

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
"МИФИ"
ИНСТИТУТ ЛАЗЕРНЫХ И ПЛАЗМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

На правах рукописи
УДК 538.955

КОЗОДАЕВ АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ

**Исследование магнитного резонанса
азотно-вакансионного центра окраски в
алмазе методом дисперсионного измерения**

Выпускная квалификационная работа магистра

Направление подготовки 03.04.01
Прикладные математика и физика

Выпускная квалификационная работа защищена

« » 2025 г.

Оценка

Секретарь ГЭК

г. Москва
2025 г.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к выпускной квалификационной работе на
тему:

**Исследование магнитного резонанса
азотно-вакансионного центра окраски в
алмазе методом дисперсионного измерения**

Студент-дипломник: Козодаев А. М.

Руководитель работы: д.ф.-м.н., Акимов А. В.

Консультант: к.ф.-м.н., Сошенко В. В.

Рецензент: д.ф.-м.н., Халили Ф.Я.

Заведующий кафедрой: д.ф.-м.н. Попруженко С. В.

г. Москва

2025 г.

Содержание

1	Введение	5
1.1	Обзор литературы	6
1.2	Азотно-вакансионный центр окраски в алмазе	9
1.3	Энергетические уровни NV центра	10
2	Дисперсионное считывание	11
2.1	Гамильтониан системы	12
2.2	Уравнение Ланжевена	13
2.3	Линейный отклик системы в резонаторе	15
2.4	Коэффициенты отражения и пропускания	17
2.5	Линейный отклик единичного кубита	18
2.6	Линейный отклик многоуровневой системы	20
2.7	Резонатор с ортогональными модами	22
2.8	Взаимодействие мод	23
3	Численная оценка чувствительности	24
3.1	Определение фазы при помощи квадратурного демодулятора	24
3.2	Соотношение сигнал-шум	25
3.3	Ошибка измерения магнитного поля δB	27
3.4	Сравнение двух методов	28
3.5	Порог чувствительности спиновой проекции	30
4	Заключение	31
A	Исключение не резонансного слагаемого	32
B	Коэффициент связи g	32
C	Время оптической инициализации спина T_1^{op}	33
D	Переход во вращающуюся систему отсчёта	34

1 Введение

В современном мире многие задачи требуют высокоточного измерения магнитного поля. Это и георазведка полезных ископаемых, и детектирование ферромагнитных объектов вблизи поверхности земли, и сканирование активности головного мозга человека, а также дефектоскопия и поиск утечек в газопроводах. На данный момент, наиболее чувствительные к магнитному полю приборы это сверхпроводящие квантовые интерферометры. Однако, сделать их достаточно компактными пока не представляется возможным ввиду необходимости использования больших установок для охлаждения чувствительного элемента до криогенных температур.

Существует много других видов магнитометров, которые имеют меньшую чувствительность, но выигрывают по другим параметрам: размеры, возможность векторного измерения, потребляемая мощность. К ним относятся атомные, протонные, на основе газовой ячейки, феррозондовые магнитометры. Особое место среди них занимают магнитометры на основе азотно вакансионных (NV) центров окраски в алмазе. Они работают на принципе Зеемановского расщепления. NV центры в алмазе - перспективная платформа для создания векторного магнитометра, поскольку имеют 4 ориентации. Если измерить отклик нескольких NV центров с разными осями, то можно получить не только амплитуду, но и направление магнитного поля. В настоящее время для обнаружения Зеемановского расщепления чаще всего используется оптически детектируемый магнитный резонанс (ОДМР). Например, в работе [1] получены рекордные чувствительности: $460 \text{ fT}/\sqrt{Hz}$ для постоянного и $210 \text{ fT}/\sqrt{Hz}$ для переменного магнитного поля. Дальнейшее увеличение чувствительности магнитометра с использованием метода ОДМР сложно осуществимо. Альтернативный метод измерения частоты магнитного резонанса, который может увеличить чувствительность - дисперсионный. Основные параметры, которые влияют на чувствительность и улучшаются при дисперсионном считывании - ширина линии и контраст. Например, в работе [2] показано уменьшение ширины линии в 2 раза и усиление контраста в 19 раз при использовании

дисперсионного метода считывания.

Целью дипломной работы является исследование метода дисперсионного считывания магнитного резонанса азотно-вакансионного центра окраски в алмазе для применения в квантовой магнитометрии.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Теоретическая модель взаимодействия микроволнового резонатора с ансамблем NV центров с внешним полем.

2. Проведена оценка чувствительности NV магнитометра с использованием метода дисперсионного измерения к измерению частоты магнитного резонанса.

1.1 Обзор литературы

На сегодняшний день многие научные группы работают с квантовыми сенсорами на основе азотно-вакансионных (NV) центров окраски в алмазе. Уже существует множество теоретических и экспериментальных работ по считыванию состояний NV центров оптическим способом, за счёт анализа интенсивности люминесценции. Несмотря на это, в последнее время стали появляться работы по считыванию состояний NV центров за счёт измерения дисперсионного сдвига частоты в резонаторе, что позволит улучшить чувствительность к магнитному полю.

При выполнении квантовых измерений в некоторых случаях оказывается выгодно измерять не непосредственный отклик квантовой системы, а отклик резонатора, внутрь которого помещена эта квантовая система. При таком подходе на резонатор воздействуют микроволновым полем и отслеживают его пропускание или отражение в зависимости от состояния квантовой системы, таким образом, пропускание зависит от эффективной частоты резонатора. Данная методика получила название дисперсионное считывание.

Одной из первых теоретических работ, на эту тему стала работа [3], в которой авторы ввели общую теорию ввода-вывода для квантовых диссипативных систем, в которой возможно связать выход с входом резонатора

через внутреннюю динамику системы. Далее, в работе [4] получено выражение для коэффициента пропускания резонатора за пределами приближения вращающейся волны, описана теория линейного отклика. Работа [5] подробно описывает вопросы, связанные с теорией линейного отклика системы, находящейся в немарковском окружении. Большинство аналитических расчётов строятся на модели Джейнса-Каммингса. Модель позволяет удобно задавать параметры системы и получать функцию линейного отклика без громоздких вычислений. Однако важно отметить, что она не учитывает коллективные эффекты и предполагает наличие лишь одной (в простейшем случае двухуровневой) квантовой системы внутри резонатора. Таким образом на сегодняшний день существует уже множество аналитических подходов для описания дисперсионного считывания.

Методика дисперсионного измерения(считывания) используется в ряде работ для создания квантовых сенсоров магнитного поля как на основе NV, так и на базе других соединений. В качестве примера датчика не на NV центре можно привести работу [6], в которой авторы использовали дефекты Cr^{3+} в кристалле сапфира (Al_2O_3) и получили прибор с чувствительностью $9.7pT/\sqrt{Hz}$.

В работе [7] показано, что дисперсионное считывание NV центров в резонаторе позволяет получить чувствительность выше чем дробовой шум оптического считывания (optical-readout shot-noise limit). Не взаимодействуя напрямую с квантовой системой система считывания не будет разрушать квантовое состояние, что по ожиданиям авторов работы приведёт к превосходству дисперсионного метода считывания над оптическим.

В работе [2] исследована возможность создания магнитного сенсора на основе NV, которая по ожиданиям авторов работы позволит получить прибор с чувствительностью $3pT/\sqrt{Hz}$, что превосходит результат магнитометра на основе дефектов Cr^{3+} в кристалле сапфира. Важной особенностью описанных выше датчиков является устранение множества шумов и ошибок считывания, связанных с отсутствием оптического взаимодействия с квантовой системой.

Одной из важных отличительных особенностей данной работы от уже существующих является рассмотрение резонатора с двумя ортогональными модами. При дисперсионном считывании измеряется величина отражённого сигнала. Из этого сигнала нужно выделить полезный сигнал, несущий информацию о магнитном резонансе квантовой системы. Применение резонатора с 2 ортогональными модами позволяет легче выделять полезный сигнал и уменьшить влияние дробовых шумов на чувствительность. При совпадении частоты поля в первой моде и двухуровневой системы, на системе появится рассеяние в ортогональную моду. Как следствие, при считывании порта резонатора, ассоциирующегося со второй модой, мы получим чистый сигнал, из которого не нужно отфильтровывать часть, отражённую резонатором.

1.2 Азотно-вакансионный центр окраски в алмазе

Система, на основе которой может быть построен высокоточный квантовый сенсор, должна обладать следующими важными свойствами: она должна иметь большое время когерентности, должна быть технологична в изготовлении, обладать возможностью эффективной подготовки и считывания состояний. Всеми этими свойствами обладает азотно-вакансионный центр окраски (NV центр), показанный на (рис. 1). В дополнение к этому датчики на основе NV центра могут работать при комнатной температуре.

