

1 Введение

Наша научная группа работает с квантовой сенсорикой, на базе азотных вакансий (дефектов) в алмазе.

Цель работы - создание магнитометра на основе дисперсионного измерения частот магнитных резонансов для ансамбля отрицательно заряженных азотно-вакансионных центров (NV центров) в микроволновом резонаторе.

Одной из проблем на пути создания прибора видится проблема изменения частоты резонатора. Под действием внешних сил она может существенно изменяться, что сильно ухудшит чувствительность прибора к магнитному полю.

2 Краткий обзор литературы

На сегодняшний день многие научные группы работают с квантовыми сенсорами на основе NV центров окраски в алмазе. Интерес к NV центрам связан с тем, что он обладает большим временем когерентности, технологичен в изготовлении, обладает возможностью эффективной подокотровки и считывания состояний. В дополнение к этому, датчики на основе NV центров работают при комнатной температуре. Особый интерес представляет отрицательно заряженный центр NV. Он обладает ненулевым электронным спином и одним из самых длинных времён когерентности электронного спина ($T_2 = 1.8$ мс) [1] в твердотельных системах при комнатной температуре.

При выполнении квантовых измерений в некоторых случаях оказывается выгодно измерять не непосредственный отклик квантовой системы, а отклик резонатора, внутрь которого помещена эта квантовая система. При таком подходе на резонатор воздействуют микроволновым полем и отслеживают его пропускание в зависимости от состояния квантовой системы, таким образом, пропускание зависит от эффективной частоты резонатора. Данная методика получила название дисперсионное считывание.

Одной из первых теоретических работ, на эту тему стала работа [2], в которой авторы ввели общую теорию ввода-вывода для квантовых диссипативных систем, в которой возможно связать выход с входом через внутреннюю динамику системы. Последующие теоретические работы развили это направление. В качестве примера приведём работы [3, 4].

Важным вопросом является выбор режима связи квантовой системы с резонатором (weak, strong, ultrastrong, deep strong), поскольку в зависимости от режима, в котором будет проходить эксперимент, будут изменяться теоретические методы описания системы [5]. Большинство аналитических расчётов строятся на модели Джейнса-Каммингса. Эта модель позволяет удобно задавать параметры системы и получать функцию линейного отклика без громоздких вычислений. Однако важно отметить, что она не учитывает коллективные эффекты и предполагает наличие лишь одной (в простейшем случае двухуровневой) квантовой системы внутри резонатора.

В совокупности с хорошей теоретической базой для описания дисперсионного считывания, появилось несколько научных групп, применивших данную методику для создания квантовых сенсоров магнитного поля как на основе NV, так и на базе других соединений. В качестве примера датчика не на NV центре можно привести работу [6], в которой авторы использовали дефекты Cr^{3+} в кристалле сапфира (Al_2O_3) и получили прибор с чувствительностью $9.7pT/\sqrt{Hz}$. Из результатов работы следует, что устранив необходимость в оптической поляризации, твердотельные датчики можно делать меньше, легче и более энергоэффективными, чем существующие.

А также избежать проблем с доставкой света, включая высокие тепловые нагрузки, лазерное наведение, поляризацию и амплитудный шум.

Кроме того, существуют работы, в которых в качестве квантовой системы выбраны NV центры. Например в работе [7] показано, что дисперсионное считывание NV центров в резонаторе позволяет получить точность, выше чем спиновый шум (spin projection noise). Не взаимодействуя напрямую с квантовой системой эксперимент не будет разрушать квантовое состояние, что по ожиданиям авторов приведёт к превосходству сенсорики на основе дисперсионного считывания над оптическим.

В работе [8] исследована возможность создания магнитного сенсора на основе NV, авторы которой ожидают получить прибор с чувствительностью $3pT/\sqrt{Hz}$, что превосходит результат магнитометра на основе дефектов Cr^{3+} в кристалле сапфира. Важной особенностью описанных выше датчиков является устранение множества шумов и ошибок считывания, связанных с отсутствием оптического взаимодействия с квантовой системой. Эти и другие группы, занимающиеся вопросами магнитометрии, основанной на дисперсионном считывании, являются нашими научными конкурентами в данной работе.

