

### 3 Лабораторная работа № 3. Минимизация конечных автоматов

**Цель:** - закрепить понятия «недостижимые состояния автомата», «эквивалентные состояния автомата», «минимальный конечный автомат»;  
- сформировать умения и навыки минимизации детерминированного конечного автомата.

#### Основы теории

Конечный автомат может содержать лишние состояния двух типов: недостижимые и эквивалентные состояния.

**Определение 3.1.** Два различных состояния  $q$  и  $q'$  в конечном автомате  $M = (Q, T, F, H, Z)$  называются  $n$ -эквивалентными,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , если, находясь в одном из этих состояний и получив на вход любую цепочку символов  $\omega$ :  $\omega \in V_T^*$ ,  $|\omega| \leq n$ , автомат может перейти в одно и то же множество конечных состояний.

**Определение 3.2.** Состояние  $q$  КА называется недостижимым, если к нему нет пути из начального состояния автомата.

**Определение 3.3.** КА, не содержащий недостижимых и эквивалентных состояний, называется приведенным или минимальным КА.

#### Алгоритм 3.1. Устранение недостижимых состояний КА

Вход: КА  $M = (Q, T, F, H, Z)$ .

Выход: КА  $M' = (Q', T, F', H, Z')$ .

Шаг 1. Поместить начальное состояние КА в список достижимых состояний  $Q_\delta$ , т.е.  $Q_\delta^0 = H$ .

Шаг 2. Для новых элементов списка достижимых состояний пополнить список группой их состояний-приемников, отсутствующих в нем, т.е.  $Q_\delta^i = Q_\delta^{i-1} \cup \{p \mid \forall q \in Q_\delta^{i-1} \exists F(q, t) = p\}$ .

Шаг 3. Повторить шаг 2, пока список достижимых состояний не перестанет меняться. То есть, если  $Q_\delta^i \neq Q_\delta^{i-1}$ , то  $i := i + 1$ , иначе  $Q_\delta = Q_\delta^i$ .

Шаг 4. Исключить из множества  $Q$  состояний КА все состояния, отсутствующие в списке  $Q_\delta$  достижимых состояний, т.е.  $Q' = Q \setminus Q_\delta$ .

Шаг 5. Исключить недостижимые заключительные состояния и пары функции переходов, содержащие недостижимые состояния, т.е.  $Z' = Z \cap Q_\delta$ ,  $F' = F - \{F(q, t) = p \mid q \in (Q - Q_\delta)\}$ .

**Пример 3.1.** Устранить недостижимые состояния КА  $M = (Q, T, F, H, Z)$ , где  $Q = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $H = \{A\}$ ,  $Z = \{D, E\}$  и функция переходов задана таблицей 3.1. Граф исходного КА  $M$  представлен на рисунке 3.1.

Таблица 3.1 – Функция переходов конечного автомата  $M$

$F$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$
$a$	$B$			$C$	$B$	$D$	$F$
$b$	$C$	$D$	$E$	$E$	$D$	$G$	$E$

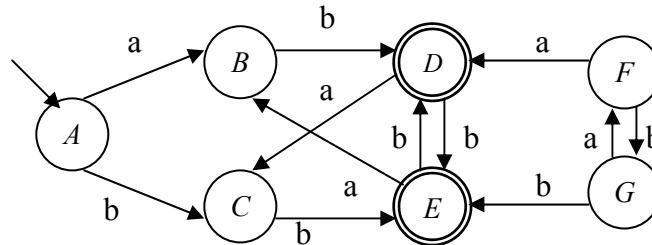


Рисунок 3.1 – Граф исходного конечного автомата  $M$

Последовательность устранения недостижимых состояний КА имеет вид:

$$Q_0 = \{A\};$$

$$Q_1 = \{A, B, C\};$$

$$Q_2 = \{A, B, C, D, E\};$$

$$Q_3 = \{A, B, C, D, E\}; \text{ т.к. } Q_2 = Q_3, \text{ то } Q_d = \{A, B, C, D, E\}.$$

$$Q_n = \{F, G\}; Q' = \{A, B, C, D, E\}; Z' = \{D, E\}.$$

Функция переходов автомата  $M'$  представлена в таблице 3.2.

Таблица 3.2 - Функция переходов автомата  $M'$

$F$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$
$a$	$B$			$C$	$B$
$b$	$C$	$D$	$E$	$E$	$D$

Граф КА  $M'$  после устранения недостижимых состояний представлен на рисунке 3.2.