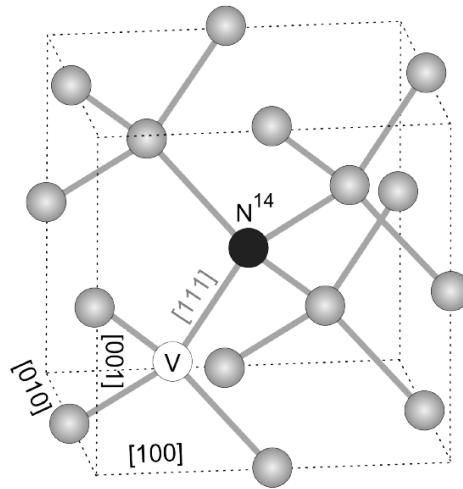


Рис. 1: NV центр в алмазе

NV центр является дефектом кристаллической решётки алмаза, который состоит из замещённого азотом атома углерода и отсутствующего атома углерода в соседнем узле (вакансии). В области вакансии находится 5 электронов. Дефект может быть заряжен положительно (NV^+), отрицательно (NV^-) или может быть не заряжен (NV^0). Положительно и нейтрально заряженный центр не представляет интереса, потому что первый не обладает флюоресценцией, а у второго флюоресценция не зависит от состояния электронного спина [8].

Особый интерес представляет отрицательно заряженный центр NV^- . Он обладает ненулевым электронным спином и одним из самых длинных времён когерентности электронного спина ($T_2 = 1.8$ мс) [9] в твердотельных системах при комнатной температуре. Для нас интересен отрицательно заряженный центр, потому что интенсивность его флюоресценции зависит от

проекции спина электрона и обладает возможностью оптической накачки магнитных подуровней. В этом зарядовом состоянии в запрещённой зоне алмаза появляются несколько уровней, занятых четырьмя электронами. Дефект имеет спектры поглощения и излучения в видимой области в прозрачной алмазной матрице, поэтому NV центр также называют центром окраски.

1.3 Энергетические уровни NV центра

Уровни энергии NV-центра при комнатной температуре представлены 4 орбитальными уровнями, изображёнными на рис.2. Основное 3A_2 и возбуждённое состояние 3E центра являются триплетами с полным спином $S=1$. Основное состояние 3A_2 является триплетом с расщеплением 2.87 ГГц между состояниями с проекцией электронного спина $m_S = 0$ и $m_S = \pm 1$ в отсутствие магнитного поля. Это расщепление обусловлено спин-спиновым взаимодействием. Переход ${}^3A_2 \leftrightarrow {}^3E$ электрически дипольный, возбуждается излучением с длиной волны 637 нм. Наличие колебательных степеней свободы позволяет производить накачку излучением в более широком диапазоне длин волн 400-637 нм. Важным свойством перехода ${}^3A_2 \leftrightarrow {}^3E$ является сохранение проекции электронного спина, т.к. дипольный оператор перехода не влияет на спин электрона, а влияет только на орбитальную конфигурацию.

Между основным и возбуждённым состоянием имеется 2 синглетных уровня 1E и 1A_1 . Уровень 3E может распасться на уровень 1A_1 , близкий к нему по энергии с изменением мультиплетности. Из-за нечетности волновых функций соответствующих состояний и оператора перехода, переход с магнитного подуровня $m_S = 0$ уровня 3E запрещен, распад на синглетный подуровень возможен только с электронных магнитных подуровней $m_S = \pm 1$. Переход с синглета 1E на основной уровень 3A_2 происходит безызлучательно. Распад на основное состояние происходит преимущественно на электронный магнитный подуровень $m_S = 0$.

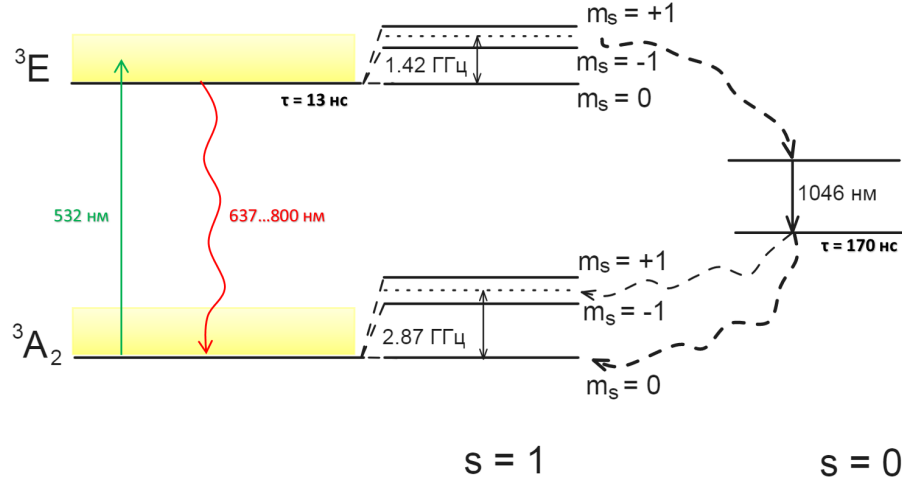


Рис. 2: Система энергетических уровней NV^- -центра при комнатной температуре. Жёлтые полосы - фоновое уширение. Зелёная стрелка - оптическая накачка. Красная стрелка - флуоресценция. Чёрная стрелка - излучение фотона в ИК диапазоне. Чёрные волнистые стрелки - переход без излучения.

2 Дисперсионное считывание

При выполнении квантовых измерений в некоторых случаях оказывается выгодно измерять не непосредственный отклик квантовой системы, а отклик резонатора, внутрь которого помещена эта квантовая система. При таком подходе на резонатор воздействуют микроволновым полем и отслеживают его пропускание в зависимости от состояния квантовой системы. Пропускание зависит от эффективной частоты резонатора. Покажем как изменится эффективная частота резонатора в связи с наличием квантовой системы в случае слабой связи $g \ll \omega_{cav} - \omega_{sys}$. Для этого рассмотрим тривиальный случай, аналогично работе [10]: одномодовый резонатор с двухуровневой квантовой системой. Безразмерный Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = H_{sys} + H_{cav} + H_{sys-cav} = \frac{\omega_{sys}}{2} \sigma^+ \sigma + \omega_{cav} a^+ a + g(\sigma^+ a + \sigma a^+) \quad (1)$$

Теперь запишем этот гамильтониан в базисе $|\text{sys} = 0, \text{cavity} = N\rangle, |\text{sys} = 1, \text{cavity} = N-1\rangle$:

$$H = \begin{pmatrix} \omega_{cav}N - \frac{\omega_{sys}}{2} & g\sqrt{N} \\ g\sqrt{N} & \omega_{cav}(N-1) + \frac{\omega_{sys}}{2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

После чего найдём собственные состояния системы:

$$|H - IE| = \begin{vmatrix} \omega_{cav}N - \frac{\omega_{sys}}{2} - E & g\sqrt{N} \\ g\sqrt{N} & \omega_{cav}(N-1) + \frac{\omega_{sys}}{2} - E \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

$$E_{\pm} = \omega_{cav}(N - \frac{1}{2}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + 4g^2N}, \quad \Delta = \omega_{cav} - \omega_{sys} \quad (4)$$

В режиме слабой связи квантовой системы с резонатором $g \ll \Delta$, тогда подкоренное выражение разложим в ряд и получим:

$$E_- = \omega_{cav}N - \frac{\omega_{sys}}{2} + \frac{g^2N}{\Delta}$$

$$E_+ = \omega_0(N-1) + \frac{\omega_{sys}}{2} - \frac{g^2N}{\Delta}$$

Этот эффект называется дисперсионным сдвигом. Он заключается в энергетическом сдвиге состояний системы в зависимости от состояний квантовой системы. По изменению частоты дисперсионного сдвига мы будем детектировать состояние квантовой системы.

2.1 Гамильтониан системы

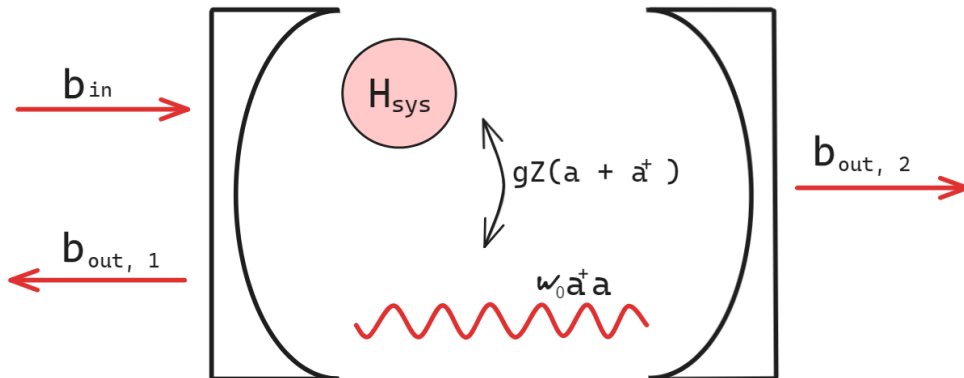


Рис. 3: Резонатор, связанный с входящими/выходящими модами, а также с квантовой системой, находящейся внутри; $b_{in}, b_{out,1}, b_{out,2}$ - падающее, отражённое и прошедшее поле соответственно.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из атома H_{sys} , резонатора H_{cav} , внешнего излучения H_{ex} , рис.3:

$$H = H_{sys} + H_{cav} + H_{ex} + H_{I1} + H_{I2} \quad (5)$$

Кубит: $H_{sys} = \frac{\omega_{sys}}{2}\sigma_z$, где ω_{sys} - частота перехода между магнитными подуровнями $m_s = 0$ и $m_s = -1$ основного состояния NV центра.