3 Дисперсионное считывание

При выполнении квантовых измерений в некоторых случаях оказывается выгодно измерять не непосредственный отклик квантовой системы, а отклик резонатора, внутрь которого помещена эта квантовая система. При таком подходе на резонатор воздействуют микроволновым полем и отслеживают его пропускание в зависимости от состояния квантовой системы. Пропускание зависит от эффективной частоты резонатора. Покажем как изменится эффективная частота резонатора в связи с наличием квантовой системы. Для этого рассмотрим одномодовый резонатор с двухуровневой системой (ДУС). Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = H_{sys} + H_{cav} + H_{sys-cav} = \Delta\sigma^+\sigma + \omega_0 a^\dagger a + g(\sigma^+ a + \sigma a^\dagger) \quad (1)$$

В режиме слабой связи квантовой системы с резонатором $g \ll \delta$, в базисе $|\text{sys} = 0, \text{cavity} = N\rangle, |\text{sys} = 1, \text{cavity} = N+1\rangle$, собственные энергии будут:

$$E_+ = \omega_0 N + \frac{g^2 N}{\delta}$$

$$E_- = \omega_0 (N - 1) + \Delta - \frac{g^2 N}{\delta}$$

Этот эффект называется дисперсионным сдвигом. Он заключается в энергетическом сдвиге состояний системы в зависимости от состояний квантовой системы. Количественно данный эффект можно описать эффективной частотой резонатора, которая изменилась с ω_0 в отсутствие квантовой системы на $\omega_0 + \delta\omega$, где $\delta\omega \approx \frac{g^2}{\Delta - \omega_0}$. По изменению частоты дисперсионного сдвига мы будем детектировать состояние квантовой системы.

4 Гамильтониан системы

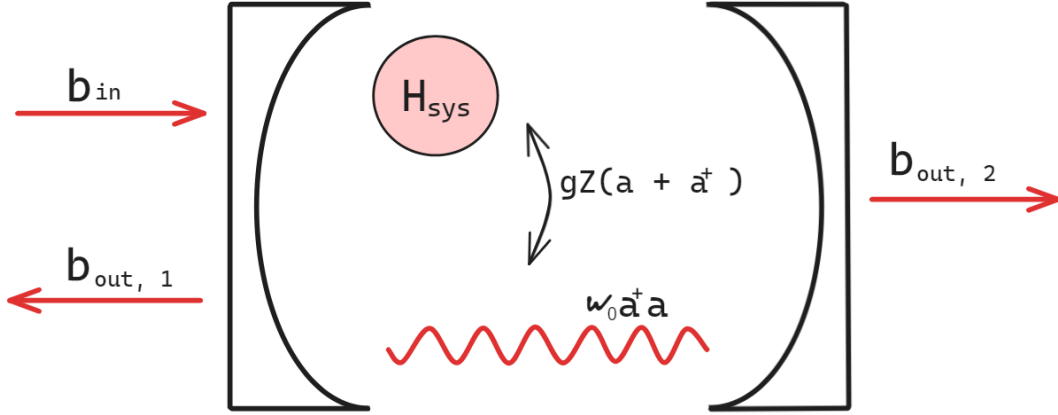


Рис. 1: Резонатор, связанный с входящими/выходящими модами, а также с внутренней квантовой системой.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из атома H_{sys} , резонатора H_R , внешнего излучения H_{ex} , рис.1:

$$H = H_{sys} + H_r + H_{ex} + H_{I1} + H_{I2} \quad (2)$$

Кубит: $H_{sys} = \frac{\Delta}{2}|e\rangle\langle e| = \frac{\Delta}{2}|e\rangle\langle g|g\rangle\langle e| = \frac{\Delta}{2}\sigma^+\sigma$

Резонатор: $H_r = \omega_0 a^+ a$

Внешнее поле: $H_{ex} = \sum_k \omega_k b_k^+ b_k$

Взаимодействие моды резонатора и мод внешнего поля: $H_{I1} = \sum_k \gamma_k (b_k^+ a + a^+ b_k)$

Взаимодействие резонатора и ДУС: $H_{I2} = -\vec{d}\vec{E} = \underbrace{-(\vec{d}\vec{n})}_{g} \underbrace{\varepsilon f(\vec{r})}_{Z} (\sigma + \sigma^+) (a + a^+) = gZ(a + a^+),$

где $\vec{E} = \vec{n}f(\vec{r})\varepsilon(a + a^+)$, ε - амплитуда поля для одиночного фотона резонатора, $f(\vec{r})$ - описывает пространственную моду резонатора (например $f = \sin(\frac{\omega_0 z}{c})$). В случае кубита $Z = \sigma_x$.

