Домашнее задание по курсу "Математическая логика - 2"

1 Язык и аксиоматика теории множеств

§ 1.3

Условие Доказать, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Доказательство По определению
$x = y \rightleftharpoons \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y)$.
Пусть $\varnothing = \{\varnothing\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{\varnothing\} \Leftrightarrow t \in \varnothing)$ Противоречие для t = $\varnothing$

§ 1.4

Условие Доказать, что $\{\{1,2\},\{2,3\}\} \neq \{1,2,3\}$.

Доказательство По определению
$x = y \rightleftharpoons \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y)$.
Пусть $\{\{1,2\},\{2,3\}\} = \{1,2,3\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{1,2,3\} \Leftrightarrow t \in \{\{1,2\},\{2,3\}\})$ Противоречие для t = 1

§ 1.6

Условие Доказать, что $\exists$ лишь одно множество, не имеющее элементов.

Доказательство Пусть $\exists$ два множества X и X_0, не имеющих элементов и такие, что $X \neq X_0$
$\Rightarrow \exists t(t \in X \Rightarrow t \notin X_0)$
Противоречие так как $\nexists t \in$ X.

§ 1.8

Условие Доказать, что множество всех корней многочлена $\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x)$ есть объединение множеств корней $\beta(x)$ и $\gamma(x)$.

Доказательство Чтобы докаказать, что множество корней = объединения множеств, надо доказать, что любой корень является либо корнем $\beta(x)$ либо $\gamma(x)$ и что других корней не существует.
1) Пусть существует корень x_0, который не является корнем ни $\beta(x)$, ни корнем $\gamma(x)$
$\Rightarrow \alpha(x_0) = 0, \beta(x_0) \neq 0, \gamma(x_0) \neq 0$. Противоречие 2) Пусть x_0 корень $\beta(x)$ или $\gamma(x)$, тогда $\beta(x_0) = 0$ или $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0$

§ 1.9

Условие Доказать, что персечение множеств действительных корней многочленов $\alpha(x)\beta(x)$ с действительными коэффицентами совпадает с множеством всех действительных корней $\gamma(x) = \alpha^2(x) + \beta^2(x)$.

Доказательство Чтобы докаказать, что множество корней = персечение множеств, надо доказать, что любой корень из пересейчения является корнем и что других корней не существует.
1)Если x_0 корень $\alpha(x)\beta(x) \Rightarrow \gamma(x_0) = 0$ 2)Пусть существует корень $\gamma(x)x_0$, который не является корнем ни $\alpha(x)$, ни корнем $\beta(x)$
Тогда $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha^2(x_0) + \beta^2(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0 \& \beta(x_0) = 0$

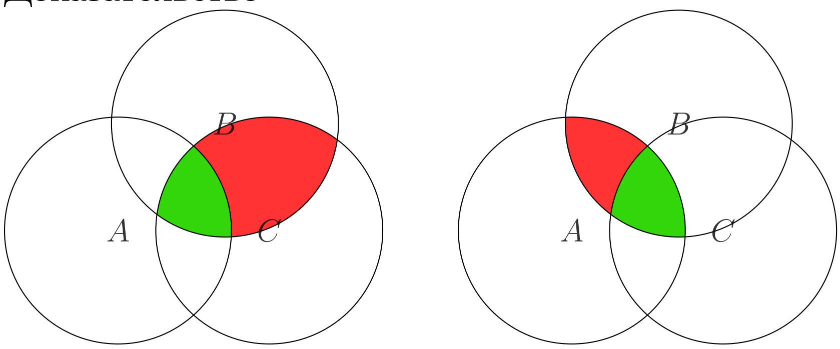
§ 1.11 (а, г, ж)

Условие Доказать следующие тождества
а)$A \cup A = A \cap A = A$

Доказательство Распишем по определению
$\{Z \mid (Z \in A \vee Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A \wedge Z \in A\} = A$
Упростим
$\{Z \mid (Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = \{Z \in A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = A = A$

