dann ist $(y_1, ..., y_n)$ eine Basis von V mit $(y_1, ..., y_{k+1})$ orthonormal (vgl. Lemma 4.7). Nach Induktionshypothese gibt es eine Orthonormalbasis von V, die das Gewünschte leistet. □

Folgerung 4.10
Jeder endlichdimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum V besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis. Wähle irgendeine Basis von V und wende Theorem 4.9 mit $k = 0$ an. □

Folgerung 4.11
Ist U ein Untervektorraum von V, so ist $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$.

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis von U (vgl. Folgerung 4.10), $B = (x_1, ..., x_k)$ und ergänze diese zu einer Orthonormalbasis $(x_1, ..., x_n)$ von V (vgl. Theorem 4.9). Dann sind $x_{k+1}, ..., x_n \in U \perp$, da $U \cap U^\perp = \{0\}$ ist somit $V = U \oplus U^\perp$. Insbesondere ist $\dim_K(U^\perp) = n - \dim_K(U)$, woraus $\dim_K((U^\perp)^\perp) = \dim_K(U)$ folgt. Zusammen mit der trivialen Inklusion $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ folgt $U = (U^\perp)^\perp$. □

Folgerung 4.12
Ist s eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf V und B eine Basis von V, so ist

$$\det(M_B(s)) \in \mathbb{R}_{>0}$$

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis B' von V bezüglich s. Dann ist $M_{B'}(s) = \mathbb{1}_n$, folglich

$$\begin{aligned}
\det(M_B(s)) &= \det\left((T^B_{B'})^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{T^B_{B'}}\right) \\
&= \det\left((T^B_{B'})^t\right) \cdot \det\left(\overline{T^B_{B'}}\right) \\
&= \det\left(T^B_{B'}\right) \cdot \overline{\det\left(T^B_{B'}\right)} \\
&= |\det\left(T^B_{B'}\right)|^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

□

5. Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

Definition 5.1 (orthogonale, unitäre Endomorphismen)
f ist orthogonal bzw. unitär, wenn

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

Satz 5.2
Ist f unitär, so gelten

- Für $x \in V$ ist $\|f(x)\| = \|x\|$.
- Sind $x, y \in V$ mit $x \perp y$, so ist $f(x) \perp f(y)$.
- Es ist $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$ und auch f^{-1} ist unitär.
- Das Bild einer Orthonormalbasis unter f ist eine Orthonormalbasis.
- Ist λ ein Eigenwert von f, so ist $|\lambda| = 1$.

Beweis.
- klar
- klar
- $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$, also ist f injektiv, somit $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$ und

$$\left\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y) \right\rangle \overset{f \text{ unitär}}{=} \left\langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y)) \right\rangle = \langle x, y \rangle$$

- Folgt aus 1, 2 und 3
- Ist $f(x) = \lambda x$, $x \neq 0$, so ist

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

□

Satz 5.3
Ist $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, so ist f unitär.

Beweis. Aus $\|f(x)\| = \|x\|$ folgt $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$. Die Polarisierung (Satz 3.4) für $\langle f(x), f(y) \rangle$ und die Linearität von f liefern $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Zum Beispiel im Fall $K = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\left\langle \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)}, \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)} \right\rangle - \langle f(x), f(x) \rangle - \langle f(y), f(y) \rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \right) \\
&= \langle x, y \rangle
\end{aligned}$$

□

Definition 5.4 (orthogonale, unitäre Matrizen)
Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt orthogonal bzw. unitär, wenn

$$A^* A = \mathbb{1}_n$$

▶ **Bemerkung 5.5**
Offenbar ist A genau dann unitär, wenn A^* das Inverse zu A ist. Die folgenden Bedingungen sind

daher äquivalent dazu, dass A unitär ist:

$$AA^* = \mathbb{1}_n, \overline{A}A^t = \mathbb{1}_n, A^t\overline{A} = \mathbb{1}_n, A^t = \overline{A^{-1}}$$

Satz 5.6
Sei B eine Orthogonalbasis von V. Genau dann ist f unitär, wenn $M_B(f)$ unitär ist.

