ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. Курс лекций.

Оглавление.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

История зарождения вариационного исчисления

Вариационное исчисление, математическая дисциплина, посвященная отысканию экстремальных (наибольших и наименьших) значений функционалов — переменных величин, зависящих от выбора одной или нескольких функций. В. и. является естественным развитием той главы математического анализа, которая посвящена задаче отыскания *экстремумов* функций. Возникновение и развитие В. и. тесно связано с задачами механики, физики и т.д.

Одной из первых задач В. и. была знаменитая задача о *брахистохроне* (И. Бернулли, 1696): определить форму кривой, лежащей в вертикальной плоскости, по которой тяжёлая материальная точка, двигаясь под действием только одной силы тяжести и не имеющая начальной скорости, перейдёт из верхнего положения *A* в нижнее положение *B* за минимум времени. Эта задача сводится к отысканию функции *y* (*x*), доставляющей минимум функционалу

$$T(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx,$$

где *a* и *b* — абсциссы точек *A* и *B.*

Другой такой же «исторической» задачей является задача об отыскании пути, вдоль которого распространяется свет, идущий от источника света (точка *A*) к некоторой точке *B,* в среде с переменной оптической плотностью (то есть в среде, где скорость распространения *v* есть функция координат). Для решения этой задачи может быть использован, так называемый, *Ферма принцип*, согласно которому из всех кривых, соединяющих точки *A* и *B,* луч света распространяется вдоль той, по которой свет приходит из *A* в *B* за кратчайшее время. В простейшем случае, когда свет распространяется в плоскости, задача сводится к отысканию кривой *y* (*x*), доставляющей минимум функционалу

$$T(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{v(x,y)}dx.$$

Из разрозненных задач подобного рода постепенно в 18 в. начало формироваться В. и. Но и после оформления В. и. в самостоятельную дисциплину она продолжала оставаться связанной с различными проблемами механики и физики. На протяжении 2-й половины 18 в. и всего 19 в. делались интенсивные попытки построить здание механики, опираясь на некоторые общие вариационные принципы (см. *Вариационные принципы механики*). Со 2-й половины 19 в. начинают разрабатываться различные вариационные принципы в механике сплошных сред, затем позднее в квантовой механике, электродинамике и т.д. Возникают вариационные принципы и в средах с диссипацией энергии. Исследования во всех подобных областях продолжают служить базой формирования новых задач В. и. и областью приложения её методов. Однако со временем появились и новые классы задач, далеко раздвинувших традиционные границы дисциплины и превративших В. и. в одну из наиболее обширных ветвей современной математики, включающей в себя, с одной стороны, самые абстрактные вопросы, относящиеся в равной степени к топологии и функциональному анализу, а с другой — разнообразные вычислительные методы решения технических или экономических задач.

Функционал

На практике существуют задачи оптимизации, в которых не удается описать качество выбранного решения с помощью целевой функции. В этих задачах критерий качества зависит от функции, определить которую необходимо так, чтобы критерий принял минимальное или максимальное значение.

Вариационными задачами называются задачи о поиске экстремума функционалов, т.е. величин, численное значение которых определяется выбором одной или нескольких функций.

Пример 1. На плоскости (t,x) заданы две точки (t_0,x_0), (T,x_T). Требуется соединить эти две точки гладкой кривой, имеющей наименьшую длину (рис. 1).

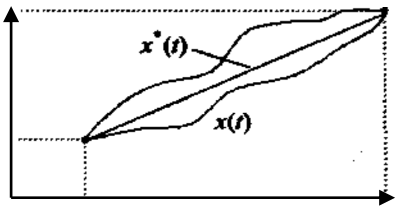


Рис. 1

Длина кривой, соединяющей две заданные точки, находится по формуле

$$I[x(t)]=\int_{t_0}^{T}\sqrt{1+x'^2(t)}\,dt$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению такой непрерывной функции $x'(t)$, имеющей на отрезке $[t_0,T]$ непрерывную производную и удовлетворяющей заданным граничным условиям $x(t_0)=x_0$, $x(T)=x_T$, на которой критерий $I[x(t)]$ примет минимальное значение. Критерий зависит от функции $x(t)$ и представляет собой функционал. Очевидно, решением является прямая $x^*(t)$, соединяющая две заданные точки. ■

Переменная $I[x(t)]$ называется ***функционалом,*** зависящим от функции $x(t)$, если каждой кривой из заданного класса функций M соответствует вполне определенное действительное значение $\boldsymbol{I}$, т.е. функции $x(t)$ соответствует число.

Пример 2. Найти значения функционала $I[x(t)]=\int_{t_0}^{T}x(t)dt$ на следующих кривых, образующих класс M: $x_1(t)=t$, $x_2(()=(^2$, $x_3(t)=-(t-1)^2+1$ (рис. 2).

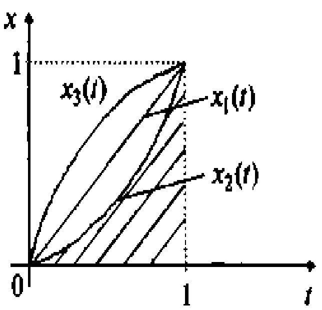


Рис. 2

Заметим, что все кривые проходят через две точки (0;0), (l;l), т.е. удовлетворяют граничным условиям x(0) = 0, x(l) = 1. Найдем значения функционала, соответствующие каждой кривой из класса M:

$$I[x_1(t)]=\int_0^1 tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$I[x_2(t)]=\int_0^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$I[x_3(t)]=\int_0^1[-(t-1)^2+1]dt=\frac{2}{3}$$

В данном примере функционал имеет простой физический смысл – площадь под кривой $x(t)$. Каждой кривой из класса M поставлено в соответствие число, равное площади. Очевидно, может быть сформулирована задача о нахождении такой кривой из класса M, площадь под которой была бы минимальна (максимальна). ■

Функционал $I[x(t)]$ называется *непрерывным,* если малому приращению функции $x(t)$ соответствует малое изменение функционала.

Линейное нормированноепространство

Будем полагать, что функционал $I[x(t)]$ определен на элементах $x(t)$ *линейного нор-*

мированного пространства функций, в котором каждому элементу *x(t)* поставлено в соответствие действительное число $\| x \|$, называемое *нормой* элемента, при этом выполняются следующие условия:

1) $\|x\| > 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ *(0 - нулевой элемент),*

2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

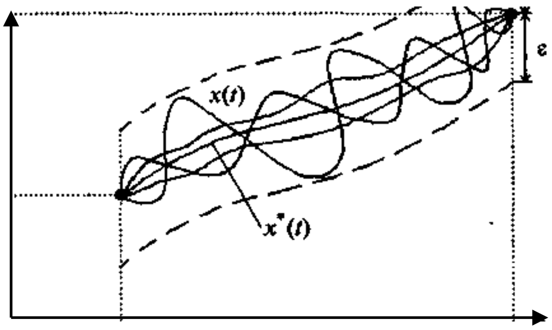
3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$;

для любых элементов x, *y,* принадлежащих пространству, и любого действительного числа λ.

Предметом нашего рассмотрения являются пространства C^0,C^1.

Пространство $C^0([t_0,T])$ состоит из непрерывных функций (кривых) *x(t),* определенных на отрезке $[t_0,T]$- В пространстве $C^0([t_0,T])$ норма вводится следующим образом $\|x\|_0 = \max | x(t) |$.

Пусть $x^*(t) \in C^0([t_0,T])$ и $\varepsilon > 0$ - произвольное число.



ε - окрестностью нулевого порядка кривой *x* (t)* называется совокупность кривых $x(t) \in C^0([t_0,T])$, такая, что

$$\|x - x^*\|_0 = \max_{t\in[t_0,T]} |x(t) - x^*(t)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Это означает, что расстояние от кривой *x*(t)* до кривых *x(t)* мало (рис.3).

Рис.3

Пространство $C^1([t_0,T])$ состоит из непрерывных функций (кривых) *x(t)* , определенных на отрезке *[to,T]* и имеющих на этом отрезке непрерывную производную. В пространстве $C^1([t_0,T])$ норма вводится следующим образом:

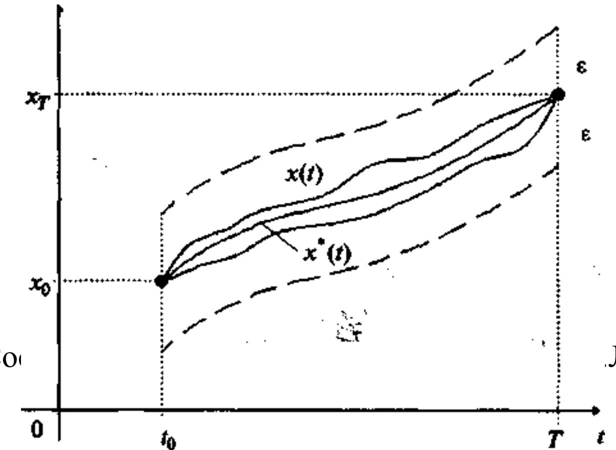
$$\|x\|_1 = \max_{t\in[t_0,T]} |x(t) - x^*(t)| + \max_{t\in[t_0,T]} |x'(t) - x^{*\prime}(t)|$$

Пусть $x'(t) \in C^l([t_a,T])$ и $\varepsilon > 0$ - произвольное число.

ε - окрестностью первого порядка кривой *x* (t)* называется совокупность кривых $x(t) \in C^1([t_0,T])$,, такая, что

$$\|x - x^*\|_0 = \max_{t\in[t_0,T]} |x(t) - x^*(t)| + \max_{t\in[t_0,T]} |x'(t) - x^{*\prime}(t)| < \varepsilon \qquad (2)$$

Это означает, что у кривых *x(t)* и кривой *x*(t)* близки не только ординаты, но и значения производных (рис. 4). Отсюда следует, что кривая, принадлежащая *ε*- окрестности первого порядка, принадлежит и *ε*- окрестности нулевого порядка (рис. 3), но не наоборот.



Аналогично вводится норма в пространстве $C^m([t_0,T])$ функций, имеющих непрерывные производные до порядка *m* включительно, т.е.

$$\|x\|_m = \sum_{p=0}^{m} \max_{t\in[t_0,T]} \left| x^{(p)}(t) \right|$$

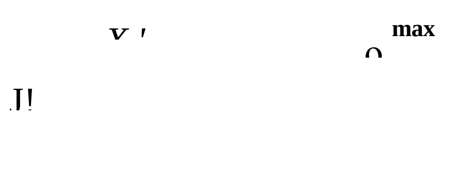


Рис. 4

<u>Пример 3.</u> Найти расстояния $\|x - x^*\|_0$, $\|x - x^*\|_1$ между кривыми $x(t)=t^2$ и $x^*(t)=t^3$, $t \in [0,1]$ в пространствах C°([0,1]) и C^1([0,1]).

Найдем расстояние в пространстве C ([0,1]):

$$\|x - x^*\|_0 = \max_{t\in[0,1]} \left| t^2 - t^3 \right|$$

Из необходимого условия экстремума $(t^2 - t^3)' = 0$ получаем $2t - 3t^2 = 0$ и $t=0$, $t = 2/3$. Вторая производная $(t^2 - 1^3)'' = 2 - 6t$ в точке $t = 2/3$ отрицательна, поэтому в ней достигается локальный максимум. На концах промежутка [0, l] функция $/t^2 - t^3/$ обращается в нуль. Следовательно, в точке $t = 2/3$ - глобальный максимум и можно подсчитать значение расстояния в этой точке, равное $\|x - x^*\|_0 = \frac{4}{27}$.

