1 IT-Handbuch für Fachinformatiker*innen, 11. Auflage

Sascha Kersken

Lösungen von Rechen- und Textaufgaben

Lösungen längerer Programmieraufgaben finden Sie nicht in diesem Dokument, sondern im Unterverzeichnis **IT-Handbuch-11-Prog-Loesungen**.

Kapitel 2, »Mathematische Grundlagen«

Frage aus dem Kasten »Was ist Algebra?«

Überlegen Sie einmal, warum ($\mathbb{N}$, +), ($\mathbb{Z}$, ·) und ($\mathbb{Q}$, ·) *keine* Gruppen sind.

Das Problem bei ($\mathbb{N}$, +) ist, dass die inversen Elemente keine natürlichen Zahlen sind. Die Zahl, die zu einer natürlichen Zahl addiert werden muss, um das neutrale Element 0 als Ergebnis zu erhalten, ist die zugehörige negative Zahl – etwa -2 zu 2 oder -100 zu 100.

Bei ($\mathbb{Z}$, ·) besteht unter anderem dasselbe Problem, denn das inverse Element, mit dem eine ganze Zahl z multipliziert werden muss, um das neutrale Element 1 zu erhalten, ist ihr Kehrwert z^{-1} oder $\frac{1}{z}$. Diese Kehrwerte sind keine ganzen Zahlen.

Hinzu kommt, dass es zur Zahl 0 kein inverses Element gibt, denn es gibt keine Zahl, weder innerhalb noch außerhalb der ganzen Zahlen, mit der 0 multipliziert werden kann, um 1 zu erhalten. Dies ist übrigens der einzige Grund, warum ($\mathbb{Q}$, ·) keine Gruppe ist, denn rational sind die Kehrwerte rationaler Zahlen durchaus.

Lösungen der nummerierten Aufgaben am Kapitelende

1. Probieren Sie die folgenden Rechengesetze der logischen Verknüpfungen Und und Oder für alle 0- und 1-Belegungen durch: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, Neutralitätsgesetz, De-Morgan-Theorem.

Gesetz	a	b	c	Werte eingesetzt
Kommutativgesetz $a \wedge b = b \wedge a$	0	0	-	$0 \wedge 0 = 0$ (trivial)
	1	0	-	$1 \wedge 0 = 0$ $0 \wedge 1 = 0$
	0	1	-	$0 \wedge 1 = 0$ $1 \wedge 0 = 0$
	1	1	-	$1 \wedge 1 = 1$ (trivial)

Kommutativgesetz $a \vee b = b \vee a$	0	0	-	$0 \vee 0 = 0$ (trivial)
	1	0	-	$1 \vee 0 = 1$ $0 \vee 1 = 1$
	0	1	-	$0 \vee 1 = 1$ $1 \vee 0 = 1$
	1	1	-	$1 \vee 1 = 1$ (trivial)
Assoziativgesetz $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	0	0	0	$(0 \wedge 0) \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$ $0 \wedge (0 \wedge 0) = 0 \wedge 0 = 0$
	1	0	0	$(1 \wedge 0) \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$ $1 \wedge (0 \wedge 0) = 1 \wedge 0 = 0$
	0	1	0	$(0 \wedge 1) \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0$ $0 \wedge (1 \wedge 0) = 0 \wedge 0 = 0$
	1	1	0	$(1 \wedge 1) \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0$ $1 \wedge (1 \wedge 0) = 1 \wedge 0 = 0$
	0	0	1	$(0 \wedge 0) \wedge 1 = 0 \wedge 1 = 0$ $0 \wedge (0 \wedge 1) = 0 \wedge 0 = 0$
	1	0	1	$(1 \wedge 0) \wedge 1 = 0 \wedge 1 = 0$ $1 \wedge (0 \wedge 1) = 1 \wedge 0 = 0$
	0	1	1	$(0 \wedge 1) \wedge 1 = 0 \wedge 1 = 0$ $0 \wedge (1 \wedge 1) = 0 \wedge 1 = 0$
	1	1	1	$(1 \wedge 1) \wedge 1 = 1 \wedge 1 = 1$ $1 \wedge (1 \wedge 1) = 1 \wedge 1 = 1$
Assoziativgesetz $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$	0	0	0	$(0 \vee 0) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0$ $0 \vee (0 \vee 0) = 0 \vee 0 = 0$
	1	0	0	$(1 \vee 0) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$ $1 \vee (0 \vee 0) = 1 \vee 0 = 1$
	0	1	0	$(0 \vee 1) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$ $0 \vee (1 \vee 0) = 0 \wedge 1 = 1$
	1	1	0	$(1 \vee 1) \vee 0 = 1 \vee 0 = 1$ $1 \vee (1 \vee 0) = 1 \vee 1 = 1$
	0	0	1	$(0 \vee 0) \vee 1 = 0 \vee 1 = 1$ $0 \vee (0 \vee 1) = 0 \vee 1 = 1$
	1	0	1	$(1 \vee 0) \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$ $1 \vee (0 \vee 1) = 1 \vee 1 = 1$