В итоге получим гамильтониан:

$$H = \frac{\Delta}{2}\sigma^+\sigma + \omega_0 a^+ a + \sum_k \omega_k b_k^+ b_k + \sum_k \gamma_k (b_k^+ a + a^+ b_k) + gZ(a + a^+) \quad (3)$$

5 Уравнение Ланжевена (Input-output theory)

Из линейризованного гамильтониана можно вывести так называемые линейризованные квантовые уравнения Ланжевена, которые управляют динамикой оптомеханической системы, если добавить к уравнениям движения Гейзенберга члены диссипации и шума. Работать будем в представлении Гейзенберга.

Для начала рассмотрим лишь резонатор с внешним полем, т.е.

Решим систему уравнений динамики a и b с помощью уравнения Гейзенберга для моды резонатора, добавив в гамильтониан член взаимодействия резонатора с кубитом:

$$\dot{a} = -i\omega_0 a - igZ - \frac{\varkappa}{2}a - \sum_{\nu} b_{in,\nu} \sqrt{\varkappa_{\nu}}, \quad (4)$$

Здесь $\varkappa = 2\pi \sum_k \gamma_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0)$, $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa$ и $b_{out,\nu} - b_{in,\nu} = \sqrt{\varkappa_\nu} a$.
Добротность резонатора будет $Q = \omega_0 / \varkappa$.

$$i \sum_k \gamma_k b_k(0) e^{-i\omega_k t} = \sum_\nu \sqrt{\varkappa_\nu} b_{in,\nu}.$$

$$[b_{in}(t), b_{in}^+(t')] = \delta(t - t')$$

6 Восприимчивость (Linear response theory)

Для дальнейшего описания системы выразим Z через a . Заменяя a и a^+ на классические амплитуды a и a^* , получим следующий гамильтониан взаимодействия резонатора с кубитом:

$$H_{I2} = gZ(a + a^*) = Zf(t)$$

Тогда полный гамильтониан системы кубит-резонатор будет иметь вид:

$$H = \underbrace{H_{sys} + H_r}_{H_0} + \underbrace{H_{I2}}_V = \underbrace{\frac{\Delta}{2} \sigma^+ \sigma + \omega_0 a^+ a}_{H_0} + \underbrace{gZ(a + a^*)}_V = H_0 + V \quad (5)$$

Проведём простые вычисления, перейдём в представление взаимодействия и используем формулу Кубо. В результате получим выражение для Z :

$$Z_t = Z_t^{(0)} - i \int_{t_0}^t d\tau Tr \left([\tilde{Z}(t, \tau), Z(t)] \rho_0(\tau) \right) f(\tau) = Z_t^{(0)} + \int d\tau \chi(t, \tau) f(\tau), \quad (6)$$

где

$$\chi(t, \tau) = -i \langle [\tilde{Z}(t, \tau), Z(t)] \rangle_0 \theta(t - \tau).$$

Функцию линейного отклика системы χ обычно называют восприимчивость. \tilde{Z} - Z в представлении взаимодействия.

7 Независимая от времени система

Сделаем Фурье преобразование Z_t :

$$Z_\omega = g\chi_\omega(a_\omega + a_{-\omega}^*),$$

и перепишем уравнение на моду резонатора в Фурье виде:

$$i(\omega - \omega_0)a_\omega - ig^2\chi_\omega a_\omega - \frac{\varkappa}{2}a_\omega = \sum_\nu b_{in,\nu} \sqrt{\varkappa_\nu} \quad (7)$$

