

Содержание

1	Введение	6
2	Литобзор	7
3	Дисперсионное считывание	10
4	Гамильтониан системы	11
5	Уравнение Ланжевена (Input-output theory)	12
6	Восприимчивость (Linear response theory)	14
7	Коэффициенты отражения и пропускания	15
8	Единичный кубит	17
9	Многоуровневая система	18
10	Температурная зависимость	20
11	Коэффициент связи g	21
12	Время оптической инициализации спина T_1^{op}	22
13	Ортогональные моды	24
13.1	Взаимодействие мод	25
14	Чувствительность	26
14.1	IQ демодулятор	26
14.2	Соотношение сигнал-шум	27
14.3	Погрешность измерения частоты $\delta\omega$	29
14.4	Сравнение двух методов	30
14.5	Чувствительность на основе данных из литературы	32
14.6	Влияние инверсии населённости на чувствительность	33

15 Предел чувствительности, обусловленный шумами	33
15.1 Spin-projection sensitivity limit	33
16 Модуляция системы	34
16.1 Приближение медленной модуляции	34
16.2 Теория Флоке	36
16.3 Функция линейного отклика в периодическом потенциале . .	37
16.4 Населённость Флоке состояний	38
16.5 Условие резонанса	39
16.6 Расчёт состояний Флоке	40
16.6.1 Приближение вращающейся волны RWA	40
16.6.2 Высокочастотный случай $\Omega \gg \Omega_R$	41
16.6.3 Низкочастотный случай $\Omega \ll \Omega_R$	42
A Исключение не резонансного слагаемого	43
B Переход во вращающуюся систему отсчёта	44
C Коррекция ошибки методом PDH	44

1 Введение

В современном мире многие задачи требуют высокоточного измерения магнитного поля. Это может быть георазведка полезных ископаемых, детектирование ферромагнитных объектов вблизи поверхности земли, сканирование активности головного мозга человека, поиск утечек в газопроводах и так далее. На данный момент, наиболее чувствительные к магнитному полю приборы, это сверхпроводящие квантовые интерферометры (SQUID). Однако сделать их достаточно компактными пока не представляется возможным, ввиду необходимости больших установок для охлаждения до криогенных температур. Следующие по чувствительности магнитометры - атомные. Обычно, для считывания их состояния используется оптический метод, однако, при таком прямом считывании состояний, квантовая системы быстро теряет фазу, что сказывается на чувствительности. В данной работе исследуется иной, дисперсионный, метод считывания состояний квантовой системы, который позволяет проводить не инвазивные измерения.

Целью дипломной работы является исследование метода дисперсионного считывания магнитного резонанса азотно-вакансионного центра окраски в алмазе для применения в квантовой магнитометрии.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Исследовать коэффициенты отражения и пропускания резонатора, содержащего ансамбль NV.
2. Провести оценку погрешности измерения частоты магнитного резонанса.
3. Оценить температурный сдвиг частоты резонанса резонатора.

2 Литобзор

На сегодняшний день многие научные группы работают с квантовыми сенсорами на основе NV центров окраски в алмазе. Интерес к NV центрам связан с тем, что он обладает большим временем когерентности, технологичен в изготовлении, обладает возможностью эффективной подготовки и считывания состояний. В дополнение к этому, датчики на основе NV центров работают при комнатной температуре. Особый интерес представляет отрицательно заряженный центр NV. Он обладает ненулевым электронным спином и одним из самых длинных времён когерентности электронного спина ($T_2 = 1.8$ мс) [1] в твердотельных системах при комнатной температуре.

Уже существует множество теоретических и экспериментальных работ по считыванию состояний NV центров оптическим способом, за счёт анализа сигнала люминесценции. Несмотря на это, в последнее время стали появляться работы по считыванию состояний NV центров за счёт измерения дисперсионного сдвига в резонаторе.

При выполнении квантовых измерений в некоторых случаях оказывается выгодно измерять не непосредственный отклик квантовой системы, а отклик резонатора, внутрь которого помещена эта квантовая система. При таком подходе на резонатор воздействуют микроволновым полем и отслеживают его пропускание в зависимости от состояния квантовой системы, таким образом, пропускание зависит от эффективной частоты резонатора. Данная методика получила название дисперсионное считывание.

Одной из первых теоретических работ, на эту тему стала работа [2], в которой авторы ввели общую теорию ввода-вывода для квантовых диссипативных систем, в которой возможно связать выход с входом через внутреннюю динамику системы. Последующие теоретические работы развили это направление. В качестве примера приведём работы [3, 4]. В [3] получено выражение для коэффициента пропускания резонатора за пределами приближения вращающейся волны, описана теория линейного отклика. Работа [4] подробно описывает вопросы, связанные с теорией линейного отклика системы, находящейся в не марковском окружении. Важным во-

просом является выбор режима связи квантовой системы с резонатором (weak, strong, ultrastrong, deep strong), по скольку в зависимости от режима, в котором будет проходить эксперимент, будут изменяться теоретические методы описания системы [5]. Большинство аналитических расчётов строятся на модели Джейнса-Каммингса. Эта модель позволяет удобно задавать параметры системы и получать функцию линейного отклика без громоздких вычислений. Однако важно отметить, что она не учитывает коллективные эффекты и предполагает наличие лишь одной (в простейшем случае двухуровневой) квантовой системы внутри резонатора. Таким образом на сегодняшний день существует уже множество аналитических подходов для описания дисперсионного считывания.

В совокупности с хорошей теоретической базой для описания дисперсионного считывания, появилось несколько научных групп, применивших данную методику для создания квантовых сенсоров магнитного поля как на основе NV, так и на базе других соединений. В качестве примера датчика не на NV центре можно привести работу [6], в которой авторы использовали дефекты Cr^{3+} в кристалле сапфира (Al_2O_3) и получили прибор с чувствительностью $9.7 \text{ pT}/\sqrt{\text{Hz}}$. Из результатов работы следует, что устранив необходимость в оптической поляризации, твердотельные датчики можно делать меньше, легче и более энергоэффективными, чем существующие. А также избежать проблем с доставкой света, включая высокие тепловые нагрузки, лазерное наведение, поляризацию и амплитудный шум.

Кроме того, существуют работы, в которых в качестве квантовой системы выбраны NV центры. Например в работе [7] показано, что дисперсионное считывание NV центров в резонаторе позволяет получить точность, выше чем спиновый шум (spin projection noise). Не взаимодействуя напрямую с квантовой системой эксперимент не будет разрушать квантовое состояние, что по ожиданиям авторов приведёт к превосходству сенсорики на основе дисперсионного считывания над оптическим.

В работе [8] исследована возможность создания магнитного сенсора на основе NV, авторы которой ожидают получить прибор с чувствительно-

стью $3pT/\sqrt{Hz}$, что превосходит результат магнитометра на основе дефектов Cr^{3+} в кристалле сапфира. Важной особенностью описанных выше датчиков является устранение множества шумов и ошибок считывания, связанных с отсутствием оптического взаимодействия с квантовой системой.

3 Дисперсионное считывание

При выполнении квантовых измерений в некоторых случаях оказывается выгодно измерять не непосредственный отклик квантовой системы, а отклик резонатора, внутрь которого помещена эта квантовая система. При таком подходе на резонатор воздействуют микроволновым полем и отслеживают его пропускание в зависимости от состояния квантовой системы. Пропускание зависит от эффективной частоты резонатора. Покажем как изменится эффективная частота резонатора в связи с наличием квантовой системы. Для этого рассмотрим одномодовый резонатор с ДУС. Гамильтониан такой системы имеет вид:

$$H = H_{sys} + H_{cav} + H_{sys-cav} = \Delta\sigma^+\sigma + \omega_0 a^+a + g(\sigma^+a + \sigma a^+) \quad (1)$$

Теперь запишем этот гамильтониан в базисе $|\text{sys} = 0, \text{cavity} = N\rangle, |\text{sys} = 1, \text{cavity} = N+1\rangle$:

$$H = \begin{pmatrix} \omega_0 N & g\sqrt{N} \\ g\sqrt{N} & \omega_0 N + \delta \end{pmatrix} \quad (2)$$

Где $\delta = \Delta - \omega_0$. После чего найдём собственные состояния системы:

$$|H - IE| = \begin{vmatrix} \omega_0 N - E & g\sqrt{N} \\ g\sqrt{N} & \omega_0 N + \delta - E \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

$$E_{\pm} = \omega_0 N + \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\delta^2 + 4g^2 N} \quad (4)$$

В режиме слабой связи квантовой системы с резонатором $g \ll \delta$, тогда подкоренное выражение разложим в ряд и получим:

$$E_+ = \omega_0 N + \frac{g^2 N}{\delta}$$

$$E_- = \omega_0(N - 1) + \Delta - \frac{g^2 N}{\delta}$$

Этот эффект называется дисперсионным сдвигом. Он заключается в энергетическом сдвиге состояний системы в зависимости от состояний кванто-

вой системы. Количественно данный эффект можно описать эффективной частотой резонатора, которая изменилась с ω_0 в отсутствие квантовой системы на $\omega_0 + \delta\omega$, где $\delta\omega \approx \frac{g^2}{\Delta - \omega_0}$. По изменению частоты дисперсионного сдвига мы будем детектировать состояние квантовой системы.

4 Гамильтониан системы

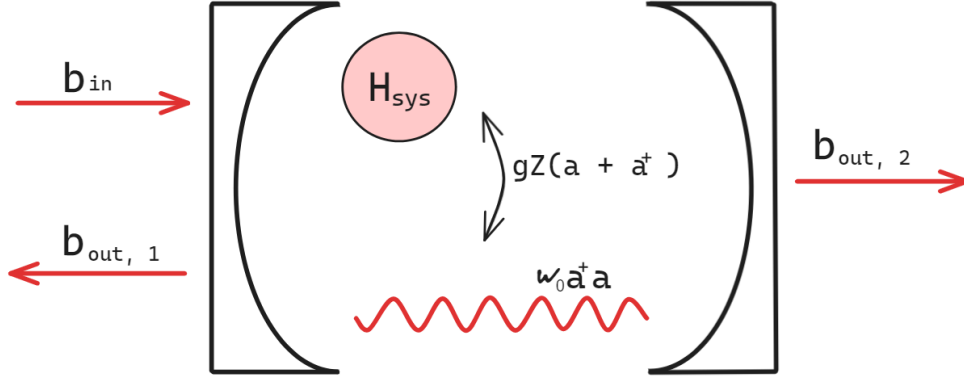


Рис. 1: Резонатор, связанный с входящими/выходящими модами, а также с внутренней квантовой системой.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из атома H_{sys} , резонатора H_{cav} , внешнего излучения H_{ex} , рис.1:

$$H = H_{sys} + H_{cav} + H_{ex} + H_{I1} + H_{I2} \quad (5)$$

Кубит: $H_{sys} = \frac{\Delta}{2}\sigma_z$

Резонатор: $H_r = \omega_0 a^\dagger a$

Внешнее поле: $H_{ex} = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k$

Взаимодействие моды резонатора и мод внешнего поля: $H_{I1} = \sum_k \gamma_k (b_k^\dagger a + a^\dagger b_k)$

Взаимодействие резонатора и ДУС: $H_{I2} = -\vec{d}\vec{E} = -\underbrace{(\vec{d}\vec{n})}_g \underbrace{\epsilon f(\vec{r}) (\sigma + \sigma^\dagger)}_Z (a + a^\dagger) = gZ(a + a^\dagger),$

где $\vec{E} = \vec{n}f(\vec{r})\epsilon(a + a^\dagger)$, ϵ - амплитуда поля для одиночного фотона резонатора, $f(\vec{r})$ - описывает пространственную моду резонатора (например $f = \sin(\frac{\omega_0 z}{c})$). В случае кубита $Z = \sigma_x$.

Итого получим гамильтониан:

$$H = \frac{\Delta}{2}\sigma_z + \omega_0 a^+ a + \sum_k \omega_k b_k^+ b_k + \sum_k \gamma_k (b_k^+ a + a^+ b_k) + gZ(a + a^+) \quad (6)$$

5 Уравнение Ланжевена (Input-output theory)

Из линеаризованного гамильтониана можно вывести так называемые линеаризованные квантовые уравнения Ланжевена, которые управляют динамикой оптомеханической системы, если добавить к уравнениям движения Гейзенберга члены диссипации и шума. Работать будем в представлении Гейзенберга.

