# Lineare Algebra SS2018

Dozent: Prof. Dr. Arno Fehm

5. Juni 2018

# In halts verzeichn is

1	En	domorphismen	1	
	1	Eigenwerte	1	
	2	Das charakteristische Polynom	4	
	3	Diagonalisierbarkeit	6	
	4	Trigonalisierbarkeit	9	
	5	Das Minimalpolynom	11	
	6	Nilpotente Endomorphismen	14	
	7	Die JORDAN-Normalform	18	
II	Ska	alarprodukte	21	
	1	Das Standardskalarprodukt	21	
	2	Bilinearformen und Sesquilinearformen	24	
	3	Euklidische und unitäre Vektorräume	27	
	4	Orthogonalität	29	
	5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	32	
	6	Selbstadjungierte Endomorphismen	35	
	7	Hauptachsentransformation	37	
ш	Du	alität	40	
IV	Mo	Moduln		
An	han	${f g}$	43	
A		ten	43	
	A.1	Liste der Theoreme	43	
	A.2	Liste der benannten Sätze	44	
Inde	ex		44	
Index				
111/1/	3 Y		45	

## Kapitel I

# Endomorphismen

In diesem Kapitel seien K ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl, V ein n-dimensionaler K-VR und  $f \in \operatorname{End}_K(V)$  ein Endomorphismus.

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Geometrie von f besser zu verstehen und Basen zu finden, für die  $M_B(f)$  eine besonders einfache oder kanonische Form hat.

## 1. Eigenwerte

#### ▶ Bemerkung 1.1

Wir erinnern uns daran, dass  $\operatorname{End}_K(V) = \operatorname{Hom}_K(V, V)$  sowohl einen K-VR als auch einen Ring bildet. Bei der Wahl einer Basis B von V wird  $f \in \operatorname{End}_K(V)$  durch die Matrix  $M_B(f) = M_B^B(f)$  beschrieben.

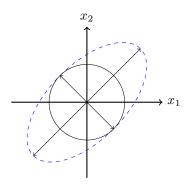
■ Beispiel 1.2 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ K = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}), f = f_A \in \operatorname{End}_K(K^2)$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{mit } B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ ist } M_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Endomorphismus  $f = f_A$  streckt also entlang der Achse  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  um den Faktor 3 und spiegelt

entlang der Achse  $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 



#### Definition 1.3 (Eigenwert, Eigenvektor, Eigenraum)

Sind  $0 \neq x \in V$  und  $\lambda \in K$  mit  $f(x) = \lambda x$  so nennt man  $\lambda$  einen <u>Eigenwert</u> von f und x einen <u>Eigenwektor</u> von f zum Eigenwert  $\lambda$ . Der <u>Eigenraum</u> zu  $\lambda \in K$  ist  $\text{Eig}(f,\lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$ .

#### ▶ Bemerkung 1.4

Für jedes  $\lambda \in K$  ist  $\text{Eig}(f, \lambda)$  ein UVR von V, da

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(f,\lambda) &= \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \\ &= \{x \in V \mid f(x) - \lambda \cdot \operatorname{id}_V(x) = 0\} \\ &= \{x \in V \mid (f - \lambda \cdot \operatorname{id}_V)(x) = 0\} \\ &= \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot \operatorname{id}_V) \end{aligned}$$

und  $f - \lambda \cdot id_V \in \operatorname{End}_K(V)$ .

#### ▶ Bemerkung 1.5

Achtung! Der Nullvektor ist nach Definition kein Eigenvektor, aber  $\lambda = 0$  kann ein Eigenwert sein, nämlich genau dann, wenn  $f \notin \operatorname{Aut}_K(V)$ , siehe Übung. Die Menge der Eigenvektoren zu  $\lambda$  ist also  $\operatorname{Eig}(f,\lambda)\setminus\{0\}$  und  $\lambda$  ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn  $\operatorname{Eig}(f,\lambda)\neq\{0\}$ .

#### ■ Beispiel 1.6

Ist  $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$  und  $f = f_A \in \operatorname{End}_K(K^n)$ , so sind  $\lambda_1, ..., \lambda_n$  EW von f und jedes  $e_i$  ist ein EV zum EW  $\lambda_i$ .

#### Satz 1.7

Sei B eine Basis von V. Genau dann ist  $M_B(f)$  eine Diagonalmatrix, wenn B aus EV von f besteht.

Beweis. Ist  $B=(x_1,...x_n)$  eine Basis aus EV zu EW  $\lambda_1,....,\lambda_n$ , so ist  $M_B(f)=\operatorname{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$  und umge-

#### ■ Beispiel 1.8

Sei  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^2$  und  $f_{\alpha} \in \operatorname{End}_K(\mathbb{R}^2)$  die Drehung um den Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$ 

$$\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(f_{\alpha}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Für  $\alpha = 0$  hat  $f_{\alpha} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$  nur den EW 1.

Für  $\alpha = \pi$  hat  $f_{\alpha} = -\operatorname{id}_{\mathbb{R}^2}$  nur den EW -1.

Für  $\alpha \neq 0, \pi$  hat  $f_{\alpha}$  keine EW.

#### Lemma 1.9

Sind  $\lambda_1, ..., \lambda_n$  paarweise verschiedene EW von f und ist  $x_i$  ein EV zu  $\lambda_i$  für i = 1, ..., m, so ist  $(x_1,...,x_m)$  linear unabhängig.

Beweis. Induktion nach m

 $\underline{\underline{m=1}} \text{: klar, denn } x_1 \neq 0$   $\underline{\underline{m-1} \rightarrow \underline{m}} \text{: Sei } \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i = 0 \text{ mit } \mu_1, ..., \mu_m \in K.$ 

$$0 = (f - \lambda \cdot id_V) \left( \sum_{i=1}^m \mu_i x_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^m \mu_i (f(x_i) - \lambda_m \cdot x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i (\lambda_i - \lambda_m) \cdot x_i$$

Nach IB ist  $\mu_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0$  für i = 1, ..., m - 1, da  $\lambda_i \neq \lambda_m$  für  $i \neq m$  also  $\mu_i = 0$  für i = 1, ..., m - 1. Damit ist auch  $\mu_m = 0$ . Folglich ist  $(x_1, ..., x_m)$  linear unabhängig.

#### Satz 1.10

Sind  $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$  paarweise verschieden, so ist

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=0}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_i).$$

Beweis. Seien  $x_i, y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i)$  für i = 1, ..., m. Ist  $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i$ , so ist  $\sum_{i=1}^m \underbrace{x_i - y_i}_{i=1} = 0$ .

o. E. seien  $z_i \neq 0$  für i = 1, ..., r und  $z_i = 0$  für i = r + 1, ..., m. Wäre r > 0, so wären  $(z_1, ..., z_r)$  linear abhängig, aber  $z_i = x_i - y_i \in \text{Eig}(f, \lambda_i) \setminus \{0\}$ , im Widerspruch zu Lemma 1.9. Somit ist  $x_i = y_i$  für alle i und folglich ist die Summe  $\sum \text{Eig}(f, \lambda_i)$  direkt.

#### Definition 1.11 (EW und EV für Matrizen)

Sei  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ . Man definiert Eigenwerte, Eigenvektoren, etc von A als Eigenwerte, Eigenvektoren von  $f_A \in \operatorname{End}_K(K^n)$ .

#### Satz 1.12

Sei B eine Basis von V und  $\lambda \in K$ . Genau dann ist  $\lambda$  ein EW von f, wenn  $\lambda$  ein EW von  $A = M_B(f)$  ist. Insbesondere haben ähnliche Matrizen die selben EW.

Beweis. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$K^{n} \xrightarrow{f_{A}} K^{n}$$

$$\Phi_{B} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \Phi_{B}$$

$$V \xrightarrow{f} V$$

denn  $f_A(x) = \lambda x \iff (\Phi_B \circ f_A)(x) = \Phi_B(\lambda x) \iff f(\Phi_B(x)) = \lambda \Phi_B(x).$ 

Ähnliche Matrizen beschreiben den selben Endomorphismus bezüglich verschiedener Basen, vgl. IV.4.1  $\ \Box$ 

## 2. Das charakteristische Polynom

#### **Satz 2.1**

Sei  $\lambda \in K$ . Genau dann ist  $\lambda$  ein EW von f, wenn  $\det(\lambda \cdot id_V - f) = 0$ .

Beweis. Da  $\operatorname{Eig}(f,\lambda) = \operatorname{Ker}(\lambda \cdot \operatorname{id}_V - f)$  ist  $\lambda$  genau dann ein EW von f, wenn  $\operatorname{dim}_K(\operatorname{Ker}(\lambda \cdot \operatorname{id}_V - f)) > 0$ , also wenn  $\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f \notin \mathrm{Aut}_K(V)$ . Nach IV.4.6 bedeutet dies, dass  $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = 0$ 

#### Definition 2.2 (charakteristisches Polynom)

Das charakteristische Polynom einer Matrix  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  ist die Determinante der Matrix  $t \cdot \mathbb{1}_n$  –  $A \in \operatorname{Mat}_n(K[t]).$ 

$$\chi_A(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A) \in K[t]$$

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus  $f \in \text{End}_K(V)$  ist  $\chi_f(t) = \chi_{M_B(f)}(t)$ , wobei B eine Basis von V ist.

#### **Satz 2.3**

Sind  $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$  mit  $A \sim B$ , so ist  $\chi_A = \chi_B$ . Insbesondere ist  $\chi_f$  wohldefiniert.

Beweis. Ist  $B = SAS^{-1}$  mit  $S \in GL_n(K)$ , so ist  $t \cdot \mathbbm{1}_n - B = S(t \cdot \mathbbm{1}_n - A)S^{-1}$ , also  $t \cdot \mathbbm{1}_n - B \sim t \cdot \mathbbm{1}_n - A$  und ähnliche Matrizen haben die selben Determinante (IV.4.4). 

Sind B, B' Basen von V, so sind  $M_B(f) \sim M_{B'}(f)$ , also  $\chi_{M_B(f)} = \chi_{M_{B'}(f)}$ 

#### Lemma 2.4

Für  $\lambda \in K$  ist  $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \cdot id_V - f)$ .

Beweis. Sei B eine Basis von V und  $A = M_B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ . Dann ist  $M_B(\lambda \cdot id_V - f) = \lambda \cdot \mathbb{1}_n - A$ . Aus IV.2.8 und I.6.8 folgt  $\det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$ . Folglich ist

$$\chi_f(\lambda) = \chi_A(\lambda)$$

$$= \det(t \cdot \mathbb{1}_n - A)(\lambda)$$

$$= \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)$$

$$= \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)$$

Sei  $\dim_K(V) = n$  und  $f \in \operatorname{End}_K(V)$ . Dann ist  $\chi_f(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$  ein Polynom vom Grad n mit

$$\alpha_n = 1$$

$$\alpha_{n-1} = -\operatorname{tr}(f)$$

$$\alpha_0 = (-1)^n \cdot \det(f)$$

Die Nullstellen von  $\chi_f$  sind genau die EW von f.

Beweis. Sei B eine Basis von V und  $A=M_B(f)=(a_{ij})_{i,j}$ . Wir erinnern uns daran, dass  $\operatorname{tr}(f)=\operatorname{tr}(A=f)$  $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \text{ Es ist } \chi_f(t) = \det(t - 1_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (t\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}).$ Der Summand für  $\underline{\sigma} = \operatorname{id} \operatorname{ist } \prod_{i=1}^{n} (t - a_{ii}) = t^n + \sum_{i=1}^{n} (-a_{ii})t^{n-1} + \dots + \prod_{i=1}^{n} (-a_{ii})$ 

Für  $\sigma \neq id$  ist  $\sigma(i) \neq i$  für mindestens zwei i, der entsprechende Summand hat also Grad höchstens n-2. Somit haben  $\alpha_n$  und  $\alpha_{n-1}$  die oben behauptete Form, und  $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(f)$ . 

Die Aussage über die Nullstellen von  $\chi_f$  folgt aus Satz 2.1 und Lemma 2.4.

#### Folgerung 2.6

Ist  $\dim_K(V) = n$ , so hat f höchstens n Eigenwerte.

Beweis. Satz 2.5 und I.6.10  $\Box$ 

#### Definition 2.7 (normiertes Polynom)

Ein Polynom  $0 \neq P \in K[t]$  mit Leitkoeffizient 1 heißt normiert.

#### ■ Beispiel 2.8

- 1. Ist  $A = (a_{ij})_{i,j}$  eine obere Dreiecksmatrix, so ist  $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t a_{ii})$ , vgl. IV.2.9.c Insbesondere ist  $\chi_{1_n}(t) = (t-1)^n$ ,  $\chi_0(t) = t^n$
- 2. Für eine Blockmatrix  $A=\begin{pmatrix}A_1&B\\0&A_2\end{pmatrix}$  mit quadratischen Matrizen  $A_1,A_2$  ist  $\chi_A=\chi_{A_1}\cdot\chi_{A_2}$  vgl. IV.2.9.e
- 3. Für

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{n-1} \end{pmatrix} \quad c_0, \dots, c_{n-1} \in K$$

ist 
$$\chi_A(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$$

Man nennt diese Matrix die Begleitmatrix zum normierten Polynom  $P=t^n+\sum_{i=0}^{n-1}c_it^i$  und schreibt  $M_P:=A$ 

## 3. Diagonalisierbarkeit

#### Definition 3.1 (diagonalisierbar)

Man nennt f diagonalisierbar, wenn V eine Basis B besitzt, für die  $M_B(f)$  eine Diagonalmatrix ist.

