

# Домашнее задание по курсу "Математическая логика - 2"

## 1 Язык и аксиоматика теории множеств

### § 1.3

**Условие** Доказать, что  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ .

**Доказательство** По определению

$$x = y \Rightarrow \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y).$$

Пусть  $\emptyset = \{\emptyset\}$ ,  $\Rightarrow \forall t(t \in \{\emptyset\} \Leftrightarrow t \in \emptyset)$  Противоречие для  $t = \emptyset$

### § 1.4

**Условие** Доказать, что  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$ .

**Доказательство** По определению

$$x = y \Rightarrow \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y).$$

Пусть  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$ ,  $\Rightarrow \forall t(t \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow t \in \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\})$  Противоречие для  $t = 1$

### § 1.6

**Условие** Доказать, что  $\exists$  лишь одно множество, не имеющее элементов.

**Доказательство** Пусть  $\exists$  два множества  $X$  и  $X_0$ , не имеющих элементов и такие, что  $X \neq X_0$

$$\Rightarrow \exists t(t \in X \Rightarrow t \notin X_0)$$

Противоречие так как  $\nexists t \in X$ .

### § 1.8

**Условие** Доказать, что множество всех корней многочлена  $\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x)$  есть объединение множеств корней  $\beta(x)$  и  $\gamma(x)$ .

**Доказательство** Чтобы доказать, что множество корней = объединения множеств, надо доказать, что любой корень является либо корнем  $\beta(x)$  либо  $\gamma(x)$  и что других корней не существует.

1) Пусть существует корень  $x_0$ , который не является корнем ни  $\beta(x)$ , ни корнем  $\gamma(x)$

$\Rightarrow \alpha(x_0) = 0, \beta(x_0) \neq 0, \gamma(x_0) \neq 0$ . Противоречие 2) Пусть  $x_0$  корень  $\beta(x)$  или  $\gamma(x)$ , тогда  $\beta(x_0) = 0$  или  $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0$

### § 1.9

**Условие** Доказать, что пересечение множеств действительных корней многочленов  $\alpha(x)\beta(x)$  с действительными коэффициентами совпадает с множеством всех действительных корней  $\gamma(x) = \alpha^2(x) + \beta^2(x)$ .

**Доказательство** Чтобы доказать, что множество корней = пересечение множеств, надо доказать, что любой корень из пересечения является корнем и что других корней не существует.

1) Если  $x_0$  корень  $\alpha(x)\beta(x) \Rightarrow \gamma(x_0) = 0$  2) Пусть существует корень  $\gamma(x)x_0$ , который не является корнем ни  $\alpha(x)$ , ни корнем  $\beta(x)$

Тогда  $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha^2(x_0) + \beta^2(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0 \& \beta(x_0) = 0$

## § 1.11 (а, г, ж)

**Условие** Доказать следующие тождества

а)  $A \cup A = A \cap A = A$

**Доказательство** Распишем по определению

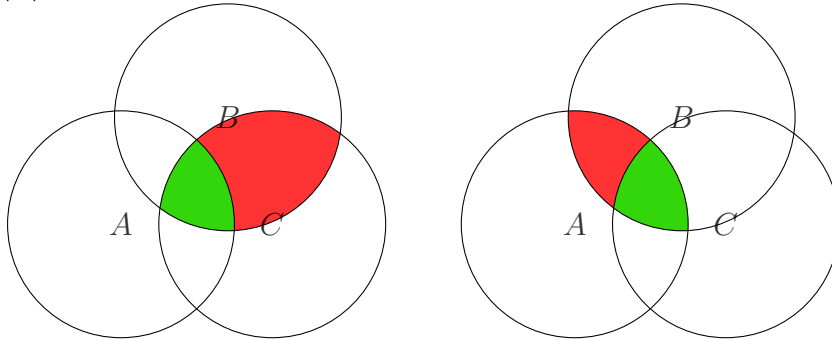
$$\{Z \mid (Z \in A \vee Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A \wedge Z \in A\} = A$$

