Домашнее задание по курсу "Математическая логика - 2"

1 Язык и аксиоматика теории множеств

§ 1.3

Условие Доказать, что $\varnothing \neq \{\varnothing\}$.

Доказательство По определению
$x = y \rightleftharpoons \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y)$.
Пусть $\varnothing = \{\varnothing\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{\varnothing\} \Leftrightarrow t \in \varnothing)$ Противоречие для t = $\varnothing$

§ 1.4

Условие Доказать, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.

Доказательство По определению
$x = y \rightleftharpoons \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y)$.
Пусть $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow t \in \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\})$ Противоречие для t = 1

§ 1.6

Условие Доказать, что $\exists$ лишь одно множество, не имеющее элементов.

Доказательство Пусть $\exists$ два множества X и X_0, не имеющих элементов и такие, что $X \neq X_0$
$\Rightarrow \exists t(t \in X \Rightarrow t \notin X_0)$
Противоречие так как $\nexists t \in$ X.

§ 1.8

Условие Доказать, что множество всех корней многочлена $\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x)$ есть объединение множеств корней $\beta(x)$ и $\gamma(x)$.

Доказательство Чтобы докаказать, что множество корней = объединения множеств, надо доказать, что любой корень является либо корнем $\beta(x)$ либо $\gamma(x)$ и что других корней не существует.
1) Пусть существует корень x_0, который не является корнем ни $\beta(x)$, ни корнем $\gamma(x)$
$\Rightarrow \alpha(x_0) = 0, \beta(x_0) \neq 0, \gamma(x_0) \neq 0$. Противоречие 2) Пусть x_0 корень $\beta(x)$ или $\gamma(x)$, тогда $\beta(x_0) = 0$ или $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0$

§ 1.9

Условие Доказать, что персечение множеств действительных корней многочленов $\alpha(x)\beta(x)$ с действительными коэффицентами совпадает с множеством всех действительных корней $\gamma(x) = \alpha^2(x) + \beta^2(x)$.

Доказательство Чтобы докаказать, что множество корней = персечение множеств, надо доказать, что любой корень из пересейчения является корнем и что других корней не существует.
1)Если x_0 корень $\alpha(x)\beta(x) \Rightarrow \gamma(x_0) = 0$ 2)Пусть существует корень $\gamma(x)x_0$, который не является корнем ни $\alpha(x)$, ни корнем $\beta(x)$
Тогда $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha^2(x_0) + \beta^2(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0 \& \beta(x_0) = 0$

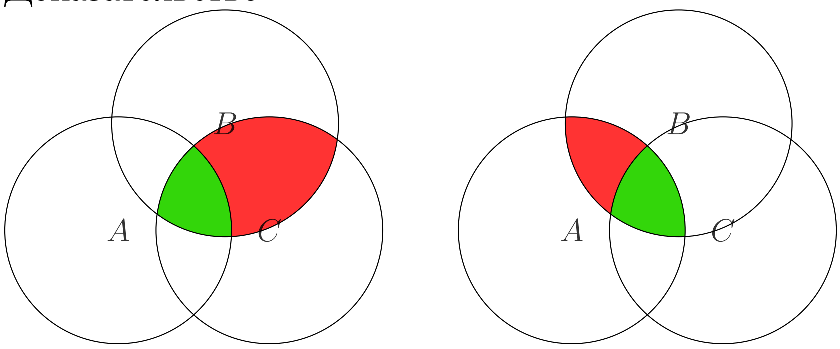
§ 1.11 (а, г, ж)

Условие Доказать следующие тождества
а)$A \cup A = A \cap A = A$

Доказательство Распишем по определению
$\{Z \mid (Z \in A \vee Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A \wedge Z \in A\} = A$
Упростим
$\{Z \mid (Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = \{Z \in A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = A = A$