#### Lemma 3.2

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn

$$V = \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$$

.

 $Beweis. \ \ (\Rightarrow) : \text{Ist } B \text{ eine Basis aus EV von } f \text{ (vgl. Satz 1.7)}, \text{ so ist } B \leq \bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f,\lambda), \text{ also } V = \text{span}_K (\bigcup_{\lambda \in K} \text{Eig}(f,\lambda)) = \sum_{\lambda \in K} \text{Eig}(f,\lambda).$ 

 $\sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda).$ ( $\Leftarrow$ ): Ist  $V = \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$ , so gibt es  $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$  mit  $V = \sum_{i=1}^r \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$ . Wir wählen Basen  $B_i$  von  $\operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$ . Dann ist  $\bigcup_{i=1}^r B_i$  ein endliches Erzeugendensystem von V, enthält also eine Basis von V (II.3.6). Diese besteht aus EV von f.

#### **Satz 3.3**

Ist  $\dim_K(V) = n$ , so hat f höchstens n Eigenwerte. Hat f genau n Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.

Beweis. Ist  $\lambda$  ein EW von f, so ist  $\dim_K(\text{Eig}(f,\lambda)) \geq 1$ . Sind also  $\lambda_1,...,\lambda_n$  paarweise verschiedene EW von f, so ist

$$n = \dim_{K}(V) \ge \dim_{K} \left( \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_{i}) \right)$$

$$\stackrel{\operatorname{Satz} \ 1.10}{=} \dim_{K} \left( \bigoplus_{i=0}^{m} \operatorname{Eig}(f, \lambda_{i}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \dim_{K} (\operatorname{Eig}(f, \lambda_{i}))$$

$$\ge m$$

Ist zudem m = n, so muss

$$\dim_K(V) = \dim_K(\sum_{i=1}^m \operatorname{Eig}(f, \lambda_i))$$
 sein, also 
$$V = \sum_{i=1}^m \operatorname{Eig}(f, \lambda_i)$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar.

#### Definition 3.4 (a teilt b)

Sei R ein kommutativer Ring mit seien  $a, b \in R$ . Man sagt, a <u>teilt</u> b (in Zeichen a|b), wenn es  $x \in R$  mit b = ax gibt.

### Definition 3.5 (Vielfachheit)

Für  $0 \neq P \in K[t]$  und  $\lambda \in K$  nennt man  $\mu(P, \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N}_{>0} \mid (t - r)^r | P\}$  die <u>Vielfachheit</u> der Nullstelle  $\lambda$  von P.

#### Lemma 3.6

Genau dann ist  $\mu(P,\lambda) \geq 1$ , wenn  $\lambda$  eine Nullstelle von P ist.

Beweis. 
$$(\Rightarrow)$$
:  $t - \lambda | P \Rightarrow P(t) = (t - \lambda) \cdot Q(t)$  mit  $Q(t) \in K[t] \Rightarrow P(\lambda) = 0 \cdot Q(\lambda) = 0$ .  $(\Leftarrow)$ :  $P(\lambda) = 0 \stackrel{I.6.9}{=} t - \lambda | P(t) \Rightarrow \mu(P, \lambda) \ge 1$ .

#### Lemma 3.7

Ist  $P(t) = (t - \lambda)^r \cdot Q(t)$  mit  $Q(t) \in K[t]$  und  $Q(\lambda) \neq 0$ , so ist  $\mu(P, \lambda) = r$ 

Beweis. Offensichtlich ist  $\mu(P,\lambda) \ge r$ . Wäre  $\mu(P,\lambda) \ge r+l$ , so  $(t-\lambda)^{r+l}|P(t)$  also  $(t-\lambda)^r \cdot Q(t) = (t-\lambda)^{r+l} \cdot R(t)$  mit  $R(t) \in K[t]$ , folglich  $t-\lambda|Q(t)$ , insbesondere  $Q(\lambda) = 0$ .

(Denn wir dürfen kürzen: R ist nullteilerfrei, genau so wie K[t]).

$$(t-\lambda)^r(Q(t)-(t-\lambda)R(t))=0 \Rightarrow Q(t)=(t-\lambda)R(t).$$

#### Lemma 3.8

Sind  $P, Q, R \in K[t]$  mit PQ = PR, und ist  $P \neq 0$ , so ist Q = R.

Beweis. 
$$PQ = PR \Rightarrow P(Q - R) = 0$$
 $\stackrel{K[t] \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} Q - R = 0, \text{ d.h. } Q = R.$ 

#### Lemma 3.9

Es ist  $\sum_{\lambda \in K} \mu(P, \lambda) \leq \deg(P)$ , mit Gleichheit genau dann, wenn P in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis. Schreibe  $P(t) = \prod_{\lambda \in K} (t-\lambda)^{r_{\lambda}} \cdot Q(t)$ , wobei  $Q(t) \in K[t]$  keine Nullstellen mehr besitzt. Nach Lemma 3.7 ist  $\mu(P,\lambda) = r_{\lambda}$  für alle  $\lambda$  und somit  $\deg(P) = \sum_{\lambda \in K} r_{\lambda} + \deg(Q) \geq \sum_{\lambda \in K} \mu(P,\lambda)$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $\deg(Q) = 0$ , also  $Q = c \in K$ , d.h. genau dann, wenn  $P(t) = c \cdot \prod_{\lambda \in K} (t-\lambda)^{r_{\lambda}}$ .

#### Lemma 3.10

Für  $\lambda \in K$  ist

$$\dim_K(\operatorname{Eig}(f,\lambda)) \ge \mu(x_f,\lambda)$$

Beweis. Ergänze eine Basis B von  $\mathrm{Eig}(f,\lambda)$  zu einer Basis B von V. Dann ist

$$A = M_B(f) = egin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_s & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix  $A' \in \operatorname{Mat}_{n-s}(K)$ , also  $\chi_f(t) = \chi_A(t) \stackrel{\text{Beispiel 2.8}}{=} \chi_{\lambda 1} \cdot \chi_{A'}(t) = (t - \lambda)^s \cdot \chi_{A'}(t)$  und somit  $\dim_K(\operatorname{Eig}(f,\lambda)) = s \leq \mu(x_f,\lambda)$ .

#### Satz 3.11

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt und  $\dim_K(\text{Eig}(f,\lambda)) = \mu(x_f,\lambda)$  für alle  $\lambda \in K$ .

Beweis. Es gilt

$$\dim_{K} \left( \sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda) \right) \stackrel{\operatorname{Satz} \ 1.10}{=} \dim_{K} \left( \bigoplus_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda) \right)$$

$$\stackrel{\operatorname{II.4.12}}{=} \sum_{\lambda \in K} \dim_{K} \left( \operatorname{Eig}(f, \lambda) \right)$$

$$\stackrel{\operatorname{Lemma} \ 3.10}{\leq} \sum_{\lambda \in K} \mu(\chi_{f}, \lambda) \qquad (1)$$

$$\leq \deg(\chi_{f}) \qquad (2)$$

$$= n$$

Nach Lemma 3.2 ist f genau dann diagonalisierbar, wenn  $\dim_K(\sum_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f,\lambda)) = n$ , also wenn bei (1) und (2) Gleichheit herrscht. Gleichheit bei (1) bedeutet  $\dim_K(\operatorname{Eig}(f,\lambda)) = \mu(\chi_f,\lambda)$  für alle  $\lambda \in K$ , und Gleichheit bei (2) bedeutet nach Lemma 3.9, dass  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt.

## Definition 3.12 (algebraische und geometrische Vielfachheit)

Man nennt  $\mu_a(f,\lambda) = \mu(\chi_f,\lambda)$  die <u>algebraische Vielfachheit</u> und  $\mu_g(f,\lambda) = \dim_K(\text{Eig}(f,\lambda))$  die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  von f.

#### ▶ Bemerkung 3.13

Wieder nennt man  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  diagonalisierbar, wenn  $f_A \in \operatorname{End}_K(K^n)$  diagonalisierbar ist, also wenn  $A \sim D$  für eine Diagonalmatrix D.

## 4. Trigonalisierbarkeit

#### Definition 4.1

Man nennt f <u>trigonalisierbar</u>, wenn V eine Basis B besitzt, für die  $M_B(f)$  eine obere Dreiecksmatrix ist.

#### ■ Beispiel 4.2

Ist f diagonalisierbar, so ist f auch trigonalisierbar.

#### Lemma 4.3

Ist ftrigonalisierbar, so zerfällt  $\chi_f$  in Linearfaktoren.

Beweis. Klar aus Beispiel 2.8 und Satz 2.3.

#### Definition 4.4 (invariant)

Ein Untervektorraum  $W \leq V$  ist f-invariant, wenn  $f(W) \leq W$ .

#### ▶ Bemerkung 4.5

Ist W ein f-invarianter UVR von V, so ist  $f|_W \in \text{End}_K(W)$ .

#### ■ Beispiel 4.6

- 1. V hat stets die f-invarianten UVR  $W = \{0\}$  und W = V.
- 2. Jeder UVR  $W \leq \text{Eig}(f, \lambda)$  ist f-invariant.
- 3. Ist  $B = (x_1, ..., x_n)$  eine Basis von V, für die  $M_B(f)$  eine obere Dreiecksmatrix ist, so sind alle UVR  $W_i = \operatorname{span}_K(x_1, ..., x_i)$  f-invariant.
- 4. Sei  $V=W\oplus U,\ B_1=(x_1,...,x_r)$  Basis von  $W,\ B_2(x_{r+1},...,x_n)$  Basis von U und  $B=(x_1,...,x_n)$ . Ist W f-invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Sind W und U f-invariant, so ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(f|_W) & 0\\ 0 & M_{B_2}(f|_U) \end{pmatrix}$$

#### Lemma 4.7

Ist  $W \subset V$  ein f-invarianter UVR, so gilt  $\chi_{f|_W}|\chi_f$ . Hat W ein lineares Komplement U, dass auch f-invariant ist, so  $\chi_f = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}$ .

Beweis. Ergänze eine Basis  $B_0=(x_1,...,x_r)$  von W zu einer Basis  $B=(x_1,...,x_n)$  von V. Sei  $A=M_B(f)$ ,  $A_0=M_{B_0}(f|_W)$ . Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad C \in \operatorname{Mat}_{n-r}(K)$$

folglich  $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C$ , insbesondere  $\chi_{f|_W}|\chi_f$ . Ist auch  $U = \operatorname{span}_K(x_{r+1}, ..., x_n)$  f-invariant, so ist

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

und folglich  $\chi_f = \chi_A = \chi_{A_0} \cdot \chi_C = \chi_{f|_W} \cdot \chi_{f|_U}.$ 

#### Theorem 4.8

Genau dann ist ftrigonalisierbar, wenn  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt.

Beweis.  $(\Rightarrow)$ : Lemma 4.3

 $(\Leftarrow)$ : Induktion nach  $n = \dim_K(V)$ .

n=1: trivial

 $\overline{n-1} \to n$ : Nach Annahme ist  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)$  mit  $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$ . Sei  $x_1$  ein EV zum EW  $\lambda_1$ . Dann ist  $V_1 = K \cdot x_1$  ein f-invarianter UVR. Ergänze  $B_1 = (x_1)$  zu einer Basis  $B = (x_1,...,x_n)$  von V und setze  $B_2 = (x_2,...,x_n), \ V_2 = \operatorname{span}_K(B_2). \ \underline{n-1} \to \underline{n}$ : Nach Annahme ist  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)$  mit  $\lambda_1,...,\lambda_n \in K$ . Sei  $x_1$  ein EV zum EW  $\lambda_1$ . Dann ist  $V_1 = K \cdot x_1$  ein f-invarianter UVR. Ergänze  $B_1 = (x_1)$  zu einer Basis  $B = (x_1,...,x_n)$  von V und setze  $B_2 = (x_2,...,x_n), \ V_2 = \operatorname{span}_K(B_2)$ .

$$\Rightarrow M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad A_2 \in \operatorname{Mat}_{n-1}(K)$$

$$\chi_f(t) = \chi_{\lambda_1 \mathbb{1}_1} \cdot \chi_{A_2} = (t - \lambda_1) \cdot \chi_{A_2}(t)$$

$$\stackrel{\text{Lemma 3.7}}{\Rightarrow} \chi_{A_2}(t) = \prod_{i=2}^{n} (t - \lambda_i)$$

Seien  $\pi_1, \pi_2 \in \operatorname{End}_K(V)$  gegeben durch  $M_B(\pi_1) = \operatorname{diag}(1, 0, ..., 0)$  und  $M_B(\pi_2) = \operatorname{diag}(0, 1, ..., 1)$ . Dann ist  $\pi_1 + \pi_2 = \operatorname{id}_V$  und  $f_i = \pi_1 \circ f$  ist  $f = \operatorname{id}_V \circ f = f_1 + f_2$  und  $f_2|_{V_2} \in \operatorname{End}_K(V_2)$ . Nach Induktionshypothese ist  $f_2|_{V_2}$  trigonalisierbar, da  $M_B(f_2|_{V_2}) = A_2$ , also  $\chi_{f_2|_{V_2}} = \chi_{A_2}$ . Dies bedeutet, es gibt also eine Basis  $B_2' = (x_2', ..., x_n')$  von  $V_2$ , für die  $M_{B_2'}(f_2|_{V_2})$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit ist für  $B' = (x_1, x_2', ..., x_n')$  auch

$$M_{B'}(f) = M_{B'}(f_1) + M_{B'}(f_2)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{B'_2}(f_2|_{V_2}) \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix.