Резонатор: $H_{cav} = \omega_{cav}a^+a$, где ω_{cav} - частота моды резонатора, a^+ , a - операторы рождения/уничтожения фотонов в моде резонатора.

Внешнее поле: $H_{ex} = \sum_k \omega_k b_k^+ b_k$, где ω_k - частота k моды внешнего поля, b_k^+ , b_k - операторы рождения/уничтожения фотонов в k моде внешнего поля.

Взаимодействие моды резонатора и мод внешнего поля:

$$H_{I1} = \sum_k \gamma_k (b_k^+ a + a^+ b_k)$$

Взаимодействие резонатора и ДУС:

$$H_{I2} = -\vec{d}\vec{E} = \underbrace{-(\vec{d}\vec{n})\varepsilon f(\vec{r})}_g \underbrace{(\sigma + \sigma^+)}_Z (a + a^+) = gZ(a + a^+),$$

где $\vec{E} = \vec{n}f(\vec{r})\varepsilon(a + a^+)$, ε - амплитуда поля для одиночного фотона резонатора, $f(\vec{r})$ - описывает пространственную моду резонатора (например $f = \sin(\frac{\omega_{cav}z}{c})$). В случае кубита $Z = \sigma_x$.

Получим гамильтониан:

$$H = \frac{\omega_{sys}}{2}\sigma_z + \omega_{cav}a^+a + \sum_k \omega_k b_k^+ b_k + \sum_k \gamma_k (b_k^+ a + a^+ b_k) + gZ(a + a^+) \quad (6)$$

2.2 Уравнение Ланжевена

Из полученного выше Гамильтониана можно вывести линеаризованные квантовые уравнения Ланжевена, которые определяют динамику системы, если добавить к уравнениям движения Гейзенберга члены диссипации.

Для начала рассмотрим лишь резонатор с внешним полем, т.е.

$$H = H_{cav} + H_{ex} + H_{I1} = \omega_{cav} a^+ a + \sum_k \omega_k b_k^+ b_k + \sum_k \gamma_k (b_k^+ a + a^+ b_k) \quad (7)$$

Тогда запишем уравнения движения a и b с помощью уравнения Гейзенберга:

$$\begin{cases} \dot{a} = i[H, a] = -i\omega_{cav}a - i \sum_k \gamma_k b_k \\ \dot{b}_k = i[H, b_k] = -i\omega_k b_k - i\gamma_k a \end{cases}$$

Здесь использованы коммутационные соотношения:

$$[a, a^+] = 1,$$

$$[b_n, b_m] = \delta_{nm}.$$

Для решения системы проинтегрируем уравнение на моды внешнего поля и подставим в уравнение для мод резонатора. Интегрируя уравнение на b_k получим:

$$b_k(t) = b_k(0)e^{-i\omega_k t} - i\gamma_k \int_0^t d\tau a(\tau)e^{-i\omega_k(t-\tau)} \quad (8)$$

Полученный результат подставим в уравнение для моды резонатора:

$$\dot{a} = -i\omega_{cav}a - i \sum_k \gamma_k b_k = -i\omega_{cav}a - i \sum_k \gamma_k b_k(0)e^{-i\omega_k t} - \sum_k \gamma_k^2 \int_0^t d\tau a(\tau)e^{-i\omega_k(t-\tau)} \quad (9)$$

Чтобы решить получившееся уравнение, воспользуемся следующим приближением. Рассмотрим интеграл в 3 слагаемом. Экспонента $e^{-i\omega_k(t-\tau)}$ быстро осциллирует при $\tau \ll t$, а основной вклад даёт лишь при $\tau \approx t$. Физически это означает, что влияние внешнего поля на систему зависит только от её текущего состояния. Такое приближение называется Марковским. Тогда аргумент подынтегральной функции можно заменить на t и распространить пределы интегрирования на бесконечность. Положим $a(t) = \tilde{a}(t)e^{-i\omega_{cav}t}$:

$$\sum_k \gamma_k^2 \int_0^t d\tau a(\tau) e^{-i\omega_k(t-\tau)} = \sum_k \gamma_k^2 \int_0^t d\tau \tilde{a}(\tau) e^{i\tau(\omega_k - \omega_{cav})} e^{-i\omega_k t} =$$

$$\sum_k \gamma_k^2 a(t) \int_0^\infty d\tau e^{i\tau(\omega_k - \omega_{cav})} = a(t) 2\pi \sum_k \gamma_k^2 \delta(\omega_k - \omega_{cav}) = \varkappa a(t),$$

$$i \sum_k \gamma_k b_k(0) e^{-i\omega_k t} = \sum_\nu \sqrt{\varkappa_\nu} b_{in,\nu}.$$

$$[b_{in}(t), b_{in}^+(t')] = \delta(t - t')$$

Здесь $\varkappa = 2\pi \sum_k \gamma_k^2 \delta(\omega_k - \omega_{cav})$. Подставим полученные выражения в уравнение для моды резонатора, добавив в гамильтониан член взаимодействия резонатора с кубитом:

$$\dot{a} = -i\omega_{cav}a - igZ - \frac{\varkappa}{2}a - \sum_\nu b_{in,\nu} \sqrt{\varkappa_\nu}, \quad (10)$$

где $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa$ и $b_{out,\nu} - b_{in,\nu} = \sqrt{\varkappa_\nu}a$. Добротность резонатора определяется соотношением $Q = \omega_{cav}/\varkappa$.

2.3 Линейный отклик системы в резонаторе

Поскольку нас не интересуют квантовые флуктуации поля резонатора, рассмотрим уравнение (10) в его классическом пределе как уравнение движения для средних значений $a \equiv \langle a \rangle_t$ и $Z \equiv \langle Z \rangle_t$. Для дальнейшего описания системы выразим Z через a . В совокупности с уравнениями на прошедшее/отражённое поле $b_{out,\nu}, b_{in}$ это позволит нам решить уравнение (10) относительно a . Заменив a и a^+ на классические амплитуды a и a^* , получим следующий гамильтониан взаимодействия резонатора с кубитом:

$$H_{I2} = gZ(a + a^*) = Zf(t)$$

Тогда полный гамильтониан системы кубит-резонатор будет иметь вид:

$$H = \underbrace{H_{sys} + H_r}_{H_0} + \underbrace{H_{I2}}_V = \underbrace{\frac{\omega_{sys}}{2}\sigma^+\sigma + \omega_{cav}a^+a}_{H_0} + \underbrace{gZ(a + a^+)}_V = H_0 + V \quad (11)$$

Для матрицы плотности ρ запишем уравнение фон Неймана:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho].$$

Если возмущение мало, то в каждый момент времени основное поведение системы определяется невозмущенным гамильтонианом H_0 , и $V(t)$ несколько изменяет эволюцию $\psi_0(t)$. Точную волновую функцию $\psi(t)$ будем искать в виде:

$$\psi(t) = U(t)\tilde{\psi}(t),$$

где $U(t) = e^{-iH_0 t}$.

Тогда из уравнения для $U_0(t)$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_0 = H_0U_0,$$

совместно с уравнением Шрёдингера:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}(U_0\tilde{\psi}(t)) = i\frac{\partial U_0}{\partial t}\tilde{\psi}(t) + iU_0\frac{\partial\tilde{\psi}(t)}{\partial t} = H_0U_0\tilde{\psi} + VU_0\tilde{\psi}.$$

Получим:

$$iU_0\frac{\partial\tilde{\psi}(t)}{\partial t} = VU_0\tilde{\psi}, \quad i\frac{\partial\tilde{\psi}(t)}{\partial t} = U_0^+VU_0\tilde{\psi} = \tilde{V}\tilde{\psi}.$$

Тогда в представлении взаимодействия $\tilde{V} = U_0^+VU_0$

Перепишем уравнение фон Неймана в представлении взаимодействия:

$$\dot{\tilde{\rho}} = i[\tilde{\rho}, \tilde{V}] = i[\tilde{\rho}, \tilde{Z}(t)]f(t). \quad (12)$$

Проинтегрировав уравнение для матрицы плотности, получим:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 - i \int_{t_0}^t d\tau [\tilde{Z}(\tau), \tilde{\rho}(\tau)]f(\tau) \quad (13)$$

Воспользуемся формулой Кубо: $A_t = A_t^{(0)} - i \int_{t_0}^t d\tau \langle [A(t), V(\tau)] \rangle_0$, чтобы получить выражение для Z :

$$Z_t = Z_t^{(0)} - i \int_{t_0}^t d\tau \text{Tr} \left([\tilde{Z}(t, \tau), Z(t)] \rho_0(\tau) \right) f(\tau) = Z_t^{(0)} + \int d\tau \chi(t, \tau) f(\tau), \quad (14)$$

где

$$\chi(t, \tau) = -i \langle [\tilde{Z}(t, \tau), Z(t)] \rangle_0 \theta(t - \tau). \quad (15)$$

Функцию линейного отклика системы χ обычно называют восприимчивость.

