Индивидуальное домашнее задание № 2 постатистическому анализу.

Тема: "Классические методы математической статистики".

Выполнил студент гр. 9381 Семенов Александр, вариант 15.

Задание:

Вар. 15 (938121)

1. В результате эксперимента получены данные, приведенные в таблице 1.

a) Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и гистограмму частот.

b) Вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:
(i) математического ожидания, (ii) дисперсии, (iii) медианы, (iv) асимметрии, (v) эксцесса,
(vi) вероятности $\mathbf{P}(X \in [a, b])$.

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из распределения Пуассона, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ, а также оценку λ по методу моментов. Найти смещение оценок.

d) Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α_1 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.

e) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с распределением Пуассона с параметром λ_0. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

f) Построить критерий значимости χ^2 проверки сложной гипотезы согласия с распределением Пуассона. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

g) Построить наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы пуассоновости с параметром $\lambda = \lambda_0$ при альтернативе пуассоновости с параметром $\lambda = \lambda_1$. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Что получится, если поменять местами основную и альтернативную гипотезы?

h) В пунктах (c)–(f) заменить семейство распределений Пуассона на семейство геометрических распределений

$$\mathbf{P}_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{(\lambda + 1)^{k+1}}, \ k = 0, 1, \ldots.$$

Таблица 1 $\alpha_1 = 0.20$; $a = 0.00$; $b = 8.29$; $\lambda_0 = 8.00$; $\lambda_1 = 4.00$.

5 3 10 6 12 1 10 4 1 1 9 4 1 18 11 0 1 11 0 4 3 15 2 6 0 12 11 0 4 15 3 1 3 2 5 3 2 17 1 0 3 0
4 8 0 1 3 3 0 9

2. В результате эксперимента получены данные, приведенные в таблице 2.

a) Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения, гистограмму и полигон частот с шагом h.

b) Вычислить выборочные аналоги следующих числовых характеристик:
(i) математического ожидания, (ii) дисперсии, (iii) медианы, (iv) асимметрии, (v) эксцесса,
(vi) вероятности $\mathbf{P}(X \in [c, d])$.

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из показательного распределения, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ и соответствующую оценку по методу моментов. Найти смещение оценок.

d) Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α_2 для параметра λ на базе оценки максимального правдоподобия.

e) С использованием теоремы Колмогорова построить критерий значимости проверки простой гипотезы согласия с показательным распределением с параметром λ_0. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

f) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с показательным распределением с параметром λ_0. Проверить гипотезу на уровне α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

g) Построить критерий проверки значимости χ^2 сложной гипотезы согласия с показательным распределением. Проверить гипотезу на уровне α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

h) Построить наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы о показательности с параметром $\lambda = \lambda_0$ при альтернативе показательности с параметром $\lambda = \lambda_1$. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Что получится, если поменять местами основную и альтернативную гипотезы?

i) В пунктах (c)–(h) заменить семейство показательных распределений на семейство гамма-распределений с плотностями $f(x) = \dfrac{\sqrt{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x/2}}{\sqrt{2\pi x}}$ (использовать таблицу распределений χ^2_1).

Таблица 2 $\alpha_2 = 0.05$; $c = 0.00$; $d = 4.26$; $h = 1.10$; $\lambda_0 = 0.21$; $\lambda_1 = 0.36$.

3.26 2.54 5.02 0.75 3.07 0.32 0.76 1.00 0.83 0.40 0.19 1.02 0.17 0.24 0.06 4.34 4.13 1.93 0.69 0.00 0.09 15.90 1.30 0.38 0.16
5.23 0.04 2.24 3.73 0.03 2.53 6.13 0.44 2.55 0.01 1.34 0.77 0.88 0.08 0.04 0.02 1.97 6.46 2.81 0.85 2.00 0.94 0.04 0.84 0.04

Выполнение работы

1 часть:

Для начала производится создание коллекции из данных (выборки):

In [146…

```
data <- c(5,3,10,6,12,1,10,4,1,1,9,4,1,18,11,0,1,11,0,4,3,15,2,
6,0,12,11,0,4,15,3,1,3,2,5,3,2,17,1,0,3,0,4,8,0,1,3,3,0,9)
alpha_1 = 0.2
a = 0
b = 8.29
lambda_0 = 8
lambda_1 = 4
```

а) Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения и гистограмму частот.

Исходный ряд:

In [147…

```
print(data)
```

```
 [1]  5  3 10  6 12  1 10  4  1  1  9  4  1 18 11  0  1 11  0  4  3 15  2  6  0
[26] 12 11  0  4 15  3  1  3  2  5  3  2 17  1  0  3  0  4  8  0  1  3  3  0  9
```

Вариационный ряд:

In [148…

```
print(sort(data))
```

```
 [1]  0  0  0  0  0  0  0  0  1  1  1  1  1  1  1  1  2  2  2  3  3  3  3  3  3
[26]  3  3  4  4  4  4  4  5  5  6  6  8  9  9 10 10 11 11 11 12 12 15 15 17 18
```

Вектор рангов:

In [149…

```
rankVector = rank(data)
print(rankVector)
```

```
 [1] 33.5 23.5 40.5 35.5 45.5 12.5 40.5 30.0 12.5 12.5 38.5 30.0 12.5 50.0 43.0
[16]  4.5 12.5 43.0  4.5 30.0 23.5 47.5 18.0 35.5  4.5 45.5 43.0  4.5 30.0 47.5
[31] 23.5 12.5 23.5 18.0 33.5 23.5 18.0 49.0 12.5  4.5 23.5  4.5 30.0 37.0  4.5
[46] 12.5 23.5 23.5  4.5 38.5
```

Ранжированный ряд в виде таблицы:

In [150…

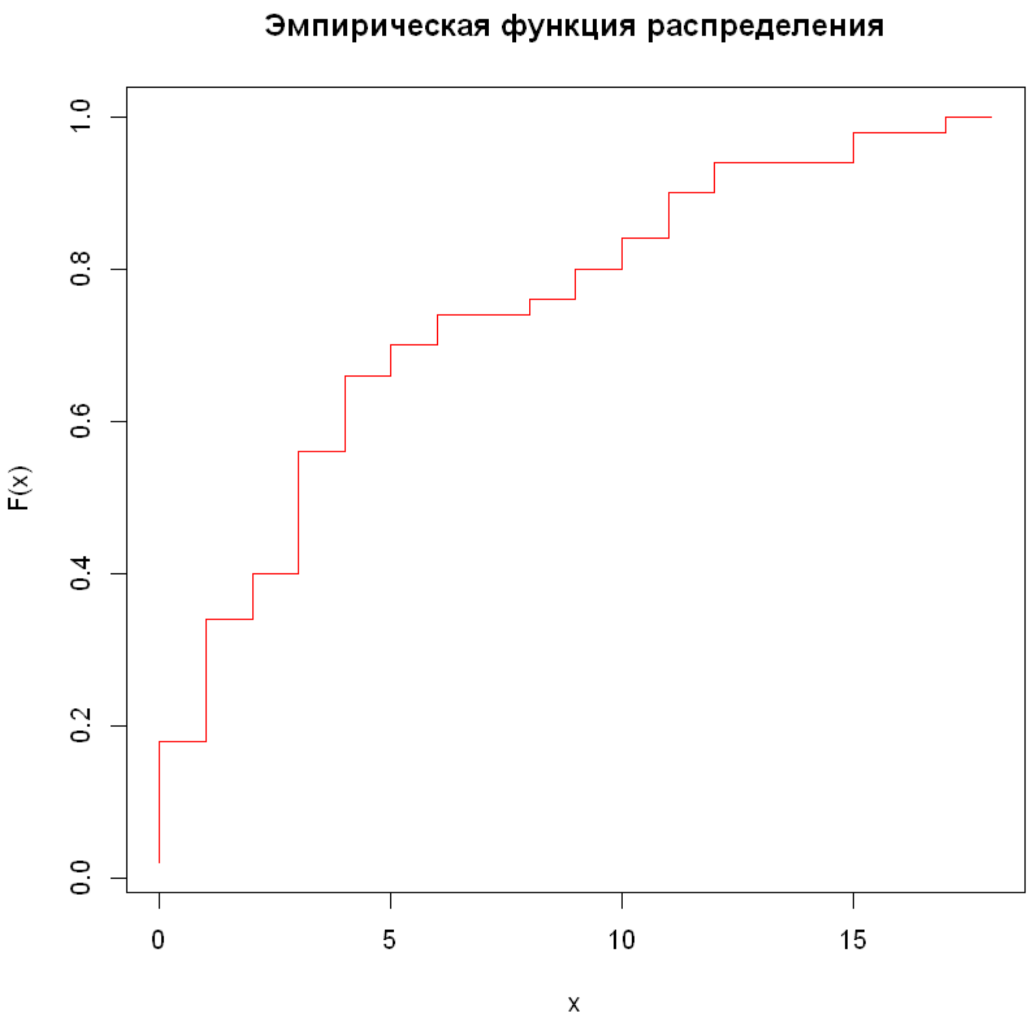
```
print(data.frame(Value = data, Rank = rankVector))
```

```
   Value Rank
1      5 33.5
2      3 23.5
3     10 40.5
4      6 35.5
5     12 45.5
6      1 12.5
7     10 40.5
8      4 30.0
9      1 12.5
10     1 12.5
11     9 38.5
12     4 30.0
13     1 12.5
14    18 50.0
15    11 43.0
16     0  4.5
17     1 12.5
18    11 43.0
19     0  4.5
20     4 30.0
21     3 23.5
22    15 47.5
23     2 18.0
24     6 35.5
25     0  4.5
26    12 45.5
27    11 43.0
28     0  4.5
29     4 30.0
30    15 47.5
31     3 23.5
32     1 12.5
33     3 23.5
34     2 18.0
35     5 33.5
36     3 23.5
37     2 18.0
38    17 49.0
39     1 12.5
40     0  4.5
41     3 23.5
42     0  4.5
43     4 30.0
44     8 37.0
45     0  4.5
46     1 12.5
47     3 23.5
48     3 23.5
49     0  4.5
50     9 38.5
```

Построение эмпирической функции распределения:

In [151…

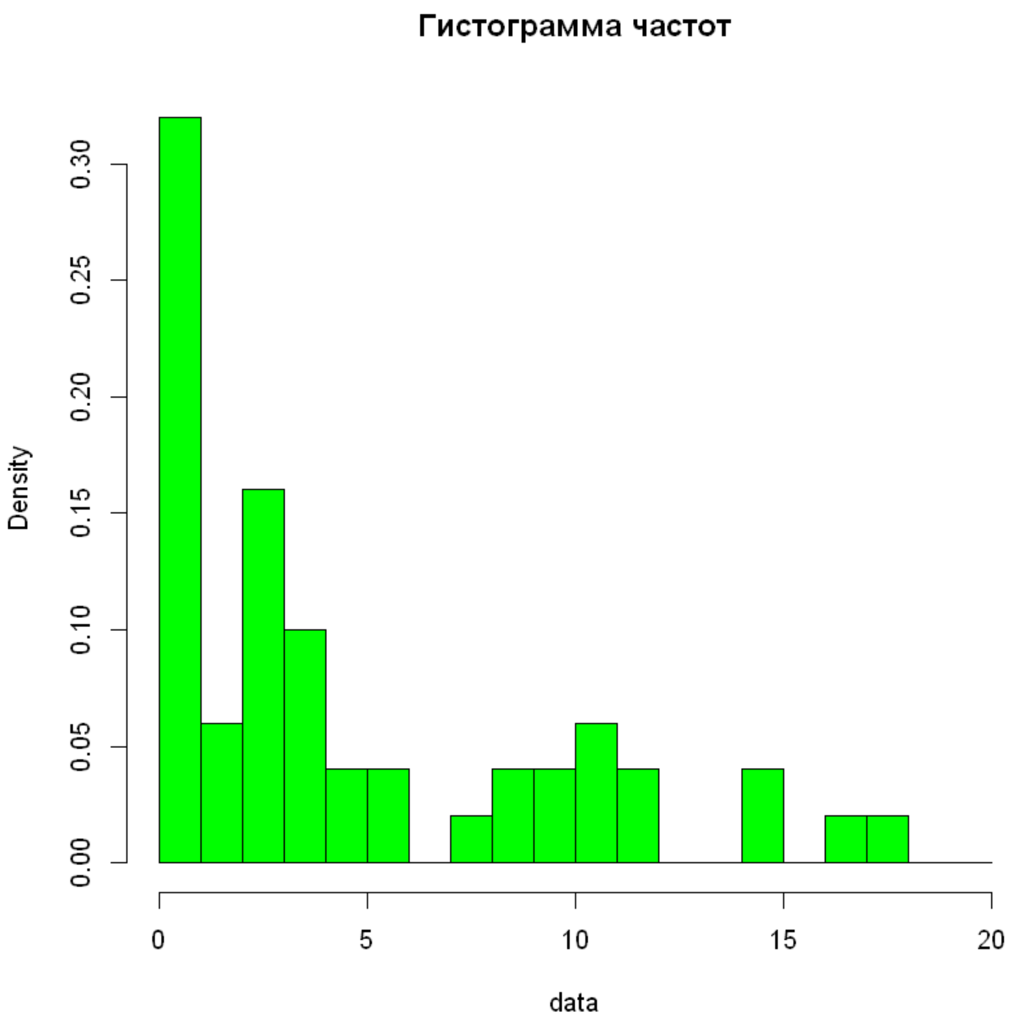
```
dataLen = length(data)
plot(sort(data), (1:dataLen)/dataLen, type="S", col="red",
main="Эмпирическая функция распределения", xlab="x", ylab="F(x)")
```