Для начала рассмотрим лишь резонатор с внешним полем, т.е.

$$H = H_r + H_{ex} + H_{I1} = \omega_0 a^+ a + \sum_k \omega_k b_k^+ b_k + \sum_k \gamma_k (b_k^+ a + a^+ b_k) \quad (7)$$

Тогда запишем уравнение динамики a и b с помощью уравнения Гейзенберга:

$$\begin{cases} \dot{a} = i[H, a] = -i\omega_0 a - i \sum_k \gamma_k b_k \\ \dot{b}_k = i[H, b_k] = -i\omega_k b_k - i\gamma_k a \end{cases}$$

Здесь использованы коммутационные соотношения:

$$[a, a^+] = 1,$$

$$[b_n, b_m] = \delta_{nm}.$$

Для решение системы проинтегрируем уравнение на моды внешнего поля и подставим в уравнение для мод резонатора. Интегрируя уравнение на b_k получим:

$$b_k(t) = b_k(0)e^{-i\omega_k t} - i\gamma_k \int_0^t d\tau a(\tau)e^{-i\omega_k(t-\tau)} \quad (8)$$

Полученный результат подставим в уравнение для моды резонатора:

$$\dot{a} = -i\omega_0 a - i \sum_k \gamma_k b_k = -i\omega_0 a - i \sum_k \gamma_k b_k(0) e^{-i\omega_k t} - \sum_k \gamma_k^2 \int_0^t d\tau a(\tau) e^{-i\omega_k(t-\tau)} \quad (9)$$

Следующим шагом, выполним Марковское приближение. То есть считаем, что влияние поля резонатора на квантовую систему коротко-скоррелировано (окружающая среда не обладает памятью). Времена корреляции среды сильно меньше характерного времени изменения поля. Тогда основной вклад в интеграл в 3 слагаемом получается на $\tau \approx t$. Значит аргумент подынтегральной функции можно заменить на t и распространить пределы интегрирования на бесконечность. Положим $a(t) = \tilde{a}(t) e^{-i\omega_0 t}$:

$$\begin{aligned} \sum_k \gamma_k^2 \int_0^t d\tau a(\tau) e^{-i\omega_k(t-\tau)} &= \sum_k \gamma_k^2 \int_0^t d\tau \tilde{a}(\tau) e^{i\tau(\omega_k - \omega_0)} e^{-i\omega_k t} = \\ \sum_k \gamma_k^2 a(t) \int_0^\infty d\tau e^{i\tau(\omega_k - \omega_0)} &= a(t) 2\pi \sum_k \gamma_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0) = \varkappa a(t), \end{aligned}$$

$$i \sum_k \gamma_k b_k(0) e^{-i\omega_k t} = \sum_\nu \sqrt{\varkappa_\nu} b_{in,\nu}.$$

$$[b_{in}(t), b_{in}^+(t')] = \delta(t - t')$$

Здесь $\varkappa = 2\pi \sum_k \gamma_k^2 \delta(\omega_k - \omega_0)$. Подставим полученные выражения в уравнение для моды резонатора, добавив в гамильтониан член взаимодействия резонатора с кубитом:

$$\dot{a} = -i\omega_0 a - igZ - \frac{\varkappa}{2} a - \sum_\nu b_{in,\nu} \sqrt{\varkappa_\nu}, \quad (10)$$

где $\varkappa_1 + \varkappa_2 = \varkappa$ и $b_{out,\nu} - b_{in,\nu} = \sqrt{\varkappa_\nu} a$. Добротность резонатора будет $Q = \omega_0 / \varkappa$.

6 Восприимчивость (Linear response theory)

Поскольку нас не интересуют квантовые флуктуации поля резонатора, рассмотрим уравнение 10 в его классическом пределе как уравнение движения для средних значений $a \equiv \langle a \rangle_t$ и $Z \equiv \langle Z \rangle_t$. Для дальнейшего описания системы выразим Z через a . Заменяя a и a^+ на классические амплитуды a и a^* , получим следующий гамильтониан взаимодействия резонатора с кубитом:

$$H_{I2} = gZ(a + a^*) = Zf(t)$$

Тогда полный гамильтониан системы кубит-резонатор будет иметь вид:

$$H = \underbrace{H_{sys} + H_r}_{H_0} + \underbrace{H_{I2}}_V = \underbrace{\frac{\Delta}{2}\sigma^+\sigma + \omega_0 a^+ a}_{H_0} + \underbrace{gZ(a + a^+)}_V = H_0 + V \quad (11)$$

Для матрицы плотности запишем уравнение фон Неймана:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho].$$

Если возмущение мало, то в каждый момент времени основное поведение системы определяется невозмущенным гамильтонианом H_0 и $V(t)$ несколько изменяет эволюцию $\psi_0(t)$. Точную волновую функцию $\psi(t)$ будем искать в виде:

$$\psi(t) = U(t)\tilde{\psi}(t),$$

где $U(t) = e^{-iH_0 t}$.

Тогда из уравнения для $U_0(t)$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_0 = H_0U_0,$$

совместно с уравнением Шрёдингера:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}(U_0\tilde{\psi}(t)) = i\frac{\partial U_0}{\partial t}\tilde{\psi}(t) + iU_0\frac{\partial \tilde{\psi}(t)}{\partial t} = H_0U_0\tilde{\psi} + VU_0\tilde{\psi}.$$

Получим:

$$iU_0 \frac{\partial \tilde{\psi}(t)}{\partial t} = VU_0 \tilde{\psi}, \quad i \frac{\partial \tilde{\psi}(t)}{\partial t} = U_0^+ V U_0 \tilde{\psi} = \tilde{V} \tilde{\psi}.$$

Тогда в представлении взаимодействия $\tilde{V} = U_0^+ V U_0$

Перепишем уравнение фон Неймана в представлении взаимодействия:

$$\dot{\tilde{\rho}} = i[\tilde{\rho}, \tilde{V}] = i[\tilde{\rho}, \tilde{Z}(t)]f(t). \quad (12)$$

Проинтегрировав уравнение для матрицы плотности получим:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 - i \int_{t_0}^t d\tau [\tilde{Z}(\tau), \tilde{\rho}(\tau)]f(\tau) \quad (13)$$

Воспользуемся формулой Кубо: $A_t = A_t^{(0)} - i \int_{t_0}^t d\tau \langle [A(t), V(\tau)] \rangle_0$ и получим выражение для Z :

$$Z_t = Z_t^{(0)} - i \int_{t_0}^t d\tau \text{Tr} \left([\tilde{Z}(t, \tau), Z(t)] \rho_0(\tau) \right) f(\tau) = Z_t^{(0)} + \int d\tau \chi(t, \tau) f(\tau), \quad (14)$$

где

$$\chi(t, \tau) = -i \langle [\tilde{Z}(t, \tau), Z(t)] \rangle_0 \theta(t - \tau). \quad (15)$$

Функцию линейного отклика системы χ обычно называют восприимчивость.

7 Коэффициенты отражения и пропускания

Сделаем Фурье преобразование Z_t :

$$Z_\omega = g\chi_\omega(a_\omega + a_{-\omega}^*),$$

и перепишем уравнение на моду резонатора в Фурье виде:

$$i(\omega - \omega_0)a_\omega - ig^2\chi_\omega(a_\omega + a_{-\omega}^*) - \frac{\varkappa}{2}a_\omega = \sum_\nu b_{in,\nu}\sqrt{\varkappa_\nu} \quad (16)$$

Уравнение для амплитуды резонатора a_ω совместно с уравнением для $a_{-\omega}^*$ образуют замкнутую СЛАУ:

$$M \begin{pmatrix} a_\omega \\ a_{-\omega}^* \end{pmatrix} = i \sum_{\nu=1,2} \sqrt{\varkappa} \begin{pmatrix} b_{in,\nu}(\omega) \\ b_{in,\nu}^*(-\omega) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где введены обозначения:

$$M = \begin{pmatrix} A(\omega) & g^2 \chi(\omega) \\ g^2 \chi^*(-\omega) & A^*(-\omega) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A(\omega) = \omega_0 - \omega + g^2 \chi_\omega - i \frac{\varkappa}{2}.$$

Такое уравнение можно точно решить относительно a_ω , но тогда дальнейшие выражения получатся очень громоздкими. Можно сделать ряд приближений, исходя из физических предположений. Для получения сильного сигнала, резонатор должен обладать большой добротностью $Q = \frac{\omega_0}{\varkappa} \gg 1$, должен быть приближен к резонансу $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ и дисперсионный сдвиг должен быть меньше частоты резонатора $\delta\omega = g^2 \text{Re}\chi(\omega)$. Итого, получаем неравенство:

$$\varkappa, |\omega - \omega_0|, g^2 \text{Re}\chi(\omega) \ll \omega_0. \quad (18)$$

Исходя из этих предположений получим обратную матрицу M^{-1} , как показано в Приложении А: $M^{-1} = \begin{pmatrix} A(\omega)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Отсюда следует, что вычисление a_ω с таким M^{-1} , эквивалентно отбрасыванию слагаемого с $a_{-\omega}^*$:

$$i(\omega - \omega_0)a_\omega - ig^2 \chi_\omega a_\omega - \frac{\varkappa}{2}a_\omega = \sum_{\nu} b_{in,\nu} \sqrt{\varkappa_\nu} \quad (19)$$

Совместно с уравнениями на a_{in} и a_{out} получим коэффициенты прохождения и отражения соответственно:

$$t = \frac{b_{out,2}}{b_{in,1}} = \frac{i\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}}{\omega_0 - \omega + g^2 \chi_\omega - i \frac{\varkappa}{2}} \quad (20)$$

$$r = \frac{b_{out,1}}{b_{in,1}} = 1 + \frac{i\varkappa_1}{\omega_0 - \omega + g^2 \chi_\omega - i \frac{\varkappa}{2}} \quad (21)$$

По сравнению с отсутствием резонатора ($g=0$), максимум прохождения будет смещён относительно $\omega = \omega_0$ на $\delta\omega = g^2 \text{Re}\chi(\omega)$

8 Единичный кубит

Для полноценного построения аналитической модели считывания состояния системы в резонаторе нужно научиться находить функцию линейного отклика (восприимчивость) системы. Для этого начнём с простейшего случая - единичного кубита в резонаторе с $H_{sys} = \frac{\Delta}{2}\sigma_z$ и $Z = \sigma_x$. Для нахождения χ , первым делом найдём $\tilde{Z}(t)$. При вычислениях будем пользоваться следующим гамильтонианом:

$$H = \underbrace{H_{sys} + H_r}_{H_0} + \underbrace{H_{I2}}_V = \underbrace{\frac{\Delta}{2}\sigma_z + \omega_0 a^+ a}_{H_0} + \underbrace{g\sigma_x(a + a^+)}_V = H_0 + V \quad (22)$$

Операторы в представлении взаимодействия устроены следующим образом:

$$\frac{da}{dt} = i[H_0, a] = i[\omega_0 a^+ a, a] = -i\omega_0 a \rightarrow a(t) = ae^{-i\omega_0 t} \quad (23)$$

$$\frac{d\sigma_{\pm}}{dt} = i[H_0, \sigma_{\pm}] = \pm\Delta\sigma_{\pm} \rightarrow \sigma_{\pm}(t) = \sigma_{\pm}e^{\pm i\Delta t} \quad (24)$$

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = 0 \rightarrow \sigma_z(t) = \sigma_z$$

$$\begin{cases} \sigma_x(t) = \sigma_x \cos(\Delta t) - \sigma_y \sin(\Delta t) \\ \sigma_y(t) = \sigma_x \sin(\Delta t) + \sigma_y \cos(\Delta t) \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом $\tilde{Z}(t) = \sigma_x \cos(\Delta t) - \sigma_y \sin(\Delta t)$. Вычислив след в $\chi(t)$ и введя скорость распада когерентного состояния γ , ассоциирующуюся с T_2^* , получим выражение:

$$\chi(t) = 2 \langle \sigma_z \rangle \sin(\Delta t) e^{\frac{-\gamma t}{2}} \theta(t) \quad (26)$$

Выполнив Фурье-преобразование найдём:

$$\chi(\omega) = 2 \int_0^{\infty} e^{\frac{-\gamma t}{2}} \sin(\Delta t) e^{i\omega t} dt \langle \sigma_z \rangle = \left(\frac{1}{\Delta - \omega - i\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\Delta + \omega + i\frac{\gamma}{2}} \right) \langle \sigma_z \rangle \quad (27)$$

В случае 2 уровневой системы среднее значение $\langle \sigma_z \rangle$ определяется разностью населённостей $p_1 - p_2$. Наличие диссипации кубита устраняет расхождения в $\chi(\omega)$ и ранее введённое требование $g \ll |\omega_0 - \Delta|$ становится несущественным, пока система находится в режиме линейного отклика.