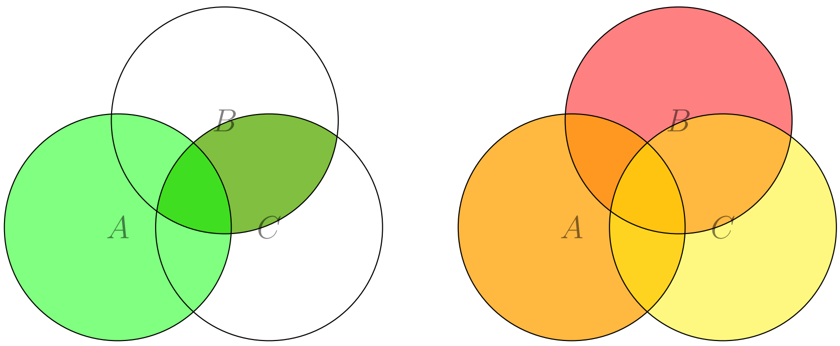
Условие г)$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Доказательство



Условие ж)$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Доказательство



§ 1.12(в, д, ж, п, т)

§ 1.13(а, д, к)

§ 1.14(в, к)

§ 1.15

Условие Доказать, что
а) $(A_1 \cup ... \cup A_n) \triangle (B_1 \cup ... \cup B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_n \triangle B_n)$

Доказательство Докажем по индукции:
База индукции
n=1) $(A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1)$ (очевидно)
n=2) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$(Доказывалось на уроке)
Преположение индукции
Пусть верно для $\forall n < k$
Шаг индукции
Докажем для k+1
$(A_1 \cup ... \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup ... \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$
пусть $A_0 = A_1 \cup ... \cup A_k B_0 = B_1 \cup ... \cup B_k$
$(A_1 \cup ... \cup A_{k+1}) \triangle (B_1 \cup ... \cup B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cup A_{k+1}) \triangle (B_0 \cup B_{k+1}) \subseteq$
$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$
$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k \triangle B_k)$
$\Rightarrow (A_1 \cup ... \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup ... \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$

Условие б) $(A_1 \cap ... \cap A_n) \triangle (B_1 \cap ... \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_n \triangle B_n)$

Доказательство Докажем по индукции:
База индукции
n=1) $(A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1)$ (очевидно)
n=2) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$(Доказывалось на уроке)
Преположение индукции
Пусть верно для $\forall n < k$
Шаг индукции
Докажем для k+1
$(A_1 \cap ... \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap ... \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$
пусть $A_0 = A_1 \cap ... \cap A_k B_0 = B_1 \cap ... \cap B_k$
$(A_1 \cap ... \cap A_{k+1}) \triangle (B_1 \cap ... \cap B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cap A_{k+1}) \triangle (B_0 \cap B_{k+1}) \subseteq$
$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$
$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k \triangle B_k)$
$\Rightarrow (A_1 \cap ... \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap ... \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$

§ 1.17

Условие Определить операции $\cup, \cap, \setminus$, через:
а)$\triangle, \cap$

Доказательство
$\cap = \cap$

$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$
$A \setminus B = (A \triangle B) \cap A$

Условие б)$\triangle, \cup$

Доказательство
$\cup = \cup$
$A \cap B = ((A \cup B) \triangle A) \triangle B$
$A \setminus B = (A \cup B) \triangle B$

Условие и)$\setminus, \triangle$

Доказательство
$A \cup B = (A \setminus B) \triangle$
$A \cap B = (B \setminus (A \setminus B))$
$\setminus = \setminus$

§ 1.18

Условие Доказать, что нельзя определить:
а) $\setminus$ через $\cap$ и $\cup$
б) $\cup$ через $\cap$ и $\setminus$

§ 1.20

Условие Найти все подмножества множеств:$\varnothing, \{\varnothing\}, \{x\}, \{1, 2\}$.

Ответ
$\varnothing$ - нет
$\{\varnothing\} - \varnothing$
$\{x\} - \varnothing, \{x\}$
$\{1, 2\} - \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

§ 2.1

Условие Доказать, что существуют A, B и C такие, что:
а) $A \times B \neq B \times A$

Решение
$A = \{1\}$ и $B = \{2\}$, так как, пользуясь определением упорядоченной пары: $(\{1\}, \{2\}) = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \neq \{\{2\}, \{2, 1\}\} = (\{2\}, \{1\})$.