Гистограмма частот:

In [152…

```
hist(data, breaks=0:20, main="Гистограмма частот", freq = FALSE, col = "green")
```



b) Вычислить выборочные аналоги числовых характеристик (матожидание, дисперсия, медиана, ассиметрия, эксцесс, вероятности на промежутке).

In [153…

```
#install.packages ("moments")
#library(moments)
print(data.frame(Матожидание = mean(data), Дисперсия = var(data),
Медиана = median(data), Ассиметрия = skewness(data), Эксцесс = kurtosis(data)))
```

```
  Матожидание Дисперсия Медиана Ассиметрия  Эксцесс
1        4.96   24.5698       3   1.040773 3.043562
```

$P(X \in [a,b]) = P(X \in [0, 8.29])$:

In [154…

```
k = 0
for (value in data){
    if(value >=a && value <=b)
        k = k + 1
}
print(k/dataLen)
```

```
[1] 0.74
```

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из распределения Пуассона, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ а также оценку λ по методу моментов. Найти смещение оценок.

Плотность распределения Пуассона:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x \geqslant 0$$

Функция правдоподобия:

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda_i^x}{x_i!} = e^{-\lambda n}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$

Логарифм от функции правдоподобия:

$$LL(x,\lambda) = -\lambda n + \sum_{i=1}^{n} x_i ln(\lambda) - ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!)$$

$$\frac{\partial LL}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} = 4,96$$

По методу моментов оценим λ:

$$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n}n\lambda = \lambda$$

Найдем смещение оценок:

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda \Longrightarrow \hat{\lambda} \text{ - несмещенная оценка}$$

Таким образом, оценка: $\hat{\lambda} = 4,96$

d) Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α_1 для параметра λ на базе ОМП.

Воспользуемся центральной предельной теоремой:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-a}{\sigma} \longrightarrow N(0,1)$$

При этом:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \sim Pois(\lambda)$$

Из чего следует, что:

$$\hat{\lambda} = \bar{x}, EX_i = \lambda, DX_i = \lambda$$

Тогда:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}}} \longrightarrow N(0,1) \Longrightarrow \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda}{\sqrt{\bar{x}}} \longrightarrow N(0,1) \Longrightarrow P\left(-x_\alpha \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda}{\sqrt{\bar{x}}} \leqslant x_\alpha\right) \longrightarrow 1-\alpha_1$$

где, $x_\alpha : \Phi(x_\alpha) = 1 - \frac{\alpha_1}{2} = 1 - \frac{0,2}{2} = 0,9 \Longrightarrow x_\alpha = \Phi^{-1}(0,9) = 1,281552$

In [155…
```
print(qnorm (0.9)) # Вычисление Ф^(-1)
```

```
[1] 1.281552
```

Тогда:

$$P\left(-x_\alpha \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda}{\sqrt{\bar{x}}} \leqslant x_\alpha\right) \longrightarrow 1-\alpha_1 \Longrightarrow P\left(\bar{x} - \frac{x_\alpha\sqrt{\bar{x}}}{\sqrt{n}} \leqslant \lambda \leqslant \bar{x} + \frac{x_\alpha\sqrt{\bar{x}}}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 1-\alpha_1$$

$$\Longrightarrow P\left(4,96 - \frac{1,281552\sqrt{4,96}}{\sqrt{50}} \leqslant \lambda \leqslant 4,96 + \frac{1,281552\sqrt{4,96}}{\sqrt{50}}\right) \longrightarrow 1-0.2$$

In [156…
```
4.96 - (1.281552*sqrt(4.96))/sqrt(50) # Расчеты
```

4.55636197844178

In [157…
```
4.96 + (1.281552*sqrt(4.96))/sqrt(50) # Расчеты
```

5.36363802155822

Итого:

$$P(4,56 \leqslant \lambda \leqslant 5,36) \longrightarrow 0,8$$

е) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия я распределением Пуассона с параметром λ_0. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет основания отвергнуть данную гипотезу.

$H_0 : \lambda = \lambda_0$

$H_0 : F = F_{\lambda_0}$ - функция распределения Пуассона $Pois(\lambda_0)$

$\widetilde{H}_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \ldots, p_r = p_{r0}$, где p_{ri}- неизвестные теоретические веро\ятности попадиения в каждый интервал.

Интервал	Теоретические пападания	Попадания
(-oo, 5]	9.56	34
(5, 10]	31.23	7
(10, 15]	8.79	5
(15, +oo)	0.41	2

Вычисления попаданий в интервалы:

In [158…

```
k = 0
for (value in data){
    if(value <= 5)
        k = k + 1
}
print(k)

k = 0
for (value in data){
    if(value > 5 && value <=10)
        k = k + 1
}
print(k)

k = 0
for (value in data){
    if(value > 10 && value < 15)
        k = k + 1
}
print(k)

k = 0
for (value in data){
    if(value > 15)
        k = k + 1
}
print(k)
```

```
[1] 34
[1] 7
[1] 5
[1] 2
```

Вычисления теоретических ожидаемых попаданий

In [159…

```
ppois(5, lambda_0)*50
(ppois(10, lambda_0) - ppois(5, lambda_0))*50
(ppois(15, lambda_0) - ppois(10, lambda_0))*50
(1 - ppois(15, lambda_0))*50
```

9.56180310398126

31.2324865239461

8.79415982273044

0.411550549342243

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - N_{p_{i0}})}{N_{p_{i0}}} = \frac{(34 - 9,56)^2}{9,56} + \frac{(7 - 31,23)^2}{31,23} + \frac{(5 - 8,79)^2}{8,79} + \frac{(2 - 0,41)^2}{0,41} = 89.07974488$$

In [160…

```
(34-9.56)^2/9.56 + (7-31.23)^2/31.23 + (5-8.79)^2/8.79 + (2-0.41)^2/0.41
```

89.079744885087

Граница критической области:

$x_\alpha = 4.64162767608745 << \chi_2 \Rightarrow$ - основная гипотеза солгасия с распределением Пуассона отвергнута. Принимается альтернативная гипотеза о том, что исходные наблюдения не являются выборкой из распределения Пуассона с параметром λ_0

In [161…

```
qchisq(1-alpha_1, 3)
```

4.64162767608745

f) Построить критерий значимости χ^2 проверки сложной гипотезы согласия с распределением Пуассона. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет основания отвергнуть данную гипотезу.