#### Folgerung 4.9

Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist jedes  $f \in \text{End}_K(V)$  trigonalisierbar.

Beweis. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfällt nach I.6.14 jedes Polynom über K in Linearfaktoren, insbesondere also  $\chi_f$ .

#### Folgerung 4.10

Ist V ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}\text{-VR}$ , so ist jedes  $f\in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$  trigonalisierbar.

Beweis. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra I.6.16 ist  $\mathbb C$  algebraisch abgeschlossen.

## 5. Das Minimalpolynom

#### Definition 5.1

Für ein Polynom  $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \in K[t]$  definieren wir  $P(f) = \sum_{i=0}^m c_i f^i \in \operatorname{End}_K(V)$ , wobei  $f^0 = \operatorname{id}_V, \ f^1 = f, \ f^2 = f \circ f, \dots$  Für ein Polynom  $P(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \in K[t]$  definieren wir  $P(f) = \sum_{i=0}^m c_i f^i \in \operatorname{End}_K(V)$ , wobei  $f^0 = \operatorname{id}_V, \ f^1 = f, \ f^2 = f \circ f, \dots$ 

Analog definiert man P(A) für  $A \in Mat_n(K)$ .

▶ Bemerkung 5.2  $\begin{cases} K[t] \to \operatorname{End}_K(V) \\ P \mapsto P(f) \end{cases}$  ist ein Homomorphismus von K-VR und Ringen. Sein Kern ist das Ideal

$$\mathcal{I}_f := \{ P \in K[t] \mid P(f) = 0 \}$$

und sein Bild ist der kommutative Unterring

$$K[f] := \{ P(f) \mid P \in K[t] \}$$
  
= span<sub>K</sub>(f<sup>0</sup>, f<sup>1</sup>, f<sup>2</sup>, ...)

des (im Allgemeinen nicht kommutativen) Rings  $\operatorname{End}_K(V)$ .

Analog definiert man  $\mathcal{I}_A$  und  $K[A] \leq \operatorname{Mat}_n(K)$ .

## Lemma 5.3

$$\mathcal{I}_f \neq \{0\}$$

Beweis. Wäre  $\mathcal{I}_f = \{0\}$ , so wäre  $K[t] \to \operatorname{End}_K(V)$  injektiv, aber  $\dim_K(K[t]) = \infty > n^2 = \dim_K(\operatorname{End}_K(V))$ , ein Widerspruch.

#### **Satz 5.4**

Es gibt ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom  $0 \neq P \in K[t]$  kleinsten Grades mit P(f) = 0. Dieses teilt jedes  $Q \in K[t]$  mit Q(f) = 0.

Beweis. Nach Lemma 5.3 gibt es  $0 \neq P \in K[t]$  mit P(f) = 0 von minimalem Grad d. Indem wir durch den Leitkoeffizienten von P teilen, können wir annehmen, dass P normiert ist.

Sei  $Q \in \mathcal{I}_f$ . Polynomdivision liefert  $R, H \in K[t]$  mit  $Q = P \cdot H + R$  und  $\deg(R) < \deg(P) = d$ . Es folgt  $R(f) = \underbrace{Q(f)}_{} - \underbrace{P(f)}_{} \cdot H(f) = 0$ . Aus der Minimalität von d folgt R = 0 und somit P|Q.

Ist Q zudem normiert vom Grad d, so ist H = 1, also Q = P, was die Eindeutigkeit zeigt.

#### Definition 5.5 (Minimalpolynom)

Das eindeutig bestimmte normierte Polynom  $0 \neq P \in K[t]$  kleinsten Grades mit P(f) = 0 nennt man das Minimalpolynom  $P_f$  von f.

Analog definiert man das Minimalpolynom  $P_A \in K[t]$  einer Matrix  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ .

#### ■ Beispiel 5.6

1. 
$$A = \mathbb{1}_n$$
,  $\chi_A(t) = (t-1)^n$ ,  $P_A(t) = t-1$ 

2. 
$$A = 0$$
,  $\chi_A(t) = t^n$ ,  $P_A(t) = t$ 

3. Ist  $A = \operatorname{diag}(a_1, ..., a_n)$  mit paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, ..., \lambda_r$ , so ist  $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^n (t-a_i) = \prod_{i=1}^n (t-\lambda_i)^{\mu_a(f_A, \lambda_i)}, P_A(t) = \prod_{i=1}^r (t-\lambda_i)$  und es folgt  $\operatorname{deg}(P_A) \geq |\{a_1, ..., a_n\}| = r$ .

#### Definition 5.7 (f-zyklisch)

Ein f-invarianter UVR  $W \leq V$  heißt f-zyklisch, wenn es ein  $x \in W$  mit  $W = \operatorname{span}_K(x, f(x), f^2(x), ...)$  gibt.

#### Lemma 5.8

Sei  $x \in V$  und  $x_i = f(x)$ . Es gibt ein kleinstes k mit  $x_k \in \text{span}_K(x_0, x_1, ..., x_{k-1})$ , und  $W = \text{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$  ein f-zyklischer UVR von V mit Basis  $B = (x_0, ..., x_{k-1})$  und  $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$ .

Beweis. Da  $\dim_K(V) = n$  ist  $(x_0, ..., x_n)$  linear abhängig, es gibt also ein kleinstes k mit  $(x_0, ..., x_{k-1})$  linear unabhängig, aber  $(x_0, ..., x_k)$  linear abhängig, folglich  $x_k \in \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$ . Mit  $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$  ist dann Da  $\dim_K(V) = n$  ist  $(x_0, ..., x_n)$  linear abhängig, es gibt also ein kleinstes k mit  $(x_0, ..., x_{k-1})$  linear unabhängig, aber  $(x_0, ..., x_k)$  linear abhängig, folglich  $x_k \in \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$ . Mit  $x_k = f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$  ist dann

$$M_B(f|w) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -c_{k-1} \end{pmatrix}$$

somit  $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ , also  $M_B(f|_W) = M_{\chi_{f|_W}}$ .

#### Theorem 5.9 (Satz von Cayley-Hamiltion)

Für  $f \in \text{End}_K(V)$  ist  $\chi_f(f) = 0$ .

Beweis. Sei  $x \in V$ . Definiere  $x_i = f^i(x)$  und  $W = \operatorname{span}_K(x_0, ..., x_{k-1})$  wie in Lemma 5.8. Sei  $\chi_{f|_W} = t^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ , also  $f(x_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} -c_i x_i$ . Wenden wir  $\chi_{f|_W}(f) \in \operatorname{End}_K(V)$  auf x an, so erhalten wir

$$\chi_{f|W}(f)(x) = \left(f^k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i f^i\right)(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} -c_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i$$
$$= 0$$

Aus  $\chi_{f|_W}|\chi_f$  (Beispiel 4.6) folgt somit  $\chi_f(f)(x)=0$ , denn ist  $\chi_f=Q\cdot\chi_{f|_W}$  mit  $Q\in K[t]$ , so ist  $\chi_f(f)=Q(f)\circ\chi_{f|_W}(f)$ , also  $\chi_f(f)(x)=Q(f)(\underbrace{\chi_{f|_W}(f)(x)}_{=0})=0$ . Da  $x\in V$  beliebig war, folgt  $\chi_f(f)=0\in \operatorname{End}_K(V)$ .  $\square$ 

#### Folgerung 5.10

Es gilt  $P_f|\chi_f$ . Insbesondere ist  $\deg(P_f) \leq n$ .

Beweis. Theorem 5.9 + Satz 5.4

#### ▶ Bemerkung 5.11

Ist B eine Basis von V und  $A = M_B(f)$ , so ist  $P_A = P_f$ . Insbesondere ist  $P_A = P_B$  für  $A \sim B$ . Als Spezialfall von Theorem 5.9 erhält man  $\chi_A(A) = 0$  und  $P_A|\chi_A$ .

## ▶ Bemerkung 5.12

Bemerkung 5.12 Der naheliegende "Beweis" 
$$\underbrace{\chi_A}_{\in \operatorname{Mat}_n(K)} = \det(t\mathbbm{1}_n - A)(A) = \det(A\mathbbm{1}_n - A) = \det(0) = \underbrace{0}_{\in K} \text{ ist falsch!}$$

## 6. Nilpotente Endomorphismen

#### ▶ Bemerkung 6.1

Für  $f \in \operatorname{End}_K(V)$  sind

- $\bullet \ f\{0\} = \operatorname{Ker}(f^0) \subseteq \operatorname{Ker}(f^1) \subseteq \operatorname{Ker}(f^2) \subseteq \dots$
- $V = \operatorname{Im}(f^0) \supseteq \operatorname{Im}(f^1) \supseteq \operatorname{Im}(f^2) \supseteq \dots$

Folgen von UVR von V. Nach der Kern-Bild-Formel III.7.13 ist

$$\dim_K(\operatorname{Ker}(f^i)) + \dim_K(\operatorname{Im}(f^i)) = \dim_K(V) \quad \forall i$$

Da  $\dim_K(V) = n < \infty$  gibt es ein d mit  $\operatorname{Ker}(f^d) = \operatorname{Ker}(f^{d+i})$  und  $\operatorname{Im}(f^d) = \operatorname{Im}(f^{d+i})$  für jedes  $i \geq 0$ .

#### ■ Beispiel 6.2

 $f = f_A, A \in \operatorname{Mat}_2(K).$ 

• 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
:  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) = \text{Ker}(f^1) = \dots$ 

• 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
:  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = \text{span}_K(e_2)$ 

• 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
:  $\{0\} = \operatorname{Ker}(f^0) \subset \underbrace{\operatorname{Ker}(f^1)}_{=\operatorname{span}_K(e_1)} \subset \operatorname{Ker}(f^2) = \dots = K^2$ 

• 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
:  $\{0\} = \text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) = \text{Ker}(f^2) = \dots = K^2$ 

#### Lemma 6.3

Seien  $f, g \in \text{End}_K(V)$ . Wenn f und g kommutieren, d.h.  $f \circ g = g \circ f$ , so sind die UVR Ker(g) und Im(g) f invariant.

Beweis. Ist  $x \in \text{Ker}(f)$ , so ist g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0, also  $f(x) \in \text{Ker}(g)$ . Für  $g(x) \in \text{Im}(g)$  ist  $f(g(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$ .

#### Satz 6.4 (Lemma von FITTING)

Seien  $V_i = \text{Ker}(f^i)$ ,  $W_i = \text{Im}(f^i)$ ,  $d = \min\{i : V_i = V_{i+1}\}$ . Dann sind

$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_d = V_{d+1} = \dots$$
$$V = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \dots \supsetneq W_d = W_{d+1} = \dots$$

Folgen f-invarianter UVR und  $V = V_d \oplus W_d$ .

Beweis. Da  $f^i$  und  $f^j$  für beliebige i, j kommutieren, sind  $V_i$  und  $V_j$  nach Lemma 6.3 f-invariant für jedes i. Aus  $\dim_K(V_i) + \dim_K(W_i) = n$  folgt  $d = \min\{i : W_i = W_{i+1}\}$ , insbesondere ist  $\operatorname{Im}(f^d) = \operatorname{Im}(f^{d+1}) = f(\operatorname{Im}(f^d))$ , somit  $W_{d+i} = \operatorname{Im}(f^{d+i}) = W_d$  für  $i \geq 0$ , also auch  $V_d = V_{d+i}$  für alle  $i \geq 0$ .

Insbesondere ist  $f^d|_{W_d}: W_d \to W_{2d} = W_d$  surjektiv, also auch injektiv, also  $V_d \cap W_d = \{0\}$ . Aus der Dimensionsformel II.4.12 folgt dann  $\dim_K(V_d + W_d) = \dim_K(V_d) + \dim_K(W_d) = \dim_K(V)$ . Folglich ist  $V_d + W_d = V$  und  $V_d \cap W_d = \{0\}$ , also  $V = V_d \oplus W_d$ .

#### Definition 6.5 (nilpotent)

Ein  $f \in \text{End}_K(V)$  heißt <u>nilpotent</u>, wenn  $f^k = 0$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Analog heißt  $A \in \text{Mat}_n(K)$  nilpotent, wenn  $A^k = 0$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Das kleinste k mit  $f^k = 0$  bzw.  $A^k$  heißt die <u>Nilpotenzklasse</u> von f bzw. A.

#### Lemma 6.6

Ist f nilpotent, so gibt es eine Basis B von V, für die  $M_B(f)$  eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Induktion nach  $n = \dim_K(V)$ .

$$n=1$$
:  $f^k=0 \Rightarrow f=0$ 

 $\overline{n > 1}$ : Sei k die Nilpotenzklasse von f und  $U = \operatorname{Ker}(f^{k-1})$ . Dann ist  $U \subset V$ . Da  $f^k = f^{k-1} \circ f$  ist  $f(V) \subset U$ , insbesondere  $f|_U \in \operatorname{End}_K(U)$ . Da  $f|_U$  nilpotent ist, gibt es nach I.H. eine Basis  $B_0$  von U, für die  $M_B(f|_U)$  eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Ergänze  $B_0$  zu einer Basis B von V. Da  $f(V) \subset U$  ist dann auch

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_{B_0}(f|_U) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix.

#### Satz 6.7

Für  $f \in \text{End}_K(V)$  sind äquivalent:

- 1) f ist nilpotent
- 2)  $f^n = 0$  für  $n \in \mathbb{N}$
- 3)  $P_f(t) = t^r$  für ein  $r \le n$
- 4)  $\chi_f(t) = t^n$
- 5) Es gibt eine Basis B von V, mit

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine strikte obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis.