	0	1	1	$(0 \vee 1) \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$ $0 \vee (1 \vee 1) = 0 \vee 1 = 1$
	1	1	1	$(1 \vee 1) \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$ $1 \vee (1 \vee 1) = 1 \vee 1 = 1$
Distributivgesetz $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	0	0	0	$0 \wedge (0 \vee 0) = 0 \wedge 0 = 0$ $(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0)$ $= 0 \vee 0 = 0$
	1	0	0	$1 \wedge (0 \vee 0) = 1 \wedge 0 = 0$ $(1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0)$ $= 0 \vee 0 = 0$
	0	1	0	$0 \wedge (1 \vee 0) = 0 \wedge 1 = 0$ $(0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0)$ $= 0 \vee 0 = 0$
	1	1	0	$1 \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$ $(1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0)$ $= 1 \vee 0 = 1$
	0	0	1	$0 \wedge (0 \vee 1) = 0 \wedge 1 = 0$ $(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1)$ $= 0 \vee 0 = 0$
	1	0	1	$1 \wedge (0 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 0$ $(1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1)$ $= 1 \vee 1 = 1$
	0	1	1	$0 \wedge (1 \vee 1) = 0 \wedge 1 = 0$ $(0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1)$ $= 0 \vee 0 = 0$
	1	1	1	$1 \wedge (1 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$ $(1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1)$ $= 1 \vee 1 = 1$
Distributivgesetz $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	0	0	0	$0 \vee (0 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$ $(0 \vee 0) \wedge (0 \vee 0)$ $= 0 \wedge 0 = 0$
	1	0	0	$1 \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$ $(1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0)$ $= 1 \wedge 1 = 1$
	0	1	0	$0 \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$ $(0 \vee 1) \wedge (0 \vee 0)$ $= 1 \wedge 0 = 0$

	1	1	0	1 ∨ (1 ∧ 0) = 1 ∨ 0 = 1 (1 ∨ 1) ∧ (1 ∨ 0) = 1 ∧ 1 = 1
	0	0	1	0 ∨ (0 ∧ 1) = 0 ∨ 0 = 0 (0 ∨ 0) ∧ (0 ∨ 1) = 0 ∧ 1 = 0
	1	0	1	1 ∨ (0 ∧ 1) = 0 ∨ 0 = 0 (1 ∨ 0) ∧ (0 ∨ 1) = 0 ∧ 1 = 0
	0	1	1	0 ∨ (1 ∧ 1) = 0 ∨ 1 = 1 (0 ∨ 1) ∧ (0 ∨ 1) = 1 ∧ 1 = 1
	1	1	1	1 ∨ (0 ∧ 1) = 1 ∨ 1 = 1 (1 ∨ 1) ∧ (0 ∨ 1) = 1 ∧ 1 = 1
Neutralitätsgesetz	0	-	-	0
$a \wedge 1 = a$	1	-	-	1
Neutralitätsgesetz	0	-	-	0
$a \vee 0 = a$	1	-	-	1
De Morgansches Gesetz $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	0	0	-	¬(0 ∧ 0) = ¬0 = 1 ¬0 ∨ ¬0 = 1 ∨ 1 = 1
	1	0	-	¬(1 ∧ 0) = ¬0 = 1 ¬1 ∨ ¬0 = 0 ∨ 1 = 1
	0	1	-	¬(0 ∧ 1) = ¬0 = 1 ¬0 ∨ ¬1 = 1 ∨ 0 = 1
	1	1	-	¬(1 ∧ 1) = ¬1 = 0 ¬1 ∨ ¬1 = 0 ∨ 0 = 0
De Morgansches Gesetz $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$	0	0	-	¬(0 ∨ 0) = ¬0 = 1 ¬0 ∧ ¬0 = 1 ∧ 1 = 1
	1	0	-	¬(1 ∨ 0) = ¬1 = 0 ¬1 ∧ ¬0 = 0 ∧ 1 = 0
	0	1	-	¬(0 ∨ 1) = ¬1 = 0 ¬0 ∧ ¬1 = 1 ∧ 0 = 0
	1	1	-	¬(1 ∨ 1) = ¬1 = 0 ¬1 ∧ ¬1 = 0 ∧ 0 = 0

