Maß und Integral WS2018/19

Dozent: Prof. Dr. Rene Schilling

19. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung **2**

II Sigma-Algebren **3**

Vorwort

Kapitel I

Einleitung

messen: Längen, Flächen, Volumina, $\mathbb{N} \to$ Zahlen, Wahrscheinlichkeiten, Energie $\to \int$ Wenn man ein Integral hat: $\int_{t_0}^{t} F(t)dt$, also wird das dt durch ein Maß $\mu(dt)$ ersetzt.
Wir messen Mengen:

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty] \text{ mit } \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$$

Dabei ist:

- X eine beliebige Grundmenge
- $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ die Potenzmenge von X
- $F \to \mu(F) \in [0, \infty]$

Familien von Mengen: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \ldots, \mathcal{R}$
Mengen: A, B, X
Maße: $\mu, \lambda, \nu, \rho, \delta$

■ **Beispiel 0.1 (Flächenmessung)**

$$\begin{aligned}\mu(F) = g \cdot h &= \mu(F_1) + \mu(F_2) + \mu(F_3) \\ &= g' \cdot h + h' \cdot g'' + h'' \cdot g'' \\ &= \ldots \stackrel{!}{=} gh\end{aligned}$$

F_1, F_2, F_3 disjunkt bzw. nicht überlappend!
$\mu(F) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2)$ mit $\mu(\Delta) = 0.5gh$
Allgemein für Dreiecke:
$\mu(\Delta) = 0.5gh \stackrel{!}{=} 0.5g'h'$ und das ganze ist wohldefiniert!

Dreiecke lassen allgemeine Flächenberechnung zu - Triangulierung!

$$F =_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n (\text{ disjunkte Vereinigung } \Delta_i \cap \Delta_k = \emptyset \quad k \neq i)$$

Kapitel II

Sigma-Algebren

Definition 0.2 (Sigma Algebra)
Eine σ-Algebra über einer beliebigen Grundmenge $X \neq \emptyset$ ist eine Familie von Mengen in $\mathcal{P}(X), \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$:

(Σ1) $X \in \mathcal{A}$

(Σ2) $A \in \mathcal{A} \to A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}$

(Σ3) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Anhang