- 1)  $\Rightarrow$  5): Lemma 6.6
- 5)  $\Rightarrow$  4): Beispiel 2.8
- 4)  $\Rightarrow$  3): Nach Folgerung 5.10 ist  $P_f|\chi_f = t^n$ , also  $t^n = P_f(t)Q(t)$  mit  $Q \in K[t]$ . Schreibe  $P_f(t) = t^a \cdot P_1(t), Q(t) = t^b \cdot Q_1(t)$  mit  $a, b \in \mathbb{N}, P_1, Q_1 \in K[t], P_1(0) \neq 0, Q_1(0) \neq 0$   $\stackrel{Lemma}{\Rightarrow} {}^{3.8}t^{n-(a+b)} = P_1(t)Q_1(t) \text{ und } (P_1Q_1)(0) \neq 0$   $\Rightarrow n (a+b) = 0 \Rightarrow P_1 = 1, \text{ somit } P_f(t) = t^a$
- 3)  $\Rightarrow$  2):  $t^r = 0$ ,  $r \le n \Rightarrow f^n = 0$
- 2)  $\Rightarrow$  1): nach Definition

## Folgerung 6.8

Die Nilpotenzklasse eines nilpotenten Endomorphismus  $f \in \operatorname{End}_K(V)$  ist höchstens  $\dim_K(V)$ .

#### Folgerung 6.9

Ist  $d := \min\{i \mid \operatorname{Ker}(f^i) = \operatorname{Ker}(f^{i+1})\}$ , so ist  $d \leq \dim_K(\operatorname{Ker}(f)) = \mu_a(f, 0)$ .

Beweis. Sei  $V_d = \operatorname{Ker}(f^d)$ ,  $W_d = \operatorname{Im}(f^d)$ ,  $k = \dim_K(V_d)$ . Da  $V = V_d \oplus W_d$  ist  $\chi_f = \chi_{f|_{V_d}} \cdot \chi_{f|_{W_d}}$ . Da  $f|_{V_d}$  nilpotent ist, ist  $\chi_{f|_{V_d}} = t$  nach Satz 6.7. Da  $f|_{W_d}$  injektiv ist, ist  $\chi_{f|_{W_d}}(0) \neq 0$ . Somit ist  $\mu_a(f,0) = \mu(\chi_f,0) \stackrel{Lemma 3.6}{=} k$ . Da  $\dim_K(\operatorname{Ker}(f^d)) > \dots > \dim_K(\operatorname{Ker}(f)) > 0$  ist  $k = \dim_K(\operatorname{Ker}(f^d)) \geq d$ , falls d > 0, sonst klar.

#### ▶ Bemerkung 6.10

Die Bedeutung nilpotenter Endomorphismen beim Finden geeigneter Basen ergibt sich aus der folgenden Beobachtung:

Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so ist A = D + N, wobei D eine Diagonalmatrix ist und N eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Anders gesagt: Jeder trigonalisierbare Endomorphismus ist Summe aus einem diagonalisierbaren und einem nilpotenten Endomorphismus.

#### Definition 6.11 (JORDAN-Matrix)

Für  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir die JORDAN-Matrix

$$J_{k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{k}(K)$$

weiter setzen wir für  $\lambda \in K$   $J_k(\lambda) := \lambda \mathbb{1} + J_k$ .

#### Lemma 6.12

Die JORDAN-Matrix  $J_k$  ist nilpotent von Nilpotenzklasse k.

Beweis. Es ist 
$$(J_k)^r = (\delta_{i+r,j})_{i,j}$$
 für  $r \ge 1$ .

#### Satz 6.13

Ist f nilpotent von Nilpotenzklasse k, so gibt es eindeutig bestimmte  $r_1, ..., r_k \in \mathbb{N}_{>0}$  mit  $\sum_{d=1}^k dr_d = n$  und eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \operatorname{diag}(\underbrace{J_k,...,J_k}_{r_k \text{ viele}},...,\underbrace{J_1,...,J_1}_{r_1 \text{ viele}})$$

Beweis. Sei  $U_i = \operatorname{Ker}(f^i)$ . Nach Satz 6.4 haben wir eine Folge  $\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset ... \subset U_k = V$  mit  $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$  für alle i > 0.

Wir konstruieren eine Zerlegung  $V = \bigoplus_{d=1}^k W_d$  mit  $U_i = U_{i-1} \oplus W_i$ ,  $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$ ,  $f|_{W_d}$  injektiv für i > 1.

$$\begin{split} V &= U_k \\ V &= U_{k-1} \oplus W_k \\ V &= U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k \\ &\vdots \\ V &= U_0 \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \end{split}$$

Wähle  $W_k$  mit  $V = U_k = U_{k-1} \oplus W_k$ . Ist k > 1, so ist  $W_k \cap \operatorname{Ker}(f) \subseteq W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$ , also  $f|_{W_k}$  ist injektiv. Des weiteren ist  $f(W_k) \subseteq U_{k-1}$  und aus  $W_k \cap U_{k-1} = \{0\}$  folgt  $f(W_k) \cap U_{k-2} = \{0\}$ . Wir können deshalb  $W_{k-1}$  mit  $U_{k-1} = U_{k-2} \oplus W_{k-1}$  und  $f(W_k) \subseteq W_{k-1}$  wählen. Somit ist  $V = U_{k-1} \oplus W_k = U_{k-2} \oplus W_{k-1} \oplus W_k$ . Wir setzen dies fort und erhalten  $V = U_0 \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$  mit  $f(W_i) \subseteq W_{i-1}$  und  $f|_{W_i}$  injektiv für i > 1, wobei  $U_0 = \{0\}$  und  $W_1 = \operatorname{Ker}(f)$ .

Sie  $r_d = \dim_K(W_d) - \dim_K(W_{d+1})$ , wobei wir  $W_{k+1} = \{0\}$ . Wähle nun eine Basis  $(x_{k,1}, ..., x_{k,r_k})$  von  $W_k$ . Ist k > 1, so ist  $f|_{W_k}$  injektiv und wir können  $(f(x_{k,1}), ..., f(x_{k,r_k}))$  durch Elemente  $x_{k-1,1}, ..., x_{k-1,r_{k-1}}$  zu einer Basis von  $W_{k-1}$  ergänzen, und so weiter.

$$Da V = \bigoplus_{d=1}^{k} W_d \text{ ist}$$

$$B = \{f^{i}(x_{d,j}) \mid d = 1, ..., k, j = 1, ..., r_{d}, i = 0, ..., d - 1\}$$

eine Basis von V, die bei geeigneter Anordnung das Gewünschte leistet.

Es bleibt zu zeigen, dass  $r_1, ..., r_k$  eindeutig bestimmt sind. Ist  $B_0$  eine Basis, für die  $M_{B_0}(f)$  in der gewünschten Form ist, so ist

$$\dim_{K}(U_{1}) = \sum_{d=1}^{k} r_{d}$$

$$\dim_{K}(U_{2}) = \sum_{d=2}^{k} r_{d} + \sum_{d=1}^{k} r_{d}$$

$$\vdots$$

$$\dim_{K}(U_{k}) = \sum_{d=k}^{k} r_{d} + \dots + \sum_{d=1}^{k} r_{d}$$

woraus man sieht, dass  $r_1, ..., r_k$  durch  $U_1, ..., U_k$ , also durch f eindeutig bestimmt.

Beispiel 6.14 Sei 
$$f = f_A$$
 mit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$ 

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0$$

 $\Rightarrow k = 3, U_0 = \{0\}, U_1 = \mathbb{R}e_1, U_2 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2, U_3 = V.$ 

Wähle  $W_3$  mit  $V=U_3=U_2\oplus W_3$ , z.B.  $W_3=\mathbb{R}e_3$ .

Wähle  $W_2$  mit  $U_2 = U_1 \oplus W_2$  und  $f(W_3) \subseteq W_2$ , also

$$W_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setze  $W_1 = U_1 = \text{Ker}(f) = \mathbb{R}e_1 \Rightarrow \text{Basis } B = (f^2(e_3), f(e_3), e_3)$ 

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

## 7. Die Jordan-Normalform

#### Definition 7.1 (Hauptraum)

Der Hauptraum von f zum EW  $\lambda$  der Vielfachheit  $r = \mu_a(f, \lambda)$  ist

$$\operatorname{Hau}(f,\lambda) = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{id}_V)^r\right)$$

#### Lemma 7.2

 $\operatorname{Hau}(f,\lambda)$  ist ein f-invarianter UVR der Dimension  $\dim_K(\operatorname{Hau}(f,\lambda)) = \mu_a(f,\lambda)$ , auf dem  $f - \lambda \operatorname{id}_V$  nilpotent ist und  $\chi_{f|_{\operatorname{Hau}(f,\lambda)}} = (t-\lambda)^{\mu_a(f,\lambda)}$ 

Beweis. f kommutiert sowohl mit f als auch mit  $\mathrm{id}_V$ , somit auch mit  $(f - \lambda \, \mathrm{id}_V)^r$ . Die f-Invarianz von  $U = \mathrm{Hau}(f,\lambda)$  folgt aus Lemma 6.3. Nach Folgerung 6.9 ist  $\mathrm{dim}_K(U) = \mu_a(f - \lambda \, \mathrm{id}_V,0)$  und  $\mathrm{da} \, \chi_f(t) = \chi_{f-\lambda \, \mathrm{id}_V}(t-\lambda)$  ist  $\mu_a(f,\lambda) = \mu(\chi_f,\lambda) = \mu_a(f - \lambda \, \mathrm{id}_V,0)$ . Da  $f - \lambda \, \mathrm{id}_V \, |_U$  nilpotent ist  $\chi_{f-\lambda \, \mathrm{id}_V \, |_U}(t) = t^r$ , somit  $\chi_{f|_U}(t) = (t-\lambda)^r$ .

#### Satz 7.3 (Hauptraumzerlegung)

Ist  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t-\lambda_i)^{r_i}$  mit  $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$  paarweise verschieden und  $r_1, ..., r_m \in \mathbb{N}$ , so ist  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$  mit  $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$  eine Zerlegung in f-invariante UVR und für jedes i ist  $\chi_{f|_{V_i}}(t) = (t-\lambda_i)^{r_i}$ .

Beweis. Induktion nach m.

 $m=1: r_1=n \overset{Lemma}{\Rightarrow} \overset{7.2}{\Rightarrow} V=V_1.$ 

 $\overline{m-1} \to m$ : Nach Satz 6.4 ist  $V = V_1 \oplus W_1$  mit  $W_1 = \operatorname{Im}((f-\lambda_i\operatorname{id}_V)^r)$  eine Zerlegung in f-invariante UVR mit  $\dim_K(V_1) = r_1$ ,  $\dim_K(W_1) = n - r_1$ . Somit ist  $\chi_f = \chi_{f|_{V_1}} \cdot \chi_{f|_{W_1}}$  und  $\chi_{f|_{V_1}} \stackrel{Lemma 7.2}{=} (t-\lambda_1)^{r_1}$  also  $\chi_{f|_{W_1}} = \prod_{i=2}^m (t-\lambda_i)^{r_i}$ . Nach I.H. ist also  $W_1 = \bigoplus_{i=2}^m \operatorname{Hau}(f|_{W_1},\lambda_i)$ . Es ist für  $i \geq 2$   $\operatorname{Hau}(f|_{W_1},\lambda_i) \subseteq \operatorname{Hau}(f,\lambda_i) = V_i$  und da  $\dim_K(\operatorname{Hau}(f|_{W_1},\lambda_i)) = r_i = \dim_K(\operatorname{Hau}(f,\lambda_i))$  gilt Gleichheit. Damit ist

$$V = V_1 \oplus W_1$$

$$= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m \operatorname{Hau}(f|_{W_1}, \lambda_i)$$

$$= V_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^m V_i$$

$$= \bigoplus_{i=1}^m V_i$$

#### ■ Beispiel 7.4

 $f = f_A$ 

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$$

$$\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \underbrace{\operatorname{Hau}(f,1)}_{\text{dim}=2} \oplus \underbrace{\operatorname{Hau}(f,2)}_{\text{dim}\,1}$$

$$\operatorname{Hau}(f,1) = \operatorname{Ker}((f-\operatorname{id})^2) = L((A-1)^2,0)$$

$$\operatorname{Hau}(f,2) = \operatorname{Ker}(f-2\operatorname{id}) = \operatorname{Eig}(f,2) = L(A-21,0)$$

$$A - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 \end{pmatrix}, (A - \mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Hau}(f, 1) = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$$

$$A - 2\mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Hau}(f, 2) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit 
$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
 ist

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

#### Theorem 7.5 (JORDAN-Normalform)

Sei  $f \in \operatorname{End}_K(V)$  ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom  $\chi_f$  in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_1,...,\mu_r \in K$  und  $k_1,...,k_r \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{i=1}^r k_i = \dim_K(V)$  und eine Basis B von V mit

$$M_B(f) = \text{diag}(J_{k_1}(\mu_1), ..., J_{k_r}(\mu_r))$$

Die Paare  $(\mu_1, k_1), ..., (\mu_r, k_r)$  heißen die <u>JORDAN-Invarianten</u> von f und sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Beweis. Schreibe  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}$  mit  $\lambda_1, ..., \lambda_m \in K$  paarweise verschieden,  $r_i \in \mathbb{N}$ . Sei  $V_i = \text{Hau}(f, \lambda_i)$ . Nach Satz 7.3 ist  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$  eine Zerlegung in f-invariante UVR. Für jedes i wenden wir Satz 6.13 auf  $(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)|_{V_i}$  an und erhalten eine Basis  $B_i$  von  $V_i$  und  $k_{i,1} \geq ... \geq k_{i,s_i}$  mit

$$M_B((f - \lambda_i \operatorname{id})|_{V_i}) = \operatorname{diag}(J_{k_{i-1}}, ..., J_{k_{i-s-1}})$$

Es folgt  $M_{B_i}(f|_{V_i}) = M_{B_i}(\lambda_i \operatorname{id}_{V_i}) + M_{B_i}((f - \lambda_i \operatorname{id}_{V_i})|_{V_i})$ . Ist nun B die Vereinigung der  $B_i$ , so hat  $M_B(f)$  die gewünschte Form. Die Eindeutigkeit der JORDAN-Invarianten folgt aus der Eindeutigkeit der  $k_{i,j}$  in Lemma 6.3.