2. Gegeben sind die beiden Mengen $M = 1{,}3{,}5{,}7{,}9$ und $N = 4{,}5{,}6{,}7{,}8$. Berechnen Sie Vereinigungsmenge, Schnittmenge und Differenzmenge.

$$M \cup N = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$M \cap N = \{5, 7\}$$

$$M \setminus N = 1{,}3{,}9$$

3. Geben Sie je ein Beispiel für Folgen ganzer Zahlen mit folgenden Eigenschaften an: monoton steigend, streng monoton steigend, monoton fallend, streng monoton fallend, alternierend, beschränkt, konvergent. Geben Sie bei der beschränkten Folge die obere und untere Schranke sowie bei der konvergenten Folge den Grenzwert an.
   - Monoton steigend: $a_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3$ ...
   - Streng monoton steigend: $a_n = 2n = 2, 4, 6, 8, 10,$ ...
   - Monoton fallend: $a_n = \left\lceil \frac{-n}{2} \right\rceil = 0, -1, -1, -2, -2, -3, -3$ ...
   - Streng monoton fallend: $a_n = -3n = -3, -6, -9, -12$ ...
   - Alternierend: $a_n = (-n)^n = -1, 4, -27, 256, -3125$ ...
   - Beschränkt: $a_n = \cos(n \cdot 90°) = 0, -1, 0, 1, 0$ ...
     Untere Schranke $s = -1$, obere Schranke $S = 1$

   - Konvergent: $a_n = \frac{1}{1-e^{-n}} \approx 0{,}731;\ 0{,}881;\ 0{,}953;\ 0{,}982;\ 0{,}993$ ...

     Grenzwert: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{1-e^{n}} = 1$ (Sigmoidfunktion als Folge)

4. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$2x + 5y \ = \ 4$$

$$x - 3y \ = \ -9$$

   Lösungsweg mit dem Einsetzungsverfahren:

$$II. x - 3y = -9 \mid +3y$$

$$\Leftrightarrow x = 3y - 9$$

$$II \text{in} I.\, 2(3y - 9) + 5y = 4$$

$$\Leftrightarrow 6y - 18 + 5y = 4$$

$$\Leftrightarrow 11y - 18 = 4 \mid +18$$

$$\Leftrightarrow 11y = 22 \mid \div 11$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

$$y \text{ in } II.\, x - 3 \cdot 2 = -9$$

$$\Leftrightarrow x - 6 = -9 \mid +6$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Lösung: $x = -3, y = 2$

5. Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung mithilfe der pq-Formel:

$$2x^2 - 8x + 8 = 0$$

Lösungsweg:

$$2x^2 - 8x + 8 = 0 \mid \div 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$x_{1/2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 4}$$
$$= 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4} = 2 \pm 0 = 2$$

Die Gleichung hat die einzige Lösung $x = 2$.

6. Drei Würfel werden geworfen. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- Mindestens einer der Würfel zeigt eine 6.
  »Mindestens eine 6« ist das Gegenereignis zu »gar keine 6«. Letzteres hat eine sehr einfach zu berechnende Wahrscheinlichkeit:

$$P(\bar{6}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787$$

  Diese Wahrscheinlichkeit wird von 1 abgezogen:

$$P(6 \geq 1) = \bar{P}(\bar{6}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}4213$$

- Keiner der Würfel zeigt eine 6.
  Diese Wahrscheinlichkeit wurde oben bereit berechnet, weil sie als Hilfsmittel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses diente.

