

Домашнее задание по курсу "Математическая логика - 2"

1 Язык и аксиоматика теории множеств

§ 1.3

Условие Доказать, что $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Доказательство По определению

$$x = y \Rightarrow \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y).$$

Пусть $\emptyset = \{\emptyset\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{\emptyset\} \Leftrightarrow t \in \emptyset)$ Противоречие для $t = \emptyset$

§ 1.4

Условие Доказать, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.

Доказательство По определению

$$x = y \Rightarrow \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y).$$

Пусть $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow t \in \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\})$ Противоречие для $t = 1$

§ 1.6

Условие Доказать, что \exists лишь одно множество, не имеющее элементов.

Доказательство Пусть \exists два множества X и X_0 , не имеющих элементов и такие, что $X \neq X_0$

$$\Rightarrow \exists t(t \in X \Rightarrow t \notin X_0)$$

Противоречие так как $\nexists t \in X$.

§ 1.8

Условие Доказать, что множество всех корней многочлена $\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x)$ есть объединение множеств корней $\beta(x)$ и $\gamma(x)$.

Доказательство Чтобы доказать, что множество корней = объединения множеств, надо доказать, что любой корень является либо корнем $\beta(x)$ либо $\gamma(x)$ и что других корней не существует.

1) Пусть существует корень x_0 , который не является корнем ни $\beta(x)$, ни корнем $\gamma(x)$

$\Rightarrow \alpha(x_0) = 0, \beta(x_0) \neq 0, \gamma(x_0) \neq 0$. Противоречие 2) Пусть x_0 корень $\beta(x)$ или $\gamma(x)$, тогда $\beta(x_0) = 0$ или $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0$

§ 1.9

Условие Доказать, что пересечение множеств действительных корней многочленов $\alpha(x)\beta(x)$ с действительными коэффициентами совпадает с множеством всех действительных корней $\gamma(x) = \alpha^2(x) + \beta^2(x)$.

Доказательство Чтобы доказать, что множество корней = пересечение множеств, надо доказать, что любой корень из пересечения является корнем и что других корней не существует.

1) Если x_0 корень $\alpha(x)\beta(x) \Rightarrow \gamma(x_0) = 0$ 2) Пусть существует корень $\gamma(x)x_0$, который не является корнем ни $\alpha(x)$, ни корнем $\beta(x)$

Тогда $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha^2(x_0) + \beta^2(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0 \& \beta(x_0) = 0$

§ 1.11 (а, г, ж)

Условие Доказать следующие тождества

а) $A \cup A = A \cap A = A$

Доказательство Распишем по определению

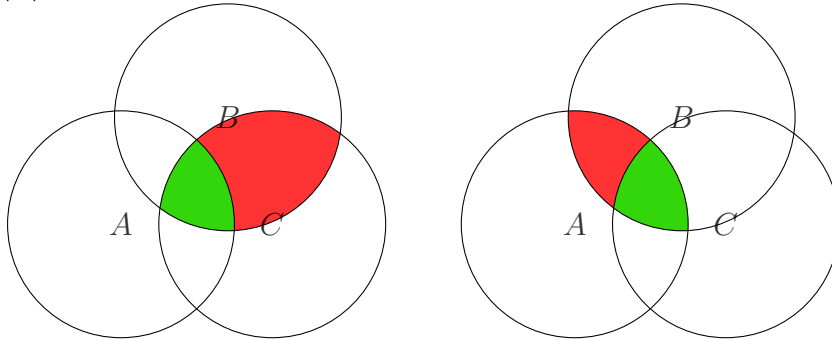
$$\{Z \mid (Z \in A \vee Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A \wedge Z \in A\} = A$$

Упростим

$$\{Z \mid (Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = \{Z \in A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = A = A$$

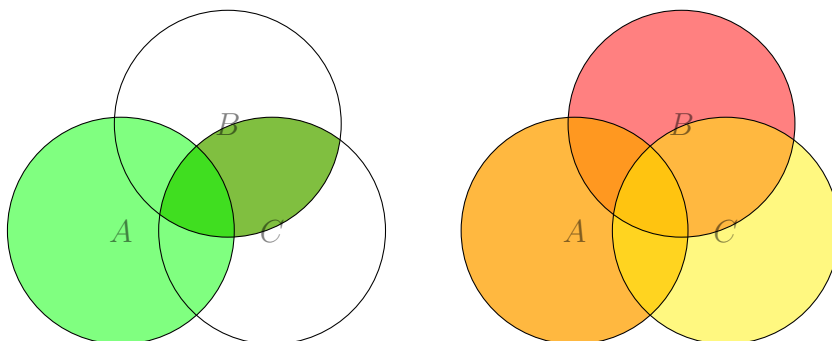
Условие г) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Доказательство