9 Многоуровневая система

Теперь сделаем обобщение и перейдём к рассмотрению многоуровневой системы. Положим матрицу плотности диагональной в базисе собственных состояний H_{sys} , тогда $\rho = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$ и $H_{sys} |n\rangle = E_n |n\rangle$ с собственными энергиями E_n . Тогда восприимчивость будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\chi(\omega) &= -i \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega+i\gamma)\tau} \langle [Z(\tau), Z(0)] \rangle \\
&= -i \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega+i\gamma)\tau} \sum_{n,m} P_n (Z_{nm}(\tau) Z_{mn} - Z_{nm} Z_{mn}(\tau)) \\
&= -i \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega+i\gamma)\tau} \sum_{n,m} P_n (Z_{nm} Z_{mn} e^{i\epsilon_{nm}\tau} - Z_{nm} Z_{mn} e^{-i\epsilon_{nm}\tau}) \\
&= -i \sum_{n,m} (P_n - P_m) Z_{nm} Z_{mn} \int_0^\infty d\tau e^{i(\epsilon_{nm} + \omega + i\gamma)\tau} \\
&= \sum_{n,m} (P_n - P_m) \frac{Z_{nm} Z_{mn}}{\epsilon_{nm} + \omega + i\gamma} \\
\chi_\omega &= \sum_{m,n} \frac{(p_m - p_n) |Z_{mn}|^2}{\omega + E_m - E_n + i\frac{\gamma_{mn}}{2}}
\end{aligned} \tag{28}$$

Для численного вычисления населённостей воспользуемся уравнением Линдблада:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_j L_j \rho L_j^\dagger - \frac{1}{2} \{L_j^\dagger L_j, \rho\}. \tag{29}$$

В качестве Гамильтониана возьмём $H = -\frac{1}{2}\omega_{sys}\sigma_z - \Omega_R\sigma_x \cos \omega t$, но для ускорения расчётов перейдём в приближение вращающейся волны RWA: $H_{RWA} = \frac{\omega - \omega_{sys}}{2}\sigma_z - \frac{\Omega_R}{2}\sigma_x$. Диссипаторы L_j , отвечают за накачку и релаксацию уровней системы. Они определяются характерными временами оптической накачки $T_1^{op} = 160$ мкс, релаксации из возбуждённого состояния $T_1 = 5$ мс, теплового возбуждения $T_1^{reverse} = T_1$ и временем декогеренции $T_2^* = 10$ мкс.

Действительная часть $Re\chi(\omega)$ имеет пики при $\omega = E_m - E_n$ в резонансном случае $\omega = \omega_0$, которые превращаются в провалы пропускания. Члены с $E_m < E_n$ не резонансны и в приближении RWA ими пренебрегают, получая сумму по индексам с $m > n$.

10 Температурная зависимость

В приведённом выше методе предполагается, что частота внешнего поля ω , резонатора ω_{cavity} и квантовой системы ω_{system} постоянны. И если частоту внешнего поля и квантовой системы можно поддерживать постоянной, частота резонатора может изменяться под действием изменения температуры. Чтобы проверить пригодность метода для сред с изменяющейся температурой, выясним как влияет температура на измеряемое поле \tilde{B} . При прохождении резонатора фаза сигнала изменится на

$$Arg(t) = \phi = \phi(B, T)$$

причём $\omega_{system} = \gamma_e B + D$

$$\phi = \phi(x_0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial B} \right)_{x_0} (B - B_0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_{x_0} (T - T_0) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial B \partial T} \right)_{x_0} (B - B_0)(T - T_0) + \dots \quad (30)$$

где $x_0 = (B_0, T_0)$

$$\tilde{B} = B_0 + [(\phi - \phi_{x_0}) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_{x_0} (T - T_0)] \left(\frac{\partial \phi}{\partial B} \right)_{x_0}^{-1} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial T} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T} \right)_{x_0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial B} \right)_{x_0}^{-1} \quad (32)$$

Построим численно $\frac{\partial \tilde{B}}{\partial T}(\omega, \omega_{cavity})$ для разных значений частот внешнего поля ω и резонатора ω_{cavity} рис.2,3. Работать будем в режиме слабой связи, т.е. когда $g \ll |\omega_{system} - \omega_{cavity}|$. в нашем случае $g = \frac{1}{10} |\omega_{system} - \omega_{cavity}|$. При величине внешнего поля $B_0 = 3mT$ и комнатной температуре $T = 293K$, собственная частота квантовой системы будет $\omega_{system} = 2954MHz$. В случае полного резонанса, когда $\omega_{system} = \omega = \omega_{cavity}$, как и следовало ожидать $\frac{\partial \tilde{B}}{\partial T} = 0$. На рисунке 3 изображён срез контурного графика 2 по линии $\omega = \omega_{system} = 2954MHz$.

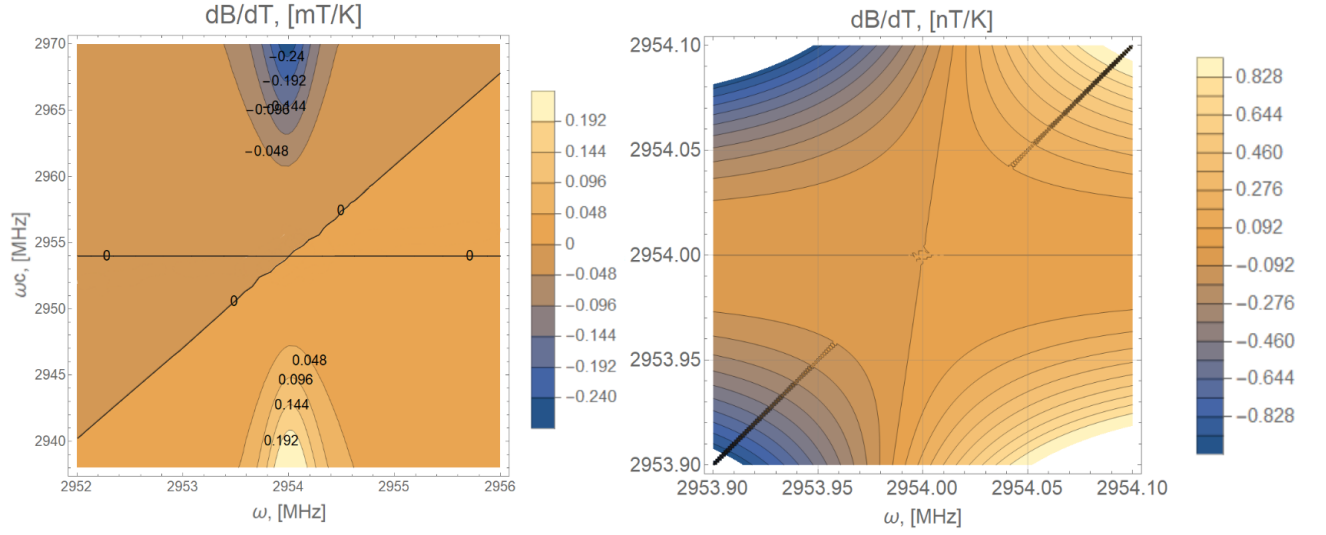


Рис. 2: Контурный график для отношения dB/dT для разных частот ω, ω_c . На левом графике $\omega_{\text{cavity}} \in [2938, 2970] \text{ MHz}$. На правом увеличен масштаб вблизи полного резонанса $\omega = \omega_{\text{cavity}} = \omega_{\text{system}} = 2954 \text{ MHz}$

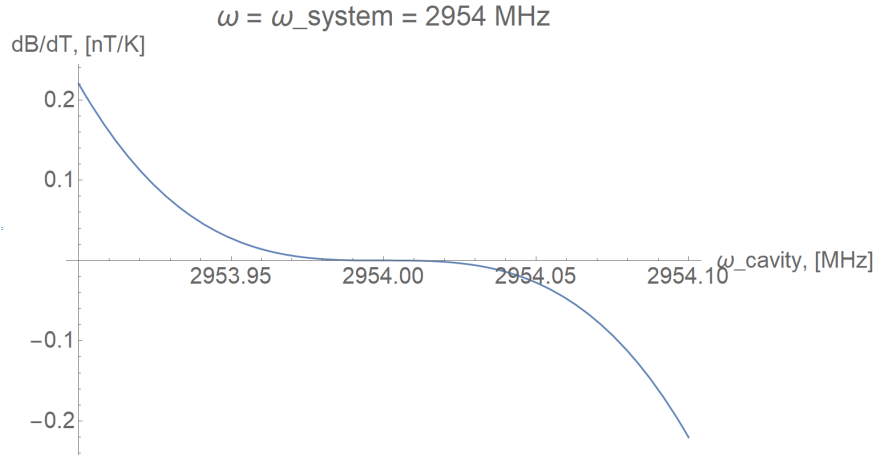


Рис. 3: Отношение dB/dT для разных ω_{cavity} при постоянной $\omega = \omega_{\text{system}}$.

11 Коэффициент связи g

Для получения достоверного количественного результата важно правильно выбрать величину связи квантовой системы и моды резонатора. Для единичного фотона это и есть частота Раби $g_{N=1} = \Omega_R$. В случае большого числа фотонов, формула принимает вид:

$$\Omega_R = g\sqrt{N} \quad (33)$$

Вычислим число фотонов N в резонаторе. В стационарном режиме входная мощность P_{in} и мощность потерь P_{loss} равны. Кроме того, P_{loss} через добротность связана с запасённой в резонаторе энергией, таким образом:

$$P_{in} = P_{loss} = \frac{E\omega_c}{Q}, \quad E = N\hbar\omega_c \quad (34)$$

$$N = \frac{QP_{in}}{\hbar\omega_c^2} \quad (35)$$

Для заданных значений $\Omega_R = 2\pi * 10$ МГц, $Q = 100$, $P_{in} = 4$ Вт, $\omega_c = 2\pi * 3$ ГГц получим:

$$g = \Omega_R \sqrt{\frac{\hbar\omega_c^2}{QP_{in}}} = 0.04 \text{ Гц} \quad (36)$$

Полученное значение коэффициента связи g для одного кубита можно обобщить для системы из N_q невзаимодействующих кубитов следующим образом:

$$g_{eff} = g\sqrt{N_q} \quad (37)$$

Число кубитов (NV центров) определим для образца с характерными размером $1 \times 1 \times 0.5 \text{ mm}^3$, концентрацией $n = 1 \text{ ppm}$.

$$\nu = \frac{m}{Mr} = \frac{\rho V}{Mr} n = \frac{N_q}{N_A}$$

$$N_q = \frac{\rho V}{Mr} N_A n = \frac{3,5 \frac{g}{cm^3} * 0.5 * 10^{-3} cm^3}{12,0116 \frac{g}{mol}} * 6,02 * 10^{23} mol^{-1} * 10^{-6} = 9 * 10^{13} \quad (38)$$

Таким образом, для ансамбля $g_{eff} = 0.38 \text{ МГц}$

12 Время оптической инициализации спина T_1^{op}

Для вычисления среднего времени, необходимого для оптической инициализации спина T_1^{op} будем считать, что для поляризации одного NV центра требуется M зелёных фотонов.

$$T_1^{op} = M \frac{N}{R_{pho}} \quad (39)$$

Полагаем $1 < M < 10$, поскольку зелёный фотон может быть потерян либо на безызлучательный переход из синглетного ($S=0$) в триплетное ($S=1$) состояние, либо при поглощении его азотом или другими артефактами кристалла. R_{pho} - число фотонов в секунду, падающих на NV. Зададим его выражением $P_0 = E_{532} * R_{pho}$, где P_0 - мощность лазера, E_{532} - энергия фотона. Полагая $M = 3$, $N = 9 * 10^{13}$, $R_{pho} = 1.7 * 10^{18} c^{-1}$ для лазера с мощностью $P_0 = 100 \text{ мВт}$, получим $T_1^{op} = 160 \text{ мкс}$.

13 Ортогональные моды

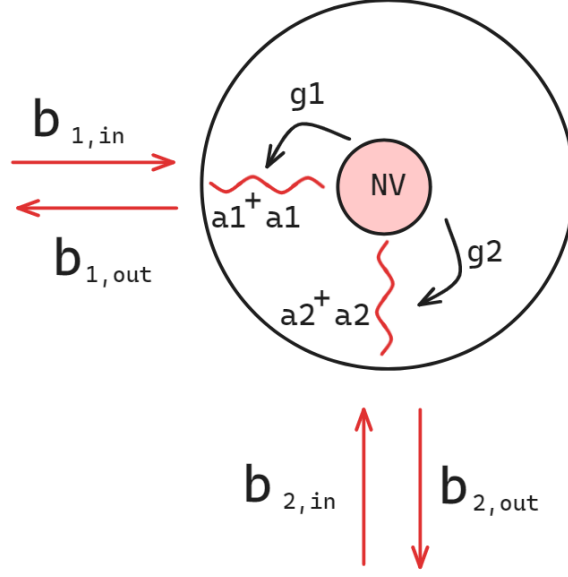


Рис. 4: Схема резонатора с ортогональными модами

В качестве метода для улучшения считывания частоты системы в резонаторе мы предлагаем использовать резонатор с двумя геометрически ортогональными модами, рис 4. Идея использования ортогональных мод заключается в измерении коэффициента пропускания резонатора из порта 1 в порт 2. При условии что внешние поля в двух портах резонатора связаны каждый со своей модой пропускание должно равняться нулю в случае, когда частота поля сильно отстроена от частоты резонанса ДУС. При совпадении частоты поля и ДУС будет появляться рассеяние на ДУС и моды 1 (a_1) в моду 2 (a_2), и как следствие появится сигнал на выходе 2. Чтобы определить вид взаимодействия спина-1/2 с ортогональной модой, подействуем на исходный гамильтониан взаимодействия оператором поворота $U = \exp(-i\sigma_z \frac{\pi}{4})$. Тогда получим:

$$U(\sigma_+ a + \sigma_- a^+) U^+ = i(\sigma_+ a - \sigma_- a^+) \quad (40)$$

В таком случае полный гамильтониан взаимодействия будет иметь вид:

$$H_{int} = g_1(\sigma_+ a_1 + \sigma_- a_1^+) + ig_2(\sigma_+ a_2 - \sigma_- a_2^+) \quad (41)$$