Найдем расстояние в пространстве C^1 *([0,1]):*

$$\|x - x^*\|_1 = \max_{t\in[0,1]} \left| t^2 - t^3 \right| + \max_{t\in[0,1]} \left| 2t - 3t^2 \right|$$

Так как максимум первого слагаемого уже известен, то исследуем второе слагаемое. Необходимое условие экстремума $(2t-3t^2)' = 2 - 6t = 0$ дает $t = 1/3$. Так как вторая производная $(2t-3t^2)'' = -6$ отрицательна, то в точке $t = 1/3$ – локальный максимум. Значения функции $/2t-3t^2/$ на границе равны: 0 и 1, а значение в точке 1/3 равно 1/3. Поэтому максимум функции $/2t-3t^2/$ достигается в точке $t = 1$ и равен 1. Отсюда

$$\|x - x^*\|_1 = \frac{4}{27} + 1 = \frac{31}{27} .$$

<u>Пример 4.</u> Найти число N, начиная с которого все функции $x(t) = \frac{\sin(nt)}{n^2}$ принадлежат ε-окрестности нулевого порядка функции $x^*(t) = 0$, если $t \in [O, \pi]$, $\varepsilon = 0{,}01$.

Воспользуемся определением ε - окрестности нулевого порядка и оценкой функции sin nt: $\|x - x^*\|_0 = \max_{t\in[0,1]} \left| \frac{\sin(nt)}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2} < \varepsilon$. Отсюда следует, что требуемое свойство выполняется при $n > N = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = 10$. •

Вариация функционала

Кривые *x(t),* на которых сравниваются значения функционала, называются ***допустимыми кривыми*** или ***кривыми сравнения.***

Обозначим через $x^*(t)$ допустимую кривую, на которой функционал достигает экстремума, а через $x(t)$ произвольную допустимую кривую. Разность $x(t) - x^*(t) = \delta x(t)$ называется ***вариацией кривой*** $x^*(t)$.

Вариация *δx(t)* есть функция *t* и принадлежит тому же функциональному пространству, что и функция *x(t)*. Используя вариацию 5х(г) , можно представить любую допустимую кривую *x(t)* в виде

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t \bullet \qquad (3)$$

Однако нами используется и другая запись

$$x(t)=x'(t)+\alpha\,\delta x(t)\,. \qquad (4)$$

В выражении (4) *δx(t)* - фиксированная функция, а *α* - числовой параметр. Очевидно, что при $\alpha = 0$ справедливо $x(t)= x^*(t)$.

Назовем ***приращением функционала ΔI*** разность

$$\Delta I = I[x(t)] - I[x^*(t)] = I[x^*(t) + \alpha\cdot\delta x(t)] - I[x^*(t)] \qquad (5)$$

Линейным функционалом называется функционал *I[x(t)]*, удовлетворяющий следующим условиям:

$$I[c\cdot x(t)] = c\cdot I[x(t)],$$

где *c* — произвольная постоянная, и

$$I[x_1(t) + x_2(t)] = I[x_1(t)] + I[x_2(t)]$$

Дадим определение первой вариации функционала с использованием (3).

Если приращение функционала $\Delta I = I[x(t)+\delta x(t)] - I[x(t)]$ можно представить в виде

$$\Delta I = \delta I[x(t),\delta x] + \beta[x(t),\delta x]\cdot\max|\delta x|,$$

где *δI[x(t),δx]* - линейный по отношению к δx(*t*) функционал, max|δx| - максимальное значение |δx| и $\beta[x(t),\delta x] \to 0$ при $\max|\delta x| \to 0$, то главная, линейная по отношению к δx часть приращения функционала, т.е. δI[x(t),δx], называется ***первой вариацией функционала*** .

$$I[x^*(t) + \alpha\cdot\delta x(t)]$$

Можно дать другое определение первой вариации, используя (4).

Так как $I[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]$ есть функция φ(α) числового параметра α, то, разложив эту функцию в ряд Тейлора в окрестности точки α = 0 по степеням α , найдем

$$I[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)] - I[x^*(t)] = \alpha\cdot\delta I + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 I + \ldots, \qquad (6)$$

где

$$\delta I = \left.\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{dI[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \qquad (7)$$

и называется ***первой вариацией функционала,*** а

$$\delta^2 I = \left.\frac{d^2 I[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} \qquad (8)$$

и называется ***второй вариацией функционала*** **и т.д.**

Замечания 1.

1. Мы привели два определения вариации функционала. Покажем их связь . Если функционал имеет вариацию в смысле главной линейной части приращения, то это приращение имеет вид

$$\Delta I = I[x(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]-I[x(t)]=\delta I[x(t),\alpha\delta x(t)]+\beta[x(t),\alpha\cdot\delta x]\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta x|$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{d\alpha}I[x(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]|_{\alpha=0}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta I}{\alpha}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\delta I[x(t),\alpha\delta x(t)]+\beta[x(t),\alpha\cdot\delta x]\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta x|}{\alpha}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\delta I[x(t),\alpha\cdot\delta x]}{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[x(t),\alpha\cdot\delta x]\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta x|}{\alpha}=\delta I[x(t),\delta x],$$

так как *δI[x(t),α δx] = αδI[x(t),δx]* в силу линейности, а $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[x(t),\alpha\cdot\delta x]\cdot|\alpha|\cdot\max|\delta x|}{\alpha}=0$

потому что β*[x(t), αδx]* $\to 0$ при α $\to$ 0 .

Следовательно, если существует вариация в смысле главной линейной части приращения функционала, то существует вариация в смысле производной по параметру и эти определения эквивалентны.

2. В литературе вместо *I[x(t)]* часто используется обозначение *I[x(•)]* , чтобы явно различить элемент x(•) соответствующего функционального пространства и значение функции *x(t)* при фиксированном *t* .

Пример 5. Найти первую вариацию функционала $I[x(t)]=\int_a^b x^2(t)dt.$

Первый способ. Запишем приращение функционала

$$\Delta I=\int_a^b[x(t)+\delta x(t)]^2dt-\int_a^b x^2(t)dt=\int_a^b 2x(t)\cdot\delta x(t)dt+\int_a^b[\delta x(t)]^2dt$$

Но $\int_a^b[\delta x(t)]^2dt\le\int_a^b[\max_{t\in[a,b]}|\delta x(t)|]^2dt=[\max_{t\in[a,b]}|\delta x(t)|]^2\cdot(b-a)=(b-a)\cdot\|\delta x\|^2=(b-a)\cdot\|\delta x\|\cdot\|\delta x\|$.

Тогда $\Delta I=\int_a^b\underbrace{2x(t)\cdot\delta x(t)dt}_{\delta I}+\underbrace{(b-a)\cdot\|\delta x\|}_{\beta}\cdot\|\delta x\|$, где $\beta\to 0$ при $\|\delta x\|\to 0$.

Поэтому можно выписать выражение для первой вариации функционала:

$$\delta I=\int_a^b 2x(t)\cdot\delta x(t)dt$$

Второй способ. Воспользуемся формулой (7):

$$I[x(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]=\int_a^b[x(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]^2dt,$$

$$\delta I=\frac{dI[x(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]}{d\alpha}|_{\alpha=0}=\int_a^b 2[x(t)+\alpha\cdot\delta x(t)]\cdot\delta x(t)dt|_{\alpha=0}=\int_a^b 2x(t)\cdot\delta x(t)dt$$

Очевидно, оба способа приводят к одному результату.■

ГЛОБАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ

Глобальный минимум (максимум)

Говорят, что функционал *I[x(t)]* определенный на классе *M* кривых *x(t),* достигает на кривой *x*(t) глобального минимума* (максимума), если

$$I[x^*(t)] \le I[x(t)] \qquad (I[x^*(t)] \ge I[x(t)]) \qquad \forall x(t) \in M .$$

Пример 6. Найти глобальные максимум и минимум функционала из примера 2.

☐Очевидно, на заданном классе *M* допустимых кривых функции $x_2(t)=t^2$ соответствует наименьшее значение функционала (ей соответствует наименьшая площадь под кривой на рис. 2), а кривой $x_3(t)$ – наибольшее значение (ей соответствует наибольшая площадь под кривой на рис. 2). ■

Пример 7. Доказать, что на кривой *x*(t) = t* функционал $I[x(t)]=\int_0^1 x'^2(t)dt$ достигает глобального минимума.

☐Очевидно, функция $x^*(t) = t \in C^1([0, 1])$. Рассмотрим вариации $\delta x(t)\in C^1([0,1])$, удовлетворяющие условиям $\delta x(0) = \delta x(1) = 0$. Исследуем приращение функционала:

$$\Delta I = I[x^*(t)+\delta x(t)] - I[x^*(t)] = \int_0^1 [x^{*}{}'(t)+\delta x'(t)]^2\,dt - \int_0^1 [x^{*}{}'(t)]^2\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 x^{*}{}'(t)\cdot\delta x'(t)dt + \int_0^1 [\delta x'(t)]^2\,dt = \int_0^1 [\delta x'(t)]^2\,dt \ge 0$$

так как $x^{*}{}'(t) = 1$, $\int_0^1 x^{*}{}'(t)\cdot\delta x'(t)dt = \delta x(1)-\delta x(0) = 0$. Поскольку кривая $x(t)=x^*(t)+\delta x(t)\in C^1([0, 1])$ произвольна и $I[x(t)] = I[x^*(t)+\delta x(t)] \ge I[x^*(t)]$, то на функции *x*(t) = t* достигается глобальный минимум.■

Локальные экстремумы

Понятие локального минимума (максимума) связано с исследованием поведения функционала на близких кривых. Различают сильный и слабый локальный минимум (максимум).

Говорят, что функционал *I[x(t)]* достигает на кривой *x*(t)* ***сильного минимума*** (максимума), если $I[x^*(t)] \le I[x(t)]$ $[I[x^*(t)] \ge I[x(t)]]$ в ε-окрестности нулевого порядка кривой $x^*(t)$.

Говорят, что функционал *I[x(t)]* достигает на кривой $x^*(t)$ ***слабого минимума*** (максимума), если $I[x^*(t)] \le I[x(t)]$ $[I[x^*(t)] \ge I[x(t)]]$ в ε -окрестности первого порядка кривой $x^*(t)$.

Локальные минимумы и максимумы функционала называются его ***локальными экстремумами.***

Замечание 14.2. Всякий сильный экстремум функционала является и слабым, а обратное, вообще говоря, неверно, так как сильный экстремум – это экстремум по отношению к более широкому классу кривых.

Пример 8. Доказать, что на кривой $x^*(t) \equiv 0$ функционал $I[x(t)] = \int_0^{\pi} x^2(t)\cdot[3 - x'^2(t)]dt$, *x(0)=x(π)=0* достигает слабого минимума.