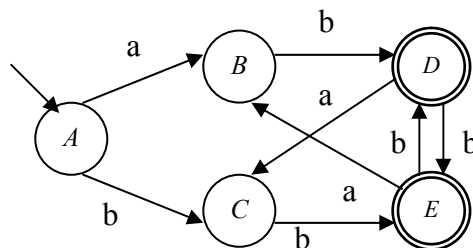


Рисунок 3.2 - Граф КА  $M'$  после устранения недостижимых состояний

### Алгоритм 3.2. Объединение эквивалентных состояний КА

Вход: КА  $M' = (Q', T, F', H, Z')$  без недостижимых состояний.

Выход: минимальный КА  $M'' = (Q'', T, F'', H, Z'')$ .

Шаг 1. На первом шаге строим нулевое разбиение  $R(0)$ , состоящее из двух классов эквивалентности: заключительные состояния КА -  $Z$  и не заключительные -  $Q-Z$ .

Шаг 2. На очередном шаге построения разбиения  $R(n)$  в классы эквивалентности включить те состояния, которые по одинаковым входным символам переходят в  $n-1$  эквивалентные состояния, т.е.

$$R(n) = \{r_i(n) : \{q_{ij} \in Q : \forall t \in T F(q_{ij}, t) \subseteq r_j(n-1)\} \forall i, j \in N\}.$$

Шаг 3. До тех пор, пока  $R(n) \neq R(n-1)$  полагаем  $n:=n+1$  и идем к шагу 2.

Шаг 4. Переобозначить оставшиеся неразбитые группы состояний и включить их в таблицу новых обозначений состояний автомата.

Шаг 5. Определить эквивалентный КА  $M''$  в новых обозначениях.

**Пример 3.2.** Минимизировать конечный автомат из примера 3.1.

Последовательность построения разбиений будет иметь вид:

$$R(0) = \{\{A, B, C\}, \{D, E\}\}, n = 0;$$

$$R(1) = \{\{A\}, \{B, C\}, \{D, E\}\}, n = 1;$$

$$R(2) = \{\{A\}, \{B, C\}, \{D, E\}\}, n = 2.$$

Т.к.  $R(1) = R(2)$ , то искомое разбиение построено.

Переобозначим оставшиеся неразбитые группы состояний:

$$X = \{B, C\}, Y = \{D, E\}.$$

Получим минимальный автомат  $M''$ , где  $Q'' = \{A, X, Y\}$ ,  $Z'' = \{Y\}$ .

Функция переходов автомата  $M''$  представлена в таблице 3.3.

Таблица 3.3 - Функция переходов автомата  $M''$

$F''$	$A$	$X$	$Y$
$a$	$X$		$X$
$b$	$X$	$Y$	$Y$

Граф переходов конечного автомата после его минимизации показан на рисунке 3.3.

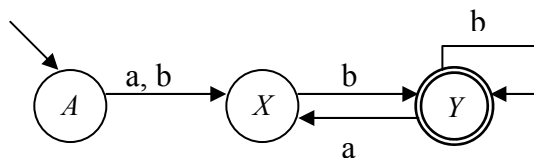


Рисунок 3.3 – Граф минимального КА  $M''$

### Постановка задачи к лабораторной работе № 3

Разработать программное средство, реализующее следующие функции:

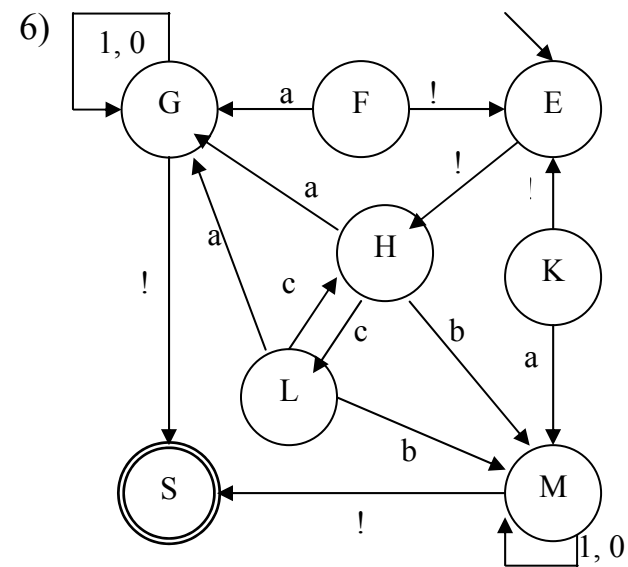
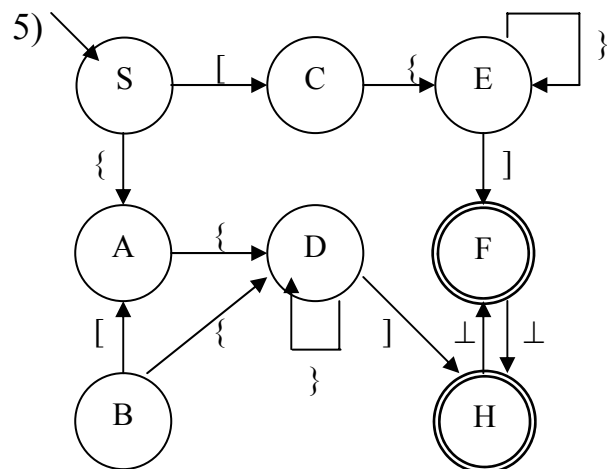
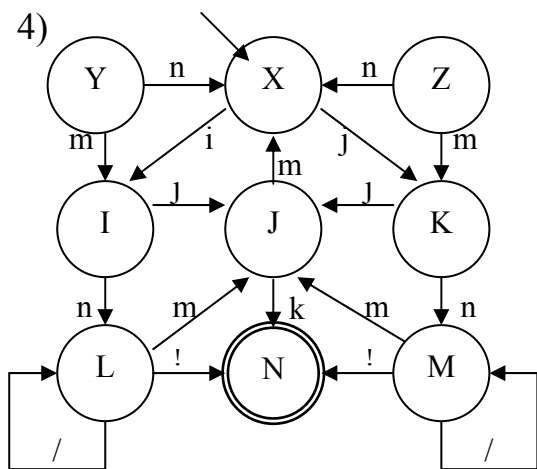
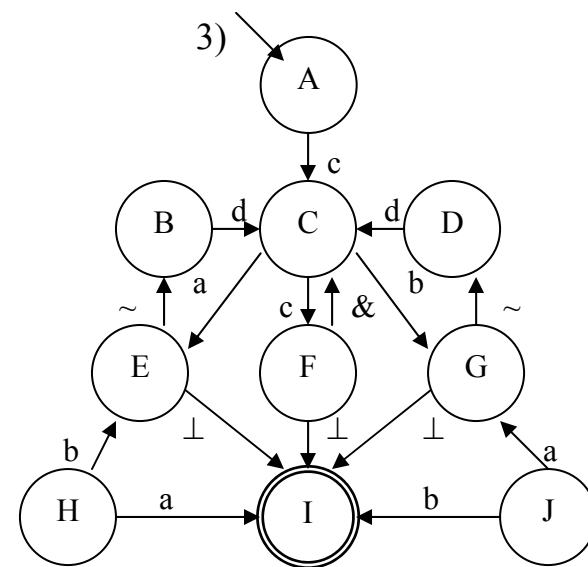
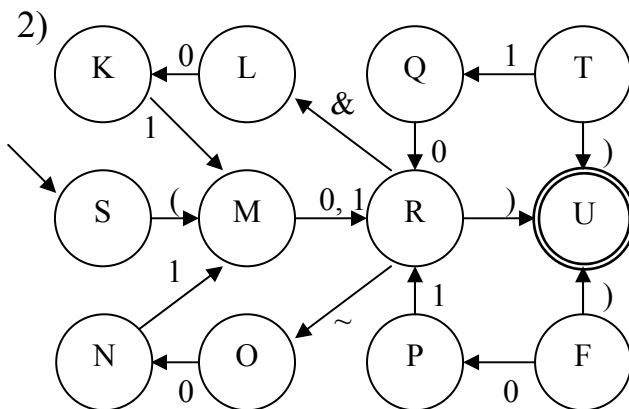
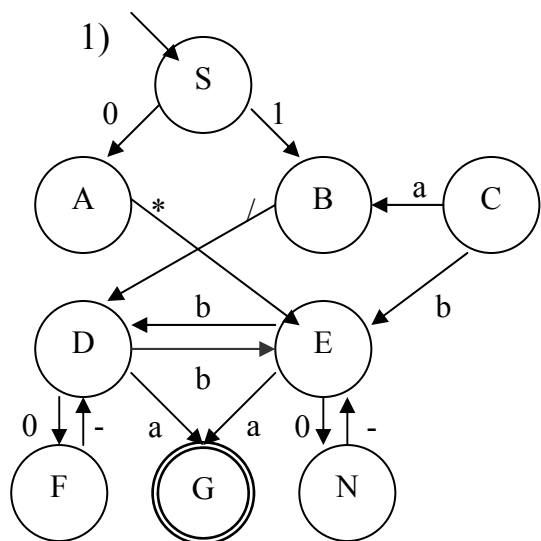
- 1) ввод исходного конечного автомата и вывод на экран его графа;
- 2) устранение недостижимых состояний конечного автомата;

3) исключение эквивалентных состояний конечного автомата;

4) вывод на экран графа минимального конечного автомата.