Условие б) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

Решение

§ 2.3

Условие Доказать, что если A, B, C и D не пусты, то:
а) $A \subseteq B$ и $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$ б) $A = B$ и $C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$

Решение
Очеивдно доказывается методом от противного.

§ 2.6(а, б, г)

Условие Доказать, что:
а) $(A \cup B) \times C = (A \times B) \cup (B \times C)$
б) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
г) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Решение

2 Отношения и функции

§ 2.8(а, в)

Условие Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R \cdot R$, $R \cdot R^{-1}$, $R^{-1} \cdot R$ для следующих отношений:
(а) $R = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{N}$ и x делит $y\}$;
(в) $R = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{D}$ и $x + y \leqslant 0\}$.

Решение (а) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого x существует $y = x$, для которого x делит $y \Rightarrow \delta_R = Pr_1(R) = \mathbb{N}$.

Аналогично это отношение - всюдузначное. $\Rightarrow \rho_R = Pr_2(R) = \mathbb{N}$.

$R^{-1} = \{(x, y)|(y, x) \in R\} = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{N}$ и y делит $x\}$.

$$R \cdot R \risingdotseq \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2)(u \in R \;\&\; v \in R \;\&\; pr_1(t) = \\ = pr_1(u) \;\&\; pr_2(u) = pr_1(v) \;\&\; pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$

$$\sim \{(x, y)|x, y \in \mathbb{N} \;\&\; \exists u \exists v(u_2 \vdots u_1 \& \; v_2 \vdots v_1 \;\&\; x = u_1 \;\&\; u_2 = v_1 \;\&\; v_2 = y)\} \sim$$

$$\sim \{(x, y)|x, y \in \mathbb{N} \;\&\; y \vdots x\} \Rightarrow R \cdot R = R.$$

(так как $v_2 = y \vdots v_1 = u_2 \vdots u_1 = x$, значит x должен делить y)

$$R \cdot R^{-1} \risingdotseq \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2)(u \in R \;\&\; v \in R^{-1} \;\&\; pr_1(t) = \\ = pr_1(u) \;\&\; pr_2(u) = pr_1(v) \;\&\; pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$

$$\sim \{(x, y)|x, y \in \mathbb{N} \;\&\; \exists u \exists v(u_2 \vdots u_1 \& \; v_1 \vdots v_2 \;\&\; x = u_1 \;\&\; u_2 = v_1 \;\&\; v_2 = y)\} \sim \\ \sim \{(x, y)|x, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow R \cdot R^{-1} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

(так как $u_2 = v_1 \vdots v_2 = y$ и $u_2 \vdots u_1 = x$, то можно взять в качетстве u_2 число, делящееся и на x, и на y, а сами x и y связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную пару (x, y))

$$R^{-1} \cdot R \rightleftharpoons \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2)(u \in R^{-1} \ \& \ v \in R \ \& \ pr_1(t) =$$
$$= pr_1(u) \ \& \ pr_2(u) = pr_1(v) \ \& \ pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \ \& \ \exists u \exists v (u_1 \vdots u_2 \& \ v_2 \vdots v_1 \ \& \ x = u_1 \ \& \ u_2 = v_1 \ \& \ v_2 = y)\} \sim$$
$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow R^{-1} \cdot R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

(так как $x = u_1 \vdots u_2 = v_1$ и $v_2 = y \vdots v_1$, то можно взять в качетстве v_1 число 1, на которое делится и x, и y, а сами x и y связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную пару (x, y))

(в) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого x существует $y = -x$, для которого $x + y \leqslant 0 \Rightarrow \delta_R = Pr_1(R) = \mathbb{D}$.

Аналогично это отношение - всюдузначное. $\Rightarrow \rho_R = Pr_2(R) = \mathbb{D}$.

