Практическое занятие. Законы распределения случайных величин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Законы распределения дискретных случайных величин

1. *Биномиальный закон распределения*

Дискретная случайная величина X имеет *биномиальный закон распределения,* если она принимает значения 0,1,2,…,m,…,n с вероятностями $p(m) = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Биномиальный закон распределения представляет собой закон распределения числа X = m наступлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону, задаются формулами:

$M(X) = np$, $D(X) = npq$.

Следствие. Математическое ожидание величины (m/n) в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может наступить с одной и той же вероятностью p, равно p, т.е. $M(m/n) = p$, а $D(m/n)=pq/n$.

2. Распределение Пуассона.

Дискретная случайная величина X имеет *закон распределения Пуассона*, если она принимает значения 0,1,2,…,m,…,n с вероятностями $p(m) = P(X=m) = e^{-\lambda}\lambda^m/m!$, где $\lambda = np$.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ этого закона. $M(X) = \lambda$, $D(X)= \lambda$.

Распределение Пуассона ─ частный случай биномиального закона распределения для относительно больших *n* и относительно малых *p*.

2. Законы распределения непрерывных случайных величин

1. Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерный закон* *распределения* на отрезке [a, b], если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, т.е.

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{если } \ a\le x\le b;\\ 0\ , & \text{если } \ x<a \ \ \textit{или} \ \ x>b.\end{cases}$$

Теорема. Функция распределения случайной величины X, распределенной по равномерному закону,

$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0\ , & \text{если } \ x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } \ a\le x\le b;\\ 1\ , & \text{если } \ x>b,\end{cases}$$

её математическое ожидание M(x) = (a +b)/2 и дисперсия D(x)= $(b–a)^2/12$.

Графики плотности вероятности и функции распределения приведены на рис 6.

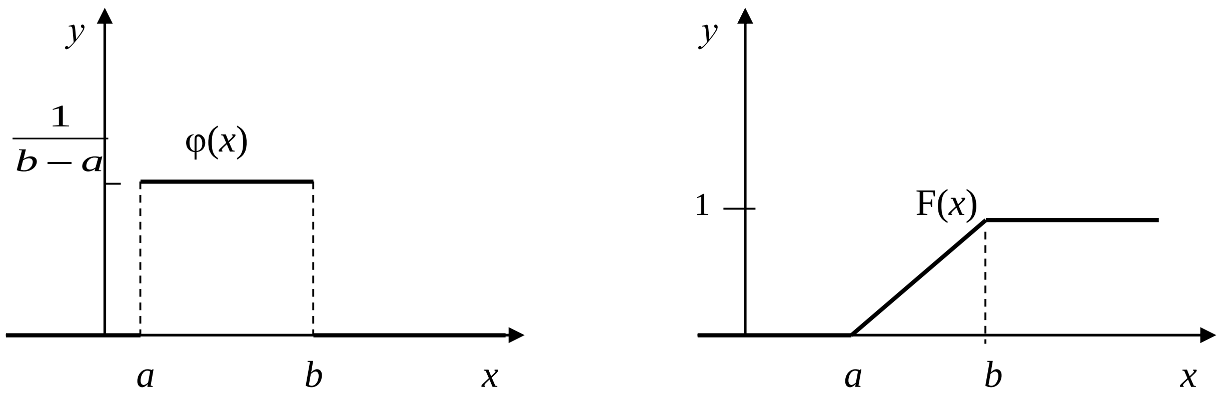

Рис. 6

П р и м е р 1. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не более полминуты?

Найти математическое ожидание величины X – времени ожидания поезда.

Р е ш е н и е. Случайная величина X - время ожидания поезда имеет равномерный закон распределения с параметрами a=0, b=2.

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2;\\ 0, & x<0 \quad или \quad x>2.\end{cases}$$

$$\text{P}(x\le 0{,}5)=\int\limits_0^{0{,}5}\varphi(x)dx=\int\limits_0^{0{,}5}\frac{dx}{2}=\frac{1}{2}x\Big|_0^{0{,}5}=\frac{1}{4}.$$

Вероятность того, что ждать поезда пассажиру придется не более полминуты, равна 1/4.

Рассчитаем теперь среднее время ожидания поезда - величину M(X): M(X)= (0+2) / 2 = 1 мин.