2.4 Коэффициенты отражения и пропускания

Нас интересует зависимость коэффициентов отражения и пропускания от частоты. Для перехода от временной к частотной зависимости сделаем Фурье преобразование Z_t :

$$Z_\omega = g\chi_\omega(a_\omega + a_{-\omega}^*),$$

и перепишем уравнение на моду резонатора в Фурье виде:

$$i(\omega - \omega_{cav})a_\omega - ig^2\chi_\omega(a_\omega + a_{-\omega}^*) - \frac{\varkappa}{2}a_\omega = \sum_{\nu} b_{in,\nu}\sqrt{\varkappa_\nu} \quad (16)$$

Уравнение для амплитуды резонатора a_ω совместно с уравнением для $a_{-\omega}^*$ образуют замкнутую СЛАУ:

$$M \begin{pmatrix} a_\omega \\ a_{-\omega}^* \end{pmatrix} = i \sum_{\nu=1,2} \sqrt{\varkappa} \begin{pmatrix} b_{in,\nu}(\omega) \\ b_{in,\nu}^*(-\omega) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где введены обозначения:

$$M = \begin{pmatrix} A(\omega) & g^2\chi(\omega) \\ g^2\chi^*(-\omega) & A^*(-\omega) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A(\omega) = \omega_{cav} - \omega + g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}.$$

Такое уравнение можно точно решить относительно a_ω , но тогда дальнейшие выражения получатся очень громоздкими. Можно сделать ряд при-

ближений, чтобы пренебречь слагаемым $a_{-\omega}^*$, исходя из физических предположений. Для получения интенсивного и детектируемого отклика резонатора, резонатор должен обладать большой добротностью $Q = \frac{\omega_{cav}}{\varkappa} \gg 1$, должен быть приближен к резонансу $|\omega - \omega_{cav}| \ll \omega_{cav}$, и дисперсионный сдвиг должен быть меньше частоты резонатора $\delta\omega = g^2 Re\chi(\omega)$. Итого, получаем неравенство:

$$\varkappa, |\omega - \omega_{cav}|, g^2 Re\chi(\omega) \ll \omega_{cav}. \quad (18)$$

Исходя из этих предположений получим обратную матрицу M^{-1} , как показано в Приложении А: $M^{-1} = \begin{pmatrix} A(\omega)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Отсюда следует, что вычисление a_ω с таким M^{-1} , эквивалентно отображению слагаемого с $a_{-\omega}^*$:

$$i(\omega - \omega_{cav})a_\omega - ig^2\chi_\omega a_\omega - \frac{\varkappa}{2}a_\omega = \sum_\nu b_{in,\nu}\sqrt{\varkappa_\nu} \quad (19)$$

Совместно с уравнениями на a_{in} и a_{out} получим коэффициенты прохождения и отражения соответственно:

$$t = \frac{b_{out,2}}{b_{in,1}} = \frac{i\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2}}{\omega_{cav} - \omega + g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}} \quad (20)$$

$$r = \frac{b_{out,1}}{b_{in,1}} = 1 + \frac{i\varkappa_1}{\omega_{cav} - \omega + g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}} \quad (21)$$

По сравнению с отсутствием резонатора ($g=0$), максимум прохождения будет смещён относительно $\omega = \omega_{cav}$ на $\delta\omega = g^2 Re\chi(\omega)$

2.5 Линейный отклик единичного кубита

Для полноценного построения аналитической модели считывания состояния системы в резонаторе нужно научиться находить функцию линейного отклика (восприимчивость) системы. Для этого начнём с простейшего случая - единичного кубита в резонаторе с $H_{sys} = \frac{\omega_{sys}}{2}\sigma_z$ и $Z = \sigma_x$. Для нахождения χ , первым делом найдём $\tilde{Z}(t)$. При вычислениях будем пользоваться

следующим гамильтонианом:

$$H = \underbrace{H_{sys} + H_{cav}}_{H_0} + \underbrace{H_{I2}}_V = \underbrace{\frac{\omega_{sys}}{2}\sigma_z + \omega_{cav}a^+a}_{H_0} + \underbrace{g\sigma_x(a + a^+)}_V = H_0 + V \quad (22)$$

Операторы в представлении взаимодействия устроены следующим образом:

$$\frac{da}{dt} = i[H_0, a] = i[\omega_{cav}a^+a, a] = -i\omega_{cav}a \rightarrow a(t) = ae^{-i\omega_{cav}t} \quad (23)$$

$$\frac{d\sigma_{\pm}}{dt} = i[H_0, \sigma_{\pm}] = \pm\omega_{sys}\sigma_{\pm} \rightarrow \sigma_{\pm}(t) = \sigma_{\pm}e^{\pm i\omega_{sys}t} \quad (24)$$

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = 0 \rightarrow \sigma_z(t) = \sigma_z$$

$$\begin{cases} \sigma_x(t) = \sigma_x \cos(\omega_{sys}t) - \sigma_y \sin(\omega_{sys}t) \\ \sigma_y(t) = \sigma_x \sin(\omega_{sys}t) + \sigma_y \cos(\omega_{sys}t) \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом $\tilde{Z}(t) = \sigma_x \cos(\omega_{sys}t) - \sigma_y \sin(\omega_{sys}t)$. Вычислив след в $\chi(t)$ и введя скорость распада когерентного состояния γ , ассоциирующегося с T_2^* , получим выражение:

$$\chi(t) = 2 \langle \sigma_z \rangle \sin(\omega_{sys}t) e^{\frac{-\gamma t}{2}} \theta(t) \quad (26)$$

Выполнив Фурье-преобразование найдём:

$$\chi(\omega) = 2 \int_0^\infty e^{\frac{-\gamma t}{2}} \sin(\omega_{sys}t) e^{i\omega t} dt \langle \sigma_z \rangle = \left(\frac{1}{\omega_{sys} - \omega - i\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\omega_{sys} + \omega + i\frac{\gamma}{2}} \right) \langle \sigma_z \rangle \quad (27)$$

В случае двухуровневой системы среднее значение $\langle \sigma_z \rangle$ определяется разностью населённостей $p_1 - p_2$. Наличие диссипации кубита устраняет расхождения в $\chi(\omega)$ и ранее введённое требование $g \ll |\omega_{cav} - \omega_{sys}|$ становится несущественным, пока система находится в режиме линейного отклика.

2.6 Линейный отклик многоуровневой системы

Теперь сделаем обобщение и перейдём к рассмотрению многоуровневой системы. Положим матрицу плотности диагональной в базисе собственных состояний H_{sys} , тогда $\rho = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$ и $H_{sys}|n\rangle = E_n|n\rangle$ с собственными энергиями E_n . Тогда восприимчивость будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\chi(\omega) &= -i \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega+i\gamma)\tau} \langle [Z(\tau), Z(0)] \rangle \\
&= -i \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega+i\gamma)\tau} \sum_{n,m} P_n (Z_{nm}(\tau) Z_{mn} - Z_{nm} Z_{mn}(\tau)) \\
&= -i \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega+i\gamma)\tau} \sum_{n,m} P_n (Z_{nm} Z_{mn} e^{i\epsilon_{nm}\tau} - Z_{nm} Z_{mn} e^{-i\epsilon_{nm}\tau}) \\
&= -i \sum_{n,m} (P_n - P_m) Z_{nm} Z_{mn} \int_0^\infty d\tau e^{i(\epsilon_{nm} + \omega + i\gamma)\tau} \\
&= \sum_{n,m} (P_n - P_m) \frac{Z_{nm} Z_{mn}}{\epsilon_{nm} + \omega + i\gamma} \\
\chi_\omega &= \sum_{m,n} \frac{(p_m - p_n) |Z_{mn}|^2}{\omega + E_m - E_n + i\frac{\gamma_{mn}}{2}}
\end{aligned} \tag{28}$$

Для численного вычисления населённостей воспользуемся уравнением Линдблада:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_j L_j \rho L_j^\dagger - \frac{1}{2} \{L_j^\dagger L_j, \rho\}. \tag{29}$$

В качестве Гамильтониана возьмём $H = -\frac{1}{2}\omega_{sys}\sigma_z - \Omega_R\sigma_x \cos \omega t$, но для ускорения расчётов перейдём в приближение вращающейся волны RWA: $H_{RWA} = \frac{\omega - \omega_{sys}}{2}\sigma_z - \frac{\Omega_R}{2}\sigma_x$. Диссипаторы L_j , отвечают за накачку и релаксацию уровней системы. Они определяются характерными временами оптической накачки $T_1^{op} = 160$ мкс, релаксации из возбуждённого состояния $T_1 = 5$ мс, теплового возбуждения $T_1^{reverse} = T_1$ и временем декогеренции

$T_2^* = 10$ мкс. Вычисление коэффициента связи g и времени оптической инициализации T_1^{op} вынесено в Приложения В и С, соответственно. Для каждого значения отстройки, будем искать стационарное значение населённости (Рис. 4.а и 4.б). Далее, для каждого значения отстройки и населённости, ей соответствующей, будем находить значение коэффициента пропускания (Рис. 4.с)