Beweis. Sei $A = M_B(f)$, $v = \Phi_B(x)$, $\Phi_B(y)$. Dann ist $\langle v, w\rangle = x^t \underbrace{M_B(\langle\cdot,\cdot\rangle)}_{=\mathbb{1}} \cdot \overline{y} = x^t \cdot \overline{y}$. Somit ist f genau dann unitär, wenn $(Ax)^t\overline{Ay} = x^t\overline{y}$ für alle $x, y \in K^n$, also wenn $A^t\overline{A} = \mathbb{1}$, d.h. A unitär. □

Satz 5.7
Die folgenden Mengen bilden Untergruppen der $\mathrm{GL}_n(K)$.

- $\mathrm{O}_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}$ die orthogonale Gruppe
- $\mathrm{SO}_n = \{A \in \mathrm{O}_n \mid \det(A) = 1\}$ die spezielle orthogonale Gruppe
- $\mathrm{U}_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\}$ die unitäre Gruppe
- $\mathrm{SU}_n = \{A \in \mathrm{U}_n \mid \det(A) = 1\}$ die spezielle unitäre Gruppe

Beweis. z.B. für U_n: Sind $A^{-1} = A^*$, $B^{-1} = B^*$, so ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$, $(A^{-1})^{-1} = A = (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ □

Satz 5.8
Genau dann ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ unitär, wenn die Spalten (oder die Zeilen) von A eine Orthonormalbasis des K^n bilden.

Beweis. Sei s das Standardskalarprodukt und $B = (a_1, ..., a_n)$. Nach Bemerkung 4.5 ist B genau dann eine Orthonormalbasis, wenn $M_B(s) = \mathbb{1}_n$, und $M_B(s) = A^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{A}$, vgl. Beispiel 2.9 □

Theorem 5.9
Sei $K = \mathbb{C}$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Ist f unitär, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

Beweis. Induktion über$n = \dim_K(V)$.
$n = 0$: klar
$n - 1 \to n$: Da K algebraisch abgeschlossen ist, hat χ_f eine Nullstelle λ, es gibt also einen Eigenvektor x_1 von f zum Eigenwert λ. Ohne Einschränkung nehmen wir $\|x\| = 1$ an. Sei $W = K \cdot x_1$. Nach Folgerung 4.11 ist dann $V = W \oplus W^\perp$. Für $v \in W^\perp, w \in W$ ist

$$0 = \langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle = \overline{\lambda}\,\langle f(v), w\rangle$$

da $\lambda \neq 0$ (f unitär) also $f(W^\perp) \perp W$. Somit ist $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$, d.h. $W^\perp$ ist f-invariant. Da auch $f|_{W^\perp}$ unitär ist, gibt es nach Induktionshypothese eine Orthonormalbasis $(x_1, ..., x_n)$ aus Eigenvektoren von $f|_{W^\perp}$. Da $V = W \oplus W^\perp$ und $W \perp W^\perp$ ist $(x_1, ..., x_n)$ eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f. □

Folgerung 5.10
Jeder unitäre Endomorphismus eines unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

Folgerung 5.11
Zu jeder $A \in \mathrm{U}_n$ gibt es $S \in \mathrm{U}_n$ so, dass

$$S^*AS = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

mit $|\lambda_i| = 1$ für $i = 1, ..., n$.

Beweis. Da A unitär ist, ist $f_A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ unitär, nach Theorem 5.9 existiert also eine Orthonormalbasis B des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A. Die Transformationsmatrix $S = T_{\mathcal{E}}^{B}$ hat als Spalten die Elemente von B und somit ist S nach Satz 5.8 unitär. Nach Satz 5.2 ist $|\lambda| = 1$ für alle Eigenwerte von f_A. $\square$

▶ Bemerkung 5.12

Dies (Theorem 5.9) gilt nicht im Fall $K = \mathbb{R}$. Man kann aber auch orthogonale Endomorphismen immer "fast diagonalisieren".

6. Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

Definition 6.1 (selbstadjungiert)
f ist selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \quad \forall x, y \in V$$

Satz 6.2
Sei B eine Orthonormalbasis von V. Genau dann ist f selbstadjungiert, wenn $M_B(f)$ hermitesch ist.

Beweis. Seien $A = M_B(f), v = \Phi_B(x), w = \Phi_B(y)$. Es ist

$$\langle f(v), w\rangle = (Ax)^t\overline{y} = x^t A^t \overline{y}$$
$$\langle v, f(w)\rangle = x^t\overline{Ay} = x^t\overline{A}\overline{y}$$

Somit ist $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$ genau dann, wenn $A^t = \overline{A}$, d.h. $A = A^*$, also A hermitesch. □

Lemma 6.3
Ist f selbstadjungiert und λ ein Eigenwert von f, so ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. Ist $0 \neq x \in V$ mit $f(x) = \lambda x$, so ist

$$\lambda \langle x, x\rangle = \langle f(x), x\rangle = \langle x, f(x)\rangle = \overline{\lambda} \langle x, x\rangle$$

und mit $\langle x, x\rangle \neq 0$ folgt $\lambda = \overline{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Satz 6.4
Ist f selbstadjungiert, so ist $\chi_f \in \mathbb{R}[t]$ und χ_f zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

Beweis. Sei B eine Orthonormalbasis von V. Nach Satz 6.2 ist $A = M_B(f) \in \mathrm{Mat}_n(K) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ hermitesch. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, ist $\chi_f(t) \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$. Nach Lemma 6.3 ist aber schon $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Somit zerfällt $\chi_f \chi_A \in \mathbb{R}[t]$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren. □

Theorem 6.5
Ist f selbstadjungiert, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

Beweis. Induktion über $n = \dim_K(V)$.
$n = 0$: klar
$n - 1 \to n$: Nach Satz 6.4 hat f einen reellen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Wähle $x_1 \in V$ mit $f(x_1) = \lambda x_1$ und $\|x_1\| = 1$. Sei $W = K \cdot x_1$. Für $y \in W^\perp$ ist

$$\langle x_1, f(y)\rangle = \langle f(x_1), y\rangle = \lambda \langle x_1, y\rangle = 0$$

und folglich ist $W^\perp$ f-invariant. Nach Folgerung 4.11 ist $V = W \oplus W^\perp$ und $f|_{W^\perp}$ ist wieder selbstadjungiert. Nach Induktionshypothese hat $W^\perp$ eine Orthonormalbasis $(x_1, ..., x_n)$ aus Eigenvektoren von $f|_{W^\perp}$. Da $V = W \oplus W^\perp$ und $W \perp W^\perp$ ist $(x_1, ..., x_n)$ eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f. □

Folgerung 6.6
Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines euklidischen oder unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

Folgerung 6.7
Ist

- f selbstadjungiert ($K = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$)
- f unitär ($K = \mathbb{C}$)

so ist

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$$

eine Zerlegung von V in paarweise orthogonale Untervektorräume.

Beweis. Nach Theorem 5.9 bzw. Theorem 6.5 existiert eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren. Insbesondere ist f diagonalisierbar, also

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \mathrm{Eig}(f, \lambda)$$

Zu jedem λ gibt es eine Teilfamilie von B die eine Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ bildet. Da B eine Orthonormalbasis ist, folgt, dass die Eigenräume paarweise orthogonal sind. □

▶ **Bemerkung 6.8**
Um eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren wie in Theorem 5.9 oder Theorem 6.5 zu bestimmen, kann man entweder wie im Induktionsbeweis vorgehen, oder man bestimmt zunächst Basen B von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$, $i = 1, ..., n$ und orthonormalisiert diese mit Theorem 4.9 zu Basen B'. Nach Folgerung 6.7 ist $\bigcup B'$ dann eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

Kapitel III
Dualität

Kapitel IV

Moduln

Anhang

Anhang A: Listen

A.1. Liste der Theoreme

A.2. Liste der benannten Sätze

Index