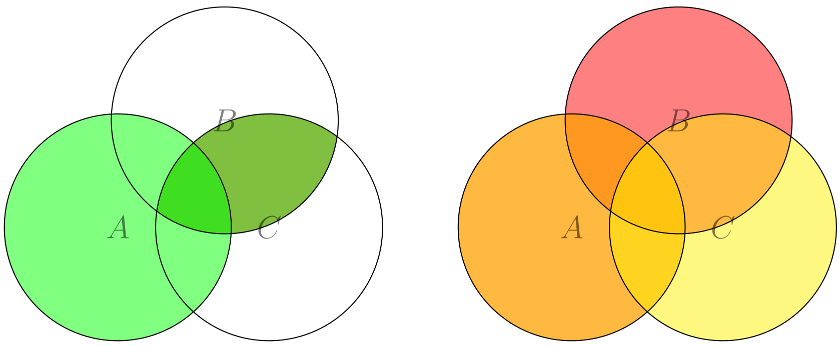
Условие г)$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Доказательство



Условие ж)$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Доказательство



§ 1.12(в, д, ж, п, т)

§ 1.13(а, д, к)

§ 1.14(в, к)

§ 1.15

Условие Доказать, что
а) $(A_1 \cup ... \cup A_n) \triangle (B_1 \cup ... \cup B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_n \triangle B_n)$

Доказательство Докажем по индукции:
База индукции
n=1) $(A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1)$ (очевидно)
n=2) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$(Доказывалось на уроке)
Преположение индукции
Пусть верно для $\forall n < k$
Шаг индукции
Докажем для k+1
$(A_1 \cup ... \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup ... \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$
пусть $A_0 = A_1 \cup ... \cup A_k B_0 = B_1 \cup ... \cup B_k$
$(A_1 \cup ... \cup A_{k+1}) \triangle (B_1 \cup ... \cup B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cup A_{k+1}) \triangle (B_0 \cup B_{k+1}) \subseteq$
$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$
$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k \triangle B_k)$
$\Rightarrow (A_1 \cup ... \cup A_k + 1) \triangle (B_1 \cup ... \cup B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$

Условие б) $(A_1 \cap ... \cap A_n) \triangle (B_1 \cap ... \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_n \triangle B_n)$

Доказательство Докажем по индукции:
База индукции
n=1) $(A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1)$ (очевидно)
n=2) $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$(Доказывалось на уроке)
Преположение индукции
Пусть верно для $\forall n < k$
Шаг индукции
Докажем для k+1
$(A_1 \cap ... \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap ... \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$
пусть $A_0 = A_1 \cap ... \cap A_k B_0 = B_1 \cap ... \cap B_k$
$(A_1 \cap ... \cap A_{k+1}) \triangle (B_1 \cap ... \cap B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cap A_{k+1}) \triangle (B_0 \cap B_{k+1}) \subseteq$
$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$
$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k \triangle B_k)$
$\Rightarrow (A_1 \cap ... \cap A_k + 1) \triangle (B_1 \cap ... \cap B_k + 1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup ... \cup (A_k + 1 \triangle B_k + 1)$

§ 1.17

Условие Определить операции $\cup, \cap, \setminus$, через:
а)$\triangle, \cap$

Доказательство
$\cap = \cap$

$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$
$A \setminus B = (A \triangle B) \cap A$

Условие б)$\triangle, \cup$

Доказательство
$\cup = \cup$
$A \cap B = ((A \cup B) \triangle A) \triangle B$
$A \setminus B = (A \cup B) \triangle B$

Условие и)$\setminus, \triangle$

Доказательство
$A \cup B = (A \setminus B) \triangle$
$A \cap B = (B \setminus (A \setminus B))$
$\setminus = \setminus$

§ 1.18

Условие Доказать, что нельзя определить:
а) $\setminus$ через $\cap$ и $\cup$
б) $\cup$ через $\cap$ и $\setminus$

§ 1.20

Условие Найти все подмножества множеств:$\varnothing, \{\varnothing\}, \{x\}, \{1, 2\}$.

Ответ
$\varnothing$ - нет
$\{\varnothing\} - \varnothing$
$\{x\} - \varnothing, \{x\}$
$\{1, 2\} - \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$

§ 2.1

Условие Доказать, что существуют A, B и C такие, что:
а) $A \times B \neq B \times A$

Решение
$A = \{1\}$ и $B = \{2\}$, так как, пользуясь определением упорядоченной пары: $(\{1\}, \{2\}) = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \neq \{\{2\}, \{2, 1\}\} = (\{2\}, \{1\})$.

