

Домашнее задание по курсу "Математическая логика - 2"

1 Язык и аксиоматика теории множеств

§ 1.3

Условие Доказать, что $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Доказательство По определению

$$x = y \Rightarrow \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y).$$

Пусть $\emptyset = \{\emptyset\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{\emptyset\} \Leftrightarrow t \in \emptyset)$ Противоречие для $t = \emptyset$

§ 1.4

Условие Доказать, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.

Доказательство По определению

$$x = y \Rightarrow \forall t(t \in x \Leftrightarrow t \in y).$$

Пусть $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} = \{1, 2, 3\}$, $\Rightarrow \forall t(t \in \{1, 2, 3\} \Leftrightarrow t \in \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\})$ Противоречие для $t = 1$

§ 1.6

Условие Доказать, что \exists лишь одно множество, не имеющее элементов.

Доказательство Пусть \exists два множества X и X_0 , не имеющих элементов и такие, что $X \neq X_0$

$$\Rightarrow \exists t(t \in X \Rightarrow t \notin X_0) \text{ или } \exists t(t \in X_0 \Rightarrow t \notin X)$$

Противоречие так как $\nexists t \in X$ и $\nexists t \in X_0$.

§ 1.8

Условие Доказать, что множество всех корней многочлена $\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x)$ есть объединение множеств корней $\beta(x)$ и $\gamma(x)$.

Доказательство Чтобы доказать, что множество корней = объединения множеств, надо доказать, что любой корень является либо корнем $\beta(x)$ либо $\gamma(x)$ и что других корней не существует.

1) Пусть существует корень x_0 , который не является корнем ни $\beta(x)$, ни корнем $\gamma(x)$

$\Rightarrow \alpha(x_0) = 0, \beta(x_0) \neq 0, \gamma(x_0) \neq 0$. Противоречие 2) Пусть x_0 корень $\beta(x)$ или $\gamma(x)$, тогда $\beta(x_0) = 0$ или $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0$

§ 1.9

Условие Доказать, что пересечение множеств действительных корней многочленов $\alpha(x)\beta(x)$ с действительными коэффициентами совпадает с множеством всех действительных корней $\gamma(x) = \alpha^2(x) + \beta^2(x)$.

Доказательство Чтобы доказать, что множество корней = пересечение множеств, надо доказать, что любой корень из пересечения является корнем и что других корней не существует.

1) Если x_0 корень $\alpha(x)\beta(x) \Rightarrow \gamma(x_0) = 0$ 2) Пусть существует корень $\gamma(x)x_0$, который не является корнем ни $\alpha(x)$, ни корнем $\beta(x)$

Тогда $\gamma(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha^2(x_0) + \beta^2(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(x_0) = 0 \& \beta(x_0) = 0$

§ 1.11 (а, г, ж)

Условие Доказать следующие тождества

а) $A \cup A = A \cap A = A$

Доказательство Распишем по определению

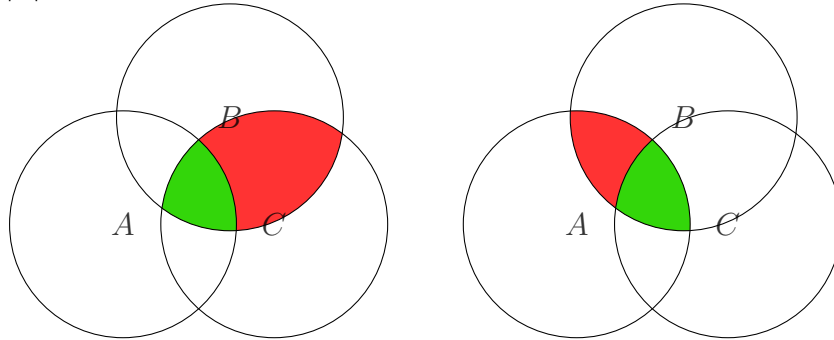
$$\{Z \mid (Z \in A \vee Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A \wedge Z \in A\} = A$$

Упростим

$$\{Z \mid (Z \in A)\} = \{Z \in A \cup A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = \{Z \in A \mid Z \in A\} = A \Leftrightarrow A = A = A$$

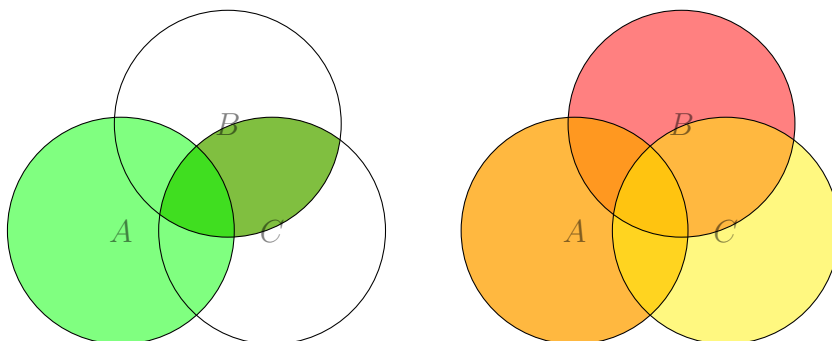
Условие г) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Доказательство