Упростим

$$\{Z \mid (Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = \{Z \in A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = A = A$$

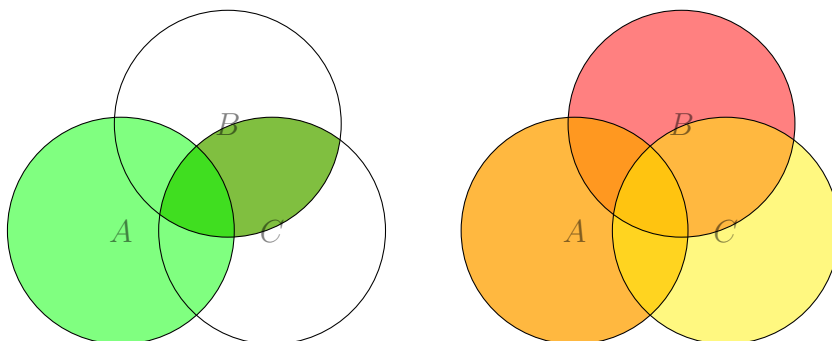
**Условие** г)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

**Доказательство**



**Условие** ж)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**Доказательство**



## § 1.12(в, д, ж, п, т)

## § 1.13(а, д, к)

## § 1.14(в, к)

## § 1.15

**Условие** Доказать, что

$$а) (A_1 \cup \dots \cup A_n) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

**Доказательство** Докажем по индукции:

**База индукции**

$$n=1) (A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \text{ (очевидно)}$$

$$n=2) (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \text{ (Доказывалось на уроке)}$$

**Предположение индукции**

Пусть верно для  $\forall n < k$

**Шаг индукции**

Докажем для  $k+1$

$$(A_1 \cup \dots \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

$$\text{пусть } A_0 = A_1 \cup \dots \cup A_k, B_0 = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cup A_{k+1}) \triangle (B_0 \cup B_{k+1}) \subseteq$$

$$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup \dots \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

$$\text{Условие } б) (A_1 \cap \dots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

**Доказательство** Докажем по индукции:

**База индукции**

$$n=1) (A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \text{ (очевидно)}$$

$$n=2) (A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \text{ (Доказывалось на уроке)}$$

**Предположение индукции**

Пусть верно для  $\forall n < k$

**Шаг индукции**

Докажем для  $k+1$

$$(A_1 \cap \dots \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

$$\text{пусть } A_0 = A_1 \cap \dots \cap A_k, B_0 = B_1 \cap \dots \cap B_k$$

$$(A_1 \cap \dots \cap A_{k+1}) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cap A_{k+1}) \triangle (B_0 \cap B_{k+1}) \subseteq$$

$$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$\Rightarrow (A_1 \cap \dots \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

## § 1.17

**Условие** Определить операции  $\cup, \cap, \setminus$ , через:

$$а) \triangle, \cap$$

**Доказательство**

$$\cap = \cap$$

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$$

$$A \setminus B = (A \triangle B) \cap A$$

**Условие** б)  $\triangle, \cup$

**Доказательство**

$$\cup = \cup$$

$$A \cap B = ((A \cup B) \triangle A) \triangle B$$

$$A \setminus B = (A \cup B) \triangle B$$

**Условие** и)  $\setminus, \triangle$

**Доказательство**

$$A \cup B = (A \setminus B) \triangle$$

$$A \cap B = (B \setminus (A \setminus B))$$

$$\setminus = \setminus$$

## § 1.18

**Условие** Доказать, что нельзя определить:

а)  $\setminus$  через  $\cap$  и  $\cup$

б)  $\cup$  через  $\cap$  и  $\setminus$

## § 1.20

**Условие** Найти все подмножества множеств:  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{x\}, \{1, 2\}$ .

**Ответ**

$\emptyset$  - нет

$$\{\emptyset\} - \emptyset$$

$$\{x\} - \emptyset, \{x\}$$

$$\{1, 2\} - \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

## § 2.1

**Условие** Доказать, что существуют A, B и C такие, что:

а)  $A \times B \neq B \times A$

**Решение**

$A = \{1\}$  и  $B = \{2\}$ , так как, пользуясь определением упорядоченной пары:  $(\{1\}, \{2\}) = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \neq \{\{2\}, \{2, 1\}\} = (\{2\}, \{1\})$ .