In [162…

```
lower = c(-Inf, 5, 10, 15)
up = c(5, 10, 15, +Inf)
hits = c(34, 7, 5, 2)

csq <- function(lambda_0){
    prob <- ppois(up, lambda_0) - ppois(lower, lambda_0)
    return (sum((hits-50*prob)^2/prob/50))
}
nlm(csq, mean(data))$minimum
```

```
Warning message in nlm(csq, mean(data)):
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"
```

69.347617009345

$$\widetilde{X}^2 = 69,347617009345$$

$$df = r - d - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$$

$x_\alpha = 3.2188758248682 << \widetilde{X}^2 \Rightarrow$ - гипотеза о согласии с распределением Пуассона отвергнута.

Вычисление x_α:

In [163…

```
qchisq(1-alpha_1, 2)
```

3.2188758248682

Вычисление наибольшего значения урованя значимости α_{max}:

In [164…

```
1 - pchisq(nlm(csq, mean(data))$minimum, df=2)
```

```
Warning message in nlm(csq, mean(data)):
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"
```

8.88178419700125e-16

g) Построить наиболее мощный критерий проверки простой гипотезы пуассоновости с параметром $\lambda = \lambda_0$ при альтернативной пуассоновости с параметром $\lambda = \lambda_1$. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Что получится, если поменять местами основную и альтернативную гипотезы?

$$H_0 : \lambda = \lambda_0$$

$$H_A : \lambda = \lambda_1$$

Для простой гипотезы:

$$L(\overrightarrow{x}; \lambda_0) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_0} \lambda_0^{x_i}}{x_i!} = e^{-\lambda_0 n} \lambda_0^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$

Для альтернативной гипотезы:

$$L(\overrightarrow{x}; \lambda_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^{x_i}}{x_i!} = e^{-\lambda_1 n} \lambda_1^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$

$$L(\overrightarrow{x}; \lambda_0, \lambda_1) = \frac{L(\overrightarrow{x}; \lambda_1)}{L(\overrightarrow{x}; \lambda_0)} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n(\lambda_1 - \lambda_0)}$$

По Лемме Неймона-Пирсона: $\exists \text{НМК} : \phi(x) = \begin{cases} 0, & L(\overrightarrow{x}; \lambda_0, \lambda_1) \leqslant c_\alpha \\ 1, & L(\overrightarrow{x}; \lambda_0, \lambda_1) > c_\alpha \end{cases}$

$$P(L(\overrightarrow{x}; \lambda_0, \lambda_1) > c_\alpha | \lambda = \lambda_0) = \alpha$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n(\lambda_1-\lambda_0)} > c_\alpha$$

$$\sum_{i=1}^n x_i log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) - n(\lambda_1-\lambda_0) > log(c_\alpha)$$

$$\bar{x} log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) - (\lambda_1-\lambda_0) > \frac{log(c_\alpha)}{n}$$

$$\bar{x} > \frac{\frac{log(c_\alpha)}{n} + (\lambda_1-\lambda_0)}{log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)} = d$$

$$P(\overrightarrow{x} > d|\lambda=\lambda_0) = P\left(\frac{\overrightarrow{x}-\lambda_0}{\sigma} > \frac{d-\lambda_0}{\sigma}|\lambda=\lambda_0\right) = P\left(\sqrt{n}\frac{\overrightarrow{x}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}} > \sqrt{n}\frac{d-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}}|\lambda=\lambda_0\right) = \alpha$$

$$P\left(\sqrt{n}\frac{\overrightarrow{x}-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}} \leqslant \sqrt{n}\frac{d-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}}|\lambda=\lambda_0\right) = 1-\alpha$$

$$\Phi\left(\sqrt{n}\frac{d-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}}\right) = 1-\alpha$$

$$\sqrt{n}\frac{d-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}} = x_{1-\alpha}$$

$$d = \sqrt{\frac{\lambda_0}{n}} x_{1-\alpha} + \lambda_0$$

In [165…

```
d = qnorm (1 - alpha_1)*sqrt(lambda_0/50) + lambda_0
d
```

8.33664849342917

Ответ: $\phi(x) = \begin{cases} 0, & \overrightarrow{x} \leqslant 8.33664849342917 \\ 1, & \overrightarrow{x} > 8.33664849342917 \end{cases}$

h) В пунктах c-f поменять семейство распределений Пуассона на семейство геометрических распределений.

c)

$$L(\overrightarrow{x},\lambda) = \prod_{i=1}^n p_\lambda(X_i) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n X_i}}{(\lambda+1)^{\sum_{i=1}^n X_i + n}}$$

$$LL(\overrightarrow{x},\lambda) = ln(L(\overrightarrow{x},\lambda)) = ln(\lambda)\sum_{i=1}^n X_i - \left(\sum_{i=1}^n X_i + n\right) ln(\lambda+1)$$

$$\frac{dLL(\overrightarrow{x},\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n X_i - \left(\sum_{i=1}^n X_i + n\right)\frac{1}{\lambda+1} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n X_i = \lambda n$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{x} = 4,96$$

Смещение ОМП-оценки по методу моментов:

$$E_\lambda(\hat{\lambda}) = E_\lambda(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}) = \frac{\sum_{i=1}^n E_\lambda(X_i)}{n} = \frac{1}{n} n\lambda = \lambda$$

Значит оценка является несмещенной

d) Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α_1 для параметра λ на базе ОМП.