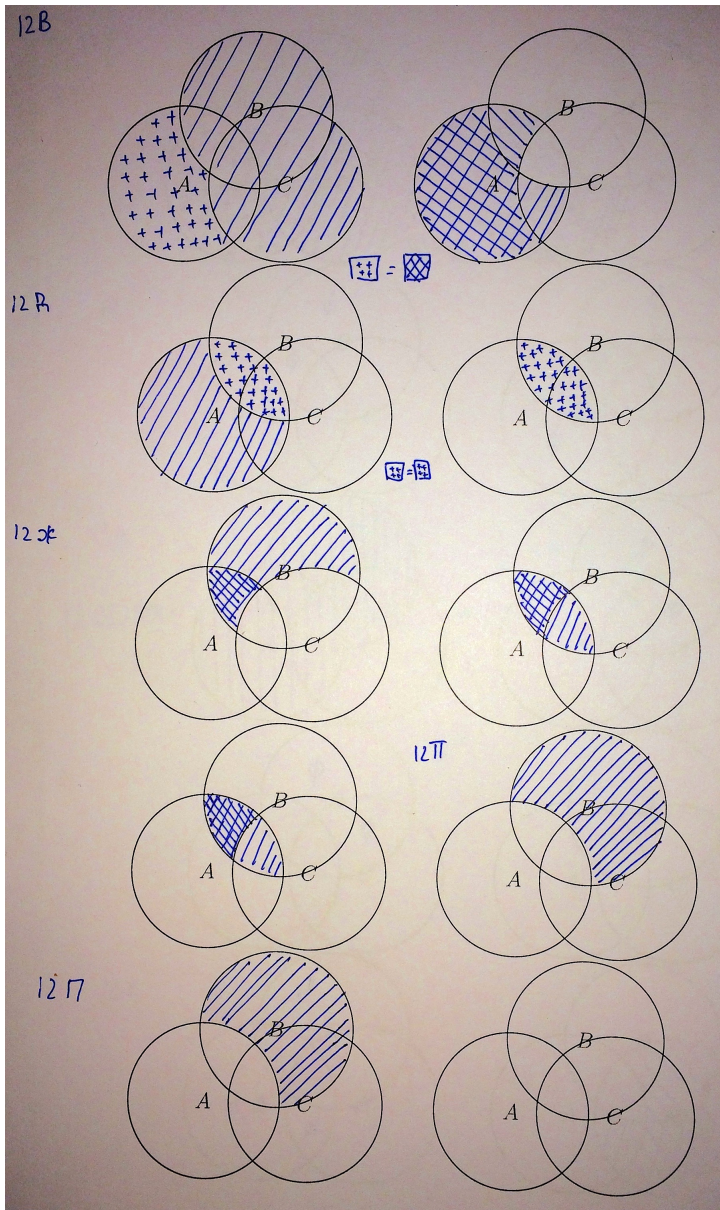


Условие ж) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

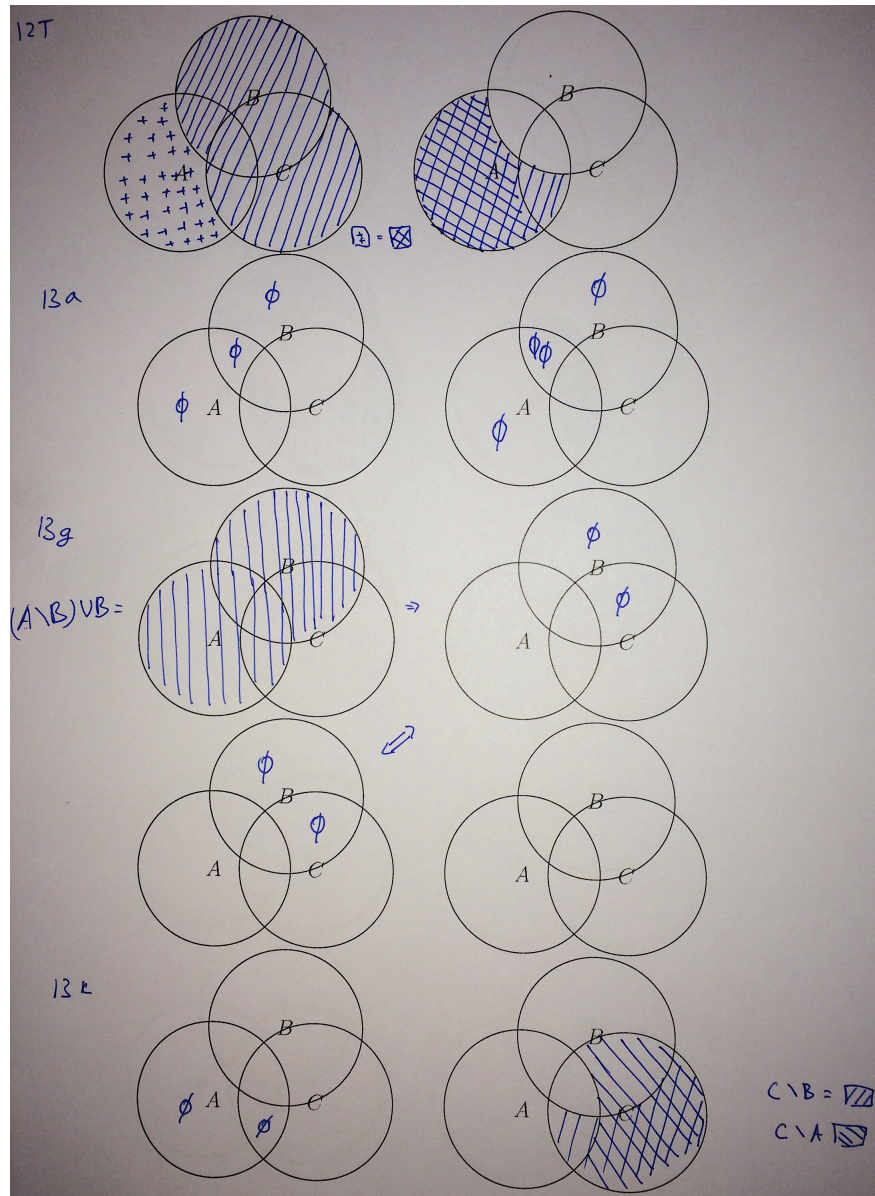
Доказательство



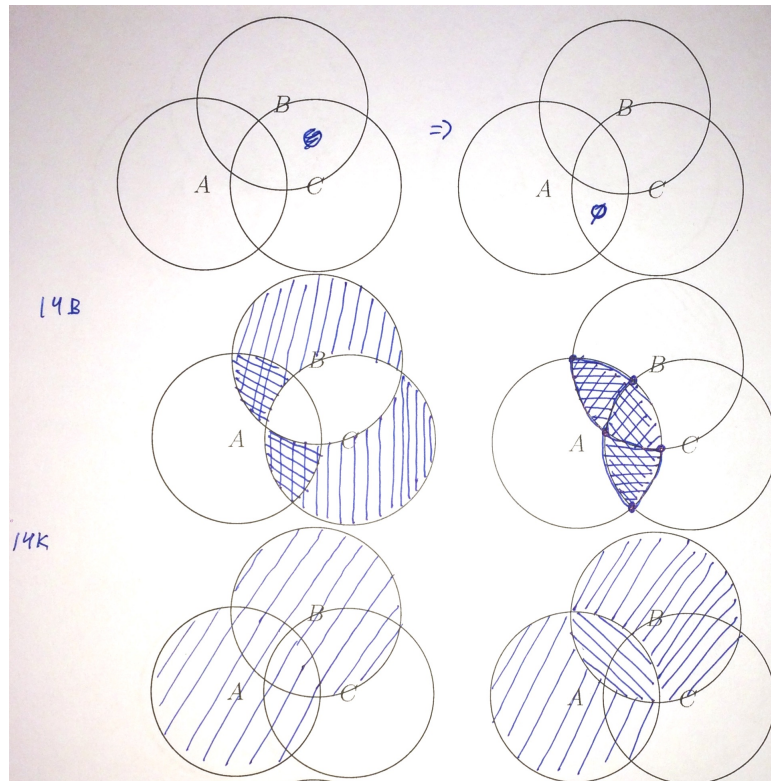
§ 1.12(в, д, ж, п, т)



§ 1.13(а, д, к)



§ 1.14(в, к)



§ 1.15

Условие Доказать, что

$$а) (A_1 \cup \dots \cup A_n) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

Доказательство Докажем по индукции:

База индукции

$$n=1) (A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \text{ (очевидно)}$$

$$n=2) (A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \text{ (Доказывалось на уроке)}$$

Предположение индукции

Пусть верно для $\forall n < k$

Шаг индукции

Докажем для $k+1$

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_{k+1}) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_{k+1} \triangle B_{k+1})$$

$$\text{пусть } A_0 = A_1 \cup \dots \cup A_k, B_0 = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cup A_{k+1}) \triangle (B_0 \cup B_{k+1}) \subseteq$$

$$\subseteq (A_0 \triangle B_0) \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$(A_0 \triangle B_0) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_k \triangle B_k)$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup \dots \cup A_{k+1}) \triangle (B_1 \cup \dots \cup B_{k+1}) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_{k+1} \triangle B_{k+1})$$

$$\text{Условие } б) (A_1 \cap \dots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \dots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \dots \cup (A_n \triangle B_n)$$

Доказательство Докажем по индукции:

База индукции

$$n=1) (A_1) \triangle (B_1) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \text{ (очевидно)}$$

$$n=2) (A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2) \text{ (Доказывалось на уроке)}$$

Предположение индукции

Пусть верно для $\forall n < k$

Шаг индукции

Докажем для $k+1$

$$(A_1 \cap \dots \cap A_{k+1}) \Delta (B_1 \cap \dots \cap B_{k+1}) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup \dots \cup (A_{k+1} \Delta B_{k+1})$$

$$\text{пусть } A_0 = A_1 \cap \dots \cap A_k, B_0 = B_1 \cap \dots \cap B_k$$

$$(A_1 \cap \dots \cap A_{k+1}) \Delta (B_1 \cap \dots \cap B_{k+1}) \Leftrightarrow (A_0 \cap A_{k+1}) \Delta (B_0 \cap B_{k+1}) \subseteq$$

$$\subseteq (A_0 \Delta B_0) \cup (A_k \Delta B_k)$$

$$(A_0 \Delta B_0) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup \dots \cup (A_k \Delta B_k)$$

$$\Rightarrow (A_1 \cap \dots \cap A_{k+1}) \Delta (B_1 \cap \dots \cap B_{k+1}) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup \dots \cup (A_{k+1} \Delta B_{k+1})$$

