Практическое занятие.

Содержание: Теоремы сложения и умножения. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Для классического определения вероятности доказаны следующие факты:

1) $0 \le P(A) \le 1$.
2) Теорема сложения. Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$ (1)
3) Если A и $\overline{A}$ − противоположные события, то $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
4) Теорема умножения. Если A и B − независимые события, то

$$P(AB) = P(A)P(B) \qquad (2)$$

5) Если A и B совместны, то теорема сложения принимает вид

$$P(A+B)=P(A)+P(B) - P(AB). \qquad (3)$$

П р и м е р 1. В ящике 12 писем. Из них 8 иногородних, 4 − городских. Наугад выбирают 5 писем. Какова вероятность того, что среди них будет 3 иногородних и 2 городских?

Р е ш е н и е .

1) Так как C_n^m даёт ответ на вопрос: сколькими способами можно из n элементов выбрать m элементов, то в нашем случае

$$n = C_{12}^5 = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792.$$

2) Так как нужные нам 3 иногородних письма выбираются из 8 писем, то число таких случаев равно C_8^3, аналогично – 2 городских письма могут быть выбраны C_4^2 способами.

Поэтому искомое количество писем может быть получено

$$k = C_8^3 \cdot C_4^2 = \frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 336$$

способами.

По классическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{336}{792} = \frac{14}{33}.$$

Вероятность того, что среди 5 писем будет 3 иногородних и 2 городских, равна 14/33.

П р и м е р 2. В мешке находится большое количество нитей трех видов, из которых 20% белых, 30% зеленых и 50% красных. Наудачу берутся три нити. Какова вероятность того, что все они окажутся одного цвета?

Р е ш е н и е. Обозначим через $Б_1$, $З_1$, $К_1$ следующие события: первая взятая нить окажется соответственно белого, зеленого, красною цвета. Через

$Б_2$, $Б_3$ обозначим события, состоящие в том, что соответственно вторая и третья взятые наудачу нити — белые. Аналогично $З_2$, $З_3$ — события, при которых соответственно вторая и третья нити будут зелеными, $К_2$, $К_3$ — красными.

Искомое событие, которое обозначим через А, состоит в том, что все три взятые наудачу нити окажутся или белыми, или зелеными, или красными, а поэтому его можно представить в виде суммы трех несовместных событий:

$$А = Б_1Б_2Б_3 + З_1З_2З_3 + К_1К_2К_3.$$

По теореме сложения вероятностей получаем:

$$P(А) = P(Б_1Б_2Б_3) + P(З_1З_2З_3) + P(К_1К_2К_3).$$

Так как по условию задачи в мешке большое количество нитей, то можно считать, что цвет вынимаемой нити не зависит от цвета ранее взятых нитей. Применяя теорему умножения вероятностей для независимых событий, получаем

$$P(А) = P(Б_1)P(Б_2)P(Б_3) + P(З_1)P(З_2)P(З_3) + P(К_1)P(К_2)P(К_3) = 0{,}2^3+0{,}3^3+0{,}5^3=0{,}16.$$

Таким образом, вероятность того, что взятые наудачу три нити будут одного цвета, равна 0,16.

2. Условная вероятность

Часто реализация события A зависит от того, произойдет ли событие B или нет. В этом случае говорят, что события A и B **зависимы,** и вероятность события A записывают в виде $P(A/B)$ (читается: вероятность события A при условии, что произошло событие B; иногда вместо $P(A/B)$ в литературе встречается $P_B(A)$).

Теорема умножения принимает в рассмотренном случае вид:

$$P(AB)=P(B)P(A/B). \qquad (1)$$

П р и м е р 1. В пачке 10 тетрадей, из которых 6 тетрадей в клетку, а остальные в линейку. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых из пачки трех тетрадей в клетку будет: а) одна тетрадь; б) хотя бы одна тетрадь.