☐Так как *I[x*(t)] = 0,* то согласно определению требуется доказать, что существует ε > 0, такое, что для всех *x(t),* удовлетворяющих условию

$$\max_{t\in[0,\pi]}|x(t)-x^*(t)|+\max_{t\in[0,\pi]}|x'(t)-x^{*\prime}(t)|=\max_{t\in[0,\pi]}|x(t)|+\max_{t\in[0,\pi]}|x'(t)|<\varepsilon,$$

справедливо неравенство $I[x(t)]\ge I[x^*(t)]=0$ •

Пусть ε = 1 , тогда для всех кривых из ε -окрестности первого порядка кривой *x*(t)* ≡ 0 выполняются условия $\max_{t\in[0,\pi]}|x(t)|\le\varepsilon=1$, $\max_{t\in[0,\pi]}|x'(t)|\le\varepsilon=1$. Поэтому $0\le x^2(t)<1$, $3-x'^2(t)>0$ и $I[x(t)]=\int_0^\pi x^2(t)\cdot[3-x'^2(t)]dt\ge0$, что и требовалось доказать. Следовательно, на кривой *x*(t)* ≡ 0 функционал достигает слабого минимума.■

Исследуем функционал на наличие сильного минимума. При ε = 1 ε -окрестность нулевого порядка кривой *x*(t) ≡ 0* образуют кривые, удовлетворяющие условию $\max|x(t)-x^*(t)|=\max|x(t)|<\varepsilon=1$. Но среди них можно подобрать такую функцию, например $x(t)=\sin5t$, что выражение $[3-x'^2(t)]$ может быть отрицательным, так как $x'(t)=5\cos5t$. Поэтому условие $I[x(t)]\ge I[x^*(t)]=0$ на некоторых функциях из ε -окрестности нулевого порядка кривой $x^*(0)\equiv0$ может не выполняться. Аналогичные рассуждения справедливы при других значениях ε. Следовательно, на кривой $x^*(0)\equiv0$ функционал не достигает сильного минимума.■

Необходимые условия локального экстремума

Необходимые условия локального минимума (максимума) одинаковы для сильного и слабого минимума (максимума) и определяются следующей теоремой.

Теорема 1 (необходимые условия локального экстремума).

Если функционал ***I[x(0],*** *имеющий вариацию, достигает минимума или максимума на кривой x*(t), где x*(t) есть внутренняя точка области определения функционала, то при x(t) = x*(t) первая вариация функционала равна нулю:*

$$\delta I=0. \qquad (8)$$

З а м е ч а н и я 3.

1. Доказательство необходимых условий экстремума функционала опирается на тот факт, что при фиксированных $x^*(t)$ и $\delta x(t)$ функционал $I[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]=\varphi(\alpha)$ является функцией параметра α. При α = 0 функционал достигает экстремального значения $I[x^*(t)]$. Заметим, что α может принимать в окрестности точки α = 0 как положительные, так и отрицательные значения (при этом *x'(t)* является внутренней точкой в области определения функционала). Так как точка α = 0 является точкой локального экстремума функции φ(α), то, применяя необходимые условия локального экстремума функций φ(α), получаем

$$\varphi'(\alpha)\big|_{\alpha=0}=0 \text{ или } \frac{d}{d\alpha}I\left[x^*(t)+\alpha\cdot\delta x(t)\right]\Big|_{\alpha=0}=0 \qquad (9)$$

2. Различие между сильным и слабым экстремумами не имеет существенного значения при выводе необходимого условия экстремума, но весьма существенно при выводе и применении достаточных условий экстремума.

ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.

При выводе необходимых условий экстремума для различных постановок вариационных задач применяется следующая важная теорема.

Теорема 2 (основная лемма вариационного исчисления). *Если для каждой непрерывной функции η(t)* $\int_{t_0}^{T} \alpha(t)\cdot\eta(t)dt = 0$, *где функция α(t) непрерывна на отрезке* $[t_0,T]$, *то α(t) ≡ 0 на том же отрезке.*

Замечания 4.

1. Утверждение основной леммы вариационного исчисления и ее доказательство не изменятся, если на функцию *η(t)* наложить следующие ограничения: *η(t)* имеет непрерывную производную; $\eta(t_0) = \eta(T) = 0$.

2. Все изложенное в этом разделе без изменения переносится на функционалы $I[x(t)] = I[x_1(t),...,x_n(t)]$, зависящие от вектор-функции $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))^T$ одной переменной или зависящие от функций нескольких переменных. Для таких функционалов вариация также определяется как главная линейная часть приращения функционала и доказывается, что на функциях (вектор-функциях), на которых реализуется экстремум, вариация равна нулю.

Лемма 1 <u>(лемма Лагранжа).</u> Если $a(x)$ - непрерывная функция и $\int_a^b a(x)y(x)dx = 0$ для любой непрерывной функции $y(x)$, имеющей непрерывную производную и удовлетворяющую условию $y(a) = y(b) = 0$, то $a(x) \equiv 0$.

<u>Доказательство.</u> Пусть в некоторой точке $x = c$ $a(c) \neq 0$, например $a(c) > 0$, тогда найдется интервал $\xi_1 < c < \xi_2$, содержащийся в $[a,b]$, в котором $a(x) > 0$. Положим $y(x) = (\xi_1 - x)^2(\xi_2 - x)^2$ на интервале (ξ_1,ξ_2) и $y(x) = 0$ вне этого интервала. Очевидно, что $y(x)$ удовлетворяет условиям леммы. В то же время

$$\int_a^b a(x)y(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} a(x)(\xi_1 - x)^2(\xi_2 - x)^2\,dx > 0,$$

так как под интегралом стоит положительная непрерывная функция. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. Если $\int_a^b b(x)y'(x)dx = 0$ для каждой функции $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$ такой, что $y(a) = y(b) = 0$, то $b(x) = const$.

<u>Доказательство</u>. Положим $y'(x) = g(x)$, тогда $y(x) = \int_a^x g(\tau)d\tau, \quad \int_a^b g(\tau)d\tau = 0$. Выберем постоянную c так, что $\int_a^b (b(x) - c)dx = 0$, и покажем, что $\int_a^b (b(x) - c)f(x)dx = 0$ для любой непрерывной $f(x)$. Всякую непрерывную функцию можно представить в виде $f(x) = \lambda(x) + \alpha$, где

$\int_a^b \lambda(x)dx = 0, \quad \alpha = const$. Получаем $\int_a^b (b(x)-c)f(x)dx = \int_a^b (b(x)-c)\lambda(x)dx + \alpha\int_a^b (b(x)-c)dx$. Первое слагаемое справа равно нулю, так как $\lambda(x)$ есть проиводная от функции $\int_a^x \lambda(\tau)d\tau$, удовлетворяющей всем условим, наложенным на $y(x)$, а второе равно нулю в силу выбора c. Таким образом, $\int_a^b (b(x)-c)f(x)dx = 0$ для любой непрерывной функции $f(x)$. Положив $f(x) = b(x) - c$, получаем $\int_a^b (b(x)-c)^2 dx = 0$, откуда $b(x) - c \equiv 0$, т.е. $b(x)$ есть постоянная. Что и требовалось доказать.

Лемма 3. Если $\int_a^b (a(x)y(x) + b(x)y'(x))dx = 0$ для каждой функции $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$ такой, что $y(a) = y(b) = 0$, то $b(x)$ - дифференцируема и $a(x) - b'(x) = 0$.

Доказательство. Действительно, положив $\int_a^t a(\tau)\cdot d\tau = A(t)$, получаем с помощью интегрирования по частям, что $\int_a^b a(x)y(x)dx = -\int_a^b A(x)y'(x)dx$, т.е. равенство из леммы можно переписать в виде $\int_a^b (-A(x) + b(x))y'(x)dx = 0$, но отсюда по лемме 2 следует, что $b(x) - A(x) = const$, или дифференцируя $a(x) - b'(x) = 0$. Подчеркнем, что здесь дифференцируемость функции $b(x)$ заранее не предполагалась. Что и требовалось доказать.

ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Задача нахождения экстремума функционала

$$J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx \qquad (1)$$

на множестве всех функций $y(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$ *таких, что* $y(a)=A, y(b)=B$*, называется простейшей задачей вариационного исчисления.*

Иначе говоря, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании слабого экстремума функционала вида (1) на множестве всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки.

УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Теорема 1 (уравнение Эйлера). Для того, чтобы функционал $J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$, определенный на множестве функций $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$ и удовлетворяющих условиям $y(a)=A, y(b)=B$, достигал экстремума на данной функции $y(x)$, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$.

Доказательство. Дадим функции $y(x)$ некоторое приращение δy. Для того чтобы функция $y(x)+\delta y(x)$ по-прежнему удовлетворяла граничным условиям, нужно, чтобы $\delta y(a)=\delta y(b)=0$. Вычислим приращение функционала (1). Оно равно

$$\Delta J=\int_a^b F\left(x,\quad y+\delta y,\quad y'+(\delta y)'\right)dx-\int_a^b F(x,\quad y,\quad y')dx=$$

$$=\int_a^b\left(F'_y(x,\quad y,\quad y')\delta y+F'_{y'}(x,\quad y,\quad y')(\delta y)'\right)dx+\ldots$$

где многоточие обозначает члены порядка выше первого, относительно δy и $(\delta y)'$. Выражение $\int_a^b\left(F'_y(x,\quad y,\quad y')\delta y+F'_{y'}(x,\quad y,\quad y')(\delta y)'\right)dx$ представляет собой главную линейную часть приращения функционала ΔJ, т.е. вариацию функционала. По теореме 1 необходимым условием экстремума функционала является равенство $\delta J=\int_a^b\left(F'_y\delta y+F'_{y'}(\delta y)'\right)dx=0$. Но в силу леммы 3 из этого равенства вытекает, что $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$. Что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что существование производной $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ здесь заранее не предполагается, а вытекает из той же самой леммы 3.

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются экстремалями.

Замечание 1. Уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение должно зависеть, вообще говоря, от двух произвольных постоянных, которые определяются из двух краевых условий $y(a) = A, y(b) = B$.

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Теорема 2. Все сказанное выше непосредственно обобщается на случай функционалов, зависящих от нескольких функций

$$J(y_1, \ \ldots, \ y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \ \ldots, \ y_n, y_1', \ \ldots, \ y_n')dx$$

при условиях $y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, (i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n)$.

В этом случае необходимыми условиями экстремума будут условия

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad (i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n).$$

Доказательство для этого общего случая по существу не отличается от изложенного выше, и мы не будем его приводить.

Теорема 3 (Эйлера-Пуассона). Для того, чтобы функционал $J(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'')dx$, определенный на множестве функций $y(x)$ из $D^2_{[a,b]}$ и удовлетворяющих условиям $y(a) = A, y(b) = B$ и $y'(a) = A_1, y'(b) = B_1$, достигал экстремума на данной функции $y(x)$, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера-Пуассона $F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2F_{y''}}{dx^2} = 0$.

Доказательство. Как и для других задач, необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его вариации, вычисленной на экстремали $y_0(x)$: d $J(y_0)$=0. В силу граничных условий на концах интервала d y(a)= d y(b)= d y¢ (a)= d y¢ (b)= 0. Вычислим d J как линейную часть приращения. Разложим первое слагаемое в ряд Тейлора в окрестности экстремали, и удержим только линейные члены. Слагаемое, содержащее 1-ю производную, проинтегрируем по частям один раз, а слагаемое, содержащее 2-ю производную √ 2 раза.

$$\delta J(y) = \int_a^b \left(F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'') - F(x,y,y',y'')\right)dx =$$

$$= \int_a^b \left(F_y \delta y + F_{y'}\delta y' + F_{y''}\delta y''\right)dx =$$

$$= \int_a^b F_y \delta y dx + \left(F_{y'}\delta y\right)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{dF_{y'}}{dx}\delta y dx + \left(F_{y''}\delta y'\right)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{dF_{y''}}{dx}\delta y' dx =$$

$$= \int_a^b \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx}\right)\delta y dx - \left(\frac{dF_{y'}}{dx}\delta y\right)\Bigg|_a^b + \int_a^b \frac{d^2F_{y''}}{dx^2}\delta y dx =$$

$$\int_a^b \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2F_{y'}}{dx^2}\right)\delta y dx = 0.$$

В силу произвольности вариации функции d $y(x)$ по основной лемме вариационного исчисления первый сомножитель под интегралом должен равняться нулю. Таким образом, экстремаль должна удовлетворять уравнению $F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2F_{y''}}{dx^2} = 0$, которое называется уравнением Эйлера-Пуассона. Оно является в общем случае уравнением 4-го порядка и дополняется граничными условиями.