$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\} = R$, так как отношение - симметричное.

$$R \cdot R \rightleftharpoons \{t \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2)(u \in R \ \& \ v \in R \ \& \ pr_1(t) =$$
$$= pr_1(u) \ \& \ pr_2(u) = pr_1(v) \ \& \ pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$
$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D} \ \& \ \exists u \exists v (u_1 + u_2 \leqslant 0 \ \& \ v_1 + v_2 \leqslant 0 \ \& \ x = u_1 \ \& \ u_2 = v_1 \ \& \ v_2 = y)\} \sim$$
$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D}\} \Rightarrow R \cdot R = \mathbb{D} \times \mathbb{D}.$$

(условие на x, y: $x + v_1 \leqslant 0$ и $v_1 + y \leqslant 0$, но всегда можно взять v_1 таким, что оба условия будут выполняться)

В силу симметричности отношения $R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = R \cdot R = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

§ 2.9(а, в)

Условие Доказать, что:
(а) $\delta_R = \varnothing \Leftrightarrow R = \varnothing \Leftrightarrow \rho_R = \varnothing$;
(в) $\delta_{R_1 \cdot R_2} = R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$.

Решение (а) $\delta_R = \varnothing \Leftrightarrow \forall u \in \cup \cup R \ \forall v \ (u, v) \notin R \Leftrightarrow R = \varnothing$

$\rho_R = \varnothing \Leftrightarrow \forall v \in \cup \cup R \ \forall u \ (u, v) \notin R \Leftrightarrow R = \varnothing$

(в) $x \in \delta_{R_1 \cdot R_2} \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R_1 \cdot R_2 \Leftrightarrow \exists y : \exists u \exists v (u \in R_1 \ \& \ v \in R_2 \ \& \ x = u_1 \ \& \ u_2 = v_1 \ \& \ v_2 = y) \Leftrightarrow \exists y \exists z = u_2 = v_1 : (x = u_1, z) \in \ R_1) \ \& \ (z, y = v_2) \in R_2 \Leftrightarrow \exists z : (x, z) \in R_1 \ \& \ z \in \delta_{R_2} \Leftrightarrow \exists z : (z, x) \in R_1^{-1} \ \& \ z \in \rho_{R_1} \ \& \ z \in \delta_{R_2} \Leftrightarrow x \in R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$.

§ 2.12 (б, г)

Условие Доказать, что для любых бинарных отношений:
б) $(R^{-1})^{-1} = R$;
г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

Решение

§ 2.13

Условие Для каких бинарных отношений R справедливо $R^{-1} = -R$?

Решение Пусть $R \subseteq A \times B$.
1) Предположим, что $x \in A \cap B$. Тогда $(x,x) \in R \Leftrightarrow (x,x) \in R^{-1}$. Если $R^{-1} = -R$, то получим, что (x,x) лежит и в отношении, и в его дополнении, чего быть не может.
2) Значит, $A \cap B = \varnothing$. По определению $R \subseteq A \times B$, $R^{-1} \subseteq B \times A$. Значит, $-R = R^{-1} = \varnothing$. Получим, что $R = \varnothing$ и $R = A \times B$, что возможно только при $A = B = \varnothing$.

§ 2.14

Условие Пусть A и B - конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно.
а) Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств A и B?
б) Сколько имеется функций из A в B?
в) Сколько имеется 1-1-функций из A в B?
г) При каких m и n существует взаимно однозначное соответствие между A и B?

Решение а) Столько, сколько подмножеств у множества упорядоченных пар элементов A и B. Всего пар mn, бинарных отношений 2^{mn}.
б) Функция по определению - это всюдуопределенное прямое однозначное бинарное отношение, то есть каждый элемент множества A (из m штук) входит в отношение ровно с одним элементом множества B (из n штук). Тогда всего функций $\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{m} = n^m$.
в) Функция f называется 1-1-функцией, если $\forall x_1, x_2, y$: $y = f(x_1)$, $y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Если $n < m$, то не существует ни одной такой функции, так как не для всех элементов множества A найдется элемент B, входящий с ним в отношение. Если $n \geqslant m$, то число таких функций равно $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$, так как выбор каждой новой "пары"для элемента множества A уменьшает на 1 количество возможных пар для прочих элементов множества A.
г) При $m = n$, тогда и только тогда каждый элемент множества A сможет входить в отношение ровно с одним элементом множества B и наоборот.

§ 2.22

Условие Доказать, что если f есть функция из A в B и g есть функция из B в C, то $f \cdot g$ есть функция из A в C. (????Имелось в виду $g \cdot f$ - функция из A в C????)

Решение $g \cdot f \leftrightharpoons \{t \in Pr_1(f) \times Pr_2(g)|...\}$. $Pr_1(f) = A$, $Pr_2(g) = C \Rightarrow g \cdot f : A \to C$.