Р е ш е н и е. Обозначим искомые события следующим образом: B − из трех тетрадей одна в клетку, C − из трех тетрадей хотя бы одна в клетку.

Для того чтобы вычислить вероятности этих событий, выразим их через более простые события. С этой целью обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что соответственно первая, вторая и третья тетради будут в клетку.

а) Событие B состоит в том, что или первая тетрадь в клетку, остальные в линейку, или вторая в клетку, остальные в линейку, или третья в клетку, а остальные в линейку. Поэтому его можно представить следующим образом:

$$B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3.$$

Итак, событие B можно рассматривать как сумму трех несовместных событий. Поэтому, применяя теорему сложения вероятностей, находим:

$$P(B) = P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3).$$

Используя для нахождения каждого из трех слагаемых теорему умножения вероятностей для зависимых событий, имеем далее

$$P(B)=P(A_1)P(\overline{A_2}/A_1)P(\overline{A_3}/A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1})P(\overline{A_3}/\overline{A_1}A_2)+$$

$$+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}/\overline{A_1})P(A_3/\overline{A_1}\overline{A_2})=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}=0{,}3.$$

б) Проще сначала найти вероятность не события C, а события, противоположного ему. Оно состоит в том, что среди трех взятых наудачу тетрадей не будет ни одной тетради в клетку или, что то же самое, все три тетради будут в линейку. Тогда по правилу нахождения вероятности противоположного события

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}).$$

Применяя и здесь теорему умножения вероятностей для зависимых событий, получим:

$$P(C)=1-\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{29}{30}.$$

Ответ. Вероятность того, что из трех наудачу взятых одновременно тетрадей будет в клетку: одна тетрадь, равна 0,3; хотя бы одна тетрадь, приближенно равна 0,967.

П р и м е р 3**.** Урна содержит 8 шаров, из которых 5 белых и 3 черных. Два игрока поочередно (без возврата) вынимают из урны шары. Выигрывает тот игрок, который первым вынет белый шар. Обозначим через A_i (B_i) событие, состоящее в том, что при i-м действии выигрывает первый (второй) игрок. Требуется записать через A_i и B_i событие A, заключающееся в том, что выиграл первый игрок, и определить вероятность этого события $P(A)$.

Р е ш е н и е. По смыслу задачи ясно, что первый игрок может выиграть только в двух случаях: должны произойти события или A_1, или $\overline{A_1}\overline{B_1}A_2$, а значит

$$A=A_1+\overline{A_1}\overline{B_1}A_2. \qquad (2)$$

Найдем вероятность выигрыша первого игрока.

Надо понимать, что оба слагаемых в (2) − несовместные события:

$$P(A)=P(A_1+\overline{A_1}\overline{B_1}A_2)=P(A_1)+P(\overline{A_1}\overline{B_1}A_2). \qquad (3)$$

Так как всего шаров 8, а белых 5, то $P(A_1)=5/8$.

Обратимся ко второму слагаемому из (3). В силу того, что события $\overline{A_1}\overline{B_1}A_2$ зависимы, то

$$P(\overline{A_1}\overline{B_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(\overline{B_1}/\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1}\overline{B_1}).$$

Поскольку Р($\overline{A_1}$)=3/8; $P(\overline{B_1}/\overline{A_1})$=2/7; $P(A_2/\overline{A_1}\overline{B_1})$=5/6, то $P\left(\overline{A_1}\overline{B_1}A_2\right)$ =5/56 и Р(А) = 5/8+5/56 = 5/7.

3. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии реализации одной из гипотез H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу событий. Тогда

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i). \qquad (4)$$

Формула (4) называется **формулой полной вероятности**.

П р и м е р 3. На склад поступают одинаковые изделия, изготовленные тремя различными фабриками, и произвольно перемешиваются. Первая фабрика поставила 50% , вторая – 30% , третья − 20% от общего объема продукции. Комиссия наудачу выбирает на складе единицу продукции. Какова вероятность, что выбранное изделие окажется бракованным, если для изделий первой фабрики вероятность появления бракованной детали равна 0,1, для второй фабрики – 0,2, а для третьей − 0,15.