#### ▶ Bemerkung 7.6

Ist K algebraisch abgeschlossen, so haben wir nun eine (bis auf Permutationen) eindeutige Normalform für Endomorphismen  $f \in \operatorname{End}_K(V)$  gefunden. Aus ihr lassen sich viele Eigenschaften des Endomorphismus leicht ablesen.

#### Folgerung 7.7

Sei  $f \in \operatorname{End}_K(V)$  trigonalisierbar mit  $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f,\lambda_i)}, P_f(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{d_i}$  und Jordan-Invarianten  $(\mu_1, k_1), \dots, (\mu_r, k_r)$ . Mit  $J_i = \{j \mid \mu_j = \lambda_i\}$  ist dann

$$\mu_g(f, \lambda_i) = |J_i|$$

$$\mu_a(f, \lambda_i) = \sum_{j \in J_i} k_j$$

$$d_i = \max\{k_j \mid j \in J_i\}$$

Beweis. •  $\mu_a$ : klar, da  $\chi_f(t) = \prod_{j=1}^r (t - \mu_j)^{k_j} = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{\mu_a(f, \lambda_i)}$ 

•  $\mu_g$ : lese Basis von Eig $(f, \lambda_i)$  aus JORDAN-NF: Jeder Block  $J_{k_j}(\lambda_i)$  liefert ein Element der Basis.

•  $d_i$ : folgt, da  $J_{k_j}$  nilpotent von Nilpotenzklasse  $k_j$  ist (Lemma 6.12).

#### Folgerung 7.8

Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn

$$\chi_f(t)=\prod_{i=1}^m(t-^\lambda_i)^{r_i}\quad \lambda_1,...,\lambda_m\in K \text{ paarweise verscheiden und}$$
 
$$P_f(t)=\prod_{i=1}^mm(t-\lambda_i)$$

Beweis. Genau dann ist f diagonalisierbar, wenn f trigonalisierbar ist und die JORDAN-NF die Diagonalmatrix ist (Eindeutigkeit der JNF), also  $k_j = 1$  für alle j. Nach Folgerung 7.7 ist dies äquivalent dazu, dass  $d_i = 1$  für alle i, also  $P_f = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)$ .

## ▶ Bemerkung 7.9

Wider definiert man die JORDAN-Invarianten, etc. von einer Matrix  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  als die JORDAN-Invarianten von  $f_A \in \operatorname{End}_K(K^n)$ .

#### Folgerung 7.10

Seien  $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$  trigonalisierbar. Genau dann ist  $A \sim B$ , wenn A und B die gleichen JORDAN-Invarianten haben.

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit der Jordan-Normalform.

## Kapitel II

# Skalar produkte

In diesem ganzen Kapitel seien

- $K = \mathbb{R} \text{ oder } K = \mathbb{C}$
- $n \in \mathbb{N}$
- ullet V ein n-dimensionaler K-VR

## 1. Das Standardskalarprodukt

Sei zunächst  $K = \mathbb{R}$ .

#### Definition 1.1 (Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}$ )

Auf den Standardraum  $V = \mathbb{R}^n$  definiert man das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}$   $\langle . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  durch

$$\langle x, y \rangle = x^t y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

#### Satz 1.2

Das Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

• Für  $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$
$$\langle \lambda x, y \rangle = = \lambda \langle x, y \rangle$$
$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$
$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

- Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $\langle x, y \rangle \ge 0$  und  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Beweis. • klar

- klar
- $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \ge x_j^2$  für jedes  $j \Rightarrow \langle x, x \rangle \ge 0$  und  $\langle x, x \rangle > 0$  falls  $x_j \ne 0$  für ein j.

Definition 1.3 (euklidische Norm in  $\mathbb{R}$ )

Auf  $K=\mathbb{R}^n$  definiert man euklidische Norm in  $\mathbb{R} \ \|\cdot\|:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$  durch

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

#### Satz 1.4 (Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ)

Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|\langle x, y \rangle| \le ||x|| \cdot ||y||$$

Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. siehe Analysis, siehe VI.§3

#### Satz 1.5

Die euklidische Norm erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $||x|| = 0 \iff x = 0$
- Für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
- Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ist  $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$

Beweis. • Satz 1.2

- Satz 1.2
- $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \le \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \overset{Satz}{\Rightarrow} \overset{1.4}{\Rightarrow} \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Sei nun  $K = \mathbb{C}$ .

### Definition 1.6 (komplexe Konjugation, Absolutbetrag)

Für  $x,y\in\mathbb{R}$  und  $z=x+iy\in\mathbb{C}$  definiert man  $\overline{z}=x-iy$  heißt komplexe Konjugation. Man definiert den Absolutbetrag von z als

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Für  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$  sehen wir

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{C})$$

#### **Satz 1.7**

Komplexe Konjugation ist ein Ringautomorphismus von  $\mathbb C$  mit Fixkörper

$$\{z\in\mathbb{C}\mid z=\overline{z}\}=\mathbb{R}$$

Beweis. siehe LAAG1 H47

#### Folgerung 1.8

Für  $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$  und  $S \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$  ist  $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A^t} = \overline{A}^t, \overline{S^{-1}} = \overline{S}^{-1}$ 

Beweis. Satz 1.7, einfache Übung

#### Definition 1.9 (Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}$ )

Auf  $K = \mathbb{C}^n$  definiert man das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$  durch

$$\langle x, y \rangle = x^t \overline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$$

#### Satz 1.10

Das komplexe Standardskalarprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

• Für  $x, x', y, y' \in \mathbb{C}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist:

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$
$$\langle \lambda x, y \rangle = = \lambda \langle x, y \rangle$$
$$\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$
$$\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

- Für  $x, y \in \mathbb{C}^n$  ist  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- Für  $x \in \mathbb{C}^n$  ist  $\langle x,y \rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

Beweis. • klar

- klar
- $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$

#### Definition 1.11 (euklidische Norm in $\mathbb{C}$ )

Auf  $V=\mathbb{C}$  definiert man die <br/> euklidische Norm in  $\mathbb{C}$   $\|\cdot\|:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}_{\geq 0}$  durch

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

#### ▶ Bemerkung 1.12

Schränkt man das komplexe Skalarprodukt auf den  $\mathbb{R}^n$  ein, so erhält man das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Wir werden ab jetzt die beiden Fälle  $K=\mathbb{R}$  und  $K=\mathbb{C}$  parallel behandeln. Wenn nicht anders angegeben, werden wir die Begriffe für den komplexen Fall benutzen, aber auch den reellen Fall einschließen.

## 2. Bilinearformen und Sesquilinearformen

Sei  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ .

#### Definition 2.1 (Bilinearform, Sesquilinearform)

Eine Bilinearform  $(K = \mathbb{R})$  bzw. Sesquilinearform  $(K = \mathbb{C})$  ist eine Abbildung  $s: V \times V \to K$  für die gilt:

- Für  $x, x', y \in V$  ist s(x + x', y) = s(x, y) + s(x', y)
- Für  $x, y, y' \in V$  ist s(x, y + y') = s(x, y) + s(x, y')
- Für  $x, y \in V$ ,  $\lambda \in K$  ist  $s(x, \lambda y) = \overline{\lambda} s(x, y)$

#### ▶ Bemerkung 2.2

Im Fall  $K = \mathbb{R}$  ist  $\lambda = \overline{\lambda}$ . Wir werden der Einfachheit halber auch in diesem Fall von Sesquilinearformen sprechen, vgl. Bemerkung 1.12

#### ■ Beispiel 2.3

Für  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \operatorname{Mat}_n(K)$  ist  $s_A : K^n \times K^n \to K^n$  gegeben durch

$$s_A(x,y) = x^t A \overline{y} = x^t \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{y}_j \right)_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{y}_j$$

eine Sesquilinearform auf  $V = K^n$ .

#### Definition 2.4

Sei s eine Sesquilinearform auf V und  $B=(v_1,...,v_n)$  eine Basis von V. Die <u>darstellende Matrix</u> von s bzgl. B ist

$$M_B(s) = (s(v_i, v_j))_{i,j} \in \operatorname{Mat}_n(K)$$

#### ■ Beispiel 2.5

Die darstellende Matrix des Standardskalarprodukts  $s=s_{\mathbbm{1}_n}$  auf den Standardraum  $V=K^n$  bzgl. der Standardbasis  $\mathcal E$  ist

$$M_{\mathcal{E}}(s) = \mathbb{1}_n$$

#### Lemma 2.6

Seien  $v, w \in V$ . Mit  $x = \Phi_B^{-1}(v)$ ,  $y = \Phi_B^{-1}(w)$  und  $A = M_B(s)$  ist  $s(v, w) = x^t A \overline{y} = s_A(x, y)$ .

Beweis. Achtung:  $v_i$  beschreibt das *i*-te Element der Basis B!  $s(v,w) = s(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y} s(v,v_j) = x^t A \overline{y}$ 

#### Satz 2.7

ISei B eine Basis von V. Die Abbildung  $s \mapsto M_B(s)$  ist eine Bijektion zwischen den Sesquilinearformen auf V und  $\operatorname{Mat}_n(K)$ .

Beweis. • injektiv: Lemma 2.6

• surjektiv: Für  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  wird durch  $s(v,w) = \Phi_B^{-1}(v)^t \cdot A \cdot \overline{\Phi_B^{-1}(w)}$  eine Sesquilinearform auf V mit  $M_B(s) = (s(v_i, w_j))_{i,j} = (e_i^t A \overline{e_j})_{i,j} = (e_i A e_j)_{i,j} = A$  definiert.

#### Satz 2.8 (Transformationsformel)

Seien B und B' Basen von V und s eine Sesquilinearform auf V. Dann gilt:

$$M_{B'}(s) = (T_B^{B'})^t \cdot M_B(s) \cdot \overline{T_B^{B'}}$$

Beweis. Seien  $v, w \in V$ . Definiere  $A = M_B(s)$ ,  $A' = M_{B'}(s)$ ,  $T = T_B^{B'}$  und  $x, y, x', y' \in K^n$  mit  $v = \Phi_B(x) = \Phi_B(x')$ ,  $w = \Phi_B(y) = \Phi_B(y')$ . Dann ist x = Tx', y = Ty' und somit

$$(x')^{t}A'\overline{y'} \stackrel{Lemma}{=} {}^{2.6} s(v, w)$$

$$\stackrel{Lemma}{=} {}^{2.6} x^{t}A\overline{y}$$

$$= (Tx')^{t}A\overline{Ty'}$$

$$= (x')^{t}T^{t}A\overline{Ty'}$$

Da  $v, w \in V$  und somit  $x', y' \in K$  beliebig waren, folgt  $A = T^t A \overline{T}$ .

#### ■ Beispiel 2.9

Sei s das Standardskalarprodukt auf dem  $K^n$  und  $B = (b_1, ..., b_n)$  eine Basis des  $K^n$ . Dann ist

$$M_B(s) = (T_{\mathcal{E}}^B)^t \cdot M_{\mathcal{E}}(s) \cdot \overline{T_{\mathcal{E}}^B} = B^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{B} = B^t B$$

wobei  $B = (b_1, ..., b_n) \in \operatorname{Mat}_n(K)$ .

#### Satz 2.10

Sei s eine Sesquilinearform auf V. Dann sind äquivalent:

- Es gibt  $0 \neq v \in V$  mit s(v, w) = 0 für alle  $w \in V$ .
- Es gibt  $0 \neq w \in V$  mit s(v, w) = 0 für alle  $v \in V$ .
- Es gibt eine Basis B von V mit  $det(M_B(s)) = 0$ .
- Für jede Basis B von V gilt  $det(M_B(s)) = 0$ .

Beweis. Sei B eine Basis von V,  $v = \Phi_B(x)$  und  $A = M_B(s)$ . Genau dann ist die (semilineare) Abbildung  $w \mapsto s(v, w)$  die Nullabbildung, wenn  $x^t A \overline{y} = 0$  für alle  $y \in K^n$ , also wenn  $0 = x^t A$ , d.h.  $A^t x = 0$ . Somit ist (1) genau dann erfüllt, wenn  $A^t$  nicht invertierbar ist, also wenn  $0 = \det(A^t) = \det(A)$ . Damit (1)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1) gezeigt und (2)  $\iff$  (4) zeigt man analog.

#### Definition 2.11 (ausgeartet)

Eine Sesquilinearform s auf V heißt <u>ausgeartet</u>, wenn eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 2.10 erfüllt ist, sonst nicht-ausgeartet.

