

Домашнее задание по курсу "Математическая логика - 2"

1 Язык и аксиоматика теории множеств

§ 1.3

Условие Доказать, что $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Доказательство По определению

$$x = y \Rightarrow \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y).$$

Пусть $\emptyset = \{\emptyset\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{\emptyset\} \Leftrightarrow t \in \emptyset)$ Противоречие для $t = \emptyset$

§ 1.4

Условие Доказать, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.

Доказательство По определению

$$x = y \Rightarrow \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y).$$

Пусть $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow t \in \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\})$ Противоречие для $t = 1$

§ 1.6

Условие Доказать, что \exists лишь одно множество, не имеющее элементов.

Доказательство Пусть \exists два множества X и X_0 , не имеющих элементов и такие, что $X \neq X_0$

$$\Rightarrow \exists t(t \in X \Rightarrow t \notin X_0)$$

Противоречие так как $\nexists t \in X$.

§ 1.8

Условие Доказать, что множество всех корней многочлена $\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x)$ есть объединение множеств корней $\beta(x)$ и $\gamma(x)$.

Доказательство Чтобы доказать, что множество корней = объединения множеств, надо доказать, что любой корень является либо корнем $\beta(x)$ либо $\gamma(x)$ и что других корней не существует.

1) Пусть существует корень x_0 , который не является корнем ни $\beta(x)$, ни корнем $\gamma(x)$

$\Rightarrow \alpha(x_0) = 0, \beta(x_0) \neq 0, \gamma(x_0) \neq 0$. Противоречие 2) Пусть x_0 корень $\beta(x)$ или $\gamma(x)$, тогда $\beta(x_0) = 0$ или $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0$

§ 1.9

Условие Доказать, что пересечение множеств действительных корней многочленов $\alpha(x)\beta(x)$ с действительными коэффициентами совпадает с множеством всех действительных корней $\gamma(x) = \alpha^2(x) + \beta^2(x)$.

Доказательство Чтобы доказать, что множество корней = пересечение множеств, надо доказать, что любой корень из пересечения является корнем и что других корней не существует.

1) Если x_0 корень $\alpha(x)\beta(x) \Rightarrow \gamma(x_0) = 0$ 2) Пусть существует корень $\gamma(x)x_0$, который не является корнем ни $\alpha(x)$, ни корнем $\beta(x)$

Тогда $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha^2(x_0) + \beta^2(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0 \& \beta(x_0) = 0$

§ 1.11 (а, г, ж)

Условие Доказать следующие тождества

а) $A \cup A = A \cap A = A$

Доказательство Распишем по определению

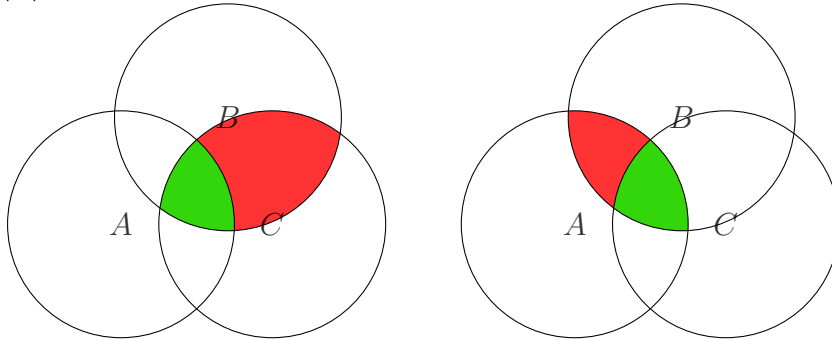
$$\{Z \mid (Z \in A \vee Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A \wedge Z \in A\} = A$$

Упростим

$$\{Z \mid (Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = \{Z \in A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = A = A$$