**Условие** б)  $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

**Решение**

## § 2.3

**Условие** Доказать, что если  $A, B, C$  и  $D$  не пусты, то:

а)  $A \subseteq B$  и  $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$  б)  $A = B$  и  $C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$

**Решение**

Очевидно доказывается методом от противного.

## § 2.6(а, б, г)

**Условие** Доказать, что:

а)  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

б)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

г)  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

**Решение**

## 2 Отношения и функции

### § 2.8(а, в)

**Условие** Найти  $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \cdot R, R \cdot R^{-1}, R^{-1} \cdot R$  для следующих отношений:

(а)  $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \text{ и } x \text{ делит } y\}$ ;

(в)  $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D} \text{ и } x + y \leq 0\}$ .

**Решение** (а) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого  $x$  существует  $y = x$ , для которого  $x$  делит  $y \Rightarrow \delta_R = Pr_1(R) = \mathbb{N}$ .

Аналогично это отношение - всюдузначное.  $\Rightarrow \rho_R = Pr_2(R) = \mathbb{N}$ .

$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \text{ и } y \text{ делит } x\}$ .

$$R \cdot R = \{t \in \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R \& v \in R \& pr_1(t) = pr_1(u) \& pr_2(u) = pr_1(v) \& pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \& \exists u \exists v (u_2 : u_1 \& v_2 : v_1 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y)\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \& y : x\} \Rightarrow R \cdot R = R.$$

(так как  $v_2 = y : v_1 = u_2 : u_1 = x$ , значит  $x$  должен делить  $y$ )

$$R \cdot R^{-1} = \{t \in \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R \& v \in R^{-1} \& pr_1(t) = pr_1(u) \& pr_2(u) = pr_1(v) \& pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \& \exists u \exists v (u_2 : u_1 \& v_1 : v_2 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y)\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow R \cdot R^{-1} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

(так как  $u_2 = v_1 : v_2 = y$  и  $u_2 : u_1 = x$ , то можно взять в качестве  $u_2$  число, делящееся и на  $x$ , и на  $y$ , а сами  $x$  и  $y$  связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную

пару  $(x, y)$ )

$$\begin{aligned} R^{-1} \cdot R &\Rightarrow \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R^{-1} \& v \in R \& pr_1(t) = \\ &= pr_1(u) \& pr_2(u) = pr_1(v) \& pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \& \exists u \exists v (u_1 : u_2 \& v_2 : v_1 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y)\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow R^{-1} \cdot R = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{aligned}$$

(так как  $x = u_1 : u_2 = v_1$  и  $v_2 = y : v_1$ , то можно взять в качестве  $v_1$  число 1, на которое делится и  $x$ , и  $y$ , а сами  $x$  и  $y$  связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную пару  $(x, y)$ )

(в) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого  $x$  существует  $y = -x$ , для которого  $x + y \leq 0 \Rightarrow \delta_R = Pr_1(R) = \mathbb{D}$ .

Аналогично это отношение - всюдузначное.  $\Rightarrow \rho_R = Pr_2(R) = \mathbb{D}$ .

$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\} = R$ , так как отношение - симметричное.

$$\begin{aligned} R \cdot R &\Rightarrow \{t \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R \& v \in R \& pr_1(t) = \\ &= pr_1(u) \& pr_2(u) = pr_1(v) \& pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D} \& \exists u \exists v (u_1 + u_2 \leq 0 \& v_1 + v_2 \leq 0 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y)\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D}\} \Rightarrow R \cdot R = \mathbb{D} \times \mathbb{D}. \end{aligned}$$

(условие на  $x, y$ :  $x + v_1 \leq 0$  и  $v_1 + y \leq 0$ , но всегда можно взять  $v_1$  таким, что оба условия будут выполняться)

В силу симметричности отношения  $R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = R \cdot R = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ .

## § 2.9(а, в)

**Условие** Доказать, что:

(а)  $\delta_R = \emptyset \Leftrightarrow R = \emptyset \Leftrightarrow \rho_R = \emptyset$ ;

(в)  $\delta_{R_1 \cdot R_2} = R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$ .

**Решение** (а)  $\delta_R = \emptyset \Leftrightarrow \forall u \in \bigcup \bigcup R \forall v (u, v) \notin R \Leftrightarrow R = \emptyset$   
 $\rho_R = \emptyset \Leftrightarrow \forall v \in \bigcup \bigcup R \forall u (u, v) \notin R \Leftrightarrow R = \emptyset$

(в)  $x \in \delta_{R_1 \cdot R_2} \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R_1 \cdot R_2 \Leftrightarrow \exists y : \exists u \exists v (u \in R_1 \& v \in R_2 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y) \Leftrightarrow \exists y \exists z = u_2 = v_1 : (x = u_1, z) \in R_1 \& (z, y = v_2) \in R_2 \Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in R_1 \& z \in \delta_{R_2} \Leftrightarrow \exists z : (z, x) \in R_1^{-1} \& z \in \rho_{R_1} \& z \in \delta_{R_2} \Leftrightarrow x \in R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$ .

## § 2.12 (б, г)

**Условие** Доказать, что для любых бинарных отношений:

б)  $(R^{-1})^{-1} = R$ ;

г)  $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ .

**Решение**

## § 2.13

**Условие** Для каких бинарных отношений  $R$  справедливо  $R^{-1} = -R$ ?

**Решение** Пусть  $R \subseteq A \times B$ .

- 1) Предположим, что  $x \in A \cap B$ . Тогда  $(x, x) \in R \Leftrightarrow (x, x) \in R^{-1}$ . Если  $R^{-1} = -R$ , то получим, что  $(x, x)$  лежит и в отношении, и в его дополнении, чего быть не может.
- 2) Значит,  $A \cap B = \emptyset$ . По определению  $R \subseteq A \times B$ ,  $R^{-1} \subseteq B \times A$ . Значит,  $-R = R^{-1} = \emptyset$ . Получим, что  $R = \emptyset$  и  $R = A \times B$ , что возможно только при  $A = B = \emptyset$ .

## § 2.14

**Условие** Пусть  $A$  и  $B$  - конечные множества, состоящие из  $m$  и  $n$  элементов соответственно.

- а) Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств  $A$  и  $B$ ?
- б) Сколько имеется функций из  $A$  в  $B$ ?
- в) Сколько имеется 1-1-функций из  $A$  в  $B$ ?
- г) При каких  $m$  и  $n$  существует взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ ?

**Решение** а) Столько, сколько подмножеств у множества упорядоченных пар элементов  $A$  и  $B$ . Всего пар  $mn$ , бинарных отношений  $2^{mn}$ .

б) Функция по определению - это всюдуопределенное прямое однозначное бинарное отношение, то есть каждый элемент множества  $A$  (из  $m$  штук) входит в отношение ровно с одним элементом множества  $B$  (из  $n$  штук). Тогда всего функций  $\underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_m = n^m$ .

в) Функция  $f$  называется 1-1-функцией, если  $\forall x_1, x_2, y: y = f(x_1), y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . Если  $n < m$ , то не существует ни одной такой функции, так как не для всех элементов множества  $A$  найдется элемент  $B$ , входящий с ним в отношение. Если  $n \geq m$ , то число таких функций равно  $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$ , так как выбор каждой новой "пары" для элемента множества  $A$  уменьшает на 1 количество возможных пар для прочих элементов множества  $A$ .

г) При  $m = n$ , тогда и только тогда каждый элемент множества  $A$  сможет входить в отношение ровно с одним элементом множества  $B$  и наоборот.