Замечание 2. Если функционал зависит от производных более высоких порядков, то уравнение Эйлера-Пуассона выводится аналогично. Оно будет иметь вид

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2F_{y''}}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^nF_{y^{(n)}}}{dx^n} = 0$$

и дополняться $2n$ граничными условиями: значения искомой функции и её производных до n- 1√го порядка включительно на концах интервала x_1 и x_2 должны равняться заданным величинам.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Уравнение Эйлера, выведенное нами в этой теме, играет фундаментальную роль во всем вариационном исчислении. Оно представляет собой, вообще говоря, дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, в которых это уравнение может быть сведено к уравнению первого порядка или даже полностью проинтегрированы.

Подынтегральная функция не зависит от y.

Распишем уравнение Эйлера более подробно $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot y' - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot y'' = 0.$$

Подынтегральная функция не зависит от y. Предположим, что рассматриваемый функционал имеет вид $\int_a^b F(x, y')dx$. В этом случае уравнение Эйлера принимает вид $\frac{\partial F}{\partial y}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ и имеет, очевидно, первый интеграл $\frac{\partial F}{\partial y'} = C$. Это √ уравнение первого порядка, не содержащее y. Решив его относительно y', получаем соотношение вида $y' = f(x, \quad C)$, откуда y находится интегрированием.

☺ $J(y) = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}\cdot dx}{x}$, $y(1)=0$, $y(2)=1$. Подынтегральная функция не содержит y, поэтому уравнение Эйлера имеет вид $\frac{\partial F}{\partial y'} = C$, т.е. $\frac{y'}{x\cdot\sqrt{1+(y')^2}} = C$, откуда $(y')^2\cdot\left(1-x^2C^2\right) = C^2x^2$, т.е. $y' = \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}$, и следовательно $y = \int\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}\cdot dx = \frac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2} + C_1$, т.е. $(y-C_1)^2 + x^2 = \frac{1}{C^2}$. Таким образом, решение представляет собой окружность с центром на оси y. Из условий $y(1)=0$, $y(2)=1$ получаем, что $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_1 = 2$. Итак, окончательное решение $(y-2)^2 + x^2 = 5$.

Подынтегральная функция не зависит от x.

Предположим, что рассматриваемый функционал имеет вид $\int_a^b F(y,y')dx$. В этом случае уравнение Эйлера примет вид $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot y' - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot y'' = 0$. Умножив это уравнение на y', получим выражение, которое можно записать в виде $\frac{d}{dx}\left(F - y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, откуда получаем, что в рассматриваемом случае уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} = C$.

Задача о брахистохроне.

Пусть A и B - две фиксированные точки. Время, в течение которого материальная точка скатывается под действием силы тяжести вдоль некоторого пути, соединяющего точки A и B, зависит от выбора этого пути, т.е. представляет собой функционал. Кривая, вдоль которой точка скатывается быстрее всего, носит название брахистохроны. Задача о брахистохроне была поставлена И.Бернулли в 1696 г. и сыграла важную роль в развитии вариационного исчисления. Ее решение было дано И.Бернулли, Я.Бернулли, Ньютоном и Лопиталем.

Введем на вертикальной плоскости, проходящей через точки A и B систему координат так как показано на рисунке. Пусть $y(x)$ - кривая по которой происходит движение точки. Время движения материальной точки из A в B можно вычислить по формуле $T(y) = \int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx$. Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид $\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{y'\cdot y'}{\sqrt{2gy}\cdot\sqrt{1+(y')^2}} = \tilde{c}$ (первый интеграл взят). Выполнив преобразования и переобозначив произвольную постоянную получим уравнение

$y\left(1+(y')^2\right)=\tilde{c}$. Уравнение решается в параметрическом виде. Пусть $\frac{dy}{dx}=ctg\,\tau$, тогда $1+(y')^2=1+ctg^2\tau=\frac{1}{\sin^2\tau}$. Отсюда $y=\frac{\tilde{c}}{1+(y')^2}=\frac{\tilde{c}}{2}(1-\cos 2\tau)$, отсюда $dy=\tilde{c}\cdot\sin 2\tau\cdot d\tau$, следовательно $dx=tg\,\tau\cdot dy=\tilde{c}2\sin^2\tau\cdot d\tau$. Интегрируя, получаем $x=\frac{\tilde{c}}{2}(2\tau-\sin 2\tau)+c_2$.

Еще раз переобозначим $\frac{\tilde{c}}{2}=c,\quad 2\tau=\theta$ и с учетом начальных условий ($c_2=0$) получим $\begin{cases}x=c\cdot(\theta-\sin\theta)\\ y=c\cdot(1-\cos\theta)\end{cases}$. Постоянная однозначно определяется из начальных условий.

Брахистохрона представляет собой циклоиду, лежащую в вертикальной плоскости, проходящей через A и B.

Подынтегральная функция не зависит от y'.

Если F не зависит от y' или зависит от нее линейно, то уравнение Эйлера принимает вид $\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}=0$, т.е. представляет собой не дифференциальное, а конечное уравнение, определяющее одну или несколько кривых. В решении нет произвольных постоянных и оно может не удовлетворять граничным условиям. Если граничные условия выполняются, то получена экстремаль, если нет, то нет и решений у данной вариационной задачи.

В случае, если подынтегральную функцию можно представить в виде

$$F(x,\ y)=P(x,\ y)+y'\cdot Q(x,\ y),$$

причем $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. В этом случае уравнение Эйлера обращается в тождество 0=0, и экстремалью будет любая кривая, удовлетворяющая граничным условиям. В этом случае функционал не зависит от линии интегрирования, и вариационная задача теряет смысл.

☺ Рассмотрим функционал $J(y)=\int_a^b (x-y)^2\,dx$. Здесь уравнение Эйлера сводится к конечному уравнению, его решение √ прямая $y=x$ (вдоль нее интеграл равен нулю).

ЗАДАЧА СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ

Простейшая задача вариационного исчисления, которую мы рассматривали до сих пор, является далеко не единственно возможной.

Задачей со свободными концами *называется задача об отыскании экструмума функционала* $J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ *среди всех кривых* $y(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$ *концы которых лежат на двух заданных вертикалях* $x=a, \quad x=b$.

Основная формула для вариации функционала для задачи со свободными концами

Вычислим вариацию функционала δJ, учитывая, что теперь могут изменяться и концы кривой, т.е. $\delta y(a)\neq 0, \quad \delta y(b)\neq 0$. Приращение функционала равно

$$\Delta J=\int_a^b F\left(x, \quad y+\delta y, \quad y'+(\delta y)'\right)dx-\int_a^b F(x, \quad y, \quad y')dx=$$

$$\int_a^b\left(F'_y(x, \quad y, \quad y')\delta y+F'_{y'}(x, \quad y, \quad y')(\delta y)'\right)dx+\ldots$$

где многоточие обозначает члены порядка выше первого, относительно δy и $(\delta y)'$. Выражение $\int_a^b\left(F'_y(x, \quad y, \quad y')\delta y+F'_{y'}(x, \quad y, \quad y')(\delta y)'\right)dx$ представляет собой главную линейную часть приращения функционала ΔJ, т.е. вариацию функционала. Интегрируя это выражение по частям $U=\dfrac{\partial F}{\partial y'}, \quad \delta y' dx=dV$ получаем основную формулу для вариации функционала

$$\delta J=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\cdot\delta y\cdot dx+\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b}\cdot\delta y(b)-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a}\cdot\delta y(a).$$

Решение задачи со свободными концами

<u>Теорема 1.</u> Кривая $y(x)$ является решением задачи со свободными концами, если для нее выполняется уравнение Эйлера и краевые условия $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b}=0, \quad \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a}=0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала функции δy, для которых $\delta y(a)=0, \quad \delta y(b)=0$. Тогда, как и в простейшей задаче, из условия $\delta J=0$ и основной формулы для вариации функционала получаем уравнение Эйлера. Пусть теперь $y(x)$ - экстремаль. Тогда в основной формуле для вариации функционала интегральный член исчезает и условие $\delta J=0$ в силу произвольности δy принимает вид $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b}=0, \quad \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a}=0$. Что и требовалось доказать.

Наряду с закрепленными и свободными концами можно рассматривать смешанный случай, т.е. считать, что один конец закреплен, а другой свободен. Пусть, например, ищется экстремум функционала $J(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ на классе кривых, соединяющих данную точку и произвольную точку прямой $x=b$. В этом случае из двух краевых условий одно: $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b}=0$, а второе $y(a)=A$.

ВАРИАЦИОННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Понятие вариационной производной функционала

Понятие вариации функционала является аналогом понятия дифференциала числовой функции n переменных. Аналогично, вариационной производной называется выражение, играющее для функционалов ту же роль, что и частные производные для функций n переменных.

Введем понятие вариационной производной для функционалов вида

$$J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx .$$

Для этой цели перейдем от вариационной задачи к конечномерной, а затем совершим предельный переход. Разобьем отрезок $[a,b]$ на $n+1$ равных частей точками $x_0=a,\ x_1,\ \dots,\ x_n,\ x_{n+1}=b,\ x_{i+1}-x_i=\Delta x$ и заменим гладкую функцию $y(x)$ ломаной с вершинами $(x_0,\ y_0),\ (x_1,\ y_1),\ \dots,\ (x_n,\ y_n)$. Функционал при этом можно приближенно заменить суммой

$$J(y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_n)=\sum_{i=0}^{n}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\cdot\Delta x ,$$

представляющую собой функцию n переменных $y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_n$. Вычислим частные производные $\dfrac{\partial J(y_0,\ \dots,\ y_n)}{\partial y_j}$ и посмотрим, что происходит с этими производными при неограниченном увеличении числа точек деления. Заметим, что в выражении

$$J(y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_n)=\sum_{i=0}^{n}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\cdot\Delta x$$

каждое переменное y_j входит ровно в два слагаемых (при $i=j$ и при $i=j-1$), получаем

$$\frac{\partial J(y_0,\ \dots,\ y_n)}{\partial y_j}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}F\left(x_j,\ y_j,\ \frac{y_{j+1}-y_j}{\Delta x}\right)\cdot\Delta x+\frac{\partial}{\partial y'}F\left(x_{j-1},\ y_{j-1},\ \frac{y_j-y_{j-1}}{\Delta x}\right)-\frac{\partial}{\partial y'}F\left(x_j,\ y_j,\ \frac{y_{j+1}-y_j}{\Delta x}\right).$$

Правая часть написанного выражения при $\Delta x\to 0$ стремиться к нулю, представляя собой величину порядка Δx. Вычислим предел отношения этого выражения к Δx при $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\partial J(y_0,\ \ldots,\ y_n)}{\partial y_j}\cdot\frac{1}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial y}F\left(x_j,\quad y_j,\quad \frac{y_{j+1}-y_j}{\Delta x}\right)+\right.$$

$$\left.\left[\frac{\partial}{\partial y'}F\left(x_{j-1},\quad y_{j-1},\quad \frac{y_j-y_{j-1}}{\Delta x}\right)-\frac{\partial}{\partial y'}F\left(x_j,\quad y_j,\quad \frac{y_{j+1}-y_j}{\Delta x}\right)\right]\cdot\frac{1}{\Delta x}\right\}$$

$$=\frac{\partial F(x,\quad y,\quad y')}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x,\quad y,\quad y')}{\partial y'}\right)$$

Этот предел и называется вариационной производной функционала и обозначается символом $\frac{\delta J}{\delta y}$. Мы видим, что полученное нами выражение вариационной производной представляет собой левую часть уравнения Эйлера. Следовательно, уравнение Эйлера означает не что иное, как равенство нулю в каждой точке вариационной производной соответствующего функционала, точно так же, как в анализе необходимым условием экстремума функции функцию n переменных является равенство нулю всех ее частных производных.