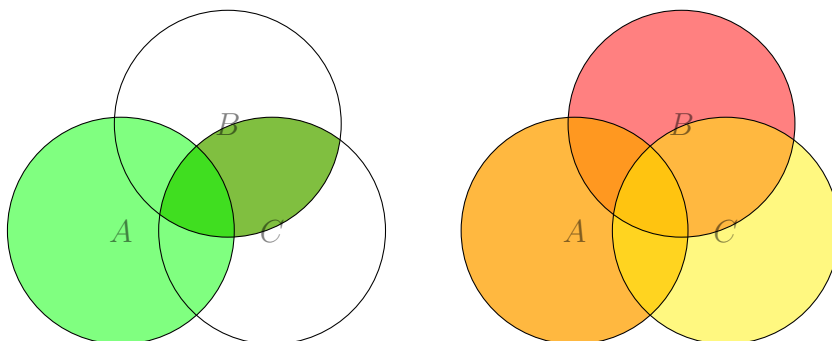
Условие г) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Доказательство



Условие ж) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Доказательство



§ 1.12(в, д, ж, п, т)

§ 1.13(а, д, к)

§ 1.14(в, к)

§ 1.15

Условие Доказать, что

$$а) (A_1 \cup \dots \cup A_n) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

Доказательство Докажем по индукции:

База индукции

$$n=1) (A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \text{ (очевидно)}$$

$$n=2) (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \text{ (Доказывалось на уроке)}$$

Предположение индукции

Пусть верно для $\forall n < k$

Шаг индукции

Докажем для $k+1$

$$(A_1 \cup \dots \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

$$\text{пусть } A_0 = A_1 \cup \dots \cup A_k, B_0 = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cup A_{k+1}) \triangle (B_0 \cup B_{k+1}) \subseteq$$

$$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup \dots \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

$$\text{Условие } б) (A_1 \cap \dots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

Доказательство Докажем по индукции:

База индукции

$$n=1) (A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \text{ (очевидно)}$$

$$n=2) (A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \text{ (Доказывалось на уроке)}$$

Предположение индукции

Пусть верно для $\forall n < k$

Шаг индукции

Докажем для $k+1$

$$(A_1 \cap \dots \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

$$\text{пусть } A_0 = A_1 \cap \dots \cap A_k, B_0 = B_1 \cap \dots \cap B_k$$

$$(A_1 \cap \dots \cap A_{k+1}) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cap A_{k+1}) \triangle (B_0 \cap B_{k+1}) \subseteq$$

$$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$\Rightarrow (A_1 \cap \dots \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

§ 1.17

Условие Определить операции \cup, \cap, \setminus , через:

$$а) \triangle, \cap$$

Доказательство

$$\cap = \cap$$

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$$

$$A \setminus B = (A \triangle B) \cap A$$

Условие б) \triangle, \cup

Доказательство

$$\cup = \cup$$

$$A \cap B = ((A \cup B) \triangle A) \triangle B$$

$$A \setminus B = (A \cup B) \triangle B$$

Условие и) \setminus, \triangle

Доказательство

$$A \cup B = (A \setminus B) \triangle$$

$$A \cap B = (B \setminus (A \setminus B))$$

$$\setminus = \setminus$$

§ 1.18

Условие Доказать, что нельзя определить:

а) \setminus через \cap и \cup

б) \cup через \cap и \setminus

§ 1.20

Условие Найти все подмножества множеств: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{x\}, \{1, 2\}$.

Ответ

\emptyset - нет

$$\{\emptyset\} - \emptyset$$

$$\{x\} - \emptyset, \{x\}$$

$$\{1, 2\} - \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

§ 2.1

Условие Доказать, что существуют A, B и C такие, что:

а) $A \times B \neq B \times A$

Решение

$A = \{1\}$ и $B = \{2\}$, так как, пользуясь определением упорядоченной пары: $(\{1\}, \{2\}) = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \neq \{\{2\}, \{2, 1\}\} = (\{2\}, \{1\})$.

Условие б) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

Решение

§ 2.3

Условие Доказать, что если A, B, C и D не пусты, то:

а) $A \subseteq B$ и $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$ б) $A = B$ и $C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$

Решение

Очевидно доказывается методом от противного.

§ 2.6(а, б, г)

Условие Доказать, что:

а) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

б) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

г) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Решение

2 Отношения и функции

§ 2.8(а, в)

Условие Найти $\delta_R, \rho_R, R^{-1}, R \cdot R, R \cdot R^{-1}, R^{-1} \cdot R$ для следующих отношений:

(а) $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \text{ и } x \text{ делит } y\}$;

(в) $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D} \text{ и } x + y \leq 0\}$.