А соответствующие модам a_1 и a_2 уравнения Ланжевена, эквивалентны 19:

$$i(\omega_{ex} - \omega_1)a_1 - ig_1\chi_1(g_1a_1 + ig_2a_2) - \frac{\kappa_1}{2}a_1 = b_{1,in}\sqrt{\kappa_1} \quad (42)$$

$$i(\omega_{ex} - \omega_2)a_2 - g_2\chi_2(g_1a_1 + ig_2a_2) - \frac{\kappa_2}{2}a_2 = b_{2,in}\sqrt{\kappa_2} \quad (43)$$

$$b_{1,out} - b_{1,in} = a_1\sqrt{\kappa_1} \quad (44)$$

$$b_{2,out} = a_2\sqrt{\kappa_2}, \quad b_{2,in} = 0 \quad (45)$$

В данной системе нас интересует $S_{21} = \frac{b_{2,out}}{b_{1,in}}$, выражение для которого имеет вид:

$$S_{21} = \frac{g_1g_2\chi_2\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{\left(i(\omega_{ex} - \omega_1) - ig_1^2\chi_1 - \frac{1}{2}\kappa_1\right)\left(i(\omega_{ex} - \omega_2) - ig_2^2\chi_2 - \frac{1}{2}\kappa_2\right) + g_1^2g_2^2\chi_1\chi_2} \quad (46)$$

13.1 Взаимодействие мод

Геометрически ортогональные моды не будут взаимодействовать друг с другом, однако на практике, добиться идеальной ортогональности невозможно. Поэтому моды будут взаимодействовать друг с другом с некоторым коэффициентом μ . Под взаимодействием мод, здесь мы понимаем воздействие одной из них, на детектор второй. Тогда в гамильтониане появится дополнительный член взаимодействия мод $H_{mode \ interaction} = \mu(a_1^+a_2 + a_2^+a_1)$. Коэффициент взаимодействия мод определим как $\mu = \mu_0 \sin(\theta)$, где θ - угол поворота антенны, относительно идеального (ортогонального второму детектору), а $\mu_0 = \frac{\omega_{cav}}{2Q}$. В итоге, коэффициент пропускания с учётом неидеальной ортогональности будет иметь вид 47:

$$S_{21} = \frac{(g_1g_2\chi + i\mu)\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{\left(i(\omega_{ex} - \omega_1) - ig_1^2\chi - \frac{1}{2}\kappa_1\right)\left(i(\omega_{ex} - \omega_2) - ig_2^2\chi - \frac{1}{2}\kappa_2\right) + g_1^2g_2^2\chi_1\chi_2 + \mu^2} \quad (47)$$

14 Чувствительность

Выше мы рассмотрели два метода для определения частоты квантовой системы в резонаторе, основанных на измерении изменения фазы сигнала, прошедшего через резонатор. А именно, метод с одной и двумя ортогональными модами в резонаторе. В этом разделе сравним оба метода и выясним, какой из них вносит меньшую ошибку в измерение частоты квантовой системы.

14.1 IQ демодулятор

Для считывания фазы используется IQ-mixer (рис. 5 (a)), который вносит основные ошибки.

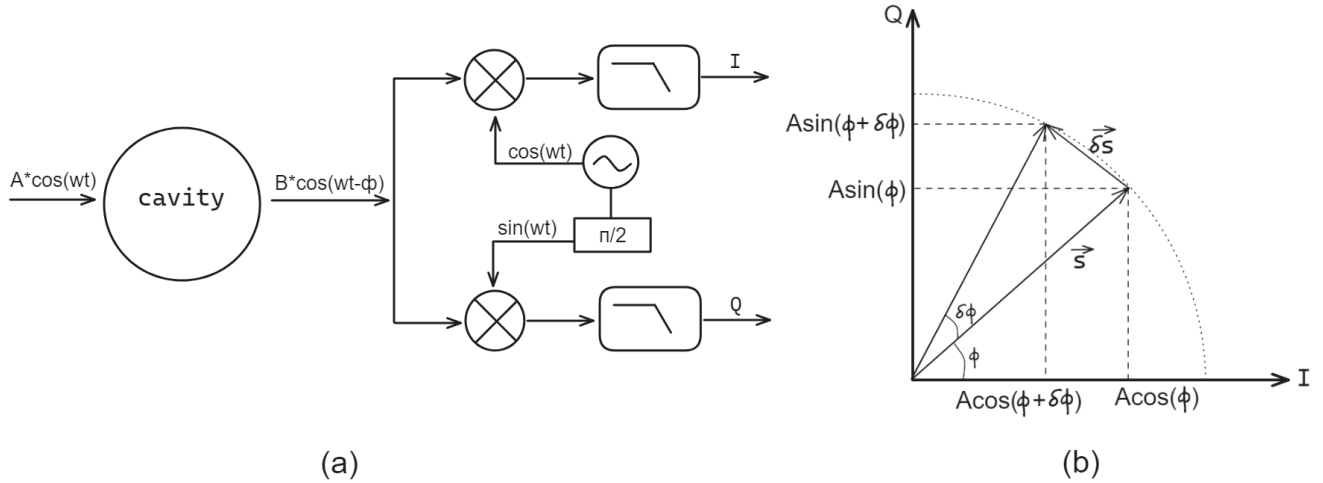


Рис. 5: (a) Схема работы IQ-демодулятора. (b) Схематическое представление изменения фазы на графике в пространстве (I, Q)

Пусть на резонатор падает внешнее поле $A * \sin(\omega t)$, частота которого изменяется на фазу ϕ после прохождения резонатора $B * \cos(\omega t - \phi)$. Домножим сигнал на \sin и \cos несущей частоты, после чего применим фильтр низких частот и получим два сигнала I и Q:

$$I = A * \cos(\phi), \quad Q = A * \sin(\phi)$$

$$RF = B \cos(\omega t - \phi) = B \cos(\omega t) \cos(\phi) + B \sin(\omega t) \sin(\phi) = I \cos(\omega t) + Q \sin(\omega t)$$

$$\begin{aligned}
RF * \cos(\omega t) &= I \cos^2(\omega t) + Q * \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \\
&= \frac{I}{2}(1 + \cos(2\omega t)) + \frac{Q}{2} \cos(2\omega t) \rightarrow \text{ФНЧ} \rightarrow I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RF * \sin(\omega t) &= I * \sin(\omega t) \cos(\omega t) + Q * \cos^2(\omega t) = \\
&= \frac{I}{2} \cos(2\omega t) + \frac{Q}{2}(1 + \cos(2\omega t)) \rightarrow \text{ФНЧ} \rightarrow Q
\end{aligned}$$

На выходе из демодулятора мы получаем синфазный сигнал $I = A_I \cos \phi$ и квадратурный $Q = A_Q \sin \phi$, которые вместе дают итоговый сигнал $S = I + iQ = Ae^{i\phi}$. Чтобы учесть наличие фазового шума, введём дополнительный сдвиг фазы $\delta\phi \ll 1$, которому соответствует сигнал смещения (сигнал фазового шума) $\delta S = S\delta\phi$ (рис. 5 (b)). таким образом, погрешность измерения фазы, вызванная фазовым шумом демодулятора имеет вид

$$\delta\phi = \frac{\delta S}{S}$$

.

14.2 Соотношение сигнал-шум

Ошибки в определении инфазного и квадратурного сигналов δI и δQ возникают вследствие наличия шумов. Определим δI и δQ , основываясь на характеристиках системы и демодулятора. Квадратурный IQ демодулятор характеризуется параметром NF, в литературе называемым "Noise figure". У имеющегося IQ демодулятора для входного поля с частотой 2800 МГц параметр NF находится в пределах $NF \in (12, 15)dB$. Значение NF определяет частное отношений сигнал-шум SNR (signal-noise ratio) на входе в модулятор и выходе:

$$NF = 10 \log_{10} \frac{SNR_{IQ,in}}{SNR_{IQ,out}}. \quad (48)$$

Соотношение сигнал-шум, определяется, через мощности. Так как сиг-

нал S - это ток, он имеет размерность $[A]$, при вычислениях будем полагать

$$SNR_{IQ,out} = \frac{S^2 R}{\delta S^2 R} = \frac{S^2}{\delta S^2} = \delta\phi^{-2}, \quad (49)$$

где R - сопротивление нагрузки. При определении SNR_{in} будем рассматривать только дробовой шум, по скольку в данной системе он преобладает над остальными шумами, как показано в работе [8]. Дробовой шум объясняется дискретной природой электромагнитного излучения, т.к. случайное распределение фотонов вносит шум в наши измерения. Он представляет собой не уменьшаемый минимальный уровень шума, присутствующий при считывании сигнала. Если число фотонов, полученных за фиксированный интервал времени, имеет среднее значение N , а фотоны расположены случайным образом, то вероятность обнаружения k фотонов за фиксированный промежуток времени определяется распределением Пуассона, при больших N переходящем в распределение Гаусса со средним отклонением $\sigma = \sqrt{N}$:

$$P_k = \frac{N^k e^{-N}}{k!} \rightarrow (N \gg 1) \rightarrow P_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(k-N)^2/2\sigma^2}$$

Для идеального детектора этот дробовой шум устанавливает предел точности, и равен среднему отклонению от распределения Гаусса σ . Таким образом:

$$SNR_{IQ,in} = N/\sqrt{N} = \sqrt{N}, \quad (50)$$

где N -число фотонов, вышедших из резонатора (попавших на детектор) за время наблюдения $\tau = 1$ с. Найдём N :

$$p_{out} = T p_{in} = \frac{N \hbar \omega_c}{\tau}, \quad T = |t|^2$$

$$N = \frac{T p_{in} \tau}{\hbar \omega_c}$$

Таким образом, погрешность измерения фазы сигнала $\delta\phi$ из 48, 49 и 50 будет:

$$SNR_{IQ,out} = SNR_{IQ,in} * 10^{-NF/10} = \sqrt{N} * 10^{-NF/10} \quad (51)$$

$$\delta\phi^{-2} = \sqrt{N} * 10^{-NF/10} \quad (52)$$

$$\delta\phi = N^{-1/4} * 10^{NF/20} \quad (53)$$

Полученное выражение будем использовать для определения погрешности измерения частоты $\delta\omega$.

14.3 Погрешность измерения частоты $\delta\omega$

Для определения ошибки $\delta\omega$ измеряемой частоты квантовой системы ω относительно реальной ω_0 , воспользуемся формулой:

$$\omega = \omega_0 + (\phi - \phi_0) \frac{d\omega}{d\phi}$$

$$\delta\omega = \delta\phi \left(\frac{d\phi}{d\omega} \right)^{-1} = 10^{\frac{NF}{20}} * \left(\frac{Tp_{in}\tau}{\hbar\omega_c} \right)^{-1/4} \left(\frac{d\phi}{d\omega} \right)^{-1} \quad (54)$$

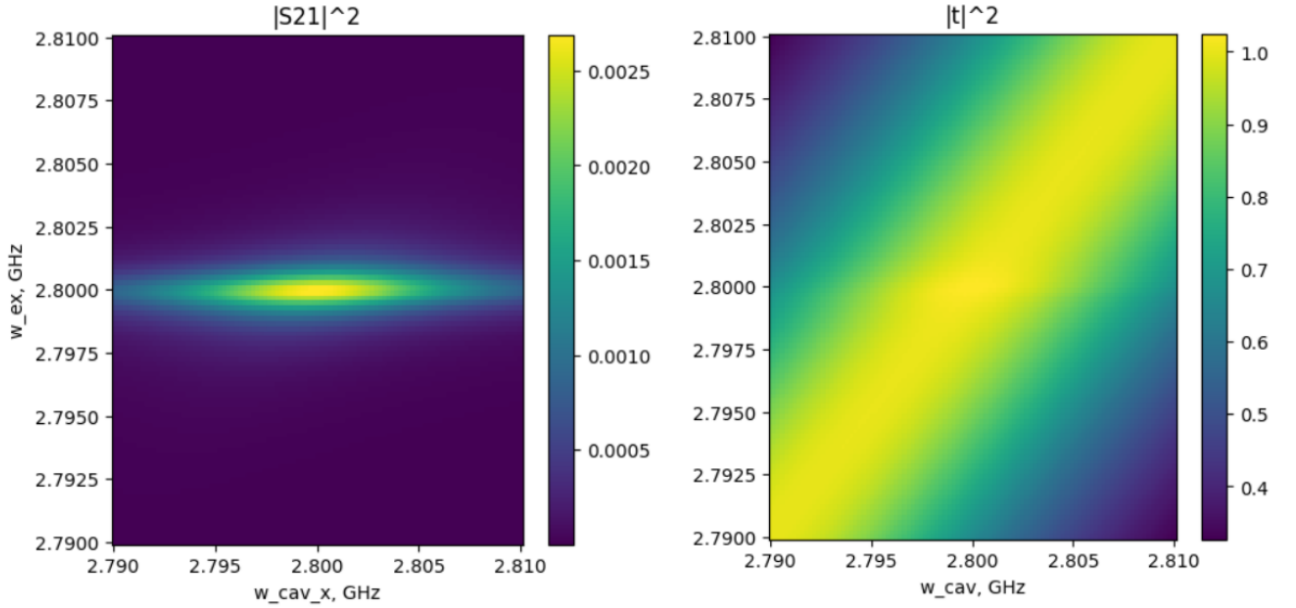


Рис. 6: Коэффициенты пропускания $|S21|^2$ для 2 и $|t|^2$ для 1-модовых случаев.