§ 1.17

Условие Определить операции \cup, \cap, \setminus , через:

а) Δ, \cap

Доказательство

$$\cap = \cap$$

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

$$A \setminus B = (A \Delta B) \cap A$$

Условие б) Δ, \cup

Доказательство

$$\cup = \cup$$

$$A \cap B = ((A \cup B) \Delta A) \Delta B$$

$$A \setminus B = (A \cup B) \Delta B$$

Условие и) \setminus, Δ

Доказательство

$$A \cup B = (A \setminus B) \Delta$$

$$A \cap B = (B \setminus (A \setminus B))$$

$$\setminus = \setminus$$

§ 1.18

Условие Доказать, что нельзя определить:

а) \setminus через \cap и \cup

б) \cup через \cap и \setminus

Решение

а) Пусть можно, тогда подставим в это определение непустое множества A и A - их симметрическая разность равна \emptyset , но объединение пересечение могут дать только само A

б) Возьмем 2 конечных непересекающихся множества после выполнения операций \cap и \setminus размер множества не больше, чем максимальное из множества. Но объединение двух множеств дает множество размером суммы размеров. Значит размеры будут разные. \rightarrow нельзя определить.

§ 1.20

Условие Найти все подмножества множеств: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{x\}, \{1, 2\}$.

Ответ \emptyset - нет $\{\emptyset\} - \emptyset$ $\{x\} - \emptyset, \{x\}$ $\{1, 2\} - \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ **§ 2.1****Условие** Доказать, что существуют A, B и C такие, что:а) $A \times B \neq B \times A$ **Решение** $A = \{1\}$ и $B = \{2\}$, так как, пользуясь определением упорядоченной пары: $(\{1\}, \{2\}) = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \neq \{\{2\}, \{2, 1\}\} = (\{2\}, \{1\})$.**Условие** б) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ **Решение**Например, $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$. $\{\{1\}, \{\{1\}, \{\{2\}, \{2, 3\}\}\}\} \neq \{\{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{\{1\}, \{1, 2\}\}, 3\}\}$ **§ 2.3****Условие** Доказать, что если A, B, C и D не пусты, то:а) $A \subseteq B$ и $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$ б) $A = B$ и $C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$ **Решение**(а) $A \times C \subseteq B \times D \Leftrightarrow \forall z = (a, c) : a \in A, c \in C \exists p = (b, d) b \in B, d \in D : z = p. \Leftrightarrow$ (В силу основного свойства упорядоченной пары) $\forall a \in A, c \in C \exists b \in B, d \in D : a = b, c = d. \Leftrightarrow A \subseteq B \& C \subseteq D$.(б) $A \times C = B \times D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D \& B \times D \subseteq A \times C$. Дважды применяя пункт (а), получим, что это равносильно $A \subseteq B \& C \subseteq D \& B \subseteq A \& D \subseteq C. \Leftrightarrow A = B \& C = D$.**§ 2.6(а, б, г)****Условие** Доказать, что:а) $(A \cup B) \times C = (A \times B) \cup (B \times C)$ б) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ г) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ **Решение**

(а)

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \times C &\sim \exists u \exists v (u \in (A \cup B) \& v \in C \& x = (u, v)) \sim \\
&\sim \exists u \exists v ((u \in A \vee u \in B) \& v \in C \& x = (u, v)) \sim \\
&\sim \exists u \exists v ((u \in A \& v \in C \& x = (u, v)) \vee (u \in B \& v \in C \& x = (u, v))) \sim \\
&\sim x \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
x \in A \times (B \cup C) &\sim \exists u \exists v (u \in A \ \& \ v \in (B \cup C) \ \& \ x = (u, v)) \sim \\
&\sim \exists u \exists v (u \in A \ \& \ v \in B \vee v \in C \ \& \ x = (u, v)) \sim \\
&\sim \exists u \exists v ((u \in A \ \& \ v \in B \ \& \ x = (u, v)) \vee ((u \in A \ \& \ v \in C \ \& \ x = (u, v))) \sim \\
&\sim x \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

(Г)

$$\begin{aligned}
x \in (A \setminus B) \times C &\sim \exists u \exists v (u \in A \setminus B \ \& \ v \in C \ \& \ x = (u, v)) \sim \\
&\sim \exists u \exists v (u \in A \ \& \ u \notin B \ \& \ v \in C \ \& \ x = (u, v)) \sim \\
&\sim \exists u \exists v ((u \in A \ \& \ v \in C \ \& \ x = (u, v)) \ \& \ ((u \notin B \ \& \ v \in C \ \& \ x = (u, v))) \sim \\
&\sim x \in (A \times C) \setminus (B \times C)
\end{aligned}$$

2 Отношения и функции

§ 2.8(а, в)

Условие Найти δ_R , ρ_R , R^{-1} , $R \cdot R$, $R \cdot R^{-1}$, $R^{-1} \cdot R$ для следующих отношений:

(а) $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \text{ и } x \text{ делит } y\}$;

(в) $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D} \text{ и } x + y \leq 0\}$.

Решение (а) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого x существует $y = x$, для которого x делит $y \Rightarrow \delta_R = Pr_1(R) = \mathbb{N}$.

Аналогично это отношение - всюдузначное. $\Rightarrow \rho_R = Pr_2(R) = \mathbb{N}$.

$$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \text{ и } y \text{ делит } x\}.$$

$$\begin{aligned}
R \cdot R &\Rightarrow \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R \ \& \ v \in R \ \& \ pr_1(t) = \\
&= pr_1(u) \ \& \ pr_2(u) = pr_1(v) \ \& \ pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim \\
&\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \ \& \ \exists u \exists v (u_2 : u_1 \ \& \ v_2 : v_1 \ \& \ x = u_1 \ \& \ u_2 = v_1 \ \& \ v_2 = y)\} \sim \\
&\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \ \& \ y : x\} \Rightarrow R \cdot R = R.
\end{aligned}$$

(так как $v_2 = y : v_1 = u_2 : u_1 = x$, значит x должен делить y)

$$\begin{aligned}
R \cdot R^{-1} &\Rightarrow \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R \ \& \ v \in R^{-1} \ \& \ pr_1(t) = \\
&= pr_1(u) \ \& \ pr_2(u) = pr_1(v) \ \& \ pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim \\
&\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \ \& \ \exists u \exists v (u_2 : u_1 \ \& \ v_1 : v_2 \ \& \ x = u_1 \ \& \ u_2 = v_1 \ \& \ v_2 = y)\} \sim \\
&\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow R \cdot R^{-1} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}
\end{aligned}$$

(так как $u_2 = v_1 : v_2 = y$ и $u_2 : u_1 = x$, то можно взять в качестве u_2 число, делящееся и на x , и на y , а сами x и y связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную пару (x, y))

$$\begin{aligned}
R^{-1} \cdot R &\Rightarrow \{t \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R^{-1} \ \& \ v \in R \ \& \ pr_1(t) = \\
&= pr_1(u) \ \& \ pr_2(u) = pr_1(v) \ \& \ pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim \\
&\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \ \& \ \exists u \exists v (u_1 : u_2 \ \& \ v_2 : v_1 \ \& \ x = u_1 \ \& \ u_2 = v_1 \ \& \ v_2 = y)\} \sim \\
&\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}\} \Rightarrow R^{-1} \cdot R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}
\end{aligned}$$

(так как $x = u_1 \dot{ : } u_2 = v_1$ и $v_2 = y \dot{ : } v_1$, то можно взять в качестве v_1 число 1, на которое делится и x , и y , а сами x и y связаны не будут. Значит, нет дополнительных условий на упорядоченную пару (x, y))

(в) Это отношение - всюдуопределенное, так как для любого x существует $y = -x$, для которого $x + y \leq 0 \Rightarrow \delta_R = Pr_1(R) = \mathbb{D}$.