Условие ж) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Доказательство



§ 1.12(в, д, ж, п, т)

§ 1.13(а, д, к)

§ 1.14(в, к)

§ 1.15

Условие Доказать, что

$$а) (A_1 \cup \dots \cup A_n) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

Доказательство Докажем по индукции:

База индукции

$$n=1) (A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \text{ (очевидно)}$$

$$n=2) (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \text{ (Доказывалось на уроке)}$$

Предположение индукции

Пусть верно для $\forall n < k$

Шаг индукции

Докажем для $k+1$

$$(A_1 \cup \dots \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

$$\text{пусть } A_0 = A_1 \cup \dots \cup A_k, B_0 = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cup A_{k+1}) \triangle (B_0 \cup B_{k+1}) \subseteq$$

$$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup \dots \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

$$\text{Условие } б) (A_1 \cap \dots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

Доказательство Докажем по индукции:

База индукции

$$n=1) (A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \text{ (очевидно)}$$

$$n=2) (A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \text{ (Доказывалось на уроке)}$$

Предположение индукции

Пусть верно для $\forall n < k$

Шаг индукции

Докажем для $k+1$

$$(A_1 \cap \dots \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

$$\text{пусть } A_0 = A_1 \cap \dots \cap A_k, B_0 = B_1 \cap \dots \cap B_k$$

$$(A_1 \cap \dots \cap A_{k+1}) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cap A_{k+1}) \triangle (B_0 \cap B_{k+1}) \subseteq$$

$$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$\Rightarrow (A_1 \cap \dots \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$$

§ 1.17

Условие Определить операции \cup, \cap, \setminus , через:

$$а) \triangle, \cap$$

Доказательство

$$\cap = \cap$$

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$$

$$A \setminus B = (A \triangle B) \cap A$$

Условие б) \triangle, \cup

Доказательство

$$\cup = \cup$$

$$A \cap B = ((A \cup B) \triangle A) \triangle B$$

$$A \setminus B = (A \cup B) \triangle B$$

Условие и) \setminus, \triangle

Доказательство

$$A \cup B = (A \setminus B) \triangle$$

$$A \cap B = (B \setminus (A \setminus B))$$

$$\setminus = \setminus$$

§ 1.18

Условие Доказать, что нельзя определить:

а) \setminus через \cap и \cup

б) \cup через \cap и \setminus

§ 1.20

Условие Найти все подмножества множеств: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{x\}, \{1, 2\}$.

Ответ

\emptyset - нет

$\{\emptyset\} - \emptyset$

$\{x\} - \emptyset, \{x\}$

$\{1, 2\} - \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

§ 2.1

Условие Доказать, что существуют А, В и С такие, что:

а) $A \times B \neq B \times A$

Решение

$$A = 1 \text{ и } B = 2$$

Условие б) $A \times (B \times) \neq (A \times B) \times C$

Решение

§ 2.3

Условие Доказать, что если А, В, С и D не пусты, то:

а) $A \subseteq B \text{ и } C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$ б) $A = B \text{ и } C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$

Решение

Очевидно доказывается методом от противного.

§ 2.6(а, б, г)

Условие Доказать, что: а) $(A \cup B) \times C = (A \times B) \cup (B \times C)$ б) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
г) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Решение

2 Отношения и функции

§ 2.8(а, в)

Условие

Решение

§ 2.9(а, в)

Условие

Решение

§ 2.12 (б, г)

Условие

Решение

§ 2.13

Условие

Решение

§ 2.14

Условие

Решение

§ 2.22

Условие

Решение

§ 2.25(а-д)

Условие

Решение

§ 2.31(а)

Условие

Решение

§ 2.32(а)

Условие

Решение

§ 2.34

Условие

Решение

§ 2.35

Условие

Решение

§ 2.38(а, в, д)

Условие

Решение

3 Мощности множеств

§ 4.1

Условие Доказать, что:

$A \sim A$ (рефлексивность)

Если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметричность)

Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность)

Решение

§ 4.5

Условие Доказать, что:

- а) Всякое подмножество конечного множества конечно
- б) Объединение конечного числа конечных множеств конечно
- в) Прямое произведение конечного числа конечных множеств конечно

Доказательство

Доказательство от противного

§ 4.8

Условие Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно некоторому своему подмножеству.