Совместно с уравнениями на a_{in} и a_{out} получим коэффициенты прохождения и отражения соответственно:

$$t = \frac{b_{out,2}}{b_{in,1}} = \frac{i\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}}{\omega_0 - \omega + g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}} \quad (8)$$

$$r = \frac{b_{out,1}}{b_{in,1}} = 1 + \frac{i\varkappa_1}{\omega_0 - \omega + g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}} \quad (9)$$

По сравнению с отсутствием резонатора ($g=0$), максимум прохождения будет смещён относительно $\omega = \omega_0$ на $\delta\omega = g^2 \text{Re}\chi(\omega)$

$$|t|^2 + |r|^2 = \begin{cases} = 1, \chi_\omega \in \text{Re} \\ < 1, \text{Im}\chi_\omega < 0 - \text{потеря энергии} \\ > 1, \text{Im}\chi_\omega > 0 - \text{подвод энергии} \end{cases} \quad (10)$$

8 Единичный кубит

Для полноценного построения аналитической модели считывания состояния системы в резонаторе нужно научиться находить функцию линейного отклика (восприимчивость) системы. Для этого начнём с простейшего случая - единичного кубита в резонаторе с $H_{sys} = \frac{\Delta}{2}\sigma_z$ и $Z = \sigma_x$. Для нахождения χ , первым делом найдём $\tilde{Z}(t)$. При вычислениях будем пользоваться следующим гамильтонианом:

$$H = \underbrace{H_{sys} + H_r}_{H_0} + \underbrace{H_{I2}}_V = \underbrace{\frac{\Delta}{2}\sigma_z + \omega_0 a^\dagger a}_{H_0} + \underbrace{g\sigma_x(a + a^\dagger)}_V = H_0 + V \quad (11)$$

В представлении взаимодействия $Z(t)$ имеет вид \tilde{Z} : $\tilde{Z}(t) = \sigma_x \cos(\Delta t) - \sigma_y \sin(\Delta t)$.

Вычислив след в $\chi(t)$ и введя скорость распада когерентного состояния γ , ассоциирующуюся с T_2^* , получим выражение:

$$\chi(t) = 2 \langle \sigma_z \rangle \sin(\Delta t) e^{-\frac{\gamma t}{2}} \theta(t) \quad (12)$$

Выполнив Фурье-преобразование найдём:

$$\chi(\omega) = 2 \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sin(\Delta t) e^{i\omega t} dt \langle \sigma_z \rangle = \left(\frac{1}{\Delta - \omega - i\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\Delta + \omega + i\frac{\gamma}{2}} \right) \langle \sigma_z \rangle \quad (13)$$

Здесь $\langle \sigma_z \rangle = \pm 1$. Наличие диссипации кубита устраняет расхождения в $\chi(\omega)$ и ранее введённое требование $g \ll |\omega_0 - \Delta|$ становится несущественным, пока система находится в режиме линейного отклика.

9 Многоуровневая система

Теперь сделаем обобщение и перейдём к рассмотрению многоуровневой системы. Положим матрицу плотности диагональной в базисе собственных состояний H_{sys} , тогда $\rho = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$ и $H_{sys}|n\rangle = E_n|n\rangle$ с собственными энергиями E_n . Тогда восприимчивость будет иметь вид:

$$\chi(\omega) = \sum_{m,n} \frac{(p_m - p_n) |Z_{mn}|^2}{\omega + E_m - E_n + i\frac{\gamma_{mn}}{2}} \quad (14)$$

Часто используемый частный случай - система, находящаяся в тепловом равновесии с окружением $\rho \sim e^{-H_{sys}/k_B T}$. Населённость будем определять через нормальное Больцмановское распределение:

$$p_n = \frac{e^{-E_n/k_B T}}{\sum_n e^{-E_n/k_B T}}.$$

10 Температурная зависимость

В приведённом выше методе предполагается, что частота внешнего поля ω , резонатора ω_{cavity} и квантовой системы ω_{system} постоянны. И если частоту внешнего поля и квантовой системы можно поддерживать постоянной, частота резонатора может изменяться под действием изменения температуры. Чтобы проверить пригодность метода для сред с изменяющейся температурой, выясним как влияет температура на измерение поля. При прохождении резонатора фаза сигнала изменится на

$$Arg(t) = \phi = \phi(B, T)$$

причём $\omega_{system} = \gamma_e B + D$

$$\phi = \phi(x_0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial B} \right)_{x_0} (B - B_0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_{x_0} (T - T_0) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial B \partial T} \right)_{x_0} (B - B_0)(T - T_0) + \dots \quad (15)$$