Условие б) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

Решение

§ 2.3

Условие Доказать, что если A, B, C и D не пусты, то:
а) $A \subseteq B$ и $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$ б) $A = B$ и $C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$

Решение
Очеивдно доказывается методом от противного.

§ 2.6(а, б, г)

Условие Доказать, что:
а) $(A \cup B) \times C = (A \times B) \cup (B \times C)$
б) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
г) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Решение

2 Отношения и функции

§ 2.8(а, в)

Условие Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R \cdot R$, $R \cdot R^{-1}$, $R^{-1} \cdot R$ для следующих отношений:
(а) $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}$ и x делит $y\}$;
(в) $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D}$ и $x + y \leqslant 0\}$.

Решение (а) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого x существует $y = x$, для которого x делит $y \Rightarrow \delta_R = Pr_1(R) = \mathbb{N}$.

Аналогично это отношение - всюдузначное. $\Rightarrow \rho_R = Pr_2(R) = \mathbb{N}$.

$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}$ и y делит $x\}$.

$$R \cdot R \leftrightharpoons \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2)(u \in R \ \& \ v \in R \ \& \ pr_1(t) = \\ = pr_1(u) \ \& \ pr_2(u) = pr_1(v) \ \& \ pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \ \& \ \exists u \exists v (u_2 \vdots u_1 \& \ v_2 \vdots v_1 \ \& \ x = u_1 \ \& \ u_2 = v_1 \ \& \ v_2 = y)\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \ \& \ y \vdots x\} \Rightarrow R \cdot R = R.$$

(так как $v_2 = y \vdots v_1 = u_2 \vdots u_1 = x$, значит x должен делить y)

$$R \cdot R^{-1} \leftrightharpoons \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2)(u \in R \ \& \ v \in R^{-1} \ \& \ pr_1(t) = \\ = pr_1(u) \ \& \ pr_2(u) = pr_1(v) \ \& \ pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim$$

$$\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \ \& \ \exists u \exists v (u_2 \vdots u_1 \& \ v_1 \vdots v_2 \ \& \ x = u_1 \ \& \ u_2 = v_1 \ \& \ v_2 = y)\} \sim \\ \sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow R \cdot R^{-1} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

(так как $u_2 = v_1 \vdots v_2 = y$ и $u_2 \vdots u_1 = x$, то можно взять в качетстве u_2 число, делящееся и на x, и на y, а сами x и y связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную пару (x,y))

$$R^{-1}\cdot R \rightleftharpoons \{t\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\exists u=(u_1,u_2)\exists v=(v_1,v_2)(u\in R^{-1}\ \&\ v\in R\ \&\ pr_1(t)=$$
$$=pr_1(u)\ \&\ pr_2(u)=pr_1(v)\ \&\ pr_2(v)=pr_2(t))\}\sim$$
$$\sim\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N}\ \&\ \exists u\exists v(u_1\vdots u_2\&\ v_2\vdots v_1\ \&\ x=u_1\ \&\ u_2=v_1\ \&\ v_2=y)\}\sim$$
$$\sim\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N}\}\Rightarrow R^{-1}\cdot R=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

(так как $x=u_1\vdots u_2=v_1$ и $v_2=y\vdots v_1$, то можно взять в качетстве v_1 число 1, на которое делится и x, и y, а сами x и y связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную пару (x,y))

(в) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого x существует $y=-x$, для которого $x+y\leqslant 0\Rightarrow \delta_R=Pr_1(R)=\mathbb{D}$.

Аналогично это отношение - всюдузначное. $\Rightarrow \rho_R=Pr_2(R)=\mathbb{D}$.