Определение вариационной производной в общем случае

Сформулируем теперь определение вариационной производной в общем случае. Пусть имеется некоторый функционал $J(y)$. Дадим функции приращение, отличное от нуля лишь в окрестности некоторой точки x_0, и вычислим соответствующее приращение функционала $\Delta J = J(y+\delta y)-J(y)$. Разделив это приращение на площадь ΔS, ограниченную кривой δy и осью x, рассмотрим отношение $\frac{J(y+\delta y)-J(y)}{\Delta s}$. Пусть теперь площадь ΔS, ограниченная кривой δy, стремиться к нулю, причем так, что и $|\delta y(x)|$ и длина того интервала, в котором δy отлична от нуля, стремиться к нулю. Если при этом отношение $\frac{J(y+\delta y)-J(y)}{\Delta s}$ существует и стремиться к некоторому пределу, то этот предел называется вариационной производной функционала $J(y)$ в точке x_0.

Из определения вариационной производной ясно, что если δy отлична от нуля в некоторой окрестности точки x_0 и ограничивает площадь ΔS, то

$$\Delta J = J(y+\delta y)-J(y)=\left(\left.\frac{\delta J}{\delta y}\right|_{x=x_0}+\varepsilon\right)\cdot\Delta s,$$

где $\varepsilon\to 0$, когда стремяться к нулю и $|\delta y(x)|$ и длина интервала на котором δy отлична от нуля.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Понятие изопериметрической задачи

В простейшей задаче вариационного исчисления, класс допустимых линий, помимо тех или иных требований гладкости, определялся условиями, задаваемых на концах этих линий. Однако ряд приложений вариационного исчисления приводит к задачам, в которых на допустимые кривые, кроме граничных условий, накладываются условия другого типа.

Задача отыскания среди всех кривых $y(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$*, удовлетворяющих условиям* $y(a)=A, y(b)=B$ *, кривой доставляющей экстремум функционалу (целевой функционал)*

$$J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx\ ,$$

при выполнении условия (условие связи)

$$K(y)=\int_a^b G(x,y(x),y'(x))dx=l$$

называется изопериметрической задачей.

Первоначально под изопериметрической задачей понималась следующая частная задача (задача Дидоны): среди всех замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти ту, которая охватывает наибольшую площадь (задача с фиксированным периметром).

Аналогично, известному из математического анализа функций нескольких переменных, методу множителей Лагранжа в вариационном исчислении справедлива теорема, позволяющая находить решение изопериметрической задачи.

<u>Теорема 1.</u> Если кривая $y(x)$ дает экстремум функционалу $J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$, удовлетворяет условиям $K(y)=\int_a^b G(x,y(x),y'(x))dx=l$ $y(a)=A, y(b)=B$ и не является экстремалью функционала $K(y)$, то существует такая постоянная λ, что эта кривая $y(x)$ является экстремалью функционала $\int_a^b (F+\lambda G)dx$.

<u>Доказательство.</u> Пусть кривая $y(x)$ дает экстремум функционалу $J(y)$ при условию, что $K(y)=l$. Возмем в интервале $[a,\ b]$ две произвольные точки x_1 и x_2 и придадим $y(x)$ приращение $\delta y(x)=\delta_{x_1}y+\delta_{x_2}y$, отличное от нуля лишь в окрестностях этих точек. Соответствующее приращение ΔJ функционала можно представить в виде

$$\Delta J=\left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\Bigg|_{x=x_1}+\varepsilon_1\right)\cdot\sigma_1+\left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\Bigg|_{x=x_2}+\varepsilon_2\right)\cdot\sigma_2\ ,$$

где $\sigma_1 = \int\limits_a^b \delta_{x_1} y \cdot dx, \quad \sigma_2 = \int\limits_a^b \delta_{x_2} y \cdot dx$ и $\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 \to 0$ при $\sigma_1, \quad \sigma_2 \to 0$.

Потребуем теперь, чтобы проварьированная кривая $y_1(x) = y(x) + \delta_{x_1} y + \delta_{x_2} y$ удовлетворяла условию $K(y_1) = K(y) = l$. Вариацию ΔK можно представить в аналогичном виде

$$\Delta K = K(y_1) - K(y) = \left(\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\Bigg|_{x=x_1} + \varepsilon_1'\right) \cdot \sigma_1 + \\ + \left(\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\Bigg|_{x=x_2} + \varepsilon_2'\right) \cdot \sigma_2 = 0,$$

где $\varepsilon_1', \quad \varepsilon_2' \to 0$ при $\sigma_1, \quad \sigma_2 \to 0$. Выберем теперь точку x_2 так, что $\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\Bigg|_{x=x_2} \neq 0$. Такая точка существует, так как по условию $y(x)$ не является экстремалью функционала √ условия связи. При таком выборе точки x_2 условию $\Delta K = 0$ можно придать вид

$$\sigma_2 = -\left(\frac{\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\Big|_{x=x_1}}{\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\Big|_{x=x_2}} + \varepsilon'\right) \cdot \sigma_1,$$

где $\varepsilon' \to 0$ при $\sigma_2 \to 0$.

Положив $\lambda = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\Big|_{x=x_2}}{\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\Big|_{x=x_2}}$ и подставив в формулу для ΔJ вместо σ_2 выражение для него, получим $\Delta J = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\Big|_{x=x_1} + \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\Big|_{x=x_1}\right) \cdot \sigma_1 + \varepsilon \cdot \sigma_1$. Первое слагаемое справа представляет собой главную линейную относительно δy часть приращения функционала, т.е. вариацию функционала J. Так как равенство нулю вариации функционала √ необходимое условие экстремума и так как σ_1 отлично от нуля, то $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \lambda \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right) = 0$ (*).

Что и требовалось доказать.

Полученный результат используется при решении той или иной изопериметрической задачи следующим образом. Составляется дифференциальное уравнение (*), находим его общее решение, которое будет содержать пораметр λ и еще две произвольные постоянные. Эти три величины определяются из граничных условий $y(a) = A, \quad y(b) = B,$ и условия $K(y) = l$.

Задача Дидоны

☺ Задача Дидоны. Найти кривую в верхней полуплоскости, проходящую через точки $(-a, \quad 0)$ и $(a, \quad 0)$, имеющую заданную длину $2l \quad (l > a)$ и охватывающую вместе с отрезком $[-a, \quad a]$ максимальную площадь.

Решение. Мы ищем функцию $y(x)$ для которой $y(-a) = 0, \quad y(a) = 0,$

$$K(y) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx = 2l$$

, а интеграл $J(y) = \int_{-a}^{a} y dx$ принимает максимальное значение. Мы имеем, таким образом изопериметрическую задачу. По теореме 1 составляет функционал

$$J(y) + \lambda K(y) = \int_{-a}^{a} \left(y + \lambda \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \right) \cdot dx$$

и пишем для него уравнение Эйлера

$$1 + \lambda \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) = 0$$

, отсюда находим $x + \lambda \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c_1$. Интегрируя, получаем уравнение $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2$ семейства окружностей. Значения $c_1, \quad c_2, \quad \lambda$ определяются из условий

$y(-a) = 0, \quad y(a) = 0,$ $K(y) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx = 2l$.

Теорема 2. Все сказанное выше непосредственно обобщается на случай функционалов, зависящих от нескольких функций

$$J(y_1, \quad \ldots, \quad y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \quad \ldots, \quad y_n, y_1', \quad \ldots, \quad y_n') dx$$

при условиях $y_i(a) = A_i, \quad y_i(b) = B_i, (i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n)$,

и нескольких связях вида $K(y) = \int_a^b G_j(x, y_i, y_i') dx = l_j$, $(j = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad k)$.

В этом случае необходимым условием экстремума будет

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(F + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j G_j \right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y_i'}\left(F + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j G_j \right) \right) = 0, \quad (i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n).$$

$2n$ произвольных постоянных, входящих в решение этой системы и значения k параметров $\lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_k$ определяются из $2n$ граничных условий и k условий связи. Доказательство для этого общего случая по существу не отличается от изложенного выше, и мы не будем его приводить

ЗАДАЧА НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Задача Лагранжа

Задачей Лагранжа или задачей на условный экстремум называется задача отыскания среди всех кривых $y_i(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$, *удовлетворяющих граничным условиям* $y_i(a)=A, y_i(b)=B$ $(i=1, 2, \dots, n)$ *кривых доставляющих экстремум функционалу*

$$\int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')dx$$

и удовлетворяющих условиям связи $g_j(x, y_1, \dots, y_n)=0$, $(j=1, 2, \dots, k)$.

Иначе говоря, функционал рассматривается здесь не на всех кривых, удовлетворяющих граничным условиям, а только на тех из них, которые лежат на некотором $n-k$ √мерном многообразии. Ограничимся для простоты случаем $n=2, \quad k=1$.

<u>Теорема 1.</u> Если кривые $y=y(x)$, $z=z(x)$ дает условный экстремум функционалу

$$\int_a^b F(x, y, z, y', z')dx$$

в классе кривых, лежащих на поверхности $g(x, y, z)=0$, причем ни в одной ее точке $\frac{\partial g}{\partial y}$ и $\frac{\partial g}{\partial z}$ не обращаются в нуль одновременно, то существует такая функция $\lambda(x)$, что кривая $y=y(x)$, $z=z(x)$ является экстремалью функционала

$$\int_a^b [F(x, y, z, y', z') + \lambda(x)\cdot g(x, y, z)]dx$$

,

т.е. удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0 \end{cases}.$$

Доказательство. Пусть $y=y(x)$, $z=z(x)$ - кривая, реализующая экстремум функционала при указанных условиях, а $\bar{y}=\bar{y}(x)$, $\bar{z}=\bar{z}(x)$ - близкая к ней кривая, удовлетворяющая условиям, но не являющаяся экстремалью. Причем $\delta y(x)=\bar{y}(x)-y(x)$ и $\delta z(x)=\bar{z}(x)-z(x)$ отличны от нуля лишь в малой окрестности (x_0, x_1) некоторой точки $x^{(1)}\in[a, b]$. Положим $\sigma_1=\int_a^b \delta y\cdot dx, \quad \sigma_2=\int_a^b \delta z\cdot dx$.
Так как $\bar{y}=\bar{y}(x)$, $\bar{z}=\bar{z}(x)$ - удовлетворяет условию $g(x, y, z)=0$, то можно записать

$$\int_a^b [g(x, \bar{y}, \bar{z}) - g(x, y, z)]\cdot dx = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\delta y + \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\delta z\right)\cdot dx = \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x=x^{(1)}}\cdot\sigma_1 + \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{x=x^{(1)}}\cdot\sigma_2 + \varepsilon_1 = 0$$

и $\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 \to 0$ при $\sigma_1, \quad \sigma_2 \to 0$. По условию теоремы хотя бы один из коэффициентов $\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x=x^{(1)}}, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{x=x^{(1)}}$ отличен от нуля. Тогда

$$\sigma_2 = -\frac{\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x=x^{(1)}}}{\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{x=x^{(1)}}} \cdot \sigma_1 + \varepsilon_2$$

. Теперь приращение функционала

$$\Delta J = \left.\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\right|_{x=x^{(1)}} \cdot \sigma_1 + \left.\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right)\right|_{x=x^{(1)}} \cdot \sigma_2 + \varepsilon_3$$

можно представить в виде

$$\Delta J = \left.\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x=x^{(1)}}}{\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{x=x^{(1)}}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right)\right]\right|_{x=x^{(1)}} \cdot \sigma_1 + \varepsilon_4$$

,

где величины $\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4$ - величины порядка выше первого относительно σ_1. Для того, чтобы имел место экстремум, необходимо, чтобы главная линейная часть этого приращения равнялась нулю. Таким образом получаем

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right) = 0$$

или

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \lambda(x)$$

. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Предыдущая теорема остается в силе и в случае, если условие выглядит следующим образом $g(x, \quad y, \quad z, \quad y', \quad z') = 0$.