#### Definition 2.12 (symmetrisch, hermitesch)

Eine Sesquilinearform s auf V heißt symmetrisch, wenn bzw. hermitesch, wenn

$$s(x,y) = \overline{s(y,x)}$$
 für alle  $x, y \in V$ 

Eine Matrix  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  heißt symmetrisch bzw. hermitesch, wenn  $A = A^* = \overline{A}^t = \overline{A}^t$ .

#### Satz 2.13

Sei s eine Sesquilinearform auf V und B eine Basis von V. Genau dann ist s hermitesch, wenn  $M_B(s)$  dies ist.

Beweis.  $(\Rightarrow)$ : klar aus Definition von  $M_B(s)$ .

$$(\Leftarrow) : x = \Phi_B^{-1}, \ y = \Phi_B^{-1}(w), \ \overline{s(v,w)} = \overline{s(v,w)^t} = \overline{(x^t A \overline{y})^t} = y^t \overline{A^t} \overline{x} = s(w,v)$$

## Satz 2.14

Für 
$$A, B \in \text{Mat}_n(K)$$
 und  $S \in GL_n(K)$  ist  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,  $(AB)^* = B^*A^*$ ,  $(A^*)^* = A$  und  $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$ .

Beweis. Folgerung 1.8, III.1.14, III.1.15

## 3. Euklidische und unitäre Vektorräume

#### Lemma 3.1

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Dann ist  $s(x,x) \in \mathbb{R}$  für alle  $x \in V$ .

Beweis. Da s hermitesch ist, ist  $s(x,x) = \overline{s(x,x)}$ , also  $s(x,x) \in \mathbb{R}$ .

#### Definition 3.2 (quadratische Form)

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Die quadratische Form zu s ist die Abbildung

$$q_s: \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ x \mapsto s(x,x) \end{cases}$$

#### ▶ Bemerkung 3.3

Die quadratische Form  $q_s$  erfüllt das  $q_s(\lambda x) = |\lambda|^2 \cdot q_s(x)$  für alle  $x \in V$ ,  $\lambda \in K$ . Im Fall  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, ..., x_n)^t$ ,  $s = s_A$ ,  $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$  ist  $q_s(x) = s_A(x, x) = x^t A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  ein "quadratisches Polynom in den Variablen  $x_1, ..., x_n$ ".

#### Satz 3.4 (Polarisierung)

Sei s ein hermitesche Sesquilinearform auf V. Dann gilt für  $x, y \in V$ :

$$s(x,y) = \frac{1}{2}(q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y)) \quad K = \mathbb{R}$$
  
$$s(x,y) = \frac{1}{4}(q_s(x+y) - q_s(x-y) + iq_s(x+iy) - iq_s(x-iy)) \quad K = \mathbb{C}$$

Beweis. Im Fall  $K = \mathbb{R}$  ist

$$q_s(x+y) - q_s(x) - q_s(y) = s(x+y, x+y) - s(x, x) - s(y, y)$$

$$= s(x, x) + s(x, y) + s(y, x) + s(y, y) - s(x, x) - s(y, y)$$

$$= s(x, y) + s(y, x) - 2s(x, y)$$

Im Fall  $K = \mathbb{C}$ : ÜA

#### Definition 3.5 ((semi)definit, euklidischer VR, unitärer VR)

Sei s eine hermitesche Sesquilinearform auf V. Ist  $s(x,x) \ge 0$  für alle  $x \in V$ , so heißt s positiv semidefinit. Ist s(x,x) > 0 für alle  $0 \ne x \in V$ , so heißt s positiv definit (oder ein Skalarprodukt).

Eine hermitesche Matrix  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  heißt positiv (semi)definit, wenn  $s_A$  dies ist.

Einen endlichdimensionalen K-VR zusammen mit positiv definiten hermiteschen Sesquilinearformen nennt man einen <u>euklidischen</u> bzw. <u>unitären</u> VR (oder auch <u>Prähilbertraum</u>). Wenn nicht anderes angegeben, notieren wir die Sesquilinearform mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

#### ■ Beispiel 3.6

Der Standardraum  $V=K^n$  zusammen mit dem Standardskalarprodukt ist ein euklidischer bzw. unitärer VR.

#### ■ Beispiel 3.7

Ist  $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , so ist  $s_A$  genau dann positiv definit, wenn  $\lambda_i > 0$  für alle i, und positiv semidefinit, wenn  $\lambda_i \geq 0$  für alle i.

#### **Satz 3.8**

Ist V ein unitärer VR und  $U\subseteq V$  ein UVR, so ist U mit der Einschränkung des Skalarprodukts wieder ein unitärer VR.

Beweis. klar, die Einschränkung ist wieder positiv definit.

#### Definition 3.9

Ist V ein unitärer VR, so definiert man die Norm von  $x \in V$  als

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

#### Satz 3.10

Die Norm eines unitären VR erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- Für  $x \in V$  ist  $||x|| = 0 \iff x = 0$
- Für  $x \in V$  und  $\lambda \in K$  ist  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- Für  $x, y \in V$  ist  $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$

Beweis. • Das Skalarprodukt ist positiv definit.

- klar
- Wie im Fall im  $\mathbb{R}^n$

#### Satz 3.11

Ist V ein unitärer VR, so gilt für  $x, y \in V$ :

$$|\langle x, y \rangle| \le ||x|| \cdot ||y||$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis. Für y=0 ist die Aussage klar. Sei also  $y\neq 0$ . Für  $\lambda,\mu\in K$  ist

$$0 \le \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y \rangle$$
  
=  $\lambda \overline{\lambda} \cdot \langle x, x \rangle + \mu \overline{\mu} \cdot \langle y, y \rangle + \lambda \overline{\mu} \cdot \langle x, y \rangle + \mu \overline{\lambda} \cdot \langle y, x \rangle$ 

Setzt man  $\lambda = \overline{\lambda} = \langle y, y \rangle > 0$  und  $\mu = -\langle x, y \rangle$  ein, so erhält man

$$0 \le \lambda \cdot ||x||^2 ||y||^2 + \mu \overline{\mu} \lambda - \lambda \mu \overline{\mu} - \langle x, y \rangle \overline{\lambda} \langle y, x \rangle$$
$$= \lambda (||x||^2 ||y||^2 - |\langle x, y \rangle|^2)$$

Teilen durch  $\lambda$  und Wurzelziehen liefert die Ungleichung. Gilt dort Gleichheit, so ist  $\|\lambda x + \mu y\| = 0$  folglich (da  $\lambda \neq 0$ ) sind dann x, y linear unabhängig. Ist  $x = \alpha y$  mit  $\alpha \in K$ , so ist  $|\langle x, y \rangle| = |\alpha| \cdot ||y||^2 = ||x|| \cdot ||y||$ 

## 4. Orthogonalität

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum.

#### Definition 4.1 (orthogonal, orthogonales Komplement)

Zwei Vektoren  $x,y\in V$  heißen <u>orthogonal</u>, in Zeichen  $x\perp y$ , wenn  $\langle x,y\rangle=0$ . Zwei Mengen  $X,Y\subseteq V$  sind <u>orthogonal</u>, in Zeichen  $X\perp Y$ , wenn  $x\perp y$  für alle  $x\in X$  und  $y\in Y$ .

Für  $U \subseteq V$  bezeichnet

$$U^{\perp} = \{ x \in V \mid x \perp u \text{ für alle } u \in U \}$$

das orthogonale Komplement zu U.

#### Lemma 4.2

Für  $x, y \in V$  ist

- $\bullet \ x \perp y \iff y \perp x$
- $\bullet \ x \perp 0$
- $x \perp x \iff x = 0$

Beweis. klar

#### **Satz 4.3**

Für  $U \subseteq V$  ist  $U^{\perp}$  ein Untervektorraum von V mit  $U \perp U^{\perp}$  und  $U \cap U^{\perp} \subseteq \{0\}$ .

Beweis. Linearität des Skalarprodukts im ersten Argument liefert, dass  $U^{\perp}$  ein Untervektorraum ist. Die Aussage  $U^{\perp} \perp U$  ist trivial,  $U \perp U^{\perp}$  folgt dann aus Lemma 4.2. Ist  $u \in U \cap U^{\perp}$ , so ist insbesondere  $u \perp u$ , also u = 0 nach Lemma 4.2.

#### Definition 4.4 (orthonormal)

Eine Familie  $(x_i)_{i \in I}$  von Elementen von V ist <u>orthogonal</u>, wenn  $x_i \perp x_j$  für alle  $i \neq j$ , und <u>orthonormal</u>, wenn zusätzlich  $||x_i|| = 1$  für alle i. Eine orthogonale Basis nennt man eine <u>Orthogonalbasis</u>, eine orthonormale Basis nennt man eine Orthonormalbasis.

#### ▶ Bemerkung 4.5

Eine Basis B ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die darstellende Matrix des Skalarprodukts bezüglich B die Einheitsmatrix ist. (Beispiel: Standardbasis des Standardraum bezüglich des Standardskalarprodukts)

## Lemma 4.6

Ist die Familie  $(x_i)_{i\in I}$  orthogonal und  $x_i\neq 0$  für alle  $i\in I$ , so ist  $(x_i)_{i\in I}$  linear unabhängig.

Beweis. Ist  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ ,  $\lambda_i \in K$ , fast alle gleich 0, so ist  $0 = \langle \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, x_j \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = \lambda_j \langle x_j, x_j \rangle$ Aus  $x_j \neq 0$  folgt  $\langle x_j, x_j \rangle > 0$  und somit  $\lambda_j = 0$  für jedes  $j \in I$ .

#### Lemma 4.7

Ist  $(x_i)_{i\in I}$  orthogonal und  $x_i \neq 0$  für alle i, so ist  $(y_i)_{i\in I}$  mit

$$y_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

orthonormal.

Beweis. Für alle 
$$i$$
 ist  $\langle y_i, y_i \rangle = \frac{1}{\|x_i\|^2} \langle x_i, x_i \rangle = 1$ . Für alle  $i \neq j$  ist  $\langle y_i, y_j \rangle = \frac{1}{\|x_i\| \cdot \|x_j\|} \langle x_i, x_j \rangle = 0$ .

#### **Satz 4.8**

Sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum und  $B = (x_1, ..., x_k)$  eine Orthonormalbasis von U. Es gibt genau einen Epimorphismus  $\operatorname{pr}_U : V \to U$  mit  $\operatorname{pr}_U|_U = \operatorname{id}_U$  und  $\operatorname{Ker}(\operatorname{pr}_U) \perp U$ , insbesondere also  $x - \operatorname{pr}_U \perp U$  für alle  $x \in V$ , genannt die orthogonale Projektion auf U, und dieser ist geben durch

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \langle x, x_i \rangle x_i \tag{1}$$

Beweis. Sei zunächst  $pr_U$  durch (1) gegeben. Die Linearität von  $\operatorname{pr}_U$  folgt aus (S1) und (S3). Für  $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in U$  ist  $\langle u, x_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left\langle x_i, x_j \right\rangle = \lambda_j$ , woraus  $\operatorname{pr}_U(u) = u$ . Somit ist  $\operatorname{pr}_U|_U = \operatorname{id}_U$ , und insbesondere ist  $pr_U$  surjektiv. Ist  $\operatorname{pr}_U(x) = 0$ , so ist  $\langle x, x_i \rangle = 0$  für alle i., woraus mit (S2) und (S4) sofort  $x \perp U$  folgt. Somit ist  $\operatorname{Ker}(\operatorname{pr}_U) \perp U$ .

$$\begin{split} & \text{F\"{u}r} \ x \in V \text{ ist } \operatorname{pr}_U(x - \operatorname{pr}_U(x)) = \operatorname{pr}_U(x) - \operatorname{pr}_U(\operatorname{pr}_U(x)) = \operatorname{pr}_U(x) - \operatorname{pr}_U(x) = 0, \text{ also } x - \operatorname{pr}_U(x) \in \operatorname{Ker}(\operatorname{pr}_U) \subseteq U^\perp. \\ & \text{Ist } f: V \to U \text{ ein weiterer Epimorphismus mit } f|_U = \operatorname{id}_U \text{ und } \operatorname{Ker}(f) \perp U, \text{ so ist } \end{split}$$

$$\underbrace{\operatorname{pr}_U(x)}_{\in U} - \underbrace{f(x)}_{\in U} = \underbrace{\operatorname{pr}_U(x) - x}_{\in U^{\perp}} - \underbrace{f(x) - x}_{\in U^{\perp}} \in U \cap U^{\perp} = \{0\}$$

für jedes  $x \in V$ , somit  $f = \operatorname{pr}_U$ .

#### Theorem 4.9 (GRAM-SCHMIDT-Verfahren)

Ist  $(x_1,...,x_n)$  eine Basis von V und  $k \leq n$  mit  $(x_1,...,x_k)$  orthonormal, so gibt es eine Orthonormalbasis  $(y_1,...,y_n)$  von V mit  $y_i=x_i$  für i=1,...,k und  $\operatorname{span}_K(y_1,...,y_l)=\operatorname{span}_K(x_1,...,x_l)$  für l=1,...,n.

Beweis. Induktion nach d = n - k.

d=0: nichts zu zeigen

 $\overline{d-1} \to d$ : Für  $i \neq k+1$  definiere  $y_I = x_i$ . Sei  $U = \operatorname{span}_K(x_1,...,x_k), \ x_{k+1} = x_{k+1} - \operatorname{pr}_U(x_{k-1})$ . Dann ist  $x_{k+1} \in \operatorname{Ker}(\operatorname{pr}_U) \subseteq U^{\perp}$  (vgl. Satz 4.8) und  $\operatorname{span}_K(x_1,...,x_k,x_{k+1}) = \operatorname{span}_K(x_1,...,x_{k+1})$ . Setze  $y_{k+1} = \frac{1}{\|x_{k+1}\|}x_{k+1}$ . Dann ist  $(y_1,...,y_n)$  eine Basis von V mit  $(y_1,...,y_{k+1})$  orthonormal (vgl. Lemma 4.7). Nach Induktionshypothese gibt es eine Orthonormalbasis von V, die das Gewünschte leistet.