$R^{-1}=\{(x,y)|(y,x)\in R\}=R$, так как отношение - симметричное.

$$R\cdot R \rightleftharpoons \{t\in\mathbb{D}\times\mathbb{D}|\exists u=(u_1,u_2)\exists v=(v_1,v_2)(u\in R\ \&\ v\in R\ \&\ pr_1(t)=$$
$$=pr_1(u)\ \&\ pr_2(u)=pr_1(v)\ \&\ pr_2(v)=pr_2(t))\}\sim$$
$$\sim\{(x,y)|x,y\in\mathbb{D}\ \&\ \exists u\exists v(u_1+u_2\leqslant 0\ \&\ v_1+v_2\leqslant 0\ \&\ x=u_1\ \&\ u_2=v_1\ \&\ v_2=y)\}\sim$$
$$\sim\{(x,y)|x,y\in\mathbb{D}\}\Rightarrow R\cdot R=\mathbb{D}\times\mathbb{D}.$$

(условие на x, y: $x+v_1\leqslant 0$ и $v_1+y\leqslant 0$, но всегда можно взять v_1 таким, что оба условия будут выполняться)

В силу симметричности отношения $R\cdot R^{-1}=R^{-1}\cdot R=R\cdot R=\mathbb{D}\times\mathbb{D}$.

§ 2.9(а, в)

Условие Доказать, что:
(а) $\delta_R=\varnothing\Leftrightarrow R=\varnothing\Leftrightarrow\rho_R=\varnothing$;
(в) $\delta_{R_1\cdot R_2}=R_1^{-1}(\rho_{R_1}\cap\delta_{R_2})$.

Решение (а) $\delta_R=\varnothing\Leftrightarrow\forall u\in\cup\cup R\ \forall v\ (u,v)\notin R\Leftrightarrow R=\varnothing$

$\rho_R=\varnothing\Leftrightarrow\forall v\in\cup\cup R\ \forall u\ (u,v)\notin R\Leftrightarrow R=\varnothing$

(в) $x\in\delta_{R_1\cdot R_2}\Leftrightarrow\exists y:(x,y)\in R_1\cdot R_2\Leftrightarrow\exists y:\exists u\exists v(u\in R_1\ \&\ v\in R_2\ \&\ x=u_1\ \&\ u_2=v_1\ \&\ v_2=y)\Leftrightarrow\exists y\exists z=u_2=v_1:(x=u_1,z)\in\ R_1)\ \&\ (z,y=v_2)\in R_2\Leftrightarrow\exists z:(x,z)\in R_1\ \&\ z\in\delta_{R_2}\Leftrightarrow\exists z:(z,x)\in R_1^{-1}\ \&\ z\in\rho_{R_1}\ \&\ z\in\delta_{R_2}\Leftrightarrow x\in R_1^{-1}(\rho_{R_1}\cap\delta_{R_2})$.

§ 2.12 (б, г)

Условие Доказать, что для любых бинарных отношений:
(б) $(R^{-1})^{-1}=R$;
(г) $(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$.

Решение

§ 2.13

Условие Для каких бинарных отношений R справедливо $R^{-1}=-R$?

Решение Пусть $R \subseteq A \times B$.
(1) Предположим, что $x \in A \cap B$. Тогда $(x, x) \in R \Leftrightarrow (x, x) \in R^{-1}$. Если $R^{-1} = -R$, то получим, что (x, x) лежит и в отношении, и в его дополнении, чего быть не может.
(2) Значит, $A \cap B = \varnothing$. По определению $R \subseteq A \times B$, $R^{-1} \subseteq B \times A$. Значит, $-R = R^{-1} = \varnothing$. Получим, что $R = \varnothing$ и $R = A \times B$, что возможно только при $A = B = \varnothing$.

§ 2.14

Условие

Решение

§ 2.22

Условие

Решение

§ 2.25(а-д)

Условие

Решение

§ 2.31(а)

Условие

Решение

§ 2.32(а)

Условие

Решение

§ 2.34

Условие

Решение

§ 2.35

Условие

Решение

§ 2.38(а, в, д)

Условие

Решение

3 Мощности множеств

§ 4.1

Условие Доказать, что:
$A \backsim A$ (рефлексивность)
Если $A \backsim B$, то $B \backsim A$ (симметричность)
Если $A \backsim B$ и $B \backsim$, то $A \backsim$ (транзетивность)

Решение

§ 4.5

Условие Доказать, что:
а) Всякое подмножество конечного множества конечно
б) Объединение конечного числа конечных множест кончено
в) Прямое произведение конечного числа конечных множеств конечно

Доказательство
Доказательство от противного

§ 4.8

Условие Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно некоторому своему подмножеству.