- Alle drei Würfel zeigen eine gerade Zahl.

  Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Würfel eine gerade Zahl zeigt, ist $\frac{1}{2}$.

  Für drei Würfel entsprechend:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

7. In einer Klausur werden die folgenden Punktzahlen zwischen 1 und 100 erzielt:
   - 99
   - 93
   - 84 (zweimal)
   - 76
   - 64 (dreimal)
   - 58

   Als geordnete Liste: 58, 64, 64, 64, 76, 84, 84, 93, 99

   Ermitteln Sie die folgenden statistischen Werte:

   Minimum

$$x_{min} = 58$$

   Maximum

$$x_{max} = 99$$

   Spannweite

$$R = x_{max} - x_{min} = 99 - 58 = 41$$

   Arithmetisches Mittel

$$\bar{x}_{arithm} = \frac{58 + 64 + 64 + 64 + 76 + 84 + 84 + 93 + 99}{9} = \frac{686}{9} = 76,\bar{2}$$

   Median

$$\tilde{x} = 76$$

   Modus

$$\bar{x}_d = 64$$

   Varianz

$$Var(x) = 212{,}96\bar{4}$$

   Standardabweichung

$$\sigma \approx 14{,}58405$$

8. Gegeben sind diese Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Führen Sie die folgenden Berechnungen durch:
   - die Vektoraddition $\vec{v} + \vec{w}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- die Skalarmultiplikationen $-2 \cdot \vec{v}$ und $\frac{1}{2} \cdot \vec{w}$

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ und mit dessen Hilfe den Winkel zwischen den beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 = 6 - 5 + 12 = 13$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 25 + 36} = \sqrt{65} \approx 8{,}0623$$

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14} \approx 3{,}7417$$

$$\alpha = \arccos \frac{13}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{14}} \approx \arccos 0{,}43095 \approx 64{,}47°$$

- das Kreuzprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ und dessen Betrag als Flächeninhalt des durch die beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 6 \\ 18 - 4 \\ -2 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ -17 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{741} \approx 27{,}2213$$

9. Gegeben sind diese Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die folgenden Berechnungen durch:

- die Transpositionen A^T und B^T

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

- die Skalarmultiplikationen $-\frac{1}{3} \cdot A$ und $3 \cdot B$

$$-\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

- die Matrizenmultiplikationen $B \cdot A$ und $A^T \cdot B$ nach dem Falk-Schema

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 & -19 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 8 & 9 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

- die Determinante von B

$$2 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 = -6 - 5 = -11$$

- die inverse Matrix B^{-1}

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,\overline{27} & 0,\overline{45} \\ 0,\overline{09} & -0,\overline{18} \end{pmatrix}$$

- Lösung der Gleichungssysteme $2x + 5y = 7, x - 3y = -2$ und $2x + 5y = 6, x - 3y = 14$ mithilfe von B^{-1}

$$2x + 5y = 7, y - 3y = -2 \iff x = 1, y = 1$$

$$2x + 5y = 6, x - 3y = 14 \iff x = 8, y = -2$$

10. Gegeben ist diese Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Invertieren Sie die Matrix mithilfe des Gauß-Verfahrens.

Zunächst wird die Matrix mit danebenstehender Einheitsmatrix geschrieben.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun werden dieselben elementaren Zeilenumformungen auf die ursprüngliche Matrix und auf die Einheitsmatrix angewendet.

Zeile 1 mit $1/2$ multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das (-1)-fache von Zeile 1 zu Zeile 2 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-5}{2} & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeile 1 zu Zeile 3 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-5}{2} & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeile 2 mit $^2/_7$ multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{7} & | & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das $(-\,^1/_2)$-fache von Zeile 2 zu Zeile 1 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} & | & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das $(-\,^5/_2)$-fache von Zeile 2 zu Zeile 3 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} & | & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30}{7} & | & \frac{6}{7} & -\frac{5}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Zeile 3 mit $^7/_{30}$ multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} & | & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

Das ($-{}^{6}/_{7}$)-fache von Zeile 3 zu Zeile 1 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

Das ${}^{5}/_{7}$-fache von Zeile 3 zu Zeile 2 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

