1 Demostración

Queremos ver que:

$$\forall t :: AT\ a.\ \forall x :: a.\ (elem\ x\ (preorder\ t)\ =\ elem\ x\ (postorder\ t))$$

Definiendo:

- $AT\ a = Nil \mid Tern\ a\ (AT\ a)\ (AT\ a)\ (AT\ a)$
- $preorder\ ::\ Procesador\ (AT\ a)\ a$
  $\{PRE\}\ preorder = foldAT\ [\,]\ (v\ i\ c\ d\ \rightarrow\ [v]\ ++\ i\ ++\ c\ ++\ d)$
- $postorder\ ::\ Procesador\ (AT\ a)\ a$
  $\{POST\}\ postorder = foldAT\ [\,]\ (v\ i\ c\ d\ \rightarrow\ i\ ++\ c\ ++\ [v]\ ++\ d)$
- $foldAT\ ::\ b\ \rightarrow\ (a\ \rightarrow\ b\ \rightarrow\ b\ \rightarrow\ b\ \rightarrow\ b)\ \rightarrow\ AT\ a\ \rightarrow\ b$
  $foldAT\ cNil\ cTern\ at = case\ at\ of$
  $\quad Nil\ \rightarrow\ cNil$
  $\quad Tern\ v\ c\ i\ d\ \rightarrow\ cTern\ val\ (rec\ izq)\ (rec\ cen)\ (rec\ der)$
  $\quad where\ rec =\ foldATcNilcTern$

Por inducción estructural en t definimos el enunciado $P(t)$ y planteamos tanto el caso base como el caso inductivo:

$\forall i,\ c,\ d :: AT\ a.\ \forall v :: a$

$P(t) = elem\ x\ (preorder\ t) = elem\ x\ (postorder\ t)$

- Caso base: $P(Nil)$
- Caso inductivo: $(P(i)\ \wedge\ P(c)\ \wedge\ P(d)) \Rightarrow P(AT\ v\ i\ c\ d)$

1.1 Caso Base

$P(Nil) \equiv elem\ x\ (preorder\ Nil) = elem\ x\ (postorder\ Nil)$

Reemplazando en preorder/postorder y luego en foldAT:
$preorder\ Nil = [\,]$
$postorder\ Nil = [\,]$

$P(Nil) \equiv elem\ x\ [\,] = elem\ x\ [\,]$
$elem\ x\ [\,] = False \Rightarrow P(Nil) \equiv False = False$

$P(Nil) = True$

1.2 Caso Inductivo

$(P(i) \ \wedge \ P(c) \ \wedge \ P(d)) \Rightarrow P(AT \ v \ i \ c \ d)$

Para demostrar esta implicación asumimos la implicación

Con este criterio vemos que $P(i) \ \wedge \ P(c) \ \wedge P(d)$ es verdadero, con lo cual:

- $P(i) \equiv elem \ x \ (preorder \ i) = elem \ x \ (postorder \ i) \equiv True$
- $P(c) \equiv elem \ x \ (preorder \ c) = elem \ x \ (postorder \ c) \equiv True$
- $P(d) \equiv elem \ x \ (preorder \ d) = elem \ x \ (postorder \ d) \equiv True$

Pasamos a detallar el consecuente:

$P(AT\, v\, i\, c\, d) \equiv elem\, x\, (preorder\, (AT\, v\, i\, c\, d)) = elem\, x\, (preorder\, (AT\, v\, i\, c\, d))$

Reemplazando en preorder/postorder y luego en foldAT:
$preorder \ (AT \ v \ i \ c \ d) = [v] \ ++ \ preorder \ i \ ++ \ preorder \ c \ ++ \ preorder \ d$
$postorder \ (AT \ v \ i \ c \ d) = postorder \ i \ ++ \ postorder \ c \ ++ \ [v] \ ++ \ postorder \ d$

Por lo tanto:
$P(AT \ v \ i \ c \ d) \equiv$
$elem \ x \ ([v] \ ++ \ preorder \ i \ ++ \ preorder \ c \ ++ \ preorder \ d)$
$= elem \ x \ (postorder \ i \ ++ \ postorder \ c \ ++ \ [v] \ ++ \ postorder \ d)$

Ahora desarrollamos cada lado de $P(AT \ v \ i \ c \ d)$:

1.2.1 Lado Izquierdo

$elem \ x \ ([v] \ ++ \ preorder \ i \ ++ \ preorder \ c \ ++ \ preorder \ d) =$
$x = v \ \vee \ elem \ x \ (preorder \ i) \ \vee \ elem \ x \ (preorder \ c) \ \vee \ elem \ x \ (preorder \ d)$

1.2.2 Lado Derecho

$elem \ x \ (postorder \ i \ ++ \ postorder \ c \ ++ \ [v] ++ \ postorder \ d) =$

$x = v \ \vee \ elem \ x \ (postorder \ i) \ \vee \ elem \ x \ (postorder \ c) \ \vee \ elem \ x \ (postorder \ d)$

Así podemos separar estos 2 casos:

1. $x = v$
2. $x \neq v$

1.2.3 $x = v$

$x = v \ \vee \ elem\ x\ (preorder\ i) \ \vee \ elem\ x\ (preorder\ c) \ \vee \ elem\ x\ (preorder\ d) \equiv$
$elem\ x\ (preorder\ AT\ v\ i\ c\ d) \equiv True$

$x = v \vee elem\ x\ (postorder\ i) \vee elem\ x\ (postorder\ c) \vee elem\ x\ (postorder\ d) \equiv$
$elem\ x\ (postorder\ AT\ v\ i\ c\ d) \equiv True$

$\Rightarrow elem\ x\ (preorderAT\ v\ i\ c\ d) = elem\ x\ (postorder\ AT\ v\ i\ c\ d) \equiv True$
$\Rightarrow P(AT\ v\ i\ c\ d) \equiv True$

1.2.4 $x \neq v$

Como $x \neq v$ podemos detallar ambos lados de $P(AT\ v\ i\ c\ d)$ de la siguiente manera:

Lado izquierdo: $elem\ x\ (preorder\ i) \vee elem\ x\ (preorder\ c) \vee elem\ x\ (preorder\ d)$
Lado derecho: $elem\ x\ (postorder\ i) \vee elem\ x\ (postorder\ c) \vee elem\ x\ (postorder\ d)$

Ahora bien, por hipótesis inductiva sabememos que

- $P(i) \equiv elem\ x\ (preorder\ i) = elem\ x\ (postorder\ i) \equiv True$
- $P(c) \equiv elem\ x\ (preorder\ c) = elem\ x\ (postorder\ c) \equiv True$
- $P(d) \equiv elem\ x\ (preorder\ d) = elem\ x\ (postorder\ d) \equiv True$

Con lo cual

$elem\ x\ (preorder\ i) \ \vee \ elem\ x\ (preorder\ c) \ \vee \ elem\ x\ (preorder\ d) =$
$elem\ x\ (postorder\ i) \ \vee \ elem\ x\ (postorder\ c) \ \vee \ elem\ x\ (postorder\ d)$
$\equiv P(AT\ v\ i\ c\ d) \equiv True$

De esta forma demostramos por inducción estructural que

$$\forall t :: AT\ a.\ \forall x :: a.\ (elem\ x\ (preorder\ t) \ = \ elem\ x\ (postorder\ t))$$