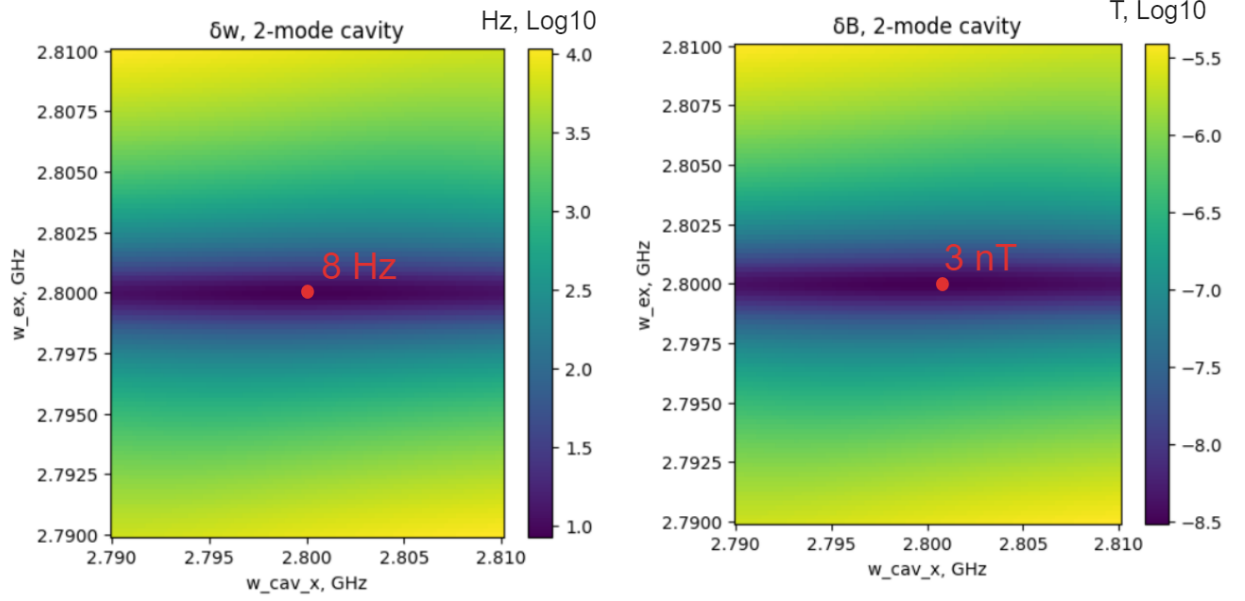


Рис. 7: Ошибка измерения частоты квантовой системы и внешнего поля для 2-модового случая.

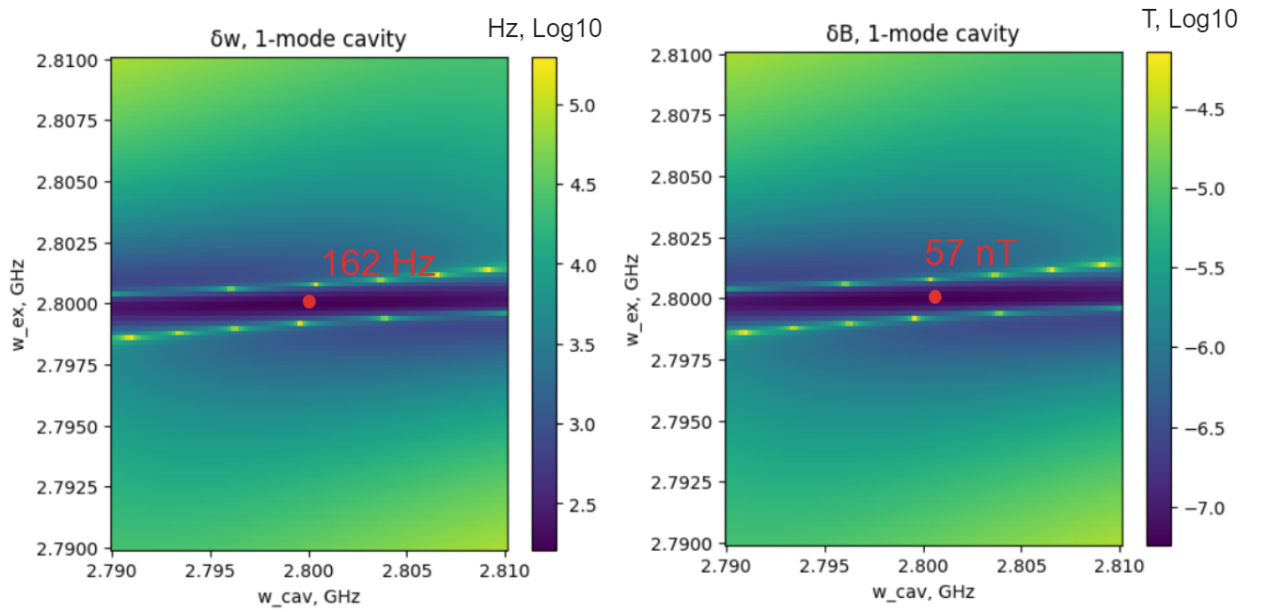


Рис. 8: Ошибка измерения частоты квантовой системы и внешнего поля для 1-модового случая.

14.4 Сравнение двух методов

Теперь сравним ошибку в измерении частоты системы (внешнего магнитного поля) для резонатора с 1 и с 2 ортогональными модами, как показано на рис.9.

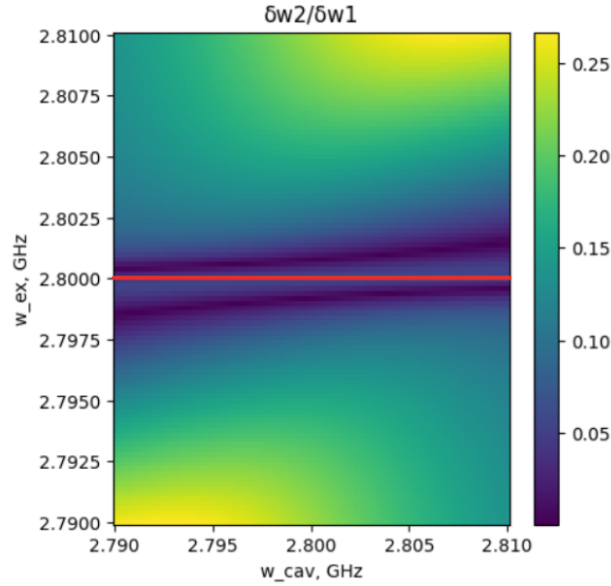


Рис. 9: Отношение ошибок измерения частоты для 2 и 1-модового случаев.

В качестве наглядного графика возьмём срез карты по резонансу внешнего поля с частотой системы 2.8 ГГц рис. 10 (красная линия на рис.9). Эта линия не является минимумом карты, однако при таких частотах минимальны абсолютные погрешности измерения магнитного поля как для 1, так и для 2 модового случаев.

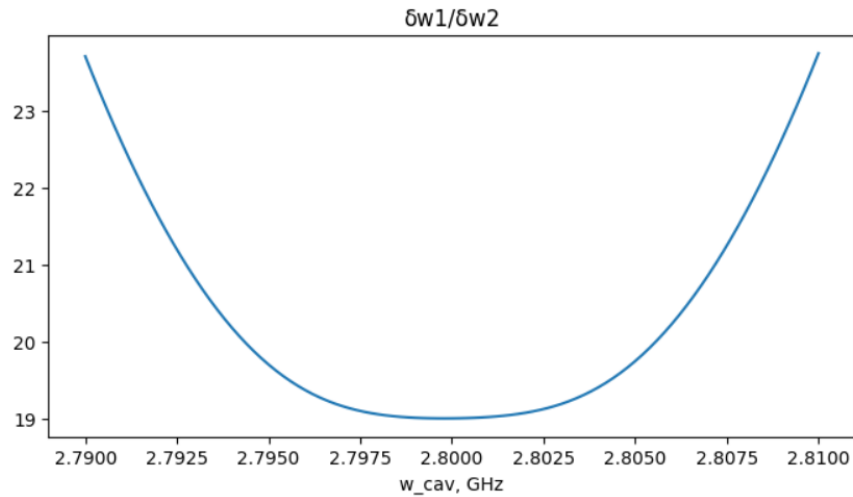


Рис. 10: Срез карты для случая резонанса частоты внешнего поля и квантовой системы.

Из рис. 10 видно, что в оптимальной для измерения точке 2.8 ГГц чувствительность к магнитному полю резонатора с 2 ортогональными модами **в 19 раз лучше**, чем в резонаторе с 1 модой.

14.5 Чувствительность на основе данных из литературы

В работах [6] и [8] прогнозируемая магнитная чувствительность определяется выражением:

$$\eta = \frac{e_n}{V/B_{RMS}^{test}}, \quad (55)$$

где e_n – среднеквадратичный уровень шума напряжения одностороннего спектра, а критерий B_{RMS} – среднеквадратичная амплитуда приложенного тестового поля. Существуют конкурирующие эффекты, которые диктуют оптимальную мощность источника микроволн.

Увеличение мощности увеличивает амплитуду сигнала и уменьшает дробовой шум Джонсона, но также вызывает уширение линии спектра, при заданном изменении приложенного магнитного поля. В качестве сопротивления нагрузки в обоих работах выбирается сопротивление $R = 50$ Ом, а $e_n = 26nV/\sqrt{Hz}$, $\eta = 9.7 \frac{pT}{\sqrt{Hz}}$ в [6] и $e_n = 20nV/\sqrt{Hz}$, $\eta = 3.2 \frac{pT}{\sqrt{Hz}}$ в [8].

На основе приведённого уровня шума $e_n = 20nV/\sqrt{Hz}$ и полученной аналитически выше величине сигнала построена зависимость (рис. 11) чувствительности магнитометра от частоты резонатора.

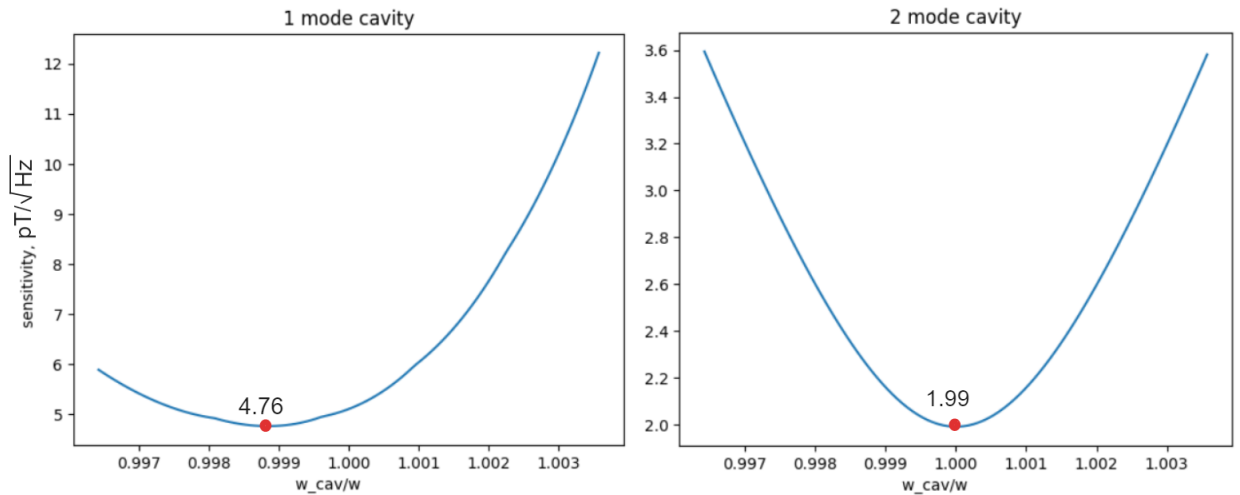


Рис. 11: Чувствительность магнитометра в зависимости от частоты резонатора.

В результате оптимальная чувствительность получается $\eta = 4.76 \frac{pT}{\sqrt{Hz}}$ и $\eta = 1.99 \frac{pT}{\sqrt{Hz}}$ для резонатора с 1 и 2 модами соответственно.