Доказательство
В условие имеется введу, подмножество не равное множетсву, тк иначе есть контрпример.
$\{1\}$ эквивалентен $\{1\}$
Докажем лемму о том, что счетное множество $A \sim A \setminus B$, где В конечное множество.
А - счетное, значит все его элементы можно пронумеровать.
Возьмем множество $A \setminus B$, его мы тоже можем пронумеровать, сдвигая каждый раз нумерацию.

$\Rightarrow$) Еслим множество бесконечно, то в нем есть счетное подмножество $\Rightarrow$ $\exists$ подмножетсво нашего счетного множества, которое ему $\sim$
$\Leftarrow$) Если мноетсво $\sim$ свое подмножеству, то оно не может быть конечным, доказывается от противного $\Rightarrow$ оно бесконечно.

§ 4.10 a

Условие Пусть область определения счета, доказать, что область значений этой функции конечна или счетна.

Доказательство
Докажем, что она не более чем счетна.
Тк область определения счетна, а каждой точки из области опердeления можно поставить в соотвествие значение функции в этой точки $\Rightarrow$ область значений не более чем счетна $\Rightarrow$

область значений этой функции конечна или счетна.

§ 4.13

Условие Доказать, что:
а) Если A бесконечно и B - конечное или счетное множество, то $A \cup B \sim A$

Доказательство Рассмотрим 2 варианта A счетно и A не счетно.
Докажем от противного, что в каждом из этих случаях $A \cup B$ счетно и $A \cup B$ не счетно соответственно.

Условие б) Если A бесконечно и несчетно, B конечное или счетное множество, то $A \setminus B \sim A$

Доказательство Пусть это не так $\Rightarrow A \setminus B$ - счетно или конечно. Доказываем от противного, что это невозможно.

§ 4.15

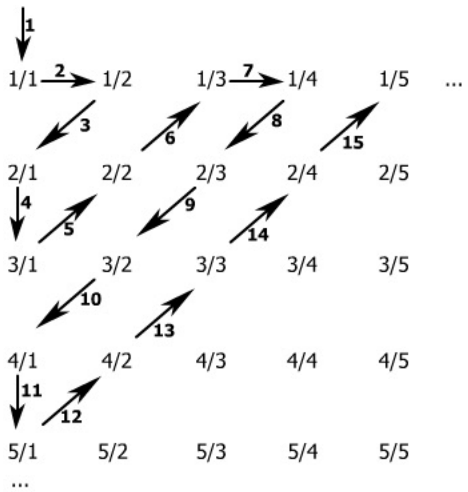
Условие Доказать, что:
а) Множество целых чисел счетно

Доказательство пронумеруем

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...

Условие б) Множество рациональных чисел счетно

Доказательство пронумеруем



Условие в) Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ счетно при a < b

Доказательство Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ - беконечно. (тк множество плотно)
$\Rightarrow$ оно не менее чем счетно. Но по доказанному выше оно не более, чем счетно $\Rightarrow$ счетно.

Условие г) Множество пар $\langle x, y \rangle$, где x и y - рациональные числа, счетно

Доказательство Множество рациональных чисел счетно.
Тогда выпишем все рациональный числа сеткой и докажем, что кол-во пар сечтно аналогично доказатульству 4.15 б

§ 4.16

Условие Доказать, что множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов некотрого счетного множества, есть счетное множество.

Доказательство Докажем, что множество последовательностей длины n счетно.
Используя 4.15 Г мы знаем, что счетно * счетно = счетно
$\Rightarrow$ счетное^n = счетное.
Кол-во последовательностей конченой длиный счетно $\Rightarrow$ множество всех последедовательностей конечной длинны тоже счетно.

§ 4.18

Условие Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффицентами счетно.

Доказательство Многочлен от одной переменно с целыми коэффицентами представляет из себя конечную последовательных целых чисел $\Rightarrow$ сводится к задаче 4.16