Решение (а) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого x существует $y = x$, для которого x делит $y \Rightarrow \delta_R = Pr_1(R) = \mathbb{N}$.

Аналогично это отношение - всюдузначное. $\Rightarrow \rho_R = Pr_2(R) = \mathbb{N}$.

$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \text{ и } y \text{ делит } x\}$.

$$R \cdot R = \{t \in \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R \& v \in R \& pr_1(t) = pr_1(u) \& pr_2(u) = pr_1(v) \& pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \& \exists u \exists v (u_2 : u_1 \& v_2 : v_1 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y)\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \& y : x\} \Rightarrow R \cdot R = R.$$

(так как $v_2 = y : v_1 = u_2 : u_1 = x$, значит x должен делить y)

$$R \cdot R^{-1} = \{t \in \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R \& v \in R^{-1} \& pr_1(t) = pr_1(u) \& pr_2(u) = pr_1(v) \& pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \& \exists u \exists v (u_2 : u_1 \& v_1 : v_2 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y)\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow R \cdot R^{-1} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

(так как $u_2 = v_1 : v_2 = y$ и $u_2 : u_1 = x$, то можно взять в качестве u_2 число, делящееся и на x , и на y , а сами x и y связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную

пару (x, y))

$$\begin{aligned} R^{-1} \cdot R &\Rightarrow \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R^{-1} \& v \in R \& pr_1(t) = \\ &= pr_1(u) \& pr_2(u) = pr_1(v) \& pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \& \exists u \exists v (u_1 : u_2 \& v_2 : v_1 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y)\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow R^{-1} \cdot R = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{aligned}$$

(так как $x = u_1 : u_2 = v_1$ и $v_2 = y : v_1$, то можно взять в качестве v_1 число 1, на которое делится и x , и y , а сами x и y связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную пару (x, y))

(в) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого x существует $y = -x$, для которого $x + y \leq 0 \Rightarrow \delta_R = Pr_1(R) = \mathbb{D}$.

Аналогично это отношение - всюдузначное. $\Rightarrow \rho_R = Pr_2(R) = \mathbb{D}$.

$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\} = R$, так как отношение - симметричное.

$$\begin{aligned} R \cdot R &\Rightarrow \{t \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R \& v \in R \& pr_1(t) = \\ &= pr_1(u) \& pr_2(u) = pr_1(v) \& pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D} \& \exists u \exists v (u_1 + u_2 \leq 0 \& v_1 + v_2 \leq 0 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y)\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D}\} \Rightarrow R \cdot R = \mathbb{D} \times \mathbb{D}. \end{aligned}$$

(условие на x, y : $x + v_1 \leq 0$ и $v_1 + y \leq 0$, но всегда можно взять v_1 таким, что оба условия будут выполняться)

В силу симметричности отношения $R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = R \cdot R = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

§ 2.9(а, в)

Условие Доказать, что:

(а) $\delta_R = \emptyset \Leftrightarrow R = \emptyset \Leftrightarrow \rho_R = \emptyset$;

(в) $\delta_{R_1 \cdot R_2} = R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$.

Решение (а) $\delta_R = \emptyset \Leftrightarrow \forall u \in \bigcup \bigcup R \forall v (u, v) \notin R \Leftrightarrow R = \emptyset$
 $\rho_R = \emptyset \Leftrightarrow \forall v \in \bigcup \bigcup R \forall u (u, v) \notin R \Leftrightarrow R = \emptyset$

(в) $x \in \delta_{R_1 \cdot R_2} \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R_1 \cdot R_2 \Leftrightarrow \exists y : \exists u \exists v (u \in R_1 \& v \in R_2 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y) \Leftrightarrow \exists y \exists z = u_2 = v_1 : (x = u_1, z) \in R_1 \& (z, y = v_2) \in R_2 \Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in R_1 \& z \in \delta_{R_2} \Leftrightarrow \exists z : (z, x) \in R_1^{-1} \& z \in \rho_{R_1} \& z \in \delta_{R_2} \Leftrightarrow x \in R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$.

§ 2.12 (б, г)

Условие Доказать, что для любых бинарных отношений:

(б) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

Решение

§ 2.13

Условие Для каких бинарных отношений R справедливо $R^{-1} = -R$?

Решение Пусть $R \subseteq A \times B$.