14.6 Влияние инверсии населённости на чувствительность

Рассмотрим влияние соотношения населённости в основном и возбуждённом состоянии на чувствительность магнитометра рис. 12.

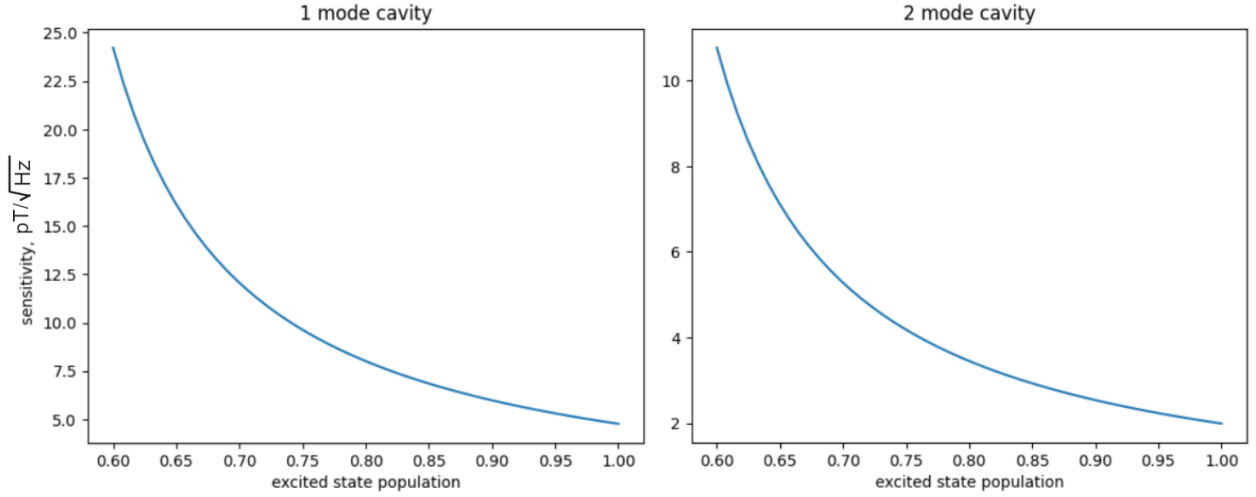


Рис. 12: Чувствительность магнитометра в зависимости от населённости возбуждённого состояния.

15 Предел чувствительности, обусловленный шумами

Чтобы оценить верхние пределы чувствительности магнитометра, рассмотрим шумы, ограничивающие её.

15.1 Spin-projection sensitivity limit

Одним из основных пределов магнитной чувствительности для атомного магнитометра является шум спиновой проекции, дающийся выражением [9]:

$$\eta_{sp} \approx \sqrt{3} \frac{\hbar}{g_e \mu_B} \frac{1}{\sqrt{N T_2^*}} \quad (56)$$

Здесь μ_B - магнетон Бора, g_e - Ланде Фактор основного состояния, N - число NV в образце. В нашем случае формула из [9] несколько модифицирована. Проекция магнитного поля на каждую ориентацию NV равна $\frac{B_0}{\sqrt{3}}$, так что магнитная чувствительность в 3 раза больше, чем ожидалось. Полагая $N = 9 * 10^{13}$, $T_2^* = 0.6 \text{ мкс}$, $g_e = 2$ получаем чувствительность $\eta_{sp} \approx 1.33 \frac{fT}{\sqrt{Hz}}$.

16 Модуляция системы

Для улучшения чувствительности магнитометра мы предлагаем проводить частотную модуляцию внешнего радиочастотного сигнала, после чего применять Lock-in усилитель, чтобы оставить сигнал только несущей частоты и тем самым снизить влияние шумов.

16.1 Приближение медленной модуляции

В качестве нулевого приближения к решению задачи о модуляции, рассмотрим случай, когда период модуляции много больше характерного времени прихода системы в стационарное состояние. В таком случае мы имеем право воспользоваться уже имеющимися формулами для функции линейного отклика (27, 28) и коэффициентов пропускания и отражения (20, 21), а именно:

$$\chi(\omega) = \sum_{m,n} \frac{(p_m - p_n)|Z_{mn}|^2}{\omega + E_m - E_n + i\frac{\gamma_{mn}}{2}} = \left(\frac{1}{\omega_{sys} - \omega - i\frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{\omega_{sys} + \omega + i\frac{\gamma}{2}} \right) \langle \sigma_z \rangle$$

$$t = \frac{i\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{\omega_0 - \omega + g^2 \chi_\omega - i\frac{\kappa}{2}}, \quad r = 1 + \frac{i\kappa_1}{\omega_0 - \omega + g^2 \chi_\omega - i\frac{\kappa}{2}}.$$

В каждый следующий момент времени частота поля будет меняться, а следовательно будет меняться и населённость системы. Для численного вычисления населённостей воспользуемся уравнением Линдблада:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_j L_j \rho L_j^\dagger - \frac{1}{2} \{L_j^\dagger L_j, \rho\}. \quad (57)$$

В качестве Гамильтониана возьмём $H = -\frac{1}{2}\omega_{sys}\sigma_z - \Omega_R\sigma_x \cos \omega t$, но для ускорения расчётов перейдём в приближение вращающейся волны RWA: $H_{RWA} = \frac{\omega - \omega_{sys}}{2}\sigma_z - \frac{\Omega_R}{2}\sigma_x$. Диссипаторы L_j , отвечают за накачку и релаксацию уровней системы. Они определяются характерными временами оптической накачки $T_1^{op} = 160$ мкс, релаксации из возбуждённого состояния $T_1 = 5$ мс, теплового возбуждения $T_1^{reverse} = T_1$ и временем декогеренции

$$T_2^* = 10 \text{ мкс.}$$

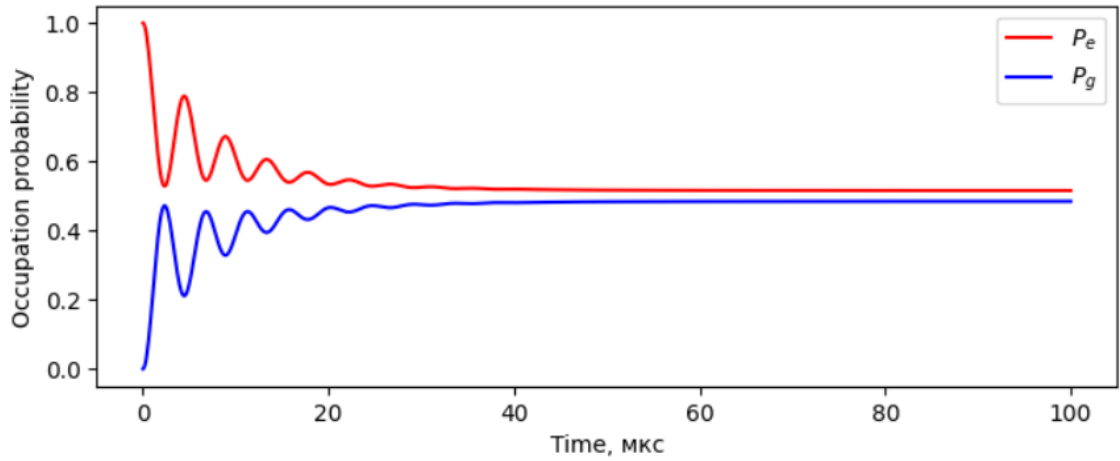


Рис. 13: Населённости основного и возбуждённого состояния для $\Omega_R = 1 \text{ МГц}$, $\omega_{sys} - \omega = 1 \text{ МГц}$

Построим зависимость населённостей от времени, чтобы убедиться, что время термализации системы меньше частоты модуляции. Как видно из графика (Рис.13), при частотах модуляции менее 10 кГц, время термализации системы меньше периода модуляции $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. Теперь убедимся в правильности модели. Для этого построим график (Рис.14) с характерными зависимостями населённости (а) и пропускания (б) в зависимости от частоты внешнего поля и от времени (с, d) на одном периоде модуляции.

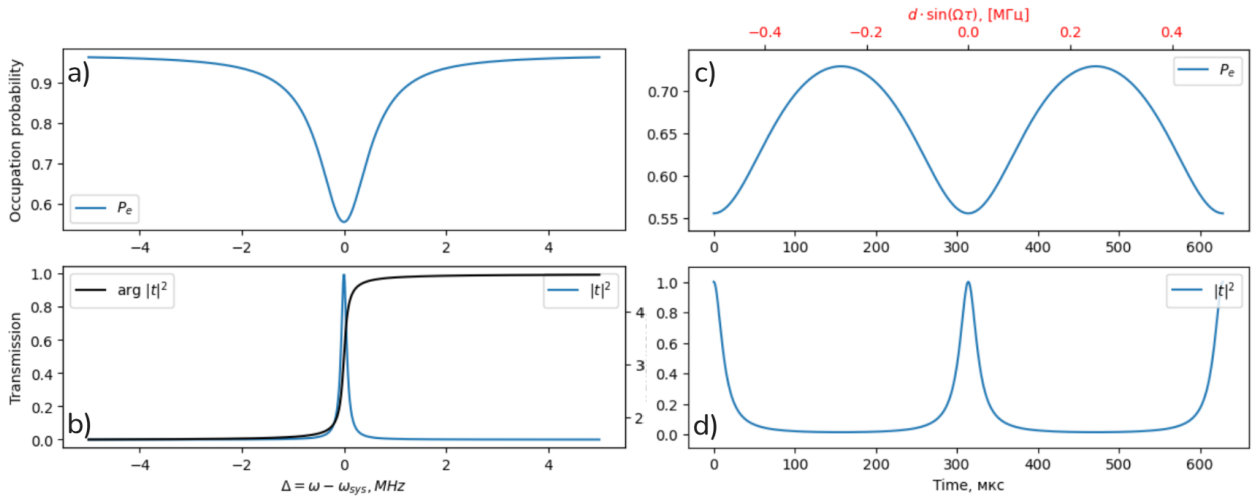


Рис. 14: а,б) Населённость возбуждённого состояния и коэффициент пропускания от отстройки; с,д) Населённость возбуждённого состояния и коэффициент пропускания от времени. Построены для одного периода модуляции T , частота Раби $\Omega_R = 0.1 \text{ МГц}$, модуляции $\Omega = 10 \text{ кГц}$

Рассмотрим ошибку, которую даёт метод PDH С

16.2 Теория Флоке

Согласно Теореме Флоке любая фундаментальная матрица решений $\psi(t)$ системы дифференциальных уравнений $\dot{\psi}(t) = H(t)\psi(t)$, $H(t+T) = H(t)$ представима в виде $\psi(t) = \phi(t)e^{Rt}$, причём $\phi(t) = \phi(t+T)$, а при требовании $2T$ -периодичности R -комплексная.

В нашем случае, Гамильтониан имеет периодичность во времени $H(t) = H(t+T)$. Рассмотрим уравнение Шрёдингера с таким Гамильтонианом:

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

Решения, согласно теореме Флоке, будем искать в виде:

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\epsilon_\alpha t} |\phi_\alpha(t)\rangle, \quad |\phi(t)\rangle = |\phi(t+T)\rangle, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

По истечении каждого периода, состояние Флоке будет возвращаться в исходное. Однако в течение самого периода T состояние будет как-то эволюционировать и мы получим набег фазы за период $e^{-i\epsilon_\alpha T}$. Вещественное число ϵ_α называется квазиэнергией и определяет скорость с которой состояние будет эволюционировать во времени.