Аналогично это отношение - всюдузначное. $\Rightarrow \rho_R = Pr_2(R) = \mathbb{D}$.

$R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\} = R$, так как отношение - симметричное.

$$\begin{aligned} R \cdot R &\Leftrightarrow \{t \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} | \exists u = (u_1, u_2) \exists v = (v_1, v_2) (u \in R \& v \in R \& pr_1(t) = \\ &= pr_1(u) \& pr_2(u) = pr_1(v) \& pr_2(v) = pr_2(t))\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D} \& \exists u \exists v (u_1 + u_2 \leq 0 \& v_1 + v_2 \leq 0 \& x = u_1 \& u_2 = v_1 \& v_2 = y)\} \sim \\ &\sim \{(x, y) | x, y \in \mathbb{D}\} \Rightarrow R \cdot R = \mathbb{D} \times \mathbb{D}. \end{aligned}$$

(условие на x, y : $x + v_1 \leq 0$ и $v_1 + y \leq 0$, но всегда можно взять v_1 таким, что оба условия будут выполняться)

В силу симметричности отношения $R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = R \cdot R = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

§ 2.9(а, в)

Условие Доказать, что:

(а) $\delta_R = \emptyset \Leftrightarrow R = \emptyset \Leftrightarrow \rho_R = \emptyset$;

(в) $\delta_{R_1 \cdot R_2} = R_2^{-1}(\rho_{R_2} \cap \delta_{R_1})$.

Решение (а) $\delta_R = \emptyset \Leftrightarrow \forall u \in \cup \cup R \forall v (u, v) \notin R \Leftrightarrow R = \emptyset$

$\rho_R = \emptyset \Leftrightarrow \forall v \in \cup \cup R \forall u (u, v) \notin R \Leftrightarrow R = \emptyset$

(в) При решении предполагается, что сначала применяется R_2 , потом R_1 .

$$\begin{aligned} x \in \delta_{R_1 \cdot R_2} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in R_1 \cdot R_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists y : \exists u \exists v ((u \in R_1) \& (v \in R_2) \& (x = pr_1(v)) \& (pr_2(v) = pr_1(u)) \& (pr_2(u) = y)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists y \exists u \exists v \exists z : (u \in R_1) \& (v \in R_2) \& (z = pr_2(v) = pr_1(u)) \& \\ &\& (x = pr_1(v)) \& ((x, z) \in R_2) \& (y = pr_2(u)) \& ((z, y) \in R_1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists z : ((x, z) \in R_2) \& (z \in \delta_{R_1}) \& (z \in \rho_{R_2}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists z : ((z, x) \in R_2^{-1}) \& (z \in \delta_{R_1}) \& (z \in \rho_{R_2}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in R_2^{-1}(\rho_{R_2} \cap \delta_{R_1}). \end{aligned}$$

§ 2.12 (б, г)

Условие Доказать, что для любых бинарных отношений:

(б) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

Решение

$$\begin{aligned} (б) (R^{-1})^{-1} &\Leftrightarrow \{u \in Pr_2(R^{-1}) \times Pr_1(R^{-1}) | (pr_2(u), pr_1(u)) \in R^{-1}\} \sim \\ &\sim \{u \in Pr_2(R^{-1}) \times Pr_1(R^{-1}) | t = (pr_2(u), pr_1(u)), (pr_2(t), pr_1(t)) \in R\} \sim \\ &\sim \{u \in Pr_1(R) \times Pr_2(R) | (pr_1(u), pr_2(u)) \in R\} \Rightarrow (R^{-1})^{-1} = R. \end{aligned}$$

(г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} \Leftrightarrow \{t \in Pr_2(R_1 \cap R_2) \times Pr_1(R_1 \cap R_2) | (pr_2(t), pr_1(t)) \in (R_1 \cap R_2)\} \sim \{t \in (Pr_2(R_1) \cap Pr_2(R_2)) \times (Pr_1(R_1) \cap Pr_1(R_2)) | (pr_2(t), pr_1(t)) \in R_1 \& (pr_2(t), pr_1(t)) \in R_2\} \sim \{t \in (Pr_2(R_1) \times Pr_1(R_1)) \cap (Pr_2(R_2) \times Pr_1(R_2)) | (pr_2(t), pr_1(t)) \in R_1 \& (pr_2(t), pr_1(t)) \in R_2\} \Rightarrow (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}.$

(было использовано свойство из задачи 4(а): $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$)

§ 2.13

Условие Для каких бинарных отношений R справедливо $R^{-1} = -R$?

Решение Пусть $R \subseteq A \times B$.

1) Предположим, что $x \in A \cap B$. Тогда $(x, x) \in R \Leftrightarrow (x, x) \in R^{-1}$. Если $R^{-1} = -R$, то получим, что (x, x) лежит и в отношении, и в его дополнении, чего быть не может.

2) Значит, $A \cap B = \emptyset$. По определению $R \subseteq A \times B$, $R^{-1} \subseteq B \times A$. Значит, $-R = R^{-1} = \emptyset$. Получим, что $R = \emptyset$ и $R = A \times B$, что возможно только при $A = B = \emptyset$.

§ 2.14

Условие Пусть A и B - конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно.

а) Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств A и B ?

б) Сколько имеется функций из A в B ?

в) Сколько имеется 1-1-функций из A в B ?

г) При каких m и n существует взаимно однозначное соответствие между A и B ?

Решение а) Столько, сколько подмножеств у множества упорядоченных пар элементов A и B . Всего пар mn , бинарных отношений 2^{mn} .

б) Функция по определению - это всюдуопределенное прямое однозначное бинарное отношение, то есть каждый элемент множества A (из m штук) входит в отношение ровно с одним элементом множества B (из n штук). Тогда всего функций $\underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_m = n^m$.

в) Функция f называется 1-1-функцией, если $\forall x_1, x_2, y: y = f(x_1), y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Если $n < m$, то не существует ни одной такой функции, так как не для всех элементов множества A найдется элемент B , входящий с ним в отношение. Если $n \geq m$, то число таких функций равно $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$, так как выбор каждой новой "пары" для элемента множества A уменьшает на 1 количество возможных пар для прочих элементов множества A .

г) При $m = n$, тогда и только тогда каждый элемент множества A сможет входить в отношение ровно с одним элементом множества B и наоборот.

§ 2.22

Условие Доказать, что если f есть функция из A в B и g есть функция из B в C , то $g \cdot f$ есть функция из A в C .

Решение Проверим *всюдуопределенность* и *прямую однозначность* данной суперпозиции отношений.

$\forall x \in Pr_1(f) \exists! y \in Pr_2(f) : f(x) = y$ в силу всюдуопределенности и прямой однозначности f . $Pr_2(f) \subseteq B$, значит, $\exists! z \in Pr_2(g) : g(y) = z$ в силу всюдуопределенности и прямой однозначности g . Получаем, что

$$\forall x \in Pr_1(f) \exists! z \in Pr_2(g) : g(f(x)) = z$$

Значит, суперпозиция является всюдуопределенным и прямо однозначным бинарным отношением, то есть функцией. Причем это будет функция $A \rightarrow C$, так как $A \subseteq Pr_1(f)$, $C \subseteq Pr_2(g)$.