Воспользуемся центральной предельной теоремой:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-a}{\sigma} \longrightarrow N(0,1)$$

При этом:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \sim Geom(\lambda)$$

Из чего следует, что:

$$\hat{\lambda} = \bar{x}, EX_i = \lambda, DX_i = \lambda(\lambda+1)$$

Тогда:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}(\hat{\lambda}+1)}} \longrightarrow N(0,1) \Longrightarrow \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda}{\sqrt{\bar{x}(\bar{x}+1)}} \longrightarrow N(0,1) \Longrightarrow P\left(-x_\alpha \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda}{\sqrt{\bar{x}(\bar{x}+1)}} \leqslant x_\alpha\right)$$

где, $x_\alpha : \Phi(x_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha_1}{2} = 1 - \dfrac{0,2}{2} = 0,9 \Longrightarrow x_\alpha = \Phi^{-1}(0,9) = 1,281552$

Тогда:

$$P\left(-x_\alpha \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda}{\sqrt{\bar{x}(\bar{x}+1)}} \leqslant x_\alpha\right) \longrightarrow 1-\alpha_1 \Longrightarrow P\left(\bar{x} - \frac{x_\alpha\sqrt{\bar{x}(\bar{x}+1)}}{\sqrt{n}} \leqslant \lambda \leqslant \bar{x} + \frac{x_\alpha\sqrt{\bar{x}(\bar{x}+1)}}{\sqrt{n}}\right.$$

$$\Longrightarrow P\left(4,96 - \frac{1,281552\sqrt{4,96*5,96}}{\sqrt{50}} \leqslant \lambda \leqslant 4,96 + \frac{1,281552\sqrt{4,96*5,96}}{\sqrt{50}}\right) \longrightarrow 1-0.2$$

In [166…

```
4.96 - (1.281552*sqrt(4.96*5.96))/sqrt(50) # Расчеты
4.96 + (1.281552*sqrt(4.96*5.96))/sqrt(50) # Расчеты
```

3.97459400824497
5.94540599175503

Итого:

$$P(3.97459400824497 \leqslant \lambda \leqslant 5.94540599175503) \longrightarrow 0,8$$

e) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с геометрическим распределением с параметром λ_0. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет основания отвергнуть данную гипотезу.

$H_0 : \lambda = \lambda_0$

$H_0 : F = F_{\lambda_0}$ - функция геометрическиго распределения $Geom(\lambda_0)$

$\widetilde{H}_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \ldots, p_r = p_{r0}$, где p_{ri} - неизвестные теоретические вероятности попадиения в каждый интервал.

Интервал	Теоретические пападания	Попадания
(-oo, 5]	25.3364907863714	34
(5, 10]	10.9770137621869	7
(10, 15]	6.09146280139105	5
(15, +oo)	7.59503265005068	2

Вычисления теоретических ожидаемых попаданий:

In [167…

```
lambda_g = 1/(lambda_0+1)
pgeom(5, lambda_g)*50
(pgeom(10, lambda_g) - pgeom(5, lambda_g))*50
(pgeom(15, lambda_g) - pgeom(10, lambda_g))*50
(1 - pgeom(15, lambda_g))*50
```

25.3364907863714

10.9770137621869

6.09146280139105

7.59503265005068

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - N_{p_{i0}})}{N_{p_{i0}}} = \frac{(34 - 25,3364907863714)^2}{25,3364907863714} + \frac{(7 - 10,9770137621869)^2}{10,9770137621869} + \frac{(5 - 6,0914628(}{6,091462801}$$

$$+ \frac{(2 - 7,59503265005068)^2}{7,59503265005068} = 8,72053025909524$$

In [168…

```
(34-25.3364907863714)^2/25.3364907863714 +
(7-10.9770137621869)^2/10.9770137621869 +
(5-6.09146280139105)^2/6.09146280139105 +
(2-7.59503265005068)^2/7.59503265005068
```

8.72053025909524

Граница критической области:

$x_\alpha = 4.64162767608745 < \chi_2 \Rightarrow$ - основная гипотеза солгасия с геометрическим распределением отвергнута. Принимается альтернативная гипотеза о том, что исходные наблюдения не являются выборкой из геометрического распределения с параметром λ_0

f) Построить критерий значимости χ^2 проверки сложной гипотезы согласия с геометрическим распределением. Проверить гипотезу на уровне значимости α_1. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет основания отвергнуть данную гипотезу.

In [169…

```
csq <- function(lambda_0){
    lambda_g = 1/(lambda_0+1)
    prob <- pgeom(up, lambda_g) - pgeom(lower, lambda_g)
    return (sum((hits-50*prob)^2/(prob*50)))
}
nlm(csq, mean(data))$minimum
```

1.24955225252699

$$\widetilde{X}^2 = 1.24955225252699$$

$$df = r - d - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$$

$x_\alpha = 3.2188758248682 > \widetilde{X}^2 \Rightarrow$ - гипотеза о согласии с геометрическим распределением принимается.

Вычисление x_α:

In [170…

```
qchisq(1-alpha_1, 2)
```

3.2188758248682

Вычисление наибольшего значения урованя значимости α_{max}:

In [171…

```
1 - pchisq(nlm(csq, mean(data))$minimum, df=2)
```

0.535381272909504

2 часть:

Для начала производится создание коллекции из данных (выборки):

In [172…

```
data <- c(3.26,2.54,5.02,0.75,3.07,0.32,0.76,1.00,0.83,0.4,0.19,
1.02,0.17,0.24,0.06,4.34,4.13,1.93,0.69,0.00,0.09,15.9,1.3,0.38,
0.16,5.23,0.04,2.24,3.73,0.03,2.53,6.13,0.44,2.55,0.01,1.34,0.77,
0.88,0.08,0.04,0.02,1.97,6.46,2.81,0.85,2.00,0.94,0.04,0.84,0.04)
alpha_2 = 0.05
c = 0.00
d = 4.26
h = 1.1
lambda_0 = 0.21
lambda_1 = 0.36
```

а) Построить вариационный ряд, эмпирическую функцию распределения, гистограмму и полигон частот с шагом h.