### Folgerung 4.10

Jeder endlichdimensionale euklidische bzw. unitäre Vektorraum V besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis. Wähle irgendeine Basis von V und wende Theorem 4.9 mit k=0 an.

#### Folgerung 4.11

Ist U ein Untervektorraum von V, so ist  $V = U \oplus U^{\perp}$  und  $(U^{\perp})^{\perp} = U$ .

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis von U (vgl. Folgerung 4.10),  $B=(x_1,...,x_k)$  und ergänze diese zu einer Orthonormalbasis  $(x_1,...,x_n)$  von V (vgl. Theorem 4.9). Dann sind  $x_{k+1},...,x_n \in U \perp$ , da  $U \cap U^\perp = \{0\}$  ist somit  $V=U \oplus U^\perp$ . Insbesondere ist  $\dim_K(U^\perp)=n-\dim_K(U)$ , woraus  $\dim_K((U^\perp)^\perp)=\dim_K(U)$  folgt. Zusammen mit der trivialen Inklusion  $U\subseteq (U^\perp)^\perp$  folgt  $U=(U^\perp)^\perp$ .

#### Folgerung 4.12

Ist s eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform auf V und B eine Basis von V, so ist

$$\det(M_B(s)) \in \mathbb{R}_{>0}$$

Beweis. Wähle eine Orthonormalbasis B' von V bezüglich s. Dann ist  $M_{B'}(s)=\mathbbm{1}_n,$  folglich

$$\det(M_B(s)) = \det\left(\left(T_{B'}^B\right)^t \cdot \mathbb{1}_n \cdot \overline{T_{B'}^B}\right)$$

$$= \det\left(\left(T_{B'}^B\right)^t\right) \cdot \det\left(\overline{T_{B'}^B}\right)$$

$$= \det\left(T_{B'}^B\right) \cdot \overline{\det\left(T_{B'}^B\right)}$$

$$= |\det\left(T_{B'}^B\right)|^2$$

$$> 0$$

## 5. Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und  $f \in \operatorname{End}_K(V)$ .

## Definition 5.1 (orthogonale, unitäre Endomorphismen)

f ist orthogonal bzw. unitär, wenn

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V$$

#### Satz 5.2

Ist f unitär, so gelten

- Für  $x \in V$  ist ||f(x)|| = ||x||.
- Sind  $x, y \in V$  mit  $x \perp y$ , so ist  $f(x) \perp f(y)$ .
- Es ist  $f \in Aut_K(V)$  und auch  $f^{-1}$  ist unitär.
- $\bullet$  Das Bild einer Orthonormalbasis unter f ist eine Orthonormalbasis.
- Ist  $\lambda$  ein Eigenwert von f, so ist  $|\lambda| = 1$ .

Beweis. • klar

- klar
- $f(x) = 0 \iff ||f(x)|| = 0 \iff ||x|| = 0 \iff x = 0$ , also ist f injektiv, somit  $f \in Aut_K(V)$  und

$$\left\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y) \right\rangle \stackrel{f \text{ unit \"ar}}{=} \left\langle f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y)) \right\rangle = \left\langle x, y \right\rangle$$

- Folgt aus 1, 2 und 3
- Ist  $f(x) = \lambda x, x \neq 0$ , so ist

$$||x|| = ||f(x)|| = ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

#### **Satz 5.3**

Ist ||f(x)|| = ||x|| für alle  $x \in V$ , so ist f unitär.

Beweis. Aus ||f(x)|| = ||x|| folgt  $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, x \rangle$ . Die Polarisierung (Satz 3.4) für  $\langle f(x), f(y) \rangle$  und die Linearität von f liefern  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ . Zum Beispiel im Fall  $K = \mathbb{R}$ :

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{2} \left( \left\langle \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)}, \underbrace{f(x) + f(y)}_{f(x+y)} \right\rangle - \left\langle f(x), f(x) \right\rangle - \left\langle f(y), f(y) \right\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \left\langle x + y, x + y \right\rangle - \left\langle x, x \right\rangle - \left\langle y, y \right\rangle \right)$$

$$= \left\langle x, y \right\rangle$$

#### Definition 5.4 (orthogonale, unitäre Matrizen)

Eine Matrix  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  heißt orthogonal bzw. unitär, wenn

$$A^*A = \mathbb{1}_n$$

#### ▶ Bemerkung 5.5

Offenbar ist A genau dann unitär, wenn  $A^*$  das Inverse zu A ist. Die folgenden Bedingungen sind

daher äquivalent dazu, dass A unitär ist:

$$AA^* = \mathbb{1}_n, \overline{A}A^t = \mathbb{1}_n, A^t \overline{A} = \mathbb{1}_n, A^t = \overline{A^{-1}}$$

#### Satz 5.6

Sei B eine Orthogonalbasis von V. Genau dann ist f unitär, wenn  $M_B(f)$  unitär ist.

Beweis. Sei  $A = M_B(f)$ ,  $v = \Phi_B(x)$ ,  $\Phi_B(y)$ . Dann ist  $\langle v, w \rangle = x^t \underbrace{M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle)}_{=1} \cdot \overline{y} = x^t \cdot \overline{y}$ . Somit ist f genau dann unitär, wenn  $(Ax)^t \overline{Ay} = x^t \overline{y}$  für alle  $x, y \in K^n$ , also wenn  $A^t \overline{A} = 1$ , d.h. A unitär.

#### Satz 5.7

Die folgenden Mengen bilden Untergruppen der  $GL_n(K)$ .

- $O_n = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}\ die orthogonale Gruppe$
- $SO_n = \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\}$  die spezielle orthogonale Gruppe
- $U_n = \{ A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär} \}$  die unitäre Gruppe
- $SU_n = \{A \in U_n \mid \det(A) = 1\}$  die spezielle unitäre Gruppe

Beweis. z.B. für U<sub>n</sub>: Sind  $A^{-1} = A^*$ ,  $B^{-1} = B^*$ , so ist  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*$ ,  $(A^{-1})^{-1} = A = (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ 

#### **Satz 5.8**

Genau dann ist  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  unitär, wenn die Spalten (oder die Zeilen) von A eine Orthonormalbasis des  $K^n$  bilden.

Beweis. Sei s das Standardskalarprodukt und  $B=(a_1,...,a_n)$ . Nach Bemerkung 4.5 ist B genau dann eine Orthonormalbasis, wenn  $M_B(s)=\mathbbm{1}_n$ , und  $M_B(s)=A^t\cdot \mathbbm{1}_n\cdot \overline{A}$ , vgl. Beispiel 2.9

#### Theorem 5.9

Sei  $K = \mathbb{C}$  und  $f \in \text{End}_K(V)$ . Ist f unitär, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

Beweis. Induktion  $"uber" n = \dim_K(V)$ .

n=0: klar

 $\overline{n-1} \to n$ : Da K algebraisch abgeschlossen ist, hat  $\chi_f$  eine Nullstelle  $\lambda$ , es gibt also einen Eigenvektor  $x_1$  von f zum Eigenwert  $\lambda$ . Ohne Einschränkung nehmen wir ||x|| = 1 an. Sei  $W = K \cdot x_1$ . Nach Folgerung 4.11 ist dann  $V = W \oplus W^{\perp}$ . Für  $v \in W^{\perp}, w \in W$  ist

$$0 = \langle v, w \rangle = \langle f(v), f(w) \rangle = \overline{\lambda} \langle f(v), w \rangle$$

da  $\lambda \neq 0$  (f unitär) also  $f(W^{\perp}) \perp W$ . Somit ist  $f(W^{\perp}) \subseteq W^{\perp}$ , d.h.  $W^{\perp}$  ist f-invariant. Da auch  $f|_{W^{\perp}}$  unitär ist, gibt es nach Induktionshypothese eine Orthonormalbasis  $(x_1, ..., x_n)$  aus Eigenvektoren von  $f|_{W^{\perp}}$ . Da  $V = W \oplus W^{\perp}$  und  $W \perp W^{\perp}$  ist  $(x_1, ..., x_n)$  eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

#### Folgerung 5.10

Jeder unitäre Endomorphismus eines unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

#### Folgerung 5.11

Zu jeder  $A \in U_n$  gibt es  $S \in U_n$  so, dass

$$S^*AS = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

mit  $|\lambda_i| = 1$  für i = 1, ..., n.

Beweis. Da A unitär ist, ist  $f_A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$  unitär, nach Theorem 5.9 existiert also eine Orthonormalbasis B des  $\mathbb{C}^n$  aus Eigenvektoren von A. Die Transformationsmatrix  $S = T_{\mathcal{E}}^B$  hat als Spalten die Elemente von B und somit ist S nach Satz 5.8 unitär. Nach Satz 5.2 ist  $|\lambda| = 1$  für alle Eigenwerte von  $f_A$ .

#### ▶ Bemerkung 5.12

Dies (Theorem 5.9) gilt nicht im Fall  $K=\mathbb{R}$ . Man kann aber auch orthogonale Endomorphismen immer "fast diagonalisieren".

## 6. Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und  $f \in \operatorname{End}_K(V)$ .

#### Definition 6.1 (selbstadjungiert)

f ist selbstadjungiert, wenn

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x, y \in V$$

#### **Satz 6.2**

Sei B eine Orthonormalbasis von V. Genau dann ist f selbstadjungiert, wenn  $M_B(f)$  hermitesch ist

Beweis. Seien  $A = M_B(f), v = \Phi_B(x), w = \Phi_B(y)$ . Es ist

$$\langle f(v), w \rangle = (Ax)^t \overline{y} = x^t A^t \overline{y}$$
  
 $\langle v, f(w) \rangle = x^t \overline{Ay} = x^t \overline{A} \overline{y}$ 

Somit ist  $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$  genau dann, wenn  $A^t = \overline{A}$ , d.h.  $A = A^*$ , also A hermitesch.

#### Lemma 6.3

Ist f selbstadjungiert und  $\lambda$  ein Eigenwert von f, so ist  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Beweis. Ist  $0 \neq x \in V$  mit  $f(x) = \lambda x$ , so ist

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle f(x), x \rangle = \langle x, f(x) \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle$$

und mit  $\langle x, x \rangle \neq 0$  folgt  $\lambda = \overline{\lambda}$ , also  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

#### **Satz 6.4**

Ist f selbstadjungiert, so ist  $\chi_f \in \mathbb{R}[t]$  und  $\chi_f$  zerfällt über  $\mathbb{R}$  in Linearfaktoren.

Beweis. Sei B eine Orthonormalbasis von V. Nach Satz 6.2 ist  $A=M_B(f)\in \operatorname{Mat}_n(K)\subseteq \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$  hermitesch. Da  $\mathbb{C}$  algebraisch abgeschlossen ist, ist  $\chi_f(t)\prod_{i=1}^n(t-\lambda_i)$  mit  $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{C}$ . Nach Lemma 6.3 ist aber schon  $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ . Somit zerfällt  $\chi_f\chi_A\in\mathbb{R}[t]$  über  $\mathbb{R}$  in Linearfaktoren.

#### Theorem 6.5

Ist f selbstadjungiert, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.

Beweis. Induktion über  $n = \dim_K(V)$ .

n=0: klar

 $\overline{n-1} \to n$ : Nach Satz 6.4 hat f einen reellen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Wähle  $x_1 \in V$  mit  $f(x_1) = \lambda x_1$  und  $||x_1|| = 1$ . Sei  $W = K \cdot x_1$ . Für  $y \in W^{\perp}$  ist

$$\langle x_1, f(y) \rangle = \langle f(x_1), y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle = 0$$

und folglich ist  $W^{\perp}$  f-invariant. Nach Folgerung 4.11 ist  $V = W \oplus W^{\perp}$  und  $f|_{W^{\perp}}$  ist wieder selbstadjungiert. Nach Induktionshypothese hat  $W^{\perp}$  eine Orthonormalbasis  $(x_1,...,x_n)$  aus Eigenvektoren von  $f|_{W^{\perp}}$ . Da  $V = W \oplus W^{\perp}$  und  $W \perp W^{\perp}$  ist  $(x_1,...,x_n)$  eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

#### Folgerung 6.6

Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines euklidischen oder unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.

#### Folgerung 6.7

Ist

- f selbstadjungiert  $(K = \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{R})$
- f unitär  $(K = \mathbb{C})$

so ist

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$$

eine Zerlegung von V in paarweise orthogonale Untervektorräume.

Beweis. Nach Theorem 5.9 bzw. Theorem 6.5 existiert eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren. Insbesondere ist f diagonalisierbar, also

$$V = \bigoplus_{\lambda \in K} \operatorname{Eig}(f, \lambda)$$

Zu jedem  $\lambda$  gibt es eine Teilfamilie von B die eine Basis von Eig $(f, \lambda)$  bildet. Da B eine Orthonormalbasis ist, folgt, dass die Eigenräume paarweise orthogonal sind.