§ 2.25(а-д)

Условие Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами:

- а) $A \times B$ и $B \times A$;
- б) $A \times (B \times C)$ и $(A \times B) \times C$;
- в) $(A \times B)^C$ и $A^C \times B^C$;
- г) $(A^B)^C$ и $A^{B \times C}$;
- д) $A^{B \cup C}$ и $A^B \times A^C$, если $B \cap C = \emptyset$.

Решение Будем пользоваться теоремой Кантора-Шрёдера-Бернштейна: необходимым и достаточным условием существования биекции между множествами X и Y является существование пары инъекций: из X в Y и из Y в X .

(а) $\forall x = (u, v) \in A \times B \exists y = (v, u) \in B \times A$, причем если $x_1 \neq x_2$, то соответствующие $y_1 \neq y_2$. Аналогично определяется и вторая инъекция из $B \times A$ в $A \times B$. Значит, по теореме между множествами существует биекция.

(б) $\forall x = (u, (v, w)) \in A \times (B \times C) \exists y = ((u, v), w) \in (A \times B) \times C$, причем если $x_1 \neq x_2$, то соответствующие $y_1 \neq y_2$ (так как различие в одной из компонент u, v, w дает и различие упорядоченных пар). Аналогично определяется инъекция из $(A \times B) \times C$ в $A \times (B \times C)$. По теореме между множествами есть биекция.

(в) $X^Y \Leftrightarrow$ множество всех функций из Y в X .

$\forall f = f(x) = (u, v) : C \rightarrow (A \times B) \exists (g, h) \in A^C \times B^C$, определяемая так, что $g(x) = u$, $h(x) = v$. Такое отображение будет инъекцией, так как если $f_1 \neq f_2$, то их значения отличаются хотя бы на одном элементе z , $f_1(z) = (u_1, v_1)$, $f_2(z) = (u_2, v_2)$, $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$. Отсюда $u_1 \neq u_2 \vee v_1 \neq v_2 \Rightarrow$ соответствующие функции g_1, h_1 не равны функциям g_2, h_2 , значит и упорядоченные пары не равны.

Обратно, $\forall (g, h) \in A^C \times B^C, g(x) = u, h(x) = v, \exists f(x) = (u, v) : C \rightarrow (A \times B)$. То, что это - инъекция, доказывается аналогично. Значит, по теореме между этими множествами есть биекция.

(г) $\forall f = f(g) = f(g(x)) \in (A^B)^C \exists h = h(u, v) \in A^{B \times C} : v = x, u = g, h(g, x) = f(g(x))$. Если $f_1 \neq f_2$, то и $h_1 \neq h_2$.

Обратно, $\forall h = h(u, v) \in A^{B \times C} \exists f = f(g) = f(g(x)) \in (A^B)^C : x = v, g(x) = u, f(g(x)) = h(u, v)$. Аналогично это будет инъекция. По теореме существует биекция.

(д) $\forall f = f(x) \in A^{B \cup C} \exists (g, h) \in A^B \times A^C : g(x) = f(x), h(x) = f(x), x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ (можно взять ограничения так определенных функций на соответствующие множества). Если $f_1 \neq f_2$, то есть $\exists x : f_1(x) \neq f_2(x)$, то $(g_1(x), h_1(x)) \neq (g_2(x), h_2(x))$. Значит, это инъекция.

Обратно, $\forall (g, h) = (g(x), g(y)) \in A^B \times A^C \exists f = f(z) \in A^{B \cup C} : f(x) = g(x), \text{ если } x \in A \setminus B, f(x) = h(x), \text{ если } x \in B \setminus A. \text{ ???}$

§ 2.31(а)

Условие Доказать, что для любой функции f :

- а) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Решение

$$\begin{aligned} f[A \cup B] &= \{y \in Pr_2(f) \mid \exists x(x \in A \cup B \ \& \ (x, y) \in f)\} \\ \exists x(x \in A \cup B \ \& \ (x, y) \in f) &\sim \exists x(x \in A \vee x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \sim \\ &\sim \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \vee (x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \end{aligned}$$

Значит, $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.

§ 2.32(а)

Условие Доказать, что для любой функции f :

а) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Решение

$$\begin{aligned} f[A \cap B] &= \{y \in Pr_2(f) \mid \exists x(x \in A \cap B \ \& \ (x, y) \in f)\} \\ \exists x(x \in A \cap B \ \& \ (x, y) \in f) &\sim \exists x(x \in A \ \& \ x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ (x \in B \ \& \ (x, y) \in f) \end{aligned}$$

Значит, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

§ 2.34

Условие Доказать, что $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ для любой функции f .

Решение

$$\begin{aligned} f[A] \setminus f[B] &= \{y \in Pr_2(f) \mid \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ \neg \exists x(x \in B \ \& \ (x, y) \in f)\}. \\ \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ \forall x \neg(x \in B \ \& \ (x, y) \in f) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \exists x(x \in A \ \& \ (x, y) \in f) \ \& \ (x \notin B \vee (x, y) \notin f) &\sim \\ \sim \exists x(x \in A \ \& \ x \notin B \ \& \ (x, y) \in f). \end{aligned}$$

Значит, $f[A] \setminus f[B] \subseteq f[A \setminus B]$.

§ 2.35

Условие Доказать, что если в предыдущем примере f есть 1-1-функция, то выполняется равенство.

Решение Пусть f является 1-1-функцией, то есть $\forall x_1, x_2, y : y = f(x_1), y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Включение в одну сторону доказано в предыдущей задаче.

$y \in f(A \setminus B) \Rightarrow \exists! x \in A \setminus B : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A)$. Так как для элемента y образа существует единственный прообраз, то $\forall z \in B f(z) \neq y$ (потому что элемент x такой, что $f(x) = y$, лежит в $A \setminus B$, значит, не лежит в B). $\Rightarrow y \notin f(B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.

Вместе с результатом предыдущей задачи получаем:

$$f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B).$$

§ 2.38(а, в, д)

Условие Доказать следующие тождества для любой функции f :

а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

в) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

д) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Решение а)

$$\begin{aligned} f^{-1} &\Leftarrow \{t \in Pr_2(f) \times Pr_1(f) | f(pr_2(t)) = pr_1(t)\}, \\ f^{-1}[A \cup B] &\Leftarrow \{v \in Pr_2(f^{-1}) | \exists p(p \in A \cup B) \ \& \ (p, v) \in f^{-1}\} \sim \\ &\sim \{v \in Pr_1(f) | \exists p(p \in A \cup B) \ \& \ f(v) = p\} \sim \\ &\sim \{v \in Pr_1(f) | \exists p(p \in A \vee p \in B) \ \& \ f(v) = p\} \sim \\ &\sim \{v \in Pr_1(f) | \exists p(p \in A) \vee \exists p(p \in B) : f(v) = p\} \Rightarrow f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Условие В) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

Решение

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \cap B] &\equiv \{v \in Pr_2(f^{-1}) | \exists p(p \in A \cap B) \ \& \ (p, v) \in f^{-1}\} \\ \exists p(p \in A \cap B) \ \& \ ((p, v) \in f^{-1}) &\sim \exists p(p \in A \ \& \ p \in B) \ \& \ ((p, v) \in f^{-1}) \sim \\ &\sim \exists p(p \in A) \ \& \ ((p, v) \in f^{-1}) \ \& \ (p \in B) \Rightarrow f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \end{aligned}$$

(Д)

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \setminus B] &= \{v \in Pr_2(f^{-1}) | \exists p(p \in A \setminus B) \ \& \ (p, v) \in f^{-1} \\ &\exists p(p \in A \setminus B) \ \& \ (p, v) \in f^{-1} \sim \exists p(p \in A \ \& \ p \notin B) \ \& \ (p, v) \in f^{-1} \sim \\ &\sim \exists p(p \in A) \ \& \ (p, v) \in f^{-1} \ \& \ p \notin B \Rightarrow f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) \end{aligned}$$