§ 2.25(а-д)

Условие Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами:
а) $A \times B$ и $B \times A$;
б) $A \times (B \times C)$ и $(A \times B) \times C$;
в) $(A \times B)^C$ и $A^C \times B^C$;
г) $(A^B)^C$ и $A^{B \times C}$;
д) $A^{B \cup C}$ и $A^B \times A^C$, если $B \cap C = \varnothing$.

Решение а) Предъявим это соответствие: $\forall x \in A, y \in B : (x,y) \in A \times B \leftrightarrow (y,x) \in B \times A$, то есть любой упорядоченной паре из первого векторного произведения соответствует ровно одна из второго и наоборот.
б)

§ 2.31(a)

Условие Доказать, что для любой функции f:
а) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Решение

$$f[A \cup B] = \{y \in Pr_2(f) | \exists x(x \in A \cup B \ \& \ (x, y) \in f)\}$$
$$\exists x(x \in A \cup B \ \& \ (x, y) \in f) \sim \exists x(x \in A \vee x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \sim$$
$$\sim \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \vee (x \in B \ \& \ (x, y) \in f)$$

Значит, $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.

§ 2.32(a)

Условие Доказать, что для любой функции f:
а) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Решение

$$f[A \cap B] = \{y \in Pr_2(f) | \exists x(x \in A \cap B \ \& \ (x, y) \in f)\}$$
$$\exists x(x \in A \cap B \ \& \ (x, y) \in f) \sim \exists x(x \in A \ \& \ x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ (x \in B \ \& \ (x, y) \in f)$$

Значит, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

§ 2.34

Условие Доказать, что $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ для любой функции f.

Решение

$$f[A] \setminus f[B] = \{y \in Pr_2(f) | \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ \neg \exists x(x \in B \ \& \ (x, y) \in f)\}.$$
$$\exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ \forall x \neg (x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ (x \notin B \vee (x, y) \notin f) \sim$$
$$\sim \exists x(x \in A \ \& \ x \notin B \ \& \ (x, y) \in f).$$

Значит, $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$.

§ 2.35

Условие Доказать, что если в предыдущем примере f есть 1-1-функция, то выполняется равенство.

Решение Пусть f является 1-1-функцией, то есть $\forall x_1, x_2, y : y = f(x_1), y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Включение в одну сторону доказано в предыдущей задаче.
$y \in f(A \setminus B) \Rightarrow \exists ! x \in A \setminus B : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A)$. Так как для элемента y образа существует единственный прообраз, то $\forall z \in B f(z) \neq y$ (потому что элемент x такой, что $f(x) = y$, лежит в $A \setminus B$, значит, не лежит в B). $\Rightarrow y \notin f(B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.
Вместе с результатом предыдущей задачи получаем:
$f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$.

§ 2.38(а, в, д)

Условие Доказать следующие тождества для любой функции f:
а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
в) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
д) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Решение а)

$$f^{-1} \risingdotseq \{t \in Pr_2(f) \times Pr_1(f) | f(pr_2(t)) = pr_1(t)\},$$
$$f^{-1}[A \cup B] \risingdotseq \{v \in Pr_2(f^{-1}) | \exists p(p \in A \cup B) \ \& \ (p, v) \in f^{-1}\} \sim$$
$$\sim \{v \in Pr_1(f) | \exists p(p \in A \cup B) \ \& \ f(v) = p\} \sim$$
$$\sim \{v \in Pr_1(f) | \exists p(p \in A \vee p \in B) \ \& \ f(v) = p\} \sim$$
$$\sim \{v \in Pr_1(f) | \exists p(p \in A) \vee \exists p(p \in B) : f(v) = p\} \Rightarrow f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B].$$

Условие в) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

Решение

$$f^{-1}[A \cap B] \risingdotseq \{v \in Pr_2(f^{-1}) | \exists p(p \in A \cap B) \ \& \ (p, v) \in f^{-1}\}$$
$$\exists p(p \in A \cap B) \ \& \ ((p, v) \in f^{-1}) \sim \exists p(p \in A \ \& \ p \in B) \ \& \ ((p, v) \in f^{-1}) \sim$$
$$\sim \exists p(p \in A) \ \& \ ((p, v) \in f^{-1}) \ \& \ (p \in B) \Rightarrow f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