Доказательство

В условии имеется введу, подмножество не равное множеству, тк иначе есть контрпример. $\{1\}$ эквивалентен $\{1\}$

Докажем лемму о том, что счетное множество $A \sim A \setminus B$, где B конечное множество.

A - счетное, значит все его элементы можно пронумеровать.

Возьмем множество $A \setminus B$, его мы тоже можем пронумеровать, сдвигая каждый раз нумерацию.

\Rightarrow) Если множество бесконечно, то в нем есть счетное подмножество $\Rightarrow \exists$ подмножество нашего счетного множества, которое ему \sim

\Leftarrow) Если множество \sim свое подмножеству, то оно не может быть конечным, доказывается от противного \Rightarrow оно бесконечно.

§ 4.10 а

Условие Пусть область определения счетна, доказать, что область значений этой функции конечна или счетна.

Доказательство

Докажем, что она не более чем счетна.

Тк область определения счетна, а каждой точки из области определения можно поставить в соответствие значение функции в этой точке \Rightarrow область значений не более чем счетна \Rightarrow область значений этой функции конечна или счетна.

§ 4.13

Условие Доказать, что:

- а) Если A бесконечно и B - конечное или счетное множество, то $A \cup B \sim A$

Доказательство Рассмотрим 2 варианта A счетно и A не счетно.

Докажем от противного, что в каждом из этих случаях $A \cup B$ счетно и $A \cup B$ не счетно соответственно.

Условие б) Если A бесконечно и несчетно, B конечное или счетное множество, то $A \setminus B \sim A$

Доказательство Пусть это не так $\Rightarrow A \setminus B$ - счетно или конечно. Доказываем от противного, что это невозможно.

§ 4.15

Условие Доказать, что:

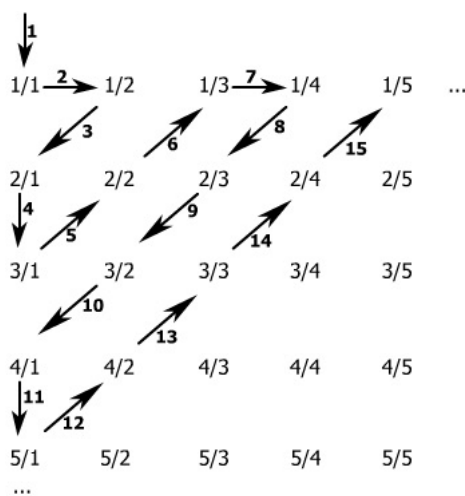
а) Множество целых чисел счетно

Доказательство пронумеруем

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...

Условие б) Множество рациональных чисел счетно

Доказательство пронумеруем



Условие в) Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ счетно при $a < b$

Доказательство Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ - бесконечно. (тк множество плотно)

\Rightarrow оно не менее чем счетно. Но по доказанному выше оно не более, чем счетно \Rightarrow счетно.

Условие г) Множество пар $\langle x, y \rangle$, где x и y - рациональные числа, счетно

Доказательство Множество рациональных чисел счетно.

Тогда выпишем все рациональные числа сеткой и докажем, что кол-во пар счетно аналогично доказательству 4.15 б)

§ 4.16

Условие Доказать, что множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов некоторого счетного множества, есть счетное множество.

Доказательство Докажем, что множество последовательностей длины n счетно.

Используя 4.15 Г мы знаем, что $\text{счетно} * \text{счетно} = \text{счетно}$

$\Rightarrow \text{счетное}^n = \text{счетное}$.

Кол-во последовательностей конечной длины n счетно \Rightarrow множество всех последовательностей конечной длины тоже счетно.

§ 4.18

Условие Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

Доказательство Многочлен от одной переменной с целыми коэффициентами представляет из себя конечную последовательность целых чисел \Rightarrow сводится к задаче 4.16