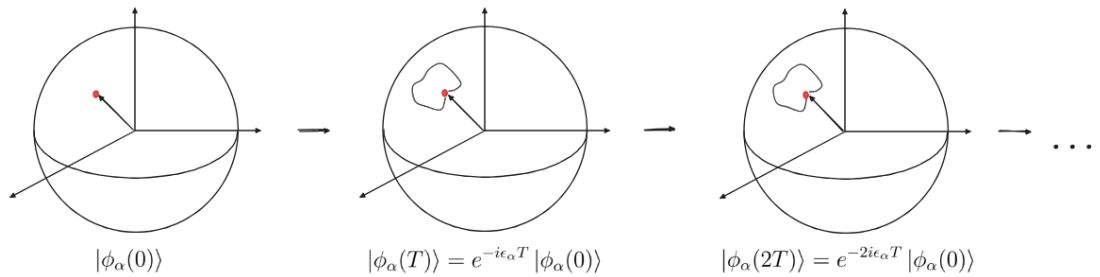


Рис. 15: Эволюция состояний Флоке

Тогда исходный гамильтониан принимает вид:

$$H_F |\phi_\alpha(t)\rangle = (H - i\partial_t) |\phi_\alpha(t)\rangle = \epsilon_\alpha |\phi_\alpha(t)\rangle \quad (58)$$

Значения действительных параметров ϵ_α по смыслу напоминаю энергию,

это есть квазиэнергии. Их особенность в том, что они не определены однозначно. Далее, Найдём среднюю энергию E_α для каждой из квазиэнергий:

$$E_\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \phi_\alpha(t) | H | \phi_\alpha(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \phi_\alpha(t) | H - i\partial_t + i\partial_t | \phi_\alpha(t) \rangle = \epsilon_\alpha + \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \phi_\alpha(t) | i\partial_t | \phi_\alpha(t) \rangle = \epsilon_\alpha + \gamma_\alpha \quad (59)$$

В полученном выражении γ - называется геометрической фазой (или фазой Берри). Разложим в ряд Фурье наши состояния Флоке:

$$|\phi_k\rangle = \langle k | \phi \rangle, \quad |\phi_\alpha(t)\rangle = \langle t | \phi_\alpha \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle t | k \rangle \langle k | \phi_\alpha \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-ik\Omega t} |\phi_{\alpha,k}\rangle$$

И подставим в полученное выражение для средней энергии:

$$E_\alpha = \epsilon_\alpha + \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \phi_\alpha(t) | i\partial_t | \phi_\alpha(t) \rangle = \epsilon_\alpha + \frac{1}{T} \int_0^T dt \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{\alpha,k} | e^{ik\Omega t} i\partial_t e^{-ik\Omega t} | \phi_{\alpha,k} \rangle = \epsilon_\alpha + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\Omega \langle \phi_{\alpha,k} | \phi_{\alpha,k} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\epsilon_\alpha + k\Omega) \langle \phi_k | \phi_k \rangle \quad (60)$$

Важно отметить, что квазиэнергия конкретного состояния определена не однозначно, а с точностью до $k\Omega$: $\epsilon_\alpha \rightarrow \epsilon_\alpha + k\Omega$. Это является следствием периодичности системы. Каждый раз, когда мы даём системе эволюционировать время T , её квазиэнергия изменяется на величину Ω .

16.3 Функция линейного отклика в периодическом потенциале

Ранее мы уже ввели функцию линейного отклика 15, однако для гамильтониана без возмущения она зависит только от разницы времён $t - t'$. В случае с времени периодическим потенциалом, она уже будет зависеть от каждого из моментов времени. Временная периодичность системы приводит к периодичности функции линейного отклика $\chi(t, t') = \chi(t + T, t' + T)$, а значит мы можем разложить её в ряд Фурье:

$$\chi(t, t') = \chi(t, t - \tau) = \sum_k \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega\tau} e^{-ik\Omega t} \chi_k(\omega), \quad (61)$$

а оператор Z в ω -представлении будет иметь вид:

$$Z_\omega = g \sum_k \chi_k(\omega - k\Omega) a_{\omega - k\Omega} \quad (62)$$

Здесь можно сделать некоторые упрощения, т.к. $\omega \gg \varkappa$, поэтому для $\Omega > \varkappa$ в первом приближении все $a_{\omega - k\Omega}$ с $k \neq 0$ можно занулить, поскольку они будут вне ширины линии резонатора. В таком приближении $Z_\omega = g\chi_0(\omega)a_\omega$. С учётом теории Флоке, как и ранее, запишем функцию линейного отклика в ω -представлении:

$$\chi_0(\omega) = \sum_{\alpha, \beta, k} \frac{(p_\alpha - p_\beta) |Z_{\alpha\beta, k}|^2}{\omega + \epsilon_\alpha - \epsilon_\beta - k\Omega + i\frac{\gamma}{2}} \quad (63)$$

Здесь, $Z_{\alpha\beta, k}$ - член Фурье разложения оператора Z в базисе Флоке-состояний: $Z_{\alpha\beta}(t) = \langle \phi_\alpha(t) | Z | \phi_\beta(t) \rangle$, таким образом:

$$Z_{\alpha\beta, k} = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{ik\Omega t} Z_{\alpha\beta}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{ik\Omega t} \langle \phi_\alpha(t) | Z | \phi_\beta(t) \rangle$$

Ранее, мы полагали, что населённости распределены по Больцману. Поскольку теперь ситуация не адиабатически-стационарная, в случае с временем зависимым гамильтонианом так сделать нельзя. При модуляции, система может попадать в резонанс, что сопровождается испусканием фотонов, в высокочастотном поле система может нагреваться, что также может привести к изменению населённостей. Будем искать населённости, задающие матрицу плотности как $\rho(t) = \sum_\alpha p_\alpha |\phi_\alpha(t)\rangle \langle \phi_\alpha(t)|$.

16.4 Населённость Флоке состояний

Для поиска населённости состояний Флоке используем подход из ([10], стр.287-290). Запишем кинетические уравнения:

$$\dot{p}_\alpha = \sum_\beta (w_{\beta \rightarrow \alpha} p_\beta - w_{\alpha \rightarrow \beta} p_\alpha) \quad (64)$$

Согласно золотому правилу Ферми, количество переходов в единицу времени в полосу состояний $d\nu_\beta$:

$$dw = 2\pi |F_{\alpha\beta}|^2 \delta(\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha - \Omega) d\nu_\beta$$

суммируя по всем возможным конечным состояниям, получим

$$w_{\beta \rightarrow \alpha} = 2\pi \sum_k |F_{\alpha\beta,k}|^2 (\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta - k\Omega) J(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta - k\Omega), \quad (65)$$

где $n(\omega) = (e^{\frac{\hbar\omega}{k_b T}} - 1)^{-1}$ - числа заполнения, а $J(\omega)$ - спектральная плотность среды. Матричный элемент перехода будет иметь вид:

$$F_{\alpha\beta,k} = \int_0^T dt e^{ik\Omega t} \langle \phi_\alpha(t) | F | \phi_\beta(t) \rangle$$

16.5 Условие резонанса

Коэффициент пропускания будет максимален, когда действительная часть знаменателя занулится:

$$\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta = \omega_c + k\Omega \quad (66)$$

Подставим сюда, полученное ранее выражение $\epsilon_\alpha = E_\alpha - \gamma_\alpha/T$ и получим $E_\beta - E_\alpha - \omega_c = k\Omega + \frac{\gamma_\beta - \gamma_\alpha}{T}$. Сделаем замену $T = 2\pi/\Omega$ и получим в итоге условие резонанса:

$$\Omega = \frac{E_\beta - E_\alpha - \omega_c}{k + \frac{\gamma_\beta - \gamma_\alpha}{2\pi}} \quad (67)$$

16.6 Расчёт состояний Флоке

16.6.1 Приближение вращающейся волны RWA

Рассмотрим Гамильтониан двухуровневой системы, на которую воздействуют постоянным магнитным полем вдоль оси квантования и внешним переменным магнитным полем с амплитудой B :

$$H = -\frac{1}{2}\omega_{sys}\sigma_z - \Omega_R\sigma_x \cos \omega t. \quad (68)$$

Сейчас мы хотим рассмотреть модуляцию частоты внешнего сигнала $\omega(t) = \omega_0 + d * \sin(\Omega t)$. Здесь Ω_R - частота Раби, d - глубина (амплитуда) модуляции, Ω - частота модуляции, ω_{sys} - частота перехода квантовой системы. Для удобства сразу перейдём от модуляции частоты к модуляции фазы:

$$\phi(t) = \int \omega(t)dt = \omega_0 t - \frac{d}{\Omega} \cos \Omega t + C.$$

Константу C сразу опустим, поскольку она не влияет на форму сигнала. Тогда гамильтониан с модуляцией фазы (частоты) внешнего поля принимает вид:

$$H = -\frac{1}{2}\omega_{sys}\sigma_z - \Omega_R\sigma_x \cos\left(\omega_0 t - \frac{d}{\Omega} \cos \Omega t\right).$$

Перейдём во вращающуюся систему отсчёта, с помощью оператора $U_1 = e^{\frac{i\omega_0 t}{2}\sigma_z}$ (Приложение В), чтобы выполнить RWA приближение.

$$H_{rot} = U^+ H U - iU^+ \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$H_{rot} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_{sys}) & -\Omega_R e^{-i\omega_0 t} \cos\left(\frac{d}{\Omega} \sin \Omega t - \omega_0 t\right) \\ -\Omega_R e^{i\omega_0 t} \cos\left(\frac{d}{\Omega} \sin \Omega t - \omega_0 t\right) & -\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega_{sys}) \end{pmatrix} \quad (69)$$

Теперь сделаем RWA приближение, то есть отбросим быстро осциллирующие члены с $e^{2i\omega_0 t}$, поскольку они усредняются до 0 за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Приближение применимо, если $\omega_{sys} - \omega \ll \omega_{sys}$, ω и $\omega_{sys} \gg \Omega_R$.

Кроме того, в качестве нулевого приближения будем рассматривать ре-

зонансный случай $\omega_0 \approx \omega_{sys}$. Тогда Гамильтониан принимает вид:

$$H_{rot-RWA} = -\frac{\Omega_R}{2}(\sigma_x \cos \varphi(t) + \sigma_y \sin \varphi(t)), \quad \varphi(t) = \frac{d}{\Omega} \cos \Omega t \quad (70)$$

Для удобства дальнейших вычислений выполним ещё один поворот системы координат с оператором $U_2 = e^{\frac{-i\varphi(t)}{2}\sigma_z}$ и получим гамильтониан $H_{rot-RWA-rot}$

$$H \equiv H_{rot-RWA-rot} = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \sin \Omega t & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{d}{2} \sin \Omega t \end{pmatrix} = -\frac{\Omega_R}{2}\sigma_x + \frac{d}{2}\sigma_z \sin \Omega t \quad (71)$$

Как было показано ранее, для поиска состояний Флоке подставим анзац $|\psi(t)\rangle = e^{-i\epsilon_\alpha t} |u(t)\rangle$ в УШ и получим 58. Для нашего гамильтониана уравнение 58 примет вид:

$$H_F(t) |u(t)\rangle = (H(t) - i\partial_t) |u(t)\rangle = \left(-\frac{\Omega_R}{2}\sigma_x + \frac{d}{2}\sigma_z \sin \Omega t - i\partial_t\right) |u(t)\rangle = \epsilon |u(t)\rangle \quad (72)$$

16.6.2 Высокочастотный случай $\Omega \gg \Omega_R$

Сначала найдём квазиэнергии (собственные значения Флоке Гамильтониана). Собственные функции будем искать в виде произведения периодической части и стационарного состояния:

$$|u(t)\rangle = \exp\left\{i\frac{d}{2\Omega}\sigma_z \cos \Omega t\right\} |\xi\rangle, \quad (73)$$

где $|\xi\rangle$ - собственные функции Гамильтониана в нулевой момент времени.

Подставляя в 72 получаем:

$$-\frac{\Omega_R}{2}\sigma_x e^{i\frac{d}{2\Omega}\sigma_z \cos \Omega t} |\xi\rangle = \epsilon e^{i\frac{d}{2\Omega}\sigma_z \cos \Omega t} |\xi\rangle$$

Домножая слева на $\langle u(t)|$, получаем:

$$-\frac{\Omega_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\frac{d}{\Omega} \cos \Omega t} \\ e^{i\frac{d}{\Omega} \cos \Omega t} & 0 \end{pmatrix} = \epsilon \quad (74)$$

Разложим экспоненту в ряд $e^{i\frac{d}{\Omega} \cos \Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\frac{d}{\Omega}) e^{in\Omega t}$ и возьмём лишь нулевой член разложения, что эквивалентно усреднению выражения по периоду $T = \frac{2\pi}{\Omega}$. В итоге, для высокочастотного случая $\Omega \gg \Omega_R$ имеем формулу для квазиэнергий:

$$\epsilon = \pm J_0(\frac{d}{\Omega}), \quad |\xi\rangle = |\pm\rangle. \quad (75)$$

Для валидации полученного выражения сравним квазиэнергии, найденные с помощью формулы (75) и найденные численно из исходного Гамильтониана (68). На графике (Рис. 16) построена зависимость квазиэнергий от глубины модуляции ($\omega_0 = \omega_{sys} = 2.8 GHz$, $\Omega_R = 10 kHz$, $\Omega = 100 kHz$). Из него видно, что аналитическое и точное решения совпадают.