3 Мощности множеств

§ 4.1

Условие Доказать, что:
$A \backsim A$ (рефлексивность)
Если $A \backsim B$, то $B \backsim A$ (симметричность)
Если $A \backsim B$ и $B \backsim$, то $A \backsim$ (транзетивность)

Решение

§ 4.5

Условие Доказать, что:
а) Всякое подмножество конечного множества конечно
б) Объединение конечного числа конечных множест кончено
в) Прямое произведение конечного числа конечных множеств конечно

Доказательство
Доказательство от противного

§ 4.8

Условие Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно некоторому своему подмножеству.

Доказательство
В условие имеется введу, подмножество не равное множетсву, тк иначе есть контрпример. $\{1\}$ эквивалентен $\{1\}$
Докажем лемму о том, что счетное множество $A \sim A \setminus B$, где В конечное множество.
А - счетное, значит все его элементы можно пронумеровать.
Возьмем множество $A \setminus B$, его мы тоже можем пронумеровать, сдвигая каждый раз нумерацию.

$\Rightarrow$) Еслим множество бесконечно, то в нем есть счетное подмножество $\Rightarrow \exists$ подмножетсво нашего счетного множества, которое ему $\sim$
$\Leftarrow$) Если мноетсво $\sim$ свое подмножеству, то оно не может быть конечным, доказывается от противного $\Rightarrow$ оно бесконечно.

§ 4.10 а

Условие Пусть область определения счетна, доказать, что область значений этой функции конечна или счетна.

Доказательство
Докажем, что она не более чем счетна.
Тк область определения счетна, а каждой точки из области онпердeления можно поставить в соотвествие значение функции в этой точки $\Rightarrow$ область значений не более чем счетна $\Rightarrow$ область значений этой функции конечна или счетна.

§ 4.13

Условие Доказать, что:
а) Если А бесконечено и В - конечное или счетное множество, то $A \cup B \sim A$

Доказательство Рассмотрим 2 варианта А счетно и А не счетно.
Докажем от противного, что в каждом из этих случаях $A \cup B$ счетно и $A \cup B$ не счетно соответственно.

Условие б) Если А бесконечено и несчетно, В конечное или счетное множество, то $A \setminus B \sim A$

Доказательство Пусть это не так $\Rightarrow A \setminus B$ - счетно или конечно. Доказываем от противного, что это невозможно.

§ 4.15

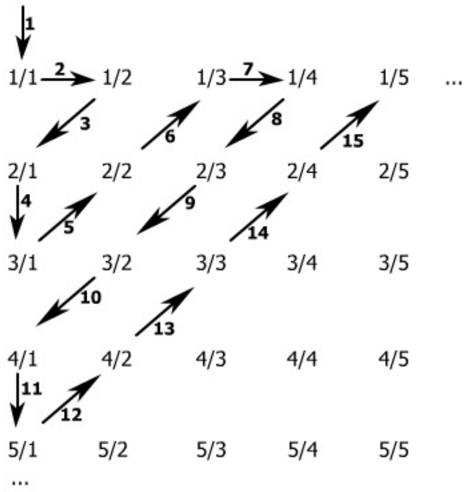
Условие Доказать, что:
а) Множество целых чисел счетно

Доказательство пронумеруем

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...

Условие б) Множество рациональных чисел счетно

Доказательство пронумеруем



Условие в) Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ счетно при a < b

Доказательство Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ - беконечно. (тк множество плотно)
$\Rightarrow$ оно не менее чем счетно. Но по доказанному выше оно не более, чем счетно $\Rightarrow$ счетно.

Условие г) Множество пар $\langle x, y \rangle$, где x и y - рациональные числа, счетно

Доказательство Множество рациональных чисел счетно.
Тогда выпишем все рациональный числа сеткой и докажем, что кол-во пар сечтно аналогично доказатульству 4.15 б

§ 4.16

Условие Доказать, что множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов некотрого счетного множества, есть счетное множество.