(1) Предположим, что $x \in A \cap B$. Тогда $(x, x) \in R \Leftrightarrow (x, x) \in R^{-1}$. Если $R^{-1} = -R$, то получим, что (x, x) лежит и в отношении, и в его дополнении, чего быть не может.

(2) Значит, $A \cap B = \emptyset$. По определению $R \subseteq A \times B$, $R^{-1} \subseteq B \times A$. Значит, $-R = R^{-1} = \emptyset$. Получим, что $R = \emptyset$ и $R = A \times B$, что возможно только при $A = B = \emptyset$.

§ 2.14

Условие

Решение

§ 2.22

Условие

Решение

§ 2.25(а-д)

Условие

Решение

§ 2.31(а)

Условие

Решение

§ 2.32(а)

Условие

Решение

§ 2.34

Условие

Решение

§ 2.35

Условие

Решение

§ 2.38(а, в, д)

Условие

3 Мощности множеств

§ 4.1

Условие Доказать, что:

$A \sim A$ (рефлексивность)

Если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметричность)

Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность)

Решение

§ 4.5

Условие Доказать, что:

а) Всякое подмножество конечного множества конечно

б) Объединение конечного числа конечных множеств конечно

в) Прямое произведение конечного числа конечных множеств конечно

Доказательство

Доказательство от противного

§ 4.8

Условие Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно некоторому своему подмножеству.

Доказательство

В условии имеется введу, подмножество не равно множеству, тк иначе есть контрпример.

$\{1\}$ эквивалентен $\{1\}$

Докажем лемму о том, что счетное множество $A \sim A \setminus B$, где B конечное множество.

A - счетное, значит все его элементы можно пронумеровать.

Возьмем множество $A \setminus B$, его мы тоже можем пронумеровать, сдвигая каждый раз нумерацию.

\Rightarrow) Если множество бесконечно, то в нем есть счетное подмножество $\Rightarrow \exists$ подмножество нашего счетного множества, которое ему \sim

\Leftarrow) Если множество \sim свое подмножеству, то оно не может быть конечным, доказывается от противного \Rightarrow оно бесконечно.

§ 4.10 а

Условие Пусть область определения счетна, доказать, что область значений этой функции конечна или счетна.

Доказательство

Докажем, что она не более чем счетна.

Тк область определения счетна, а каждой точки из области определения можно поставить в соответствие значение функции в этой точке \Rightarrow область значений не более чем счетна \Rightarrow

область значений этой функции конечна или счетна.

§ 4.13

Условие Доказать, что:

а) Если A бесконечно и B - конечное или счетное множество, то $A \cup B \sim A$

Доказательство Рассмотрим 2 варианта A счетно и A не счетно.

Докажем от противного, что в каждом из этих случаях $A \cup B$ счетно и $A \cup B$ не счетно соответственно.

Условие б) Если A бесконечно и несчетно, B конечное или счетное множество, то $A \setminus B \sim A$

Доказательство Пусть это не так $\Rightarrow A \setminus B$ - счетно или конечно. Доказываем от противного, что это невозможно.

§ 4.15

Условие Доказать, что:

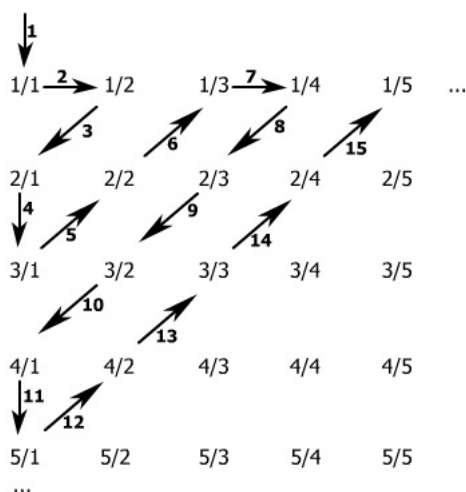
а) Множество целых чисел счетно

Доказательство пронумеруем

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...

Условие б) Множество рациональных чисел счетно

Доказательство пронумеруем



Условие в) Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ счетно при $a < b$

Доказательство Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ - бесконечно. (тк множество плотно)

\Rightarrow оно не менее чем счетно. Но по доказанному выше оно не более, чем счетно \Rightarrow счетно.