## § 2.22

**Условие** Доказать, что если  $f$  есть функция из  $A$  в  $B$  и  $g$  есть функция из  $B$  в  $C$ , то  $f \cdot g$  есть функция из  $A$  в  $C$ . (????Имелось в виду  $g \cdot f$  - функция из  $A$  в  $C$ ????)

**Решение**  $g \cdot f \Leftarrow \{t \in Pr_1(f) \times Pr_2(g) | \dots\}$ .  $Pr_1(f) = A$ ,  $Pr_2(g) = C \Rightarrow g \cdot f : A \rightarrow C$ .

## § 2.25(а-д)

**Условие** Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами:

- а)  $A \times B$  и  $B \times A$ ;
- б)  $A \times (B \times C)$  и  $(A \times B) \times C$ ;
- в)  $(A \times B)^C$  и  $A^C \times B^C$ ;
- г)  $(A^B)^C$  и  $A^{B \times C}$ ;
- д)  $A^{B \cup C}$  и  $A^B \times A^C$ , если  $B \cap C = \emptyset$ .

**Решение** а) Предъявим это соответствие:  $\forall x \in A, y \in B : (x, y) \in A \times B \leftrightarrow (y, x) \in B \times A$ , то есть любой упорядоченной паре из первого векторного произведения соответствует ровно одна из второго и наоборот.

б)

### § 2.31(а)

**Условие** Доказать, что для любой функции  $f$ :

а)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

**Решение**

$$\begin{aligned} f[A \cup B] &= \{y \in Pr_2(f) | \exists x(x \in A \cup B \ \& \ (x, y) \in f)\} \\ \exists x(x \in A \cup B \ \& \ (x, y) \in f) &\sim \exists x(x \in A \vee x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \sim \\ &\sim \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \vee (x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \end{aligned}$$

Значит,  $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ .

### § 2.32(а)

**Условие** Доказать, что для любой функции  $f$ :

а)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ .

**Решение**

$$\begin{aligned} f[A \cap B] &= \{y \in Pr_2(f) | \exists x(x \in A \cap B \ \& \ (x, y) \in f)\} \\ \exists x(x \in A \cap B \ \& \ (x, y) \in f) &\sim \exists x(x \in A \ \& \ x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ (x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \end{aligned}$$

Значит,  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ .

### § 2.34

**Условие** Доказать, что  $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$  для любой функции  $f$ .

**Решение**

$$\begin{aligned} f[A] \setminus f[B] &= \{y \in Pr_2(f) | \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ \neg \exists x(x \in B \ \& \ (x, y) \in f)\}. \\ \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ \forall x \neg(x \in B \ \& \ (x, y) \in f) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ (x \notin B \vee (x, y) \notin f) &\sim \\ \sim \exists x(x \in A \ \& \ x \notin B \ \& \ (x, y) \in f). & \end{aligned}$$

Значит,  $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$ .

### § 2.35

**Условие** Доказать, что если в предыдущем примере  $f$  есть 1-1-функция, то выполняется равенство.

**Решение** Пусть  $f$  является 1-1-функцией, то есть  $\forall x_1, x_2, y : y = f(x_1), y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . Включение в одну сторону доказано в предыдущей задаче.

$y \in f(A \setminus B) \Rightarrow \exists! x \in A \setminus B : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A)$ . Так как для элемента  $y$  образа существует единственный прообраз, то  $\forall z \in B f(z) \neq y$  (потому что элемент  $x$  такой, что  $f(x) = y$ , лежит в  $A \setminus B$ , значит, не лежит в  $B$ ).  $\Rightarrow y \notin f(B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ .

Вместе с результатом предыдущей задачи получаем:

$$f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B).$$



## § 2.38(а, в, д)

**Условие** Доказать следующие тождества для любой функции  $f$ :

- а)  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ;
- в)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ;
- д)  $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ .

**Решение** а)

$$\begin{aligned} f^{-1} &\Leftarrow \{t \in Pr_2(f) \times Pr_1(f) | f(pr_2(t)) = pr_1(t)\}, \\ f^{-1}[A \cup B] &\Leftarrow \{v \in Pr_2(f^{-1}) | \exists p(p \in A \cup B) \ \& \ (p, v) \in f^{-1}\} \sim \\ &\sim \{v \in Pr_1(f) | \exists p(p \in A \cup B) \ \& \ f(v) = p\} \sim \\ &\sim \{v \in Pr_1(f) | \exists p(p \in A \vee p \in B) \ \& \ f(v) = p\} \sim \\ &\sim \{v \in Pr_1(f) | \exists p(p \in A) \vee \exists p(p \in B) : f(v) = p\} \Rightarrow f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

**Условие** в)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ;

**Решение**

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \cap B] &\Leftarrow \{v \in Pr_2(f^{-1}) | \exists p(p \in A \cap B) \ \& \ (p, v) \in f^{-1}\} \\ &\Leftarrow \exists p(p \in A \cap B) \ \& \ ((p, v) \in f^{-1}) \sim \exists p(p \in A \ \& \ p \in B) \ \& \ ((p, v) \in f^{-1}) \sim \\ &\sim \exists p(p \in A) \ \& \ ((p, v) \in f^{-1}) \ \& \ (p \in B) \Rightarrow f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \end{aligned}$$

## 3 Мощности множеств

### § 4.1

**Условие** Доказать, что:

$A \sim A$  (рефлексивность)

Если  $A \sim B$ , то  $B \sim A$  (симметричность)

Если  $A \sim B$  и  $B \sim C$ , то  $A \sim C$  (транзитивность)

**Решение**

### § 4.5

**Условие** Доказать, что:

а) Всякое подмножество конечного множества конечно

б) Объединение конечного числа конечных множеств конечно

в) Прямое произведение конечного числа конечных множеств конечно

**Доказательство**

Доказательство от противного

### § 4.8

**Условие** Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно некоторому своему подмножеству.

### Доказательство

В условии имеется в виду, подмножество не равно множеству, так иначе есть контрпример.

$\{1\}$  эквивалентен  $\{1\}$

Докажем лемму о том, что счетное множество  $A \sim A \setminus B$ , где  $B$  конечное множество.

$A$  - счетное, значит все его элементы можно пронумеровать.

Возьмем множество  $A \setminus B$ , его мы тоже можем пронумеровать, сдвигая каждый раз нумерацию.

$\Rightarrow$ ) Если множество бесконечно, то в нем есть счетное подмножество  $\Rightarrow \exists$  подмножество нашего счетного множества, которое ему  $\sim$

$\Leftarrow$ ) Если множество  $\sim$  своему подмножеству, то оно не может быть конечным, доказывается от противного  $\Rightarrow$  оно бесконечно.

### § 4.10 а

**Условие** Пусть область определения счетна, доказать, что область значений этой функции конечна или счетна.

### Доказательство

Докажем, что она не более чем счетна.

Так область определения счетна, а каждой точке из области определения можно поставить в соответствие значение функции в этой точке  $\Rightarrow$  область значений не более чем счетна  $\Rightarrow$  область значений этой функции конечна или счетна.

### § 4.13

**Условие** Доказать, что:

а) Если  $A$  бесконечно и  $B$  - конечное или счетное множество, то  $A \cup B \sim A$

**Доказательство** Рассмотрим 2 варианта  $A$  счетно и  $A$  не счетно.

Докажем от противного, что в каждом из этих случаев  $A \cup B$  счетно и  $A \cup B$  не счетно соответственно.

**Условие** б) Если  $A$  бесконечно и несчетно,  $B$  конечное или счетное множество, то  $A \setminus B \sim A$

**Доказательство** Пусть это не так  $\Rightarrow A \setminus B$  - счетно или конечно. Доказываем от противного, что это невозможно.