Р е ш е н и е. Для большей наглядности запишем условие задачи в виде таблицы:

Номер фабрики	**Поставка, %**	**Вероятность брака**
1	50	0,1
2	30	0,2
3	20	0,15

Введем следующие обозначения:

событие A – наудачу выбранное изделие окажется бракованным;
гипотезы H_1, H_2, H_3 – изделие выполнено соответственно первой, второй, третьей фабриками.
Из условия ясно, что:
$P(H_1)$ = 0,5; P (H_2) = 0,3; $P(H_3)$ = 0,2.
$P(A/H_1)$ = 0,1; $P(A/H_2)$ = 0,2; $P(A/H_3)$ = 0,15.
Используя формулу полной вероятности (4):

$P(A)$=0,5*0,1 + 0,3*0,2 + 0,2*0,15 = 0,05 + 0,06 + 0,03 = 0,14.

Следовательно, вероятность того, что выбранное изделие окажется бракованным, равна 0,14.

4. Формула Байеса

Предположим, что в результате испытания событие A произошло. Какова вероятность, что событие A произошло в результате реализации гипотезы H_k , т.е. $P(H_k/A)$ = ? (происходит переоценка вероятностей гипотез). Ответ дает формула Байеса:

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}. \qquad (5)$$

П р и м е р 4. В условиях примера 3 предположим, что наудачу выбранное изделие оказалось бракованным (событие A произошло). Какова вероятность, что это изделие изготовлено первой фабрикой (реализовалась гипотеза H_1)?

Р е ш е н и е. Так как из решения предыдущей задачи уже известно, что $P(H_1) = 0{,}5$; $P(A/H_1) = 0{,}1$; $P(A) = 0{,}14$; то вероятность того, что выбранное изделие изготовлено первой фабрикой, по формуле (5) равна $P(H_1/A) = 0{,}5 \cdot 0{,}1/ 0{,}14 = 5/14$.

5. Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли)

Проводится серия n независимых повторных испытаний, в каждом из которых вероятность интересующего нас события A равна p, $0 < p < 1$, (т.е. $P(A) = p \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - p = q$).

Особо отметим, что величина p не зависит от результатов предыдущих или последующих испытаний. Такой тип испытаний получил название *схемы Бернулли*. Примерами такой схемы являются: многократное бросание монеты, игральных костей.

Простейшим вопросом для схемы Бернулли является следующий: какова вероятность, что при n испытаниях событие A произойдет ровно k раз. (Обозначается $P_n(k)$). Ответ на этот вопрос дает **формула Бернулли:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } k = 1 \ldots n. \qquad (6)$$

Ясно, что $P_n(0) = q^n$, $P_n(n) = p^n$.

П р и м е р 5. Монету бросают шесть раз. Найти вероятность того, что орел выпадет: а) точно два раза; б) не более одного раза; в) не более четырех раз.

Р е ш е н и е. Сразу заметим, что $n = 6$, $p = 1/2$, $q = 1/2$.

$a)\ P_6(2) = C_6^2 (1/2)^4 (1/2)^2 = 15/64.$.

б) Интересующее нас событие A состоит из суммы двух несовместных событий: орел не выпал ни разу или орел выпал точно один раз. Поэтому по теореме сложения имеем:

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) = (1/2)^6 + C_6^1 (1/2)^1 (1/2)^5 = 7/64.$$

в) Применение способа решения задачи как в случае б) громоздко.