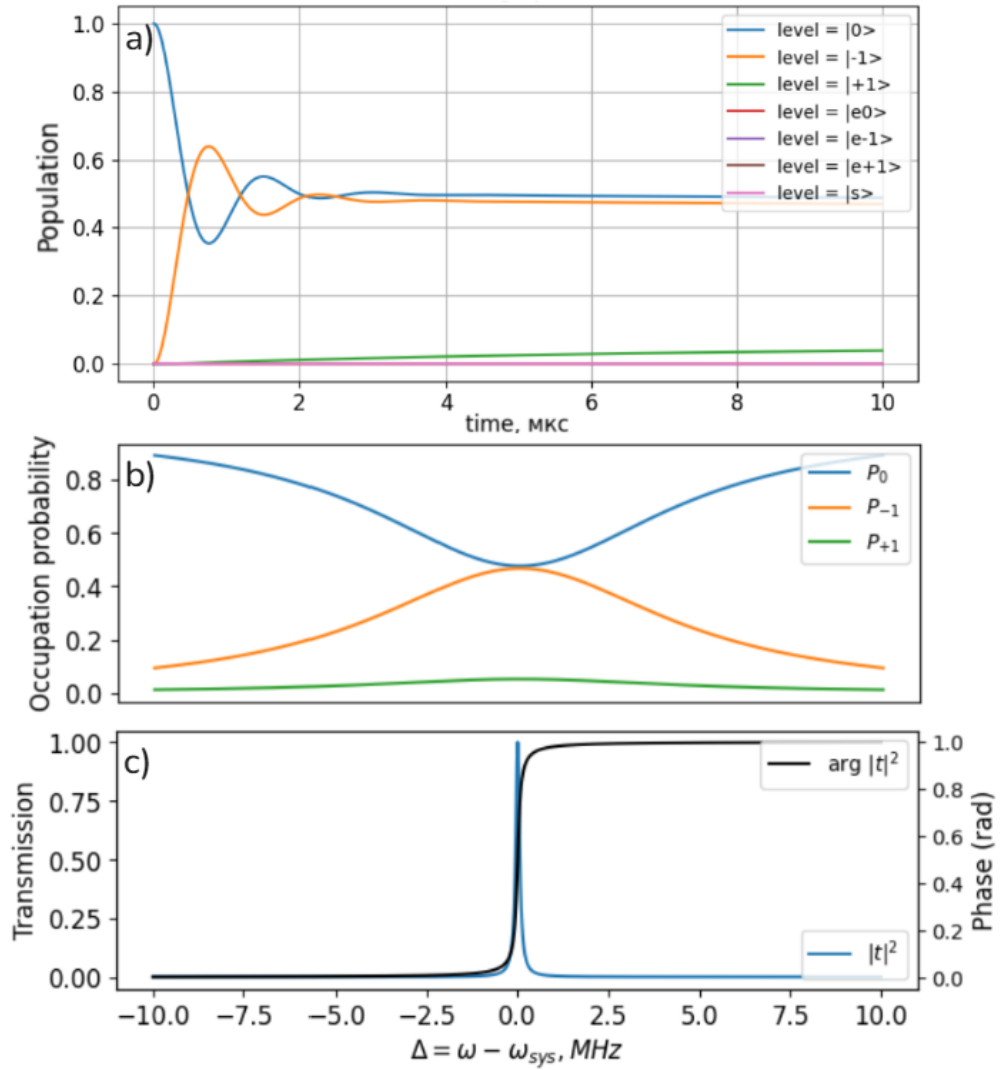


Рис. 4: а) Численное решение уравнения Линдблада; б) Зависимость населённости уровней основного состояния от отстройки; с) Зависимость коэффициента пропускания и фазы от отстройки.

2.7 Резонатор с ортогональными модами

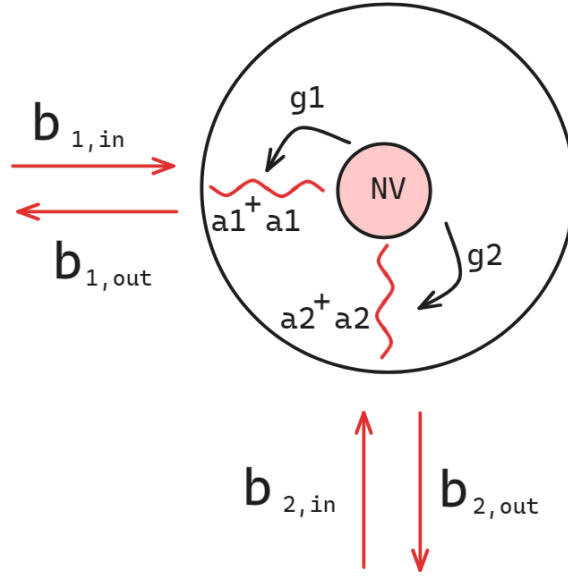


Рис. 5: Схема резонатора с ортогональными модами

В качестве метода для улучшения считывания частоты системы в резонаторе мы предлагаем использовать резонатор с двумя геометрически ортогональными модами, рис 5. Идея использования ортогональных мод заключается в измерении коэффициента пропускания резонатора из порта 1 в порт 2. При условии что внешние поля в двух портах резонатора связаны каждый со своей модой пропускание должно равняться нулю в случае, когда частота поля сильно отстроена от частоты резонанса двухуровневой системы (ДУС). При совпадении частоты поля и ДУС будет появляться рассеяние на ДУС и моды 1 (a_1) в моду 2 (a_2), и как следствие появится сигнал на выходе 2. Чтобы определить вид взаимодействия спина-1/2 с ортогональной модой, подействуем на исходный гамильтониан взаимодействия оператором поворота $U = \exp(-i\sigma_z \frac{\pi}{4})$. Тогда получим:

$$U(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)U^\dagger = i(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger) \quad (30)$$

В таком случае полный гамильтониан взаимодействия будет иметь вид:

$$H_{int} = g_1(\sigma_+ a_1 + \sigma_- a_1^\dagger) + ig_2(\sigma_+ a_2 - \sigma_- a_2^\dagger) \quad (31)$$

А соответствующие модам a_1 и a_2 уравнения Ланжевена, эквивалентны 19:

$$i(\omega_{ex} - \omega_1)a_1 - ig_1\chi_1(g_1a_1 + ig_2a_2) - \frac{\kappa_1}{2}a_1 = b_{1,in}\sqrt{\kappa_1} \quad (32)$$

$$i(\omega_{ex} - \omega_2)a_2 - g_2\chi_2(g_1a_1 + ig_2a_2) - \frac{\kappa_2}{2}a_2 = b_{2,in}\sqrt{\kappa_2} \quad (33)$$

$$b_{1,out} - b_{1,in} = a_1\sqrt{\kappa_1} \quad (34)$$

$$b_{2,out} = a_2\sqrt{\kappa_2}, \quad b_{2,in} = 0 \quad (35)$$

В данной системе нас интересует $S_{21} = \frac{b_{2,out}}{b_{1,in}}$, выражение для которого имеет вид:

$$S_{21} = \frac{g_1g_2\chi_2\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{\left(i(\omega_{ex} - \omega_1) - ig_1^2\chi_1 - \frac{1}{2}\kappa_1\right)\left(i(\omega_{ex} - \omega_2) - ig_2^2\chi_2 - \frac{1}{2}\kappa_2\right) + g_1^2g_2^2\chi_1\chi_2} \quad (36)$$

2.8 Взаимодействие мод

Геометрически ортогональные моды не будут взаимодействовать друг с другом, однако на практике, добиться идеальной ортогональности невозможно. Поэтому моды будут взаимодействовать друг с другом с некоторым коэффициентом μ . Под взаимодействием мод, здесь мы понимаем воздействие одной из них, на детектор второй. Тогда в гамильтониане появится дополнительный член взаимодействия мод $H_{mode \ interaction} = \mu(a_1^+a_2 + a_2^+a_1)$. Коэффициент взаимодействия мод определим как $\mu = \mu_0 \sin(\theta)$, где θ - угол поворота антенны, относительно идеального (ортогонального второму детектору), а $\mu_0 = \frac{\omega_{cav}}{2Q}$. В итоге, коэффициент пропускания с учётом неидеальной ортогональности будет иметь вид 37:

$$S_{21} = \frac{(g_1g_2\chi + i\mu)\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{\left(i(\omega_{ex} - \omega_1) - ig_1^2\chi - \frac{1}{2}\kappa_1\right)\left(i(\omega_{ex} - \omega_2) - ig_2^2\chi - \frac{1}{2}\kappa_2\right) + g_1^2g_2^2\chi_1\chi_2 + \mu^2} \quad (37)$$

3 Численная оценка чувствительности

Выше мы рассмотрели два метода для определения частоты квантовой системы в резонаторе, основанных на измерении изменения фазы сигнала, прошедшего через резонатор. А именно, метод с одной и двумя ортогональными модами в резонаторе. В этом разделе сравним оба метода и выясним, какой из них вносит меньшую ошибку в измерение частоты квантовой системы.

3.1 Определение фазы при помощи квадратурного демодулятора

Для считывания фазы используется квадратурный демодулятор (рис. 6 (a)), который вносит основные ошибки.