#### ▶ Bemerkung 6.8

Um eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren wie in Theorem 5.9 oder Theorem 6.5 zu bestimmen, kann man entweder wie im Induktionsbeweis vorgehen, oder man bestimmt zunächst Basen B von  $\text{Eig}(f, \lambda_i), i = 1, ..., n$  und orthonormalisiert diese mit Theorem 4.9 zu Basen B'. Nach Folgerung 6.7 ist  $\bigcup B'$  dann eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f.

## 7. Hauptachsentransformation

Sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und s eine hermitesche Sesquilinearform auf V.

#### **Satz 7.1**

Zu  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  hermitesch gibt es  $S \in U_n(K)$  so, dass

$$S^*AS = S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

mit  $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

Beweis. Da A hermitesch ist, ist  $f_A \in \operatorname{End}_K(K^n)$  selbstadjungiert, es gibt also nach Theorem 6.5 also eine Orthonormalbasis  $B = (x_1, ..., x_n)$  aus Eigenvektoren von  $f_A$ . Die Transformationsmatrix  $S = T_{\mathcal{E}}^B$  hat  $x_1, ..., x_n$  als Spalten und ist somit nach Satz 5.8 unitär. Nach Lemma 6.3 sind die Eigenvektoren  $\lambda_1, ..., \lambda_n$  reell.

#### Folgerung 7.2

Sei  $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$  hermitesch. Genau dann ist A positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Beweis. Nach Satz 7.1 existiert  $S \in U_n(K)$  mit

$$S^*AS = S^{-1}AS = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Die Eigenwerte von A sind die Eigenwerte von  $S^{-1}AS$  (LAAG 1.5.1.11), also  $\lambda_1, ..., \lambda_n$ . Sei  $T = \overline{S}$ . Genau dann ist A positiv definit, wenn  $T^t A \overline{T} = S^* A S = D$  positiv definit ist (Satz 2.8), also wenn  $\lambda_i > 0$ .

#### Theorem 7.3 (Hauptachsentransformation)

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform s auf V gibt es eine Orthonormalbasis B von V, für die

$$M_B(s) = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Beweis. Sei  $B_0=(x_1,...,x_n)$  eine Orthonormalbasis von V und  $A=M_{B_0}(s)$ . Da s hermitesch ist, ist auch A hermitesch (Satz 2.13). Nach Satz 7.1 gibt es deshalb  $S\in \mathrm{U}_n(K)$  mit  $S^*AS=D$  eine reelle Diagonalmatrix. Ist nun  $f\in\mathrm{End}_K(V)$  mit  $M_{B_0}(f)=\overline{S}$ , so ist auch  $B=(f(x_1),...,f(x_n))$  eine Basis von V mit  $T_{B_0}^B=\overline{S}$  unitär. Da  $M_{B_0}(f)$  unitär ist, ist auch f unitär. Nach Satz 5.2 ist  $f(B_0)=B$  somit auch eine Orthonormalbasis. Nach Satz 2.8 ist

$$M_B(s) = (T_{B_0}^B)^t \cdot M_{B_0}(s) \cdot \overline{T_{B_0}^B} = S^* A S = D$$

■ Beispiel 7.4  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7.4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, s = s_A, K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$ 

 $\Rightarrow q_s(x)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$ Wie verhält sich  $q_s:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ? Wie sehen die "Höhenlinien"

$$H_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid q_s(x) = c\} \quad c \in \mathbb{R}$$

aus?

$$\chi_A = (t-2)^2 - 1 = (t-1)(t-3) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1\\1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow M_B(s) = \operatorname{diag}(3, 1)$$

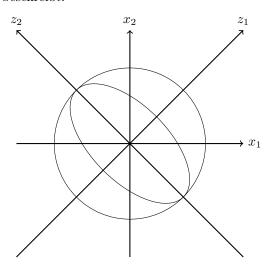
Im neuen Koordinatensystem  $z = \Phi_B^{-1}(x)$  ist dann

$$q_s(z) = 3z_1^2 + z_2^2$$

Mit  $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $a_2 = 1$  erhält man "Höhenlinien" der Form

$$\left(\frac{z_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{a_2}\right)^2 = c$$

was für c > 0 eine Ellipse beschreibt.



#### Folgerung 7.5

Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform s auf V gibt es eine Basis B von V, für die

$$M_B(s) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{\mathbb{r}_+(s)} & & \\ & -\mathbb{1}_{\mathbb{r}_-(s)} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $r_{+}(s) - r_{-}(s) \le n$ .

Beweis. Sei  $B_0=(x_1,...,x_n)$  eine Orthonormalbasis von V mit  $A=M_{B_0}(s)=\mathrm{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)$ . Setze

$$\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \lambda_i \neq 0\\ 1 & \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Sei  $x_i' = \mu_i \cdot x_i$  und  $B' = (x_1', ..., x_n')$ . Dann ist  $M_B(s) = S^t A \overline{S}$  mit  $S = T_{B_0}^{B'} = \operatorname{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$  also  $M_{B'}(s) = \operatorname{diag}(\lambda_1', ..., \lambda_n')$  mit  $\lambda_i' = \mu_i \cdot \lambda_i \cdot \overline{\mu_i} = \mu_i^2 \lambda_i \in \{0, 1, -1\}$ . Durch Permutation der Elemente von B' erhält man die gewünschte Basis B.

#### Definition 7.6 (Ausartungsraum)

Der Ausartungsraum von s ist

$$V_0 = \{ x \in V \mid s(x, y) = 0 \quad \forall y \in V \}$$

#### Lemma 7.7

 $V_0$  ist ein Untervektorraum von V.

Beweis. Klar aus Linearität im ersten Argument.

#### Lemma 7.8

Seien  $V_+$  und  $V_-$  Untervektorräume von V mit  $V=V_+\oplus V_-\oplus V_0$  und s positiv definit auf  $V_+$ , -s positiv definit auf  $V_-$ . Dann ist

$$\dim_K(V_+) = \max \dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, s \text{ positiv definit auf } V$$
 
$$\dim_K(V_-) = \max \dim_K(W) \mid \text{Untervektorraum von } V, -s \text{ positiv definit auf } V$$

Beweis. Beweis nur für  $V_+$ , analog für  $V_-$ .

< · klar

$$\geq$$
: Ist  $W \leq V$  Untervektorraum mit  $s(x,x) > 0 \quad \forall x \in W \setminus \{0\}$ , so ist  $W \cap (V_- \oplus V_+) = \{0\}$ . Ist  $x = y + z$  mit  $y \in V_-$ ,  $z \in V_0$ , so ist  $s(x,x) = s(y+z,y+z) = \underbrace{s(y,y)}_{\leq 0} + \underbrace{s(y,z) + s(z,y) + s(z,z)}_{=0} \leq 0 \Rightarrow \dim_K(W) \leq 0$ 

$$\dim_K(V) - \dim_K(V_-) - \dim_K(V_0) = \dim_K(V_+).$$

#### Theorem 7.9 (Trägheitssatz von Sylvester)

Für eine hermitesche Sesquilinearform s auf V sind die Zahlen  $r_+(s)$ ,  $r_-(s)$  aus Folgerung 7.5 eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei B eine Basis von V wie in Folgerung 7.5,  $B = (x_1, ..., x_n)$ . Definiere

$$V_{+} = \operatorname{span}_{K}(x_{1}, ..., x_{r_{+}(s)})$$

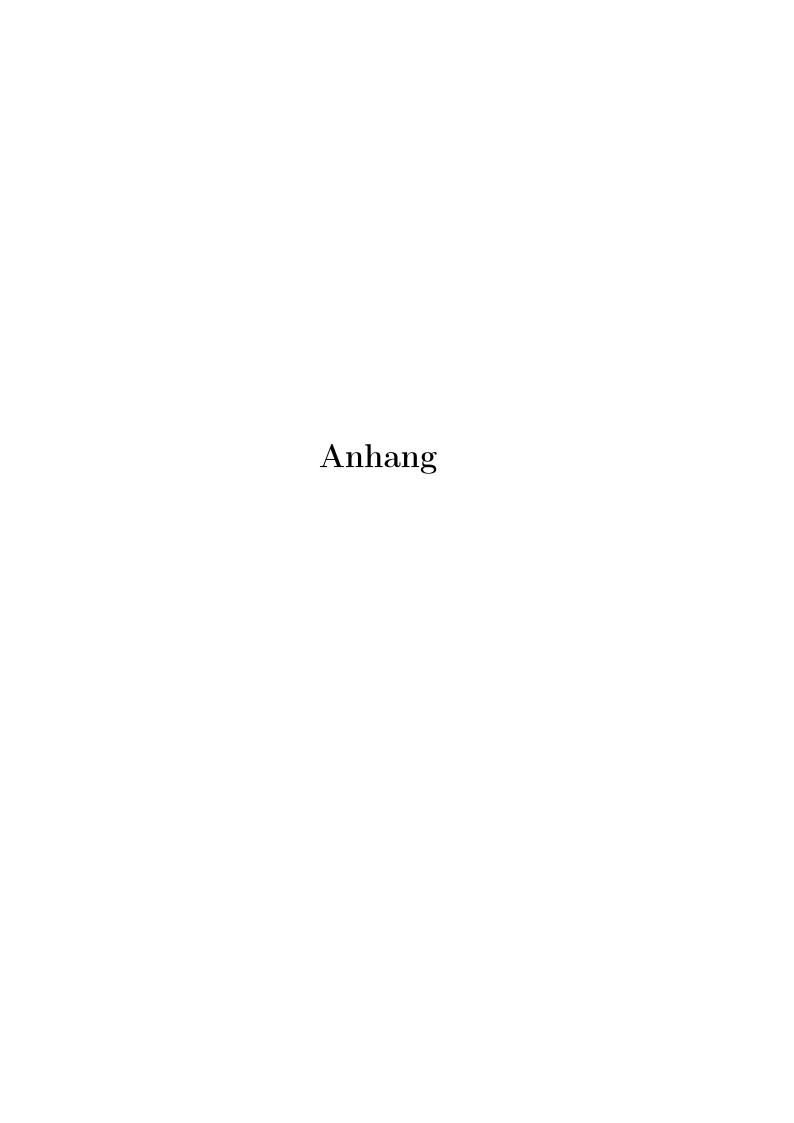
$$V_{-} = \operatorname{span}_{K}(x_{r_{+}(s)+1}, ..., x_{r_{+}(s)+r_{-}(s)})$$

$$V'_{0} = \operatorname{span}_{K}(x_{r_{+}(s)+r_{-}(s)+1}, ..., x_{n})$$

Dann ist s positiv definit auf  $V_+$ , -s positiv definit auf  $V_-$  und  $V=V_+\oplus V_-\oplus V_0'$ . Es gilt  $V_0'=V_0$ :  $\subseteq$ : klar  $\supseteq$ : Ist  $x=\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\in V_0$ , so ist  $0=s(x,x_i)=\lambda_i\cdot s(x_i,x_i)$  für i=1,...,n also  $\lambda_i=0$  für  $i=1,...,r_+(s)+r_-(s)$ , d.h.  $x\in V_0'$ . Nach Lemma 7.8 ist  $r_+(s)=\dim_K(V_+)$  nur von s abhängig, analog für  $r_-(s)$ .

# Kapitel III $Dualit\ddot{a}t$

# Kapitel IVModuln



# Anhang A: Listen

## A.1. Liste der Theoreme

Theorem 4.8:		10
Theorem 5.9:	Satz von Cayley-Hamiltion	12
Theorem 7.5:	JORDAN-Normalform	19
Theorem 4.9:	Gram-Schmidt-Verfahren	30
Theorem 5.9:		33
Theorem 6.5:		35
Theorem 7.3:	Hauptachsentransformation	37
Theorem 7.9:	Trägheitssatz von Sylvester	39

## A.2. Liste der benannten Sätze

Satz 6.4:	Lemma von Fitting	14
Satz 7.3:	Hauptraumzerlegung	18
Satz 1.4:	Ungleichung von Cauchy-Schwarz	22
Satz 2.8:	Transformationsformel	25
Satz 3.4:	Polarisierung	27

# Index

JORDAN-Invarianten, 19	nilpotent, 15
JORDAN-Matrix, 16	Nilpotenzklasse, 15
	normiert, 5
Absolutbetrag, 22	,
Ausartungsraum, 38	orthogonal, 29
ausgeartet, 25	orthogonale Gruppe, 33
DIII 6 04	orthogonale Komplement, 29
Bilinearform, 24	orthogonale Projektion, 30
charakteristische Polynom, 4	orthonormal, 29
charakteristische i olyhoni, 4	
definit, 27	quadratische Form, 27
diagonalisierbar, 6	
,	selbstadjungiert, 35
Eigenraum, 1	semidefinit, 27
Eigenvektor, 1	Sesquilinearform, 24
Eigenwert, 1	darstellende Matrix, 24
Endomorphismus	spezielle orthogonale Gruppe, 33
orthogonal, 32	spezielle unitäre Gruppe, 33
unitär, 32	Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}$ , 22
euklidische Norm in $\mathbb{C}$ , 23	Standardskalar produkt in $\mathbb{R}$ , 21
euklidische Norm in $\mathbb{R}, 21$	symmetrisch, 25
euklidischen, 27	
II 4 10	teilt, 6
Hauptraum, 18	trigonalisierbar, $9$
hermitesch, 25	
invariant, 9	unitäre Gruppe, 33
iiivai iaiio, J	$unit \ddot{a}ren, 27$
komplexe Konjugation, 22	
,	Vielfachheit, 6
Matrix	algebraische Vielfachheit, 8
orthogonal, 32	geometrische Vielfachheit, 8
unitär, 32	
Minimalpolynom, 11	zyklisch, 12