3 Мощности множеств

§ 4.1

Условие Доказать, что:

- 1) $A \sim A$ (рефлексивность)
- 2) Если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметричность)
- 3) Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность)

Решение

- 1) Рефлексивность: $A \sim A \Leftrightarrow A \subseteq A \wedge A \subseteq A$, но последнее всегда истинно в силу рефлексивности \subseteq
- 2) Симметричность: $A \sim B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \subseteq B \Leftrightarrow B \sim A$
- 3) $A \sim B \wedge B \sim C \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \wedge B \subseteq C \wedge C \subseteq B$, откуда в силу транзитивности \subseteq следует $A \subseteq C \wedge C \subseteq A$, что и требовалось

§ 4.5

Условие Доказать, что:

- Всякое подмножество конечного множества конечно
- Объединение конечного числа конечных множеств конечно
- Прямое произведение конечного числа конечных множеств конечно

Доказательство

Доказательство от противного

§ 4.8

Условие Доказать, что множество тогда и только тогда бесконечно, когда оно эквивалентно некоторому своему подмножеству.

Доказательство

Докажем с помощью критерия Дедекинда

В одну сторону. Пусть $u_1 \subset u$ и $f : u \leftrightarrow u_1$ — биекция, докажем существование инъекции $g : w \rightarrow u$.

По условию $\exists x_0 (x_0 \in u \setminus f[u])$.

Определим $g : w \rightarrow u$ на основе следующих логических условий:

$g(0) = x_0$ и $g(n+1) = f(g(n))$

Индукцией можно показать, что в силу биективного характера f

$u \supset f[u] \supset f[f[u]] \supset \dots$

$x_0 \in u \setminus f[u], x_1 \in f[u] \setminus f[f[u]], \dots$

из чего следует, что все x_i различны между собой, т. е. построенная нами $g : w \rightarrow u$ — инъекция.

В обратную сторону. Пусть множество u бесконечно. Тогда существует инъекция $f : w \rightarrow u$. «Выбросим» из u элемент $f(0)$ и построим биекцию $g : f[w] \leftrightarrow f[w] \setminus \{f(0)\}$ по условию $g(f(n)) = f(n+1)$.

§ 4.10 а

Условие Пусть область определения счетна, доказать, что область значений этой функции конечна или счетна.

Доказательство

Докажем, что она не более чем счетна.

Тк область определения счетна, а каждой точки из области определения можно поставить в соответствие значение функции в этой точке \Rightarrow область значений не более чем счетна \Rightarrow область значений этой функции конечна или счетна.

§ 4.13

Условие Доказать, что:

а) Если A бесконечно и B — конечное или счетное множество, то $A \cup B \sim A$

Доказательство Рассмотрим 2 варианта A счетно и A не счетно.

Докажем от противного, что в каждом из этих случаях $A \cup B$ счетно и $A \cup B$ не счетно соответственно.

Условие б) Если A бесконечно и несчетно, B конечное или счетное множество, то $A \setminus B \sim A$

Доказательство Пусть это не так $\Rightarrow A \setminus B$ — счетно или конечно. Доказываем от противного, что это невозможно.

§ 4.15

Условие Доказать, что:

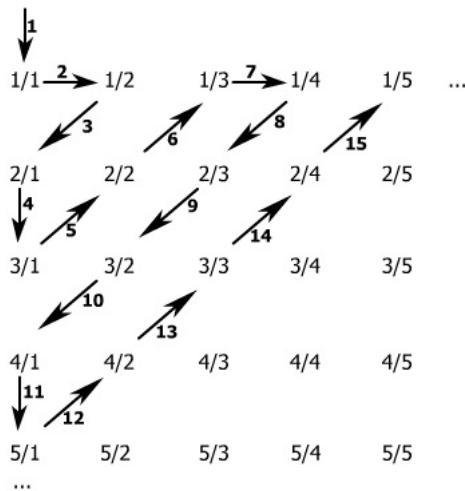
а) Множество целых чисел счетно

Доказательство пронумеруем

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...

Условие б) Множество рациональных чисел счетно

Доказательство пронумеруем



Условие в) Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ счетно при $a < b$

Доказательство Множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$ - бесконечно. (тк множество плотно)

\Rightarrow оно не менее чем счетно. Но по доказанному выше оно не более, чем счетно \Rightarrow счетно.

Условие г) Множество пар $\langle x, y \rangle$, где x и y - рациональные числа, счетно

Доказательство Множество рациональных чисел счетно.

Тогда выпишем все рациональные числа сеткой и докажем, что кол-во пар счетно аналогично доказательству 4.15 б

§ 4.16

Условие Доказать, что множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов некоторого счетного множества, есть счетное множество.

Доказательство Докажем, что множество последовательностей длины n счетно.

Используя 4.15 Г мы знаем, что $\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$

$\Rightarrow \aleph_0^n = \aleph_0$.

Кол-во последовательностей конечной длины счетно \Rightarrow множество всех последовательностей конечной длины тоже счетно.

§ 4.18

Условие Доказать, что множество многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами счетно.

Доказательство Многочлен от одной переменной с целыми коэффициентами представляет из себя конечную последовательность целых чисел \Rightarrow сводится к задаче 4.16

§ 4.19

Условие Доказать счетность множества алгебраических чисел, т. е. чисел, являющихся корнями многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами.

Доказательство Кол-во корней у многочлена степени n не более, чем n .

Тк кол-во многочленов с целыми коэффициентами от одной переменной счетно (по задаче 4.18), то и кол-во корней счетно.

Тк можем пронумеровать.

§ 4.20

Условие Доказать, что любое множество попарно непересекающихся открытых интервалов на действительной прямой не более чем счетно.

Доказательство Кол-во рациональных чисел счетно. А в каждом интервале есть хотя бы одно рациональное число \Rightarrow интервалов не более чем счетное кол-во.

§ 4.23

Условие Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции на действительной оси не более, чем счетно.

Доказательство У монотонной функции каждая точка разрыва соответствует интервалу на оси Y

Эти интервалы попарно непересекающиеся \Rightarrow по задаче 4.20 множество не более, чем счетно.

§ 4.24

Условие Доказать, что:

а) $(0, 1) \sim [0, 1] \sim (0, 1] \sim [0, 1)$

Доказательство

$(0, 1) \sim [0, 1]$

$1/2 \leftrightarrow 0$

$1/4 \leftrightarrow 1$

$1/k^n \leftrightarrow 4/k^n$

остальные числа переведем в себя же соответственно

$(0, 1] \sim [0, 1]$

$1 \leftrightarrow 1$

$1/2 \leftrightarrow 0$

$1/k^n \leftrightarrow 2/k^n$

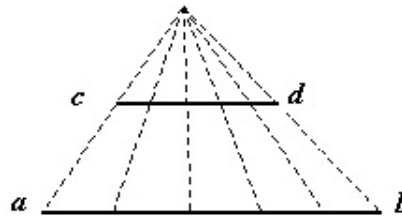
остальные числа переведем в себя же соответственно

$(0, 1] \sim [0, 1)$

$x \leftrightarrow 1/2 - |1/2 - x|$ (симметрично относительно $1/2$)

Условие б) $[a, b] \sim [c, d]$, где $a < b, c < d$

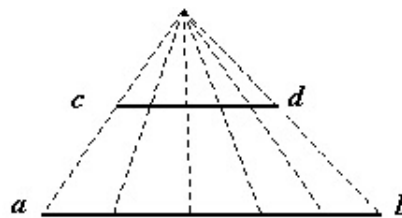
Доказательство



Условие в) $[a, b] \sim \mathbb{D}$

Доказательство

по пункту а) $(0, 1) \sim [0, 1]$



§ 4.30

Условие Какова мощность иррациональных чисел?