Links wurde die Treppennormalform erreicht, die der Einheitsmatrix entspricht. Also ist die ursprüngliche Matrix invertierbar, und die inverse Matrix steht rechts:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} \end{pmatrix}$$

- Lösen Sie – ebenfalls mit dem Gauß-Verfahren – das auf dieser Matrix basierende Gleichungssystem:

$$\begin{gathered} 2x + y + z = 2 \\ x + 4y - 2z = -2 \\ -x + 2y + 2z = 6 \end{gathered}$$

Das Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 4 & -2 & | & -2 \\ -1 & 2 & 2 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Zeile 1 mit ${}^{1}/_{2}$ multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 \\ 1 & 4 & -2 & | & -2 \\ -1 & 2 & 2 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Das (-1)-fache von Zeile 1 zu Zeile 2 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-5}{2} & | & -3 \\ -1 & 2 & 2 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Zeile 1 zu Zeile 3 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{-5}{2} & | & -3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & | & 7 \end{pmatrix}$$

Zeile 2 mit ${}^{2}/{}_{7}$ multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{7} & | & -\frac{6}{7} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & | & 7 \end{pmatrix}$$

Das $(-{}^{1}/{}_{2})$-fache von Zeile 2 zu Zeile 1 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} & | & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & -\frac{6}{7} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & | & 7 \end{pmatrix}$$

Das $(-{}^{5}/{}_{2})$-fache von Zeile 2 zu Zeile 3 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} & | & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & \frac{30}{7} & | & \frac{64}{7} \end{pmatrix}$$

Zeile 3 mit ${}^{7}\!/_{30}$ multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{7} & | & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{32}{15} \end{pmatrix}$$

Das $(-{}^{6}\!/_{7})$-fache von Zeile 3 zu Zeile 1 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & | & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{32}{15} \end{pmatrix}$$

Das ${}^{5}\!/_{7}$-fache von Zeile 3 zu Zeile 2 addieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{32}{15} \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist offenbar eindeutig lösbar, und die Lösung lässt sich direkt aus der erweiterten Koeffizientenmatrix in Treppennormalform ablesen:

$$x = -\frac{2}{5}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{32}{15}$$

11. Berechnen Sie die Nullstellen, die erste Ableitung und die möglichen Extrempunkte der folgenden Funktion:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 8$$

Nullstellen mit der pq-Formel:

$$-2x^2 - 4x + 8 = 0 \mid \div (-2)$$
$$\Leftrightarrow \; x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = -\left(\frac{2}{2}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 4} = -1 \pm \sqrt{5} \approx 1{,}23607;\; -3{,}23607$$

Ableitung:

$$f'(x) = -4x - 4$$

Extrempunkte (Nullstellen der Ableitung):

$$-4x - 4 = 0 \mid +4$$
$$-4x = 4 \mid \div (-4)$$
$$x = -1$$

12. Rechnen Sie die Dezimalzahl 4.321 in die duale, oktale und hexadezimale Schreibweise um.

    Dual: 1000011100001, oktal: 10341, hexadezimal: 10E1
13. Rechnen Sie die Dualzahl 11001100 in die dezimale, oktale und hexadezimale Schreibweise um.

    Dezimal: 204, oktal: 314, hexadezimal: CC
14. Rechnen Sie die Oktalzahl 4567 in die dezimale, duale und hexadezimale Schreibweise um.

    Dezimal: 2423, dual: 100101110111, hexadezimal: 977
15. Rechnen Sie die Hexadezimalzahl DCEF in die dezimale, duale und oktale Schreibweise um.

    Dezimal: 56559, dual: 1101110011101111, oktal: 156357

Kapitel 3, »Elektronische und technische Grundlagen«

1. Konzipieren Sie eine Turingmaschine mit den Wörtern 0, 1, X und leer. Der Schreib-/Lesekopf soll so lange nach links bewegt werden, bis das angetroffene Zeichen eine leere Stelle ist. Danach wird er nach rechts bewegt. Wird eine 0 gefunden, wird sie durch ein X ersetzt. Wenn eine 1 gefunden wird, dann wird der Kopf nach rechts bewegt, bis eine leere Stelle angetroffen wird. Nach dieser leeren Stelle wird nach rechts gewandert, solange Einser gefunden werden, und dahinter (leere Stelle) wird eine weitere 1 eingetragen. Danach geht es wieder nach links bis zum ersten Auftreten eines X. So geht es weiter hin und her, bis für jede 1 aus der ursprünglichen Sequenz eine 1 in der neuen Sequenz notiert wurde und die fortlaufende neue Liste von Einsern die Gesamtzahl der Einser in der ursprünglichen anzeigt.