Без доказательства.

Задачу Лагранжа можно рассматривать в некотором смысле как предельный случай изопериметрической задачи. Действительно, если мы предположим, что условие $g(x, \quad y, \quad z) = 0$ выполняется не всюду, а лишь в некоторой фиксированной точке x_0, то мы получим условие, левую часть которого можно рассматривать как функционал от y, z, т.е. условие того типа, который участвует в изопериметрической задаче. Таким образом, условие можно рассматривать, как совокупность бесконечного множества условий типа функционала. В изопериметрической задаче, как мы видели, число множителей Лагранжа $\lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_k$ равно числу условий связи. В задаче Лагранжа, в соответствии с только что сказанным, появляется функция $\lambda(x)$, т.е. свой множитель λ в каждой точке x_0.

Задача о геодезических кривых

☺ Задача о геодезических кривых. Из всех кривых, лежащих на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и проходящих через две заданные точки $(x_0, \quad y_0, \quad z_0)$ и $(x_1, \quad y_1, \quad z_1)$, найти ту, которая имеет наименьшую длину.

Решение. Длина кривой записывается интегралом $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$. Составляем вспомогательный функционал $\int_{x_0}^{x_1}\left[\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(x)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]dx$ и пишем соответствующие уравнения Эйлера $\begin{cases} 2\cdot\lambda(x)\cdot y-\dfrac{d}{dx}\dfrac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0 \\ 2\cdot\lambda(x)\cdot z-\dfrac{d}{dx}\dfrac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0 \end{cases}$. Решая эти уравнения, мы получаем семейство линий, зависящее от четырех постоянных, значения которых определяются из граничных условий $y(x_0)=y_0,\quad z(x_0)=z_0$ и $y(x_1)=y_1,\quad z(x_1)=z_1$.

Замечание. Задачу на нахождение условного экстремума функции нескольких переменных можно, как известно, свести к задаче на безусловный экстремум, выразив переменные, на которые наложены связи, через соответствующее число независимых переменных. Например, задачу о нахождении геодезических на некоторой поверхности можно рассматривать как задачу на условный экстремум, но можно, представив координаты $x,\ \ y,\ \ z$ как функции двух параметров, свести эту задачу к отысканию безусловного экстремума.

ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

Общая формула для вариации функционала

Выведем общую формулу для вариации функционала $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \ y, \ y') \cdot dx$ считая при этом, что конецы тех кривых, на которых определен этот функционал могут сдвигаться произвольным образом. Все рассматриваемые кривые будем предполагать гладкими, а за расстояние между кривыми $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ мы назовем величину $\rho(y, \ \bar{y}) = \max|y - \bar{y}| + \max|y' - \bar{y}'| + \rho(p_0, \ \bar{p}_0) + \rho(p_1, \ \bar{p}_1)$, где $p_0, \ \bar{p}_0$ и $p_1, \ \bar{p}_1$ - левые, соответственно правые концы кривых $y(x)$ и $\bar{y}(x)$. Так как функции $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ определены, вообще говоря, на разных интервалах, то для того чтобы формула для расстояния между кривыми имела смысл, эти кривые нужно продолжить на весь интервал, проведя, например, для этого касательные в конечных точках кривых.

Вариацией функционала называется линейное относительно приращения δy функции $y(x)$ и относительно приращений координат концов и отличающееся от полного приращения функционала на величину выше первого порядка малости по сравнению с расстоянием между функциями $y(x)$ и $y(x) + \delta y(x)$.

Обозначим координаты концов кривой $y(x)$ через $(x_0, \ y_0)$ и $(x_1, \ y_1)$, а координаты концов провариированной кривой $y(x) + \delta y(x)$ через $(x_0 + \delta x_0, \ y_0 + \delta y_0)$ и $(x_1 + \delta x_1, \ y_1 + \delta y_1)$ соответственно.

Найдем явное выражение для вариации. Для этого сперва найдем приращение функционала

$$\Delta J(y) = J(y + \delta y) - J(y) =$$

$$\int\limits_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, \ y + \delta y, \ y' + (\delta y)'\right) dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, \ y, \ y')dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[F\left(x, \ y + \delta y, \ y' + (\delta y)'\right) - F(x, \ y, \ y')\right] dx +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, \ y + \delta y, \ y' + (\delta y)'\right) dx -$$

$$- \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F\left(x, \ y + \delta y, \ y' + (\delta y)'\right) dx$$

.

Воспользовавшись формулой Тейлора и отбрасывая члены выше первого порядка малости, получим отсюда, что

$$\delta J = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot (\delta y)'\right] \cdot dx + F(x, \ y, \ y')\big|_{x=x_1} \cdot \delta x_1 -$$

$$- F(x, \ y, \ y')\big|_{x=x_0} \cdot \delta x_0 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y\Big|_{x_0}^{x_1} +$$

$$+ F(x, \ y, \ y')\big|_{x=x_1} \cdot \delta x_1 - F(x, \ y, \ y')\big|_{x=x_0} \cdot \delta x_0$$

.

Но, как ясно из рисунка $\delta y(x_0) \sim \delta y_0 - y' \cdot \delta x_0$, $\delta y(x_1) \sim \delta y_1 - y' \cdot \delta x_1$, где ~ означает равенство с точностью до малых порядка выше первого. Поэтому окончательно имеем:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y(x) dx + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_1} \delta y_1 + \left. \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot y' \right) \right|_{x=x_1} \delta x_1 - \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_0} \delta y_0 -$$

$$- \left. \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot y' \right) \right|_{x=x_0} \delta x_0$$

Мы получили общую формулу для вариации функционала, зависящего от одной функции. Она содержит в качестве частных случаев формулу вариации для задачи со свободными концами (в этом случае $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$) и формулу вариации для простейшей задачи (в этом случае $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$ и $\delta y_0 = \delta y_1 = 0$).

Для функционала, зависящего от нескольких функций аналогично можно получить

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) \right] \delta y_i(x) \right) dx + \left. \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \cdot \delta y_i \right|_{x_0}^{x_1} +$$

$$+ \left. \left(F - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i'} \cdot y_i' \right) \delta x \right|_{x_0}^{x_1}$$

Введем обозначения: $p_i = \dfrac{\partial F}{\partial y_i'}$, $H = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot \dfrac{\partial F}{\partial y_i'} = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot p_i$. В этих новых обозначениях основная формула для вариации функционала запишется следующим образом

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{dp_i}{dx} \right] \delta y_i(x) \right) dx + \left. \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \delta y_i - H \cdot \delta x \right) \right|_{x_0}^{x_1}.$$

Заметим, что если определитель, составленный из производных $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_j'}$ отличен от нуля, то величину y_i' можно выразить из равенств $p_i = \dfrac{\partial F}{\partial y_i'}$ через p_i и y_i, и мы можем в функционале $J = \int_a^b F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') dx$ от переменных $x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'$ и функции F перейти к переменным $x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n$ и функции H. Переменные $x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n$ и H называются каноническими переменными. Они играют важную роль в самых разных вопросах вариационного исчисления, и мы будем еще неоднократно с ними встречаться.

Задача с подвижными концами

Задача нахождения экстремума функционала $J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ *(1) на множестве всех функций* $y(x)$ *из* $D^1_{[a,b]}$*, концы которых* P_0 *и* P_1 *лежат на двух фиксированных линиях* $y=\varphi(x)$ *и* $y=\psi(x)$*, называется задачей с подвижными концами.*

Теорема 1. Кривая $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$, является решением задачи с подвижными концами, если для нее выполняется уравнение Эйлера и условия трансверсальности $\left. F+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot(\psi'-y')\right|_{x=x_1}=0, \quad \left. F+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot(\varphi'-y')\right|_{x=x_0}=0$.

Доказательство. Воспользуемся выражением для вариации функционала:

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y(x)dx+\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1}\delta y_1+\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=x_1}\delta x_1-$$

$$-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_0}\delta y_0-\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=x_0}\delta x_0$$

Если некоторая кривая дает экстремум рассматриваемому функционалу среди всех допустимых кривых, то она тем более будет давать экстремум и по отношению ко всем кривым, имеющим те же концевые точки. Следовательно, эта кривая должна быть экстремалью, т.е. удовлетворять уравнению Эйлера. Поэтому в выражении для вариации функционала интегральный член обратиться в нуль, и мы получим следующее условие экстремума

$$\delta J=\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_1}\delta y_1+\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=x_1}\delta x_1-$$

$$-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_0}\delta y_0-\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=x_0}\delta x_0=0.$$

Так как $\delta y_1=\psi'\delta x_1+\alpha_1$, $\delta y_0=\varphi'\delta x_0+\alpha_0$, где α_1 и α_0 - бесконечно малые порядка выше первого, то окончательно условие экстремума можно переписать так

$$\delta J=\left.\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\psi'+F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=x_1}\delta x_1-$$

$$-\left.\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\varphi'+F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=x_0}\delta x_0=0.$$

Так как δx_0 и δx_1 - независимые переменные, то отсюда получаем условия

$$\begin{cases}\left. F+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot(\psi'-y')\right|_{x=x_1}=0\\ \left. F+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot(\varphi'-y')\right|_{x=x_0}=0\end{cases}$$

называемые условиями трансверсальности.

Условия трансверсальности

Про кривую $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$, удовлетворяющую этим условиям, говорят, что она трансверсальна кривым линиях $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$.

Итак для решения вариационной задачи с подвижными концами нужно сперва записать и решить соответствующее уравнение Эйлера, а затем найти значения входящих в его общее решение двух произвольных постоянных из условий трансверсальности.

Для функционалов, зависящих от нескольких функций (например двух) задача с подвижными концами сводится к отысканию экстремалей, концы которых лежат на двух фиксированных поверхностях $x=\varphi(y,\ z)$ и $x=\psi(y,\ z)$. Для такой постановки задачи кривая должна удовлетворять уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0$$

и условиям трансверсальности запишутся следующим образом

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\left(F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right|_{x=x_0}=0$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial z'}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\left(F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right|_{x=x_0}=0$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\left(F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right|_{x=x_1}=0$$
$$\left.\frac{\partial F}{\partial z'}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\left(F-y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}-z'\cdot\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right|_{x=x_1}=0.$$

Не гладкие экстремали и условия Вейерштрасса-Эрдмана

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления. Необходимо найти такие кривые $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$, доставляющие минимум функционалу

$$J = \int_0^2 (y')^2 (1-y')^2 dx$$
, чтобы $y(0)=0$, $y(2)=1$.

Подинтегральная функция больше или равна нулю и достигает минимума, когда $y'=0$ или $1-y'=0$. Следовательно, семейство экстремалей - это два семейства параллельных прямых $\bar{y}=c_1$ и $\bar{y}=x+c_2$. Однако ни одна гладкая экстремаль не удовлетворяет заданным граничным условиям.

Задача с негладкими экстремалями

Задача о нахождении экстремума функционала $J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$*, в классе допустимых кривых, которые удовлетворяют граничным условиям* $y(a)=A$, $y(b)=B$ *и могут иметь излом в некоторой точке с,* $c\in[a,\ b]$ *называется* ***задачей с негладкими экстремалями***.