Доказательство 1) Множество иррациональных чисел более чем счетно.

Доказательство.

Пусть оно счетно. Выпившем все числа по порядку.

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 0, a_{11} \ a_{12} \ a_{13}, \dots, \\ c_2 = 0, a_{21} \ a_{22} \ a_{23}, \dots, \\ c_3 = 0, a_{31} \ a_{32} \ a_{33}, \dots, \\ \dots \dots \dots \\ c_n = 0, a_{n1} \ a_{n2} \ a_{n3}, \dots, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\}$$

Построим теперь число $C = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots$

Так что $b_i \neq 0, b_i \neq 9, b_i \neq a_{ii}$

Получаем, число, которого нет в таблице, но которое является иррациональным.

§ 4.31

Условие Доказать существование трансцендентных (неалгебраических) чисел.

Доказательство Докажем от противного.

Пусть их нет. Тогда $\mathbb{R} \sim$ множество алгебраических чисел.

Но \mathbb{R} более чем счетно, а множество всех алгебраических чисел счетно

\Rightarrow существуют неалгебраические числа.

§ 4.36

Условие Какова мощность множества:

- а) всех счетных последовательностей действительных чисел;
- б) всех непрерывных функций на действительной прямой;
- в) всех монотонных функций на действительной прямой?

Решение (а) Мощность такого множества равна мощности \mathfrak{c} , так как количество таких различных счетных последовательностей равно $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ (счетное число действительных членов), а мощность этого множества равна мощности $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, так как $\mathbb{D} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, поэтому мощность равна мощности $\mathbb{N}^{\mathbb{D}}$, то есть равна мощности \mathfrak{c} .

(б) Непрерывная функция f однозначно определяется счетным множеством $\{(x, f(x)) | x \in \mathbb{Q}\}$. Это счетное множество упорядоченных пар можно представить как счетную последовательность. Поэтому множество таких функций равномощно \mathfrak{c} .

(в) Монотонную функцию можно однозначно определить по значениям в следующем счетном множестве точек: точки разрыва (их не более, чем счетное количество) и рациональные точки. Аналогично предыдущему пункту тогда множество монотонных функций равномощно \mathfrak{c} .

§ 4.38

Условие Доказать, что множество действительных функций, заданных на сегменте $[0, 1]$, имеет мощность, большую \mathfrak{c} .

Решение От противного. Пусть $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^{[0, 1]}$ - 1-1-функция. Рассмотрим $f(x) = (\varphi(x))(x) + 1$, когда $x \in [0, 1]$. Тогда $f \in \mathbb{D}^{[0, 1]}$, $f = \varphi(x_0)$ для некоторого $x_0 \in [0, 1]$. Значит, $(\varphi(x_0))(x_0) = f(x_0) = (\varphi(x_0))(x_0) + 1$. Такого не может быть, получили противоречие. Значит, мощность такого множества больше мощности множества \mathfrak{c} .

§ 4.39

Условие

Решение

§ 4.42

Условие Доказать, что не существует множества, содержащего все множества.

Решение От противного. Пусть существует множество X , содержащее все множества. Тогда X содержит и множество всех своих подмножеств, то есть $P(X) \subseteq X$. Но мощность множества всех подмножеств любого множества больше, чем мощность множества (задача 4.40). Поэтому $P(X)$ не может быть подмножеством X (иначе должно было бы иметь не большую мощность). Противоречие. Значит, такого множества X не существует.

4 Отношение эквивалентности

§ 3.6

Условие Построить бинарное отношение
а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное

Решение a - нормированное пространство

$$r \subseteq a * a : (x, y) \in r \leftrightarrow \|x - y\| \leq \delta$$

$$\text{реф. : } \forall x \|x - x\| = 0 \leq \delta$$

$$\text{симм. : } \|x - y\| = \|y - x\|$$

$$\text{Транзитивности нет } \|x - y\| \leq \delta \text{ и } \|y - z\| \leq \delta \Rightarrow \|x - z\| \leq \delta$$

Условие б) рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное

Решение $r \subseteq \mathbb{R} * \mathbb{R} : (x, y) \in r \leftrightarrow x \leq y \leq x^2$

$$\text{реф. : } \forall x (x, x) \in r$$

$$\text{антисимметрично: } x \leq y \leq x^2 \text{ и } y \leq x \leq y^2 \Rightarrow x = y$$

$$\text{не транз. : } (2, 3) \in r, (3, 8) \in r, (2, 8) \notin r$$

Условие в) рефлексивное, не симметричное, транзитивное

Решение \leq на \mathbb{R}

$$x \leq x$$

$$x \leq y, y \leq z \rightarrow x \leq z$$

$$x \leq y \nrightarrow y \leq x$$

Условие г) антисимметричное, транзитивное, не рефлексивное

Решение $a \in \mathbb{R}$

$$r \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$r = \{(a; a)\}$$

§ 3.7

Условие а) Построить бинарное отношение, симметричное, транзитивное, но не рефлексивное.

Решение $r \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$r = \{(a; a)\}$$

Условие б) Доказать, что если R есть транзитивное и симметричное отношение на множестве A и $\delta_R \cup \rho_R = A$, то R есть эквивалентность на A .

Решение тк $\delta_R \cup \rho_R = A$, то $\exists x \in a \exists y :$

либо $(x, y) \in R$ либо $(y, x) \in R$

Из симметричности $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow (x, x) \in R$

Те R - отношение эквивалентности.

§ 3.8

Условие Доказать, что если R симметрично и антисимметрично, то оно транзитивно

Решение Симметричность $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$

Антисимметричность $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow y = x$

Значит в R лежат только пары вида $(x, x) \Rightarrow$ транзитивно

§ 3.9

Условие Доказать, что отношение R на множестве a является одновременно эквивалентностью и частичным порядком тогда и только тогда, когда $R = i_a$

Решение Если $R = i_a$, то очевидно выполнены рефлексивность, симметричность, антисимметричность и транзитивность.

Обратно:

Рефлексивность $\Rightarrow \forall x \in a (x, x) \in R \Rightarrow i_a \in R$

Симметричность и антисимметричность $x = y \Rightarrow R \in i_a$

§ 3.11

Условие a - множество всех прямых в \mathbb{R}^2 , являются ли эквивалентностями следующие отношения? а) параллельность б) перпендикулярность

Решение а) является $a \parallel x$

$x \parallel y \rightarrow y \parallel x$

$x \parallel y \wedge y \parallel z \rightarrow x \parallel z$

б) нет $\neg x \perp x$

§ 3.12

Условие Определим на \mathbb{R} отношение

$a \text{ r } b \leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{Q}$

Доказать, что r - эквивалентность

Решение $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$

$a - b \in \mathbb{Q} \rightarrow (b - a) = -(a - b) \in \mathbb{Q}$

$(a - b) \in \mathbb{Q} \wedge (b - c) \in \mathbb{Q} \rightarrow (a - c) = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{Q}$

§ 3.17

Условие Доказать, что существуют взаимнооднозначные соответствия между классом всех разбиений множества a и семейством всех отношений эквивалентности на a

Доказательство Разбиение $\{a_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ ставит в соответствие $(x, y) \in r \leftrightarrow \exists i : x \in a_i, y \in a_i$

§ 3.19

Условие Пусть $f : A \rightarrow B$ - произвольная функция. Положим

$$Q = \{\langle x, y \rangle \mid f(x) = f(y)\}$$

Доказать, что Q является эквивалентностью на A и для отображения f существует разложение

$$f = \varepsilon \cdot f_1,$$

где ε - естественное отображение A на $A \setminus Q = \{[x]_Q \mid x \in A\}$, т.е.

$$\varepsilon(x) = [x]_Q, f_1 - \text{взаимооднозначное соответствие } A \setminus Q \text{ и } f(A)$$

Решение Докажем, что Q является эквивалентностью.