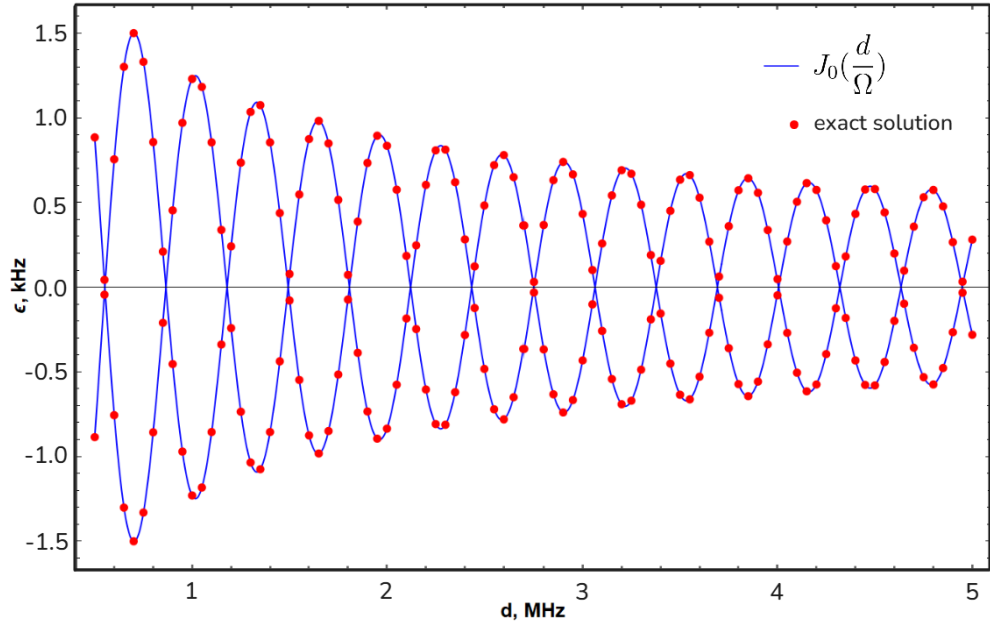


Рис. 16: Квазиэнергии в зависимости от глубины модуляции

16.6.3 Низкочастотный случай $\Omega \ll \Omega_R$

$$H = -\frac{\Omega_R}{2}\sigma_x + \frac{d}{2}\sin(\Omega t)\sigma_z.$$

$$(H - i\partial_t) |u(t)\rangle = \epsilon |u(t)\rangle \rightarrow (H - \epsilon) |u(t)\rangle = i\partial_t |u(t)\rangle$$

Представим $|u(t)\rangle$ в виде Фурье-ряда $|u(t)\rangle = \sum_k e^{-ik\Omega t} |u_k\rangle$. Тогда:

$$i\partial_t \sum_k e^{-ik\Omega t} |u_k\rangle = \left(-\frac{\Omega_R}{2}\sigma_x + \frac{d}{2}\sin(\Omega t)\sigma_z - \epsilon\right) \sum_k e^{-ik\Omega t} |u_k\rangle$$

$$\sum_k k\Omega e^{-ik\Omega t} |u_k\rangle = \left(-\frac{\Omega_R}{2}\sigma_x - \epsilon + \frac{d}{4i}(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t})\sigma_z\right) \sum_k e^{-ik\Omega t} |u_k\rangle$$

$$\sum_k k\Omega e^{-ik\Omega t} |u_k\rangle = \left(-\frac{\Omega_R}{2}\sigma_x - \epsilon\right) \sum_k e^{-ik\Omega t} |u_k\rangle + \frac{d\sigma_z}{4i} \left(\sum_k e^{-i(k-1)\Omega t} |u_k\rangle - \sum_k e^{-i(k+1)\Omega t} |u_k\rangle\right)$$

Умножим на $e^{im\Omega t}$ и проинтегрируем от 0 до T, тк $\int_0^T e^{i(k-m)\Omega t} dt = T\delta_{k,m}$:

$$m\Omega |u_m\rangle = \left(-\frac{\Omega_R}{2}\sigma_x - \epsilon\right) |u_m\rangle + \frac{d\sigma_z}{4i} (|u_{m+1}\rangle - |u_{m-1}\rangle)$$

В итоге получим итерационное уравнение:

$$(\epsilon + m\Omega + \frac{\Omega_R}{2}\sigma_x) |u_m\rangle = \frac{d\sigma_z}{4i} (|u_{m+1}\rangle - |u_{m-1}\rangle) \quad (76)$$

А Исключение не резонансного слагаемого

Рассмотрим матрицу коэффициентов M на уравнение для моды резонатора и найдём ей обратную матрицу M^{-1} :

$$M = \begin{pmatrix} A(\omega) & g^2\chi(\omega) \\ g^2\chi^*(-\omega) & A^*(-\omega) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A(\omega) = \omega_0 - \omega + g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}.$$

при нахождении обратной матрицы, воспользуемся полученными неравенствами:

$$\varkappa, |\omega - \omega_0|, g^2 \text{Re}\chi(\omega) \ll \omega_0$$

Для начала разложим $A(\omega)$ и $A^*(-\omega)$:

$$A(\omega) = \omega_0 - \omega + g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2} \approx g^2\chi_\omega - i\frac{\varkappa}{2}$$

$$A^*(-\omega) = \omega_0 + \omega + g^2\chi_{-\omega}^* + i\frac{\varkappa}{2} \approx 2\omega_0 + g^2\chi_{-\omega}^* + i\frac{\varkappa}{2}$$

Тогда определитель имеет вид:

$$\begin{aligned} \det(M) &= A(\omega)A^*(-\omega) - g^4|\chi_\omega|^2 \approx (g^2\chi_\omega - i\frac{\kappa}{2})(2\omega_0 + g^2\chi_{-\omega}^* + i\frac{\kappa}{2}) - g^4|\chi_\omega|^2 \approx \\ &\approx 2\omega_0(g^2\chi_\omega - i\frac{\kappa}{2}) \end{aligned}$$

Тогда обратная матрица M^{-1} имеет вид:

$$M^{-1} \approx \frac{1}{2\omega_0(g^2\chi_\omega - i\frac{\kappa}{2})} \begin{pmatrix} 2\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В Переход во вращающуюся систему отсчёта

Запишем УШ для исходной ВФ:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

Поворот задаётся $U(t)$ - унитарным оператором : $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi'(t)\rangle$. Подставим его в исходное УШ:

$$i\frac{\partial}{\partial t}(U(t)|\psi'(t)\rangle) = i(\frac{\partial U(t)}{\partial t}|\psi'(t)\rangle + U(t)\frac{\partial |\psi'(t)\rangle}{\partial t}) = H(t)U(t)|\psi'(t)\rangle$$

Домножаем слева на U^+ и учтём унитарность $UU^+ = I$:

$$iU^+\frac{\partial U(t)}{\partial t}|\psi'(t)\rangle + i\frac{\partial |\psi'(t)\rangle}{\partial t} = U^+(t)H(t)U(t)|\psi'(t)\rangle$$

В итоге получаем УШ для волновой функции $|\psi'(t)\rangle$ с Гамильтонианом H_{rot} в повернутой системе координат:

$$H_{rot}(t) = U(t)^+H(t)U(t) - iU^+(t)\frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (77)$$

С Коррекция ошибки методом PDH

При модуляции частоты внешнего поля, частота имеет вид $\omega(t) = \omega + d \sin \Omega t$. Для удобства аналитических вычислений перейдём от рассмотрения частоты к фазе $\phi(t) = \omega t - \frac{d}{\Omega} \cos \Omega t = \omega t - \beta \cos \Omega t$. При таком значении фа-

зы внешнее модулированное поле имеет вид: $E_{in} = E_0 e^{i\omega t - \beta \cos \Omega t}$. Используя разложение экспоненты по функциям Бесселя $e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta}$, запишем падающее поле:

$$\begin{aligned} E_{in} &= E_0 e^{i\omega t} e^{-i\beta \cos \Omega t} = E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\beta) e^{in\Omega t} \\ &= E_0 (J_0(\beta) e^{i\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(\beta) e^{i(\omega+n\Omega)t} - \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n} J_{-n}(\beta) e^{i(\omega-n\Omega)t}) \quad (78) \end{aligned}$$

Используем свойство функций Бесселя $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$, а также, оставим лишь слагаемые для первых ($n=1$) боковых полос и получаем:

$$E_{in} = E_0 (J_0(\beta) e^{i\omega t} + i J_1(\beta) e^{i(\omega+\Omega)t} - i J_1(\beta) e^{i(\omega-\Omega)t})$$

Модулированное поле в нашем приближении будет состоять из 3 компонент: основная и две боковых линии. Мощность в несущей и боковых полосах можно выразить через начальную мощность $P_c = J_0(\beta)^2 P_0$, $P_s = J_1(\beta)^2 P_0$. Глубина модуляции мала $\beta \ll 1$, поэтому будем считать, что $P_0 = P_c + 2P_s$. После падения на резонатор, каждая полоса отражается со своим коэффициентом отражения $r(\omega)$:

$$E_{ref} = E_0 r(\omega) J_0(\beta) e^{i\omega t} + i r(\omega + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega+\Omega)t} - i r(\omega - \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega-\Omega)t}$$

Теперь получим мощность отраженного сигнала $P_{ref} = |E_{ref}|^2$:

$$\begin{aligned} P_{ref} &= P_c |r(\omega)|^2 + P_s (|r(\omega + \Omega)|^2 + |r(\omega - \Omega)|^2) \\ &+ 2\sqrt{P_c P_s} (Re[r(\omega) r^*(\omega + \Omega) - r^*(\omega) r(\omega - \Omega)] \cos \Omega t + Im[...] \sin \Omega t) + (2\Omega \dots) \quad (79) \end{aligned}$$

Сигнал ошибки в методе PDH формируется из членов, осциллирующих с частотой Ω , что соответствует слагаемым $2\sqrt{P_c P_s}(\dots)$. Рассмотрим выражение $r(\omega) r^*(\omega + \Omega) - r^*(\omega) r(\omega - \Omega)$ В случае малых частот ($\Omega \ll \Delta\omega_{cav}$)

$$r(\omega + \Omega) \approx r(\omega) + \frac{dr}{d\omega}\Omega + (1/2)\frac{dr^2}{d\omega^2}\Omega^2 + \dots$$

$$r(\omega - \Omega) \approx r(\omega) - \frac{dr}{d\omega}\Omega + (1/2)\frac{dr^2}{d\omega^2}\Omega^2 - \dots$$

$$\begin{aligned} r(\omega)r^*(\omega + \Omega) - r^*(\omega)r(\omega - \Omega) &\approx r(\omega)[r^*(\omega) + \frac{dr^*}{d\omega}\Omega] - r^*(\omega)[r(\omega) - \frac{dr}{d\omega}\Omega] \\ &= r(\omega)r^*(\omega) + r(\omega)\frac{dr^*}{d\omega}\Omega - r^*(\omega)r(\omega) + r^*(\omega)\frac{dr}{d\omega}\Omega = \Omega[r(\omega)\frac{dr^*}{d\omega} + r^*(\omega)\frac{dr}{d\omega}] = \Omega\frac{d(rr^*)}{d\omega} \end{aligned}$$

Таким образом, выражение $r(\omega)r^*(\omega + \Omega) - r^*(\omega)r(\omega - \Omega)$ становится действительным и вклад в сигнал ошибки даёт только член с $\cos \Omega t$:

$$\epsilon = 2\sqrt{P_c P_s}\Omega \frac{d|r|^2}{d\omega} \cos \Omega t \quad (81)$$

При $\beta \ll 1$ $J_0(\beta) \approx 1 - \frac{\beta^2}{4}$, $J_1(\beta) \approx \frac{\beta}{2}$ Тогда мощности будут

$$P_c \approx P_0(1 - \frac{\beta^2}{4})^2 \approx P_0$$

$$P_s \approx P_0(\frac{\beta}{2})^2 \approx P_0\frac{\beta^2}{4}$$

$$\sqrt{P_c P_s} = P_0\frac{\beta}{2}$$

$$\epsilon = P_0\beta\Omega \frac{d|r|^2}{d\omega} \cos \Omega t = P_0 * d * \frac{d|r|^2}{d\omega} \cos \Omega t \quad (82)$$

Список литературы

- [1] G. Balasubramanian, P. Neumann, D. J. Twitchen, and M. L. Markham, “Ultralong spin coherence time in isotopically engineered diamond,” *Nature materials*, vol. 8, may 2009.
- [2] M. J. Collett and C. W. Gardiner, “Squeezing of intracavity and traveling-wave light fields produced in parametric amplification,” *Physical Review A*, vol. 30, sep 1984.
- [3] S. Kohler, “Dispersive readout: Universal theory beyond the rotating-wave approximation,” *Physical Review A*, vol. 98, aug 2018.
- [4] H. Z. Shen, Q. Wang, and X. X. Yi, “Dispersive readout with non-markovian environments,” *Physical Review A*, feb 2022.
- [5] A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. D. Liberato, S. Savasta, and F. Nori, “Ultrastrong coupling between light and matter,” *Nat Rev Phys*, vol. 1, jan 2019.
- [6] R. Wilcox, E. Eisenach, J. Barry, M. Steinecker, M. O’Keeffe, D. Englund, and D. Braje, “Thermally-polarized solid-state spin sensor,” *Physical Review A*, vol. 17, no. 4, 2021.
- [7] J. Ebel, T. Joas, M. Schalk, P. Weinbrenner, A. Angerer, J. Majer, and F. Reinhard, “Dispersive readout of room-temperature ensemble spin sensors,” *Quantum Science and Technology*, vol. 6, jun 2021.
- [8] E. R. Eisenach, J. F. Barry, and M. F. O’Keeffe, “Cavity-enhanced microwave readout of a solid-state spin sensor,” *Nat Commun*, vol. 12, mar 2021.
- [9] M. R. Dmitry Budker, “Optical magnetometry,” *Nature Physics*, vol. 3, dec 2006.
- [10] M. Grifoni and P. Hanggi, “Driven quantum tunneling,” *Physics Reports*, vol. 304, 1998.