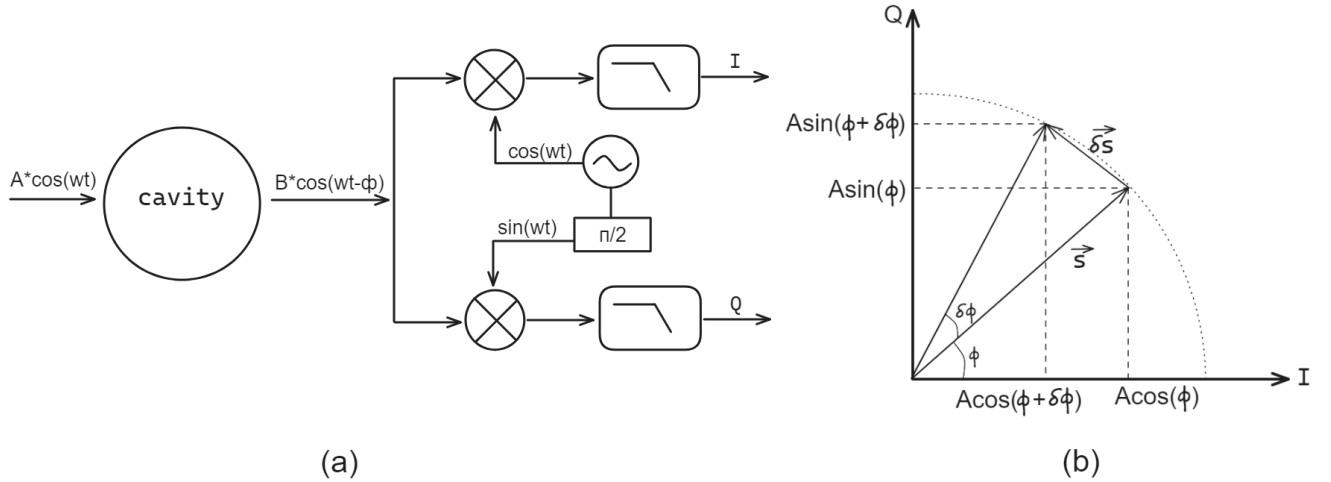


Рис. 6: (a) Схема работы квадратурного демодулятора. (b) Схематическое представление изменения фазы на графике в пространстве (I, Q)

Пусть на резонатор падает внешнее поле $A * \sin(\omega t)$, частота которого изменяется на фазу ϕ после прохождения резонатора $B * \cos(\omega t - \phi)$. Домножим сигнал на синфазный и квадратурный сигнал несущей частоты, после чего применим фильтр низких частот (ФНЧ) и получим два сигнала I и Q:

$$I = A * \cos(\phi), \quad Q = A * \sin(\phi)$$

$$RF = B \cos(\omega t - \phi) = B \cos(\omega t) \cos(\phi) + B \sin(\omega t) \sin(\phi) = I \cos(\omega t) + Q \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned}
RF * \cos(\omega t) &= I \cos^2(\omega t) + Q * \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \\
&= \frac{I}{2}(1 + \cos(2\omega t)) + \frac{Q}{2} \cos(2\omega t) \rightarrow \text{ФНЧ} \rightarrow I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RF * \sin(\omega t) &= I * \sin(\omega t) \cos(\omega t) + Q * \cos^2(\omega t) = \\
&= \frac{I}{2} \cos(2\omega t) + \frac{Q}{2}(1 + \cos(2\omega t)) \rightarrow \text{ФНЧ} \rightarrow Q
\end{aligned}$$

На выходе из демодулятора мы получаем синфазный сигнал $I = A_I \cos \phi$ и квадратурный $Q = A_Q \sin \phi$, которые вместе дают итоговый сигнал $S = I + iQ = Ae^{i\phi}$. Чтобы учесть наличие фазового шума, введём дополнительный сдвиг фазы $\delta\phi \ll 1$, которому соответствует сигнал смещения (сигнал фазового шума) $\delta S = S\delta\phi$ (рис. 6 (b)). таким образом, погрешность измерения фазы, вызванная фазовым шумом демодулятора имеет вид

$$\delta\phi = \frac{\delta S}{S}.$$

3.2 Соотношение сигнал-шум

Ошибки в определении синфазного и квадратурного сигналов δI и δQ возникают вследствие наличия шумов. Определим δI и δQ , основываясь на характеристиках системы и демодулятора. Квадратурный IQ демодулятор характеризуется коэффициентом шума NF. У имеющегося IQ демодулятора для входного поля с частотой 2800 МГц параметр NF находится в пределах $NF \in (12, 15) \text{ dB}$. Значение NF определяет частное отношений сигнал-шум SNR (signal-noise ratio) на входе в модулятор и выходе:

$$NF = 10 \log_{10} \frac{SNR_{IQ,in}}{SNR_{IQ,out}}. \quad (38)$$

Соотношение сигнал-шум определяется как отношение мощности сигнала к мощности шума. Так как сигнал S - это ток, он имеет размерность [A], при вычислениях будем полагать

$$SNR_{IQ,out} = \frac{S^2 R}{\delta S^2 R} = \frac{S^2}{\delta S^2} = \delta\phi^{-2}, \quad (39)$$

где R - сопротивление нагрузки. При определении SNR_{in} будем рассматривать только дробовой шум, по скольку в данной системе он преобладает над остальными шумами, как показано в работе [2]. Дробовой шум объясняется дискретной природой электромагнитного излучения, т.к. случайное распределение фотонов вносит шум в наши измерения. Он представляет собой неуменьшаемый минимальный уровень шума, присутствующий при считывании сигнала. Если число фотонов, полученных за фиксированный интервал времени, имеет среднее значение N , а фотоны расположены случайным образом, то вероятность обнаружения k фотонов за фиксированный промежуток времени определяется распределением Пуассона, при больших N переходящем в распределение Гаусса со средним отклонением $\sigma = \sqrt{N}$:

$$P_k = \frac{N^k e^{-N}}{k!} \rightarrow (N \gg 1) \rightarrow P_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(k-N)^2/2\sigma^2}$$

Для идеального детектора этот дробовой шум устанавливает предел точности, и равен среднему отклонению от распределения Гаусса σ . Таким образом:

$$SNR_{IQ,in} = N/\sqrt{N} = \sqrt{N}, \quad (40)$$

где N -число фотонов, вышедших из резонатора (попавших на детектор) за время наблюдения $\tau = 1$ с. Найдём N :

$$p_{out} = T p_{in} = \frac{N \hbar \omega_c}{\tau}, \quad T = |t|^2$$

$$N = \frac{T p_{in} \tau}{\hbar \omega_c}$$

Таким образом, погрешность измерения фазы сигнала $\delta\phi$ из 38, 39 и 40 будет:

$$SNR_{IQ,out} = SNR_{IQ,in} * 10^{-NF/10} = \sqrt{N} * 10^{-NF/10} \quad (41)$$

$$\delta\phi^{-2} = \sqrt{N} * 10^{-NF/10} \quad (42)$$

$$\delta\phi = N^{-1/4} * 10^{NF/20} \quad (43)$$

Полученное выражение будем использовать для определения погрешности измерения частоты $\delta\omega$.

3.3 Ошибка измерения магнитного поля δB

Чтобы установить ошибку в измерении магнитного поля по дробовым шумам δB , сначала найдём $\delta\omega$, после чего используем гиромагнитное соотношение $\delta\omega = \gamma\delta B$. Для определения ошибки $\delta\omega$ измеряемой частоты квантовой системы ω относительно реальной ω_0 , воспользуемся формулой:

$$\omega = \omega_0 + (\phi - \phi_0) \frac{d\omega}{d\phi}$$

$$\delta\omega = \delta\phi \left(\frac{d\phi}{d\omega} \right)^{-1} = 10^{\frac{NF}{20}} * \left(\frac{Tp_{in}\tau}{\hbar\omega_c} \right)^{-1/4} \left(\frac{d\phi}{d\omega} \right)^{-1} \quad (44)$$

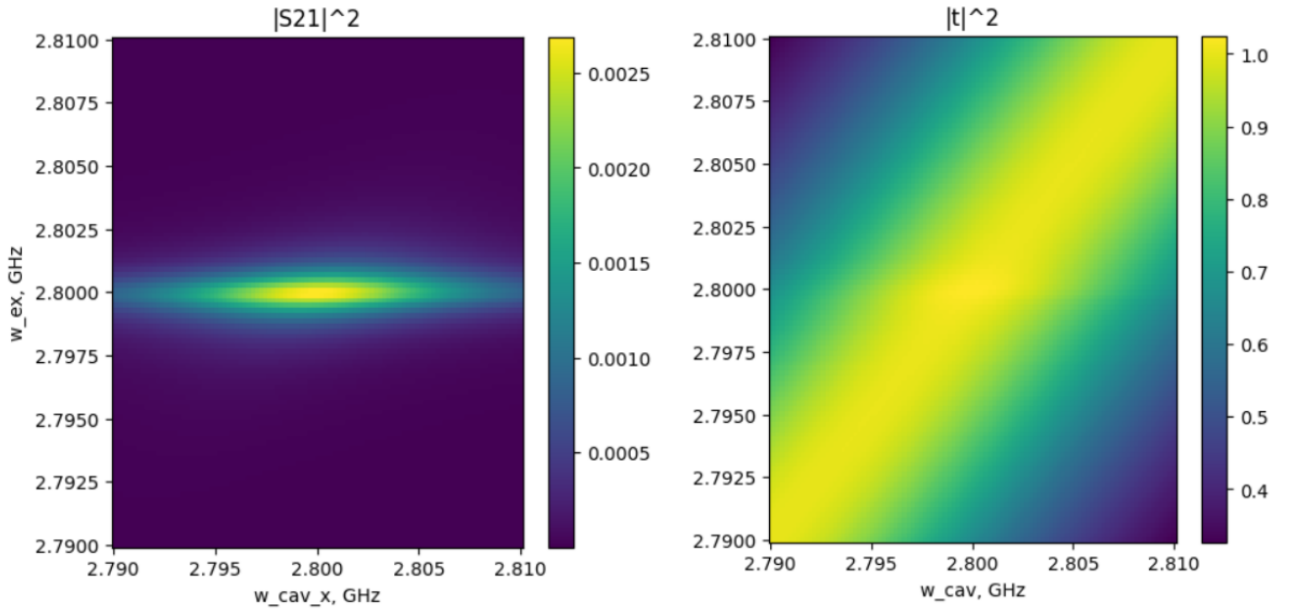


Рис. 7: Зависимость коэффициентов пропускания $|S21|^2$ для 2 и $|t|^2$ для 1-модового случая от частоты внешнего поля ω_{ex} и частоты резонатора ω_{cav} .