где $x_0 = (B_0, T_0)$

$$\tilde{B} = B_0 + [(\phi - \phi_{x_0}) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_{x_0} (T - T_0)] \left(\frac{\partial \phi}{\partial B} \right)_{x_0}^{-1} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial T} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_{x_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial B} \right)_{x_0}^{-1} \quad (17)$$

Найдём численно $\frac{\partial \tilde{B}}{\partial T}(\omega, \omega_{cavity})$ для разных значений частот внешнего поля ω и резонатора ω_{cavity} . Работать будем в режиме слабой связи, т.е. когда $g \ll |\omega_{system} - \omega_{cavity}|$. При величине внешнего поля $B_0 = 3mT$ и комнатной температуре $T = 293K$, собственная частота квантовой системы будет $\omega_{system} = 2954MHz$. В случае полного резонанса, когда $\omega_{system} = \omega = \omega_{cavity}$, как и следовало ожидать $\frac{\partial \tilde{B}}{\partial T} = 0$. На рисунке 2 изображён $\frac{\partial \tilde{B}}{\partial T}(\omega, \omega_{cavity})$ по линии $\omega = \omega_{system} = 2954MHz$.

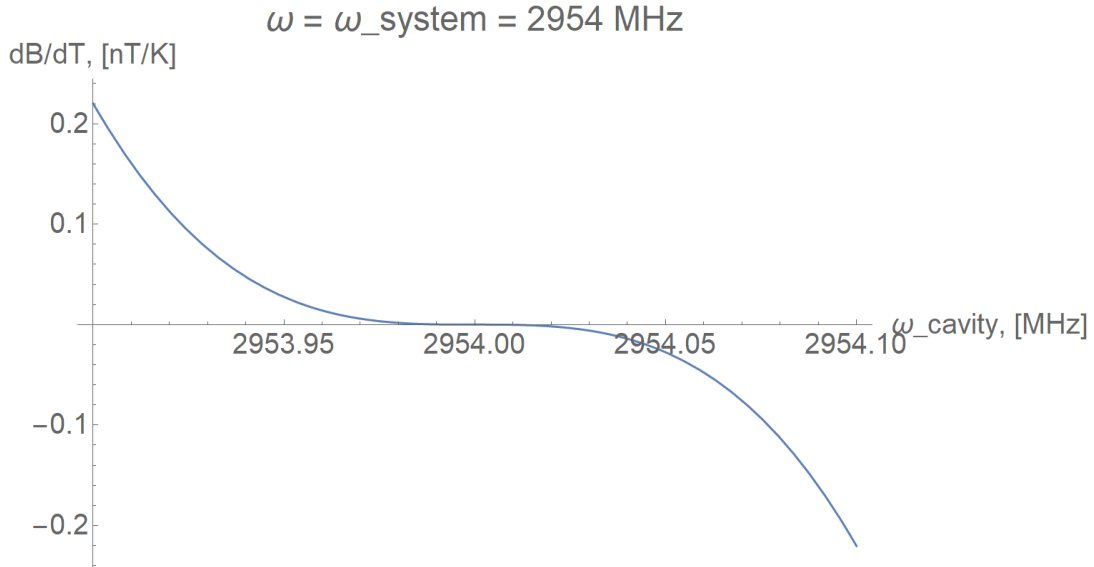


Рис. 2: Отношение dB/dT для разных ω_{cavity} при постоянной $\omega = \omega_{system}$.