__Теорема 1__ __(Условия Вейерштрасса-Эрдмана).__ Решение задачи с негладкими экстремалями $y(x)$ удовлетворяет уравнениям Эйлера, граничным условиям, а в точке излома условиям Вейерштрасса-Эрдмана: $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c-0}-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c+0}=0$, $\left.\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=c-0}-\left.\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=c+0}=0$.

Доказательство. На каждом из отрезков $[a,\ c]$ и $[c,\ b]$ та кривая, на которой исходный функционал достигает экстремума, удовлетворяет уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$. Представим рассматриваемый функционал в виде суммы

$$J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx=$$
$$=\int_a^c F(x,y(x),y'(x))dx+\int_c^b F(x,y(x),y'(x))dx=J_1(y)+J_2(y)$$

и вычислим вариацию для каждого из этих двух функционалов в отдельности. На каждом из отрезков $[a,\ c]$ и $[c,\ b]$ граничные условия состоят в том, что один конец допустимой кривой закреплен, а другой свободен. Поэтому, принимая во внимание уравнение Эйлера, получаем

$$\delta J_1=\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c-0}\delta y_1+\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=c-0}\delta x_1,\quad \delta J_2=-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c+0}\delta y_1-\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=c+0}\delta x_1.$$

Если имеет место экстремум, то $\delta J=\delta J_1+\delta J_2=0$, т.е.

$$\left(\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c-0}-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c+0}\right)\delta y_1+\left[\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=c-0}-\left.\left(F-\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'\right)\right|_{x=c+0}\right]\delta x_1=0,$$

откуда в силу произвольности δy_1 и δx_1 получаем $\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c-0}-\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=c+0}=0$, $\left.\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=c-0}-\left.\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right|_{x=c+0}=0$.

Что и требовалось доказать.

Канонические переменные

Эти условия выглядят особенно просто, если воспользоваться каноническими переменными. Действительно, условия Вейерштрасса-Эрдмана просто означают, что канонические переменные $p=\frac{\partial F}{\partial y'}$, $H=-F+y'\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}$ должны быть непрерывны в точке излома.

☺ Необходимо найти такие кривые $y(x)$ из $D^1_{[a,b]}$, доставляющие минимум функционалу $J=\int_0^2 (y')^2(1-y')^2\,dx$, чтобы $y(0)=0$, $y(2)=1$. Экстремали: $\bar y=c_1$ и $\bar y=x+c_2$. Условия Вейерштрасса-Эрдмана: $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'\cdot(1-y')^2-2(y')^2(1-y')$ выполняются, следовательно $\bar y=\begin{cases}0, & x\in[0,\ 1]\\ t-1, & x\in[1,\ 2]\end{cases}$ является экстремалью.

Канонический вид уравнений Эйлера

Уравнения Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0$ отвечающие функционалу

$$J = \int_a^b F(x, y_1, \ \ldots, \ y_n, y_1', \ \ldots, \ y_n')dx$$,

зависящему от n функций, образуют систему n уравнений второго порядка. Такую систему можно, и притом различными способами, свести к системе $2n$ уравнений первого порядка, например можно принять $y_1', \ \ldots, \ y_n'$ за n новых неизвестных функций и рассматривать систему

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0 \\ \frac{dy_i}{dx} = y_i' \end{cases},$$

где $y_1, \ \ldots, \ y_n, \ y_1', \ \ldots, \ y_n'$ - неизвестные функции, а x - независимое переменное.

Замена переменных на канонические

Более удобную и симметричную форму для уравнений Эйлера можно получить, введя вместо $x, \ y_1, \ \ldots, \ y_n$ канонические переменные $p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i'}$ и функцию Гамильтона $H = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot p_i$. С их помощью мы получили компактное выражение для вариации функционала

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{dp_i}{dx}\right]\delta y_i(x)\right)dx + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \delta y_i - H \cdot \delta x\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1},$$

а также наглядную интерпретацию условий Вейерштрасса-Эрдмана (непрерывность канонических переменных в точке излома). Напомним, что переход от старых координат к каноническим возможен, если определитель, составленный из производных $\frac{\partial^2 F}{\partial y_i' \partial y_j'}$ отличен от нуля.

Чтобы эту замену произвести в уравнениях Эйлера, нужно частные производные $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ (взятые при постоянных $y_1', \ \ldots, \ y_n'$) выразить через частные производные $\frac{\partial H}{\partial y_i}$ (взятые при постоянных $p_1, \ \ldots, \ p_n$). Вычислим для этого дифференциал функции Гамильтона

$$dH = -dF + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i' + \sum_{i=1}^{n} y_i' dp_i =$$
$$= -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i'}dy_i' + \sum_{i=1}^{n} p_i dy_i' + \sum_{i=1}^{n} y_i' dp_i.$$

Из определения канонических переменных $p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i'}$ следует, что члены, содержащие dy_i', взаимно уничтожаются и мы получаем $dH = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i' dp_i$. Таким образом частные производные от функции Гамильтона равны $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}$, $\frac{\partial H}{\partial p_i} = y_i'$.

Каноническая система уравнений Эйлера

Пользуяь этими выражениями, можно переписать уравнения Эйлера в виде $\begin{cases} \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$.

Эти $2n$ *уравнений первого порядка образуют систему, называемую канонической системой уравнений Эйлера для функционала* $J = \int_a^b F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')dx$.

Напомним, что первым интегралом некоторой системы дифференциальных уравнений называется функция, сохраняющая постоянные значения вдоль каждой интегральной кривой этой системы. Выясним, какие первые интегралы может иметь каноническая система (а следовательно, и эквивалентная ей первоначальная система). Рассмотрим сначала случай, когда функция *F*, определяющая функционал, не зависит от *x* явно, т. е. $F(y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$.

Тогда функция $H = -F + \sum_{i=1}^{n} y_i' \cdot p_i$ не содержит *x* явно и следовательно,

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}$$

воспользовавшись каноническими уравнениями Эйлера, получаем

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial H}{dp_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial y_i} = 0$$

откуда $H = const$ вдоль каждой экстремали. Таким образом, если *F* не зависит от *x* явно, то функция $H = const$ является первым интегралом уравнений Эйлера.

Если *H* зависит от *x,* то имеет место формула $\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$ которая получается таким же рассуждением.

Рассмотрим теперь некоторую вида $\Phi(y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)$ и выясним, при каких условиях она будет первым интегралом канонической системы уравнений Эйлера. При этом мы уже не будем предполагать, что *F* не зависит от *x* явно, а рассмотрим общий случай. Вдоль каждой интегральной кривой системы имеем

$$\frac{d\Phi}{dx} = \sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} + \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dx}\right) = \sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{dH}{dp_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{dH}{dy_i}\right).$$

Выражение $[\Phi, \; H] = \sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}\frac{dH}{dp_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{dH}{dy_i}\right)$ называется скобкой Пуассона функций Ф и *H*. Мы получаем следующую формулу: $\frac{d\Phi}{dx} = [\Phi, \; H]$. Таким образом, для того чтобы произвольная функция была первым интегралом системы канонических уравнений Эйлера, необходимо и достаточно, чтобы скобка Пуассона была тождественно равна нулю.

Если же не только Н, но и Ф может явно зависеть от *x,* то справедлива, как легко проверить, следующая формула: $\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + [\Phi, \; H]$.

Понятие о поле экстремалей. Уравнение Гамильтона-Якоби

Рассмотрим функционал $J(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ определенный на кривых, лежащих в некоторой области *G*, и предположим, что через любые две точки *A* и *B* из *G* проходит одна и только одна экстремаль функционала. Величину $S=J(y)$, где интеграл берется вдоль экстремали, соединяющей точки *A* и *B* из *G* назовем геодезическим расстоянием между этими точками. S представляет собой, очевидно, однозначную функцию координат точек *A* и *B*. Рассмотрим простейшие примеры.

1. Пусть функционал *J* означает длину кривой, тогда S ≈ расстояние (в обычном смысле) между *A* и *B*.

2. Рассмотрим механическую систему с некоторой функцией Лагранжа *L*. Интеграл взятый вдоль экстремали, проходящей через заданные точки *A* и *B* представляет собой действие, отвечающее переходу рассматриваемой системы из одного состояния в другое.

Уравнения Гамильтона - Якоби

Будем считать начальную точку *A* фиксированной, а точку *B* переменной. Тогда *S* будет представлять собой в области *G* однозначную функцию координат точки *B*. Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $S(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)$. Вычислим с этой целью ее частные производные Для этого найдем полный дифференциал функции ***S***, т. е. главную линейную часть приращения Но ΔS есть, по определению, разность $\Delta S=J(\tilde{\gamma})-J(\gamma)$где γ - экстремаль, идущая из *A* в точку $(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)$, а $\tilde{\gamma}$- экстремаль, идущая в точку $(x,\ y_1+\delta y_1,\ \dots,\ y_n+\delta y_n)$. Следовательно $dS=\delta J$, где за начальную кривую берется экстремаль γ, а начальная точка *A* остается неподвижной. Воспользовавшись формулой для вариации функционала в канонических переменных, получаем

$$dS(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)=\delta J=\sum p_i\delta y_i-H\delta x$$

(все величины берутся в точке *B*). Следовательно, $\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial x}=-H,\\ \dfrac{\partial S}{\partial y_i}=p_i\end{cases}$ где под $p_i=p_i(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)$понимается выражение $\dfrac{\partial F}{\partial y_i'}$ в котором y_i'- значение производной $\dfrac{dy_i}{dx}$ в точке *B* для идущей из *A* в *B* экстремали, и

$$H=H(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n,\ p_1(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n),\ \dots,\ p_n(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n)).$$

Получаем, что *S* -как функция от координат точки *B* удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial S}{\partial x}+H\left(x,\ y_1,\ \dots,\ y_n,\ \dfrac{\partial S}{\partial y_1},\ \dots,\ \dfrac{\partial S}{\partial y_n}\right)=0$. Это уравнение в частных производных (вообще говоря, нелинейное) называется ***уравнением Гамильтона - Якоби***.

Канонические уравнения Эйлера представляют собой характеристическую систему для уравнения Гамильтона - Якоби.

Связь между решениями уравнения Гамильтона - Якоби и первыми интегралами системы уравнений Эйлера.

Выясним связь между решениями уравнения Гамильтона - Якоби и первыми интегралами системы уравнений Эйлера.

Теорема 1. Пусть $S=S(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k)$ - некоторое решение уравнений Гамильтона - Якоби, зависящее от параметров $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k$. Тогда каждая из производных $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i},\quad i=1,\ \ldots,\ k$ является интегралом системы уравнений Эйлера $\begin{cases} \frac{dy_i}{dx}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases}$, т.е. $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=const$ вдоль каждой экстремали.

Доказательство. Нам нужно показать, что вдоль каждой экстремали $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right)=0$. Вычислим эту производную. Имеем $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial y_j\,\partial \alpha_i}\cdot\frac{dy_j}{dx}$ (1). Далее, подставив $S=S(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k)$ в уравнение Гамильтона - Якоби и продифференцировав полученное равенство по α_i, находим $\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha_i}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial \alpha_i}$. Подставляя это выражение в (1) получаем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial \alpha_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial \alpha_i}\cdot\frac{dy_j}{dx}=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial y_i\,\partial \alpha_i}\left(\frac{dy_j}{dx}-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)=0,$$

так как $\frac{dy_j}{dx}-\frac{\partial H}{\partial p_j}=0$ вдоль экстремалей. Теорема доказана.