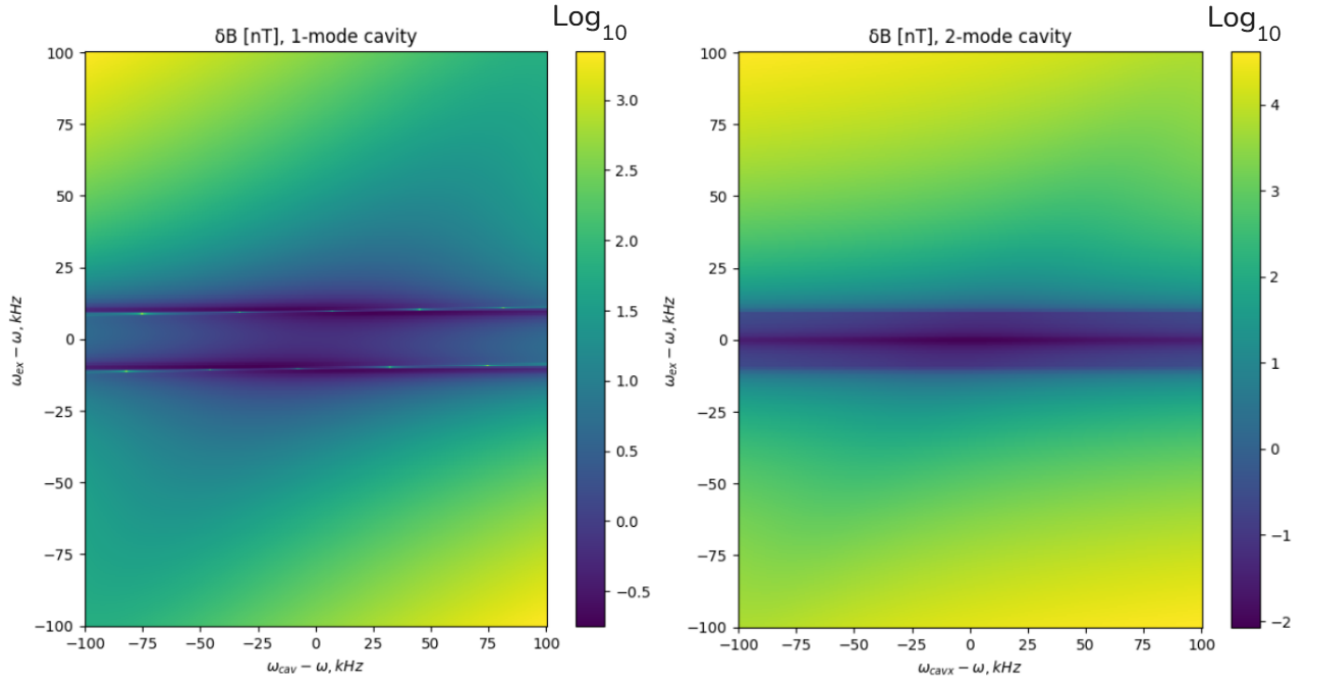


Рис. 8: Зависимость ошибки измерения внешнего поля для 1 и 2 модового резонатора от частоты внешнего поля ω_{ex} и частоты резонатора ω_{cav} .

Минимальная абсолютная ошибка для случая с 1 модой 177 pT, а для 2 модового случая минимальная ошибка 8 pT. Хотя во втором случае абсолютная ошибка меньше, однако, как видно из графика, ошибка для одномодового резонатора падает медленнее при удалении от резонанса, как видно из рис.8.

3.4 Сравнение двух методов

Теперь сравним ошибку в измерении частоты системы (внешнего магнитного поля) для резонатора с 1 и с 2 ортогональными модами, как показано на рис.9.

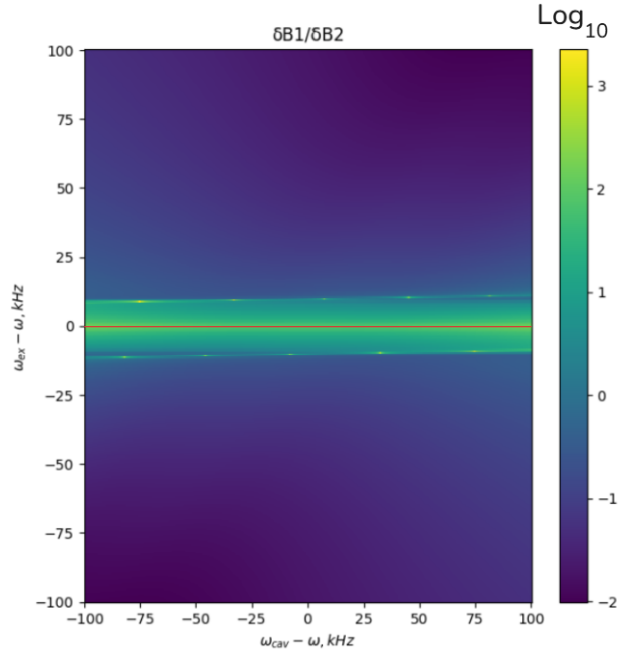


Рис. 9: Зависимость отношения ошибок измерения частоты для 2 и 1-модового случаев от частоты внешнего поля ω_{ex} и частоты резонатора ω_{cav} .

В качестве наглядного графика возьмём срез карты по резонансу внешнего поля с частотой системы 2.8 ГГц рис. 10 (красная линия на рис.9).

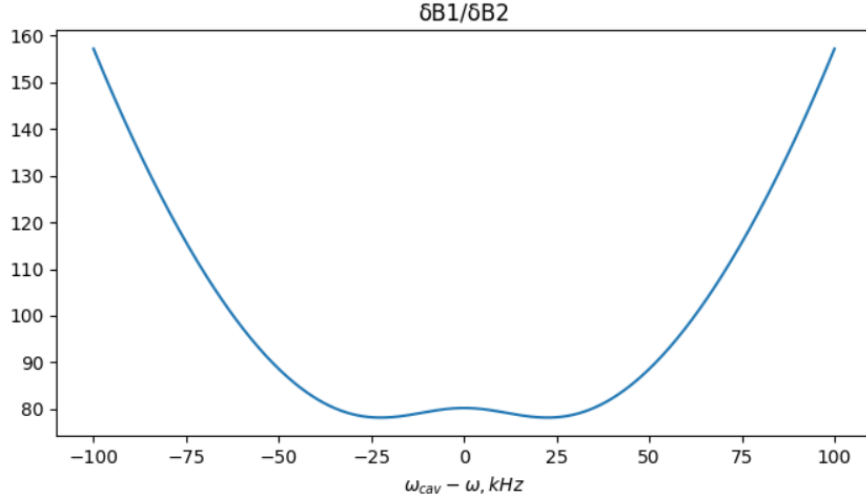


Рис. 10: Срез карты для случая резонанса частоты внешнего поля и квантовой системы.

Из рис. 10 видно, что в оптимальной для измерения точке 2.8 ГГц чувствительность к магнитному полю резонатора с 2 ортогональными модами в 78 раз лучше, чем в резонаторе с 1 модой. Однако, важно отметить, что коэффициент пропускания двухмодового резонатора построен в случае идеальной настройки антенны. То есть каждая антенна выставлена оптимально и не ловит другую моду.

Кроме дробовых шумов, наш магнитометр имеет и другие шумы, ограничивающие чувствительность. Далее, рассмотрим на сколько близко мы смогли приблизиться к этим ограничениям.

3.5 Порог чувствительности спиновой проекции

Одним из основных пределов магнитной чувствительности для атомного магнитометра является шум спиновой проекции, дающийся выражением [11]:

$$\eta_{sp} \approx \sqrt{3} \frac{\hbar}{g_e \mu_B} \frac{1}{\sqrt{N T_2^*}} \quad (45)$$

Здесь μ_B - магнетон Бора, g_e - Ланде Фактор основного состояния, N - число NV в образце. В нашем случае формула из [11] несколько модифицирована. Проекция магнитного поля на каждую ориентацию NV равна $\frac{B_0}{\sqrt{3}}$, так что магнитная чувствительность в 3 раза больше, чем ожидалось. Полагая $N = 9 * 10^{13}$, $T_2^* = 0.6 \text{ мкс}$, $g_e = 2$ получаем чувствительность $\eta_{sp} \approx 1.33 \frac{fT}{\sqrt{Hz}}$.