Разработать серию контрольных примеров для тестирования реализованных алгоритмов.

Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе № 3 представлены на рисунке 3.4.



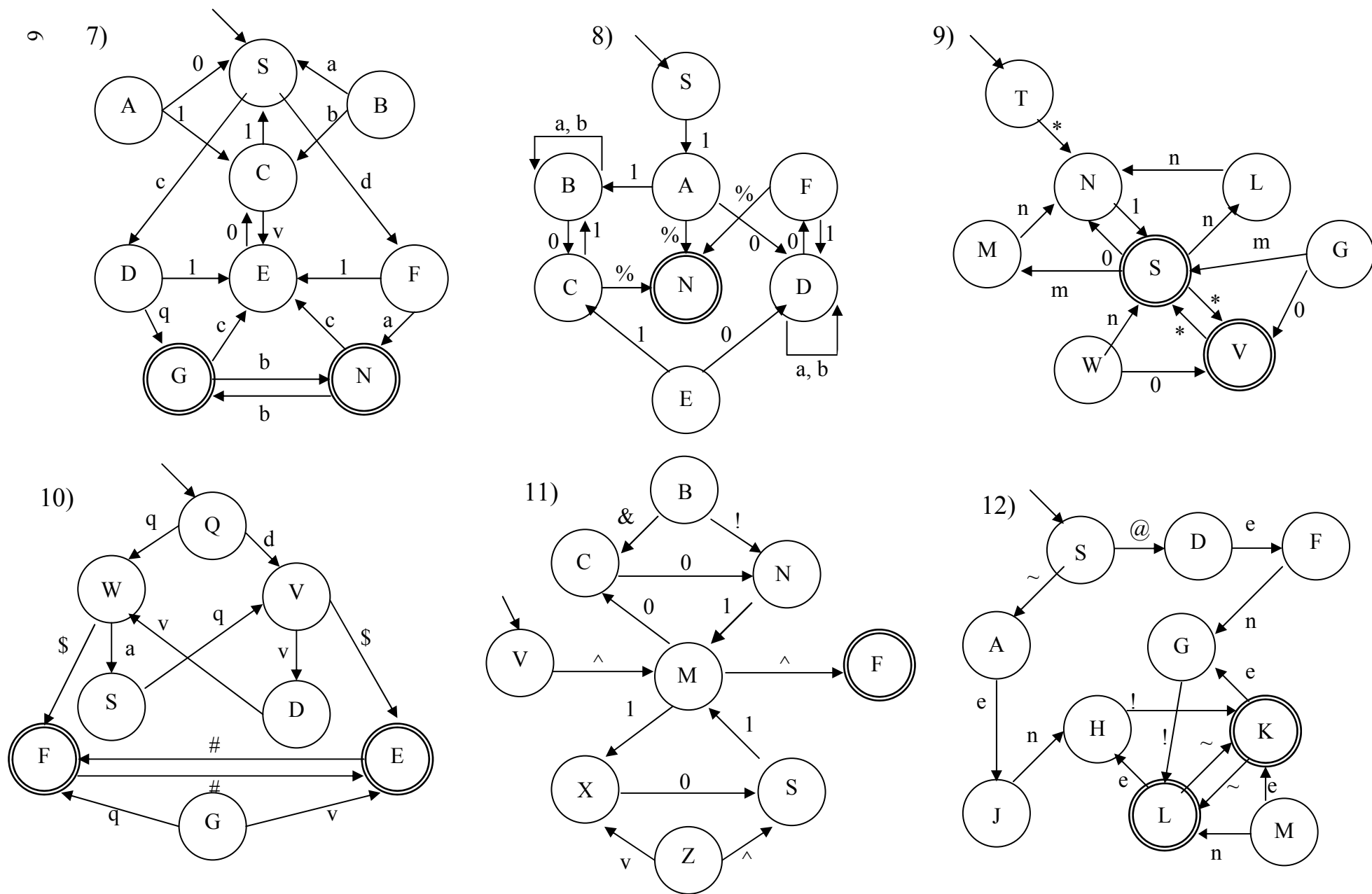


Рисунок - 3.4 – Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе № 3, лист 2