Теорема 2 (Якоби). Пусть $S=S(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k)$ - полный интеграл уравнения Гамильтона - Якоби $\frac{\partial S}{\partial x}+H\left(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \frac{\partial S}{\partial y_1},\ \ldots,\ \frac{\partial S}{\partial y_n}\right)=0$ и пусть детерминант матрицы $matr\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial y_j}\right)$ отличен от нуля. Пусть, наконец, $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n$ - n произвольных постоянных. Тогда функции $y_i=y_i(x,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_n)$ определяемые соотношениями $\frac{\partial S(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)}{\partial \alpha_i}=\beta_i$ вместе с функциями $p_i=\frac{\partial S(x,\ y_k(x,\ \alpha_j,\ \beta_j),\ \alpha_k)}{\partial y_i}$ образуют общее решение канонической системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases}.$$

Доказательство. Если нам известен полный интеграл уравнения Гамильтона √ Якоби $S = S(x, \ y_1, \ \dots, \ y_n, \alpha_1, \ \dots, \ \alpha_k)$, т. е. его решение зависящее от *n* параметров, то мы можем согласно сказанному выше написать *n* первых интегралов $\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$ (2) канонической системы уравнений Эйлера, которых, вообще говоря, достаточно для получения общего решения канонической системы. Действительно, пусть эти первые интегралы независимы, т. е. детерминант матрицы, составленной из производных $matr\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial y_j}\right)$, отличен от нуля. Тогда из соотношений (2) мы можем определить функции $y_i = y_i(x, \ \alpha_1, \ \dots, \ \alpha_n, \ \beta_1, \ \dots, \ \beta_n)$

положив затем

$$p_i = \frac{\partial S(x, \ y_k(x, \ \alpha_j, \ \beta_j), \ \alpha_k)}{\partial y_i}$$

мы получим общее решение канонической системы $\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i} \end{cases}.$

Что и требовалось доказать.

Вторая вариация функционала. Необходимые условия Лежандра и Якоби

Билинейный и квадратичный функционал

Билинейным функционалом *называется функционал* $J(x,\ y)$, *если* $\begin{cases} J(\alpha x_1 + \beta x_2,\ y) = \alpha J(x_1,\ y) + \beta J(x_2,\ y), \\ J(x,\ \gamma y_1 + \delta y_2) = \gamma J(x,\ y_1) + \delta J(x,\ y_2) \end{cases}$*. Полагая в билинейном функционале* $y = x$*, получаем выражение, называемое* ***квадратичным функционалом***.

☺ Выражение $\int\limits_a^b x(t)y(t)dt$ представляет собой билинейный функционал, а $\int\limits_a^b x^2(t)dt$ - квадратичный функционал в пространстве $C[a,\ b]$.

☺ Выражение $\int\limits_a^b \left(A(t)x^2(t) + B(t)x(t)x'(t) + C(t)x'^2(t)\right)dt$ представляет собой квадратичный функционал в пространстве $D^1[a,\ b]$.

Вторая вариация функционала

Второй вариацией $\delta^2 J(\delta y)$ *функционала* $J(y)$ *будем называть квадратичный функционал* $L_2(\delta y)$ *в разложении* $\Delta J = J(y + \delta y) - J(y) = L_1(\delta y) + L_2(\delta y) + \beta\|\delta y\|^2$*, где* $L_1(\delta y) = \delta J$ *- линейный функционал (вариация функционала), а* $\beta \to 0$ *при* $\|\delta y\| \to 0$.

<u>**Теорема 1** (второе необходимое условие экстремума функционала).</u> Для того, чтобы функционал $J(y)$ на кривой $y_0(x)$ имел минимум (максимум), необходимо, чтобы при $y = y_0(x)$ выполнялось условие $\delta^2 J(\delta y) \geq 0, \quad (\leq 0)$.

<u>Доказательство</u>. В выражении $\Delta J = \delta J(\delta y) + \delta^2 J(\delta y) + \beta\|\delta y\|^2$ $\delta J(\delta y) = 0$ в точке экстремума, поэтому при достаточно малом $\|\delta y\|$ знак ΔJ определяется знаком $\delta^2 J(\delta y)$. Предположим (от противного), что $\delta^2 J(\delta y_0) < 0$ при некотором δy_0. Тогда при любом $\varepsilon \neq 0$ имеем $\delta^2 J(\varepsilon \cdot \delta y_0) = \varepsilon^2 \cdot \delta^2 J(\delta y_0) < 0$, и следовательно, $\Delta J = J(y_0 + \varepsilon \cdot \delta y_0) - J(y_0) < 0$ при достаточно малом ε, т.е. при $y = y_0(x)$ минимума нет (противоречие). Что и требовалось доказать.

Формула для второй вариации в задаче с закрепленными концами.

Найдем <u>явное выражение второй вариации</u> для функционала $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ (1), определенного для кривых $y(x) \in D^2_{[a,\ b]}$ с закрепленными концами $y(a) = A$, $y(b) = B$. Дадим функции $y(x)\in D^2_{[a,\ b]}$ приращение $\delta y(x)$, удовлетворяющее условиям $\delta y(a)=\delta y(b)=0$. Используя формулу Тейлора представим приращение функционала в виде

$$\Delta J = J(y+\delta y)-J(y)=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\delta y'\right)dx+\frac{1}{2}\int_a^b\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\delta y^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot\delta y\cdot\delta y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\delta y'^2\right)dx+\varepsilon$$

где $\varepsilon\to 0$ бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\|\delta y\|^2$. Первое интегральное слагаемое в этом выражении - первая вариация функционала, а второе - квадратичное относительно $\delta y(x)$- представляет собой вторую вариацию функционала $\delta^2 J$. Таким образом для функционала из простейшей задачи имеем $\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\delta y^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot\delta y\cdot\delta y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\delta y'^2\right)dx$. Приведем это выражение к более удобному виду. Интегрируя по частям и учитывая, что $\delta y(a)=\delta y(b)=0$, получаем

$$\int_a^b 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\cdot\delta y\cdot\delta y'dx=-\int_a^b\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\right)\delta y^2dx.$$

Окончательно для второй вариации функционала имеем

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\right)\cdot\delta y^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\delta y'^2\right)dx.$$

Замечание. Если $y(x)$- экстремаль и $y(x)+\delta y(x)$- некоторая допустимая кривая, то приращение функционала можно записать в виде

$$\Delta J=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\right)\cdot\delta y^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\delta y'^2\right)dx+\int_a^b\left(\xi\cdot\delta y^2+\eta\cdot\delta y'^2\right)dx,$$

где $|\xi|\to 0$ и $|\eta|\to 0$ при $\|\delta y\|\to 0$.

Необходимое условие Лежандра

Теорема 2 (необходимое условие Лежандра). Для того, чтобы функционал

$$J(y)=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$$

достигал на кривой $y(x)\in D^2_{[a,\ b]}$ с закрепленными концами $y(a)=A$, $y(b)=B$ минимума, необходимо, чтобы вдоль этой кривой выполнялось условие $\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y'}\geq 0$.

Доказательство. Согласно второму необходимому условию для достижения минимума функционала его вторая вариация должна быть неотрицательна $\delta^2 J(\delta y)\geq 0$, то есть

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right)\cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot \delta y'^2 \right) dx \ge 0$$

при любых функциях $\delta y(x)$, удовлетворяющий условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

Предположим, что необходимое условие Лежандра не выполнено, то есть в некоторой точке x_0 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{x=x_0} < 0$.

Пусть

$$\delta y(x) = \begin{cases} \sqrt{\sigma}\left(1 + \frac{x - x_0}{\sigma}\right), & x_0 - \sigma \le x \le x_0 \\ \sqrt{\sigma}\left(1 - \frac{x - x_0}{\sigma}\right), & x_0 \le x \le x_0 + \sigma \\ 0, & x \notin [x_0 - \sigma, \quad x_0 + \sigma] \end{cases}, \quad (\delta y(x))^2 \le \sigma, \quad (\delta y'(x))^2 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}, & x_0 - \sigma \le x \le x_0 + \sigma \\ 0, & x \notin [x_0 - \sigma, \quad x_0 + \sigma] \end{cases}.$$

Если при таком выборе $\delta y(x)$ положить $\sigma \to 0$, то первое слагаемое в

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right)\cdot \delta y^2 \cdot dx + \frac{1}{2}\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot \delta y'^2 \cdot dx$$

будет стремиться к нулю, а второе к $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{x=x_0}$. Но так как по предположению $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right|_{x=x_0} < 0$, то получим, что при указанных выше $\delta y(x)$ и достаточно малом σ

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right)\cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot \delta y'^2 \right) dx < 0.$$

Получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и теорема доказана.

Как было показано выше

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right)\cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot \delta y'^2 \right) dx = \int_a^b \left(Q\cdot \delta y^2 + P\cdot \delta y'^2 \right)\cdot dx.$$

Уравнение Эйлера $Q\cdot \delta y - \frac{d}{dx}(P\cdot \delta y') = 0$ *квадратичного функционала* $\int_a^b \left(Q\cdot \delta y^2 + P\cdot \delta y'^2 \right)\cdot dx$ *(2) называется* ***уравнением Якоби исходного функционала****.*

Рассмотрим квадратичный функционал $\int_a^b \left(Q \cdot \delta y^2 + P \cdot \delta y'^2\right) \cdot dx$ на множестве функций, удовлетворяющих условиям $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. В теореме 2 было показано, что для неотрицательности такого квадраничного функционала необходимо условие $P(x) \geq 0, \quad (a \leq x \leq b)$. Запишем уравнение Эйлера для этого функционала $Q \cdot \delta y - \frac{d}{dx}(P \cdot \delta y') = 0$ (3)

Точка $\tilde{x}$ *называется сопряженной с точкой* $x = a$*, если уравнение (3) имеет решение, не равное нулю тождественно, обращающееся в нуль при* $x = a$ *и при* $x = \tilde{x}$.

<u>Теорема 3.</u> Для того, чтобы квадратичный функционал $\int_a^b \left(Q \cdot \delta y^2 + P \cdot \delta y'^2\right) \cdot dx$ при $P(x) > 0, \quad (a \leq x \leq b)$ был положительно определен на отрезке $[a, \ b]$ для всех $\delta y(x)$, таких, что $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы внутренние точки отрезка не содержал точек, сопряженных с $x = a$.

Без доказательства.

Точка $\tilde{x}$ *называется сопряженной с точкой* $x = a$ *по отнощению к функционалу* $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$*, если она сопряжена с* $x = a$ *по отношению к квадратичному функционалу*

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_a^b \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right) \cdot \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot \delta y'^2\right) dx = \int_a^b \left(Q \cdot \delta y^2 + P \cdot \delta y'^2\right) \cdot dx .$$

Необходимое условие Якоби

<u>Теорема 4 (необходимое условие Якоби).</u> Для того, чтобы экстремаль $y = y(x)$ доставляла минимум функционалу $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$, необходимо, чтобы интервал $(a, \ b)$ не содержал точек, сопряженных с $x = a$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1.

Сводка необходимых и достаточных условий слабого экстремума

Необходимые условия.

Если вдоль кривой $y = y(x)$ функционал $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ достигает экстремума, то:

1. Кривая $y = y(x)$ является экстремалью, т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$.
2. Вдоль этой кривой выполняются условия Лежандра $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} \geq 0$ в случае минимума и $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} \leq 0$ в случае максимума.
3. Интервал $(a, \ b)$ не содержит точек, сопряженных с a (условие Якоби).

Достаточные условия.

Для того, чтобы кривая $y = y(x)$ доставляла функционалу $J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ слабый минимум достаточно, чтобы выполнялась совокупность условий (все три сразу):

1. Данная кривая является экстремалью, т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера.
2. Вдоль кривой выполняется усиленное условие Лежандра $\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} > 0$ (в случае минимума).
3. Отрезок $[a, \ b]$ не содержит точек, сопряженных с точкой $x = a$ (усиленное условие Якоби).