Проще рассмотреть противоположное событие: $\overline{B}$ − орел выпал или 5 раз, или 6 раз, а затем найти $P(B)$:

$$P(\overline{B}) = C_6^5 (1/2)^5 (1/2)^1 + (1/2)^6 = 7/64 \Rightarrow P(B) = 1 - 7/64 = 57/64.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Урна содержит 9 шаров, из которых 4 белых и 5 черных. Два игрока поочередно (без возврата) вынимают из урны шары. Выигрывает тот игрок, который первым вынет белый шар. Какова вероятность, что выиграет первый игрок?
2. В ящике находятся 3 синих и 4 красных карандаша. Наудачу извлекаются (без возврата) 3 карандаша. Найти вероятность того, что: а) один (из трех) карандаш красный; б) хотя бы один карандаш красный.
3. В коробке смешаны нити, среди которых 20 белого цвета и 30 черного. Найти вероятность того, что вынутые наугад две нити будут: а) одного цвета; б) разного цвета.
4. Из колоды, содержащей 36 карт, берут 4 карты. Какова вероятность, что это тузы?
5. На склад поступают одинаковые изделия, изготовленные тремя различными фабриками, и произвольно перемешиваются. Первая фабрика поставила 50% ; вторая – 30% ; третья − 20% от общего объема продукции. Комиссия наудачу выбирает на складе единицу продукции. Какова вероятность, что выбранное изделие окажется отличного качества, если для изделий первой фабрики вероятность появления детали отличного качества равна 0,9; для второй – 0,8, а для третьей − 0,7?
6. В условиях примера 4 предположим, что наудачу выбранное изделие оказалось отличного качества. Какова вероятность, что это изделие изготовлено первой фабрикой?
7. Студент, явившийся на экзамен последним, берет один из оставшихся трех билетов. Вероятность того, что студент получит положительную оценку, отвечая на оставшиеся билеты, следующая: 0,5; 0,7; 0,6. Известно, что студент сдал экзамен. Найти вероятность того, что студент отвечал на второй из оставшихся билетов.
8. Имеются 3 урны с шарами следующего состава: в первой находятся 2 белых и 1 черный , во второй - 3 белых и 1 черный, в третьей – 2 белых и 2 черных. Выбирается наугад одна из урн, и из нее вынимается шар. Найти вероятность того, что шар белый.
9. Имеются 3 урны следующего состава: в первой 20 белых, во второй 10 белых, в третьей 20 черных шаров. Из выбранной наугад урны, вынули белый шар. Какова вероятность, что он из первой урны?
10. Команда состоит из 5 отличных, 5 хороших и 10 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,9 для отличного стрелка; 0,7 − для хорошего и 0,6 − для посредственного. Наугад выбираемый стрелок стреляет в цель и не попадает. Найти вероятность того, что стрелял хороший стрелок.
11. Найти вероятность того, что при подбрасывании монеты 25 раз орел выпадет 2 раза.
12. Найти вероятность того, что при угадывании положения шарика под тремя стаканчиками из десяти случаев мы отгадаем три.

13. Игральную кость бросают семь раз. Какова вероятность, что число очков, кратное трем, выпадет точно два раза?

14. Две игральные кости кидают пять раз. Какова вероятность, что сумма очков на обеих костях, кратная четырем, выпадет: а) точно два раза; б) не более одного раза; в) хотя бы один раз?

15. В цель стреляют по одному разу независимо друг от друга 3 стрелка. (Введем сразу обозначения A_i, I = 1,2,3 – в цель попал i- ый стрелок). Записать через A_i следующие события:

- в цель попал точно один стрелок (событие B);
- в цель попали точно два стрелка (событие C);
- в цель попали все стрелки (событие D);
- ни один стрелок не попал в цель (событие F);
- хотя бы один стрелок попал в цель (событие E).

Найти вероятность событий B, C, D, F, E, если $P(A_1)= 0,7$; $P(A_2)=0,8$; $P(A_3) = 0,9$.

16. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует вмешательства рабочего, равна для первого станка 0,9, для второго 0,5, для третьего 0,6. Определить вероятность того, что:

1) в течение часа ни один станок не потребует вмешательства рабочего;
2) все три станка потребуют вмешательства рабочего;
3) по крайней мере один станок не потребует вмешательства рабочего.