2. Нормальный закон распределения

Нормальное распределение почти всегда имеет место, когда наблюдаемые случайные величины формируются под влиянием большого числа случайных факторов, ни один из которых существенно не превосходит остальные.

Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный закон распределения* (*закон Гаусса*) с параметрами *a* и σ^2, если ее плотность

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<\infty.$$

вероятности имеет вид:

Нормальному закону подчиняются многие признаки: рост и вес человека, дальность полета снаряда, напряжение в сети.

Кривую нормального закона распределения называют *гауссовой кривой*.

<u>Теорема.</u> Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону, равно параметру *a* этого закона, а дисперсия – параметру σ^2, т. е. M(X) = *a*, D(X)= σ^2.

Сложность непосредственного нахождения функции распределения случайной величины связана с тем, что интеграл от плотности вероятности не

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

вычисляется в элементарных функциях. Поэтому этот интеграл выражают через функцию (интеграл вероятностей) Лапласа Ф(x):

для которой составлены таблицы (Приложение 1).

Теорема. Функция распределения случайной величины X, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа Ф(x) по формуле

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(\frac{x-a}{\sigma}).$$

Свойства нормального распределения.

1. Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал $[x_1, x_2]$ равна

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \left[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\right], \text{ где } t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma},\ t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma}.$$

2. Вероятность того, что отклонение случайной величины X, распределенной по нормальному закону, от математического ожидания a не превысит величину $\Delta > 0$, равно:

$P(|X - a| \le \Delta) = \Phi\ (t),\ \ t = \Delta/\sigma.$

По этой формуле можно рассчитать вероятности $P(|X - a| \le \Delta)$ для различных значений Δ:

$\Delta = \sigma$, $P(|X - a| \le \Delta) = 2\Phi(1) = 0{,}6827$;

$\Delta = 2\sigma$, $P(|X - a| \le \Delta) = 2\Phi(2) = 0{,}9545$;

$\Delta = 3\sigma$, $P(|X - a| \le \Delta) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$.

Отсюда вытекает правило трех сигм.

Если случайная величина распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале от $a-3\sigma$ до $a+3\sigma$ (рис. 7).

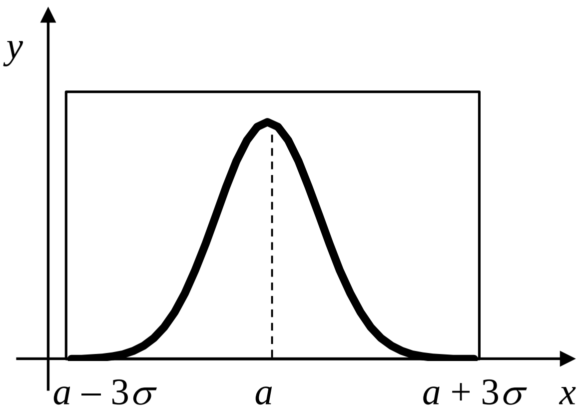

Рис. 7

УПРАЖНЕНИЯ

1. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений герба при двух бросаниях монеты. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Две игральные кости бросаются два раза. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

3. Для равномерно распределенной на интервале $(a,2*b)$ непрерывной случайной величины X определить функции f(x) и F(x).

Построить графики обеих функций, а также вычислить основные числовые характеристики (MX, DX, σ). Определить вероятность попадания случайной величины в интервал $(a+1, 2*b-2)$.

№ варианта	a	b
1	1	4
2	2	5
3	3	4
4	1	3

4. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение.

Ее математическое ожидание равно 10, среднее квадратичное отклонение равно 1. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (8, 14).

5. Дана плотность распределения случайной величины X:

$$\varphi(x)=\begin{cases}4x^3, & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1].\end{cases}$$

Найти MX, DX, σ.

6. Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{, при } x<0;\\ \cos x & \text{, при } 0<x\le\frac{\pi}{2};\\ 0 & \text{, при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти интегральную функцию $F(x)$.

7. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=\frac{2}{3}\sin 3x$ в интервале $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$, вне этого интервала $f(x)=0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$.

8. Непрерывная случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=2x$ в интервале (0; 1), вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание величины X.

9. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 5. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (15, 25).

10. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если

отклонение X диаметра шарика от проектного размера по величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $M(X)=0$ и $\sigma=0,4$ мм. Найти, сколько будет годных шариков среди 100 изготовленных.