Доказательство Докажем, что множество последовательностей длины n счетно.
Используя 4.15 Г мы знаем, что счетно * счетно = счетно
$\Rightarrow$ счетное^n = счетное.
Кол-во последовательностей конченой длиный счетно $\Rightarrow$ множество всех последедовательностей конечной длинны тоже счетно.

§ 4.18

Условие Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффицентами счетно.

Доказательство Многочлен от одной переменно с целыми коэффицентами представляет из себя конечную последовательных целых чисел $\Rightarrow$ сводится к задаче 4.16

§ 4.19

Условие Доказать счетность множетсва алгебраических чисел, т. е. чисел, являющихся корнями многочленов от одной переменной с целыми коэвицентами.

Доказательство Кол-во корней у многочлена степени n не более, чем n.
Тк кол-во многочленов с целыми коеффицентами от одной перменной счетно (по задаче 4.18), то и кол-во корней счетно.
Тк можем пронумеровать.

§ 4.20

Условие Доказать, что любое множество попарно непересекающихся открытых интервалов на действительной прямой не более чем счетно.

Доказательство Кол-во рациональных чисел счетно. А в каждом интервале есть хотя бы одно рациональное число $\Rightarrow$ интервалов не более чем счетное кол-во.

§ 4.23

Условие Доказать, что множетсво точек разрыва монотонной функции на дейсвтительной оси не более, чем счетно.

Доказательство У монотонной функции каждая точка разрыва соответствует интервалу на оси Y
Эти интервалы попарно непересекающиеся $\Rightarrow$ по здадаче 4.20 множесво не более, чем счетно.

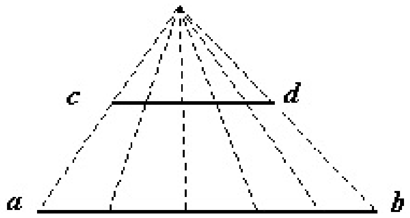
§ 4.24

Условие Доказать, что:
а) $(0, 1) \sim [0, 1] \sim (0, 1] \sim [0, 1)$

Доказательство
$(0, 1) \sim [0, 1]$
$1/2 \leftrightarrow 0$
$1/4 \leftrightarrow 1$
$1/k^n \leftrightarrow 4/k^n$
остальные числа переведем в себя же соответственно
$(0, 1] \sim [0, 1]$
$1 \leftrightarrow 1$
$1/2 \leftrightarrow 0$
$1/k^n \leftrightarrow 2/k^n$
остальные числа переведем в себя же соответственно
$(0, 1] \sim [0, 1)$
$x \leftrightarrow 1/2- \mid 1/2 - x \mid$ (симметрично отнасительно $1/2$)

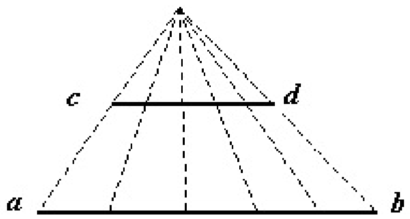
Условие б) $[a, b] \sim [c, d]$, где $a < b, c < d$

Доказательство



Условие в) $[a, b] \sim \mathbb{D}$

Доказательство
по пункту а) $(0, 1) \sim [0, 1]$



§ 4.30

Условие Какова мощность иррациональных чисел?

Доказательство 1)Множество иррациональных чисел более чем счетно.
Доказательство.
Пусть оно счетно. Выпившем все числа по порядку.

$$\left.\begin{array}{l}
c_1 = 0,\ a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}, \ldots, \\
c_2 = 0,\ a_{21}\ \ a_{22}\ \ a_{23}, \ldots, \\
c_3 = 0,\ a_{31}\ \ a_{32}\ \ a_{33}, \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_n = 0,\ a_{n1}\ \ a_{n2}\ \ a_{n3}, \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

Построим теперь число $C = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 ...$
Так что $b_i \neq 0, b_i \neq 9, b_i \neq a_{ii}$
Получаем, число, которого нет в таблице, но которое является иррациональным.

§ 4.31

Условие Доказать существование трансцендентых (неалгебраических) чисел.

Доказательство Докажем от противного.
Пусть их нет. Тогда $\mathbb{R} \sim$ множество алгебраицеских чисел.
Но $\mathbb{R}$ более чем счетно, а множество всех алгебраических чисел счетно
$\Rightarrow$ существуют неалгебраические числа.