Исходный ряд:

In [173…

```
print(data)
```

```
 [1]  3.26  2.54  5.02  0.75  3.07  0.32  0.76  1.00  0.83  0.40  0.19  1.02
[13]  0.17  0.24  0.06  4.34  4.13  1.93  0.69  0.00  0.09 15.90  1.30  0.38
[25]  0.16  5.23  0.04  2.24  3.73  0.03  2.53  6.13  0.44  2.55  0.01  1.34
[37]  0.77  0.88  0.08  0.04  0.02  1.97  6.46  2.81  0.85  2.00  0.94  0.04
[49]  0.84  0.04
```

Вариационный ряд

In [174…

```
print(sort(data))
```

```
 [1]  0.00  0.01  0.02  0.03  0.04  0.04  0.04  0.04  0.06  0.08  0.09  0.16
[13]  0.17  0.19  0.24  0.32  0.38  0.40  0.44  0.69  0.75  0.76  0.77  0.83
[25]  0.84  0.85  0.88  0.94  1.00  1.02  1.30  1.34  1.93  1.97  2.00  2.24
[37]  2.53  2.54  2.55  2.81  3.07  3.26  3.73  4.13  4.34  5.02  5.23  6.13
[49]  6.46 15.90
```

Вектор рангов:

In [175…

```
rankVector = rank(data)
print(rankVector)
```

```
 [1] 42.0 38.0 46.0 21.0 41.0 16.0 22.0 29.0 24.0 18.0 14.0 30.0 13.0 15.0  9.0
[16] 45.0 44.0 33.0 20.0  1.0 11.0 50.0 31.0 17.0 12.0 47.0  6.5 36.0 43.0  4.0
[31] 37.0 48.0 19.0 39.0  2.0 32.0 23.0 27.0 10.0  6.5  3.0 34.0 49.0 40.0 26.0
[46] 35.0 28.0  6.5 25.0  6.5
```

Ранжированный ряд в виде таблицы:

In [176…

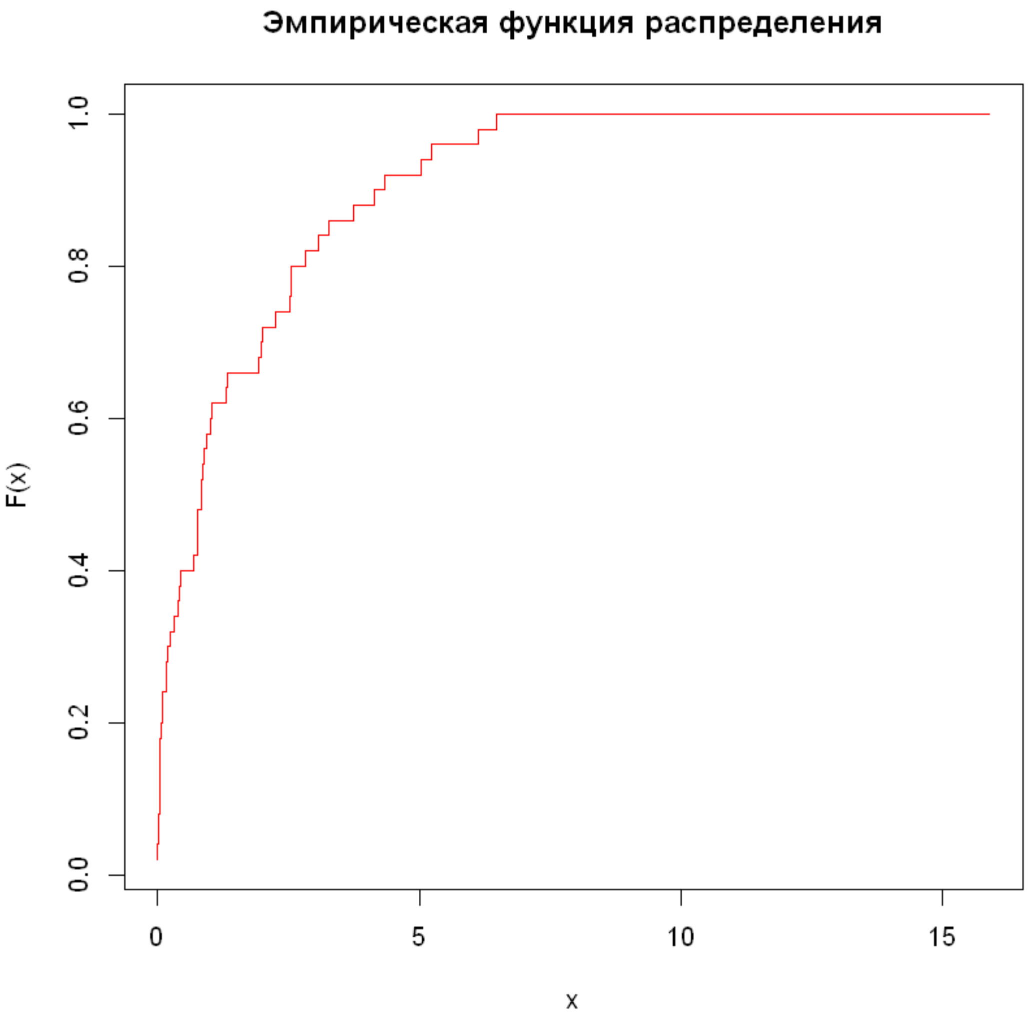
```
print(data.frame(Value = data, Rank = rankVector))
```

```
   Value Rank
1   3.26 42.0
2   2.54 38.0
3   5.02 46.0
4   0.75 21.0
5   3.07 41.0
6   0.32 16.0
7   0.76 22.0
8   1.00 29.0
9   0.83 24.0
10  0.40 18.0
11  0.19 14.0
12  1.02 30.0
13  0.17 13.0
14  0.24 15.0
15  0.06  9.0
16  4.34 45.0
17  4.13 44.0
18  1.93 33.0
19  0.69 20.0
20  0.00  1.0
21  0.09 11.0
22 15.90 50.0
23  1.30 31.0
24  0.38 17.0
25  0.16 12.0
26  5.23 47.0
27  0.04  6.5
28  2.24 36.0
29  3.73 43.0
30  0.03  4.0
31  2.53 37.0
32  6.13 48.0
33  0.44 19.0
34  2.55 39.0
35  0.01  2.0
36  1.34 32.0
37  0.77 23.0
38  0.88 27.0
39  0.08 10.0
40  0.04  6.5
41  0.02  3.0
42  1.97 34.0
43  6.46 49.0
44  2.81 40.0
45  0.85 26.0
46  2.00 35.0
47  0.94 28.0
48  0.04  6.5
49  0.84 25.0
50  0.04  6.5
```

Построение эмпирической функции распределения:

In [177…

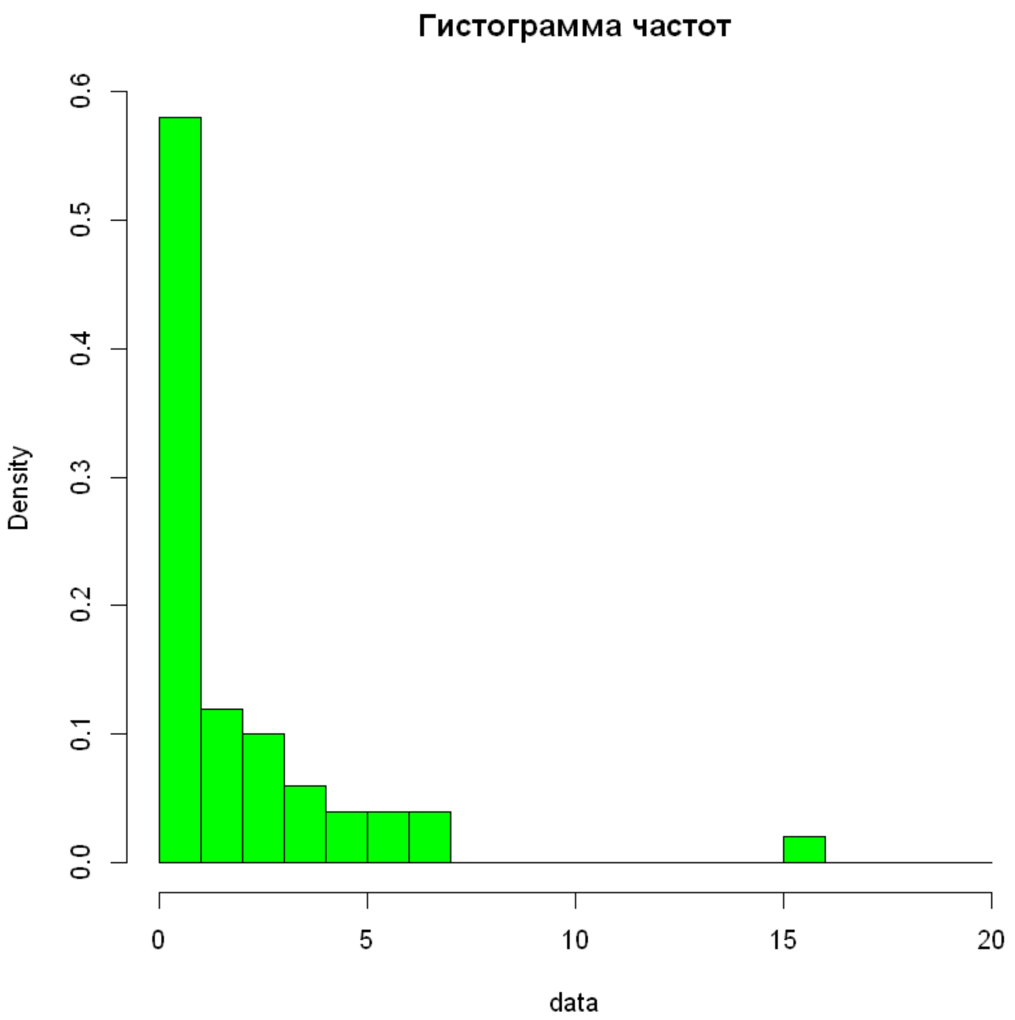
```
dataLen = length(data)
plot(sort(data), (1:dataLen)/dataLen, type="S", col="red",
main="Эмпирическая функция распределения", xlab="x", ylab="F(x)")
```



Гистограмма частот:

In [178…

```
hist(data, breaks=0:20, main="Гистограмма частот", freq = FALSE, col = "green")
```



b) Вычислить выборочные аналоги числовых характеристик (матожидание, дисперсия, медиана, ассиметрия, эксцесс, вероятности на промежутке).

In [179…

```
#install.packages ("moments")
#library(moments)
print(data.frame(Матожидание = mean(data), Дисперсия = var(data),
Медиана = median(data), Ассиметрия = skewness(data), Эксцесс = kurtosis(data)))
```

```
  Матожидание Дисперсия Медиана Ассиметрия  Эксцесс
1      1.8112  7.074827   0.845   3.279316 16.93842
```

$P(X \in [c, d]) = P(X \in [0, 4.26])$:

In [180…

```
k = 0
for (value in data){
    if(value >=c && value <=d)
        k = k + 1
}
print(k/dataLen)
```

```
[1] 0.88
```

c) В предположении, что исходные наблюдения являются выборкой из показательного распределения, построить оценку максимального правдоподобия параметра λ а также оценку λ по методу моментов. Найти смещение оценок.

Плотность показательного распределения:

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0$$

Функция правдоподобия:

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Логарифм от функции правдоподобия:

$$LL(x,\lambda) = ln(\lambda)n - \lambda\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\frac{\partial LL}{\partial\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{x} \Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{1.8112} \approx 0,55$$

По методу моментов оценим λ:

$$E(\hat{\lambda}) = E(\frac{1}{\bar{x}}) = E(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} E(x_i)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}} = \frac{n}{\frac{n}{\lambda}} = \lambda \Longrightarrow \text{оценка несмещенная}$$

Таким образом, оценка: $\hat{\lambda} = 0,55$

d) Построить асимптотический доверительный интервал уровня значимости α_2 для параметра λ на базе ОМП.

Воспользуемся центральной предельной теоремой:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-a}{\sigma} \longrightarrow N(0,1)$$

При этом:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \sim Exp(\lambda)$$

Из чего следует, что:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}, EX_i = \frac{1}{\lambda}, DX_i = \frac{1}{\lambda^2}$$

Тогда:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda^{-1}}{\sqrt{\lambda^{-2}}} \longrightarrow N(0,1) \Longrightarrow \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda^{-1}}{\sqrt{\bar{x}^2}} \longrightarrow N(0,1) \Longrightarrow P\left(-x_\alpha \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda^{-1}}{|\bar{x}|} \leqslant x_\alpha\right) \longrightarrow 1-\alpha$$

где, $x_\alpha : \Phi(x_\alpha) = 1 - \frac{\alpha_2}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 0,975 \Longrightarrow x_\alpha = \Phi^{-1}(0,975) = 1.959964$