11 Ортогональные моды

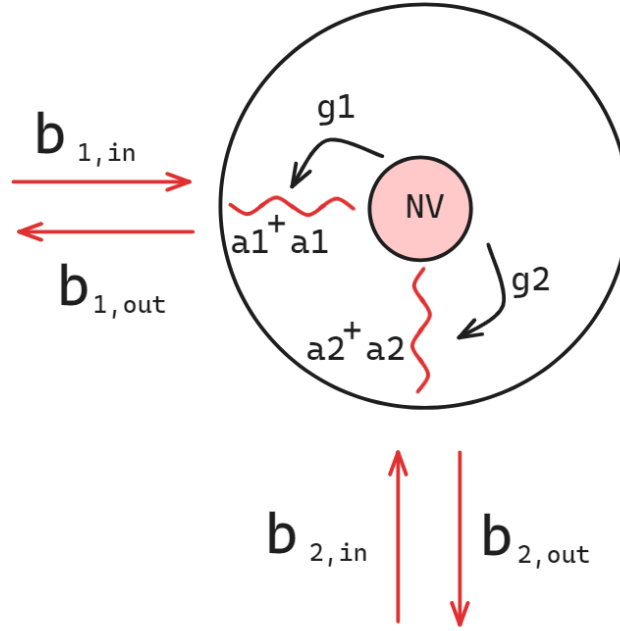


Рис. 3: Схема резонатора с ортогональными модами

В качестве метода для улучшения считывания частоты системы в резонаторе мы предлагаем использовать резонатор с двумя геометрически ортогональными модами, рис 3. Идея использования ортогональных мод заключается в измерении коэффициента пропускания резонатора из порта 1 в порт 2. При условии что внешние поля в двух портах резонатора связаны каждый со своей модой пропускание должно равняться нулю в случае, когда частота поля сильно отстроена от частоты резонанса ДУС. При совпадении частоты поля и ДУС будет появляться рассеяние на ДУС и моды 1 (a_1) в моду 2(a_2), и как следствие появится сигнал на выходе 2.

В таком случае гамильтониан взаимодействия будет иметь вид:

$$H_{int} = g_1(\sigma_+ a_1 + \sigma_- a_1^+) + ig_2(\sigma_+ a_2 - \sigma_- a_2^+) \quad (18)$$

А соответствующие модам уравнения Ланжевена:

$$i(\omega_{ex1} - \omega_1)a_1 - ig_1^2\chi_1 a_1 - \frac{\kappa_1}{2}a_1 = b_{1,in}\sqrt{\kappa_1} \quad (19)$$

$$i(\omega_{ex2} - \omega_2)a_2 + ig_2^2\chi_2 a_2 - \frac{\kappa_2}{2}a_2 = b_{2,in}\sqrt{\kappa_2} \quad (20)$$

$$b_{i,out} - b_{i,in} = a_2 \sqrt{\kappa_2} \chi_i a_i \quad (21)$$

Для решения этой системы требуется учесть зависимость квантовой системы в резонаторе от времени.

Список литературы

- [1] G. Balasubramanian, P. Neumann, D. J. Twitchen, and M. L. Markham, “Ultralong spin coherence time in isotopically engineered diamond,” *Nature materials*, vol. 8, may 2009.
- [2] M. J. Collett and C. W. Gardiner, “Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification.,” *Physical Review A*, vol. 30, sep 1984.
- [3] S. Kohler, “Dispersive readout: Universal theory beyond the rotating-wave approximation,” *Physical Review A*, vol. 98, aug 2018.
- [4] H. Z. Shen, Q. Wang, and X. X. Yi, “Dispersive readout with non-markovian environments,” *Physical Review A*, feb 2022.
- [5] A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. D. Liberato, S. Savasta, and F. Nori, “Ultrastrong coupling between light and matter,” *Nat Rev Phys*, vol. 1, jan 2019.
- [6] R. Wilcox, E. Eisenach, J. Barry, M. Steinecker, M. O’Keeffe, D. Englund, and D. Braje, “Thermally-polarized solid-state spin sensor,” *Physical Review A*, vol. 17, no. 4, 2021.
- [7] J. Ebel, T. Joas, M. Schalk, P. Weinbrenner, A. Angerer, J. Majer, and F. Reinhard, “Dispersive readout of room-temperature ensemble spin sensors,” *Quantum Science and Technology*, vol. 6, jun 2021.
- [8] E. R. Eisenach, J. F. Barry, and M. F. O’Keeffe, “Cavity-enhanced microwave readout of a solid-state spin sensor.,” *Nat Commun*, vol. 12, mar 2021.