§ 4.36

Условие

Решение

§ 4.38

Условие

Решение

§ 4.39

Условие

Решение

§ 4.42

Условие

Решение

4 Отношение эквивелентности

§ 3.6

Условие Построить бинарное отношение
а)рефлексивное, симметричное, не транзитивное

Решение а - нормированное пространство
$r \subseteq a * a : (x, y) \in r \leftrightarrow \parallel x - y \parallel \leq \delta$
реф. : $\forall x \parallel x - x \parallel = 0 \leq s$
симм. : $\parallel x - y \parallel = \parallel y - x \parallel$
Транзитивности нет $\parallel x - y \parallel \leq s$ и $\parallel y - z \parallel \leq s \Rightarrow \parallel x - z \parallel \leq s$

Условие б)рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное

Решение $r \subseteq \mathbb{R} * \mathbb{R} : (x, y) \in r \leftrightarrow x \leq y \leq x^2$
реф. : $\forall x(x, x) \in r$
антисимметрично: $x \leq y \leq x^2$ и $y \leq x \leq y^2 \Rightarrow x = y$
не транз. : $(2, 3) \in r, (3, 8) \in r, (2, 8) \notin r$

Условие в)рефлексивное, не симметричное, транзитивное

Решение $\leq$ на $\mathbb{R}$
$x \leq x$
$x \leq y, y \leq z \rightarrow x \leq z$
$x \leq y \nrightarrow y \leq x$

Условие г)антисимметричное, транзитивное, не рефлексивное

Решение $a \in \mathbb{R}$
$r \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$r = \{(a; a)\}$

§ 3.7

Условие а) Построить бинарное отношение, симметричное, транзитивное, но не рефлексивное.

Решение $r \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$
$r = \{(a; a)\}$

Условие б) Доказать, что если R есть транзитивное и симметричное отношение на множестве A и $\delta_R \cup \rho_R = A$, то R есть эквивалентност на A.

Решение тк $\delta_R \cup \rho_R = A$, то $\exists x \in a \exists y :$
либо $(x, y) \in R$ либо $(y, x) \in R$
Из симметричности $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow (x, x) \in R$
Те R - отношение эквивалентности.

§ 3.8

Условие Доказать, что если R симметрично и антисимметрично, то оно транзитивно

Решение Симметричность $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
Антисимметричность $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow y = x$
Значит в R лежат только пары вида (x, x) $\Rightarrow$ транзитивно

§ 3.9

Условие Доказать,что отношение R на множестве a zdkztzncz одновременно эквивалентностью и частичным порядком тогда и только тогда, когда $R = i_a$

Решение Если $R = i_a$, то очевидно выоплены рефлексивность, симметричность, антисимметричность и транзитивность.
Обратно:
Рефлексивность $\Rightarrow \forall x \in a(x, x) \in R \Rightarrow i_a \in R$
Сииметричность и антисимметричность $x = y \Rightarrow R \in i_a$

§ 3.11

Условие a - множество всех прямых в $\mathbb{R}^2$, являются ли эквивалентностями следующие отношения? а) параллельность б) перпендикулярность

Решение а) является $a \parallel x$
$x \parallel y \rightarrow y \parallel x$
$x \parallel y \wedge y \parallel z \rightarrow x \parallel z$
б) нет $\neg x \perp x$

§ 3.12

Условие Определим на $\mathbb{R}$ отношение
a r b $\leftrightarrow$ (a - b) $\in \mathbb{Q}$
Доказать, что r - эквивалентность

Решение a - a $= 0 \in \mathbb{Q}$
a - b $\in \mathbb{Q} \rightarrow (b - a) = -(a - b) \in \mathbb{Q}$
$(a - b)\ in\mathbb{Q}(b - c)\ in\mathbb{Q} \rightarrow (a - c) - (a - b) + (b - c) \in \mathbb{Q}$

§ 3.17

Условие Доказать, что сущесвуют взаимооднозначные соотвествия между классом всех разбиений множества a и семеством всех отношений эквивалентности на a

Доказательство разбиение $\{a_i\}_{i \in \mathbb{I}}$

§ 3.19

Условие

Решение

§ 3.20

Условие

Решение