   Diese schöne Lösung, gleich lauffertig in einem Turingmaschinen-Simulator, hat ein freundlicher Leser eingesandt:

   https://morphett.info/turing/turing.html

   Sollte der Link nicht mehr funktionieren, hier der Quelltext der Lösung, der in den meisten Simulatoren (eventuell mit etwas Syntaxanpassung) funktionieren dürfte:

```
; This example program reproduces the number of 1's in a string.
; IT-Handbuch für Fachinformatiker, Aufl. 9, Aufgabe 2.5.1.5.
; Input: a string of 0's and 1's, eg '00101010'
```

```
; long version:
; starts in state (1) with account for every possible word of {0,1,x,_}
; (an additional short version omits impossible words and uses wildcards '*',
see below)


; State 1: find beginning of input
1 0 0 l 1
1 1 1 l 1
1 x x l 1
1 _ _ r 2     ; Empty input or found beginning -> start counting 1's (2)

; State 2: look for 1's to count
2 0 x r 2     ; fount 0 -> x-out
2 1 x r 3     ; found 1 -> x-out and -> state (3) to count
2 x x r 2
2 _ _ * 6     ; space found -> no more 1's -> state (6) to halt

; State 3: go right until empty space (end of string)
3 0 0 r 3
3 1 1 r 3
3 x x r 3
3 _ _ r 4     ; found empty space -> state (4) to note a 1

; State 4: set next 1 behind other 1's
4 0 0 r 4
4 1 1 r 4
4 x x r 4
4 _ 1 l 5     ; set (next) 1 and go back -> state (5)

; State 5: go back until x
5 0 0 l 5
5 1 1 l 5
5 x x r 2     ; found x, continue search for 1's -> state (2)
5 _ _ l 5

6 * * * halt-accept
```

```
; short version:
; this version omits impossible words and uses wildcards '*'
; to use it, set 'Advanced options', Initial state to '11'

; State 11: find beginning of input
11 _ _ r 12     ; Empty input or found beginning -> start counting 1's (12)
11 * * l 11

; State 12: look for 1's to count
12 0 x r 12     ; fount 0 -> x-out
12 1 x r 13     ; found 1 -> x-out and -> state (13) to count
12 _ _ * 16     ; space found -> no more 1's -> state (16) to halt

; State 13: go right until empty space (end of string)
13 _ _ r 14     ; found empty space -> state (14) to note a 1
13 * * r 13

; State 14: set next 1 (behind other 1's if any)
14 1 1 r 14     ; found 1, go right
14 _ 1 l 15     ; found empty space, set 1 and go back -> state (15)

; State 15: go back until x
15 x x r 12     ; found x, continue search for 1's -> state (12)
15 * * l 15     ; go further back

16 * * * halt-accept
```

2. Schreiben Sie die folgenden beiden Beispielprogramme für den virtuellen Prozessor:

   - Zu dem Wert in Register A, hier n genannt, soll in Register B die Fakultät berechnet werden $(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n)$.

```
MOV A, 7 ; Beispielwert 7
MOV B,1  ; Register B zurücksetzen/vorbereiten
LBL loop ; Sprungmarke für Hauptschleife
CMP A,1  ; A mit dem gewünschten Endwert 1 vergleichen
JBE end  ; Ende, wenn A<=1
MUL B,A  ; B mit dem aktuellen Wert von A multiplizieren
DEC A    ; A um 1 vermindern
JMP loop ; Unbedingter Sprung: Schleife
```

```
LBL end  ; Sprungmarke für Ende
HLT      ; Programm beenden
```

- Auf den Stack sollen nacheinander die Werte der Fibonacci-Folge (siehe voriges Kapitel) gelegt werden, bis der Stack voll ist.

```
MOV A, 1   ; 1 in Register A
MOV B, 1   ; 1 in Register B
LBL loop   ; Sprungziel für Schleife
PUSH A     ; Register A (akt. Wert) auf den Stack
JO end     ; Ende bei Stack Overflow
MOV $0, A  ; Register A ...
ADD $0, B  ; ... und B in Speicherzelle 0 addieren
MOV A, B   ; B nach A verschieben
MOV B, $0  ; Speicherstelle 0 nach B verschieben
JMP loop   ; Schleife
LBL end
HLT
```

Kapitel 7, »Grundlagen der Programmierung«

1. Was enthält die Python-Liste `list1` nach Ausführung der folgenden Anweisungen (versuchen Sie, es vorherzusagen, bevor Sie es ausprobieren)?