In [181…

```
print(qnorm (0.975)) # Вычисление Ф^(-1)
```

```
[1] 1.959964
```

Тогда:

$$P\left(-x_\alpha \leqslant \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\lambda^{-1}}{\bar{x}} \leqslant x_\alpha\right) \longrightarrow 1-\alpha_2 \Longrightarrow P\left(\frac{1}{\bar{x}+\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}}x_\alpha} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{\bar{x}-\frac{\bar{x}}{\sqrt{n}}x_\alpha}\right) \longrightarrow 1-\alpha_2$$

$$\Longrightarrow P\left(\frac{1}{1,8112+\frac{1,8112}{\sqrt{50}}1,959964} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{1,8112-\frac{1,8112}{\sqrt{50}}1,959964}\right) \longrightarrow 1-0,05$$

In [182…

```
1/(1.8112+1.8112/sqrt(50)*1.959964)
1/(1.8112-1.8112/sqrt(50)*1.959964)
```

0.432296003497849
0.763842626453414

Итого:

$$P(0.432296003497849 \leqslant \lambda \leqslant 0.763842626453414) \longrightarrow 0,95$$

e) С использованием теоремы Колмогорова построить критерий значимости проверки простой гипотезы согласия с показательным распределением с параметром λ_0. ПРоверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором нет оснований отвергнуть данную гипотезу.

$H_0 : F_\lambda = F_{\lambda_0}$ - функция паказательного распределения с параметром λ_0

По теореме Колмогорова: $\phi(\overrightarrow{x}) = \begin{cases} 0, & K \leqslant x_\alpha \\ 1, & K > x_\alpha \end{cases}$

$$K = max|F_n(x) - F(x)|\sqrt{n}$$

$$x_{\alpha_2} = 1,959964$$

Вычисление K:

In [183…

```
ks_test <- ks.test(sort(data), "pexp", lambda_0)
sqrt(50)*ks_test$statistic
```

```
Warning message in ks.test(sort(data), "pexp", lambda_0):
"ties should not be present for the Kolmogorov-Smirnov test"
```

D: 2.8792464046823

$K > x_{\alpha_2} \Longrightarrow$ отвергаем гипотезу H_0.

f) Используя гистограмму частот, построить критерий значимости χ^2 проверки простой гипотезы согласия с gпоказательным распределением с параметром λ_0. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет основания отвергнуть данную гипотезу.

$H_0 : \lambda = \lambda_0$

$H_0 : F = F_{\lambda_0}$ - функция показательного распределения $Exp(\lambda_0)$

$\widetilde{H}_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \ldots, p_r = p_{r0}$, где p_{ri} - неизвестные теоретические вероятности попадиения в каждый интервал.

Интервал	Теоретические пападания	Попадания
(-oo, 1]	25.3364907863714	34
(1, 2]	10.9770137621869	7
(2, 3]	6.09146280139105	5
(3, 4]	7.59503265005068	2
(4, 5]	7.59503265005068	2
(5, 6]	7.59503265005068	2
(6, +oo)	7.59503265005068	2

Вычисления попаданий в интервалы:

In [184…

```
k1 = 0
for (value in data){
    if(value <= 1)
        k1 = k1 + 1
}
print(k1)

k2 = 0
for (value in data){
    if(value > 1 && value <= 2)
        k2 = k2 + 1
}
print(k2)

k3 = 0
for (value in data){
    if(value > 2 && value <= 3)
        k3 = k3 + 1
}
print(k3)

k4 = 0
for (value in data){
    if(value > 3 && value <= 4)
        k4 = k4 + 1
}
print(k4)

k5 = 0
for (value in data){
    if(value > 4 && value <= 5)
        k5 = k5 + 1
}
print(k5)

k6 = 0
for (value in data){
    if(value > 5 && value <= 6)
        k6 = k6 + 1
}
print(k6)

k7 = 0
for (value in data){
    if(value > 6)
        k7 = k7 + 1
}
print(k7)
```

```
[1] 29
[1] 6
[1] 5
[1] 3
[1] 2
[1] 2
[1] 3
```

Вычисления теоретических ожидаемых попаданий

In [185…

```
up <- c(1,2,3,4,5,6,+Inf)
lower <- c(-Inf,1,2,3,4,5,6)
npk <- 50*(pexp(up, lambda_0) - pexp(lower, lambda_0))
counts = c(k1, k2, k3, k4, k5, k6, k7)
sum((counts - npk)^2/npk)
```

52.1104031096774

Граница критической области:

$x_\alpha = 12.591587243744 << \chi_2 \Rightarrow$ - основная гипотеза солгасия с показательным распределением отвергнута. Принимается альтернативная гипотеза о том, что исходные наблюдения не являются выборкой из показательного распределения с параметром λ_0

In [186…

```
qchisq(1-alpha_2, 6)
```

12.591587243744

g) Построить критерий значимости χ^2 проверки сложной гипотезы согласия с показательным распределением. Проверить гипотезу на уровне значимости α_2. Вычислить наибольшее значение уровня значимости, на котором еще нет основания отвергнуть данную гипотезу.

In [187…

```
csq <- function(lambda_0){
    prob <- pexp(up, lambda_0) - pexp(lower, lambda_0)
    return (sum((counts-50*prob)^2/prob/50))
}
nlm(csq, mean(data))$minimum
```

```
Warning message in pexp(up, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in pexp(lower, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in nlm(csq, mean(data)):
```

```
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"Warning message in pexp(up, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in pexp(lower, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in nlm(csq, mean(data)):
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"Warning message in pexp(up, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in pexp(lower, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in nlm(csq, mean(data)):
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"Warning message in pexp(up, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in pexp(lower, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in nlm(csq, mean(data)):
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"
```

7.99508214998187

$\widetilde{X}^2 = 7,99508214998187$

$df = r - d - 1 = 7 - 1 - 1 = 5$

$x_\alpha = 11,0704976935164 > \widetilde{X}^2 \Rightarrow$ - гипотеза о согласии с показательным распределением принимается.

Вычисление x_α:

In [188…

```
qchisq(1-alpha_2, 5)
```

11.0704976935164

Вычисление наибольшего значения урованя значимости α_{max}:

In [189…

```
1 - pchisq(nlm(csq, mean(data))$minimum, df=5)
```

```
Warning message in pexp(up, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in pexp(lower, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in nlm(csq, mean(data)):
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"Warning message in pexp(up, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in pexp(lower, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in nlm(csq, mean(data)):
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"Warning message in pexp(up, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in pexp(lower, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in nlm(csq, mean(data)):
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"Warning message in pexp(up, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in pexp(lower, lambda_0):
"созданы NaN"Warning message in nlm(csq, mean(data)):
"NA/Inf заменены максимальным положительным значением"
```

0.156506868282015