### § 4.15

**Условие** Доказать, что:

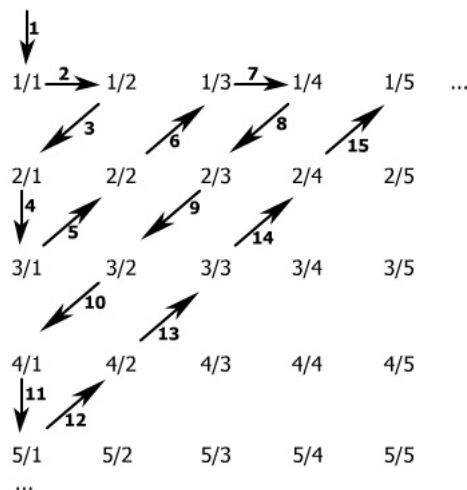
а) Множество целых чисел счетно

**Доказательство** пронумеруем

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...

**Условие** б) Множество рациональных чисел счетно

**Доказательство** пронумеруем



**Условие** в) Множество рациональных чисел сегмента  $[a, b]$  счетно при  $a < b$

**Доказательство** Множество рациональных чисел сегмента  $[a, b]$  - бесконечно. (тк множество плотно)

$\Rightarrow$  оно не менее чем счетно. Но по доказанному выше оно не более, чем счетно  $\Rightarrow$  счетно.

**Условие** г) Множество пар  $\langle x, y \rangle$ , где  $x$  и  $y$  - рациональные числа, счетно

**Доказательство** Множество рациональных чисел счетно.

Тогда выпишем все рациональные числа сеткой и докажем, что кол-во пар счетно аналогично доказательству 4.15 б

## § 4.16

**Условие** Доказать, что множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов некоторого счетного множества, есть счетное множество.

**Доказательство** Докажем, что множество последовательностей длины  $n$  счетно.

Используя 4.15 Г мы знаем, что счетно  $\cdot$  счетно = счетно

$\Rightarrow$  счетное <sup>$n$</sup>  = счетное.

Кол-во последовательностей конечной длины счетно  $\Rightarrow$  множество всех последовательностей конечной длины тоже счетно.

## § 4.18

**Условие** Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

**Доказательство** Многочлен от одной переменной с целыми коэффициентами представляет из себя конечную последовательность целых чисел  $\Rightarrow$  сводится к задаче 4.16

## § 4.19

**Условие** Доказать счетность множества алгебраических чисел, т. е. чисел, являющихся корнями многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами.

**Доказательство** Кол-во корней у многочлена степени  $n$  не более, чем  $n$ .

Тк кол-во многочленов с целыми коэффициентами от одной переменной счетно (по задаче 4.18), то и кол-во корней счетно.

Тк можем пронумеровать.

## § 4.20

**Условие** Доказать, что любое множество попарно непересекающихся открытых интервалов на действительной прямой не более чем счетно.

**Доказательство** Кол-во рациональных чисел счетно. А в каждом интервале есть хотя бы одно рациональное число  $\Rightarrow$  интервалов не более чем счетное кол-во.

## § 4.23

**Условие** Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции на действительной оси не более, чем счетно.

**Доказательство** У монотонной функции каждая точка разрыва соответствует интервалу на оси  $Y$

Эти интервалы попарно непересекающиеся  $\Rightarrow$  по задаче 4.20 множество не более, чем счетно.

## § 4.24

**Условие** Доказать, что:

а)  $(0, 1) \sim [0, 1] \sim (0, 1] \sim [0, 1)$

**Доказательство**

$(0, 1) \sim [0, 1]$

$1/2 \leftrightarrow 0$

$1/4 \leftrightarrow 1$

$1/k^n \leftrightarrow 4/k^n$

остальные числа переведем в себя же соответственно

$(0, 1] \sim [0, 1]$

$1 \leftrightarrow 1$

$1/2 \leftrightarrow 0$

$1/k^n \leftrightarrow 2/k^n$

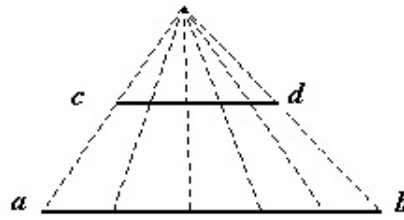
остальные числа переведем в себя же соответственно