   ```
   list1 = [1, 2, 3, 4]
   list1[2:2] = [5, 6, 7]
   ```

   Ergebnis: `[1, 2, 5, 6, 7, 3, 4]`

2. Schreiben Sie in Python eine List-Comprehension, die aus den Zahlen von 1 bis 100 alle diejenigen auswählt, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind.

   ```
   [n for n in range(1, 101) if n % 2 != 0 and n % 3 != 0]
   ```

3. Was gibt das folgende Python-Skript aus?

   ```
   class A:
       def output(self):
           print("Ich bin A.")

   class B(A):
       def output(self):
           print("Ich bin B.")

   class C(B, A):
       pass
   ```

```
c = C()
c.output()
```

Lösung: Die Ausgabe lautet »Ich bin B.« Bei der Mehrfachvererbung wird eine Methode stets von der zuerst genannten Klasse geerbt, auch wenn später genannte über gleichnamige Methoden verfügen.

4. Welche der folgenden Strings sind gültige Java-Bezeichner?
   - `variable1` – ja
   - `1variable` – nein
   - `_variable` – ja
   - `Binärzahl` – ja
5. Wie prüfen Sie in Java, ob die `int`-Variable `a` größer als 0 und kleiner als 10 ist?
   - `a > 0 && a < 10`
6. Welchen Wert hat die Variable `result` nach Ausführung der folgenden Java-Operationen?

```
int a = 7;
int b = 9;
int result = ++a + b++;
```

Lösung: 17 (`a` wird vor der Berechnung von `result` um 1 erhöht, `b` erst danach).

7. Der folgende Java-Codeausschnitt soll von 10 bis 1 herunterzählen. Tut er dies? Falls nicht, was tut er stattdessen?

```
for (int i = 10; i > 1; i++) {
    System.out.printf("%d\n", i);
}
```

Nein, diese Schleife zählt von 10 bis 2 herunter. Die Bedingung lautet `i > 1` statt (korrekterweise) `i >=` 1.

8. Das folgende kleine Java-Programm soll die beiden Zahlen 23 und 42 addieren und das Ergebnis ausgeben. Tut es dies? Falls nicht, was gibt es stattdessen aus?

```
public class CalculationTest {
    public static void main(String[] args) {
        int a = 23;
        int b = 42;
        System.out.println("23 + 42 = " + a + b);
    }
}
```

Die Ausgabe lautet: »23 + 42 = 2342«, denn das `+` dient hier der String-Verkettung und nicht der numerischen Addition.

9. Wie prüfen Sie in Java, ob die beiden Strings `str1` und `str2` denselben Inhalt haben?

- `str1.equals(str2)`

10. Finden Sie alle Fehler in der folgenden Java-Klassendefinition:

```
public class TestClass() {                  // 1
    private int value = "Hallo Welt";       // 2

    // Konstruktor
    public void TestClass(int _value) {     // 3
        value = _value;
    }

    public int getValue() {
        return _value;                       // 4
    }

    public int setValue(int _value) {       // 5
        value = _value;
    }
}
```

1: Hinter dem Klassennamen dürfen keine Argumentklammern stehen

2: Das Attribut `value` hat den Datentyp `int` und darf daher nicht mit einem String initialisiert werden.

3: Der Konstruktor besitzt keine explizite Datentypangabe (dem Compiler ist dies egal, da eine gewöhnliche Methode durchaus heißen darf wie die Klasse).

4: Das Attribut, das hier zurückgegeben werden soll, heißt `value` und nicht `_value`.

11. Welche der folgenden (in Java gültigen) Ausdrücke sind auch in Python erlaubt?

- `a & b`
- `b -= 3`