Надо доказать, что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Рефлексивность: $\forall x(x \in A \Rightarrow (x, x) \in Q)$

Симметричность: $\forall x \forall y((x, y) \in Q \Rightarrow (y, x) \in Q)$

Транзитивность: $\forall x \forall y \forall z((x, y) \in Q \wedge (y, z) \in Q \Rightarrow (x, z) \in Q)$

Докажем, что существует разложение. Построим множество A_1 , так что:

$$A_1 = \{x \mid (x \in A \wedge (\nexists y \langle x, y \rangle \in Q)) \vee (x = \{y \mid \exists (y \neq z \wedge \langle z, y \rangle \in Q)\})\}$$

$$\varepsilon : A \rightarrow A_1$$

$$f_1 : A_1 \rightarrow B$$

Отсюда очевидно, что f_1 взаимоднозначное.

§ 3.20

Условие Доказать, что пересечение системы эквивалентностей на a есть эквивалентность.

Решение Рассмотрим $\bigcap_{i \in X} r_i$

$\forall x \in a \forall i \in X (x, x) \in r_i \rightarrow (x, x) \in \bigcap_{i \in X} r_i$ - рефлексивность

$(x, y) \in \bigcap_{i \in X} r_i \rightarrow \forall i \in X (x, y) \in r_i \rightarrow \forall i \in X (y, x) \in r_i \rightarrow (y, x) \in \bigcap_{i \in X} r_i$ - симметричность

$$\begin{cases} (x, y) \in \bigcap_{i \in X} r_i \\ (y, x) \in \bigcap_{i \in X} r_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall i \in X (x, y) \in r_i \\ \forall i \in X (y, z) \in r_i \end{cases} \rightarrow \forall i \in X (x, z) \in r_i \rightarrow (x, z) \in \bigcap_{i \in X} r_i$$

транзитивность

5 Упорядоченные множества и ординальные числа

§ 3.30

Условие а) Доказать, что всякое частично упорядоченное множество содержит не более одного наибольшего элемента. б) Доказать, что наибольший (наименьший) элемент частично упорядоченного множества является единственным максимальным (минимальным) элементом. в) Построить пример частично упорядоченного множества, имеющего точно один минимальный элемент, но не имеющего наименьшего элемента.

Решение а) и б) доказываются от противного. в) Возьмем множество всех целых чисел, где нет наименьшего и минимального элемента и добавим к этому множеству элемент a , который ни с одним из остальных не сравним, что делает его минимальным, но не наименьшим. Получаем множество с 1 минимальным и без наименьших.

§ 3.39

Условие Доказать, что любое частично упорядоченное множество A изоморфно некоторой системе подмножеств A , упорядоченной включением \subseteq .

Решение Доказывается по трансфинитную индукцию.

§ 3.42

Условие Построить линейный порядок на множестве:

- а) \mathcal{N}^2
- б) $\mathcal{N} \cup \mathcal{N}^2 \cup \dots \cup \mathcal{N}^n \cup$
- в) \mathcal{B} комплексных чисел

Решение

- а) $(m_1, n_1) \leq (m_2, n_2) \Leftrightarrow (m_1 \leq m_2) \vee ((m_1 = m_2) \wedge (n_1 \leq n_2))$
- б) $(m_1, m_2, \dots, m_l) \leq (n_1, n_2, \dots, n_k) \Leftrightarrow [\exists i : (i < \min(l, k))][[(m_1 = n_1) \wedge (m_2 = n_2) \wedge \dots \wedge (m_{i-1} = n_{i-1}) \wedge (m_i \leq n_i)]] \vee [(l \leq k) \wedge (m_1 = n_1) \wedge (m_2 = n_2) \wedge \dots \wedge (m_l = n_l)]$
- в) $a + bi \leq c + di \Leftrightarrow [(a < c) \vee ((a = c) \wedge (b \leq d))]$

§ 3.49

Условие

Будем говорить, что частично упорядоченное множество A удовлетворяет

- (1) условию минимальности, если всякое непустое подмножество M множества A обладает по крайней мере одним минимальным элементом;
- (2) условию обрыва убывающих цепей, если всякая строго убывающая цепь A конечна;
- (3) условию индуктивности, если для любого свойства T выполнено следующее: пусть для любого элемента $a \in A$ из справедливости свойства T для всех элементов, строго меньших a , вытекает справедливость T для a ; тогда свойством T обладают все элементы множества A .

Доказать эквивалентность всех этих условий.

Решение

(1) \Rightarrow (2)

Возьмем строго убывающую цепь, бесконечную: $x_1 > x_2 > \dots$

Она не имеет минимального элемента \Rightarrow найдется ее подмножество, у которого не будет минимальных элементов.

(2) \Rightarrow (3)

Пусть существует свойство T : для любого элемента $a \in A$ из справедливости свойства T для всех элементов, строго меньших a , вытекает справедливость T для a , и пусть существует элемент b , для которого свойство T не выполняется.

Но тогда существует элемент $b_1 < b$ такой, что для него не выполнено свойство T . Тогда для него существует аналогичный элемент $b_2 < b_1$ и т.д.

Получили бесконечно строго убывающую цепь.

(3) \Rightarrow (1)

Пусть есть непустое подмножество M множества A . Пусть есть свойство T : $(a \notin A) \vee (\exists \min m \in M)$.

Пусть $a \in A \forall b < a$ выполнено T . Тогда:

либо существует элемент $c < a$, $c \in M$ (для c выполнено $T \Rightarrow$ в M существует минимальный

элемент), либо такого s не существует (тогда $a \notin M$ или $a \in M$ и a - минимальный элемент M). Получается, что для a выполнено T .

Пусть теперь $M \neq \emptyset, a \in M$. Тогда M имеет минимальный элемент.

§ 3.54

Условие Доказать, что любое подмножество множества $P(A)$, частично упорядоченное по включению, имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю грань.

Решение

§ 5.38

Условие

Решение

§ 5.46

Условие

Решение

§ 5.47

Условие

Решение

§ 5.48

Условие

Решение

§ 5.50

Условие Доказать, что для любого порядкового числа α имеет место одно и только одно из утверждений:

- 1) $\alpha = 0$;
- 2) множество $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ имеет максимальный элемент;
- 3) α - предельное порядковое число

Решение Пусть $\alpha \neq 0, \alpha$ - не предельное ($\alpha \neq \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$).

Тогда \exists такое γ , что $\beta \leq \gamma$ для всех $\beta < \alpha$, и неверно, что $\alpha \leq \gamma$. Поэтому $\gamma < \alpha$ и γ - наибольшее в $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$.

§ 5.51

Условие Доказать, что любое порядковое число представимо в виде $\alpha + n$, где α есть предельное порядковое число или 0, n - натуральное число.

Решение Определим рекурсивно функцию $f: \omega \rightarrow x+1$, такую, что $f(0) = x$, $f(n+1) = \cup f(n)$, если $f(n)$ - последующий, и $f(n+1) = \emptyset$, если $f(n)$ - предельный или \emptyset .

Начиная с какого-то момента все элементы $f(n)$ должны обратиться в \emptyset , иначе получим убывающую последовательность ординалов без минимального элемента.

Если n_0 - минимальное число, при котором $f(n_0 + 1) = \emptyset$, то $f(n_0)$ - предельный ординал, из которого можно получить x путем n_0 -кратного прибавления единицы.

Однозначность разложения следует из однозначности на каждом шаге.