Условие г) Множество пар $\langle x, y \rangle$, где x и y - рациональные числа, счетно

Доказательство Множество рациональных чисел счетно.

Тогда выпишем все рациональные числа сеткой и докажем, что кол-во пар счетно аналогично доказательству 4.15 б

§ 4.16

Условие Доказать, что множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов некоторого счетного множества, есть счетное множество.

Доказательство Докажем, что множество последовательностей длины n счетно.

Используя 4.15 Г мы знаем, что $\text{счетно} * \text{счетно} = \text{счетно}$

$\Rightarrow \text{счетное}^n = \text{счетное}$.

Кол-во последовательностей конечной длины n счетно \Rightarrow множество всех последовательностей конечной длины тоже счетно.

§ 4.18

Условие Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

Доказательство Многочлен от одной переменной с целыми коэффициентами представляет из себя конечную последовательность целых чисел \Rightarrow сводится к задаче 4.16

§ 4.19

Условие Доказать счетность множества алгебраических чисел, т. е. чисел, являющихся корнями многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами.

Доказательство Кол-во корней у многочлена степени n не более, чем n .

Тк кол-во многочленов с целыми коэффициентами от одной переменной счетно (по задаче 4.18), то и кол-во корней счетно.

Тк можем пронумеровать.

§ 4.20

Условие Доказать, что любое множество попарно непересекающихся открытых интервалов на действительной прямой не более чем счетно.

Доказательство Кол-во рациональных чисел счетно. А в каждом интервале есть хотя бы одно рациональное число \Rightarrow интервалов не более чем счетное кол-во.

§ 4.23

Условие Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции на действительной оси не более, чем счетно.

Доказательство У монотонной функции каждая точка разрыва соответствует интервалу на оси Y

Эти интервалы попарно непересекающиеся \Rightarrow по задаче 4.20 множество не более, чем счетно.

§ 4.24

Условие Доказать, что:

а) $(0, 1) \sim [0, 1] \sim (0, 1] \sim [0, 1)$

Доказательство

$(0, 1) \sim [0, 1]$

$1/2 \leftrightarrow 0$

$1/4 \leftrightarrow 1$

$1/k^n \leftrightarrow 4/k^n$

остальные числа переведем в себя же соответственно

$(0, 1] \sim [0, 1]$

$1 \leftrightarrow 1$

$1/2 \leftrightarrow 0$

$1/k^n \leftrightarrow 2/k^n$

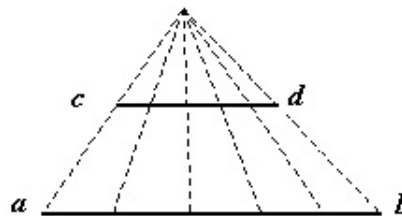
остальные числа переведем в себя же соответственно

$(0, 1] \sim [0, 1)$

$x \leftrightarrow 1/2 - |1/2 - x|$ (симметрично относительно $1/2$)

Условие б) $[a, b] \sim [c, d]$, где $a < b, c < d$

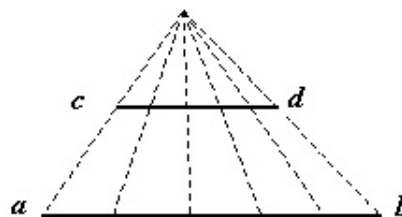
Доказательство



Условие в) $[a, b] \sim \mathbb{D}$

Доказательство

по пункту а) $(0, 1) \sim [0, 1]$



§ 4.30

Условие Какова мощность иррациональных чисел?

Доказательство 1) Множество иррациональных чисел более чем счетно.

Доказательство.

Пусть оно счетно. Выпившем все числа по порядку.

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 0, a_{11} \ a_{12} \ a_{13}, \dots, \\ c_2 = 0, a_{21} \ a_{22} \ a_{23}, \dots, \\ c_3 = 0, a_{31} \ a_{32} \ a_{33}, \dots, \\ \dots \dots \dots \\ c_n = 0, a_{n1} \ a_{n2} \ a_{n3}, \dots, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

Построим теперь число $C = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$

Так что $b_i \neq 0, b_i \neq 9, b_i \neq a_{ii}$

Получаем, число, которого нет в таблице, но которое является иррациональным.