$(0, 1] \sim [0, 1)$

$x \leftrightarrow 1/2 - |1/2 - x|$  (симметрично относительно  $1/2$ )

**Условие** б)  $[a, b] \sim [c, d]$ , где  $a < b, c < d$

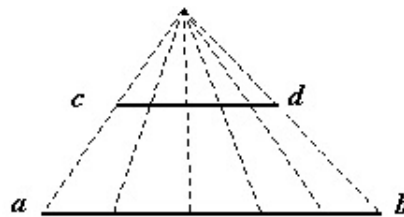
## Доказательство



**Условие** в)  $[a, b] \sim \mathbb{D}$

**Доказательство**

по пункту а)  $(0, 1) \sim [0, 1]$



## § 4.30

**Условие** Какова мощность иррациональных чисел?

**Доказательство** 1) Множество иррациональных чисел более чем счетно.

Доказательство.

Пусть оно счетно. Выпишем все числа по порядку.

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13}, \dots, \\ c_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23}, \dots, \\ c_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33}, \dots, \\ \dots \dots \dots \\ c_n = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3}, \dots, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

Построим теперь число  $C = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$

Так что  $b_i \neq 0, b_i \neq 9, b_i \neq a_{ii}$

Получаем, число, которого нет в таблице, но которое является иррациональным.

## § 4.31

**Условие** Доказать существование трансцендентных (неалгебраических) чисел.

**Доказательство** Докажем от противного.

Пусть их нет. Тогда  $\mathbb{R} \sim$  множество алгебраических чисел.

Но  $\mathbb{R}$  более чем счетно, а множество всех алгебраических чисел счетно  
 $\Rightarrow$  существуют неалгебраические числа.

### § 4.36

**Условие**

**Решение**

### § 4.38

**Условие**

**Решение**

### § 4.39

**Условие**

**Решение**

### § 4.42

**Условие**

**Решение**

## 4 Отношение эквивалентности

### § 3.6

**Условие** Построить бинарное отношение

а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное

**Решение**  $a$  - нормированное пространство

$$r \subseteq a * a : (x, y) \in r \leftrightarrow \|x - y\| \leq \delta$$

$$\text{реф. : } \forall x \|x - x\| = 0 \leq s$$

$$\text{симм. : } \|x - y\| = \|y - x\|$$

$$\text{Транзитивности нет } \|x - y\| \leq s \text{ и } \|y - z\| \leq s \Rightarrow \|x - z\| \leq s$$

**Условие** б) рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное

**Решение**  $r \subseteq \mathbb{R} * \mathbb{R} : (x, y) \in r \leftrightarrow x \leq y \leq x^2$   
 реф. :  $\forall x(x, x) \in r$   
 антисимметрично:  $x \leq y \leq x^2$  и  $y \leq x \leq y^2 \Rightarrow x = y$   
 не транз. :  $(2, 3) \in r, (3, 8) \in r, (2, 8) \notin r$

**Условие** в) рефлексивное, не симметричное, транзитивное

**Решение**  $\leq$  на  $\mathbb{R}$   
 $x \leq x$   
 $x \leq y, y \leq z \rightarrow x \leq z$   
 $x \leq y \nrightarrow y \leq x$

**Условие** г) антисимметричное, транзитивное, не рефлексивное

**Решение**  $a \in \mathbb{R}$   
 $r \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$   
 $r = \{(a; a)\}$

## § 3.7

**Условие**

**Решение**

## § 3.8

**Условие**

**Решение**

## § 3.9

**Условие**

**Решение**

## § 3.11

**Условие**

**Решение**

## § 3.12

**Условие**

**Решение**

**§ 3.17**

**Условие**

**Решение**

**§ 3.19**

**Условие**

**Решение**

**§ 3.20**

**Условие**