4 Заключение

В ходе данной работы достигнуты следующие результаты:

- Построена аналитическая модель, описывающая взаимодействие микроволнового поля с резонатором, внутрь которого помещён азотно-вакансионный центр окраски в алмазе NV; вычислены все необходимые параметры. Модель позволяет оценить коэффициенты пропускания и отражения резонатора, в зависимости от параметров системы, таких как: коэффициент связи резонатора с квантовой системой, внешнего магнитного поля расщепления, добротности и ширины линии резонатора.
- Предложен улучшенный метод для считывания состояний квантовой системы дисперсионным методом с помощью двухмодового резонатора.
- Проведена оценка чувствительности магнитометра по дробовым шумам. Результаты оценки дают 177pT и 8pT для одномодового и двухмодового резонатора соответственно.

В дальнейшем, результаты работы позволят экспериментатору поставить эксперимент с параметрами, дающими наилучшую чувствительность. Кроме того, предложенный улучшенный метод считывания с использованием двухмодового резонатора открывает возможность создания более точного датчика магнитного поля. В продолжении работы планируется провести оценку чувствительности с включенной частотной модуляцией внешнего радиочастотного сигнала, после чего применять Lock-in усилитель, чтобы оставить сигнал только несущей частоты и тем самым снизить влияние шумов.

А Исключение не резонансного слагаемого

Рассмотрим матрицу коэффициентов M на уравнение для моды резонатора и найдём ей обратную матрицу M^{-1} :

$$M = \begin{pmatrix} A(\omega) & g^2\chi(\omega) \\ g^2\chi^*(-\omega) & A^*(-\omega) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A(\omega) = \omega_0 - \omega + g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}.$$

при нахождении обратной матрицы, воспользуемся полученными неравенствами:

$$\varkappa, |\omega - \omega_0|, g^2 \text{Re}\chi(\omega) \ll \omega_0$$

Для начала разложим $A(\omega)$ и $A^*(-\omega)$:

$$A(\omega) = \omega_0 - \omega + g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2} \approx g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}$$

$$A^*(-\omega) = \omega_0 + \omega + g^2\chi_{-\omega}^* + i\frac{\varkappa}{2} \approx 2\omega_0 + g^2\chi_{-\omega}^* + i\frac{\varkappa}{2}$$

Тогда определитель имеет вид:

$$\begin{aligned} \det(M) &= A(\omega)A^*(-\omega) - g^4|\chi_\omega|^2 \approx (g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2})(2\omega_0 + g^2\chi_{-\omega}^* + i\frac{\varkappa}{2}) - g^4|\chi_\omega|^2 \approx \\ &\approx 2\omega_0(g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}) \end{aligned}$$

Тогда обратная матрица M^{-1} имеет вид:

$$M^{-1} \approx \frac{1}{2\omega_0(g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2})} \begin{pmatrix} 2\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В Коэффициент связи g

Для получения достоверного количественного результата важно правильно выбрать величину связи квантовой системы и моды резонатора. Для единичного фотона это и есть частота Раби $g_{N=1} = \Omega_R$. В случае большого числа фотонов, формула принимает вид:

$$\Omega_R = g\sqrt{N} \tag{46}$$

Вычислим число фотонов N в резонаторе. В стационарном режиме входная мощность P_{in} и мощность потерь P_{loss} равны. Кроме того, P_{loss} через добротность связана с запасённой в резонаторе энергией, таким образом:

$$P_{in} = P_{loss} = \frac{E\omega_c}{Q}, \quad E = N\hbar\omega_c \quad (47)$$

$$N = \frac{QP_{in}}{\hbar\omega_c^2} \quad (48)$$

Для заданных значений $\Omega_R = 2\pi * 10$ МГц, $Q = 100$, $P_{in} = 4$ Вт, $\omega_c = 2\pi * 3$ ГГц получим:

$$g = \Omega_R \sqrt{\frac{\hbar\omega_c^2}{QP_{in}}} = 0.04 \text{ Гц} \quad (49)$$

Полученное значение коэффициента связи g для одного кубита можно обобщить для системы из N_q невзаимодействующих кубитов следующим образом:

$$g_{eff} = g\sqrt{N_q} \quad (50)$$

Число кубитов (NV центров) определим для образца с характерными размером $1 \times 1 \times 0.5 \text{ mm}^3$, концентрацией $n = 1 \text{ ppm}$.

$$\nu = \frac{m}{Mr} = \frac{\rho V}{Mr} n = \frac{N_q}{N_A}$$

$$N_q = \frac{\rho V}{Mr} N_A n = \frac{3,5 \frac{g}{cm^3} * 0.5 * 10^{-3} cm^3}{12,0116 \frac{g}{mol}} * 6,02 * 10^{23} mol^{-1} * 10^{-6} = 9 * 10^{13} \quad (51)$$

Таким образом, для ансамбля $g_{eff} = 0.38 \text{ МГц}$

С Время оптической инициализации спина T_1^{op}

Для вычисления среднего времени, необходимого для оптической инициализации спина T_1^{op} будем считать, что для поляризации одного NV центра требуется M зелёных фотонов.

$$T_1^{op} = M \frac{N}{R_{pho}} \quad (52)$$

Полагаем $1 < M < 10$, поскольку зелёный фотон может быть потерян либо на безызлучательный переход из синглетного ($S=0$) в триплетное ($S=1$) состояние, либо при поглощении его азотом или другими артефактами кристалла. R_{pho} - число фотонов в секунду, падающих на NV. Зададим его выражением $P_0 = E_{532} * R_{pho}$, где P_0 - мощность лазера, E_{532} - энергия фотона. Полагая $M = 3$, $N = 9 * 10^{13}$, $R_{pho} = 1.7 * 10^{18} c^{-1}$ для лазера с мощностью $P_0 = 100 \text{ мВт}$, получим $T_1^{op} = 160 \text{ мкс}$.

Д Переход во вращающуюся систему отсчёта

Запишем УШ для исходной ВФ:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

Поворот задаётся $U(t)$ - унитарным оператором : $|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi'(t)\rangle$. Подставим его в исходное УШ:

$$i \frac{\partial}{\partial t} (U(t) |\psi'(t)\rangle) = i \left(\frac{\partial U(t)}{\partial t} |\psi'(t)\rangle + U(t) \frac{\partial |\psi'(t)\rangle}{\partial t} \right) = H(t) U(t) |\psi'(t)\rangle$$

Домножаем слева на U^+ и учтём унитарность $UU^+ = I$:

$$i U^+ \frac{\partial U(t)}{\partial t} |\psi'(t)\rangle + i \frac{\partial |\psi'(t)\rangle}{\partial t} = U^+(t) H(t) U(t) |\psi'(t)\rangle$$

В итоге получаем УШ для волновой функции $|\psi'(t)\rangle$ с Гамильтонианом H_{rot} в повернутой системе координат:

$$H_{rot}(t) = U(t)^+ H(t) U(t) - i U^+(t) \frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (53)$$

Список литературы

- [1] J. F. Barry, M. H. Steinecker, S. T. Alsid, J. Majumder, L. M. Pham, M. F. O’Keefe, and D. A. Braje, “Sensitive ac and dc magnetometry with nitrogen-vacancy center ensembles in diamond,” 2023.
- [2] E. R. Eisenach, J. F. Barry, and M. F. O’Keeffe, “Cavity-enhanced microwave readout of a solid-state spin sensor.,” *Nat Commun*, vol. 12, mar 2021.
- [3] M. J. Collett and C. W. Gardiner, “Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification.,” *Physical Review A*, vol. 30, sep 1984.
- [4] S. Kohler, “Dispersive readout: Universal theory beyond the rotating-wave approximation,” *Physical Review A*, vol. 98, aug 2018.
- [5] H. Z. Shen, Q. Wang, and X. X. Yi, “Dispersive readout with non-markovian environments,” *Physical Review A*, feb 2022.
- [6] R. Wilcox, E. Eisenach, J. Barry, M. Steinecker, M. O’Keeffe, D. Englund, and D. Braje, “Thermally-polarized solid-state spin sensor,” *Physical Review A*, vol. 17, no. 4, 2021.
- [7] J. Ebel, T. Joas, M. Schalk, P. Weinbrenner, A. Angerer, J. Majer, and F. Reinhard, “Dispersive readout of room-temperature ensemble spin sensors,” *Quantum Science and Technology*, vol. 6, jun 2021.
- [8] M. Pfender, N. Aslam, H. Sumiya, and S. Onoda, “Nonvolatile nuclear spin memory enables sensor-unlimited nanoscale spectroscopy of small spin clusters,” *Nature Communications*, vol. 834, oct 2017.
- [9] G. Balasubramanian, P. Neumann, D. J. Twitchen, and M. L. Markham, “Ultralong spin coherence time in isotopically engineered diamond,” *Nature materials*, vol. 8, may 2009.
- [10] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, p.435. sep 1997.

- [11] M. R. Dmitry Budker, “Optical magnetometry,” *Nature Physics*, vol. 3, dec 2006.